پاسخنامه جزوه تست و جمع‌بندی

نیمسال اوّل - دی ماه ۱۴۰۴

دوازدهم رشته ریاضی

- درس حسابان: شامل ۳۶۰ تست
- درس هندسه: شامل ۲۳۵ تست
- درس گسسته: شامل ۲۷۵ تست
- درس فیزیک: شامل ۵۳۰ تست
- درس شیمی: شامل ۴۰۰ تست

به همراه پاسخنامه تشریحی

نام و نام خانوادگی

خیلی سبز!
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی
قلم‌چی
مارا تون

فـــهـــرست

حسابان	تاریخ	بودجه بندی	تعداد	صفحه سوال	صفحه پاسخ
قلمچی	۲۰ مهر ۴۰۳	فصل ۱	۲۰	۱	۱
	۴ آبان ۴۰۳	فصل ۱	۲۰	۵	۴
	۱۸ آبان ۴۰۳	فصل ۱+۲	۱۰	۹	۸
	۲ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۱۰	۱۲	۱۰
	۱۶ آذر ۴۰۳	فصل ۱+۲+۳	۲۰	۱۴	۱۲
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۳	۱۰	۱۸	۱۸
	۱۸ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۲۰	۲۰
	۲ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۲۳	۲۲
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱+۲	۱۰	۲۵	۲۴
	۳۰ آبان ۴۰۴	فصل ۲	۱۰	۲۷	۲۷
	۱۴ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲+۳	۱۰	۲۸	۳۰
خیلی سبز	۲۵ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۳۰	۳۳
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۱	۳۲	۴۴
	۷ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۱۱	۳۴	۵۵
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۲+۳	۱۳	۳۶	۶۹

حسابان	تاریخ	بودجه بندی	تعداد	صفحه سوال	صفحه پاسخ
گزینه دو	۲۵ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۳۸	۸۵
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۴۰	۹۱
	۷ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۹	۴۲	۹۷
	۲۸ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۸	۴۴	۱۰۲
ماراتون	۱۷ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۲۰	۴۵	۱۰۵
	۱ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۲۰	۴۸	۱۱۴
	۱۵ آبان ۴۰۴	فصل ۱+۲	۲۰	۵۱	۱۲۵
	۲۹ آبان ۴۰۴	فصل ۲	۲۰	۵۴	۱۳۵
	۱۳ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲+۳	۲۰	۵۶	۱۴۵
ماز	۱۷ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۱	۵۹	۱۵۵
	۱ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۴	۶۱	۱۶۴
	۱۵ آبان ۴۰۴	فصل ۲	۸	۶۴	۱۷۵
	۲۹ آبان ۴۰۴	فصل ۲	۱۰	۶۶	۱۸۳
	۱۳ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲+۳	۱۵	۶۸	۱۹۳
	۲۹ آذر ۴۰۳	فصل ۳	۱۰	۷۱	۲۰۸

هندسه	تاریخ	بودجه بندی	تعداد	صفحه سوال	صفحه پاسخ
قلمچی	۲۰ مهر ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۷۳	۲۱۳
	۴ آبان ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۷۵	۲۱۵
	۱۸ آبان ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۷۷	۲۱۷
	۲ آذر ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۷۹	۲۲۰
	۱۶ آذر ۴۰۳	فصل ۱+۲	۱۰	۸۱	۲۲۲
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۱۰	۸۴	۲۲۴
	۱۸ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۸۶	۲۲۶
	۲ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۸۸	۲۲۸
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۸۹	۲۳۰
	۳۰ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۹۱	۲۳۳
	۱۴ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۱۰	۹۳	۲۳۵
خیلی سبز	۲۵ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۶	۹۴	۲۳۸
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۶	۹۵	۲۴۲
	۷ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۷	۹۶	۲۴۷
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۷	۹۷	۲۵۳

هندسه	تاریخ	بودجه بندی	تعداد	صفحه سوال	صفحه پاسخ
گزینه دو	۲۵ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۵	۹۸	۲۶۰
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۵	۹۹	۲۶۳
	۷ آذر ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۰۰	۲۶۶
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۱+۲	۵	۱۰۱	۲۶۹
ماراتون	۱۷ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۱۰۲	۲۷۲
	۱ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۱۰۴	۲۸۱
	۱۵ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۱۰۷	۲۸۹
	۲۹ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۱۰۹	۲۹۵
	۱۳ آذر ۴۰۴	فصل ۲	۱۰	۱۱۰	۲۹۸
ماز	۱۷ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۱۲	۳۰۲
	۱ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۱۳	۳۰۷
	۱۵ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۱۴	۳۱۱
	۲۹ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۱۵	۳۱۶
	۱۳ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۵	۱۱۶	۳۲۱
	۲۹ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۵	۱۱۷	۳۲۷

گسسته	تاریخ	بودجه بندی	تعداد	صفحه سوال	صفحه پاسخ
قلمچی	۲۰ مهر ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۱۱۸	۳۳۰
	۴ آبان ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۱۲۰	۳۳۲
	۱۸ آبان ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۱۲۲	۳۳۴
	۲ آذر ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۱۲۴	۳۳۷
	۱۶ آذر ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۱۲۶	۳۳۹
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۱۰	۱۲۸	۳۴۱
	۱۸ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۱۳۰	۳۴۳
	۲ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۱۳۱	۳۴۵
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۱۳۳	۳۴۷
	۳۰ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۱۳۴	۳۴۹
	۱۴ آذر ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۱۳۵	۳۵۲
خیلی سبز	۲۵ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۳۶	۳۵۴
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۳۷	۳۵۹
	۷ آذر ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۱۳۸	۳۶۴
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۱+۲	۱۰	۱۳۹	۳۷۴

گسسته	تاریخ	بودجه بندی	تعداد	صفحه سوال	صفحه پاسخ
گزینه دو	۲۵ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۴۰	۳۸۴
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۴۱	۳۸۶
	۷ آذر ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۱۴۲	۳۸۹
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۱۴۳	۳۹۴
ماراتون	۱۷ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۱۴۴	۳۹۸
	۱ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۱۴۶	۴۰۷
	۱۵ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۱۴۸	۴۱۴
	۲۹ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۱۵۰	۴۲۳
	۱۳ آذر ۴۰۴	فصل ۲	۱۵	۱۵۲	۴۳۲
ماز	۱۷ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۵۴	۴۳۹
	۱ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۵۵	۴۴۳
	۱۵ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۵۶	۴۴۸
	۲۹ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۵۷	۴۵۵
	۱۳ آذر ۴۰۴	فصل ۱	۵	۱۵۸	۴۶۱
	۲۹ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۵	۱۵۹	۴۶۹

فیزیک	تاریخ	بودجه بندی	تعداد	صفحه سوال	صفحه پاسخ
قلمچی	۲۰ مهر ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۱۶۰	۴۷۲
	۴ آبان ۴۰۳	فصل ۱	۲۰	۱۶۳	۴۷۴
	۱۸ آبان ۴۰۳	فصل ۱	۲۰	۱۶۹	۴۷۹
	۲ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۲۰	۱۷۳	۴۸۶
	۱۶ آذر ۴۰۳	فصل ۱+۲	۲۰	۱۷۸	۴۹۱
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۲+۳	۲۰	۱۸۱	۴۹۵
	۱۸ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۲۰	۱۸۴	۵۰۰
	۲ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۲۰	۱۹۰	۵۰۳
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۲۰	۱۹۵	۵۰۷
	۳۰ آبان ۴۰۴	فصل ۲	۲۰	۲۰۰	۵۱۲
	۱۴ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۲۰	۲۰۵	۵۱۷
خیلی سبز	۲۵ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۲۰	۲۱۱	۵۲۲
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۲۲	۲۱۵	۵۴۰
	۷ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۲۰	۲۲۰	۵۶۲
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۲۰	۲۲۵	۵۸۵

فیزیک	تاریخ	بودجه بندی	تعداد	صفحه سوال	صفحه پاسخ
گزینه دو	۲۵ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۲۱	۲۲۹	۶۰۷
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۲۰	۲۳۴	۶۱۵
	۷ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۲۰	۲۳۸	۶۲۲
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۲۲	۲۴۲	۶۳۰
ماراتون	۱۷ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۲۴۶	۶۳۴
	۱ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۲۴۸	۶۴۲
	۱۵ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۲۵۱	۶۵۴
	۲۹ آبان ۴۰۴	فصل ۲	۱۵	۲۵۴	۶۶۷
	۱۳ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۲۰	۲۵۸	۶۷۸
ماز	۱۷ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۲۶۲	۶۹۶
	۱ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۲۶۷	۷۰۹
	۱۵ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۲۷۱	۷۲۴
	۲۹ آبان ۴۰۴	فصل ۱+۲	۱۵	۲۷۵	۷۴۴
	۱۳ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۱۵	۲۸۰	۷۵۹
	۲۹ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۱۳	۲۸۴	۷۷۳

شیمی	تاریخ	بودجه بندی	تعداد	صفحه سوال	صفحه پاسخ
قلمچی	۲۰ مهر ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۲۸۷	۷۸۳
	۴ آبان ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۲۹۰	۷۸۶
	۱۸ آبان ۴۰۳	فصل ۱	۱۰	۲۹۳	۷۸۸
	۲ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۱۰	۲۹۶	۷۹۱
	۱۶ آذر ۴۰۳	فصل ۱+۲	۱۰	۳۰۰	۷۹۳
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۱۰	۳۰۲	۷۹۵
	۱۸ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۳۰۴	۷۹۸
	۲ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۳۰۷	۸۰۰
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۳۱۰	۸۰۲
	۳۰ آبان ۴۰۴	فصل ۲	۱۰	۳۱۳	۸۰۵
	۱۴ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۱۰	۳۱۷	۸۰۷
خیلی سبز	۲۵ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۹	۳۲۰	۸۱۰
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۷	۳۲۵	۸۲۷
	۷ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۱۸	۳۲۹	۸۴۷
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۱۸	۳۳۳	۸۶۶

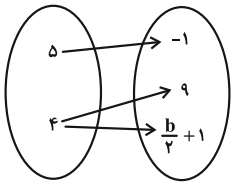
شیمی	تاریخ	بودجه بندی	تعداد	صفحه سوال	صفحه پاسخ
گزینه دو	۲۵ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۲۱	۳۳۸	۸۸۶
	۱۶ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۲۰	۳۴۱	۸۹۲
	۷ آذر ۴۰۴	فصل ۱	۲۰	۳۴۴	۸۹۸
	۳۰ آذر ۴۰۳	فصل ۱+۲	۲۲	۳۴۷	۹۰۴
ماراتون	۱۷ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۳۵۰	۹۰۷
	۱ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۰	۳۵۳	۹۲۰
	۱۵ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۳۵۵	۹۳۱
	۲۹ آبان ۴۰۴	فصل ۲	۱۰	۳۵۸	۹۴۴
	۱۳ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۱۵	۳۶۰	۹۵۴
ماز	۱۷ مهر ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۳۶۴	۹۷۱
	۱ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۳۶۷	۹۸۸
	۱۵ آبان ۴۰۴	فصل ۱	۱۵	۳۷۰	۱۰۰۵
	۲۹ آبان ۴۰۴	فصل ۱+۲	۱۵	۳۷۳	۱۰۲۰
	۱۳ آذر ۴۰۴	فصل ۱+۲	۱۵	۳۷۶	۱۰۳۵
	۲۹ آذر ۴۰۳	فصل ۲	۱۵	۳۷۹	۱۰۵۰

۱- **گزینهٔ «۲»** *(علی آزاد)*

برای این‌که رابطه تابع باشد، لازم است $۲a-۱$ و ۹ برابر باشند:

$$۲a-۱=۹\Rightarrow a=۵$$

در این صورت رابطه به صورت زیر خواهد بود:



که برای تابع بودن آن لازم است ۹ و $\frac{b}{۲}+۱$ برابر باشند:

$$\frac{b}{۲}+۱=۹\Rightarrow b=۱۶$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(حامد قاسمیان)*

تنها تابع خطی که دامنه و برد آن به ترتیب نامتناهی و متناهی هستند، تابع ثابت است. در این سؤال تابع ثابت $f(x)=-۲$ را داریم که مقدار آن به ازای همه مقادیر x برابر ۲- است.

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳ و ۱۱۰)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

دامنهٔ تابع f مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۱\}$ است، پس دامنهٔ تابع g هم باید همین باشد. این یعنی مخرج $g(x)$ ریشهٔ مضاعف دارد:

$$x^۲-bx+۱=(x-۱)^۲=x^۲-۲x+۱\Rightarrow b=۲$$

حال ضابطهٔ تابع g هم باید $\frac{۱}{x-۱}$ باشد:

$$\Rightarrow\frac{x-a}{(x-۱)^۲}=\frac{۱}{x-۱}\Rightarrow x-a=x-۱\Rightarrow a=۱$$

در نتیجه $a+b=۳$ است.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۴۱ تا ۴۵)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(جوانبخش نیکنام)*

ابتدا ضابطه را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=m\sqrt{(x-۱)^۲}+n\sqrt{(x+۲)^۲}+۳x$$
$$=m|x-۱|+n|x+۲|+۳x$$
$$\xrightarrow{-۲\le x\le ۱}f(x)=m(-x+۱)+n(x+۲)+۳x$$
$$=(-m+n+۳)x+m+۲n$$

ضابطه تابع همانی در دامنه‌اش $f(x)=x$ است، پس داریم:

$$\begin{cases}-m+n+۳=۱\\ m+۲n=۰\end{cases}\Rightarrow n=-\frac{۲}{۳},\ m=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow f(m+n)=f(\frac{۲}{۳})=\frac{۲}{۳}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحهٔ ۱۱۰)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(بهمن امیدی)*

دامنه: $۱-x\ge ۰\Rightarrow x\le ۱$

برد: $\sqrt{۱-x}\ge ۰\Rightarrow \sqrt{۱-x}-۲\ge -۲$

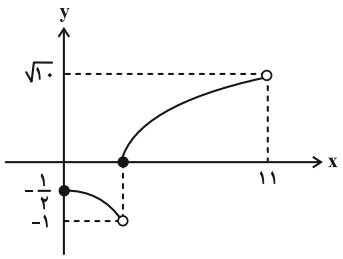
پس دامنه بازهٔ $(-\infty\ ,\ ۱]$ و برد بازهٔ $[-۲\ ,\ +\infty)$ است که اشتراک آن‌ها بازهٔ $[-۲\ ,\ ۱]$ است و داریم:

$$a=-۲\ ,\ b=۱\Rightarrow b-a=۳$$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۸)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(حامد معنوی)*

نمودار تابع را رسم می‌کنیم تا براساس برد آن یک مجموعه به عنوان همدامنه انتخاب کنیم:



برد تابع مجموعهٔ $(-۱\ ,\ -\frac{۱}{۲}]\cup[۰\ ,\ \sqrt{۱۰})$ است و از آنجا که برد همواره زیرمجموعهٔ همدامنه است، در بین گزینه‌ها فقط بازهٔ $[-۲\ ,\ \sqrt{۱۰})$ قابل قبول است.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۳۹، ۴۵ و ۴۶)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(بهرام حلاج)*

با توجه به ویژگی‌های جزء صحیح، معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$[۲x]+([۲x]-۱)+([۲x]-۲)=۳[۲x]-۳=۶$$

پس داریم: $[۲x]=۳\Rightarrow ۳\le ۲x<۴\Rightarrow \frac{۳}{۲}\le x<۲$

در نتیجه $a=\frac{۳}{۲}$ ، $b=۲$ و $a+b=\frac{۷}{۲}$ است.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

$$\log_{\frac{۵}{۲۲}}(۲^۲\times ۲^{\frac{۴}{۵}})=\log_{\frac{۵}{۲۲}}۲^{\frac{۱۴}{۵}}=\frac{\frac{۱۴}{۵}}{\frac{۵}{۲}}\log_۲ ۲=\frac{۲۸}{۲۵}=۱/۱۲$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحهٔ ۸۶)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(سجاد داوطلب)*

ابتدا $\log_{۷۵}۱۵$ را ساده می‌نویسیم:

$$\log_{۷۵}۱۵=\frac{\log_{۳}۱۵}{\log_{۳}۷۵}=\frac{۱+\log_{۳}۵}{۱+۲\log_{۳}۵} \qquad (*)$$

پس اگر از تساوی $a=\log_{۴۵}۷۵$ عبارت $\log_{۳}۵$ را برحسب a بنویسیم، مسئله حل می‌شود:

$$a=\frac{\log_{۳}۷۵}{\log_{۳}۴۵}=\frac{۱+۲\log_{۳}۵}{۲+\log_{۳}۵}\Rightarrow \log_{۳}۵=\frac{-۲a+۱}{a-۲}$$

و طبق رابطهٔ (*) داریم:

$$\log_{۷۵}۱۵=\frac{۱+(\frac{-۲a+۱}{a-۲})}{۱+۲(\frac{-۲a+۱}{a-۲})}=\frac{-a-۱}{-۳a}=\frac{a+۱}{۳a}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحهٔ ۸۶)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(میلاد منصوری)*

بـرد تـابع بـازهٔ $(-۴,+\infty)$ اسـت و از آنجـا کـه بـرد بایـد بـازهٔ $(-b,+\infty)$ باشد، نتیجه می‌گیریم: $-b=-۴\Rightarrow b=۴$

از طرفی طول از مبدأ تابع $x=-۲$ است.

$$\xrightarrow{f(-۲)=۰} ۲^{-۲a+۱}-۴=۰\Rightarrow ۲^{-۲a+۱}=۴=۲^{۲}$$

$$\Rightarrow -۲a+۱=۲\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ab=-۲$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۷۵ تا ۷۹)

۱۱- **گزینهٔ «۴»** *(دانیال آرکیش)*

به ترتیب تبدیلات را روی تابع f اعمال می‌کنیم:

$$y=f(x)=\xrightarrow[x\to\frac{x}{۳}]{\text{ضرب طول نقاط در }۳} y=f(\frac{x}{۳})$$

$$\xrightarrow[y\to۲y]{\text{ضرب عرض نقاط در }\frac{۱}{۲}} ۲y=f(\frac{x}{۳})\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}f(\frac{x}{۳})$$

$$\xrightarrow[x\to(-x)]{\text{قرینه نسبت به محور y ها}} y=\frac{۱}{۲}f(-\frac{x}{۳})$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

۱۲- **گزینهٔ «۱»** *(ستار زواری)*

باید تابع حاصل از تبدیل مورد نظر در هـر گزینـه را پیـدا کنـیم. مـا گزینـهٔ صحیح را شرح می‌دهیم، سایر گزینه‌ها تمرین خودتان باشد.

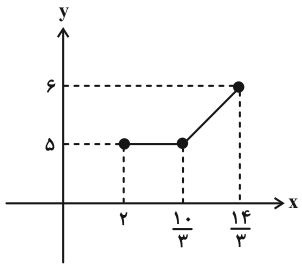
$$y=f(x)\xrightarrow[x\to۲x]{\text{ضرب طول نقاط در }\frac{۱}{۲}} y=f(۲x)$$

$$\xrightarrow[x\to x+\frac{۱}{۲}]{\text{۱/۲ واحد به چپ}} y=f\left(۲(x+\frac{۱}{۲})\right)=f(۲x+۱)$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** *(ممدرهاری بلالی)*

ابتدا طول نقاط روی نمودار تابع $y=f(۳-\frac{۲x}{۳})$ را بر $-\frac{۹}{۴}$ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۳+\frac{۳x}{۲})$ به دست آید، سپس x را به $x-۲$ تبـدیل کنیم، یعنی نمودار را ۲ واحد به راست انتقال دهیم تا نمودار تابع $y=f(\frac{۳x}{۲})$ به دست آید. دست آخر کافی است عرض نقاط را نصف کنیم.



(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(بهمن امیدی)*

تبدیلات گفته شده را روی نمودار تابع $y=|۲x+۱|-۱$ اعمال می‌کنیم:

$$y=|۲x+۱|-۱\xrightarrow[x\to x-۲]{\text{۲ واحد به راست}}$$

$$y=|۲(x-۲)+۱|-۱=|۲x-۳|-۱\xrightarrow[y\to -y]{\text{قرینه نسبت به محور x ها}}$$

$$y=-|۲x-۳|+۱\xrightarrow[y\to y-۲]{\text{۲ واحد به بالا}} y-۲=-|۲x-۳|+۱$$

$$\Rightarrow y=-|۲x-۳|+۳$$

ضابطه به دست آمده را مـی‌تـوان بـه صـورت $y=-۲|x-\frac{۳}{۲}|+۳$ نیـز نوشت. این یعنی: $a=-۲\ ,\ b=\frac{۳}{۲}\ ,\ c=۳\Rightarrow abc=-۹$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(جهانبخش نیکنام)*

تابع نهایی را g می‌نامیم و ضابطهٔ آن را به دست می‌آوریم:

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to ۲x]{\text{طول نقاط، نصف}} y=f(۲x)$$

$$\xrightarrow[x\to x+\frac{۱}{۲}]{\text{۱/۲ واحد به چپ}} y=f\left(۲(x+\frac{۱}{۲})\right)=y\Rightarrow f(۲x+۱)$$

$$\xrightarrow[y\to -y]{\text{قرینه نسبت به‌محور x ها}} g(x)=-f(2x+1)$$

$$\xrightarrow{f(x)=(x-1)^2-1} g(x)=-\Big((2x+1-1)^2-1\Big)=-4x^2+1$$

حال باید نمودار تابع $g(x)=-4x^2+1$ را k واحد در راستای قائم انتقال دهیم تا نمودار تابع f را فقط در یک نقطه قطع کند، پس یعنی معادله $g(x)+k=f(x)$ باید یک جواب داشته باشد:

$$-4x^2+1+k=x^2-2x \Rightarrow 5x^2-2x-1-k=0$$

باید Δ ی عبارت صفر باشد:

$$\Rightarrow \Delta=4-20(-1-k)=24+20k=0 \Rightarrow k=-\frac{24}{20}=-\frac{6}{5}$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد منصوری)*

در ابتدا عبارت $\log_x(5x-6)$ باید قابل تعریف باشد:

$$\left.\begin{array}{l} 5x-6>0 \Rightarrow x>\frac{6}{5} \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x>\frac{6}{5} \qquad (1)$$

و همچنین عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد:

$$\Rightarrow \log_x(5x-6)\geq 2 \xrightarrow{x>1} 5x-6\geq x^2$$

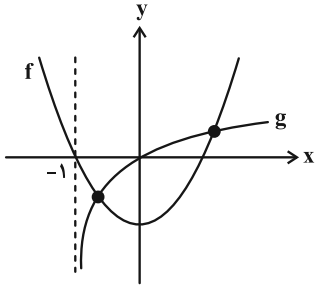
$$\Rightarrow x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\leq 0 \Rightarrow 2\leq x\leq 3 \qquad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲)، دامنهٔ تابع بازهٔ $[2\ ,\ 3]$ به دست می‌آید که شامل ۲ عدد طبیعی است.

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۷)

۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

تعداد جواب‌های معادلهٔ $x^2-1=\log(x+1)$ را باید به دست آوریم. به همین خاطر، نمودار دو تابع $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\log(x+1)$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل، مشخص است که نمودارهای دو تابع f و g در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. پس معادله صورت سؤال ۲ جواب دارد.

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۹)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(بهمن امیری)*

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\log_4(x^2+1)=\log_{\frac{1}{4^2}}(x+2)-\log_4 2$$

$$\Rightarrow \log_4(x^2+1)=\log_4(x+2)^2-\log_4^2=\log_4\frac{(x+2)^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2+1=\frac{(x+2)^2}{2} \Rightarrow 2x^2+2=x^2+4x+4$$

$$\Rightarrow x^2-4x-2=0 \Rightarrow (x-2)^2=6 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{6}$$

محدودهٔ قابل قبول برای x بازهٔ $(-2\ ,+\infty)$ است، پس هر دو جواب معادله قابل قبول‌اند که مجموع آن‌ها برابر ۴ است.

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۸۹)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(داود حسین‌پور)*

ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(2^x)^2+2(2^x)+1}{2^x}=2^x+\frac{1}{2^x}+2$$

حال از نامساوی مقابل استفاده می‌کنیم: $\forall a>0\ ;\ a+\frac{1}{a}\geq 2$

و داریم: $2^x>0 \Rightarrow 2^x+\frac{1}{2^x}\geq 2 \Rightarrow f(x)=2^x+\frac{1}{2^x}+2\geq 4$

پس برد تابع $[4\ ,+\infty)$ است.

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(سهیل تقی‌زاده)*

روش اول: تابع $y=f(x-m)-n$ باید با تابع g برابر باشد:

$$f(x-m)-n=\frac{(x-m)^2+2(x-m)+3}{(x-m)^2+(x-m)+1}-n$$

$$=\frac{(1-n)x^2+\big(2(n-1)m-n+2\big)x+(1-n)m^2+(n-2)m-n+3}{x^2+(1-2m)x+m^2-m+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-n=-1 \Rightarrow n=2 \\ 1-2m=-1 \Rightarrow m=1 \end{cases} \Rightarrow m+n=3$$

روش دوم: کافی است ضابطه‌ها را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f(x)=1+\frac{x+2}{x^2+x+1}=1+\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2-(x+1)+1}$$

$$g(x)=\frac{-(x^2-x+1)+x+1}{x^2-x+1}=\frac{x+1}{x^2-x+1}-1$$

بنابراین اگر نمودار تابع f را ۲ واحد به پایین و ۱ واحد به راست انتقال دهیم، به نمودار تابع g می‌رسیم. پس $m=1$ و $n=2$ و در نتیجه $m+n=3$ است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۲ تا ۵)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی حاجی‌زاده)*

ابتدا تابع f^{-1} را با تعویض مؤلفه‌های اول و دوم در زوج مرتب‌های f به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}=\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۴)\}$$

دامنه هر دو تابع f^{-1} و g مجموعهٔ $\{۳,۲,۱\}$ است، پس داریم:

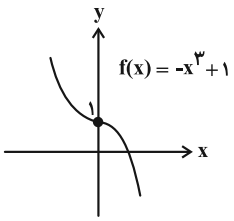
$$f^{-1}+g=\{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۹)\}$$

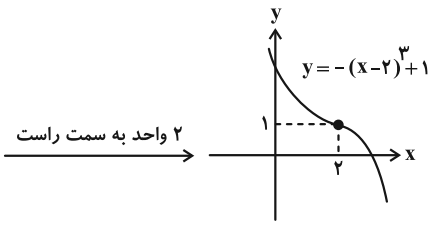
برد این تابع مجموعهٔ $\{۴,۹\}$ است که مجموع اعضای آن برابر ۱۳ است.

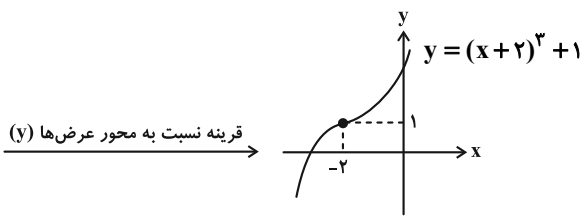
(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(دانیال آرکیش)*

باید نمودار را رسم کنیم:





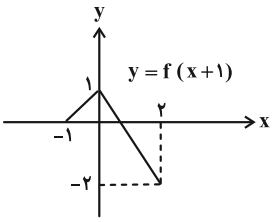


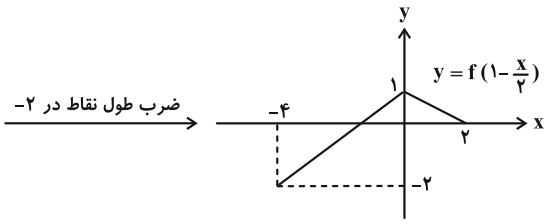
نمودار حاصل از ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

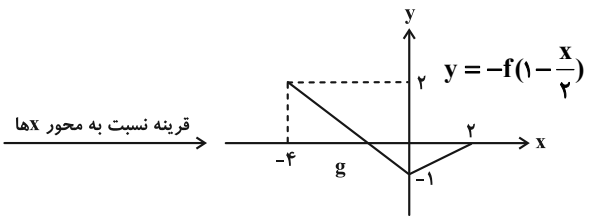
(حسابان ۲- صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(داود حسین‌پور)*

برای رسم نمودار تابع g، نمودار تابع f را یک واحد به چپ می‌بریم $\left(y=f(x+۱)\right)$، سپس طول نقاط روی نمودار حاصل را در ۲- ضرب می‌کنیم $\left(y=f(۱-\frac{x}{۲})\right)$ و در نهایت نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.







(حسابان ۲- صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(هادی پولادی)*

$$f(x)=x^{۲}-۲x+۱+mx^{۲}+(n-۱)x+۱$$

$$=(۱+m)x^{۲}+(n-۳)x+۲$$

تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است. بنابراین:

$$\begin{cases}۱+m=۰\Rightarrow m=-۱\\ n-۳=۰\Rightarrow n=۳\end{cases}\Rightarrow ۵m-۲n=-۵-۶=-۱۱$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

نقطهٔ $(۴,۶)$ روی نمودار تابع $fogof$ قرار گرفته است. پس داریم:

$$f\big(g\big(f(۶)\big)\big)=۴\xrightarrow{f(۶)=۰}f\big(g(۰)\big)=۴$$

$$\xrightarrow{g(۰)=c}f(c)=۴\Rightarrow\sqrt{۶-c}=۴\Rightarrow ۶-c=۱۶\Rightarrow c=-۱۰$$

به‌طور مشابه، مختصات دو نقطهٔ $(۳,۵)$ و $(۲,۱)$ را در تابع $fogof$ اعمال می‌کنیم:

$$f\big(g\big(f(۵)\big)\big)=۳\xrightarrow{f(۵)=۱}f\big(g(۱)\big)=۳$$

$$\xrightarrow{f(-۳)=۳}g(۱)=-۳\xrightarrow{(b,-۳)\in g}b=۱$$

$$f\big(g\big(f(۲)\big)\big)=۱\xrightarrow{f(۲)=۲}f\big(g(۲)\big)=۱$$

$$\xrightarrow{f(۵)=۱}g(۲)=۵\xrightarrow{(a,۵)\in g}a=۲$$

در نتیجه داریم:

$$a+b+c=۲+۱-۱۰=-۷$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(احسان سیفی‌سلسله)*

تابع f اکیداً یکنواست و چون $f(۲) < f(۱)$ است، تابع اکیداً نزولی است. حال باید نامعادلهٔ $f\big(f(x)\big) < ۳$ را حل کنیم. چون $f(۱) = ۳$ است، پس نامعادله به صورت $f\big(f(x)\big) < f(۱)$ تغییر می‌کند و چون تابع f اکیداً نزولی است داریم:

$$f(x) > ۱ \xrightarrow{f(۲)=۱} f(x) > f(۲) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} x < ۲$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمدابراهیم توزنده‌جانی)*

با توجه به حضور زوج‌های مرتب $(a , ۴)$ و $(۶ , ۷)$ این نتیجه حاصل می‌شود که $a < ۷$ است. همچنین با توجه به زوج‌های مرتب $(a , ۵)$ و $(۶ , ۷)$ نتیجه می‌گیریم که $a < ۶$ است. حال در دو حالت زیر وضعیت تابع را بررسی می‌کنیم:

الف) $a < ۴ : r = \{(a , ۵) , (۴ , a) , (۶ , ۷)\}$

که این تابع با شرط $a < ۴$ غیریکنواست.

ب) $۴ < a < ۶ : r = \{(۴ , a) , (a , ۵) , (۶ , ۷)\}$

که برای اکیداً صعودی بودن تابع لازم است که $a < ۵$ باشد.

$$\Rightarrow ۴ < a < ۵ \Rightarrow [a] = ۴$$

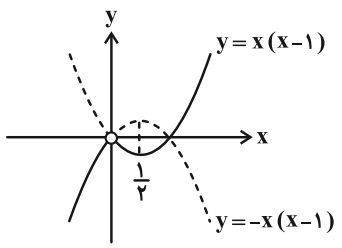
(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(شیوا امین)*

ابتدا $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{x^۳ - x^۲}{\sqrt{x^۲}} = \frac{x^۲(x-۱)}{|x|} = \begin{cases} x(x-۱) & ; \quad x > ۰ \\ -x(x-۱) & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

نمودار $\frac{f}{g}$ را رسم می‌کنیم.



این تابع روی بازهٔ $(۰ , \frac{۱}{۲})$ و هر زیرمجموعه از آن نزولی است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

ضابطهٔ تابع f را می‌توانیم به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} (۱-m)x + m & ; \quad x \le ۱ \\ (۱+m)x - m & ; \quad x \ge ۱ \end{cases}$$

و در نتیجه ضابطه‌های تابع gof به صورت زیر است:

$$(gof)(x) = \begin{cases} (\frac{۱}{۲})^{(۱-m)x+m} & ; \quad x \le ۱ \\ (\frac{۱}{۲})^{(۱+m)x-m} & ; \quad x \ge ۱ \end{cases}$$

تابع gof در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس برای اکیداً یکنوایی آن کافی است وضعیت یکنوایی دو تابع $y = (\frac{۱}{۲})^{(۱-m)x+m}$ و $y = (\frac{۱}{۲})^{(۱+m)x-m}$ مثل هم باشد.

در نتیجه $۱-m$ و $۱+m$ باید هم‌علامت باشند.

$$\Rightarrow (۱-m)(۱+m) > ۰ \Rightarrow (m-۱)(m+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۱$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(علی آزاد)*

برای رسم نمودار تابع f از روی نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به گونهٔ زیر عمل می‌کنیم:

- ابتدا ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{x+۲}$ به دست آید.

- سپس طول نقاط را بر $m-۲$ تقسیم و عرض نقاط را در $۴-m$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید.

چون تابع $y = \sqrt{x+۲}$ اکیداً صعودی است، برای این‌که تابع f هم اکیداً صعودی شود، کافی است علامت‌های $m-۲$ و $۴-m$ مثل هم باشند.

$$\Rightarrow (m-۲)(۴-m) > ۰ \Rightarrow (m-۲)(m-۴) < ۰ \Rightarrow ۲ < m < ۴$$

این بازه شامل فقط یک عدد صحیح است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

تابع $y = ۲\sqrt[۳]{۱۳x+۱۴}$ در دامنه‌اش یک به یک است. پس برای این‌که تابع f در $\mathbb{R}$ یک به یک باشد، لازم است مقادیر دو تابع $y = ax + b$ و $y = ۲\sqrt[۳]{۱۳x+۱۴}$ در $x = \pm ۱$ به حالت‌های زیر با هم برابر باشند:

الف) $\begin{cases} a(۱) + b = ۲\sqrt[۳]{۱۳(۱)+۱۴} \Rightarrow a + b = ۶ \\ a(-۱) + b = ۲\sqrt[۳]{۱۳(-۱)+۱۴} \Rightarrow -a + b = ۲ \end{cases}$

$$\Rightarrow b = ۴ \quad , \quad a = ۲ \Rightarrow \frac{b}{a} = ۲$$

ب) $\begin{cases} a(1)+b=2\sqrt[3]{13(-1)+14} \Rightarrow a+b=2 \\ a(-1)+b=2\sqrt[3]{13(1)+14} \Rightarrow -a+b=6 \end{cases}$

$\Rightarrow b=4 \quad , \quad a=-2 \Rightarrow \frac{b}{a}=-2$

پس $\frac{b}{a}=\pm 2$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۱۲- **گزینهٔ «۴»** *(حامد معنوی)*

ابتدا تابع g^{-1} را می‌سازیم:

$$g^{-1}=\{(2,4),(3,2),(4,3),(5,1),(6,13)\}$$

حال تساوی داده شده را می‌نویسیم:

$$(fog^{-1})(5)+(fog^{-1})(6)=f\left(g^{-1}(5)\right)+f\left(g^{-1}(6)\right)$$

$$=f(1)+f(13)=6 \xrightarrow{f(x)=\frac{x}{2}-a} \frac{1}{2}-a+\frac{13}{2}-a=6$$

$$\Rightarrow 7-2a=6 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

پس $f(x)=\frac{x-1}{2}$ و در نتیجه $f^{-1}(x)=2x+1$ است. حال داریم:

$$f^{-1}\left(g(4a)\right)=f^{-1}\left(g(2)\right)=f^{-1}(3)=7$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۷ تا ۷۰)

۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(علی آزاد)*

دامنهٔ تابع f بازهٔ $[2,+\infty)$ و دامنهٔ تابع g بازهٔ $(-\infty,5]$ است، پس دامنهٔ تابع $f+g$ اشتراک این دو بازه یعنی بازهٔ $[2,5]$ خواهد بود. حال براساس تعریف، دامنهٔ تابع $(f+g)of$ را حساب می کنیم:

$$D_{(f+g)of}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_{f+g}\}$$
$$=\{x\geq 2 \mid 2\leq \sqrt{x-2}\leq 5\} \qquad (*)$$

نامعادلهٔ $2\leq \sqrt{x-2}\leq 5$ را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4\leq x-2\leq 25 \Rightarrow 6\leq x\leq 27$$

$$\xrightarrow{(*)} D_{(f+g)of}=\{x\geq 2 \mid 6\leq x\leq 27\}=[6,27]$$

این یعنی $a=6$ ، $b=27$ و در نتیجه $a+b=33$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

۱۴- **گزینهٔ «۱»** *(کاظم اجلالی)*

ضابطهٔ وارون تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است، پس در این سؤال $f^{-1}(x)=\frac{-2x-1}{x-1}$ است. حال معادله را تشکیل می‌دهیم و حل می‌کنیم:

$$-f^{-1}(x)=\frac{x}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x-1}=\frac{x}{\frac{x-1}{x+2}} \Rightarrow \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=x$$

$$\xrightarrow{x\neq 1} \frac{2x+1}{x+2}=x \Rightarrow x^2+2x=2x+1 \Rightarrow x^2=1$$

$$\xrightarrow{x\neq 1} x=-1$$

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(جوانبخش نیکنام)*

ابتدا ضابطهٔ تابع را از حالت کسری درمی‌آوریم و ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{(x+4)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3}\times\frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x+1}-3}=\frac{(x+4)(x-8)(\sqrt{x+1}-3)}{x+1-9}$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+4)(\sqrt{x+1}-3)=(x+1+3)(\sqrt{x+1}-3)$$

$$\left((\sqrt{x+1})^2+3\right)(\sqrt{x+1}-3)=(\sqrt{x+1})^3-3(\sqrt{x+1})^2+3\sqrt{x+1}-9$$

$$=(\sqrt{x+1}-1)^3-8$$

و برای محاسبهٔ ضابطهٔ وارون این تابع داریم:

$$y=(\sqrt{x+1}-1)^3-8 \Rightarrow \sqrt{x+1}-1=\sqrt[3]{y+8}$$

$$\Rightarrow x=(\sqrt[3]{y+8}+1)^2-1$$

با تعویض جای x و y ضابطهٔ تابع f^{-1} به دست می‌آید:

$$f^{-1}(x)=(\sqrt[3]{x+8}+1)^2-1 \quad ; \quad x\geq -9$$

این یعنی $a=8$ ، $b=1$ و $c=-1$ و در نتیجه $a+b-c=10$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(داود بوالحسنی)*

مختصات هر دو نقطه را در ضابطهٔ مربوطه‌شان جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(-3,2):2=2f(3+3)-5 \Rightarrow f(6)=\frac{7}{2} \qquad (1)$$

$$A'(m,n):n=2f^{-1}(2m+1)-3 \Rightarrow f^{-1}(2m+1)=\frac{n+3}{2}$$

طبق ویژگی‌های وارون داریم:

$$f\left(\frac{n+3}{2}\right)=2m+1 \qquad (2)$$

دو تساوی (۱) و (۲) باید یکسان باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{n+3}{2}=6 \Rightarrow n=9 \\ 2m+1=\frac{7}{2} \Rightarrow m=\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow 4m-n=-4$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۷- **گزینهٔ «۴»** (جهانبخش نیکنام)

فرض می‌کنیم $g(x)=3f(2x-1)+1$ باشد، داریم:

$$g(1)=-5 \Rightarrow 3f(1)+1=-5 \Rightarrow f(1)=-2$$

$$g(-1)=4 \Rightarrow 3f(-3)+1=4 \Rightarrow f(-3)=1$$

با توجه به تساوی‌های فوق A' و B' روی نمودار تابع $y=f(-kx)+k$ به صورت زیر می‌باشد:

$$A'(-\frac{1}{k}, k-2) \quad , \quad B'(\frac{3}{k}, k+1)$$

برای این‌که پاره‌خط‌های AB و $A'B'$ موازی باشند، باید شیب‌های دو پاره‌خط یکسان باشند:

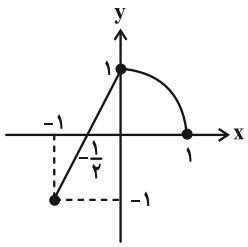
$$m_{AB}=-\frac{9}{2} \quad , \quad m_{A'B'}=\frac{3}{\frac{4}{k}}=\frac{3k}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{برابری شیب‌ها}} -\frac{9}{2}=\frac{3k}{4} \Rightarrow k=-6$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** (جهانبخش نیکنام)

نمودار تابع f به صورت زیر است:



و برای تعیین وضعیت یکنوایی تابع fof، لازم است که ضابطه (های) آن را به دست آوریم:

$$(fof)(x)=f\big(f(x)\big)=\begin{cases} 2f(x)+1 & ; \quad -1 \le f(x) < 0 \\ \sqrt{1-f(x)} & ; \quad 0 \le f(x) \le 1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع f مشخص است که در بازهٔ $(-\frac{1}{2}, -1]$، $-1 \le f(x) < 0$ و در بازهٔ $[-\frac{1}{2}, 1]$، $0 \le f(x) \le 1$ است.

$$\Rightarrow (fof)(x)=\begin{cases} 2(2x+1)+1 & ; \quad -1 \le x < -\frac{1}{2} \\ \sqrt{1-(2x+1)} & ; \quad -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ \sqrt{1-\sqrt{1-x}} & ; \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (fof)(x)=\begin{cases} 4x+3 & ; \quad -1 \le x < -\frac{1}{2} \\ \sqrt{-2x} & ; \quad -\frac{1}{2} \le x \le 0 \\ \sqrt{1-\sqrt{1-x}} & ; \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن اکیداً نزولی است، بازهٔ $[-\frac{1}{2}, 0]$ است. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** (محمدابراهیم توزنده‌جانی)

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-1+3x^2-x-71$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3+2x-72$$

مختصات نقطهٔ $(-P+4, P)$ را در این ضابطه قرار می‌دهیم:

$$f(-P+4)=(-P+4)^3+2(-P+4)-72$$

$$\Rightarrow P=-P^3+64+12P^2-48P-2P+8-72$$

$$-P^3+12P^2-50P=P \Rightarrow P^3-12P^2+51P=0$$

$$P(P^2-12P+51)=0$$

از آنجا که Δ ی معادلهٔ $P^2-12P+51=0$ منفی است، فقط مقدار $P=0$ قابل قبول است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۲۰- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(3x-2)^3+\sqrt[3]{3x}=x^3+\sqrt[3]{x+2}$$

با فرض $f(x)=x^3+\sqrt[3]{x+2}$ معادله به صورت زیر است:

$$f(3x-2)=f(x)$$

چون توابع $y=\sqrt[3]{x+2}$ و $y=x^3$ اکیداً صعودی‌اند، تابع f هم که مجموع آن‌هاست، اکیداً صعودی است، بنابراین تابع f یک به یک است. در نتیجه داریم:

$$\xrightarrow{f(3x-2)=f(x)} 3x-2=x \Rightarrow x=1$$

بنابراین معادله فقط یک جواب دارد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۱- **گزینهٔ «۱»** (سهیل تقی‌زاده)

با توجه به قضیهٔ تقسیم داریم:

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)\Rightarrow f(x)=(x-۱)q(x)+۵ \quad (۱)$$

طبق فرض سؤال خارج قسمت تقسیم، بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، بنابراین:

$$q(-۲)=۰ \quad (۲)$$

$$\left.\begin{array}{l}(۱),(۲): f(-۲)=۵\Rightarrow -۸+۴a-۲b-۱=۵\\ \Rightarrow ۲a-b=۷\\ (۱): \ f(۱)=۵\Rightarrow ۱+a+b-۱\Rightarrow a+b=۵\end{array}\right\}\Rightarrow a=۴\ ,\ b=۱$$

$$f(\frac{ab}{۲})=f(\frac{۴\times ۱}{۲})=f(۲)=۸+۱۶+۲-۱=۲۵$$

(حسابان ۲-تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۲- **گزینهٔ «۳»** (داود بوالحسنی)

ابتدا قضیهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(۱-x)=(x-۲)Q(x)+R\xrightarrow{x=۲}f(-۱)=R$$

حال طبق فرض داریم:

$$f(x)=\frac{x^{۱۶}-۱}{۲(x+۱)}\ ,\ (x\neq -۱)$$

چون f یک چندجمله‌ای است، پس در تمام نقاط (حتی $x=-۱$ که ریشهٔ مخرج است) پیوسته است، یعنی:

$$f(-۱)=\lim_{x\to -۱}f(x)=\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۱۶}-۱}{۲(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^{۱۵}-x^{۱۴}+x^{۱۳}-\ldots-۱)}{۲(x+۱)}$$

$$=\frac{۱}{۲}(-۱-۱-۱-\ldots-۱)=\frac{۱}{۲}(-۱۶)=-۸\Rightarrow R=-۸$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

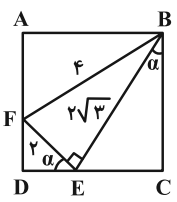
۳- **گزینهٔ «۱»** (محمدرضا راسخ)

با توجه به این‌که $\overset{\Delta}{BEF}$ قائم‌الزاویه است، داریم:

$$BE^۲+EF^۲=BF^۲\Rightarrow BE^۲+۲^۲=۴^۲\Rightarrow BE=۲\sqrt{۳}$$

حال با توجه به شکل زیر داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}BC=۲\sqrt{۳}\cos\alpha\\ CE=۲\sqrt{۳}\sin\alpha\\ DE=۲\cos\alpha\end{array}\right.\xrightarrow{BC=CE+DE}$$



$$۲\sqrt{۳}\cos\alpha=۲\sqrt{۳}\sin\alpha+۲\cos\alpha$$

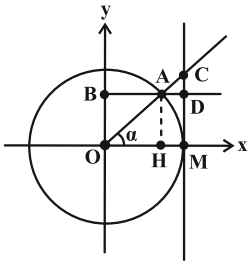
$$\Rightarrow (۲\sqrt{۳}-۲)\cos\alpha=۲\sqrt{۳}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \cot\alpha=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}-۲}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱}\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۲}$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴- **گزینهٔ «۲»** (حامد معنوی)

ابتدا طول OH را به دست می‌آوریم:



$$\left.\begin{array}{l}OH=AB\\ HM=AD\end{array}\right\}\xrightarrow{AB=۲AD}OH=۲HM \quad (۱)$$

$$OM=OH+HM=۱\xrightarrow{(۱)}OH+\frac{OH}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow OH=\frac{۲}{۳}$$

از طرفی می‌دانیم $OH=\cos\alpha$ و $CD=\tan\alpha-\sin\alpha$، بنابراین:

$$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha\xrightarrow[\cos\alpha=\frac{۲}{۳}]{۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}}\sin\alpha=\sqrt{۱-(\frac{۲}{۳})^۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$CD=\tan\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۲}-\frac{\sqrt{۵}}{۳}=\frac{\sqrt{۵}}{۶}$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحهٔ ۲۹)

۵- **گزینهٔ «۴»** (سیدرضا اسلامی)

ابتدا زاویه‌ای که چرخ عقب (B) می‌چرخد را محاسبه می‌کنیم:

$$L=R\alpha\Rightarrow ۹۴/۲=۳۵\times\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{۹۴/۲}{۳۵}\text{rad}$$

از آنجا که چرخ عقب (B) و چرخ دنده متصل به آن (D) دو دایره هم‌مرکز هستند، چرخ دندهٔ D نیز $\frac{۹۴/۲}{۳۵}\text{rad}$ می‌چرخد. همچنین دو چرخ دندهٔ C و D به وسیلهٔ زنجیر چرخ به هم متصل بوده و مسافت یکسانی از زنجیر چرخ را می‌پیمایند:

$$R_۱\theta_۱=R_۲\theta_۲\Rightarrow ۱۰\times\frac{۹۴/۲}{۳۵}=۱۵\times\theta_۲$$

$$\Rightarrow\theta_۲=\frac{۱۰\times ۹۴/۲}{۱۵\times ۳۵}=\frac{۳/۱۴\times ۳۰۰}{۲۵\times ۷\times ۳}=\frac{۴\pi}{۷}\text{rad}$$

توجه: شعاع چرخ جلو در محاسبات تأثیری ندارد و عملاً دادهٔ اضافی به حساب می‌آید.

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۶- **گزینهٔ «۴»** (سیدرضا اسلامی)

طرفین رابطه را بر $\cos^۳x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۵\tan^۳x+۳\frac{۱}{\cos^۲x}=۵+۵\tan x\times\frac{۱}{\cos^۲x}$$

$$\Rightarrow ۵\tan^۳x+۳(۱+\tan^۲x)=۵+۵\tan x(۱+\tan^۲x)$$

$$\Rightarrow 5\tan^3 x+3\tan^2 x+3=5\tan^3 x+5\tan x+5$$

$$\Rightarrow 3\tan^2 x-5\tan x-2=0\Rightarrow \tan x=2\ ,\ -\frac{1}{3}$$

پس A هم دو مقدار می‌تواند داشته باشد:

$$A=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$A=-\frac{1}{3}-3=-\frac{10}{3}$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(ستار زواری)*

$$y=a\cos(\frac{b\pi x}{2}+\frac{\pi}{2})=-a\sin(\frac{b\pi x}{2})$$

با توجه به این که نمودار تابع در مبدأ صعودی است:

$$(-a)(b)>0\ (\text{چرا؟})\Rightarrow ab<0 \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به این‌که بیشترین مقدار تابع ۳ است، $|a|=3$.

$$6=\frac{3T}{4}\Rightarrow T=8=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}|b|}\Rightarrow |b|=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a=3\xrightarrow{(1)}b=-\frac{1}{2}\Rightarrow a-b=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2} \\ a=-3\xrightarrow{(1)}b=\frac{1}{2}\Rightarrow a-b=-3-\frac{1}{2}=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(حامد معنوی)*

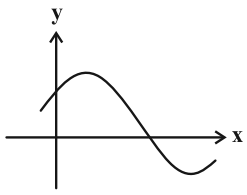
توجه کنید که $BC=T$ و ارتفاع وارد بر ضلع BC همان اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)$ است. بنابراین:

$$S_{ABC}=2\pi\Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{|b|}\times(2|-2|)=2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|b|}=1\Rightarrow |b|=2$$

شکل زیر نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ را در همسایگی $x=0$ نشان می‌دهد که صعودی است. با توجه به شکل صورت سؤال، نمودار تابع $f(x)=-2\cos(bx-\frac{\pi}{4})+c$ در همسایگی راست $x=0$ نزولی است، پس:

$$(-2)(b)<0\ (\text{چرا؟})\xrightarrow{|b|=2}b=2$$



$$\Rightarrow f(x)=-2\cos(2x-\frac{\pi}{4})+c$$

از طرفی با توجه به این‌که $f(\frac{35\pi}{24})=0$، می‌نویسیم:

$$f(\frac{35\pi}{24})=-2\cos(2\times\frac{35\pi}{24}-\frac{\pi}{4})+c=0$$

$$\Rightarrow -2\cos(\frac{8\pi}{3})+c=0\Rightarrow -2\cos(2\pi+\frac{2\pi}{3})+c=0$$

$$\Rightarrow -2(-\frac{1}{2})+c=0\Rightarrow c=-1\Rightarrow c-b=-1-2=-3$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(رضا جعفری)*

از آنجایی که $0<c<\frac{\pi}{2}$ است، تابع $y=\sin(x+c)$ در همسایگی $x=0$ صعودی است و چون طبق نمودار صورت سؤال، تابع $f(x)=a\sin(bx+c)$ در همسایگی $x=0$ نزولی است، پس:

$$ab<0\xrightarrow{b>0}a<0 \qquad (1)$$

$$y_{max}=|a|=\frac{1}{3}\xrightarrow{(1)}a=-\frac{1}{3}$$

$$2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}=\frac{T}{4}\Rightarrow T=3=\frac{2\pi}{|b|}$$

$$\Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{b>0}b=\frac{2\pi}{3}$$

همچنین با توجه به نمودار داریم:

$$f(\frac{5}{4})=0\Rightarrow -\frac{1}{3}\sin(\frac{2\pi}{3}\times\frac{5}{4}+c)=0$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{5\pi}{6}+c)=0\xrightarrow{0<c<\frac{\pi}{2}}c=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c}=\frac{(-\frac{1}{3})(\frac{2\pi}{3})}{\frac{\pi}{6}}=-\frac{4}{3}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(جهانبخش نیکنام)*

$$2T=\frac{9\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\Rightarrow 2T=\pi\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow |b|=2$$

چون در همسایگی صفر تابع نزولی است، پس $b<0$ است (چرا؟)، یعنی $b=-2$.

$$f(x)=a-\tan 2x\Rightarrow f(\frac{\pi}{8})=0\Rightarrow a-\tan\frac{\pi}{4}=0\Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow f(x)=1-\tan 2x$$

$$(a-b)\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}\Rightarrow f(\frac{3\pi}{8})=1-\tan 2(\frac{3\pi}{8})$$

$$=1-\tan\frac{3\pi}{4}=1-(-1)=2$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحهٔ ۳۲)

۱- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا نداف‌زاده)*

ابتدا عبارت A را به کمک روابط مثلثاتی 2α به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$A = 2\cos^2 x - 3\sin 2x + 2\sin^2 x + 8\cos^2 x$$

$$\Rightarrow A = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) - 3\sin 2x + 8\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A = 2 - 3\sin 2x + 4 + 4\cos 2x = 6 - 3\sin 2x + 4\cos 2x$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}} A = 6 - 3\sin\frac{\pi}{6} + 4\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow A = 6 - \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} = 4/5 + 2\sqrt{3}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ و ۱۱۲)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا راسخ)*

با توجه به فرض و روابط کسینوس مجموع و تفاضل زوایا داریم:

$$m\cos(x+y) - n\cos(x+y) = m\cos(x-y) + n\cos(x-y)$$

$$m\cos(x+y) - m\cos(x-y) = n\cos(x-y) + n\cos(x+y)$$

$$\Rightarrow m(\cos x\cos y - \sin x\sin y - (\cos x\cos y + \sin x\sin y))$$

$$= n(\cos x\cos y + \sin x\sin y + \cos x\cos y - \sin x\sin y)$$

$$\Rightarrow -2m\sin x\sin y = 2n\cos x\cos y$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y} = \frac{2n}{-2m} \Rightarrow \tan(x)\tan(y) = -\frac{n}{m}$$

(حسابان ۱- صفحهٔ ۱۱۱)

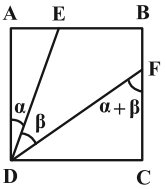
۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا راسخ)*

در مثلث DAE داریم:

$$AE^2 + AD^2 = DE^2 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = DE^2 \Rightarrow DE = \sqrt{10}$$

با توجه به شکل داریم:

$$AD \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } DF} D\hat{F}C = \alpha + \beta$$



$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ و } \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ ، } \sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{4}$$

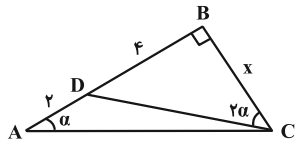
$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{4} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{\sqrt{10}}\cos\beta + \frac{3}{\sqrt{10}}\sin\beta \Rightarrow \frac{3\sqrt{10}}{4} = \cos\beta + 3\sin\beta$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ و ۱۱۱)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(سینا خیرخواه)*

با توجه به نام‌گذاری در شکل زیر داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC} : \tan\alpha = \frac{x}{6} \text{ ، } \overset{\Delta}{BCD} : \tan 2\alpha = \frac{4}{x}$$

حال به کمک رابطهٔ تانژانت مجموع زوایا داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{\frac{2x}{6}}{1-\frac{x^2}{36}}$$

$$\Rightarrow 4 - \frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{3} \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{x>0} x = 3$$

حال در مثلث ABC داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 6^2 + 3^2 \Rightarrow AC = 3\sqrt{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا راسخ)*

با توجه به فرض سوال داریم: $\cot\beta = \tan\alpha - 2\tan\beta \quad (*)$

عبارت مورد نظر را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cot\beta}{\tan(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\beta}{\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}} = \frac{\cot\beta(1+\tan\alpha\tan\beta)}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

$$= \frac{\cot\beta+\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta} \xrightarrow{(*)} = \frac{\tan\alpha-2\tan\beta+\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

$$= \frac{2(\tan\alpha-\tan\beta)}{\tan\alpha-\tan\beta} = 2$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۴۲)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(علی آزاد)*

ابتدا تساوی اول را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})} = \frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})} = \frac{-\sin(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\frac{\pi}{4}))}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{-\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})} = -\cot(\alpha+\frac{\pi}{4}) = 2 \Rightarrow \tan(\alpha+\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$$

حال به کمک رابطهٔ تانژانت مجموع زوایا داریم:

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}\xrightarrow{\tan\frac{\pi}{4}=1}\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha-1=2\tan\alpha+2\Rightarrow \tan\alpha=-3 \qquad (*)$$

حال از تساوی دوم داریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{-3+\tan\beta}{1+3\tan\beta}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -6+2\tan\beta=1+3\tan\beta\Rightarrow\tan\beta=-7$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۴۲)

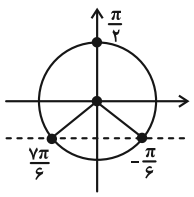
۷- **گزینهٔ «۲»** (ستار زواری)

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$1-2\sin^2 x+\sin x=0\xrightarrow{t=\sin\alpha}-2t^2+t+1=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=1\Rightarrow\sin x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\\ t=-\frac{1}{2}\Rightarrow\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ \text{یا}\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب‌های معادله در بازهٔ $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ عبارتند از $-\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{2}$ و داریم: $|\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{6})|=\frac{2\pi}{3}$



(حسابان ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۸- **گزینهٔ «۳»** (بهمن امیدی)

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x+2)+1=0$$

$$\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)+1=0$$

$$\Rightarrow(\sin x+\cos x+1)^2=0$$

$$\Rightarrow\sin x+\cos x=-1\Rightarrow\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1$$

$$\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\\ \xrightarrow{x\in[0\ ,\ 2\pi]}x=\frac{3\pi}{2}\\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\\ \xrightarrow{x\in[0\ ,\ 2\pi]}x=\pi\end{cases}$$

بنابراین در فاصلهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ معادله دارای ۲ جواب است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۹- **گزینهٔ «۳»** (مهسان کوررزی)

به کمک رابطهٔ تانژانت مجموع زوایا، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=1+\tan x\Rightarrow\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=1+\tan x$$

$$\Rightarrow 1+\tan x=1-\tan^2 x\Rightarrow\tan^2 x+\tan x=0$$

$$\Rightarrow\tan x(\tan x+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\\ \xrightarrow{x\in[0\ ,\ \pi]}x=0\ ,\ \pi\\ \tan x=-1\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\\ \xrightarrow{x\in[0\ ,\ \pi]}x=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** (جهانبخش نیکنام)

باید معادلهٔ تلاقی دو تابع دارای جواب باشد:

$$\cos 4x+m=2\sin^2 x\Rightarrow 2\cos^2 2x-1+m=2(\frac{1-\cos 2x}{2})$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 2x+\cos 2x=2-m$$

$$\Rightarrow\cos^2 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{2-m}{2}$$

با افزودن $\frac{1}{16}$ واحد به طرفین تساوی، سمت چپ تساوی را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$(\cos 2x+\frac{1}{4})^2=\frac{17-8m}{16}$$

حال به توجه به محدودهٔ x داریم:

$$\frac{2\pi}{3}\le x\le\pi\Rightarrow\frac{4\pi}{3}\le 2x\le 2\pi\Rightarrow-\frac{1}{2}\le\cos 2x\le 1$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{4}\le\cos 2x+\frac{1}{4}\le\frac{5}{4}\Rightarrow 0\le(\cos 2x+\frac{1}{4})^2\le\frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow 0\le\frac{17-8m}{16}\le\frac{25}{16}\Rightarrow-1\le m\le\frac{17}{8}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با: $\frac{17}{8}-(-1)=\frac{25}{8}$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۱ و ۱۱۲)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم اجلالی)*

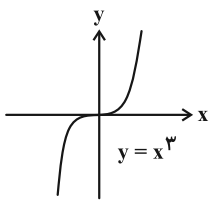
با کمک تعیین علامت عبارت قدرمطلقی، ضابطهٔ تابع را به صورت یک تابع قطعه‌ای بازنویسی می‌کنیم:

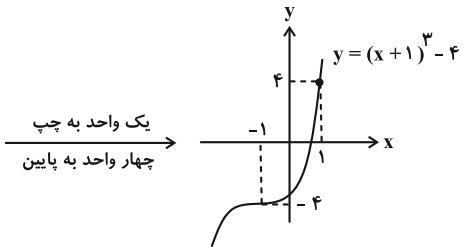
$$f(x)=\begin{cases}x^3+3x+3(x+1)(x-1) & ; \ x\geq 1\\ x^3+3x-3(x+1)(x-1) & ; \ x<1\end{cases}$$

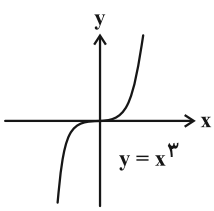
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^3+3x+3x^2-3 & ; \ x\geq 1\\ x^3+3x-3x^2+3 & ; \ x<1\end{cases}$$

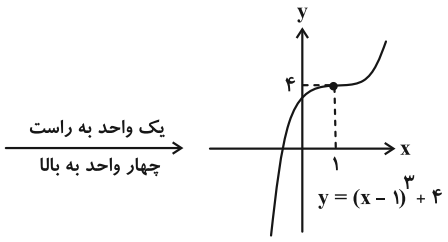
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x+1)^3-4 & ; \ x\geq 1\\ (x-1)^3+4 & ; \ x<1\end{cases}$$

حال توجه کنید که نمودار توابع $y=(x+1)^3-4$ و $y=(x-1)^3+4$، به کمک قوانین انتقال از روی نمودار تابع $y=x^3$ به صورت زیر رسم می‌شوند:

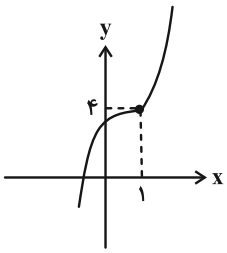








بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است:



(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

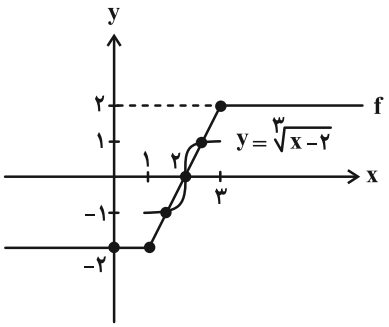
۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا راسخ)*

ابتدا ضابطهٔ وارون تابع g را به دست می‌آوریم:

$$y=(\frac{x}{m})^3+2\Rightarrow y-2=(\frac{x}{m})^3\Rightarrow x=m\sqrt[3]{y-2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x)=m\sqrt[3]{x-2}$$

حال نمودار توابع f و $y=\sqrt[3]{x-2}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم که مطابق شکل ۳ نقطهٔ برخورد در بازهٔ $[1,3]$ دارند.



با توجه به نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x-2}$، اگر $m<0$ باشد، نمودار تابع نسبت به محور xها قرینه می‌شود و در نتیجه f و g^{-1} فقط در نقطهٔ $x=2$ برخورد دارند.

همچنین اگر $g^{-1}(3)>2$ (یا معادل آن $g^{-1}(1)<-2$) باشد، نیز نمودارهای توابع فقط در $x=2$ برخورد دارند:

$$g^{-1}(3)>2\Rightarrow m\sqrt[3]{3-2}>2\Rightarrow m>2$$

بنابراین حدود m، به صورت $(-\infty , 0)\cup(2 , +\infty)$ است و داریم:

$$a+b=0+2=2$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۳، ۱۴ و ۲۱)

۳- **گزینهٔ «۴»** (محمدرضا راسخ)

ابتدا ضابطهٔ $y=-4x^2+4x$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=-(4x^2-4x+1)+1=-(2x-1)^2+1$$

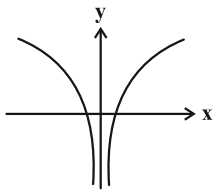
$$\xrightarrow{\text{۱ واحد به سمت پایین}} y=-(2x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}}$$

$$y=(2x-1)^2 \xrightarrow{\text{انبساط افقی با ضریب } \frac{1}{2}} y=(x-1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{۱ واحد به چپ}} y=x^2 \Rightarrow g(x)=x^2$$

حال نمودار تابع $y=\log x^2$ را رسم می‌کنیم:

$$y=\log x^2=2\log|x|$$



این تابع روی دامنه‌اش ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۴- **گزینهٔ «۳»** (سینا خیرخواه)

با توجه به دامنهٔ تابع f، ورودی‌های توابع $y=f(3x-1)$ و $y=f(4-x)$ باید بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد:

$$3x-1\geq 1\Rightarrow x\geq \frac{2}{3} \quad (I) \qquad \text{و} \qquad 4-x\geq 1\Rightarrow x\leq 3 \quad (II)$$

همچنین زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$f(3x-1)\geq f(4-x) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} 3x-1\leq 4-x$$

$$\Rightarrow x\leq \frac{5}{4} \quad (III)$$

حال از اشتراک (I)، (II) و (III) داریم:

$$D_y=[\frac{2}{3} , \frac{5}{4}] \Rightarrow b-a=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸ و ۲۲)

۵- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

ابتدا توجه کنید که $P(1)=1-4+3=0$، بنابراین $P(x)$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است، پس $x-1$، یکی از عامل‌های $P(x)$ است، در نتیجه:

$$P(x)=x^{12}-1-4x^5+4=(x^{12}-1)-4(x^5-1)$$

$$=(x-1)(x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1)-4(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$=(x-1)(\underbrace{x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1-4(x^4+x^3+x^2+x+1)}_{Q(x)})$$

$$\Rightarrow P(x)=(x-1)Q(x)$$

حال کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ را بر $(x-1)$ پیدا کنیم که برابر است با:

$$R=Q(1)=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{۱۲ تا}}-4(1+1+1+1+1)=-8$$

بنابراین داریم:

$$Q(x)=(x-1)q(x)-8$$

$$\Rightarrow P(x)=(x-1)\big((x-1)q(x)-8\big)$$

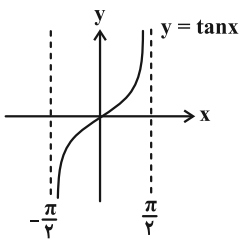
$$=(x-1)^2q(x)-8(x-1)$$

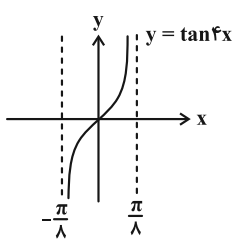
بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر است با: $r(x)=-8(x-1)=-8x+8$

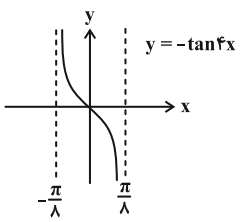
(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

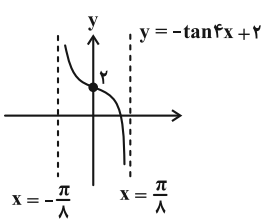
۶- **گزینهٔ «۲»** (محمد زنگنه)

به کمک نمودار تابع $y=\tan(x)$ که به صورت زیر است، نمودار تابع $y=-\tan(4x)+2$ را رسم می‌کنیم.









$$\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{\pi}{8} \\ b=\frac{\pi}{8} \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b-a}{c}=\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}}{2}=\frac{\pi}{8}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

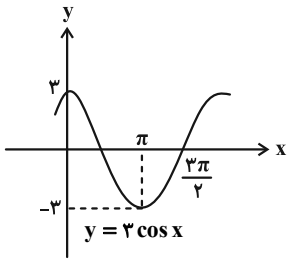
۷- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

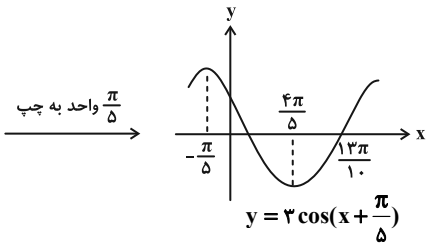
نمودار تابع محور yها را نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کرده است:

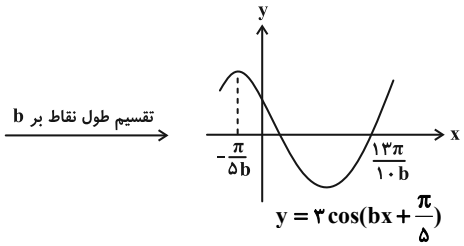
$$f(0)=a\cos\frac{\pi}{5}>0 \Rightarrow a>0$$

کمترین مقدار تابع برابر ۳- است، پس: $-|a|=-3 \xrightarrow{a>0} a=3$

اکنون توجه کنید که نمودار تابع f به صورت زیر رسم می‌شود:







بنابراین: $\frac{13\pi}{10b}=\frac{13}{5} \Rightarrow b=\frac{\pi}{2} \Rightarrow ab=\frac{3\pi}{2}$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۸- **گزینهٔ «۳»** (مسعود شفیعی)

با توجه به نمودار، تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس:

$$f(0)=0 \Rightarrow a\sin(-\frac{\pi}{6})+3=0 \Rightarrow -\frac{a}{2}+3=0 \Rightarrow a=6$$

حال با توجه به نمودار تابع، دورهٔ تناوب برابر $\frac{\pi}{3}$ است، در نتیجه:

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{3} \Rightarrow |b|=6 \xrightarrow{b>0} b=6$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=6\sin(6x-\frac{\pi}{6})+3$ است و داریم:

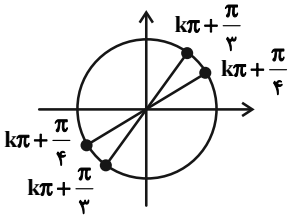
$$f(\frac{\pi}{12})=6\sin(6\times\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6})+3=6\sin(\frac{\pi}{3})+3$$

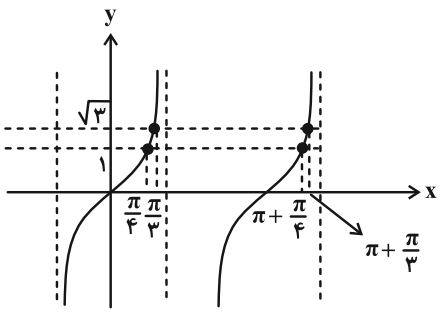
$$=6(\frac{\sqrt{3}}{2})+3=3\sqrt{3}+3$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۹- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی و نمودار $y=\tan x$، اگر $1<\tan x<\sqrt{3}$، آن‌گاه داریم:





$$1<\tan x<\sqrt{3} \Rightarrow k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{3} \ , \ (k\in\mathbb{Z})$$

بنابراین:

$$k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{12}<k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow k\pi+\frac{\pi}{6}<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan(k\pi+\frac{\pi}{6}) < \tan\alpha < \tan(k\pi+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < \tan\alpha < 1$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (کاظم اجلالی)

با توجه به فرضیات مسئله داریم: $\tan\beta = \tan\alpha - 1$ (*)

$$\tan(\alpha+\beta) = -8 \Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = -8$$

با فرض $\tan\alpha = x$ و رابطهٔ (*) داریم:

$$\frac{x+x-1}{1-x(x-1)} = -8 \Rightarrow \frac{2x-1}{1-x^2+x} = -8$$

$$\Rightarrow 8x^2-8x-8 = 2x-1 \Rightarrow 8x^2-10x-7 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)(4x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{7}{4} \end{cases}$$

بنابراین $\tan\alpha = \frac{7}{4}$ و از رابطهٔ (*) داریم:

$$\tan\beta = \frac{7}{4}-1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{3}$$

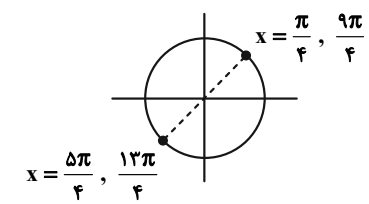
(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۱۱- **گزینهٔ «۲»** (سینا خیرخواه)

با توجه به اتحادهای $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ و $1+\cos x = 2\cos^2 x$، معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\sqrt{\frac{2\sin^2 x}{\sin x}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 x}{\cos x}} \Rightarrow \sqrt{2\sin x} = \sqrt{2\cos x} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{x\in(0\,,\,4\pi)}$$



از معادلهٔ (۱) معلوم است که باید مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ مثبت باشند، پس جواب‌های واقع در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قابل قبول نیستند. در نتیجه معادله تنها دو جواب $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{9\pi}{4}$ را در بازهٔ $(0\,,\,4\pi)$ دارد که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{4} = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۱۲- **گزینهٔ «۴»** (محمدرضا راسخ)

به کمک روابط مثلثاتی 2α و سینوس تفاضل دو زاویه، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos x - \sin x\cos\frac{\pi}{12} + \sin x - \sin\frac{\pi}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{12}\underbrace{(\cos x-1)}_{-2\sin^2\frac{x}{2}} + \sin x(1-\cos\frac{\pi}{12}) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(1-\cos\frac{\pi}{12}) = 2\sin^2\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(1-\cos\frac{\pi}{12}) = 2\sin^2\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

معادلهٔ اخیر را به صورت زیر در محدودهٔ $[0\,,\,2\pi]$ حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0\,,\,2\pi & \checkmark \\ \sin\frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow \cos\frac{x}{2}(1-\cos\frac{\pi}{12}) = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{12} & (*) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} \tan\frac{x}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}} \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \tan\frac{\pi}{24}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \qquad \checkmark$$

بنابراین معادله در محدودهٔ مورد نظر دارای سه جواب 2π، $\frac{\pi}{12}$ و $x = 0$ است.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)

۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(نیما مهندس)*

حد خواسته شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{16})}\frac{\tan(2x+\frac{\pi}{8})}{\sin 4x+\cos 4x}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-\frac{\pi}{16})}\frac{\tan(2x+\frac{\pi}{8})}{\sqrt{2}\sin(4x+\frac{\pi}{4})}=\frac{0}{0}$$

با در نظر گرفتن $t=2x+\frac{\pi}{8}$ داریم:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan(t)}{\sqrt{2}\sin 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\sqrt{2}\times 2\sin t\cos t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{2}\cos^2 t}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{k}{\sqrt{2}}\Rightarrow k=\frac{1}{2}\Rightarrow [k]=0$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

با فرض $t=2\pi\cos x-2\pi$، داریم:

$$\cos x=\frac{t+2\pi}{2\pi}\Rightarrow \cos 2x=2\cos^2 x-1=2(\frac{t+2\pi}{2\pi})^2-1$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\frac{t^2+4\pi t+2\pi^2}{2\pi^2}\Rightarrow \pi\cos 2x=\pi+2t+\frac{t^2}{2\pi}$$

چون $x\to 0$ پس $t\to 0$ و حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+2t+\frac{t^2}{2\pi})}{\sin(t+2\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin(2t+\frac{t^2}{2\pi})}{\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-(2t+\frac{t^2}{2\pi})}{t}=\lim_{t\to 0}-(2+\frac{t}{2\pi})=-2$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا کشاورزی)*

با توجه به ضابطهٔ تابع f، نقاط $x=3$ و $x=-3$ کاندیداهای نقاط ناپیوستگی تابع f هستند.

حالت اول:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=f(3)\\ \lim\limits_{x\to(-3)^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)=f(-3)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\frac{a}{3}=3\Rightarrow a=9\\ -\frac{a}{3}\neq 3\Rightarrow -\frac{9}{3}\neq 3\end{array}\quad\checkmark$$

حالت دوم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-3)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)=f(-3)\\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=f(3)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\frac{a}{-3}=3\Rightarrow a=-9\\ \frac{a}{3}\neq 3\Rightarrow\frac{-9}{3}\neq 3\end{array}\quad\checkmark$$

بنابراین به ازای دو مقدار $a=\pm 9$، تابع f فقط در یک نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(علی آزاد)*

ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=(x-1)(x-\sqrt{2})[x^2]$$

توابع شامل براکت در نقاطی که داخل براکت، عددی صحیح شود ناپیوسته هستند، به جز نقاطی که مینیمم عبارت داخل براکت باشد یا به صورت عامل صفرکننده‌ای در پشت براکت باشد:

$$-\frac{1}{2}\le x<k\xrightarrow{|k|>\frac{1}{2}}0\le x^2<k^2$$

$x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow$ پیوسته است زیرا نقطه مینیمم است.

$$x^2=1\Rightarrow\begin{cases}x=1\to \text{پیوسته است زیرا عامل صفر کننده دارد.}\\ x=-1\to \text{در دامنه نیست.}\end{cases}$$

$$x^2=2\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\to \text{پیوسته است زیرا عامل صفر کننده دارد.}\\ x=-\sqrt{2}\to \text{در دامنه نیست.}\end{cases}$$

$$x^2=3\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}\to \text{ناپیوسته است.}\\ x=-\sqrt{3}\to \text{در دامنه نیست.}\end{cases}$$

بنابراین اولین نقطهٔ ناپیوستگی تابع f، $x=\sqrt{3}$ است و بیشترین مقدار k باید برابر $\sqrt{3}$ باشد و این نقطه شامل دامنهٔ تابع نیست.

توجه: به ازای $|k|\le\frac{1}{2}$، تابع f روی بازهٔ $(k,-\frac{1}{2}]$ پیوسته است.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱۷- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا کشاورزی)*

با توجه به فرض سؤال، حاصل حد مخرج وقتی $x \to 1$، برابر صفر است، بنابراین باید حد صورت کسر نیز برابر صفر باشد تا حاصل حد کسر، موجود و برابر عددی حقیقی باشد:

$$\sqrt{a+b} = 2 \Rightarrow a+b = 4 \qquad (*)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{ax+b-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+2)}$$

$$\xrightarrow{(*)} \lim_{x\to 1} \frac{ax+4-a-4}{(x-1)(x+1)(4)} = \lim_{x\to 1} \frac{a(x-1)}{(x-1)(2)(4)} = \frac{a}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a = 12 \xrightarrow{(*)} b = -8$$

حال با توجه به مقادیر a و b، حاصل حد خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-8)^-} \frac{12x}{x+8} = \frac{-96}{0^-} = +\infty$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(مهسان کوذرزی)*

با توجه به نمودار تابع در اطراف مجانب قائم، مخرج کسر باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4(3)(12) = 0 \Rightarrow a = 144 \Rightarrow a = \pm 12$$

اگر $a = 12$ باشد:

$$\lim_{x\to k} \frac{x-1}{3(x+2)^2} = \lim_{x\to -2} \frac{x-1}{3(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \quad \text{غ ق ق}$$

اگر $a = -12$ باشد:

$$\lim_{x\to k} \frac{x-1}{3(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{3(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{ق ق}$$

بنابراین $a = -12$ و $k = 2$ و داریم: $a + k = -12 + 2 = -10$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(علی سلامت)*

(حالت ۱): اگر $m = -1$ باشد، آن‌گاه:

$$f(x) = \frac{3x-2}{2x+2} \Rightarrow \text{فقط } x = -1 \text{ مجانب قائم است}$$

(حالت ۲): اگر $m \neq -1$، آن‌گاه:

$$(m+1)x^2 + 2x + 1 - m = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

حالت (۱-۲): اگر $x_1 = x_2$، آن‌گاه $m = 0$:

$$f(x) = \frac{4x-2}{x^2+2x+1} \Rightarrow \text{فقط } x = -1 \text{ مجانب قائم است}$$

حالت (۲-۲): اگر $x_1 = -1$ ریشهٔ صورت باشد:

$$(m+4)(-1) - 2 = 0 \Rightarrow m = -6$$

$$f(x) = \frac{-2x-2}{-5x^2+2x+7} \Rightarrow \text{فقط } x = \frac{7}{5} \text{ مجانب قائم است}$$

حالت (۳-۲): اگر $x_2 = \dfrac{m-1}{m+1}$، ریشهٔ صورت باشد:

$$(m+4)\left(\frac{m-1}{m+1}\right) - 2 = 0 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$m = -3 \Rightarrow f(x) = \frac{x-2}{-2x^2+2x+4} \Rightarrow \text{فقط } x = -1 \text{ مجانب قائم است}$$

$$m = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{6x-2}{3x^2+2x-1} \Rightarrow \text{فقط } x = -1 \text{ مجانب قائم است}$$

بنابراین به ازای پنج مقدار $m = -1, 0, -6, -3, 2$، نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد.

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم اجلالی)*

حول $x = 0$ مثلاً در بازهٔ $x \in (-1, 1)$ هم‌ارزی‌های زیر معادل هم‌اند:

$$\sqrt{x^2+1} - x^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 > x^6 + 2x^3 + 1 \Leftrightarrow x^6 + 2x^3 - x^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^4 + 2x - 1) < 0$$

در یک همسایگی محذوف $x = 0$، عبارت x^2 مثبت و عبارت $x^4 + 2x - 1$ منفی است، بنابراین نابرابری بالا برقرار است و یعنی در این همسایگی (حول $x = 0$)، مخرج $f(x)$، مثبت است. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1} - x^3 - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۵۸)

SanjeshCloud

۱- **گزینهٔ «۱»** (محمدرضا راسخ)

با توجه به نمودار تابع داریم:

$$\begin{cases}[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)]=[-1]=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=[2^-]=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow [\lim_{x\to+\infty} f(x)]-\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=-1-1=-2$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۲- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

توجه کنید که $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$، بنابراین اگر فرض کنیم $t=\tan x$، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{2\tan x-|\tan x|}{\tan x-2}=\lim_{t\to-\infty}\frac{2t-|t|}{t-2}=\lim_{t\to-\infty}\frac{2t+t}{t}=3$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۳- **گزینهٔ «۲»** (کاظم اجلالی)

ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x|x|-2}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$$

$$=\lim_{t\to-\infty} f(t)=\lim_{t\to-\infty}\frac{t|t|-2}{1-t}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-t^2-2}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{-t^2}{-t}=\lim_{t\to-\infty} t=-\infty$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۴- **گزینهٔ «۴»** (کاظم اجلالی)

فرض کنید $y=b$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ باشد، در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x-2)=b\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(2x)=b$$

بنابراین طبق فرض داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3f(x-2)}{f(2x)+2}=2$$

$$\Rightarrow\frac{3\lim\limits_{x\to+\infty} f(x-2)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(2x)+2)}=2\Rightarrow\frac{3b}{b+2}=2$$

$$\Rightarrow 3b=2b+4\Rightarrow b=4$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۵- **گزینهٔ «۳»** (سیدرضا اسلامی)

با توجه به توضیحات فرض باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|-3x^3|+2x+1}{-2x^2+x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|-3x^3|}{-2x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^3}{-2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2}x=-\infty$$

(۲)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|3x^3|+2x+1}{-2x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|3x^3|}{-2x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^3}{-2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2}x=-\infty$$

(۳)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2x+1}{|-2x|+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{|-2x|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{2}x=+\infty$$

(۴)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+2x+1}{-2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2}x=-\infty$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۶- **گزینهٔ «۱»** (داود بوالحسنی)

مجانب افقی تابع عبارتست از:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+ax+3}{x^2+4x+1}=2\Rightarrow y=2$$

برای بررسی وضعیت نمودار تابع اطراف مجانب افقی، تابع $g(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

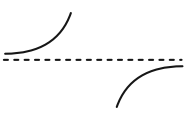
$$g(x)=\frac{2x^2+ax+3}{x^2+4x+1}-2=\frac{(a-8)x+1}{x^2+4x+1}$$

به ازای $a=8$ داریم $g(x)=\frac{1}{x^2+4x+1}$ که به ازای $x\to\pm\infty$ نمودار تابع بالای مجانب افقی قرار دارد، که قابل قبول نیست.

به ازای $(a-8)<0$ داریم:

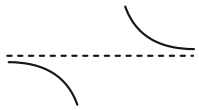
$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a-8)x}{x^2}=0$$

$$\begin{cases}x\to+\infty: g(x)=\dfrac{(a-8)x+1}{x^2+4x+1}<0\\ x\to-\infty: g(x)=\dfrac{(a-8)x+1}{x^2+4x+1}>0\end{cases}$$



در نتیجه $a < ۸$ و هفت مقدار طبیعی برای عدد a قابل قبول است.

تذکر: به ازای $a > ۸$ نمودار تابع اطراف مجانب افقی خود به صورت زیر می‌شود:



(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۷- **گزینهٔ «۳»** (جهانبخش نیکنام)

با توجه به ضابطه‌های توابع f و g داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(g(x)) = \lim_{x\to-\infty} f(\frac{۲x+۳}{x+۱})$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(\frac{۲(x+۱)}{x+۱}+\frac{۱}{x+۱}) = \lim_{x\to-\infty} f(۲+\frac{۱}{x+۱})$$

$$= \lim_{x\to۲^-} \frac{|x^۲-۳x+۲|}{x+[-x]} = \lim_{x\to۲^-} \frac{-(x-۱)(x-۲)}{x-۲} = -۱$$

توجه: عبارت $۲+\frac{۱}{x+۱}$ به ازای $x\to-\infty$، با مقادیر کمتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۸- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا راسخ)

وارون یک تابع خطی صعودی، صعودی و وارون یک تابع خطی نزولی، نزولی است. همچنین ترکیب دو تابع خطی که یکی صعودی و یکی نزولی است، یک تابع خطی نزولی است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$fog^{-۱}(x) = ax+b \Rightarrow (fog^{-۱})^{-۱}(x) = \frac{x}{a}-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow gof^{-۱}(x) = \frac{x}{a}-\frac{b}{a} \quad , \quad a<۰$$

حال با توجه به $a<۰$ و حد داده شده، داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|fog^{-۱}(x)|}{gof^{-۱}(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|ax|}{\frac{x}{a}} = \frac{a}{\frac{۱}{a}} = a^۲$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۴ \xrightarrow{a<۰} a = -۲$$

در نتیجه ضابطهٔ توابع $fog^{-۱}$ و $gof^{-۱}$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} fog^{-۱}(x) = -۲x+b \\ gof^{-۱}(x) = -\frac{x}{۲}+\frac{b}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow fog^{-۱}(۲)-۲gof^{-۱}(۱) = -۴+b-۲(-\frac{۱}{۲}+\frac{b}{۲})$$

$$= -۴+b+۱-b = -۳$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۹- **گزینهٔ «۲»** (سینا خیرخواه)

برای این‌که تابع f دارای مجانب افقی باشد، باید $a=۰$ باشد، که در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^۲-۴x+۱}{x^۲+۱} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^۲}{x^۲} = ۱$$

فاصلهٔ نمودار تابع از مجانب افقی برابر است با:

$$|f(x)-y_{\text{مجانب}}| = |\frac{x^۲-۴x+۱}{x^۲+۱}-۱| = |\frac{x^۲-۴x+۱-x^۲-۱}{x^۲+۱}|$$

$$= |\frac{-۴x}{x^۲+۱}| \xrightarrow[\text{تقسیم بر } x]{\text{صورت و مخرج}} |\frac{-۴}{x+\frac{۱}{x}}| = \frac{۴}{|x+\frac{۱}{x}|}$$

مخرج کسر همواره مثبت است، لذا، برای این‌که بیشترین مقدار فاصله را محاسبه کنیم باید مخرج کسر، کمترین مقدار خود را داشته باشد:

$$x+\frac{۱}{x} \geq ۲ \quad \text{یا} \quad x+\frac{۱}{x} \leq -۲ \Rightarrow |x+\frac{۱}{x}| \geq ۲$$

$$\Rightarrow \max\{\frac{۴}{|x+\frac{۱}{x}|}\} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** (جهانبخش نیکنام)

با توجه به نمودار تابع، در $x=۰$، مجانب افقی تابع با نمودار تابع برخورد دارد:

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{۱}{b} \\ f(۰) = \frac{۹b+۲}{\frac{۵}{۳}} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{b} = \frac{۹b+۲}{\frac{۵}{۳}}$$

$$\Rightarrow ۲۷b^۲+۶b-۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{۱}{۳} & (*) \\ b=-\frac{۵}{۹} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

از طرفی نمودار تابع f بر محور xها (بخش مثبت) مماس است، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف مثبت است:

$$x^۲+ax+۹b+۲=۰ \xrightarrow{\Delta=۰} a^۲-۴(۹b+۲)=۰$$

$$\xrightarrow{(*)} a^۲-۲۰=۰ \Rightarrow a^۲=۲۰ \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵} \\ a=-\sqrt{۲۰}=-۲\sqrt{۵} \end{cases} \text{غ ق ق}$$

توجه:

۱) مجانب افقی $y=\frac{۱}{b}$ بالای محور xها قرار دارد، پس $b>۰$.

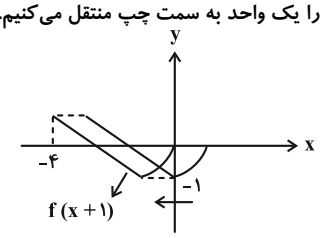
۲) چون $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف مثبت دارد، پس $a<۰$.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

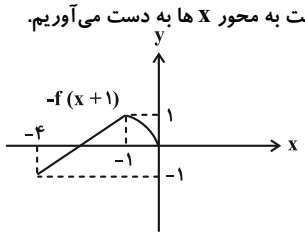
حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۱»** *(احمد حسن‌زاده‌فرد)*

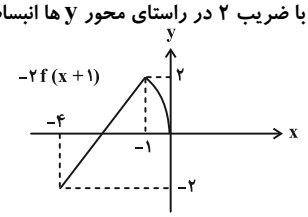
راه‌حل اول: نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.



قرینهٔ نمودار را نسبت به محور xها به دست می‌آوریم.



در نهایت نمودار را با ضریب ۲ در راستای محور yها انبساط می‌دهیم.



راه‌حل دوم: کافی است تبدیل یافتهٔ نقطهٔ $A(0,-1)$ را بیابیم:

$$\begin{cases} f(0)=-1 \\ y=-2f(x+1) \Rightarrow -\frac{y}{2}=f(x+1) \end{cases}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت: $\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ -\frac{y}{2}=-1 \Rightarrow y=2 \end{cases} \Rightarrow A'(-1,2)$

با توجه به گزینه‌ها، نقطهٔ $A'(-1,2)$ تنها روی نمودار گزینهٔ «۱» قرار دارد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۳ و ۷)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(علی آزاد)*

برای به دست آوردن دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(-x-2)}$ باید نامعادلهٔ $f(-x-2)\geq 0$ را حل کنیم. با توجه به نمودار تابع f، مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(x)\geq 0$ برابر $[-1,1]$ است، پس:

$$f(-x-2)\geq 0 \Rightarrow -1\leq -x-2\leq 1 \Rightarrow -3\leq x\leq -1$$

بازهٔ $[-3,-1]$ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(-x-2)}$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۳ و ۹)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(رضا ماجدی)*

مطابق نمودار داریم: $-2\leq \frac{1}{4}f(2x+1)-2\leq 8$

$$\Rightarrow 0\leq \frac{1}{4}f(2x+1)\leq 10 \Rightarrow 0\leq f(2x+1)\leq 40 \Rightarrow R_f=[0,40]$$

برد تابع $y=-f(\frac{x}{2})+2$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$0\leq f(\frac{x}{2})\leq 40 \Rightarrow -40\leq -f(\frac{x}{2})\leq 0$$

$$\Rightarrow -38\leq -f(\frac{x}{2})+2\leq 2 \Rightarrow R_y=[-38,2]$$

برد این تابع تنها شامل دو عدد طبیعی ۱ و ۲ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(احسان سیفی‌سلسله)*

لازم نیست تمام نمودار $y=3-2f(-2x)$ را رسم کنیم. بلکه کافی است نقاط متناظر با A و B را پیدا کنیم.

$$A(-3,3)\in f \Rightarrow f(-3)=3 \xrightarrow{x=\frac{3}{2}}$$

$$y=3-2f(-2(\frac{3}{2}))=3-2f(-3)=-3 \Rightarrow A'(\frac{3}{2},-3)$$

$$B(6,0)\in f \Rightarrow f(6)=0 \xrightarrow{x=-3}$$

$$y=3-2f(-2(-3))=3-2f(6)=3 \Rightarrow B'(-3,3)$$

جواب این سؤال فاصلهٔ بین A' و B' است:

$$A'B'=\sqrt{(-\frac{9}{2})^2+(6)^2}=\frac{15}{2}=7/5$$

(حسابان ۲- مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۰)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(کیان کریمی‌خراسانی)*

نمودار تابع $f(x)$ از یک مثلث با ارتفاع ۱ و قاعدهٔ ۴ تشکیل شده است.

نمودار تابع $(a+3)f(ax)$ از یک مثلث با ارتفاع $|a+3|$ و قاعدهٔ $|\frac{4}{a}|$ تشکیل شده است. مساحت مثلث جدید را می‌نویسیم:

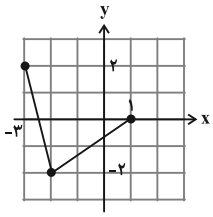
$$\frac{|a+3|\times|\frac{4}{a}|}{2}=4 \Rightarrow \frac{|a+3|}{|a|}=2 \Rightarrow \frac{a+3}{a}=\pm 2 \Rightarrow a=3,-1$$

مجموع مقادیر a برابر ۲ می‌شود.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷ و ۹)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(کیان کریمی‌خراسانی)*

برای رسم نمودار $g(x)=2f(x+1)$ باید نمودار $f(x)$ را ۱ واحد به چپ انتقال بدهیم و سپس عرض همهٔ نقاط را ۲ برابر کنیم. با توجه به نمودار g، داریم:



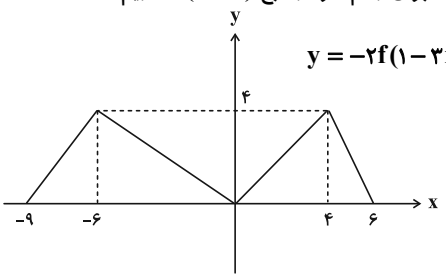
$$\left.\begin{aligned} R_g&=[-2,2] \\ D_g&=[-3,1] \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_g\cap D_g=[-2,1]$$

که این مجموعه شامل ۴ عدد صحیح است.

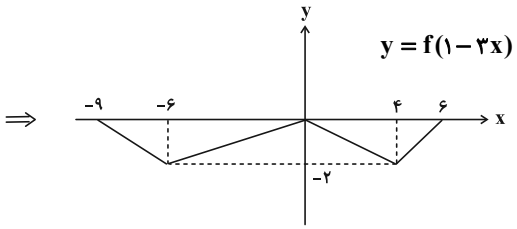
(حسابان ۲- صفحه‌های ۳ و ۷)
(کتاب پرتکرار حسابان ۲، سؤال ۹)

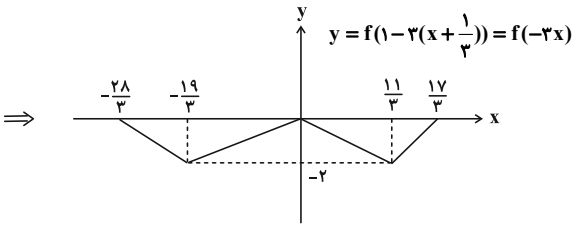
۷- **گزینهٔ «۲»** *(رضا ماجدی)*

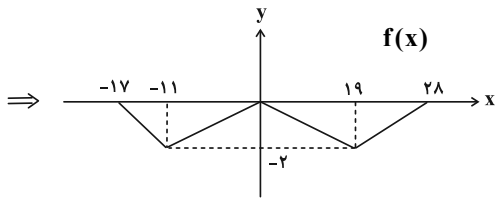
راه‌حل اول: برای رسم نمودار تابع $f(x-2)$ داریم:

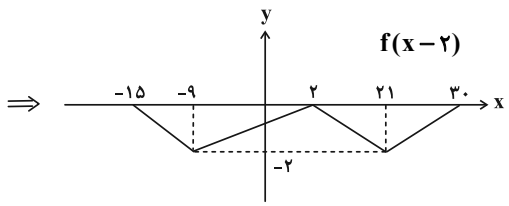


SanjeshCloud









$$\Rightarrow f(x-۲)=-۲\Rightarrow \begin{cases} x_۱=-۹ \\ x_۲=۲۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_۲-x_۱=۲۱-(-۹)=۳۰$$

راه‌حل دوم: ابتدا معادلهٔ $f(۱-۳x)=-۲$ را حل می‌کنیم:

$$y=-۲f(۱-۳x)\xrightarrow{f(۱-۳x)=-۲} y=۴$$

پس طول نقاط تقاطع نمودار داده شده با $y=۴$، جواب معادلهٔ مورد نظر است:

$$\begin{cases} f(۱-۳(۴))=f(-۱۱)=-۲\xrightarrow{x-۲=-۱۱} x=-۹ \\ f(۱-۳(-۶))=f(۱۹)=-۲\xrightarrow{x-۲=۱۹} x=۲۱ \end{cases}$$

اختلاف ریشه‌ها برابر ۳۰ می‌شود.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$f(x)=x^۲-۶x+۵=x^۲-۶x+۹-۴=(x-۳)^۲-۴$$

$$g(x)=-f(۲x+k)-۳\Rightarrow g(x)=-(۲x+k-۳)^۲+۴-۳$$

$$=-(۲x+k-۳)^۲+۱$$

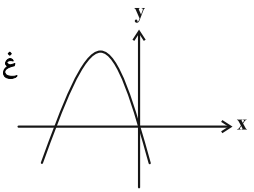
اگر قرار باشد سهمی فقط از ناحیهٔ اول عبور نکند آن‌گاه باید رأس سهمی در ربع دوم واقع شده و رو به پایین باشد. یعنی:

$$۲x+k-۳=۰\Rightarrow \text{طول رأس سهمی}: x_S=\frac{۳-k}{۲}<۰\Rightarrow k>۳$$

درضمن، حداقل مقدار k زمانی اتفاق می‌افتد که نمودار سهمی از مبدأ مختصات بگذرد:

$$(۰,۰)\in g\Rightarrow ۰=-(۰+k-۳)^۲+۱$$

$$\Rightarrow (k-۳)^۲=۱\Rightarrow \begin{cases} k=۴ & \text{ق ق} \\ k=۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$



(حسابان ۲- صفحه‌های ۳ تا ۹)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

در نظر می‌گیریم: $g(x)=۲f(\frac{x}{۲}-۱)+۱$. طبق فرض نقطهٔ $A=(۱,۲)$ روی تابع g قرار دارد، پس داریم:

$$g(۲)=۱\Rightarrow ۲f(۱-۱)+۱=۱\Rightarrow ۲f(۰)=۰\Rightarrow f(۰)=۰$$

نقطهٔ $A'=(۰,۰)$ روی نمودار تابع f متناظر با نقطهٔ A است.

$$AA'=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

(حسابان ۲- مشابه مثال صفحهٔ ۱۰)

(کتاب پرتکرار حسابان ۲، مشابه سؤال ۷ (پ))

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

راه‌حل اول: قرار دهیم $k=\frac{m}{n}$. نقاط جدول زیر روی نمودار تابع $y=f(x)$ است:

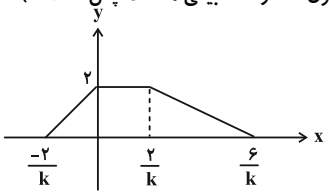
x	-۲	۰	۲	۶
y	۰	۲	۲	۰

نظیر این نقاط روی نمودار $y=f(kx)$ به صورت زیر است:

x	$-\frac{۲}{k}$	۰	$\frac{۲}{k}$	$\frac{۶}{k}$
y	۰	۲	۲	۰

بنابراین نمودار تابع $y=f(kx)$ به شکل زیر است:

(دقت کنید که چون m و n طبیعی هستند، پس $k>۰$)



پس ناحیهٔ محدود به نمودار تابع و محور طول‌ها ذوزنقه‌ای است که طول قاعدهٔ کوچک آن $\frac{۲}{k}$، طول قاعدهٔ بزرگ آن $\frac{۶}{k}-(-\frac{۲}{k})=\frac{۸}{k}$ و ارتفاع آن ۲ است. پس:

$$۱۵=\frac{۱}{۲}(\frac{۲}{k}+\frac{۸}{k})\times ۲\Rightarrow \frac{۱۰}{k}=۱۵\Rightarrow k=\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین $(m,n)=(۳,۲)$ و در نتیجه $۲m+n=۷$.

راه‌حل دوم: می‌دانیم اگر مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y=f(x)$ و محور xها برابر S باشد آن‌گاه مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y=f(kx)$ و محور xها برابر $\frac{S}{k}$ خواهد بود (چرا؟)، پس مطابق شکل صورت سؤال داریم:

$$\frac{S}{\frac{m}{n}}=۱۵\ ;\text{طبق فرض}\quad S=\frac{(۲+۸)\times ۲}{۲}=۱۰\ ;\text{مساحت ذوزنقه}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow m=۲\ ,\ n=۳\Rightarrow ۲m+n=۷$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹)

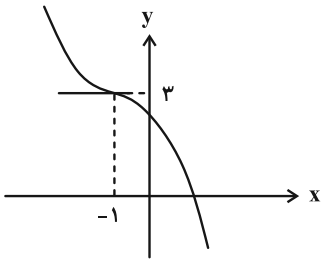
حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا نداف‌زاده)*

ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=-(x^3+3x^2+3x)+2=-[(x+1)^3-1]+2$$

$$f(x)=-(x+1)^3+3$$



نمودار از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۲ تا ۵، ۱۳ و ۱۴)

(مشابه سوال ۴۴ کتاب پرتکرار حسابان (۲))

۲- **گزینهٔ «۲»** *(سعید تن‌آرا)*

با توجه به دامنهٔ g، درمی‌یابیم که نمودار g از انتقال یک واحدی نمودار f به سمت راست حاصل شده است. بنابراین $k=-1$. در نتیجه:

$$g(x)=(2-(-1))f(x-1)=3f(x-1)$$

لذا عرض نقاط g از ۳ برابر کردن عرض نقاط f به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$R_g=[0\times 3\ ,\ 4\times 3]=[0\ ,12]$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۳ و ۷)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(کیان کریمی‌خراسانی)*

پس از ضرب کردن دو پرانتز داریم:

$$f(x)=x^5+4x^3+2x^2+8+ax^n$$

اگر $a=-1$ و $n=5$ باشند، آن‌گاه جملهٔ درجهٔ ۵ حذف می‌شود.

در نتیجه: $a+n=4$

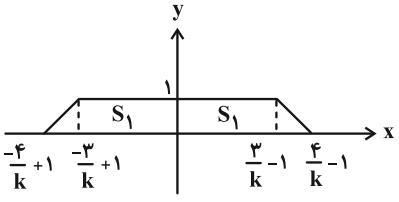
(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

(مشابه سوال ۳۷ (الف) کتاب پرتکرار حسابان (۲))

۴- **گزینهٔ «۴»** *(جهانبخش نیکنام)*

مساحت بین نمودار تابع f و محور xها برابر است با: $\frac{1}{2}(3+7)\times 1=5$

نمودار تابع $y=f(k(|x|+1))$ به صورت زیر است که در آن، محور yها محور تقارن می‌باشد:



$$S=2S_1=2(\frac{1}{2}(\frac{7}{k}-2)\times 1)=\frac{7}{k}-2$$

طبق فرض: $\frac{7}{k}-2=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{7}{k}=\frac{9}{2}\Rightarrow k=\frac{14}{9}$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(مریم زارعی)*

تابع $f=\{(2\ ,\ 6c-10)\ ,\ (0\ ,\ 2c)\ ,\ (4\ ,\ -2c+2)\}$ اکیداً نزولی است، یعنی:

$$0<2<4\Rightarrow f(0)>f(2)>f(4)\Rightarrow 2c>6c-10>-2c+2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6c-10<2c\Rightarrow 4c<10\Rightarrow c<\frac{5}{2}\\ 6c-10>-2c+2\Rightarrow 8c>12\Rightarrow c>\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}<c<\frac{5}{2}$$

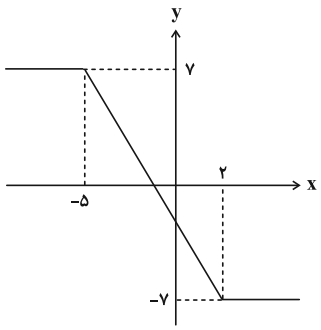
پس گزینهٔ «۲» صحیح است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

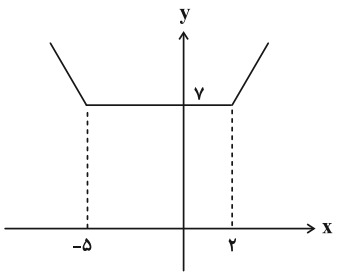
۶- **گزینهٔ «۴»** *(حامد قاسمیان)*

نمودار توابع را در هر گزینه رسم می‌کنیم:

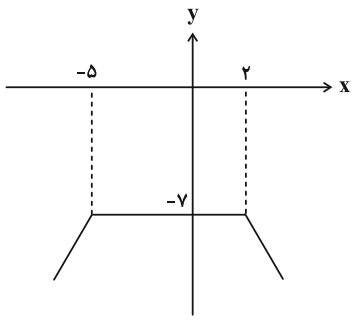
۱) درست:



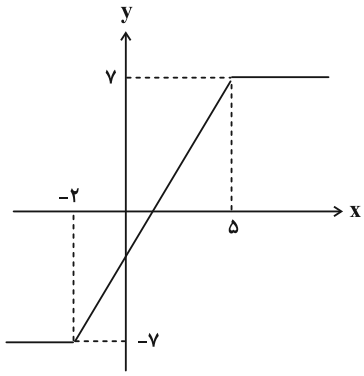
۲) درست:



۳) درست:



۴) نادرست:



نمودار گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ در بازه‌های مذکور، اکیداً نزولی هستند ولی فقط نمودار گزینهٔ ۴ در بازهٔ مذکور اکیداً صعودی است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید نقطهٔ $A'=(a,b)$ روی تابع g متناظر با نقطهٔ $A=(-۲,۱)$ روی تابع f باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{cases}\frac{۱}{۳}a-۱=-۲\Rightarrow a=-۳\\ b=۲(۱)+۱=۳\end{cases}$$

در نتیجه $a+b=۰$.

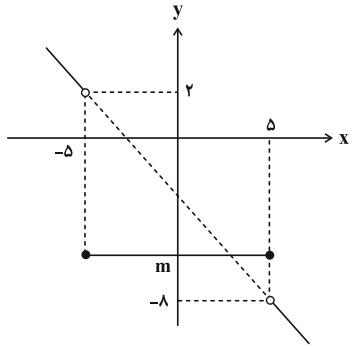
(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

(مشابه سوال ۳ نهایی دی ۱۴۰۳)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(حمید علیزاده)*

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x-۳ & x<-۵ \text{ یا } x>۵\\ m & -۵\le x\le ۵\end{cases}$$



با توجه به نمودار رسم شده، اگر $m\in[-۸,۲]$ باشد آن‌گاه تابع f در $\mathbb{R}$ نزولی است و داریم:

$$\begin{cases}a=-۸\\ b=۲\end{cases}\Rightarrow b-a=۱۰$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(طاهر دارستانی)*

$$f(x)=\sqrt{۱-x}+x^۲-۲x+۳\Rightarrow ۱-x\ge ۰\Rightarrow x\le ۱$$

به ازای $x\le ۱$ تابع f از جمع دو تابع اکیداً نزولی $y=\sqrt{۱-x}$ و $y=x^۲-۲x+۳$ تشکیل شده است. پس f اکیداً نزولی است. پس داریم:

$$y=\sqrt{f(۳x-۱)-f(۱-۲x)}\Rightarrow f(۳x-۱)-f(۱-۲x)\ge ۰$$

$$\Rightarrow f(۳x-۱)\ge f(۱-۲x)\xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}}۳x-۱\le ۱-۲x$$

$$\Rightarrow x\le\frac{۲}{۵}\qquad (۱)$$

دامنهٔ تابع f، $(-\infty,۱]$ است پس دامنهٔ توابع $f(۳x-۱)$ و $f(۱-۲x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}۳x-۱\le ۱\Rightarrow x\le\frac{۲}{۳} & (۲)\\ ۱-۲x\le ۱\Rightarrow x\ge ۰ & (۳)\end{cases}$$

از اشتراک (۱)، (۲) و (۳) دامنهٔ تابع g بازهٔ $[۰,\frac{۲}{۵}]$ است.

و در نتیجه:

$$۵b-۴a=۲-۰=۲$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(حسین صنمی)*

برای یکنوا بودن f باید شیب خطوط قبل و بعد ریشهٔ داخل قدرمطلق هم‌علامت باشند، پس:

$$(۳+a)(۳-a)>۰\Rightarrow -۳<a<۳\quad ,\quad a\neq ۰$$

نمودار تابع g به صورت یک سهمی است که در $x=-\frac{۱}{a}$ نسبت به محور xها قرینه می‌شود. با توجه به این‌که یکنوایی تابع درجه دوم در رأس آن تغییر می‌کند، طول رأس این سهمی باید برابر $-\frac{۱}{a}$ باشد.

$$۰<a<۳: g(x)=\begin{cases}(ax+۱)(bx+۱) & x>-\frac{۱}{a}\\ -(ax+۱)(bx+۱) & x<-\frac{۱}{a}\end{cases}$$

$$y=abx^۲+(a+b)x+۱\xrightarrow{\text{طول رأس سهمی }=-\frac{۱}{a}}$$

$$\frac{-(a+b)}{۲ab}=-\frac{۱}{a}\Rightarrow a+b=۲b\Rightarrow a=b$$

برای $-۳<a<۰$ هم مشابه $۰<a<۳$ نتیجه می‌شود $a=b$. بنابراین:

$$a+b=۲a\Rightarrow ۲a\in(-۶,۶)-\{۰\}\Rightarrow \underbrace{-۵,\dots,-۱,۱,\dots,۵}_{۱۰\text{ مقدار}}$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۳»** *(احمد حسن‌زاده‌فرد)*

چون $P(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$P(۲)=۰ \Rightarrow (۲)^۳+a(۲)^۲+b(۲)-۲=۰$$

$$\Rightarrow ۸+۴a+۲b-۲=۰ \Rightarrow ۴a+۲b=-۶$$

حال چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۱$ برابر ۳ است، داریم:

$$x+۱=۰ \Rightarrow P(-۱)=۳$$

$$(-۱)^۳+a(-۱)^۲+b(-۱)-۲=۳$$

$$-۱+a-b-۲=۳ \Rightarrow a-b=۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴a+۲b=-۶ \\ a-b=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=-۵ \end{cases}$$

(حسابان ۲- تابع؛ مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(مریم زارعی)*

طبق فرض، $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ سوم بوده که با توجه به قضیهٔ تقسیم داریم:

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

$$\Rightarrow f(x)=(x^۲+۲x+۲)(ax+b)+(x-۳) \qquad (*)$$

حال با توجه به فرض سوال داریم:

$$f(۱)=۳ \Rightarrow f(۱)=(۱+۲+۲)(a+b)+۱-۳=۳$$

$$\Rightarrow ۵(a+b)-۲=۳ \Rightarrow ۵(a+b)=۵ \Rightarrow a+b=۱$$

$$f(-۲)=۱ \Rightarrow f(-۲)=(۴-۴+۲)(-۲a+b)-۲-۳=۱$$

$$\Rightarrow ۲(-۲a+b)-۵=۱ \Rightarrow ۲(-۲a+b)=۶ \Rightarrow -۲a+b=۳$$

$$\left.\begin{matrix} a+b=۱ \\ -۲a+b=۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۳a=-۲ \Rightarrow a=-\frac{۲}{۳}\ ,\ b=\frac{۵}{۳}$$

حال اگر a و b را در معادلهٔ (*) جای‌گذاری کنیم $f(x)$ به دست می‌آید:

$$f(x)=-\frac{۲}{۳}x^۳+\frac{۱}{۳}x^۲+۳x+\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow f(۶)=-\frac{۴۳۲}{۳}+\frac{۳۶}{۳}+۱۸+\frac{۱}{۳}=-\frac{۳۴۱}{۳}$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(سینا خیرخواه)*

برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ مقدار $P(-\frac{b}{a})$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲x+۲=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow P(-۱)=۳ \\ ۳x-۳=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow P(۱)=۱ \end{cases}$$

الگوریتم تقسیم $P(x)$ بر $x^۲-۱$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(x)=(x^۲-۱)\underset{\text{خارج قسمت}}{Q(x)}+\underset{\text{باقی‌مانده}}{R(x)} \Rightarrow P(x)=(x^۲-۱)Q(x)+ax+b$$

$$\begin{cases} P(۱)=۱ \Rightarrow ۱=۰+a+b \Rightarrow a+b=۱ \\ P(-۱)=۳ \Rightarrow ۳=۰-a+b \Rightarrow -a+b=۳ \end{cases} \Rightarrow b=۲\ ,\ a=-۱$$

باقی مانده $R=ax+b=-x+۲$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

فرض می‌کنیم بیشینهٔ تابع برابر m باشد. در این صورت:

$$\begin{cases} |a|+c=m \\ -|a|+c=-۱ \end{cases} \Rightarrow c=\frac{m-۱}{۲}\ ,\ |a|=\frac{m+۱}{۲}$$

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=3\pi\Rightarrow|b|=\frac{2}{3}$$

طبق نمودار a و b هم‌علامت‌اند و چون بیشینهٔ مجموع داده شده، پس هم a و هم b مثبت‌اند. یعنی $b=\frac{2}{3}$ و $a=\frac{m+1}{2}$.

$$a+b+c=\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{m+1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{m-1}{2}=\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow m=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\Rightarrow c=\frac{\frac{5}{3}-1}{2}=\frac{1}{3}$$

عرض نقطهٔ تقاطع نمودار f با محور yها همان $c=\frac{1}{3}$ است، زیرا:

$$f(0)=a\sin 0+c=c$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

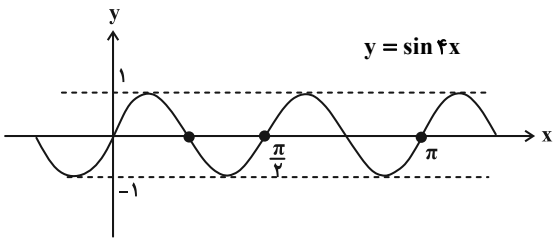
۵- **گزینهٔ «۱»** *(غلامرضا نیازی)*

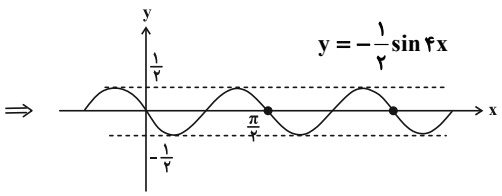
ابتدا معادلهٔ مورد نظر را ساده می‌کنیم:

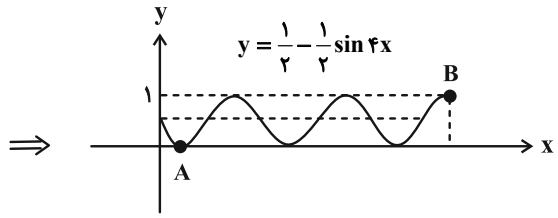
$$\left.\begin{matrix}\sin(\frac{3\pi}{2}-2x)=-\cos 2x\\ \sin(\pi+2x)=-\sin 2x\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=\frac{1}{2}-\sin 2x\cos 2x$$

$$\xrightarrow{\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x} y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 4x$$

حال نمودار تابع به دست آمده را رسم می‌کنیم تا A و B را به دست آوریم:







$$\Rightarrow A(\frac{\pi}{8},0)\ ,\ B(\frac{3\pi}{8}+2(\frac{\pi}{2}),1)$$

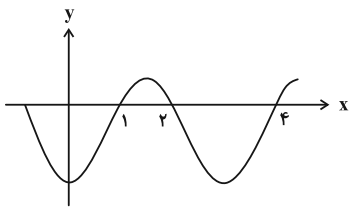
$$\Rightarrow m_{AB}=\frac{1-0}{\frac{11\pi}{8}-\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{\frac{10\pi}{8}}=\frac{4}{5\pi}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله مسنی)*

می‌دانیم $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ بنابراین:

$$f(x)=a(\frac{1+\cos(\frac{2\pi x}{b})}{2})-\frac{1}{a}\Rightarrow f(x)=\frac{a}{2}-\frac{1}{a}+\frac{a}{2}\cos(\frac{2\pi x}{b})$$



با توجه به نمودار، $T=4-1=3$، از طرفی $T=\frac{2\pi}{|b|}$

پس $|b|=3$.

چون تابع کسینوسی است، می‌توان فرض کرد $b=3$. بنابراین:

$$f(x)=\frac{a}{2}-\frac{1}{a}+\frac{a}{2}\cos(\frac{2\pi x}{3})$$

مجدداً با توجه به نمودار، $f(1)=0$. پس:

$$0=f(1)=\frac{a}{2}-\frac{1}{a}+\frac{a}{2}\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{a}{2}-\frac{1}{a}+\frac{a}{2}(-\frac{1}{2})$$

$$=\frac{a}{2}-\frac{1}{a}-\frac{a}{4}=\frac{a}{4}-\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{a}{4}=\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2\ \text{یا}\ a=-2$$

اما چون $f(0)<0$ لذا $f(0)=a\cos^2 0-\frac{1}{a}=a-\frac{1}{a}<0$ پس $a=2$

قابل قبول نیست و بنابراین $a=-2$. پس $f(x)=-\frac{1}{2}-\cos(\frac{2\pi x}{3})$ در نتیجه:

$$f(\frac{19}{2})=-\frac{1}{2}-\cos(\frac{2\pi}{3}\times\frac{19}{2})=-\frac{1}{2}-\cos(\frac{19\pi}{3})$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(مریم زارعی)*

ابتدا مقادیر a، b و c را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix}\max=|a|+c=1\\ \min=-|a|+c=-5\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2c=-4\Rightarrow c=-2$$

حال مقدار $c=-2$ را در رابطهٔ بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$|a|+c=1\Rightarrow|a|+(-2)=1\Rightarrow|a|=3\Rightarrow a=\pm 3$$

داریم: $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{8}\Rightarrow|b|=16\Rightarrow b=\pm 16$

با توجه به شکل $ab>0$ است، فرض می‌کنیم هر دو مثبت هستند در این صورت داریم: $f(x)=3\sin(16x)-2$

پس می‌خواهیم $f(\frac{\pi}{48})$ را محاسبه نماییم.

$$f(\frac{\pi}{48})=3\sin(16\times\frac{\pi}{48})-2=3\sin(\frac{\pi}{3})-2=\frac{3\sqrt{3}}{2}-2$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(شیوا امین)*

تابع $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است:

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$$

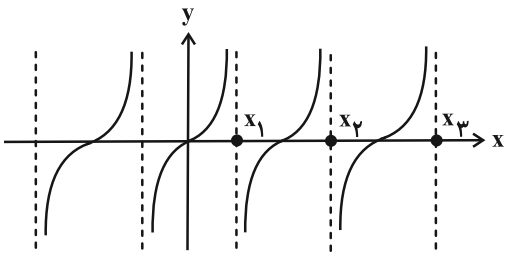
$$\min:-|-1|+3=2\Rightarrow\frac{\min}{T}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ مشابه مثال صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(دانیال آرکیش)*

بهترین راه، رسم نمودار تابع $f(x)$ توسط نمودار تابع $y=\tan x$ است.

طول نقاط تابع $y=\tan x$ را بر $\frac{3\pi}{4}$ تقسیم می‌کنیم:



$$x_1=\frac{4}{3\pi}\times\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}$$

$$x_2=\frac{4}{3\pi}\times\frac{3\pi}{2}=2$$

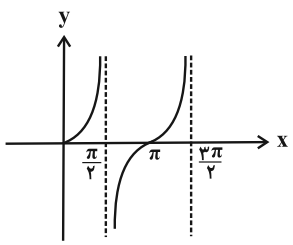
$$x_3=\frac{4}{3\pi}\times\frac{5\pi}{2}=\frac{10}{3}$$

با توجه به نمودار، تابع روی بازهٔ $(2,\frac{10}{3})$ اکیداً صعودی است. لذا حداکثر a برابر $\frac{10}{3}$ است.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به نمودار، تابع تانژانت در بازهٔ $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ اکیداً صعودی و در مجموعهٔ $(0,\pi)-\{\frac{\pi}{2}\}$ غیریکنوا است (نه صعودی و نه نزولی).



(حسابان ۲- مثلثات؛ مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۳۲ کتاب درسی)

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمد زنگنه)*

داریم: $\sin 2x - \cos(x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin 2x = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = 0, 2\pi \\ 2x = (2k+1)\pi - x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها در بازهٔ $[0 , 2\pi]$ برابر می‌شود با:

$$0 + 2\pi + \frac{\pi}{3} + \pi + \frac{5\pi}{3} = 5\pi$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۴۴)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(مهسان کوررزی)*

می‌دانیم جواب کلی معادلهٔ $\cos\alpha = -1$ برابر با $\alpha = (2k+1)\pi$ است.

پس داریم: $\pi \sin x = (2k+1)\pi \Rightarrow \sin x = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -1 \le 2k+1 \le 1 \Rightarrow -1 \le k \le 0 \Rightarrow k = -1, 0$$

با توجه به مقادیر k، سینوس می‌تواند ± 1 باشد، پس داریم:

$$\sin x = -1 \xrightarrow{x \in [\pi, 2\pi]} x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x = 1 \xrightarrow{x \in [\pi, 2\pi]} \text{بدون جواب}$$

بنابراین معادله در بازهٔ مذکور، فقط یک جواب دارد.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(مهسان کوررزی)*

باید صورت معادله صفر باشد به شرطی که مخرج مخالف صفر شود.

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

در بازهٔ $[0 , 2\pi]$ جواب‌ها برابر می‌شوند با:

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{5\pi}{4}$ حاصل $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ برابر $\cos\frac{\pi}{2}$ و $\cos\frac{3\pi}{2}$ می‌شود که هر دو صفر هستند پس فقط $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ قابل قبولند که این دو زاویه هم روی دایرهٔ مثلثاتی روبه‌روی هم قرار دارند (اختلاف‌شان π است) پس جواب کلی به صورت $k\pi + \frac{3\pi}{4}$ یا $k\pi + \frac{7\pi}{4}$ است که معادل آن در گزینه‌ها $k\pi - \frac{\pi}{4}$ می‌باشد.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(احمد حسن زاده‌فرد)*

با تغییر متغیر $t = \sin x$ معادله را حل می‌کنیم:

$$2t^2 - 9t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{81+40}}{4} = \frac{9 \pm 11}{4}$$

$$\begin{cases} t = \sin x = 5 & \text{غ ق ق} \\ t = \sin x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} & \text{ق ق} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

بنابراین در بازهٔ $(0 , 2\pi)$، تنها دو مقدار $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ قابل قبول است که اختلاف آن دو $\frac{2\pi}{3}$ می‌شود.

(حسابان ۲- مثلثات؛ مشابه مثال صفحهٔ ۴۰)

۵- **گزینهٔ «۳»** (غلامرضا نیازی)

با توجه به صورت سوال داریم:

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$\xrightarrow[\cos x\neq -1]{\sin x\neq -1}\cos x(1+\cos x)=\sin x(1+\sin x)$$

$$\Rightarrow \cos x+\cos^2 x=\sin x+\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=\sin x-\cos x$$

$$\Rightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\sin x-\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin x=\cos x\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\xrightarrow{x\in[0\,,\,2\pi]} x=\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{5\pi}{4}\\ \cos x+\sin x=-1\Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{5\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\pi=(2k+1)\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}\\ \Rightarrow x=\pi \quad \text{غ ق ق} \qquad (\cos\pi=-1)\\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{5\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\\ \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2} \quad \text{غ ق ق} \qquad (\sin\frac{3\pi}{2}=-1)\end{cases}$$

پس معادله دارای دو جواب قابل قبول $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ در این بازه است.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۶- **گزینهٔ «۳»** (جهانبخش نیکنام)

ابتدا معادله را ساده تر می‌کنیم:

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\cos x\Rightarrow 1+\sin x=\cos x-\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \sin x-\cos x+\sin x\cos x+1=0 \qquad (1)$$

سپس از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin x-\cos x=t\xrightarrow{\text{توان ۲}}1-2\sin x\cos x=t^2$$

$$\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$$

$$\xrightarrow{(1)} t^2-2t-3=0\Rightarrow t=-1 \text{ (ق ق)} \quad \text{یا} \quad t=3 \text{ (غ ق ق)}$$

$$\sin x-\cos x=-1\xrightarrow{\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}$$

$$\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-1\Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{5\pi}{4}\xrightarrow{[-\pi\,,\,2\pi]} x=-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{4}=(2k+1)\pi-\frac{5\pi}{4}\xrightarrow{[-\pi\,,\,2\pi]} x=0\,,\,2\pi\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های مورد نظر برابر می‌شود با 3π.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۷- **گزینهٔ «۲»** (حمید علیزاده)

با توجه به شکل داریم:

$$\tan\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

مثلث قائم‌الزاویه $\Rightarrow \cot\beta=\tan 3\alpha=\tan(\alpha+2\alpha)$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan 2\alpha}{1-\tan\alpha\tan 2\alpha}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}(\frac{4}{3})}=\frac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{11}{2}=5/5$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ مشابه مثال صفحهٔ ۴۳)

۸- **گزینهٔ «۳»** (مهسان کوررزی)

ابتدا $\tan(30^\circ-x)$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$(30^\circ-x)+(x+15^\circ)=45^\circ\Rightarrow \tan[(30^\circ-x)+(x+15^\circ)]=\tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(30^\circ-x)+\tan(x+15^\circ)}{1-\tan(30^\circ-x)\tan(x+15^\circ)}=1$$

طبق فرض مسئله $\tan(x+15^\circ)=\frac{3}{4}$ می‌باشد، پس:

$$\Rightarrow \frac{\tan(30^\circ-x)+\frac{3}{4}}{1-\tan(30^\circ-x)\times\frac{3}{4}}=1$$

$$\Rightarrow \tan(30^\circ-x)+\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}\tan(30^\circ-x)$$

$$\Rightarrow \tan(30^\circ-x)+\frac{3}{4}\tan(30^\circ-x)=1-\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4}\tan(30^\circ-x)=\frac{1}{4}\Rightarrow \tan(30^\circ-x)=\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \cot(30^\circ-x)=7$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

می‌دانیم $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$؛ طبق فرض داریم:

$$(\tan 3x+1)(\tan 2x+1)=2$$

$$\tan 3x.\tan 2x+\tan 3x+\tan 2x+1=2$$

$$\Rightarrow \tan 3x+\tan 2x=1-\tan 3x\tan 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 3x+\tan 2x}{1-\tan 3x\tan 2x}=1\Rightarrow \tan(3x+2x)=1$$

$$\Rightarrow \tan 5x=1=\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow 5x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{20}=\frac{(4k+1)\pi}{20}\quad ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

چون $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ پس:

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{(4k+1)\pi}{20}<\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\times\frac{20}{\pi}}-10<4k+1<10$$

$$\Rightarrow -11<4k<9\Rightarrow -\frac{11}{4}<k<\frac{9}{4}$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=-2,-1,0,1,2\Rightarrow x=-\frac{7\pi}{20},-\frac{3\pi}{20},\frac{\pi}{20},\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{20}$$

به ازای $x=\frac{\pi}{4}$، $\tan 2x$ تعریف نمی‌شود پس این جواب قابل قبول نیست.

بنابراین مجموع ریشه‌های قابل قبول معادله در بازهٔ مذکور برابر است با:

$$(-\frac{7\pi}{20})+(-\frac{3\pi}{20})+\frac{\pi}{20}+\frac{9\pi}{20}=0$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۱ تا ۴۴)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(شاهین پروازی)*

برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد نمودار دو تابع f و g، معادلهٔ $f(x)=g(x)$

را حل می‌کنیم: $\frac{1-\cos x}{\sin x}=|\tan x|\xrightarrow{\cos 2x=1-2\sin^2 x,\ \sin 2x=2\sin x\cos x}$

$$\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=|\tan x|\Rightarrow \tan\frac{x}{2}=|\tan x|\qquad (*)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan x=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{x}{2}\Rightarrow x=2k\pi\\ \tan x=-\tan\frac{x}{2}=\tan(-\frac{x}{2})\Rightarrow x=k\pi-\frac{x}{2}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\in[0\ ,\ 2\pi]}\begin{cases}x=0,2\pi\\ x=0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},2\pi\end{cases}$$

دقت کنید که با توجه به دامنهٔ توابع f و g باید $\sin x\neq 0$ و $\cos x\neq 0$

و همچنین به دلیل رابطهٔ (*) باید $\tan\frac{x}{2}>0$ باشد، پس تنها جواب قابل

قبول $x=\frac{2\pi}{3}$ است و داریم:

$$\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{3})=\cos(-\frac{2\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۴»** *(غلامرضا نیازی)*

تغییرات ضابطهٔ تابع f براساس فرض سوال به صورت زیر می‌شود:

k واحد به سمت راست $\Rightarrow f(x-k)=2(x-k)^2-(x-k)$

$=2x^2-(4k+1)x+2k^2+k$

a واحد به سمت پایین $\Rightarrow f(x-k)-a$

$=2x^2-(4k+1)x+2k^2+k-a$

طبق فرض داریم:

مجموع صفرهای تابع جدید $S=-\frac{b}{a}=\frac{4k+1}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow k=1$

عرض از مبدأ تابع جدید $=2k^2+k-a \overset{k=1}{=\!=} 3-a$

$\Rightarrow 3-a=1\Rightarrow a=2$

در نتیجه $k+a=3$.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۲ تا ۵)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(شاهین پروازی)*

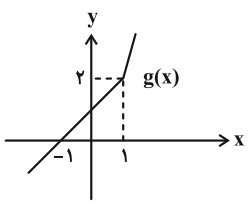
ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad x>0\\ a & , \quad x=0\\ -1 & , \quad x<0\end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع $g(x)$، ضابطهٔ fog را تشکیل می‌دهیم:

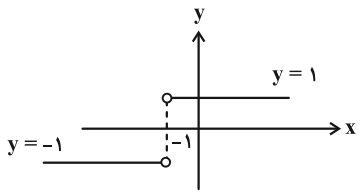
$$g(x)=2x+|x-1|=\begin{cases}3x-1 & , \quad x\geq 1\\ x+1 & , \quad x<1\end{cases}$$

$g(x)=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1$ (طول نقطهٔ برخورد با محور x ها)



$$fog=\begin{cases}1 & , \quad g(x)>0\\ a & , \quad g(x)=0\\ -1 & , \quad g(x)<0\end{cases}\Rightarrow fog=\begin{cases}1 & , \quad x>-1\\ a & , \quad x=-1\\ -1 & , \quad x<-1\end{cases}$$

نمودار تابع fog در مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-1\}$ به صورت زیر است:



برای آن‌که fog روی مجموعه اعداد حقیقی، تابعی صعودی باشد، باید $a\leq 1$ باشد که شامل ۳ عدد صحیح است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

چون $P(x)=x^3-x+1$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است پس $P(a)=0$ و داریم:

$a^3-a+1=0\Rightarrow a^3=a-1$

برای تعیین باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^5+x-2$ بر $ax-1$ کافی است مقدار $f(\frac{1}{a})$ را محاسبه کنیم:

$$f(\frac{1}{a})=(\frac{1}{a})^5+\frac{1}{a}-2=\frac{1}{a^5}+\frac{1}{a}-2$$

$$=\frac{1+a^4}{a^5}-2=\frac{1+a(a^3)}{a^2(a^3)}-2=\frac{1+a(a-1)}{a^2(a-1)}-2$$

$$=\frac{1+a^2-a}{a^3-a^2}-2=\frac{1+a^2-a}{a-1-a^2}-2=-1-2=-3$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(غلامرضا نیازی)*

می‌دانیم $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$، پس ضابطهٔ تابع f به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f(x)=a(\frac{1+\cos 2(3x+\frac{\pi}{4})}{2})+c=\frac{a}{2}(1+\cos(\frac{\pi}{2}+6x))+c$$

$$f(x)=\frac{a}{2}(1-\sin 6x)+c=-\frac{a}{2}\sin 6x+\frac{a}{2}+c$$

نمودار تابع f از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس:

$$f(0)=0\Rightarrow \frac{a}{2}+c=0\Rightarrow a=-2c$$

در نتیجه:

$$f(x)=-\frac{a}{2}\sin 6x \xrightarrow{\text{در مبدأ صعودی } f} -\frac{a}{2}>0 \Rightarrow a<0$$

$$\begin{cases} \text{طول ضلع } BC = x_C - x_B = \text{یک دورهٔ تناوب} = \frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3} \\ \text{ارتفاع } AH = \max(f)-\min(f)=2\left|\frac{a}{2}\right|=|a|=-a \end{cases}$$

داریم:

$$S_{ABC}=\frac{BC\times AH}{2}=\frac{\frac{\pi}{3}\times(-a)}{2}=\pi \Rightarrow a=-6$$

$$\Rightarrow c=-\frac{a}{2}=3 \Rightarrow a+c=-3$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا مسکر)*

معادلهٔ مفروض را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x+2\cos x=1 \Rightarrow 2\cos x=1-\sin x$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 4\cos^2 x=1-2\sin x+\sin^2 x$$

$$\xrightarrow{\cos^2 x=1-\sin^2 x} 4(1-\sin^2 x)=1-2\sin x+\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 5\sin^2 x-2\sin x-3=0 \Rightarrow (\sin x-1)(5\sin x+3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=1 \\ \sin x=-\frac{3}{5} \end{cases}$$

با توجه به آن که سینوس در بازهٔ $[\pi\ ,\ 2\pi]$ مقداری نامثبت است، پس:

$$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$$

برای محاسبهٔ $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)$، لازم است مقدار $\tan\alpha$ را به دست آوریم:

$$\xrightarrow{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}(-\frac{3}{5})^2+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=\frac{4}{5} & \text{ق ق} \\ \cos\alpha=-\frac{4}{5} & \text{(در معادله صدق نمی‌کند) غ ق ق} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \tan\alpha=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$$

با توجه به رابطهٔ تانژانت تفاضل دو زاویه داریم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-(-\frac{3}{4})}{1+(1)(-\frac{3}{4})}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}}=7$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(دانیال آرکیش)*

با توجه به فرض داریم:

$$\cos(3x-\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}=\cos(\frac{2\pi}{3})$$

(حالت ۱) $3x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$

k	۰	۱	۲
زاویه	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$

(حالت ۲) $3x-\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{9}$

k	۰	۱	۲	۳
زاویه	$-\frac{\pi}{9}$ ↓ غ ق ق	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{9}$	$\frac{17\pi}{9}$

در $[0, 2\pi[$ قرار ندارد.

بزرگ‌ترین جواب $\frac{17\pi}{9}$ و کوچک‌ترین جواب $\frac{\pi}{3}$ است. در نتیجه:

$$\frac{17\pi}{9}-\frac{\pi}{3}=\frac{17\pi-3\pi}{9}=\frac{14\pi}{9} \Rightarrow \frac{\frac{14\pi}{9}}{\frac{\pi}{18}}=\frac{14\times 18}{9}=28$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۴۴)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(غلامرضا نیازی)*

می‌دانیم حد تابع $\tan$ در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$، نامتناهی است، پس:

$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty \Rightarrow \lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}} \tan^2 x = +\infty$$

در نتیجه باید:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\pi x}{a+2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+2} = \frac{2k+1}{2} \Rightarrow a+2 = \frac{2}{2k+1} \Rightarrow a = \frac{2}{2k+1} - 2$$

توجه: از آنجا که $k\in\mathbb{Z}$ است، مقادیر $2k+1$، اعداد $\ldots,-3,-1,1,3,\ldots$ به دست می‌آید که فقط به ازای $2k+1=\pm 1$، مقدار a عددی صحیح می‌شود. پس:

$$\begin{cases} 2k+1=1 \Rightarrow a=0 \\ 2k+1=-1 \Rightarrow a=-4 \end{cases}$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی، حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(حمید علیزاده)*

با توجه به فرض داریم:

$$y = \frac{1-[x]}{1-x^2} \xrightarrow[\text{رادو برابر می‌کنیم}]{\text{طول نقاط دامنه}} y = \frac{1-[\frac{x}{2}]}{1-(\frac{x}{2})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y = \frac{1-[\frac{1}{2}(x-1)]}{1-(\frac{1}{2}(x-1))^2} = g(x)$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{1-[\frac{x-1}{2}]}{1-\frac{1}{4}(x-1)^2}$$

$$= \frac{1-[1^-]}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی، حد در بی‌نهایت؛ مشابه کار در کلاس (ب) صفحهٔ ۵۳)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

برای این‌که تنها یک مجانب قائم داشته باشیم، سه حالت زیر را داریم:

۱) $a+5=0 \Rightarrow a=-5 \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{-20x+1}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{20}$ (تنها مجانب قائم)

۲) (مخرج) $\Delta = 0 \Rightarrow 16a^2 - 4a - 20 = 0 \Rightarrow 4a^2 - a - 5 = 0$

$\Rightarrow (4a-5)(a+1) = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{4} \quad , \quad a = -1$

به ازای هر کدام از aهای به دست آمده در این حالت، مخرج کسر فقط یک ریشه خواهد داشت و در نتیجه فقط یک مجانب قائم دارد.

۳) $(a+5)x^2 + 4ax + 1 = 0 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \frac{a+5}{4} + 2a + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{9a+9}{4} = 0 \Rightarrow a = -1$

در حالت سوم،فرض بر این بوده که مخرج کسر دو ریشهٔ ساده داشته باشد و یکی از ریشه‌ها همان ریشهٔ صورت کسر باشد (یعنی $x=\frac{1}{2}$)؛ ولی در این حالت، مقدار $a=-1$ به دست آمده است که قابل قبول در این حالت نیست و در حالت دوم حساب شده بود.

در نتیجه جمع مقادیر ممکن a برابر می‌شود با: $-5 + \frac{5}{4} - 1 = -\frac{19}{4}$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی، حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

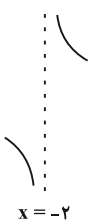
۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(احمد حسن‌زاده‌فرد)*

ضابطهٔ تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}$$

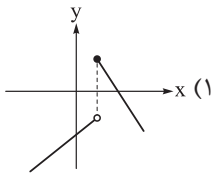
حد چپ و راست تابع f را در نقطهٔ $x=-2$ به دست می‌آوریم:

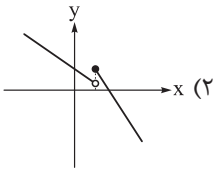
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = \frac{\text{منفی}}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = \frac{\text{منفی}}{0^-} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

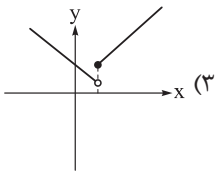


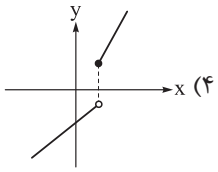
(حسابان ۲- حدهای نامتناهی، حد در بی‌نهایت؛ مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۵۸)

۱ اگر $f(x)=2x+|x|$ باشد، نمودار تابع $g(x)=\begin{cases} f(2x) & ; \ x\geq 1 \\ f(2-x) & ; \ x<1 \end{cases}$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ضابطهٔ تابع $g(x)$ رو با توجه به تعریف تابع $f(x)$ در دو بازهٔ $x\geq 1$ و $x<1$ به صورت دوضابطه‌ای بنویس. بعد قدرمطلق‌ها رو هم تعیین علامت کن تا نمودار مشخص بشه.

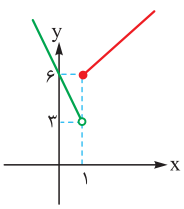
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ تابع g با توجه به ضابطهٔ تابع f را تشکیل می‌دهیم.

$$g(x)=\begin{cases} 2(2x)+|2x| & ; \ x\geq 1 \\ 2(2-x)+|2-x| & ; \ x<1 \end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} 4x+|2x| & ; \ x\geq 1 \\ 4-2x+|2-x| & ; \ x<1 \end{cases}$$

گام دوم: حال به کمک محدودهٔ x علامت قدرمطلق‌ها را مشخص کرده و ضابطهٔ تابع g را بازنویسی می‌کنیم:

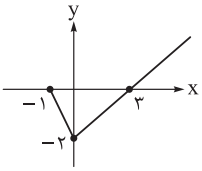
$$g(x)=\begin{cases} 4x+2x & ; \ x\geq 1 \\ 4-2x+2-x & ; \ x<1 \end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} 6x & ; \ x\geq 1 \\ -3x+6 & ; \ x<1 \end{cases}$$

در نتیجه نمودار تابع g به صورت مقابل است.



SanjeshCloud

۲ نمودار تابع $y=f(2x+1)$ به صورت زیر است. حدود a کدام باشد تا نمودار تابع $y=f(x)+a$ بالای محور xها باشد؟



۱) $a>2$

۲) $a\geq 2$

۳) $a>3$

۴) $a\geq 3$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

برای این‌که نمودار تابع $f(x)+a$ بالای محور xها باشه، باید کم‌ترین مقدارش مثبت باشه. کم‌ترین مقدار تابع $f(x)$ از روی نمودار مشخصه.

درس Box

خلاصهٔ تبدیلات نمودار توابع

با دانستن نمودار یک تابع پایه مانند $y=f(x)$ می‌توان نمودار توابع پیچیده‌تر را از طریق تبدیلات رسم کرد.

۱) انتقال عمودی و افقی

انتقال عمودی $y=f(x)+k$

- اگر $k>0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازهٔ k واحد به بالا منتقل می‌شود.
- اگر $k<0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازهٔ $|k|$ واحد به پایین منتقل می‌شود.

انتقال افقی $y=f(x-h)$:

- اگر $h>0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازهٔ h واحد به راست منتقل می‌شود.
- اگر $h<0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازهٔ $|h|$ واحد به چپ منتقل می‌شود.

۲) انبساط و انقباض

انبساط و انقباض عمودی $y=kf(x)$ (با فرض $k>0$):

- اگر $k>1$ باشد، نمودار در راستای محور yها کشیده (منبسط) می‌شود. (انبساط عمودی)
- اگر $0<k<1$ باشد، نمودار در راستای محور yها فشرده (منقبض) می‌شود. (انقباض عمودی)

انبساط و انقباض افقی $y=f(kx)$ (با فرض $k>0$):

- اگر $k>1$ باشد، نمودار در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده (منقبض) می‌شود. (انقباض افقی)
- اگر $0<k<1$ باشد، نمودار در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده (منبسط) می‌شود. (انبساط افقی)

۳) قرینه‌سازی

- قرینه نسبت به محور xها $(y=-f(x))$: نمودار $f(x)$ نسبت به محور xها قرینه می‌شود.
- قرینه نسبت به محور yها $(y=f(-x))$: نمودار $f(x)$ نسبت به محور yها قرینه می‌شود.

۴) تبدیلات قدرمطلق:

قدرمطلق روی کل تابع $(y=|f(x)|)$:

- قسمتی از نمودار $f(x)$ که بالای محور xهاست، بدون تغییر باقی می‌ماند.
- قسمتی از نمودار که پایین محور xهاست، حذف شده و قرینهٔ آن نسبت به محور xها به بالا منتقل می‌شود.

قدرمطلق روی متغیر $(y=f(|x|))$:

- قسمتی از نمودار $f(x)$ که در سمت راست محور yها قرار دارد $(x\geq 0)$، بدون تغییر باقی می‌ماند.
- قسمتی از نمودار که در سمت چپ محور yها قرار دارد $(x<0)$، حذف می‌شود.
- بخش باقی‌ماندهٔ سمت راست، نسبت به محور yها قرینه شده و جایگزین بخش حذفی سمت چپ می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به این‌که برد تابع $y=f(2x+1)$ و $y=f(x)$ یکسان است و مقدار a فقط روی برد تابع اثر می‌گذارد، برای این‌که نمودار تابع $y=f(x)$ بالای محور xها باشد، کافی است نمودار تابع اولیه را بالای محور x قرار دهیم:

$$\Rightarrow R_{f(x)+a}=[-2+a,+\infty)$$

$$\Rightarrow -2+a>0 \Rightarrow a>2$$

۳ نقطهٔ $A(-۱,۲)$ روی نمودار تابع $y=f(\frac{۱}{۲}-\frac{x}{۲})$ قرار دارد. کدام نقطه روی نمودار تابع $g(x)=f(x)+f(۲x-۱)$ قرار دارد؟

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(۱,۴)$

۳) $(۱,۶)$ ۴) $(۱,۳)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اول مقدار $f(۱)$ رو با جای‌گذاری نقطهٔ داده‌شده پیدا کن. بعد برای پیداکردن نقطهٔ جدید روی نمودار $g(x)$، ببین ورودی و خروجی تابع چه‌طور تغییر کرده.

نکته **پیداکردن مختصات نقطه در نمودار تبدیل‌یافته**

گاهی اوقات مختصات یک نقطهٔ خاص مانند $(x_۰,y_۰)$ از نمودار $y=f(x)$ را داریم و می‌خواهیم مختصات جدید همان نقطه را پس از اعمال یک سری تبدیلات و رسیدن به نمودار $y=kf(a.x+b)+h$ پیدا کنیم.

۱) تبدیل مختصات y (تغییرات عمودی): تغییرات عمودی به همان ترتیب روی $y_۰$ اعمال می‌شوند. ابتدا ضرب در k و سپس جمع با h.

$$y_{new}=k.y_۰+h$$

۲) تبدیل مختصات x (تغییرات افقی): به صورت معکوس روی $x_۰$ اعمال می‌شوند. یعنی برای یافتن x_{new} باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$a.x_{new}+b=x_۰ \Rightarrow x_{new}=\frac{x_۰-b}{a}$$

مثال نقطهٔ $(۴,۵)$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. مختصات این نقطه روی نمودار $y=۲f(۳x-۲)+۱$ کدام است؟

- اطلاعات اولیه: $x_۰=۴\ ,\ y_۰=۵$
- ضرایب تبدیل: $k=۲\ ,\ a=۳\ ,\ b=-۲\ ,\ h=۱$
- محاسبهٔ y جدید:

$$y_{new}=k.y_۰+h=۲(۵)+۱=۱۰+۱=۱۱$$

- محاسبهٔ x جدید:

$$x_{new}=\frac{x_۰-b}{a}=\frac{۴-(-۲)}{۳}=\frac{۶}{۳}=۲$$

پاسخ نهایی: مختصات نقطهٔ جدید $(۲,۱۱)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا با توجه به این‌که نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=f(\frac{۱}{۲}-\frac{x}{۲})$ قرار دارد داریم:

$$f(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲})=۲ \Rightarrow f(۱)=۲$$

گام دوم: حال با جای‌گذاری $x=۱$ در g داریم:

$$g(۱)=f(۱)+f(۱) \Rightarrow g(۱)=۲f(۱) \Rightarrow g(۱)=۴$$

$$\Rightarrow (۱,۴)\in g$$

۴ کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=(x+۱)(x+۳)(x+۵)(x+۷)+۱۸$ را با M و کم‌ترین مقدار تابع $g(x)=(x+۳)(x+۵)(x+۷)(x+۹)+۲۰$ را با m نمایش می‌دهیم. حاصل $|M-m|$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۴

۳) ۲

۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

انتقال افقی (چپ و راست) روی مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع (برد تابع) تأثیری نداره، ولی انتقال عمودی (بالا و پایین) مستقیم روی اون اثر می‌ذاره.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به ضابطهٔ توابع f و g می‌توان نوشت:

$$g(x)=f(x+۲)+۲$$

گام دوم: حال اگر β کم‌ترین مقدار تابع f باشد، با توجه به این‌که انتقال‌های افقی روی مقادیر تابع (برد) اثری ندارند، پس $\beta+۲$ کم‌ترین مقدار تابع g است و داریم:

$$|M-m|=|\beta-(\beta+۲)|=۲$$

نکته

دسته‌بندی تبدیلات براساس تأثیر بر دامنه و برد

تبدیلات نمودار را می‌توان به دو دستهٔ اصلی تقسیم کرد. تبدیلات عمودی که بر روی برد تابع اثر می‌گذارند و تبدیلات افقی که دامنهٔ تابع را تغییر می‌دهند.

دستهٔ اول: تبدیلات عمودی (تغییردهندهٔ برد)

این تبدیلات روی خروجی تابع (محور yها) اثر می‌گذارند و دامنهٔ تابع را تغییر نمی‌دهند.

- انتقال عمودی $(y=f(x)+k)$: برد تابع به اندازهٔ k واحد جابه‌جا می‌شود.
- انبساط / انقباض عمودی $(y=kf(x))$: برد تابع در ضریب k ضرب می‌شود.
- قرینه نسبت به محور xها $(y=-f(x))$: برد تابع قرینه می‌شود.
- قدرمطلق روی کل تابع $(y=|f(x)|)$: قسمت‌های منفی برد حذف و قرینه شده و به بالای محور xها منتقل می‌شوند. برد نهایی همواره نامنفی خواهد بود.

دستهٔ دوم: تبدیلات افقی (تغییردهندهٔ دامنه)

این تبدیلات روی ورودی تابع (محور xها) اثر می‌گذارند و معمولاً برد تابع را تغییر نمی‌دهند.

- انتقال افقی $(y=f(x-h))$: دامنهٔ تابع به اندازهٔ h واحد جابه‌جا می‌شود.
- انبساط / انقباض افقی $(y=f(kx))$: دامنهٔ تابع بر ضریب k تقسیم می‌شود.
- قرینه نسبت به محور yها $(y=f(-x))$: دامنهٔ تابع قرینه می‌شود.

نکتهٔ استثنا: تبدیل $y=f(|x|)$ یک تبدیل افقی است که می‌تواند هم دامنه و هم برد را تغییر دهد. دامنهٔ جدید به صورت متقارن درمی‌آید و برد جدید، تنها شامل خروجی‌های تابع برای $r\geq ۰$ خواهد بود.

۵ تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. ابتدا نمودار این تابع را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای محور xها منقبض می‌کنیم، سپس آن را ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل را $y=g(x)$ می‌نامیم. عرض نقطهٔ تلاقی نمودار توابع f و g کدام است؟

۱) ۲
۲) $\sqrt{3}$
۳) $\sqrt{2}$
۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

مراحل تبدیل رو به ترتیب روی ضابطهٔ تابع $f(x)$ اعمال کن تا ضابطهٔ $g(x)$ به دست بیاد. بعد دو تا ضابطه رو مساوی هم قرار بده تا نقطهٔ تلاقیشون پیدا بشه.

درس Box

ترتیب اعمال تبدیلات نمودار

قانون کلی و ترتیب پیشنهادی برای تبدیلات:

برای رسم نمودار تابع $y=af(b(x-h))+k$ از روی نمودار $y=f(x)$، بهتر است تبدیلات را با ترتیب مشخصی انجام دهیم تا دچار اشتباه نشویم. تبدیلات افقی (مربوط به x) و عمودی (مربوط به y) مستقل از هم عمل می‌کنند.

ترتیب پیشنهادی (انبساط، انقباض و قرینه، سپس انتقال):

۱) **انبساط / انقباض و قرینهٔ افقی:** نمودار را براساس ضریب b در راستای افقی منبسط / منقبض یا قرینه می‌کنیم تا به $y=f(bx)$ برسیم.

۲) **انتقال افقی:** نمودار حاصل را به اندازهٔ h واحد در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم تا به $y=f(b(x-h))$ برسیم.

۳) **انبساط / انقباض و قرینهٔ عمودی:** نمودار حاصل را براساس ضریب a در راستای عمودی منبسط / منقبض یا قرینه می‌کنیم تا به $y=af(b(x-h))$ برسیم.

۴) **انتقال عمودی:** نمودار نهایی را به اندازهٔ k واحد در راستای عمودی جابه‌جا می‌کنیم تا به $y=af(b(x-h))+k$ برسیم.

نکته

تفاوت $f(bx+c)$ و $y=f(b(x+c))$:

مهم‌ترین نکته در تبدیلات افقی، تشخیص درست مقدار انتقال است. برای این کار، باید ضریب متغیر x را به یک تبدیل کنیم.

راهبرد: همیشه از ضریب b در داخل پرانتز فاکتور بگیرید تا مقدار دقیق انتقال افقی مشخص شود.

$$y=f(bx+c) \Rightarrow y=f(b(x+\frac{c}{b}))$$

از این فرم مشخص می‌شود که:

- انقباض/ انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{b}$ اعمال می‌شود.
- انتقال افقی به اندازهٔ $-\frac{c}{b}$ (نه $-c$) انجام می‌شود.

مثال برای رسم نمودار $y=f(2x+6)$:

- ابتدا از ۲ فاکتور می‌گیریم: $y=f(2(x+3))$.
- این یعنی نمودار $y=f(x)$ ابتدا با ضریب $\frac{1}{2}$ دچار انقباض افقی شده و سپس ۳ واحد به چپ منتقل می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: انتقال‌های انجام‌شده را مرحله‌به‌مرحله اعمال می‌کنیم تا ضابطهٔ تابع g مشخص شود:

$$y=\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{انقباض طولی با ضریب } \frac{1}{2}} y=\sqrt{2x-1} \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=\sqrt{2(x-2)-1}$$

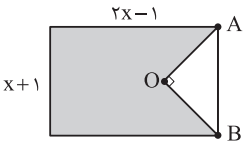
$$\Rightarrow g(x)=\sqrt{2x-5}$$

گام دوم: حال مختصات محل تلاقی دو نمودار را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \sqrt{2x-5}=\sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow 2x-5=x-1 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=\sqrt{3}$$

۶ در مستطیل شکل زیر، مثلث AOB قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. اگر مساحت قسمت سایه‌خورده برابر ۱۶ باشد، محیط مستطیل کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۸

۳) ۲۴

۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

مساحت قسمت رنگی یعنی «مساحت کل مستطیل» منهای «مساحت مثلث سفیده». مساحت هر دو رو برحسب x بنویس، سپس از هم کم کن و مساوی ۱۶ قرار بده تا به معادلهٔ درجه‌دو به دست بیاد.

درس Box

روش‌های حل معادلهٔ درجه‌دوم

تعریف معادلهٔ درجه‌دوم:

هر معادله به صورت $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن a، b و c اعداد حقیقی و $a\neq ۰$ باشند، یک معادلهٔ درجه‌دوم نامیده می‌شود. منظور از حل معادله، پیداکردن مقادیر حقیقی برای x است که در تساوی صدق کنند.

روش اول: حل معادله‌های ناقص

اگر یکی از ضرایب b یا c (یا هر دو) صفر باشد، معادله ناقص است و به راحتی حل می‌شود.

- اگر $b=۰, c=۰$ باشد، معادله به شکل $ax^۲=۰$ درآمده و تنها جواب آن $x=۰$ است.
- اگر $c=۰$ باشد، معادله به شکل $ax^۲+bx=۰$ است. با فاکتورگیری از x به $x(ax+b)=۰$ می‌رسیم و جواب‌ها $x=۰$ و $x=-\frac{b}{a}$ هستند.
- اگر $b=۰$ باشد، معادله به شکل $ax^۲+c=۰$ است که به $x^۲=-\frac{c}{a}$ تبدیل می‌شود. اگر $-\frac{c}{a}\geq ۰$ باشد، جواب‌ها $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ هستند و در غیر این صورت معادله جواب حقیقی ندارد.

روش دوم: حل معادله‌های کامل:

الف) **روش تجزیه**: در این روش با استفاده از اتحادها (مانند اتحاد جمله‌مشترک)، معادله را به صورت حاصل‌ضرب دو عبارت تبدیل کرده و جواب‌ها را پیدا می‌کنیم.

ب) **روش مربع کامل کردن**:

۱) معادله را به شکل $x^۲+mx=n$ مرتب می‌کنیم (اگر ضریب $x^۲$ یک نبود، همهٔ جملات را بر آن تقسیم می‌کنیم).

۲) مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{m}{۲})^۲$ را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

۳) سمت چپ را به صورت مربع کامل $(x+\frac{m}{۲})^۲$ می‌نویسیم و سپس با ریشه‌گیری معادله را حل می‌کنیم.

ج) **روش کلی با فرمول دلتا**: این روش برای هر معادلهٔ درجه‌دومی جواب می‌دهد. ابتدا دلتا (Δ) را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta=b^۲-۴ac$$

- اگر $\Delta\geq ۰$ باشد، جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آیند:

$$x_{۱,۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

- اگر $\Delta<۰$ باشد، معادله جواب حقیقی ندارد.

روش سوم: تکنیک‌های خاص و میان‌برها

- **روش ریشه‌گیری**: برای معادلات به فرم $(ax+b)^۲=c$، اگر $c\geq ۰$ باشد، داریم $ax+b=\pm\sqrt{c}$ و از آن x به دست می‌آید. اگر $c<۰$ باشد، جواب حقیقی وجود ندارد.

- **استفاده از اتحاد مزدوج:** برای معادلات به فرم $A^۲ = B^۲$ می‌توان آن را به $A^۲ - B^۲ = ۰$ تبدیل و با استفاده از اتحاد مزدوج $(A-B)(A+B) = ۰$ آن را حل کرد.
- **حالت‌های خاص مجموع ضرایب:**
- اگر $a+b+c=۰$ باشد، یکی از جواب‌ها $x=۱$ و دیگری $x=\frac{c}{a}$ است.
- اگر $a-b+c=۰$ باشد، یکی از جواب‌ها $x=-۱$ و دیگری $x=-\frac{c}{a}$ است.

حل مسائل کاربردی با معادلهٔ درجه دوم

راهبرد کلی حل مسئله:

بسیاری از مسائل در علوم مختلف، پس از مدل‌سازی به یک معادلهٔ درجه‌دوم تبدیل می‌شوند. راهبرد کلی برای حل این مسائل به صورت زیر است:

۱) درک مسئله و تعریف متغیر: مسئله را به دقت بخوانید و کمیت مجهول اصلی را با یک متغیر (مانند x) نمایش دهید. سایر مقادیر مجهول را برحسب x بنویسید.

۲) تشکیل معادله: با استفاده از روابط شناخته‌شده (مانند روابط هندسی، فیزیکی و غیره) یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب x تشکیل دهید.

۳) حل معادله: معادلهٔ درجه دوم به‌دست‌آمده را با یکی از روش‌های مرسوم (تجزیه، دلتا و ...) حل کنید.

۴) بررسی جواب(ها): جواب‌های به‌دست‌آمده را با شرایط فیزیکی مسئله مقایسه کنید. جواب‌های غیر قابل قبول (مانند طول منفی) باید حذف شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: برای محاسبهٔ مساحت قسمت رنگی ابتدا، مساحت مثلث OAB را مشخص می‌کنیم:

$$AB = x+۱\,,\ OA = OB = \frac{\sqrt{۲}}{۲}AB$$

$$\Rightarrow\ OA = OB = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+۱)$$

$$\Rightarrow\ S_{OAB} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+۱)\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+۱)}{۲} = \frac{(x+۱)^۲}{۴}$$

گام دوم: حال برای مساحت سایه‌خورده داریم:

$$S_{\text{سایه‌خورده}} = (x+۱)(۲x-۱) - \frac{(x+۱)^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow\ ۱۶ = \frac{۴(x+۱)(۲x-۱)-(x+۱)^۲}{۴} = \frac{۸x^۲+۴x-۴-(x^۲+۲x+۱)}{۴}$$

$$\Rightarrow\ ۱۶ = \frac{۷x^۲+۲x-۵}{۴}\ \Rightarrow\ ۷x^۲+۲x-۵ = ۶۴$$

$$\Rightarrow\ ۷x^۲+۲x-۶۹ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۲^۲-۴(۷)(-۶۹) = ۱۹۳۶} x = \frac{-۲\pm\sqrt{۱۹۳۶}}{۱۴}$$

$$\xrightarrow{۱۹۳۶ = ۴۴^۲} x = \frac{-۲\pm۴۴}{۱۴} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{۲۳}{۷} & \text{غ‌ق‌ق} \\ x = ۳ & \checkmark \end{cases}$$

گام سوم: برای محاسبهٔ محیط مستطیل با داشتن مقدار x داریم:

$$\text{محیط} = ۲(x+۱+۲x-۱) = ۲(۳x) = ۶x = ۱۸$$

۷ اگر m و n جواب‌های معادلهٔ $x^{۲}-۴x+۲=۰$ باشند، حاصل عبارت $A=(۳m+\frac{۲}{n})(۳n+\frac{۲}{m})$ کدام است؟

۱) ۳۲

۲) ۴۴

۳) ۲۸

۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

اول حاصل عبارت خواسته‌شده رو به دست بیار. می‌بینی که نتیجه برحسب mn (یعنی حاصل‌ضرب ریشه‌ها) ساده می‌شه. حاصل‌ضرب ریشه‌ها رو هم که از خود معادله راحت به دست میاری.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا عبارت داده‌شده را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$A=(۳m+\frac{۲}{n})(۳n+\frac{۲}{m})=۹mn+۶+۶+\frac{۴}{mn}$$

گام دوم: حال با توجه به روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم داریم:

$$mn=\frac{c}{a}=۲ \Rightarrow A=۹\times ۲+۶+۶+\frac{۴}{۲}=۱۸+۱۲+۲=۳۲$$

۸ اختلاف جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})x^۲+(\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}-۱)x+\sqrt{۳}+۱=۰$ کدام است؟

۱) $(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱)$

۲) $(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+۱)$

۳) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱)$

۴) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+۱)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint برای پیداکردن اختلاف جواب‌ها، یک فرمول مستقیم و سریع وجود داره که از دلتا و ضریب a استفاده می‌کنه. اول دلتا رو حساب کن.

درس Box

روابط بین جواب‌ها و ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم

برای معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ که دارای جواب‌های $x_۱$ و $x_۲$ است، می‌توان مجموع، حاصل‌ضرب و تفاضل جواب‌ها را بدون محاسبهٔ مستقیم خود جواب‌ها و تنها با استفاده از ضرایب a,b,c به دست آورد:

- **مجموع جواب‌ها (S)**: این رابطه از جمع دو ریشه در فرمول کلی به دست می‌آید.

$$S=x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}$$

- **حاصل‌ضرب جواب‌ها (P)**: این رابطه از ضرب دو ریشه در فرمول کلی به دست می‌آید.

$$P=x_۱.x_۲=\frac{c}{a}$$

- **قدرمطلق تفاضل جواب‌ها**:

$$|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\quad (\text{که در آن } \Delta=b^۲-۴ac)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به رابطهٔ بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم برای محاسبهٔ اختلاف جواب‌ها، ابتدا مقدار Δ معادله را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=(\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}-۱)^۲-۴(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

$$\Rightarrow \Delta=۲+۱۲+۱-۴\sqrt{۶}-۲\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}-۴(۳-\sqrt{۶}+\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

$$\Rightarrow \Delta=۳+۲\sqrt{۲}$$

گام دوم: حال با جای‌گذاری مقدار Δ در رابطه داریم:

$$\text{اختلاف جواب‌ها}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{(۱+\sqrt{۲})^۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$$

گام سوم: با گویاکردن مقدار به‌دست‌آمده داریم:

$$\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱)$$

یه‌جور دیگه

مجموع ضرایب معادله صفر است:

$$\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}+۱=۰$$

پس یکی از جواب‌ها $x_۱=۱$ و جواب دیگر $x_۲=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ است. ابتدا مخرج $x_۲$ را گویا می‌کنیم:

$$x_۲=\frac{(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}=۳+\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$$

حالا اختلاف جواب‌ها را حساب می‌کنیم:

$$|x_۲-x_۱|=۲+\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}=\sqrt{۲}(\sqrt{۲}+۱)+\sqrt{۳}(۱+\sqrt{۲})\Rightarrow |x_۲-x_۱|=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱)$$

SanjeshCloud

۹ **حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی از مجموع آن‌ها ۱۷ واحد بیشتر است. اگر اختلاف این دو عدد ۳ واحد باشد، نسبت آن‌ها کدام می‌تواند باشد؟**

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint روابطی که سؤال داده رو برحسب مجموع جواب‌ها (S) و حاصل‌ضربشون (P) بنویس. بعد از رابطهٔ $(\alpha-\beta)^۲=S^۲-۴P$ استفاده کن تا یه معادله برای S پیدا کنی.

نکته **محاسبهٔ عبارات متقارن برحسب S و P:**

اگر جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم α و β باشند، می‌توان بسیاری از عبارت‌های شامل جواب‌ها را بدون محاسبهٔ مستقیم آن‌ها و تنها برحسب مجموع $(S=\alpha+\beta)$ و حاصل‌ضرب $(P=\alpha\beta)$ جواب‌ها به دست آورد.

- مجموع معکوس جواب‌ها: با مخرج‌مشترک گرفتن به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$$

- مجموع مربع‌های جواب‌ها: با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای به دست می‌آید:

$$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$$

- مجموع مکعب‌های جواب‌ها: با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای به دست می‌آید:

$$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳SP$$

- قدرمطلق تفاضل جواب‌ها:

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^۲}=\sqrt{(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta}=\sqrt{S^۲-۴P}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید دو عدد حقیقی ما α و β باشد، در نتیجه:

$$S=\alpha+\beta, P=\alpha\beta \xrightarrow{\text{طبق فرض}} P=S+۱۷$$

گام دوم: حال اختلاف دو عدد را برحسب S و P می‌نویسیم:

$$d=|\alpha-\beta| \Rightarrow d^۲=(\alpha-\beta)^۲ \Rightarrow d^۲=\alpha^۲+\beta^۲-۲\alpha\beta=(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta=S^۲-۴P$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{S^۲-۴P}$$

و برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{S^۲-۴P}=۳ \Rightarrow \sqrt{S^۲-۴(S+۱۷)}=۳ \Rightarrow S^۲-۴S-۶۸=۹$$

$$\Rightarrow S^۲-۴S-۷۷=۰ \Rightarrow (S+۷)(S-۱۱)=۰ \Rightarrow S=-۷, S=۱۱$$

گام سوم: حال برای دو مقدار S، مقادیر P را نوشته و معادلهٔ درجه‌دومی را که جواب‌های آن α و β باشد، تشکیل می‌دهیم:

$$S=۱۱ \Rightarrow P=۲۸ \Rightarrow x^۲-۱۱x+۲۸=۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۷)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=۴\\ \beta=۷\end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{۴}{۷}, \frac{\beta}{\alpha}=\frac{۷}{۴}$$

$$S=-۷ \Rightarrow P=۱۰ \Rightarrow x^۲+۷x+۱۰=۰ \Rightarrow (x+۵)(x+۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=-۵\\ \beta=-۲\end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{۵}{۲}, \frac{\beta}{\alpha}=\frac{۲}{۵}$$

با توجه به گزینه‌ها نسبت دو عدد $\frac{۵}{۲}$ می‌تواند باشد.

۱۰ نمودار تابع $f(x)=(x-1)(x^2-2mx-m-1)$ محور xها را در ۳ نقطه قطع می‌کند. اگر مجموع مربعات طول نقاط تلاقی نمودار تابع f با محور xها برابر ۹ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$

۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{9}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint یکی از صفرها که معلومه $x=1$ هست. دوتا صفر دیگر (آلفا و بتا) مربوط به بخش درجه‌دو هستن. شرط مجموع مربعات صفرها رو بنویس. $(\alpha^2+\beta^2+1^2=9)$ و بعدش از رابطهٔ $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$ استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید α، β و γ طول نقاط تلاقی نمودار تابع f با محور xها باشند:

$$f(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2-2mx-m-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2-2mx-m-1=0 \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $\gamma=1$ و α و β جواب‌های معادلهٔ روبه‌رو باشند: $x^2-2mx-m-1=0 \quad (*)$

گام دوم: حال طبق فرض مسئله داریم:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+1=9 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=8$$

گام سوم: حال با توجه به روابط بین جواب‌ها و ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم داریم:

$$\xrightarrow{(*)} \alpha+\beta=2m \ , \ \alpha\beta=-m-1$$

$$\alpha^2+\beta^2=8 \xrightarrow{\alpha^2+\beta^2=S^2-2P} (2m)^2-2(-m-1)=8 \Rightarrow 4m^2+2m+2=8$$

$$\xrightarrow{\div 2} 2m^2+m+1=4 \Rightarrow 2m^2+m-3=0$$

گام چهارم: مجموع ضرایب معادلهٔ بالا برابر صفر است، پس $m_1=1$ و $m_2=-\frac{3}{2}$ جواب‌های آن هستند. اختلاف این جواب‌ها برابر است با:

$$|m_1-m_2|=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

۱ در کدام رابطه y تابعی از x است؟

۱) $|y-۲|=|x-۱|$

۲) $(y-۲)^۳=|x+\log_۲ ۴|$

۳) $|y|=x^۲+۴$

۴) $|y^۳|=x-۵$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

معادلات و توابع: در روابط بین x و y، رابطه‌ای تابع (y برحسب x) است که به ازای هر مقدار قابل قبول x، فقط و فقط یک مقدار برای y به دست آید. به بیان دیگر، اگر گزارهٔ زیر درست باشد، آن رابطه تابع است:

$$\forall x_۱=x_۲ \Rightarrow y_۱=y_۲$$

اما ما غالباً به دنبال اثبات رابطهٔ تابع نیستیم، بلکه به دنبال نقض آن هستیم؛ یعنی سعی کنیم در گزینه‌ها یا موارد مختلف، مثال‌های نقضی را به درستی پیدا کنیم تا مطمئن شویم رابطهٔ مورد نظر تابع نیست.

نکته در معادلاتی که توان y زوج است یا این‌که y داخل قدرمطلق است، غالباً (نه همواره) رابطهٔ y برحسب x تابع نیست.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به نکتهٔ بالا، گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) که در آن‌ها y درون قدرمطلق است، تابع نیست.

حالا بدون توجه به این نکته، سعی می‌کنیم، مثال‌های نقضی برای x در نظر بگیریم تا تابع‌بودن آن‌ها را رد کنیم:

گزینهٔ (۱): $\xrightarrow{x=۰} |y-۲|=۱ \Rightarrow \begin{cases} y-۲=۱ \Rightarrow y=۳ \\ y-۲=-۱ \Rightarrow y=۱ \end{cases}$ ×

گزینهٔ (۳): $\xrightarrow{x=۰} |y|=۴ \Rightarrow \begin{cases} y=۴ \\ \text{یا} \\ y=-۴ \end{cases}$ ×

گزینهٔ (۴): $\xrightarrow{x=۶} |y^۳|=۱ \Rightarrow \begin{cases} y^۳=۱ \Rightarrow y=۱ \\ y^۳=-۱ \Rightarrow y=-۱ \end{cases}$ ×

۲ **از یک قطعهٔ مقوایی مربع‌شکل به طول ضلع ۱۶ می‌خواهیم یک جعبهٔ درباز بسازیم. برای این منظور، از هر چهار گوشهٔ این مقوا چهار مربع به طول ضلع x می‌بریم و اطراف آن را تا می‌کنیم. کدام‌یک از توابع زیر حجم جعبه را برحسب x بیان می‌کند؟**

۱) $V(x)=2x(16-x)^2$

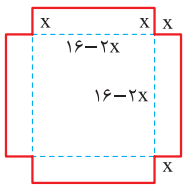
۲) $V(x)=x(16-x)^2$

۳) $V(x)=x(16-x^2)^2$

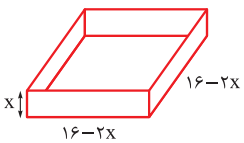
۴) $V(x)=x(16-2x)^2$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** یک منشور با قاعدهٔ مربعی داریم، که این قاعده به صورت زیر است:



یعنی منشور زیر را داریم:



گام دوم: حالا حجم این منشور از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$V=S_{\text{قاعده}}\times \underset{x}{h} \Rightarrow V(x)=x(16-2x)^2$$

SanjeshCloud

۳ به ازای xهای مثبت، اگر $f(x-\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ باشد، $f(\sqrt{۲})$ چند برابر $\sqrt{۶}$ است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint تعبیر سوال اینه که اگه $x-\frac{۱}{x}=\sqrt{۲}$ باشد، مقدار $x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ چقدر می‌شه! از اتحادهای مربع دوجمله‌ای و چاق و لاغر استفاده کن.

درس Box

اتحادهای جبری

اتحاد مربع دوجمله‌ای: $(a\pm b)^۲=a^۲\pm ۲ab+b^۲$

اتحاد مزدوج: $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$

اتحاد جمله‌مشترک: $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

اتحاد مکعب دوجمله‌ای: $(a\pm b)^۳=a^۳\pm ۳a^۲b+۳ab^۲\pm b^۳$

$=a^۳\pm b^۳\pm ۳ab(a\pm b)$

اتحاد چاق و لاغر: $(a\pm b)(a^۲\mp ab+b^۲)=a^۳\pm b^۳$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق hint، $x-\frac{۱}{x}$ را مساوی $\sqrt{۲}$ قرار می‌دهیم و سعی می‌کنیم براساس آن مقدار عبارت $x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ را حساب کنیم.

ابتدا با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، عبارت $x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۳+\frac{۱}{x^۳}=(x+\frac{۱}{x})(x^۲-۱+\frac{۱}{x^۲})$$
$$=(x+\frac{۱}{x})(x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۱)\quad (*)$$

گام دوم: حالا با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای مقدار عبارت $x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ و سپس عبارت $x+\frac{۱}{x}$ را حساب می‌کنیم:

$$x-\frac{۱}{x}=\sqrt{۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲=۲\Rightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲}=۴$$

حالا برای این‌که مربع عبارت $x+\frac{۱}{x}$ را ایجاد کنیم، به طرفین تساوی بالا ۲ واحد اضافه می‌کنیم:

$$x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲=۶\Rightarrow (x+\frac{۱}{x})^۲=۶\xrightarrow{x>۰}x+\frac{۱}{x}=\sqrt{۶}$$

گام سوم: حالا طبق رابطهٔ (*) خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{*}x^۳+\frac{۱}{x^۳}=(\sqrt{۶})(۴-۱)=۳\sqrt{۶}$$

یه‌جور دیگه

از تساوی مفروض سؤال، سعی می‌کنیم ضابطهٔ تابع f را پیدا کنیم:

$$x-\frac{۱}{x}=t\Rightarrow\begin{cases}x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲=t^۲\Rightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲}=t^۲+۲\\ x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲=t^۲+۴\xrightarrow{x>۰}x+\frac{۱}{x}=\sqrt{t^۲+۴}\end{cases}$$

حالا $x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۳+\frac{۱}{x^۳}=(x+\frac{۱}{x})(x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۱)$$
$$\xrightarrow{f(x-\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}}f(t)=\sqrt{t^۲+۴}(t^۲+۲-۱)$$

پس ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=(x^۲+۱)\sqrt{x^۲+۴}$ است و داریم:

$$f(\sqrt{۲})=\pm ۳\sqrt{۶}$$

۴ در مجموعهٔ اعداد حقیقی، تابع f ثابت و تابع g همانی است. اگر $f(۲)=۳g(۱)$ باشد، مقدار $\frac{(fog)(x-[x])}{(f-g)(۲)}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

- تابع ثابت تابعی است که برد آن تک‌عضوی است. ضابطهٔ جبری این تابع $f(x)=c$ و نمودار آن خطی افقی است.
- تابع همانی تابعی است که مقدار خروجی و مقدار ورودی آن برابر است. ضابطهٔ جبری این تابع $f(x)=x$ و نمودار آن نیمساز ناحیه‌های اول و سوم دستگاه مختصات است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ضابطهٔ تابع f را $f(x)=c$ و ضابطهٔ تابع g را $g(x)=x$ می‌گیریم، طبق فرض سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f(۲)=۳g(۱)} c=۳(۱) \Rightarrow c=۳$$

گام دوم: حالا خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

ورودی هر چه باشد، خروجی مقدار ۳ است.

$$\frac{(fog)(x-[x])}{(f-g)(۲)}=\frac{\overbrace{f(g(x-[x]))}}{f(۲)-g(۲)}=\frac{۳}{۳-۲}=۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵ در تابع خطی f، اگر $f(۲)=۳$ و $f(-۲)=-۵$ باشد، مجموع اعداد طبیعی که در برد تابع $g(x)=\frac{۳f(x)-۷}{f(x)-۳}$ با دامنهٔ $D_g=(-\infty,۰]\cup(۲,+\infty)$ قرار ندارند، کدام است؟

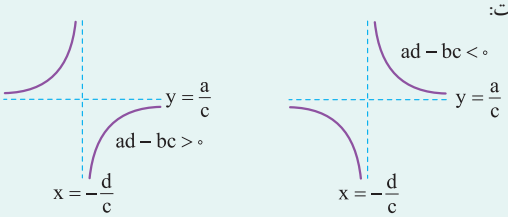
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

تابع گویا: تابعی کسری با ضابطهٔ $\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$ تابع گویا نامیده می‌شود.

- دامنهٔ تابع گویا $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است.
- معروف‌ترین تابع گویای دبیرستان تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c\neq ۰$ و $ad\neq bc$) با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ و برد $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است. نمودار این تابع به یکی از شکل‌های زیر است:



پاسخ خیلی تشریحی ✔

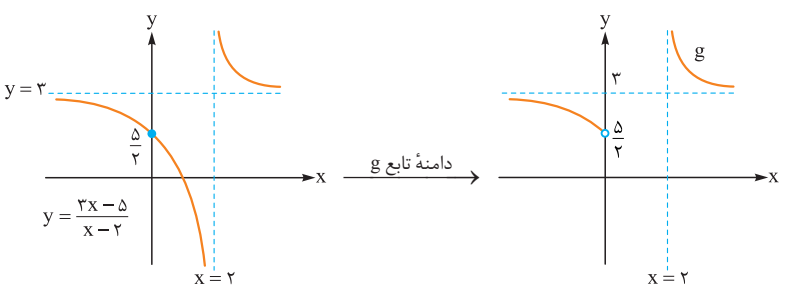
گام اول: ابتدا باید ضابطهٔ تابع f را پیدا کنیم. با توجه به فرض سؤال تابع خطی f از نقاط $(-۵,-۲)$ و $(۲,۳)$ می‌گذرد. پس داریم:

$$\begin{cases}\text{شیب خط: } m=\frac{۳-(-۵)}{۲-(-۲)}=\frac{۸}{۴}=۲\\ \xrightarrow{y-y_۰=m(x-x_۰)}\ y-۳=۲(x-۲)\ \Rightarrow\ y=۲x-۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲x-۱$$

گام دوم: حالا ضابطهٔ تابع g را می‌سازیم:

$$\xrightarrow{g(x)=\frac{۳f(x)-۷}{f(x)-۳}}\ g(x)=\frac{۳(۲x-۱)-۷}{(۲x-۱)-۳}=\frac{۶x-۱۰}{۲x-۴}\ \Rightarrow\ g(x)=\frac{۳x-۵}{x-۲}$$

گام سوم: با توجه به دستورالعمل درس‌باکس، نمودار تابع g را در دامنهٔ مفروض رسم می‌کنیم:



مطابق نمودار بالا، برد تابع g مجموعهٔ $(\frac{۵}{۲},+\infty)-\{۳\}$ است که شامل ۳ عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳ نیست. مجموع این ۳ عدد برابر ۶ است.

۶ تعداد اعداد صحیح دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{1-2x}{2[x]-1}}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

- دامنهٔ تابع رادیکالی $\sqrt{\square}$ مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $\square \geq 0$ است.
- جزء صحیح یک عدد صحیح، برابر خودش و جزء صحیح یک عدد ناصحیح برابر بزرگ‌ترین عدد صحیح از میان اعداد کوچک‌تر از آن است؛ در واقع:

$$n \leq x < n+1 \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} [x]=n$$

- ویژگی‌های جزء صحیح:

۱) $[\square]=n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} n \leq \square < n+1$

۲) $[\square]\geq n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} \square \geq n$

۳) $[\square]\leq n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} \square < n+1$

۴) $[\square]>k \xrightarrow{k\notin\mathbb{Z}} \square \geq [k]+1$

۵) $[\square]<k \xrightarrow{k\notin\mathbb{Z}} \square < [k]+1$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم؛ زیرا دامنهٔ تابع f مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1-2x}{2[x]-1}\geq 0$ است.

x		$\frac{1}{2}$	
$1-2x$	+	۰	−

و براساس روابط درس‌باکس، جدول تعیین علامت عبارت $2[x]-1$ را می‌نویسیم:

x		۱	
$2[x]-1$	−		+

گام دوم: حالا جدول همزمان این دو عبارت را داریم:

x		$\frac{1}{2}$		۱	
$1-2x$	+	۰	−		−
$2[x]-1$	−		−		+
$\frac{1-2x}{2[x]-1}$	−	۰	+		−

با توجه به جدول بالا، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1-2x}{2[x]-1}\geq 0$ که همان دامنهٔ تابع f است، بازهٔ $[\frac{1}{2},1)$ خواهد شد. این بازه هیچ عدد صحیحی را شامل نمی‌شود.

تیزبازی اگر $x\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه $[x]=x$ و ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\sqrt{-1}$ خواهد شد که غیر قابل قبول است؛ پس دامنهٔ تابع f شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

۷ اگر دامنه و برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=b\sqrt{(a-2)x+a^2-2a-2}+b^2-b$ به ترتیب بازه‌های $(-\infty,-3]$ و $[2,+\infty)$ باشد، زوج مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(4,-1)$ ۲) $(4,2)$ ۳) $(1,-1)$ ۴) $(1,2)$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

ویژگی‌های تابع خاص $y=a+b\sqrt{cx+d}$

با توجه به علامت‌ها و مقادیر ۴ پارامتر a، b، c و d نمودار این تابع یکی از ۴ حالت زیر را دارد:

	چپ‌گرا	راست‌گرا
رو به بالا	$c<0, b>0$	$c>0, b>0$
رو به پایین	$c<0, b<0$	$c>0, b<0$

نقطهٔ توپر در همهٔ نمودارهای بالا $(-\frac{d}{c},a)$ است که در آن $-\frac{d}{c}$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به دامنه و برد تابع f، متوجه می‌شویم که نمودار تابع چپ‌گرا رو به بالا است، یعنی $b>0$ و $a-2<0$ است.

پس تا این‌جا داریم:

$$a<2, b>0 \qquad (*)$$

گام دوم: دامنه و برد برای ما مشخص می‌کند که $x=-3$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است و به ازای $x=-3$ مقدار تابع برابر ۲ شده است:

$$(a-2)x+a^2-2a-2=0 \xrightarrow{x=-3} -3a+6+a^2-2a-2=0$$

$$\Rightarrow a^2-5a+4=(a-1)(a-4)=0 \xrightarrow{(*)} a=1$$

گام سوم: پس تا این‌جا ضابطهٔ تابع $f(x)=b\sqrt{-(x+3)}+b^2-b$ است. باید $f(-3)$ برابر ۲ شود.

$$\Rightarrow f(-3)=0+b^2-b=2 \Rightarrow b^2-b-2=(b-2)(b+1)=0 \xrightarrow{(*)} b=2$$

پس زوج مرتب (a,b) به صورت $(1,2)$ است.

۸ نمودار وارون تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۳}+۳x+a$ خط $۲x-y-۱=a$ را روی محور x قطع می‌کند. مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته اگر نمودار تابع $f^{-۱}$ و نمودار تابع g یکدیگر را در نقطهٔ (α,β) قطع کنند، نمودار توابع f و $g^{-۱}$ یکدیگر را در نقطهٔ (β,α) قطع می‌کنند. این نکتهٔ مهم راهکار حل چند سؤال مهم کنکور سراسری بوده است، به این ترتیب که به دست آوردن ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ و حل معادلهٔ مذکور بسیار دشوار و خارج از عرف دبیرستان است، اما می‌توانیم تابع f را با وارون یک تابع خطی قطع دهیم. فقط در این راه حل، باید حواسمان به جابه‌جایی طول و عرض نقطهٔ تقاطع باشد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به جای این‌که نمودار وارون تابع f را با تابع خطی $g(x)=۲x-a-۱$ قطع دهیم تا نقطهٔ برخورد $P(\alpha,۰)$ را به دست آوریم، بهتر است خود نمودار تابع f را با وارون تابع g یعنی $g^{-۱}$ قطع دهیم تا نقطهٔ $P'(۰,\alpha)$ به دست آید. پس در این گام باید ضابطهٔ تابع $g^{-۱}$ را به دست آوریم:

$$y=۲x-a-۱ \Rightarrow x=\frac{y+a+۱}{۲} \xrightarrow{\text{جای x و y عوض شود}} g^{-۱}(x)=\frac{x+a+۱}{۲}$$

گام دوم: حالا طبق فرض سؤال، جواب معادلهٔ $f(x)=g^{-۱}(x)$ باید طول نقطهٔ P' یعنی $x=۰$ باشد:

$$x^{۳}+۳x+a=\frac{x+a+۱}{۲} \xrightarrow{x=۰} a=\frac{a+۱}{۲} \Rightarrow a=۱$$

گام سوم: یعنی ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=x^{۳}+۳x+۱$ و در نتیجه $f(a)=f(۱)=۵$ است.

۹ اگر $f(x)=\begin{cases}2x+6 & ; \ x\le -1\\ x+2 & ; \ x>-1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x-2 & ; \ f(x)<0\\ 2x-6 & ; \ f(x)\ge 0\end{cases}$ باشد، مقدار $(fog)(-1)$ کدام است؟

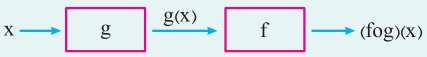
۱) صفر ۲) -6 ۳) -1 ۴) -10

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

- ترکیب دو تابع f و g را با نماد fog نمایش می‌دهیم و به معنای آن است که مقدار تابع g به عنوان ورودی به تابع f داده می‌شود:

به بیان دیگر $(fog)(a)$ مقدار تابع f در $g(a)$ است نه در a.



- دامنهٔ تابع مرکب fog از راه زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: $(fog)(-1)$ یا $f(g(-1))$ مقدار تابع f در $g(-1)$ است، پس ابتدا به $g(-1)$ نیاز داریم.

برای محاسبهٔ $g(-1)$ هم به $f(-1)$ نیاز داریم:

$$f(-1)=2(-1)+6=4$$

و چون این مقدار مثبت است، در تابع g، از ضابطهٔ پایینی استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{f(-1)\ge 0} g(-1)=2(-1)-6=-8$$

گام دوم: در نهایت داریم:

$$f(g(-1))=f(-8)=2(-8)+6=-10$$

۱۰ اگر $f(x)=x^{۲}-۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد، به ازای $x \geq ۱$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(gof)(x)=\sqrt{x^{۲}-۱}$

۲) $(fog)(x)=x-۱$

۳) $(fof)(x)=x^{۴}-۲x^{۲}$

۴) $(gog)(x)=\sqrt{x^{۴}}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

پیداکردن ضابطه در توابع مرکب:

در سؤالات رایج ترکیب توابع، دو ضابطه از سه ضابطهٔ $f(x)$، $g(x)$ و $(fog)(x)$ معلوم است و ضابطهٔ سوم را از ما می‌خواهند. جدول زیر روش‌های به دست آوردن ضابطهٔ سوم را به صورت خلاصه شرح می‌دهد:

ضابطه‌ها	$f(x)$	$g(x)$	$(fog)(x)$
روش	معلوم	معلوم	به جای هر xای که در ضابطهٔ $f(x)$ می‌بینیم، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم.
	ضابطهٔ $g(x)$ را مساوی متغیر t قرار می‌دهیم و x را برحسب t به دست می‌آوریم (همان ضابطهٔ $g^{-۱}(x)$) و سپس در ضابطهٔ $(fog)(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم.	معلوم	معلوم
	معلوم	به جای هر x ضابطهٔ $f(x)$، عبارت $g(x)$ را قرار می‌دهیم. عبارت حاصل باید با ضابطهٔ $(fog)(x)$ برابر باشد. در این شرایط، معادله‌ای را باید حل کنیم که متغیر مجهول آن $g(x)$ است.	معلوم

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس عمل می‌کنیم و فقط کافی است ضابطه جای‌گذاری کنیم:

گزینهٔ (۱): $(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^{۲}-۱}$ ✓

گزینهٔ (۲): $(fog)(x)=f(g(x))=g^{۲}(x)-۱=x-۱$ ✓

گزینهٔ (۳): $(fof)(x)=f(f(x))=f^{۲}(x)-۱=x^{۴}-۲x^{۲}+۱-۱=x^{۴}-۲x^{۲}$ ✓

گزینهٔ (۴): $(gog)(x)=g(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[۴]{x}$ ✗

۱۱ نمودار تابع خطی f با عرض از مبدأ ۲ بر نمودار تابع f^{-1} منطبق است. اگر $g(x)=2x+3$ باشد، با کدام انتقال، نمودار gof را می‌توان به نمودار تابع fog تبدیل کرد؟

دو تابع f و f^{-1} مساوی هستند.

۱) ۸ واحد به راست

۲) ۴ واحد به راست

۳) ۸ واحد به چپ

۴) ۴ واحد به چپ

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته توابع خطی با شیب ۱−، همواره با تابع وارون‌شان مساوی هستند، یا نمودار آن‌ها بر نمودار وارون‌شان منطبق می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق نکتهٔ بالا، ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=-x+2$ است.

گام دوم: حالا ضابطه‌های هر دو تابع fog و gof را به دست می‌آوریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=-g(x)+2=-2x-1$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=2f(x)+3=-2x+7$$

گام سوم: حالا فرض می‌کنیم که $(fog)(x)=(gof)(x-n)$ باشد، داریم:

$$-2(x-n)+7=-2x-1 \Rightarrow -2x+2n+7=-2x-1 \Rightarrow n=-4$$

پس $(fog)(x)=(gof)(x+4)$ است و این یعنی باید نمودار تابع gof را ۴ واحد به چپ ببریم تا بر نمودار تابع fog منطبق شود.

آزمون ۷ آذر ۱۴۰۴

حسابان ۲

۱ اگر $f(x)=۲\sin x-\cos(\frac{\pi}{۲}+x)+\sin(\pi-x)$، آن‌گاه شیب خطی که یک نقطهٔ ماکزیمم و یک نقطهٔ مینیمم از نمودار تابع f را به هم وصل می‌کند، حداقل کدام است؟

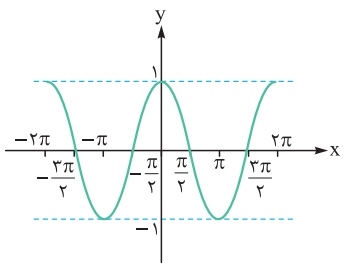
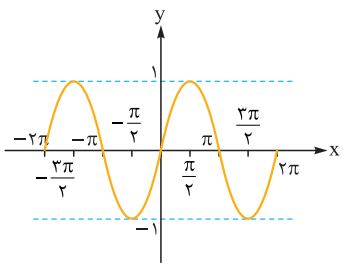
۱) $\frac{-۲}{\pi}$ ۲) $\frac{-۴}{\pi}$ ۳) $\frac{-۶}{\pi}$ ۴) $\frac{-۸}{\pi}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

اول ضابطهٔ تابع رو ساده کن. بعد مختصات یک نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی رو از روی نمودار پیدا کن و شیب خط بینشون رو حساب کن.

درس Box

تابع کسینوس $f(x)=\cos(x)$:	تابع سینوس $f(x)=\sin(x)$:
	
۱) دامنه و برد: دامنه: تمام اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ برد: بازهٔ بستهٔ $[-۱,۱]$	**۱) دامنه و برد:** دامنه: تمام اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ برد: بازهٔ بستهٔ $[-۱,۱]$
۲) ریشه‌ها (نقاط $f(x)=۰$): $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z})$	**۲) ریشه‌ها (نقاط $f(x)=۰$):** $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$
۳) نقاط ماکزیمم (مقدار ۱): $x=۲k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$	**۳) نقاط ماکزیمم (مقدار ۱):** $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z})$
۴) نقاط مینیمم (مقدار ۱-): $x=۲k\pi+\pi\ (k\in\mathbb{Z})$	**۴) نقاط مینیمم (مقدار ۱-):** $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z})$

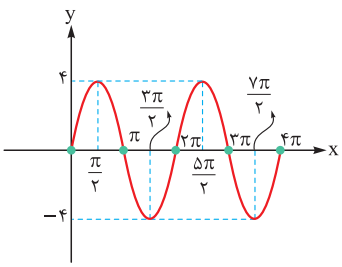
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=۲\sin x-\cos(\frac{\pi}{۲}+x)+\sin(\pi-x)$$

$$\Rightarrow f(x)=۲\sin x+\sin x+\sin x=۴\sin x$$

گام دوم: حال نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



گام سوم: برای این‌که شیب خط واصل یک نقطهٔ ماکزیمم و یک نقطهٔ مینیمم از نمودار تابع حداقل شود باید نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی باشند:

$$(\frac{\pi}{۲},۴),(\frac{۳\pi}{۲},-۴)$$

$$m_{min}=\frac{-۴-۴}{\frac{۳\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲}}=\frac{-۸}{\pi}$$

۲ تابع $f(x)=\sin x+[\cos x]$ با دامنهٔ $[0,2\pi]$ را در نظر بگیرید. کدام‌یک از خط‌های زیر با نمودار تابع f، تعداد نقاط مشترک بیشتری دارد؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $y=1$ ۲) $y=0$ ۳) $y=-1$ ۴) $y=-2$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint این‌جور سؤال‌ها که جزء صحیح دارن، باید به صورت بازه به بازه حل بشن. ببین تو بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت داخل جزء صحیح، یعنی $[\cos x]$ چه مقادیری ($\{-1,0,1\}$) می‌گیره و تابع رو تو هر بازه جداگانه رسم کن.

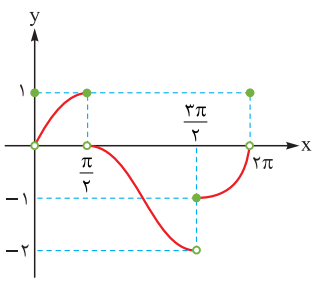
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 0<x\le\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\le x<2\pi \Rightarrow [\cos x]=0 \\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow [\cos x]=-1 \\ x=0,2\pi \Rightarrow [\cos x]=1,\ \sin x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \sin x-1 & ;\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \\ \sin x & ;\ 0<x\le\frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2}\le x<2\pi \\ 1 & ;\ x=0,2\pi \end{cases}$$

گام دوم: حال نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



گام سوم: با توجه به نمودار برای نقاط مشترک داریم:

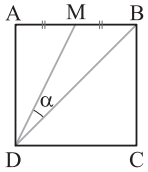
بیشترین تعداد ← ۳ برخورد: $y=1$

۰ برخورد: $y=0$

۲ برخورد: $y=-1$

۰ برخورد: $y=-2$

۳ در مربع شکل زیر، M وسط AB است. مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}$

۲) $\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$

۳) $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$

۴) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اتحادهای مجموع و تفاضل تانژانت:

این اتحادها مقدار تانژانت مجموع یا تفاضل دو زاویه را برحسب تانژانت خود آن زاویه‌ها محاسبه می‌کنند. این فرمول‌ها از تقسیم اتحادهای سینوس و کسینوس به دست می‌آیند.

اتحاد مجموع:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

اتحاد تفاضل:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

راهبرد حل مسئله: پیداکردن تانژانت زاویهٔ نامعلوم:

در بسیاری از مسائل هندسی، برای محاسبهٔ تانژانت یک زاویهٔ نامشخص، می‌توان آن زاویه را به صورت مجموع یا تفاضل دو زاویهٔ دیگر نوشت که تانژانت آن‌ها به سادگی از روی شکل قابل محاسبه است.

مراحل حل:

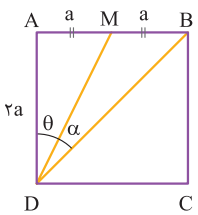
۱) زاویهٔ مورد نظر را برحسب مجموع یا تفاضل دو زاویهٔ قابل محاسبه (α و β) می‌نویسیم.

۲) مقدار $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ را از اطلاعات مسئله (مثلاً از روی مثلث‌های قائم‌الزاویه در شکل) به دست می‌آوریم.

۳) مقادیر به‌دست‌آمده را در فرمول $\tan(\alpha\pm\beta)$ جای‌گذاری کرده و حاصل را محاسبه می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به شکل زیر، در مثلث‌های AMD و ABD داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD}:\tan(\alpha+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{۱-\tan\alpha\tan\theta}$$

$$\overset{\Delta}{AMD}:\tan\theta=\frac{AM}{AD}=\frac{۱}{۲}$$

گام دوم: حال با توجه به این‌که $\alpha+\theta=۴۵^\circ$ داریم:

$$\tan(\alpha+\theta)=۱\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{\tan\alpha}{۲}}=۱\Rightarrow\tan\alpha+\frac{۱}{۲}=۱-\frac{\tan\alpha}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۳\tan\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۳}$$

گام سوم: حال به کمک اتحادهای مقدماتی مثلثاتی داریم:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow۱+\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\frac{۹}{۱۰}=\cos^۲\alpha\xrightarrow{\text{حاده }\alpha}\cos\alpha=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

۴ اگر $f(x)=\frac{۱}{۳}-۲\cos^۲ ax$ و دورهٔ تناوب تابع $y=\frac{۱}{۳}-۲f(۲ax)$ برابر $\frac{\pi}{۴}$ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint اول ضابطهٔ تابع $f(۲ax)$ رو با جای‌گذاری $۲ax$ در $f(x)$ به دست بیار، بعد با اتحادهای مثلثاتی (مخصوصاً اتحادهای کسینوس دو برابر کمان)، ضابطه رو ساده کن تا بتونی دورهٔ تناوبش رو پیدا کنی.

درس Box

۱) تعریف تابع متناوب و دورهٔ تناوب توابع معروف:

تابعی را متناوب می‌نامیم، اگر عدد مثبت و مشخصی مانند T وجود داشته باشد که با افزودن آن به متغیر تابع، مقدار تابع تغییر نکند، یعنی: $f(x+T)=f(x)$

کوچک‌ترین عدد مثبت T که در این شرط صدق کند، دورهٔ تناوب اصلی تابع نامیده می‌شود.

ضابطهٔ تابع	دورهٔ تناوب اصلی (T)
$\sin(ax),\cos(ax)$	$\frac{۲\pi}{\lvert a\rvert}$
$\sin^{۲n}(ax),\cos^{۲n}(ax)$ (توان زوج)	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$
$\lvert\sin(ax)\rvert,\lvert\cos(ax)\rvert$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$
$\tan(ax),\cot(ax)$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$
$x-[x]$	۱
$(-۱)^{[x]}$	۲

۲) تأثیر تبدیلات بر دورهٔ تناوب:

- تبدیلات بی‌تأثیر: انتقال‌های افقی و عمودی، قرینه‌سازی‌ها و انبساط / انقباض عمودی، دورهٔ تناوب یک تابع را تغییر نمی‌دهند.
- تبدیلات تأثیرگذار: تنها تبدیل انبساط و انقباض افقی دورهٔ تناوب را تغییر می‌دهد. اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ برابر T باشد، دورهٔ تناوب تابع $f(bx)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$T_{new}=\frac{T_{old}}{\lvert b\rvert}$$

مثال دورهٔ تناوب تابع $y=۵\sin(۴x-۳)+۲$ برابر است با $T=\frac{۲\pi}{\lvert ۴\rvert}=\frac{\pi}{۲}$. مقادیر $۲,-۳,۵$ تأثیری در دورهٔ تناوب ندارند.

نکته

اتحادهای مثلثاتی دو برابر کمان (۲α):

این اتحادها که از قراردادن $\beta=\alpha$ در فرمول‌های مجموع زاویا $(\alpha+\beta)$ به دست می‌آیند، برای ساده‌سازی عبارات مثلثاتی بسیار پرکاربرد هستند.

- **سینوس دو برابر کمان:** $\sin(۲\alpha)=۲\sin\alpha\cos\alpha$
- **کسینوس دو برابر کمان:**

این اتحاد سه شکل معادل و پرکاربرد دارد که هر سه از اتحاد اصلی و رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ به دست می‌آیند:

۱) $\cos(۲\alpha)=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$

۲) $\cos(۲\alpha)=۲\cos^۲\alpha-۱$

۳) $\cos(۲\alpha)=۱-۲\sin^۲\alpha$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ تابع $y=\frac{۱}{۳}-۲f(۲ax)$ را مشخص می‌کنیم:

$$f(۲ax)=\frac{۱}{۳}-۲\cos^۲(۲a^۲x) \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}-۲(\frac{۱}{۳}-۲\cos^۲(۲a^۲x))$$

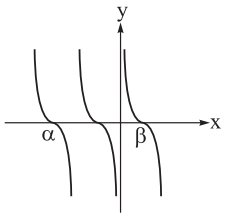
$$\Rightarrow y=\frac{-۱}{۳}+۴\cos^۲(۲a^۲x) \Rightarrow y=\frac{-۱}{۳}+۴(\frac{۱+\cos(۴a^۲x)}{۲})$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۱}{۳}+۲(۱+\cos(۴a^۲x)) \Rightarrow y=\frac{۵}{۳}+۲\cos(۴a^۲x)$$

گام دوم: حال به کمک رابطهٔ دورهٔ تناوب داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|۴a^۲|} \Rightarrow \frac{\pi}{۴}=\frac{۲\pi}{۴a^۲} \Rightarrow a^۲=۲ \xrightarrow{a>۰} a=\sqrt{۲}$$

۵ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cot 3x$ است. حاصل $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟



۱) -3

۲) -4

۳) -6

۴) -2

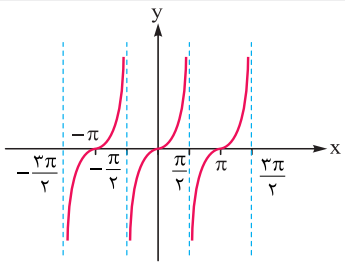
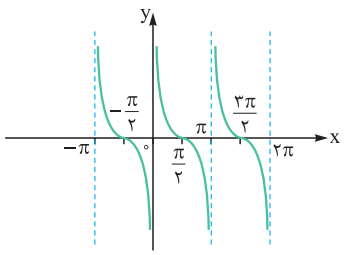
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

صفرهای تابع کتانژانت، همون نقاط برخورد با محور xها هستن. معادلهٔ $\cot(3x)=0$ رو حل کن تا طول این نقاط رو پیدا کنی و نسبتشون رو به دست بیاری.

درس Box

نمودار و ویژگی‌های توابع تانژانت و کتانژانت:

ویژگی	$y=\tan x$	$y=\cot x$
نمودار		
دورهٔ تناوب	π	π
دامنه	$\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}-\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$
ریشه‌ها	$x=k\pi$	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$
یکنوایی	در هر بازه، دامنه اکیداً صعودی است.	در هر بازه، دامنه اکیداً نزولی است.
برد	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا توجه کنید که ضریب a روی طول نقاط α و β بی‌تأثیر است. برای مشخص‌کردن طول نقاط α و β، نقاط برخورد نمودار تابع با محور xها را مشخص می‌کنیم:

$$f(x)=0 \Rightarrow \cot 3x=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \beta \\ 3x=\frac{-\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{-\pi}{6} \\ 3x=\frac{-3\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{-\pi}{2} \Rightarrow \alpha \end{cases}$$

گام دوم: بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{-\pi}{2}}{\frac{\pi}{6}}=-3$$

تیزبازی

ضریب a که در مقدار صفرهای تابع تأثیر ندارد، حالا چون نسبت صفرها را می‌خواهیم، پس ضریب انقباض افقی هم بی‌تأثیر است، این یعنی می‌توان برای سادگی تابع $y=\cot x$ را در نظر گرفت.

۶ نمودار تابع $f(x)=۳\tan(\frac{۲x+\pi}{۴})$، محور yها را با عرض a و محور xها را با طول b قطع می‌کند و $x=c$ معادلهٔ یکی از مجانب‌های قائم آن است. اگر $b>۰$ و $c<۰$ باشد، کم‌ترین مقدار $\frac{b-c}{a}$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

عرض از مبدأ (a)، ریشه (b) و مجانب (c) تابع تانژانت رو از روی ضابطهٔ کلیش پیدا کن. بعد با توجه به شروط مسئله، مناسب‌ترین مقادیر رو برای b و c انتخاب کن تا کم‌ترین مقدار خواسته‌شده به دست بیاد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا مقدار a، یعنی $f(۰)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a=f(۰)=۳\tan(\frac{\pi}{۴})=۳$$

گام دوم: حال برای مشخص‌کردن محل برخورد نمودار تابع با محور xها داریم:

$$۳\tan(\frac{۲x+\pi}{۴})=۰ \Rightarrow \frac{۲x+\pi}{۴}=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x=\frac{(۴k-۱)\pi}{۲} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

گام سوم: مجانب‌های تابع تانژانت در نقاطی است که آرگومان (زاویه) آن مضرب فردی از $\frac{\pi}{۲}$ باشد:

$$\frac{۲x+\pi}{۴}=\frac{(۲n+۱)\pi}{۲} \quad (n\in\mathbb{Z}) \Rightarrow x=\frac{(۴n+۱)\pi}{۲} \quad (n\in\mathbb{Z})$$

گام چهارم: برای پیداکردن کم‌ترین مقدار $\frac{b-c}{a}$ باید عبارت $b-c$ کم‌ترین شود. این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که b کم‌ترین مقدار مثبت و c بزرگ‌ترین مقدار منفی خود را داشته باشد:

$$b:k=۱ \Rightarrow b=\frac{(۴-۱)\pi}{۲}=\frac{۳\pi}{۲}$$

$$c:n=-۱ \Rightarrow c=\frac{(-۴+۱)\pi}{۲}=\frac{-۳\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \min(\frac{b-c}{a})=\frac{\frac{۳\pi}{۲}-(-\frac{۳\pi}{۲})}{۳}=\frac{\frac{۶\pi}{۲}}{۳}=\pi$$

۷ معادلهٔ $\sin^۲ x.\tan(x+\frac{\pi}{۴}) = \cos^۲ x.\cot(\frac{\pi}{۴}-x)$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

اول با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، همهٔ نسبت‌ها رو به یک نوع تبدیل کن و معادله رو تا جایی که می‌شه ساده کن. بعد معادله رو حل کن و حواست به دامنهٔ تعریف تانژانت و کتانژانت باشه تا جواب‌های غیر قابل قبول رو حذف کنی.

درس Box

حل معادلات مثلثاتی پایه:

راهبرد کلی حل معادلات مثلثاتی:

برای حل معادلات مثلثاتی در فرم کلی، ابتدا سعی می‌کنیم آن‌ها را به یکی از سه حالت پایه‌های زیر تبدیل کنیم و سپس با استفاده از جواب‌های عمومی هر حالت، معادله را حل می‌کنیم.

۱) معادله را به یکی از سه فرم اصلی $\sin u = a$ ، $\cos u = a$ یا $\tan u = a$ تبدیل می‌کنیم.

۲) یک زاویهٔ مشخص A پیدا می‌کنیم که در رابطه صدق کند (مثلاً $\sin A = a$).

۳) معادله را به شکل $\sin u = \sin A$ (یا برای کسینوس و تانژانت) نوشته و از فرمول جواب عمومی آن استفاده می‌کنیم.

۱) معادلهٔ سینوسی $(\sin u = a)$:

پس از تبدیل معادله به شکل $\sin u = \sin A$، جواب‌های عمومی آن دو دسته هستند:

$$\begin{cases} u = ۲k\pi + A \\ u = ۲k\pi + (\pi - A) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

دلیل: در دایرهٔ مثلثاتی، سینوس یک زاویه با سینوس زاویهٔ مکمل آن برابر است.

۲) معادلهٔ کسینوسی $(\cos u = a)$:

پس از تبدیل معادله به شکل $\cos u = \cos A$، جواب‌های عمومی آن دو دسته هستند:

$$\begin{cases} u = ۲k\pi + A \\ u = ۲k\pi - A \end{cases} \text{ یا } u = ۲k\pi \pm A \quad (k \in \mathbb{Z})$$

دلیل: کسینوس یک تابع زوج است، بنابراین کسینوس یک زاویه با کسینوس قرینهٔ آن برابر است.

۳) معادلهٔ تانژانتی $(\tan u = a)$:

پس از تبدیل معادله به شکل $\tan u = \tan A$، جواب عمومی آن یک دسته است:

$$u = k\pi + A \quad (k \in \mathbb{Z})$$

دلیل: دورهٔ تناوب تابع تانژانت برابر با π است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا توجه کنید که:

$$\cot(\frac{\pi}{۴}-x) = \tan(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۴}-x)) = \tan(\frac{\pi}{۴}+x)$$

گام دوم: با بازنویسی معادله به کمک گام قبلی داریم:

$$\sin^۲ x.\tan(x+\frac{\pi}{۴}) = \cos^۲ x.\tan(x+\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow \tan(x+\frac{\pi}{۴})(\sin^۲ x - \cos^۲ x) = ۰$$

$$\Rightarrow \tan(x+\frac{\pi}{۴})(-\cos ۲x) = ۰$$

گام سوم: با حل معادلهٔ اخیر به‌دست‌آمده، داریم:

$$\tan(x+\frac{\pi}{۴}) = ۰ \Rightarrow x+\frac{\pi}{۴} = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴}, (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{۰ \le x \le ۲\pi} \begin{cases} x = \frac{۳\pi}{۴} \checkmark \\ x = \frac{۷\pi}{۴} \checkmark \end{cases}$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{0 \le x \le 2\pi} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} & \text{غ.ق.ق، مقدار تانژانت تعریف‌نشده می‌شود.} \\ x = \frac{3\pi}{4} \checkmark \\ x = \frac{5\pi}{4} & \text{غ.ق.ق، مقدار تانژانت تعریف‌نشده می‌شود.} \\ x = \frac{7\pi}{4} \checkmark \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $[0, 2\pi]$، ۲ جواب حقیقی دارد.

یه‌جور دیگه

معادله را با فرض $\cos x \neq 0$، می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cot(\frac{\pi}{4} - x)}{\tan(x + \frac{\pi}{4})} \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \text{ یا } \tan x = -1$$

$$\tan x = 1 \xrightarrow{0 \le x \le 2\pi} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \quad \text{غ.ق.ق، مقدار تانژانت تعریف‌نشده می‌شود.}$$

$$\tan x = -1 \xrightarrow{0 \le x \le 2\pi} \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \checkmark \\ x = \frac{7\pi}{4} \checkmark \end{cases}$$

SanjeshCloud

۸ انتهای کمان‌های زوایایی که در معادلهٔ $\sin ۲x = \tan x$ صدق می‌کنند، روی دایرهٔ مثلثاتی تشکیل چند نقطه می‌دهند؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint معادله رو به صورت $f(x) = ۰$ مرتب کن و از $\sin x$ فاکتور بگیر. معادله به دو بخش ساده‌تر تبدیل می‌شه که جواب‌های هر کدوم رو جداگانه روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنی.

نکته **حالات خاص معادلات مثلثاتی:**

معادله	جواب کلی	موقعیت روی دایره
حالا خاص سینوسی		
$\sin u = ۰$	$u = k\pi$ (مضارب صحیح π)	
$\sin u = ۱$	$u = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$	
$\sin u = -۱$	$u = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$	
حالات خاص کسینوسی		
$\cos u = ۰$	$u = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ (مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$)	
$\cos u = ۱$	$u = ۲k\pi$ (مضارب زوج π)	
$\cos u = -۱$	$u = (۲k+۱)\pi$ (مضارب فرد π)	

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا به کمک اتحادهای مثلثاتی، معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin ۲x = \tan x \Rightarrow ۲\sin x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\cos x - \frac{۱}{\cos x}) = ۰$$

$$\Rightarrow \sin x(\frac{۲\cos^۲ x - ۱}{\cos x}) = ۰ \Rightarrow \sin x \times \frac{\cos ۲x}{\cos x} = ۰$$

گام دوم: برای حل معادلهٔ اخیر با توجه به مخرج داریم:

$\sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi , k \in \mathbb{Z}$ ۲ نقطه

$\cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} , k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴} , k \in \mathbb{Z}$ ۴ نقطه

$\cos x \neq ۰ \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} , k \in \mathbb{Z}$

بنابراین انتهای کمان‌های زوایای جواب‌های این معادله روی دایرهٔ مثلثاتی ۶ نقطهٔ متمایز ایجاد می‌کنند.

۹ اگر دورهٔ تناوب $f(x)=\cos ax$ برابر π باشد، آن‌گاه معادلهٔ $f(x)+f(2x)=-1$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint با استفاده از دورهٔ تناوب داده‌شده، مقدار $|a|$ رو پیدا کن. بعد معادله رو تشکیل بده و با اتحاد کسینوس دو برابر کمان، اون رو به یه معادلهٔ درجه‌دو برحسب $\cos(2x)$ تبدیل و حل کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا به کمک دورهٔ تناوب، ضابطهٔ تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$\pi=\frac{2\pi}{|a|} \Rightarrow |a|=2$$

مقدار $a=2$ را در نظر می‌گیریم، زیرا $\cos(-2x)=\cos 2x$.

گام دوم: حال معادله را تشکیل می‌دهیم و به کمک اتحادهای مثلثاتی آن را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x+\cos 4x=-1 \Rightarrow \cos 2x+2\cos^2 2x-1=-1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 2x+\cos 2x=0 \Rightarrow \cos 2x(2\cos 2x+1)=0$$

گام سوم: حال برای حل معادلهٔ اخیر در بازهٔ $[0,2\pi]$ داریم:

$$\cos 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z} \xrightarrow{0\le x\le 2\pi} x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

$$\cos 2x=\frac{-1}{2} \Rightarrow \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{0\le x\le 2\pi} x=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

بنابراین این معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$، ۸ جواب دارد.

۱۰ تابع $f(x)=\frac{x^۲+ax}{x+۱}+bx+۳$ روی دامنه‌اش، هم صعودی و هم نزولی است. حاصل $\frac{f(a)}{b}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint تابعی که هم صعودی و هم نزولی باشه، حتماً یک تابع ثابته. ضابطهٔ تابع رو طوری ساده کن که بتونی ضریب x و عبارات وابسته به x رو مساوی صفر قرار بدی.

نکته تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲+x-x+ax}{x+۱}+bx+۳=\frac{x(x+۱)+(a-۱)x}{x+۱}+bx+۳$$

$$\Rightarrow f(x)=x+\frac{(a-۱)x}{x+۱}+bx+۳\Rightarrow f(x)=(۱+b)x+\frac{(a-۱)x}{x+۱}+۳$$

گام دوم: حالا چون تابع f هم صعودی و هم نزولی است، بنابراین تابعی ثابت است، پس ضابطهٔ تابع f نباید وابستگی به x داشته باشد:

$$\begin{cases}۱+b=۰ \Rightarrow b=-۱\\ a-۱=۰ \Rightarrow a=۱\end{cases} \Rightarrow f(x)=۳, x\neq -۱$$

گام سوم: مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{f(a)}{b}=\frac{f(۱)}{-۱}=\frac{۳}{-۱}=-۳$$

۱۱ چندجمله‌ای $f(x)$ مفروض است. اگر چندجمله‌ای $(fof)(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر x^2+x-2 برابر $3x+1$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x+f(x)$ بر x^2-5x+4 کدام است؟

۱) $\frac{x+1}{3}$ ۲) $\frac{1-x}{3}$

۳) $\frac{16-x}{3}$ ۴) $\frac{x-16}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint از قضیهٔ تقسیم و باقی‌مانده استفاده کن، اطلاعات مسئله را به زبان ریاضی بنویس؛ مثلاً بخش‌پذیری fof بر $x-1$، یعنی $f(f(1))=0$. با این اطلاعات می‌تونی مقادیر لازم رو برای حل دستگاه نهایی پیدا کنی.

درس Box

تقسیم چندجمله‌ای‌ها و قضایای مرتبط:

قانون اصلی تقسیم:

در تقسیم چندجمله‌ای A (مقسوم) بر B (مقسوم‌علیه)، خارج‌قسمت Q و باقی‌مانده R به گونه‌ای به دست می‌آیند که همواره رابطهٔ زیر برقرار است:

$$A=B\cdot Q+R$$

نکته درجهٔ باقی‌مانده (R) همواره از درجهٔ مقسوم‌علیه (B) کوچک‌تر است.

قضیهٔ باقی‌مانده (برای مقسوم‌علیه درجه‌اول):

برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر عبارت درجه‌یک $ax+b$، کافی است ریشهٔ مقسوم‌علیه (یعنی $x=-\frac{b}{a}$) را در مقسوم قرار دهیم. باقی‌مانده برابر است با:

$$R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

قضیهٔ عامل (بخش‌پذیری):

یک چندجمله‌ای $P(x)$ بر عبارت $(x-a)$ بخش‌پذیر است، اگر و تنها اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر باشد. با توجه به قضیهٔ باقی‌مانده، این شرط معادل است با:

$P(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است. $\Leftrightarrow P(a)=0$

به عبارت دیگر، $(x-a)$ یک عامل (فاکتور) از $P(x)$ است، اگر و تنها اگر a یک ریشه از $P(x)$ باشد.

محاسبهٔ باقی‌مانده در تقسیم بر عبارت درجه‌دوم:

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم یک چندجمله‌ای $f(x)$ بر یک عبارت درجه‌دوم تجزیه‌پذیر، مانند $(x-p)(x-q)$، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) باقی‌مانده را به صورت یک عبارت درجه‌یک، یعنی $ax+b$ در نظر می‌گیریم.

۲) رابطهٔ اصلی تقسیم را می‌نویسیم: $f(x)=(x-p)(x-q)\cdot Q(x)+ax+b$

۳) ریشه‌های مقسوم‌علیه، یعنی p و q را در رابطهٔ بالا جای‌گذاری می‌کنیم تا یک دستگاه دو معادله ـ دو مجهولی برای a و b به دست آید:

$$\begin{cases} f(p)=ap+b \\ f(q)=aq+b \end{cases}$$

۴) با حل این دستگاه، مقادیر a و b را پیدا کرده و باقی‌مانده $(ax+b)$ را مشخص می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا توجه کنید که چون $(fof)(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، پس: $(fof)(1)=0$

گام دوم: حال با توجه به قضیهٔ تقسیم داریم: $f(x)=Q(x)(x^2+x-2)+3x+1 \Rightarrow f(1)=4, f(-2)=-5$

$\xrightarrow{(fof)(1)=0} f(4)=0$

گام سوم: حال برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x+f(x)$ بر $x^{۲}-۵x+۴$ با توجه به این‌که مقسوم‌علیه از درجهٔ ۲ است، باقی‌مانده حداکثر از درجهٔ ۱ است. فرض می‌کنیم باقی‌مانده $R(x)=mx+n$ باشد، طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$x+f(x)=Q'(x)(x-۱)(x-۴)+mx+n \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \Rightarrow ۱+f(۱)=m+n \\ x=۴ \Rightarrow ۴+f(۴)=۴m+n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=۵ \\ ۴m+n=۴ \end{cases} \Rightarrow ۳m=-۱ \Rightarrow m=\frac{-۱}{۳} \Rightarrow n=\frac{۱۶}{۳} \Rightarrow R(x)=\frac{۱۶-x}{۳}$$

خیلی سبز

آزمون ۳۰ آذر

حسابان ۲

۱ اگر $۴\sin^۲\alpha+۹\cos^۲\alpha=۱۲\sin\alpha\cos\alpha$ باشد، مقدار $\cos ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{۶}{۱۳}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$ ۳) $-\frac{۵}{۱۳}$ ۴) $\frac{۵}{۱۳}$

مشاوره ایدهٔ اولیهٔ این سؤال در حل بعضی از سؤالات مثلثات بسیار کارساز است، حتماً پاسخ را ببینید.

Hint دو طرف رابطه را بر $\tan^۲\alpha$ تقسیم کنید و سپس $\tan\alpha$ را به دست آورید و از رابطهٔ $\cos ۲\alpha$ استفاده کنید.

درس Box

روابط مثلثاتی کمان α :

	رابطهٔ مثلثاتی	یه‌جور دیگه
۱	$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$	$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$ $\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha$
۲	$\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}\ ,\ \cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$	$\tan\alpha\cot\alpha=۱$
۳	$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$	–
۴	$۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$	–

روابط مثلثاتی ۲α :

	رابطهٔ مثلثاتی	یه‌جور دیگه
۱	$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$
۲	$\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$	$\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: دو طرف رابطهٔ داده‌شده را بر $\cos^۲\alpha$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan\alpha$ را به دست آوریم:

$$۴\sin^۲\alpha+۹\cos^۲\alpha=۱۲\sin\alpha\cos\alpha \xrightarrow{\text{دو طرف تقسیم بر } \cos^۲\alpha} \frac{۴\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}+\frac{۹\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}=\frac{۱۲\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow ۴\tan^۲\alpha+۹=۱۲\tan\alpha \Rightarrow ۴\tan^۲\alpha-۱۲\tan\alpha+۹=۰$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (۲\tan\alpha-۳)^۲=۰ \Rightarrow ۲\tan\alpha-۳=۰ \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۳}{۲}$$

گام دوم: می‌دانیم که $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$، با توجه به این‌که $\tan\alpha=\frac{۳}{۲}$ داریم:

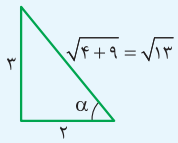
$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱+(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱+\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۴}{۱۳}$$

گام سوم:

$$\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۲(\frac{۴}{۱۳})-۱=\frac{۸}{۱۳}-۱=\frac{-۵}{۱۳}$$

یه‌جور دیگه

چون $\tan\alpha=\frac{۳}{۲}$، یک مثلث قائم‌الزاویهٔ فرضی با زاویهٔ α رسم می‌کنیم به‌گونه‌ای که ضلع مقابل به α برابر ۳ و ضلع مجاور به α برابر ۲ باشد؛ وتر را هم با فیثاغورس پیدا می‌کنیم:



$$\Rightarrow |\cos\alpha|=\frac{\text{ضلع مجاور به }\alpha}{\text{وتر}}=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}} \Rightarrow \cos^{۲}\alpha=\frac{۴}{۱۳}$$

توجه: از این مثلث فرضی فقط اندازهٔ نسبت‌ها را می‌توان به دست آورد و علامت را نمی‌توان تشخیص داد.

گام سوم: حال که $\cos^{۲}\alpha=\frac{۴}{۱۳}$ را داریم، $\cos۲\alpha$ را به کمک اتحاد مربوطه به دست می‌آوریم:

$$\cos۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱ \Rightarrow \cos۲\alpha=۲(\frac{۴}{۱۳})-۱=\frac{۸}{۱۳}-۱ \Rightarrow \cos۲\alpha=-\frac{۵}{۱۳}$$

۲ اگر $\cos\frac{\pi}{16}=a$ باشد، حاصل $16a^2(a^2-1)$ کدام است؟

۱) $-1-\sqrt{2}$
۲) $2-\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{2}-3$
۴) -1

مشاوره بر روی روابط کمان‌های 2α مسلط باشید؛ چراکه یکی از ارکان اصلی برای پاسخ‌دادن به سؤالات مثلثات است.

Hint از روی $\cos\frac{\pi}{16}$، $\cos\frac{\pi}{8}$ و سپس $\cos\frac{\pi}{4}$ را برحسب a بنویسید و به کمک فاکتورگیری، حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به رابطهٔ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ و این‌که $\frac{\pi}{8}=2(\frac{\pi}{16})$، مقدار $\cos\frac{\pi}{8}$ را برحسب a به دست می‌آوریم:

$$\cos\frac{\pi}{8}=2\cos^2\frac{\pi}{16}-1 \xrightarrow{\cos\frac{\pi}{16}=a} \cos\frac{\pi}{8}=2a^2-1$$

گام دوم: چون $\frac{\pi}{4}=2(\frac{\pi}{8})$، کسینوس $\frac{\pi}{4}$ را هم برحسب a می‌نویسیم:

$$\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1 \xrightarrow[\cos\frac{\pi}{8}=2a^2-1]{\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}=2(2a^2-1)^2-1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=2(4a^4-4a^2+1)-1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=8a^4-8a^2+1 \quad (*)$$

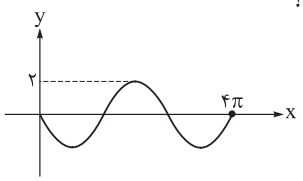
گام سوم: خواستهٔ سؤال مقدار $16a^2(a^2-1)$ است که آن را از روی رابطهٔ $(*)$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=8a^4-8a^2+1 \xrightarrow{\text{فاکتور از } 8a^2} \frac{\sqrt{2}}{2}=8a^2(a^2-1)+1 \Rightarrow 8a^2(a^2-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف }\times 2} \underbrace{16a^2(a^2-1)}_{\text{خواستهٔ سؤال}}=\sqrt{2}-2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳ نمودار تابع $y = a\sin bx$ به صورت زیر است. دورهٔ تناوب تابع $y = \cos(\frac{a}{b}x)$ کدام است؟



۱) $\frac{۳\pi}{۴}$
۲) $\frac{۳\pi}{۲}$
۳) $\frac{۴\pi}{۳}$
۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

مشاوره نمودارهای مثلثاتی از مباحث پرتکرار در کنکورهای مختلف بوده است.

Hint

با توجه به دورهٔ تناوب و ماکزیمم از روی شکل ابتدا به ترتیب $|b|$ و $|a|$ را پیدا کنید و سپس از رابطهٔ دورهٔ تناوب خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

درس Box

نمودار توابع مثلثاتی:

ماکزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی به فرم $y = a\sin(bx)+c$ و $y = a\cos(bx)+c$ از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\max = |a|+c$$

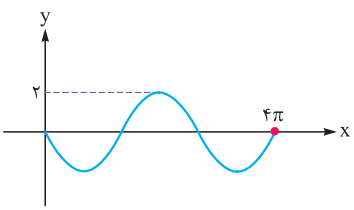
$$\min = -|a|+c$$

دورهٔ تناوب این توابع نیز از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: می‌دانیم که در تابع به فرم $y = a\sin(bx)+c$، ماکزیمم برابر $|a|+c$ است. در تابع داده‌شده $c = ۰$ و از روی نمودار ماکزیمم تابع ۳ است، در نتیجه:



$$|a|+۰ = ۲ \Rightarrow |a| = ۲$$

گام دوم: می‌دانیم که یک دورهٔ تناوب تابع سینوس به صورت می‌باشد. در نمودار داده‌شده یک‌ونیم دورهٔ تناوب از تابع آورده شده است؛ پس دورهٔ تناوب آن برابر می‌شود با:

$$۱/۵T = ۴\pi \Rightarrow ۳T = ۸\pi \Rightarrow T = \frac{۸\pi}{۳}$$

از روی فرمول دورهٔ تناوب توابع سینوسی، $|b|$ را پیدا می‌کنیم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\overset{۴}{\cancel{۸}}\pi}{۳} = \frac{\cancel{۲}\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۳}{۴}$$

گام سوم: باز هم از فرمول دورهٔ تناوب استفاده می‌کنیم تا دورهٔ تناوب تابع $y = \cos(\frac{a}{b}x)$ را به دست آوریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|\frac{a}{b}|} \xrightarrow[|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}]{|a|=۲,\ |b|=\frac{۳}{۴}} T = \frac{۲\pi}{\frac{۸}{۳}} = \frac{۳\pi}{۴}$$

SanjeshCloud

۴ اگر $\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{۹}{۱۳}$ و $\tan\beta=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) -۲ یا $\frac{۱}{۲}$

۲) ۲ یا $-\frac{۱}{۲}$

۳) ۲ یا $\frac{۱}{۲}$

۴) -۲ یا $-\frac{۱}{۲}$

مشاوره فرمول تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه ویژهٔ رشتهٔ ریاضی است و قابلیت این را دارد که به صورت مستقیم در کنکور بیاید.

Hint از روی داده‌های سؤال و به کمک فرمول مجموع تانژانت دو زاویه ابتدا $\tan ۲\alpha$ و سپس $\tan\alpha$ را پیدا کنید.

درس Box

روابط مربوط به تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

حالت خاص فرمول $\tan(\alpha+\beta)$ برای $\tan ۲\alpha$ است که گفتیم از رابطهٔ $\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به صورت سؤال، $\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{۹}{۱۳}$ و $\tan\beta=\frac{۱}{۳}$. از رابطهٔ تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه استفاده می‌کنیم و $\tan ۲\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{۹}{۱۳}\Rightarrow\frac{\tan ۲\alpha-\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۱}{۳}\tan ۲\alpha}=\frac{۹}{۱۳}\Rightarrow\frac{\frac{۳\tan ۲\alpha-۱}{۳}}{\frac{۳+\tan ۲\alpha}{۳}}=\frac{۹}{۱۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۳\tan ۲\alpha-۱}{۳+\tan ۲\alpha}=\frac{۹}{۱۳}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۳۹\tan ۲\alpha-۱۳=۲۷+۹\tan ۲\alpha\Rightarrow ۳۰\tan ۲\alpha=۴۰\Rightarrow\tan ۲\alpha=\frac{۴}{۳}$$

گام دوم: می‌دانیم که $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$؛ پس:

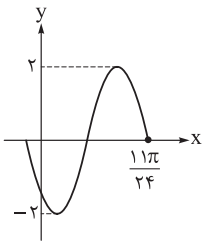
$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}\xrightarrow{\tan ۲\alpha=\frac{۴}{۳}}\frac{۴}{۳}=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۴-۴\tan^۲\alpha=۶\tan\alpha$$

$$\Rightarrow ۴\tan^۲\alpha+۶\tan\alpha-۴=۰\quad(*)$$

گام سوم: رابطهٔ $(*)$ یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب $\tan\alpha$ است، آن را حل می‌کنیم و خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$۴\tan^۲\alpha+۶\tan\alpha-۴=۰\Rightarrow\tan\alpha=\frac{-۶\pm ۱۰}{۸}\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=-۲\\ \text{یا}\\ \tan\alpha=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

۵ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=c+a\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})$ به صورت زیر است. حاصل $c+ab$ کدام است؟



۱) $-\frac{۳۴}{۱۱}$

۲) $\frac{۲۳}{۱۱}$

۳) -۶

۴) ۱۰

مشاوره با یکی از سؤالات چالشی این آزمون مواجه هستید، اگر آن را در آزمون پاسخ نداده‌اید، نگران نباشید.

Hint از اتحادهای طلایی استفاده کنید تا توان ۲ حذف شود و سپس به کمک فرمول‌های ماکزیمم و مینیمم و جای‌گذاری نقطه‌ها a، b و c را به دست آورید.

درس Box

اتحادهای طلایی:

از اتحادهای زیر برای حذف‌کردن توان ۲ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^{۲}\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$$

$$\cos^{۲}\alpha=\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به اتحادهای طلایی که در درس‌باکس گفتیم $\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})$ را به صورت زیر می‌نویسیم تا از شرّ توان ۲ خلاص شویم:

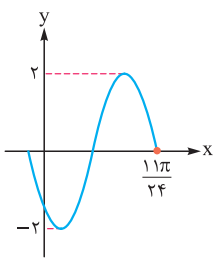
$$\cos^{۲}\alpha=\frac{\cos ۲\alpha+۱}{۲}\Rightarrow\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\cos(۲(bx+\frac{\pi}{۶}))+\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\cos(۲bx+\frac{\pi}{۳})+\frac{۱}{۲}$$

تابع f را طبق تساوی به‌دست‌آمده بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=c+a\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})\xrightarrow{\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\cos(۲bx+\frac{\pi}{۳})+\frac{۱}{۲}}f(x)=c+a(\frac{۱}{۲}\cos(۲bx+\frac{\pi}{۳})+\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\cos(۲bx+\frac{\pi}{۳})+c$$

گام دوم: می‌دانیم در توابع به فرم $a\cos(bx)+c$، $max=|a|+c$ و $min=-|a|+c$، همچنین از روی نمودار واضح است که ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۲ و -۲ است؛ پس:



$$max:\left|\frac{a}{۲}\right|+\frac{a}{۲}+c=۲$$

$$min:-\left|\frac{a}{۲}\right|+\frac{a}{۲}+c=-۲$$

دو طرف رابطه‌های به‌دست‌آمده را یک بار با هم جمع می‌کنیم و یک بار از هم کم می‌کنیم تا به روابط زیر برسیم:

$$\left|\frac{a}{۲}\right|+\frac{a}{۲}+c=۲$$
$$-\left|\frac{a}{۲}\right|+\frac{a}{۲}+c=-۲$$
$$\xrightarrow[(-)]{(+)}\begin{cases}a+۲c=۰\\ ۲\left|\frac{a}{۲}\right|=۴\Rightarrow\left|\frac{a}{۲}\right|=۲\Rightarrow\frac{|a|}{۲}=۲\Rightarrow|a|=۴\end{cases}$$

گام سوم: برای این‌که علامت a را معلوم کنیم، نقطهٔ $x=۰$ را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم. با توجه به نمودار واضح است که $f(۰)$ منفی است، همچنین $a+۲c=۰$، در نتیجه $c=-\frac{a}{۲}$؛ پس:

$$f(x)=\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\cos(۲bx+\frac{\pi}{۳})+c\xrightarrow{x=۰}f(۰)=\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\underbrace{(\cos\frac{\pi}{۳})}_{\frac{۱}{۲}}+c$$

$$\Rightarrow f(۰)=\frac{۳a}{۴}+c\xrightarrow{c=-\frac{a}{۲}}f(۰)=\frac{a}{۴}\xrightarrow{f(۰)\text{ منفی است.}}\frac{a}{۴}<۰\Rightarrow a<۰$$

پس $a<0$. در گام سوم دیدیم که $|a|=4$، در نتیجه:

$$|a|=4 \Rightarrow a=-4 \xrightarrow{c=-\frac{a}{2}} c=2$$

گام چهارم: حال‌که a و c را داریم، نقطهٔ $(\frac{11\pi}{24},0)$ که روی نمودار قرار دارد را در ضابطهٔ f قرار می‌دهیم تا b به دست آید:

$$f(x)=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos(2bx+\frac{\pi}{3})+c \xrightarrow[c=2]{a=-4} f(x)=-2\cos(2bx+\frac{\pi}{3}) \Rightarrow f(\frac{11\pi}{24})=-2\cos(2b(\frac{11\pi}{24})+\frac{\pi}{3})$$

$$\xrightarrow{f(\frac{11\pi}{24})=0} 0=-2\cos(\frac{11b\pi}{12}+\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos(\frac{11b\pi}{12}+\frac{\pi}{3})=0 \xrightarrow[y=-\cos x \text{ تابع تناوب اولین}]{\text{دومین نقطه از}} \frac{11b\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{11b\pi+4\pi}{12}=\frac{-3\pi}{2} \Rightarrow b=-2$$

دقت کنید که b باید منفی باشد؛ زیرا اگر $b>0$ باشد، تابع در $x=0$ صعودی خواهد شد؛ درحالی‌که نمودار رسم‌شده غیر از این را نشان می‌دهد.

پس خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$c+ab=2+(-4)(-2)=2+8=10$$

۶ بزرگ‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $1+\cos 2x = 3\sin x$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ چند برابر کوچک‌ترین ریشهٔ آن در این بازه است؟

۱) ۷ ۲) ۵

۳) ۱۱ ۴) ۳

مشاوره معادلات مثلثاتی به فرم معادلات درجه‌دوم از آن دسته سؤالات آسان است که اتفاقاً در کنکور نیز پرتکرار است.

Hint

$\cos 2x$ را به صورت $1-2\sin^2 x$ بنویسید تا به یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب $\sin x$ برسید.

درس Box

معادلات مثلثاتی:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به جای $\cos 2x$ در معادلهٔ داده‌شده می‌نویسیم $1-2\sin^2 x$ تا به یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب $\sin x$ برسیم:

$$1+\cos 2x = 3\sin x \Rightarrow 1+1-2\sin^2 x = 3\sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 9-(-16)=25} \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -2 \text{ غ ق ق} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

چون $-1 \le \sin x \le 1$، پس $\sin x = -2$ قابل قبول نیست و $\sin x = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

گام دوم: در بازهٔ $(0,2\pi)$ می‌دانیم که در $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$، $\sin x = \frac{1}{2}$ است؛ پس معلوم می‌کنیم که ریشهٔ بزرگ‌تر چند برابر ریشهٔ کوچک‌تر است تا خواستهٔ سؤال به دست آید:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{\text{خواستهٔ سؤال}} \frac{\frac{5\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = 5$$

۷ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۲\cos x$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۴\pi}{۳}$

۳) $\frac{۱۱\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۳}$

مشاوره بر روی روابط مجموع در کمان حتماً مسلط باشید، چراکه قابلیت این را دارد که به صورت جداگانه بیاید و یا به همراه دیگر مباحث. در این‌جا با معادلهٔ مثلثاتی ترکیب شده است.

Hint به کمک فرمول، $\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ را باز کنید و سپس دو طرف را منهای $\cos x$ کنید. به رابطه‌ای آشنا می‌رسید و بعد از آن سؤال را حل کنید.

درس Box

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل دو کمان:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۲\cos x \Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{۶}+\cos x\sin\frac{\pi}{۶}=۲\cos x \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x=۲\cos x$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x=\frac{۳}{۲}\cos x$$

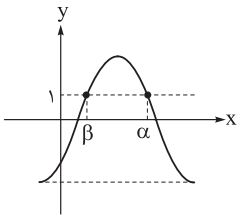
گام دوم: پس معادله به فرم $\tan x=\sqrt{۳}$ در می‌آید:

$$\tan x=\sqrt{۳}=\tan\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳} \qquad ;k\in\mathbb{Z}$$

گام سوم: جواب‌های بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۴\pi}{۳}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۵\pi}{۳}$ است.

SanjeshCloud

۸ شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\sin x-۲\cos x$ در یک دورهٔ تناوب است. حاصل $\sin(\alpha-\beta)$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۵}$
۲) $-\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $-\frac{۳}{۵}$

مشاوره این سؤال نیز یکی دیگر از سؤالات چالشی آزمون است.

Hint ضابطهٔ تابع را برابر ۱ قرار دهید و سپس به کمک توان ۲ رسانی $\sin\alpha$ و $\sin\beta$ را پیدا کنید.

درس Box

نسبت‌های مثلثاتی زوایا به فرم $\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha$ (k فرد):

α را حاده در نظر می‌گیریم، اگر sin داشتیم در آن طرف مساوی می‌نویسیم $\cos\alpha$ (و بالعکس)، اگر tan داشتیم در آن طرف مساوی می‌نویسیم $\cot\alpha$ (و بالعکس) و سپس تعیین می‌کنیم که $\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha$ در کدام ربع مثلثاتی قرار می‌گیرد. اگر **نسبت اولیه** در این ربع مثبت بود، پشت نسبت مثلثاتی حاصل مثبت قرار می‌دهیم و اگر منفی بود، پشت حاصل منفی قرار می‌دهیم. نگاه کنید:

$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha\right)=-\cos\alpha \quad (\text{ربع چهارم } \sin<۰)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\sin\alpha \quad (\text{ربع دوم } \cos<۰)$$

$$\tan\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right)=+\cot\alpha \quad (\text{ربع سوم } \tan>۰)$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\tan\alpha \quad (\text{ربع دوم } \cot<۰)$$

خلاصه بگم! $k\pi$ نسبت رو عوض نمی‌کنه، ولی $\frac{k\pi}{۲}$ (k فرد) نسبت رو عوض می‌کنه، برای تعیین علامت هم کافیه ببینی که عبارت داخل پرانتز در کدوم ربع قرار می‌گیره.

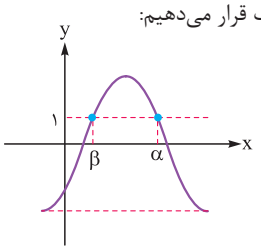
نکته

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تابع f در $x=\alpha$ و $x=\beta$ با توجه به نمودار برابر ۱ شده است، ضابطهٔ تابع را برابر یک قرار می‌دهیم:



$$f(x)=\sin x-۲\cos x \Rightarrow \sin x-۲\cos x=۱$$

$$\Rightarrow ۲\cos x=\sin x-۱ \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} ۴\cos^۲x=(\sin x-۱)^۲ \Rightarrow ۴(۱-\sin^۲x)=(۱-\sin x)^۲$$

در همین‌جا از رابطهٔ $۲\cos x=(\sin x-۱)$ نتیجه می‌گیریم که $\cos x\le ۰$؛ چراکه $\sin x-۱\le ۰$.

گام دوم: به کمک اتحاد مزدوج رابطهٔ به‌دست‌آمده را ساده می‌کنیم:

$$۴(۱-\sin x)(۱+\sin x)=(۱-\sin x)(۱-\sin x)$$

دو حالت به وجود می‌آید:

حالت اول : $۱-\sin x=۰ \Rightarrow \sin x=۱$

حالت دوم : $۱-\sin x\neq ۰ \Rightarrow ۴(۱-\sin x)(۱+\sin x)=(۱-\sin x)(۱-\sin x)$

$\Rightarrow ۴(۱+\sin x)=۱-\sin x \Rightarrow ۵\sin x=-۳ \Rightarrow \sin x=-\frac{۳}{۵}$

در یک دورهٔ تناوب دو جواب به دست آوردیم، پس $\sin\beta=۱$، در نتیجه $\beta=\frac{\pi}{۲}$ و $\sin\alpha=\frac{-۳}{۵}$. (توجه کنید که زاویه‌ای که سینوس آن $\frac{-۳}{۵}$ می‌شود، در تناوب اول از $\frac{\pi}{۲}$ بزرگ‌تر است؛ پس β مساوی $\frac{\pi}{۲}$ است.)

گام سوم: دیدیم که $\sin\alpha=-\frac{۳}{۵}$، و قبلاً نتیجه گرفته بودیم که $\cos\alpha<۰$ است، در نتیجه $\cos\alpha=\frac{-۴}{۵}$؛ بنابراین خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲})=-\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha=-(-\frac{۴}{۵})=\frac{۴}{۵}$$

۹ تابع $f(x)=\frac{\tan ۳x}{۱-\tan^۲ ۳x}$ در بازهٔ $(\frac{۲\pi}{۳},\alpha)$ اکیداً صعودی است، حداکثر مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۱۳\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲۵\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۵۳\pi}{۱۲}$

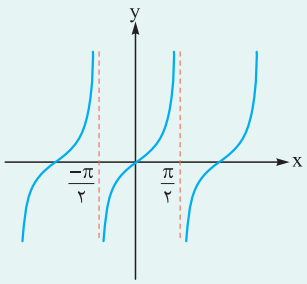
مشاوره برای حل این سؤال نیاز به یک تحلیل خوب از نمودار tan دارید. بر روی نمودارها مسلط باشید.

Hint تابع را با توجه به رابطهٔ بین $\tan ۳x$ و $\tan ۶x$ بازنویسی کنید و حدود $۶x$ را از روی حدود x پیدا کنید و سپس با توجه به یکنوایی تانژانت در یک بازه جواب را به دست آورید.

درس Box

تابع تانژانت:

تابع $y=\tan x$ به صورت زیر است، دورهٔ تناوب این تابع برابر π است. این تابع در یک دورهٔ تناوب خود اکیداً صعودی است.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به رابطهٔ $\tan ۲\alpha$ می‌دانیم که $\tan ۶x$ به صورت $\frac{۲\tan ۳x}{۱-\tan^۲ ۳x}$ نوشته می‌شود، با توجه به این موضوع تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\tan ۳x}{۱-\tan^۲ ۳x} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}\underbrace{(\frac{۲\tan ۳x}{۱-\tan^۲ ۳x})}_{\tan ۶x} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}\tan ۶x$$

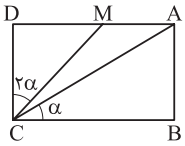
گام دوم: اگر x در بازهٔ $(\frac{۲\pi}{۳},\alpha)$ باشد، $۶x$ در بازهٔ $(۴\pi,۶\alpha)$ است.

$$\frac{۲\pi}{۳}<x<\alpha \xrightarrow{\times ۶} ۴\pi<۶x<۶\alpha$$

می‌دانیم که توابع به فرم $y=a\tan x$ در بازه‌های $(k\pi-\frac{\pi}{۲},k\pi+\frac{\pi}{۲})$ یکنوا هستند؛ پس حداکثر α برابر می‌شود با:

$$۶\alpha=۴\pi+\frac{\pi}{۲}=\frac{۹\pi}{۲} \Rightarrow \alpha=\frac{۹\pi}{۱۲}=\frac{۳\pi}{۴}$$

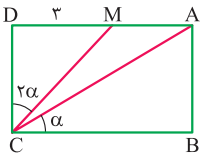
۱۰ در مستطیل شکل مقابل، $\tan ۲\alpha = \frac{۳}{۴}$ است. نسبت $\frac{AM}{DM}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) $\frac{۵}{۳}$

Hint DM را برابر ۳ فرض کنید و DC را از روی $\tan ۲\alpha$ پیدا کنید. سپس $\tan \alpha$ را بیابید و پاسخ را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنیم $DM = ۳$، با توجه به شکل خواهیم داشت:



$$\tan ۲\alpha = \frac{DM}{DC} \xrightarrow{\tan ۲\alpha = \frac{۳}{۴}} \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{DC} \Rightarrow DC = ۴$$

گام دوم: از روی $\tan ۲\alpha$، تانژانت α را به دست می‌آوریم:

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan \alpha}{۱ - \tan^۲ \alpha} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{۲\tan \alpha}{۱ - \tan^۲ \alpha} \Rightarrow ۳ - ۳\tan^۲ \alpha = ۸\tan \alpha \Rightarrow ۳\tan^۲ \alpha + ۸\tan \alpha - ۳ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = ۱۰۰} \tan \alpha = \frac{-۸ \pm ۱۰}{۶} \xrightarrow{\tan \alpha > ۰} \tan \alpha = \frac{۱}{۳}$$

گام سوم: با توجه به شکل گام اول داریم:

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{۱}{۳} = \frac{۴}{BC} \Rightarrow BC = ۱۲$$

گام چهارم: اندازهٔ AM را پیدا می‌کنیم تا به خواستهٔ سؤال برسیم:

$$AM = AD - MD \xrightarrow[MD=۳]{AD=BC=۱۲} AM = ۱۲ - ۳ = ۹$$

پس خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\frac{AM}{DM} = \frac{۹}{۳} = ۳$$

SanjeshCloud

۱۱ معادلهٔ $\sin ۲nx + \cos nx = ۰$ در بازهٔ $(۰,\pi)$، ۵ ریشه دارد. مقدار طبیعی **n** کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به رابطهٔ $\sin ۲nx = ۲\sin nx\cos nx$، معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sin ۲nx + \cos nx = ۰ \Rightarrow ۲\sin nx\cos nx + \cos nx = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{از } \cos nx \text{ فاکتور می‌گیریم.}} \cos nx(۲\sin nx + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos nx = ۰ \\ ۲\sin nx + ۱ = ۰ \Rightarrow \sin nx = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

گام دوم: جواب‌های کلی معادله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \cos nx = ۰ \Rightarrow nx = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin nx = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \sin nx = \sin\frac{-\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} nx = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ nx = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

گام سوم: با توجه به این‌که می‌خواهیم جواب‌ها در بازهٔ $(۰,\pi)$ باشد، به ازای x مناسب چندتا از جواب‌ها را می‌نویسیم:

$$nx = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow nx = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}, \ldots \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲n}, \frac{۳\pi}{۲n}, \frac{۵\pi}{۲n}, \ldots$$

$$\begin{cases} nx = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ nx = ۲k\pi + ۷\frac{\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow nx = \frac{۷\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶}, \frac{۱۹\pi}{۶}, \ldots \Rightarrow x = \frac{۷\pi}{۶n}, \frac{۱۱\pi}{۶n}, \frac{۱۹\pi}{۶n}$$

حال جواب‌ها را به ترتیب مرتب می‌کنیم:

$$\frac{\pi}{۲n}, \frac{۷\pi}{۶n}, \frac{۳\pi}{۲n}, \frac{۱۱\pi}{۶n}, \frac{۵\pi}{۲n}, \frac{۱۹\pi}{۶n}, \ldots$$

گام چهارم: برای این‌که ۵ جواب داشته باشیم، باید π از $\frac{۱۹\pi}{۶n}$ کوچک‌تر و از $\frac{۵\pi}{۲n}$ بزرگ‌تر باشد؛ پس:

$$\frac{۵\pi}{۲n} < \pi < \frac{۱۹\pi}{۶n} \xrightarrow{\text{تقسیم بر } \pi} \frac{۵}{۲n} < ۱ < \frac{۱۹}{۶n} \xrightarrow{\times n} \frac{۵}{۲} < n < \frac{۱۹}{۶}$$

$$\Rightarrow n = ۳ : \text{مقدار طبیعی } n$$

SanjeshCloud

۱۲ در مثلث ABC رابطهٔ $2\cos(2A+2B)+1=\cos(C+\frac{\pi}{6})$ برقرار است. $\cos(C-\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض می‌کنیم $C+\frac{\pi}{6}=a$ و $C-\frac{\pi}{6}=b$، پس $a+b$ و $a-b$ برابر می‌شود با:

$$a+b=C+\frac{\pi}{6}+C-\frac{\pi}{6}=2C \quad (*)$$

$$a-b=C+\frac{\pi}{6}-C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3} \quad (**)$$

گام دوم: می‌دانیم که $A+B+C=\pi$، پس $A+B=\pi-C$؛ در نتیجه:

$$2A+2B=2\pi-2C \Rightarrow \cos(2A+2B)=\underbrace{\cos(2\pi-2C)}_{\cos 2C}$$

گام سوم: از سمت چپ تساوی داده‌شده در صورت سؤال و $(*)$ و $(**)$ خواهیم داشت:

$$\underbrace{2\cos(2A+2B)}_{\cos 2C}+1=2\cos 2C+1 \xrightarrow{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}} 2(\underbrace{\cos 2C}_{\cos(a+b)}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos(a-b)})$$

$$=2(\cos(a+b)+\cos(a-b))=2(\cos a\cos b-\sin a\sin b+\cos a\cos b+\sin a\sin b)=2(2\cos a\cos b)$$

گام چهارم: ساده‌شدهٔ سمت چپ را با سمت راست برابر قرار می‌دهیم:

$$2(2\cos a\cos b)=\cos(C+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow 4\cos a\cos b=\cos a \Rightarrow \cos b=\cos(C-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$$

۱۳ اگر $\frac{\cos ۲x}{\tan x - \cot x} = \frac{۳}{۸}$ باشد، مقدار $۳\tan x + ۴$ کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{۳}$ ۲) $\pm\sqrt{۷}$

۳) $\pm\sqrt{۵}$ ۴) $\pm۲\sqrt{۲}$

Hint $\tan x - \cot x$ را ساده‌تر کنید و سپس از روی $\sin ۲x$، $\tan x$ را به دست آورید.

نکته رابطهٔ زیر را برای سرعت بیشتر در بعضی از سؤالات بلد باشید:

$$\sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در تساوی داده‌شده $\tan x - \cot x$ را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\sin x \cos x} \xrightarrow[\sin x\cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x]{\sin^۲ x - \cos^۲ x = -\cos ۲x} \tan x - \cot x = \frac{-\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}$$

گام دوم: حال عبارت به‌دست‌آمده را در تساوی صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{\cos ۲x}{\tan x - \cot x} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow \frac{\cos ۲x}{\frac{-\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}\sin ۲x \cancel{\cos ۲x}}{\cancel{-\cos ۲x}} = \frac{۳}{۸}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\sin ۲x = \frac{۳}{۸} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{-۳}{۴}$$

گام سوم: می‌دانیم که $\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$، خواهیم داشت:

$$\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x} \Rightarrow \frac{-۳}{۴} = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x} \Rightarrow -۳ - ۳\tan^۲ x = ۸\tan x \Rightarrow ۳\tan^۲ x + ۸\tan x + ۳ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = ۲۸} \tan x = \frac{-۸ \pm ۲\sqrt{۷}}{۶} = \frac{-۴ \pm \sqrt{۷}}{۳}$$

پس خواستهٔ سؤال که $۳\tan x + ۴$ است، برابر می‌شود با:

$$۳\tan x + ۴ = ۳\left(\frac{-۴ \pm \sqrt{۷}}{۳}\right) + ۴ = \cancel{-۴} \pm \sqrt{۷} + \cancel{۴} = \pm\sqrt{۷}$$

۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- اگر $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطهٔ دلخواه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(kx)$ تعریف‌شده باشد، آنگاه نقطهٔ $(\frac{x_\circ}{k}, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع g و متناظر با نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار تابع f است.
- اگر $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطهٔ دلخواه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=kf(x)$ تعریف‌شده باشد، آنگاه نقطهٔ $(x_\circ, ky_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع g و متناظر با نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار تابع f است.

جوابش اینه

برای رسم تابع $y=f(\frac{x}{2})$ از روی نمودار f باید طول نقاط را دو برابر کنیم و سپس برای رسم نمودار تابع $y=3f(\frac{x}{2})$ باید عرض نقاط را سه برابر کنیم؛ بنابراین:

$$A(1,3)\in f \Rightarrow A'(2,9)\in 3f(\frac{x}{2})$$

اینجوری هم میشه

با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$(1,3)\in f \Rightarrow f(1)=3$$

بنابراین:

$$\frac{x}{2}=1 \Rightarrow x=2$$

حال داریم:

$$y=3f(\frac{x}{2}) \xrightarrow{x=2} y=3f(1)=3(3)=9$$

پس متناظر نقطهٔ $A(1,3)$، نقطهٔ $A'(2,9)$ روی تابع $y=3f(\frac{x}{2})$ است.

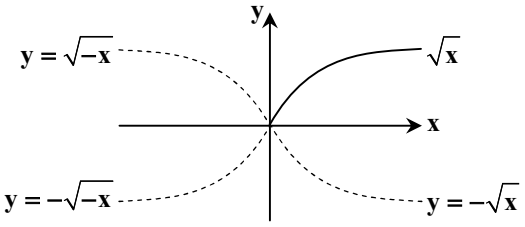
۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- نمودار تابع $y=-f(-x)$ از قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات به‌دست می‌آید.
- برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در راستای قائم به‌سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت پایین انجام می‌شود.

جوابش اینه

ابتدا به شکل زیر دقت کنید.



با توجه به نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ و نمودار تابع داده‌شده، مشخص است که نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور طول‌ها و محور عرض‌ها قرینه شده (یعنی نسبت به مبدأ مختصات قرینه شده است) و سپس ۲ واحد به‌سمت بالا انتقال پیدا کرده است؛ بنابراین:

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{محور طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{دو واحد}} y=-\sqrt{-x}+2$$

پس $g(x)=-\sqrt{-x}+2$ و بنابراین $g(-4)=0$.

۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- نمودار تابع $y=-f(-x)$ از قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات به‌دست می‌آید.
- برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور طول‌ها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

- برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم.

اگر $k>1$، نمودار $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0<k<1$، نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید.

جوابش اینه

برای یافتن قرینهٔ یک تابع نسبت به مبدأ مختصات، کافی است نمودار آن را نسبت به هر دو محور مختصات قرینه کنیم که در این صورت به تابع $y=-f(-x)$ می‌رسیم.

قرینه نسبت به مبدأ : $y=-f(-x)$

نصف کردن طول نقاط : $y=-f(-2x)$

دو برابر کردن عرض نقاط : $y=-2f(-2x)$

اکنون ضابطهٔ به‌دست آمده را با خط $y=4x-4$ تقاطع می‌دهیم.

$$-2f(-2x)=4x-4 \Rightarrow f(-2x)=-2x+2 \Rightarrow -2x+\sqrt{-2x}=-2x+2 \Rightarrow \sqrt{-2x}=2 \Rightarrow -2x=4 \Rightarrow x=-2$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)**

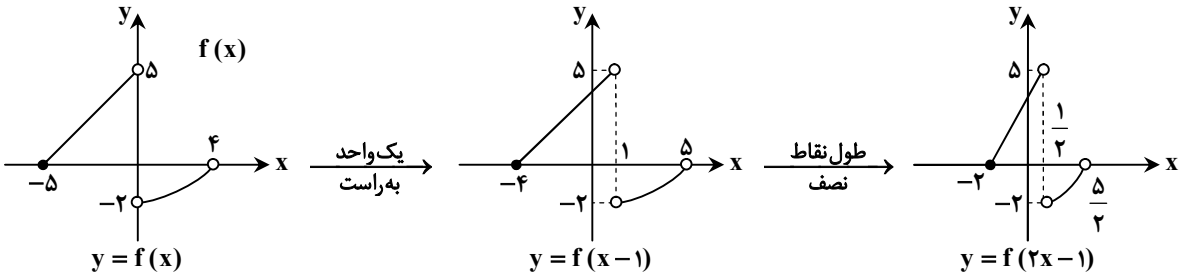
خوبه اینو بدونی

- برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.
- برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور طول‌ها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

جوابش اینه

می‌دانیم دامنهٔ دو تابع $y=f(2x-1)$ و $y=3f(2x-1)$ با هم برابر است، پس کافی است نمودار تابع $y=f(2x-1)$ را رسم کنیم. برای این کار باید نمودار $y=f(x)$ را یک واحد به‌سمت راست آورده و سپس طول نقاط را نصف کنیم:



با توجه به شکل، دامنهٔ تابع $y=f(2x-1)$ برابر است با:

$$D=\left[-2,\frac{5}{2}\right)-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(2x-1)$ شامل ۵ عدد صحیح $-2,-1,0,1,2$ است.

اینجوری هم میشه

با توجه به شکل تابع f، داریم: $D_f = [-5,4) - \{0\}$

پس ورودی تابع f یعنی $2x-1$ باید متعلق به این بازه باشد؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} -5 \le 2x-1 < 4 \xrightarrow{+1} -4 \le 2x < 5 \xrightarrow{\div 2} -2 \le x < \frac{5}{2} \\ 2x-1 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{f(2x-1)} = \left[-2,\frac{5}{2}\right) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

پس دامنهٔ تابع شامل ۵ عدد صحیح است.

۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- برای رسم نمودار $y = f(x+k)$، اگر $k > 0$، کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.
- برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k > 1$، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور طول‌ها به‌دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

- اگر تابع f، یک به یک باشد، آنگاه: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

جوابش اینه

ابتدا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y = f(x) \xrightarrow[x \to x-3]{\text{سه واحد به راست}} y = f(x-3) \xrightarrow[x \to \frac{x}{3}]{\text{طول نقاط سه برابر}} y = f(\frac{x}{3}-3)$$

$$\xrightarrow[x \to x+5]{\text{۵ واحد به چپ}} y = f(\frac{x+5}{3}-3) = f(\frac{x-4}{3})$$

پس $g(x) = f(\frac{x-4}{3})$. اکنون می‌خواهیم محل برخورد دو تابع f و g را به‌دست آوریم؛ پس باید معادلهٔ $f(x) = f(\frac{x-4}{3})$ را حل کنیم. از طرفی تابع f یک به یک است، پس اگر $f(a) = f(b)$ نتیجه می‌گیریم $a = b$؛ بنابراین:

$$f(x) = f(\frac{x-4}{3}) \Rightarrow x = \frac{x-4}{3} \Rightarrow 3x = x-4 \Rightarrow x = -2$$

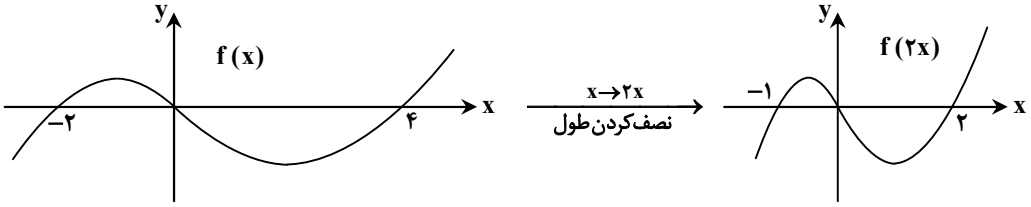
۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)**

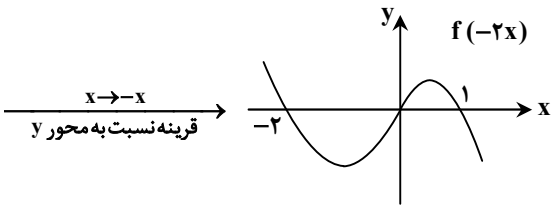
خوبه اینو بدونی

- برای تعیین دامنهٔ تابع $y = \sqrt{f(x)}$، کافی است نامعادلهٔ $f(x) \ge 0$ حل شود.
- دامنهٔ تابع گویای $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ برابر است با: $D = \mathbb{R} - \{x \mid Q(x) = 0\}$

جوابش اینه

برای محاسبه دامنهٔ تابع موردنظر، باید نامعادلهٔ $\frac{x}{f(-2x)} \ge 0$ را حل کنیم. برای این کار ابتدا نمودار تابع $y = f(-2x)$ را از روی نمودار f رسم می‌کنیم.





حال جدول تعیین علامت عبارت $\frac{x}{f(-2x)}$ را رسم می‌کنیم.

x		-2		0		1	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$f(-2x)$	$+$	ت ن	$-$	ت ن	$+$	ت ن	$-$
$\frac{x}{f(-2x)}$	$-$		$+$		$+$		$-$

پس دامنهٔ تابع به‌صورت $(-2,1)-\{0\}$ است که شامل یک عدد صحیح $x=-1$ است.

۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند؛ بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.
- برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.

جوابش اینه

ابتدا به‌جای x، $-x$ قرار می‌دهیم و سپس به‌جای x، $x-2$ قرار می‌دهیم، تا تبدیلات موردنظر انجام شود:

$$g(x)=f(-x)=\begin{cases}-2x-1 & -x<1\\ -ax+b & -x>1\end{cases}=\begin{cases}-2x-1 & x>-1\\ -ax+b & x<-1\end{cases}$$

$$h(x)=g(x-2)=\begin{cases}-2(x-2)-1 & x-2>-1\\ -a(x-2)+b & x-2<-1\end{cases}=\begin{cases}-2x+3 & x>1\\ -ax+2a+b & x<1\end{cases}$$

با مقایسه ضابطهٔ به‌دست آمده با ضابطهٔ تابع f نتیجه می‌گیریم:

$$f(x)=h(x)\Rightarrow ax+b=-2x+3\Rightarrow a=-2,b=3$$

توجه کنید از متحد قرار دادن دو ضابطهٔ $y=2x-1$ و $y=-ax+2a+b$ نیز به همین مقادیر $a=-2$ و $b=3$ می‌رسیم؛ بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با: $a-b=-2-3=-5$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- در حالت کلی اگر (x_0,y_0) یک نقطهٔ دلخواه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(kx)$ تعریف‌شده باشد، آنگاه نقطهٔ $(\frac{x_0}{k},y_0)$ یک نقطه از نمودار تابع g و متناظر با نقطهٔ (x_0,y_0) از نمودار تابع f است.
- اگر (x_0,y_0) یک نقطهٔ دلخواه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=kf(x)$ تعریف‌شده باشد، آنگاه نقطهٔ (x_0,ky_0) یک نقطه از نمودار تابع g و متناظر با نقطهٔ (x_0,y_0) از نمودار تابع f است.

جوابش اینه

دامنهٔ تابع f به‌صورت دو واحد، دو واحد قطعه‌بندی شده است، که دو برابر قطعه‌بندی ضابطهٔ تابع جزءصحیح است؛ پس مقدار a باید برابر $\frac{1}{2}$ باشد. یعنی ضابطهٔ تابع f به‌صورت $y=x+\left[\frac{x}{2}\right]$ بوده و عرض نقطهٔ A با طول ۲ روی این تابع برابر ۳ است.

فرض کنید $A'(b,c)$ نقطهٔ متناظر $A(2,3)$ باشد، مختصات A' را در معادلهٔ تابع قرار می‌دهیم.

$$y=af(\frac{1-x}{3}) \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} y=\frac{1}{2}f(\frac{1-x}{3}) \Rightarrow c=\frac{1}{2}f(\frac{1-b}{3}) \Rightarrow f(\frac{1-b}{3})=2c$$

با مقایسه این رابطه با تساوی $f(2)=3$، نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases}\frac{1-b}{3}=2 \Rightarrow b=-5\\ 2c=3 \Rightarrow c=\frac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow b+c=-3/5$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- اگر تابع خطی f از دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ بگذرد، شیب این خط از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

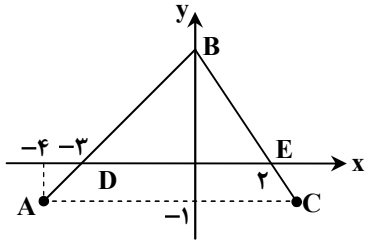
- برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور طول‌ها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

- برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در راستای قائم به‌سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت پایین انجام می‌شود.

جوابش اینه

ابتدا مختصات نقاط B و C را به‌دست می‌آوریم. برای این کار باید معادله دو خط AB و BC را بنویسیم:



$$\begin{cases}A(-4,-1)\\ D(-3,0)\end{cases} \Rightarrow m=\frac{-1-0}{-4+3}=1 \Rightarrow y=x+h \xrightarrow{(-3,0)} y=x+3$$

$$x_B=0 \Rightarrow y_B=3 \Rightarrow B(0,3)$$

اکنون داریم:

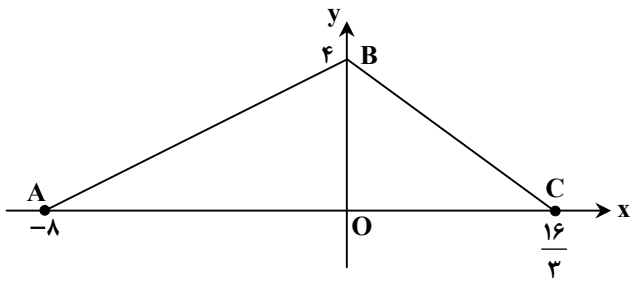
$$\begin{cases}B(0,3)\\ E(2,0)\end{cases} \Rightarrow m=\frac{3-0}{0-2}=-\frac{3}{2} \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+h \xrightarrow{(0,3)} y=-\frac{3}{2}x+3$$

$$y_C=-1 \Rightarrow -\frac{3}{2}x+3=-1 \Rightarrow -\frac{3}{2}x=-4 \Rightarrow x=\frac{8}{3} \Rightarrow C(\frac{8}{3},-1)$$

اکنون با توجه به نمودار $y=f(2x)-1$ نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید طول نقاط را دو برابر و به عرض آن‌ها یک واحد اضافه کنیم؛ زیرا:

$$y=f(2x)-1 \xrightarrow[\text{طول دو برابر}]{x\to\frac{x}{2}} y=f(x)-1 \xrightarrow{+1} y=f(x)$$

بنابراین نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:



$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AC\times OB|=\frac{1}{2}\times(\frac{16}{3}+8)(4)=\frac{80}{3}$$

ازآنجاکه برای رسم تابع $f(1-x)$ باید نمودار $f(x)$ را یک واحد به چپ آورده و سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم؛ پس مساحت مثلث ABC تغییر نمی‌کند و مساحت محدود به نمودار تابع $y=f(1-x)$ با محور طول‌ها نیز برابر $\frac{80}{3}$ است.

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

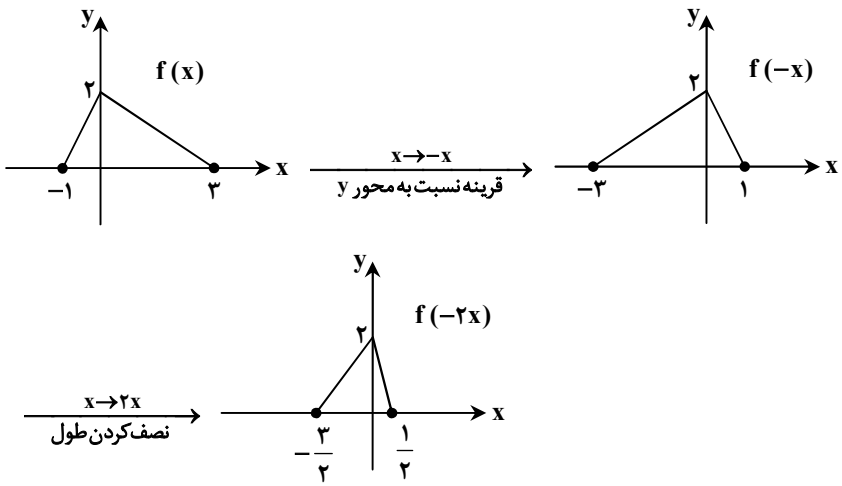
خوبه اینو بدونی

- برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.
- نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.
- برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

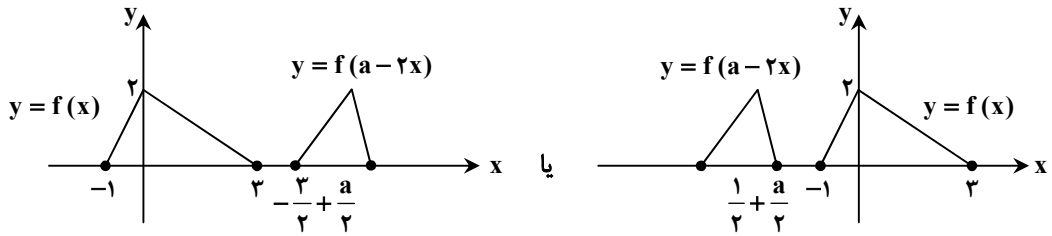
اگر $k>1$، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور طول‌ها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

جوابش اینه

اگر نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم و سپس طول نقاط آن را نصف کنیم، تابع $y=f(-2x)$ به‌دست می‌آید.



حال چون $f(a-2x)=f(-2(x-\frac{a}{2}))$؛ پس باید نمودار $f(-2x)$ را $|\frac{a}{2}|$ واحد به چپ یا راست منتقل کنیم:



$3<-\frac{3}{2}+\frac{a}{2} \Rightarrow a>9$ $\qquad$ $\frac{1}{2}+\frac{a}{2}<-1 \Rightarrow a<-3$

آزمون ۱۶ آبان ۱۴۰۴

حسابان ۲

۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $ax+b$ برابر است با $r=f(\frac{-b}{a})$.

جوابش اینه

چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است؛ بنابراین $P(2)=0$ و داریم:

$$P(x)=x^4-2x^3+x^2+ax-10 \xrightarrow[P(2)=0]{x=2} 16-16+4+2a-10=0 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$$

برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+1$ کافی است $P(-1)$ را به‌دست آوریم؛ بنابراین:

$$P(x)=x^4-2x^3+x^2+3x-10 \Rightarrow P(-1)=1+2+1-3-10 \Rightarrow R=-9$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، x^n+a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است:

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1})$$

جوابش اینه

ابتدا صورت کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$x^5+32=x^5+2^5=(x+2)(x^4-x^3\times2+x^2\times2^2-x\times2^3+2^4)=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

حالا مخرج کسر را بسط می‌دهیم و داریم:

$$(x^3-8)(x-2)+(2x)^2=x^4-2x^3-8x+16+4x^2=x^4-2x^3+4x^2-8x+16$$

پس حاصل کسر برابر است با:

$$A=\frac{(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)}{x^4-2x^3+4x^2-8x+16}=x+2$$

پس حاصل A به‌ازای $x=727$ برابر ۷۲۹ است.

۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور طول‌ها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

- برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم.

اگر $k>1$، نمودار $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0<k<1$، نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید.

- در هر معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S=-\frac{b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}$$

SanjeshCloud

جوابش اینه

اگر طول نقاط تابع f را ۲ برابر کنیم تابع $f(\frac{x}{۲})$ و اگر عرض نقاط تابع f را نصف کنیم تابع $\frac{۱}{۲}f(x)$ به‌دست می‌آید. پس اگر هر دو تبـدیل را روی تابع $y=f(x)$ اعمال کنیم، تابع g به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=g(x)=\frac{۱}{۲}f(\frac{x}{۲})=\frac{۱}{۲}\times\frac{\frac{x}{۲}-۱}{۲(\frac{x}{۲})+۱}=\frac{۱}{۲}\times\frac{x-۲}{۲x+۲}=\frac{x-۲}{۴x+۴}$$: طول نقاط دو برابر و عرض نقاط نصف

اکنون به حل معادله موردنظر می‌پردازیم:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{x-۱}{۲x+۱}=\frac{x-۲}{۴x+۴}\Rightarrow ۴(x-۱)(x+۱)=(۲x+۱)(x-۲)\Rightarrow ۴x^۲-۴=۲x^۲-۳x-۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۳x-۲=۰$$

بنابراین α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x-۲=۰$ هستند. مجموع ریشه‌های این معادله برابر $\frac{-۳}{۲}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $\frac{-۲}{۲}$ است، پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{-\frac{۲}{۲}}=\frac{۳}{۲}$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس‌های ۱ و ۲)**

خوبه اینو بدونی

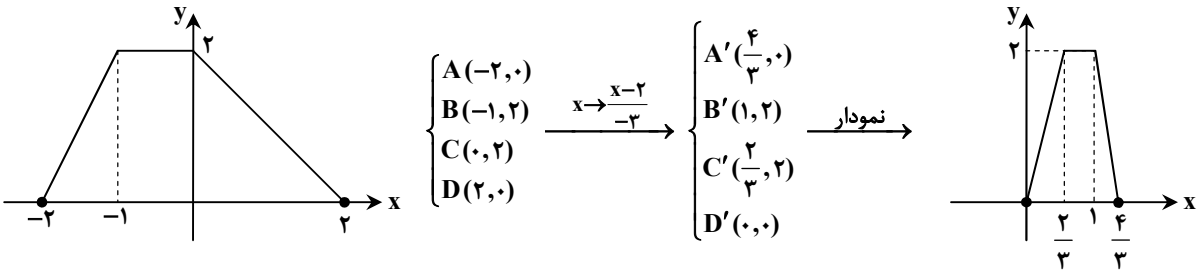
- برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>۰$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<۰$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.
- برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>۱$، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور طول‌ها به‌دست می‌آید و اگر $۰<k<۱$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

- اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تـابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.
- تابع f را در مجموعهٔ A (زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع) نزولی می‌گـوییم، اگـر بـرای هـر دو مقـدار a و b از ایـن مجموعـه کـه $a<b$، آنگـاه $f(a)\geq f(b)$.
- در فاصله‌ای که یک تابع نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه بالا نخواهیم رفت.

جوابش اینه

ابتدا نمودار تابع $y=f(۲-۳x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار کافی است نمودار f را دو واحد به‌سمت چپ آورده و سپس طول نقـاط را $\frac{۱}{۳}$ برابر کرده و نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم. البته می‌توان این تبدیلات را فقط روی نقاط مهم تابع انجام داد:



با توجه به نمودار تابع $y=f(۲-۳x)$، مشخص است که تابع در بازهٔ $[\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳}]$ و زیرمجموعه‌های آن نزولی است. بنابراین گزینـهٔ ۳ پاسـخ است.

۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- تابع f را در مجموعهٔ A (زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع) صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a<b$، آنگاه $f(a)\le f(b)$.
- در فاصله‌ای که یک تابع صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه پایین نخواهیم رفت.

جوابش اینه

می‌دانیم در تابع صعودی با افزایش مقادیر x، مقادیر $f(x)$ کاهش نمی‌یابد؛ بنابراین با مرتب کردن زوج مرتب‌های تابع f داریم:

$$f=\{(-۲,m^۲-۶m),(۰,-۵),(۲,۲m-۱۰),(\sqrt{۵},۷)\}$$

$$-۲<۰<۲<\sqrt{۵}\Rightarrow f(-۲)\le f(۰)\le f(۲)\le f(\sqrt{۵})\Rightarrow m^۲-۶m\le -۵\le ۲m-۱۰\le ۷$$

اکنون نامعادله‌های به‌دست آمده را حل می‌کنیم و از اشتراک محدوده‌های به‌دست آمده، جواب را به‌دست می‌آوریم:

$$m^۲-۶m\le -۵\Rightarrow m^۲-۶m+۵\le ۰\Rightarrow (m-۱)(m-۵)\le ۰\Rightarrow ۱\le m\le ۵ \quad (۱)$$

$$-۵\le ۲m-۱۰\Rightarrow ۲m\ge ۵\Rightarrow m\ge ۲/۵ \quad (۲)$$

$$۲m-۱۰\le ۷\Rightarrow ۲m\le ۱۷\Rightarrow m\le ۸/۵ \quad (۳)$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳)\Rightarrow m\in[۲/۵,۵]$$

بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ۳، ۴ و ۵ را اختیار کند و مجموع این مقادیر برابر ۱۲ است.

۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- اگر α و β محل‌های برخورد نمودار سهمی با محور طول‌ها باشند، آنگاه معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ است.
- طول رأس سهمی $y=ax^۲+bx+c$، برابر $-\frac{b}{۲a}$ است.

جوابش اینه

معادلهٔ یک سهمی که صفرهای آن ۳ و -۱ باشد، به‌صورت زیر است: $f(x)=a(x+۱)(x-۳)$

این سهمی از نقطهٔ $(۰,۱/۵)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(۰)=۱/۵\Rightarrow -۳a=۱/۵\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۱)(x-۳)\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+x+\frac{۳}{۲}$$

مختصات رأس سهمی به‌صورت $A(۱,۲)$ است. برای یافتن نقطهٔ متناظر با A کافی است $\frac{۱-x}{۲}$ را برابر $x_A=۱$ قرار دهیم.

$$f(۱)=۲\Rightarrow \frac{۱-x}{۲}=۱\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=۲f(۱)=۴$$

پس $A'(-۱,۴)$ متناظر با A است. مجموع مؤلفه‌های A' برابر ۳ است.

۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>۰$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<۰$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.
- برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>۱$، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور طول‌ها به‌دست می‌آید و اگر $۰<k<۱$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

- اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.
- برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم.

اگر $k>۱$، نمودار $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $۰<k<۱$، نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید.

SanjeshCloud

جوابش اینه

تبدیلات روی دامنه به‌ترتیب زیر است:

یک واحد به چپ:

$$f(x) \to f(1+x) \quad [-2,1] \xrightarrow{\text{دامنه}} [-3,0]$$

طول نقاط نصف:

$$f(1+x) \to f(1+2x) \quad [-3,0] \xrightarrow{\text{دامنه}} \left[-\frac{3}{2},0\right]$$

قرینه نسبت به محور عرض‌ها:

$$f(1+2x) \to f(1-2x) \quad \left[-\frac{3}{2},0\right] \xrightarrow{\text{دامنه}} \left[0,\frac{3}{2}\right]$$

تبدیلات روی برد به‌صورت زیر است:

عرض نقاط دو برابر:

$$f(x) \to 2f(x) \quad [-1,2] \xrightarrow{\text{برد}} [-2,4]$$

دامنه و برد تابع نهایی به‌ترتیب برابر بازه‌های $D' = \left[0,\frac{3}{2}\right]$ و $R' = [-2,4]$ است که اشتراک آن‌ها برابر $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ است.

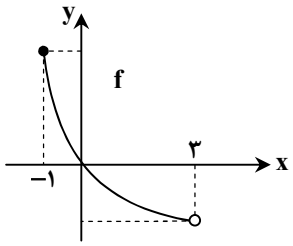
۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.
- تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$، آنگاه: $f(a) > f(b)$
- در فاصله ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت.

جوابش اینه

ابتدا نمودار تابع $y = f(-x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(x)$ به‌دست آید:



برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $g(x)$ باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$f(2x-1) - f(2) \geq 0 \Rightarrow f(2x-1) \geq f(2)$$

با توجه به شکل مشخص است که تابع f با دامنهٔ $[-1,3)$ اکیداً نزولی است؛ بنابراین:

$$f(2x-1) \geq f(2) \xrightarrow[D_f=[-1,3)]{\text{اکیداً نزولی } f} \begin{cases} 2x-1 \leq 2 \Rightarrow 2x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \\ -1 \leq 2x-1 < 3 \Rightarrow 0 \leq 2x < 4 \Rightarrow 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

از اشتراک دو محدودهٔ به‌دست آمده داریم:

$$D_g = \left[0,\frac{3}{2}\right]$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- برای رسم نمودار $y = f(x+k)$، اگر $k > 0$، کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.

SanjeshCloud

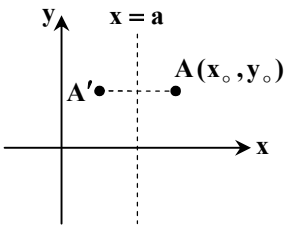
جوابش اینه

ابتدا ضابطهٔ تابع f را از اتحاد مکعب دوجمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$f(x)=2(x^3-3x^2+3x)-1=2((x-1)^3+1)-1=2(x-1)^3+1$$

اگر این نمودار را دو واحد به راست منتقل کنیم، ضابطه تابع به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y=f(x-2)=2(x-3)^3+1 \text{ : دو واحد به راست}$$



می‌خواهیم قرینه تابع را نسبت به خط عمودی $x=-1$ پیدا کنیم. برای این کار ابتدا قرینه نقطه دلخواه $A(x_0,y_0)$ را نسبت به خط عمودی دلخواه $x=a$ پیدا می‌کنیم. اگر نقطه قرینه یافته را A' بنامیم، واضح که عرض A' و A یکسان است و میانگین طول نقاط A و A' باید برابر a باشد؛ زیرا وسط A و A' روی خط $x=a$ قرار دارد.

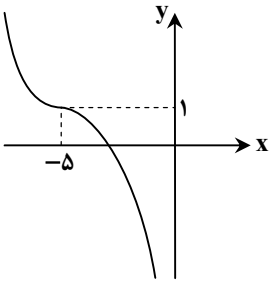
$$\frac{x_0+x_{A'}}{2}=a \Rightarrow x_{A'}=2a-x_0$$

پس نقطهٔ $A'(2a-x_0,y_0)$ قرینه نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ است. یعنی قرینه تابع دلخواه $y=f(x)$ نسبت به خط عمودی $x=a$ تابعی با ضابطهٔ $y=f(2a-x)$ است.

پس برای یافتن قرینه نسبت به $x=-1$، به‌جای x، $-2-x$ را قرار می‌دهیم.

$$y=2(-2-x-3)^3+1=2(-x-5)^3+1=-2(x+5)^3+1$$

نمودار این تابع به‌صورت مقابل است که از ناحیه اول عبور نمی‌کند.



۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)**

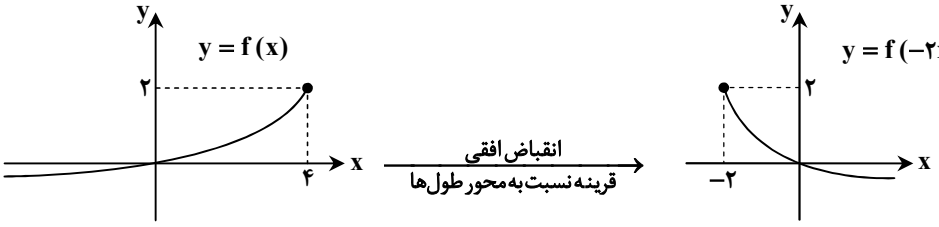
خوبه اینو بدونی

- برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.
- اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول‌ها است.
- اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.
- برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در راستای قائم به‌سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت پایین انجام می‌شود.

جوابش اینه

با توجه به نمودار تابع $y=\sqrt{x}$، نمودار تابع $f(x)=2-\sqrt{4-x}$ را رسم می‌کنیم. ابتدا نمودار $y=\sqrt{x}$ را ۴ واحد به چپ برده، سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا تابع $y=\sqrt{4-x}$ رسم شود. سپس نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده و ۲ واحد به بالا می‌بریم تا نمودار $y=-\sqrt{4-x}+2$ رسم شود. توجه کنید $f(0)=0$، پس نمودار تابع f از مبدأ مختصات می‌گذرد.

پس نمودار تابع دو $y=f(x)$ و $y=f(-2x)$ به‌صورت مقابل است:



تابع خواسته شده را به‌صورت $y = a + f(-2(x - \frac{a}{2}))$ در نظر بگیرید. این تابع از انتقال $\frac{a}{2}$ واحد به راست و a واحد بالا از تابع $f(-2x)$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار تابع از ناحیه دوم عبور نکند یا باید حداقل دو واحد به راست برود و یا دو واحد به پایین منتقل شود. با توجه به سؤال a، مقداری مثبت است، پس نمودار به پایین منتقل نشده است؛ بنابراین مقدار a به گونه‌ای است که $\frac{a}{2}$ بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد تا حداقل دو واحد به راست برود، پس حداقل مقدار مثبت a برابر ۴ است.

۱ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $ax+b$ برابر است با $r=f(\frac{-b}{a})$.

جوابش اینه

خواستهٔ سؤال محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ $x^{۲}f(x+۴)+f(۱-۲x)$ بر $x+۱$ است؛ پس باید به جای x مقدار -۱ را قرار دهیم:

$$r=(-۱)^{۲}f(-۱+۴)+f(۱+۲)=f(۳)+f(۳)=۲f(۳)$$

پس باقی‌مانده برابر $۲f(۳)$ است. حال کافی است با توجه به ضابطهٔ $f(x)$، این مقدار را به‌دست آوریم:

$$f(۳)=\underbrace{۳^{۲۰}-۹(۳)^{۱۸}}_{\text{صفر}}+\underbrace{۳^{۱۰}-۳(۳)^{۹}}_{\text{صفر}}+۲۷-۱۸+۱=۱۰ \Rightarrow r=۲f(۳)=۲۰$$

۲ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

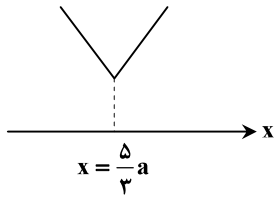
- تابع f را بر مجموعهٔ A یکنوا گوییم، هرگاه در این مجموعه، صعودی (نزولی) باشد.

جوابش اینه

ابتدا ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق را به‌دست می‌آوریم:

$$۳x-۵a=۰ \Rightarrow ۳x=۵a \Rightarrow x=\frac{۵}{۳}a$$

بنابراین نمودار تابع f شبیه شکل مقابل است:



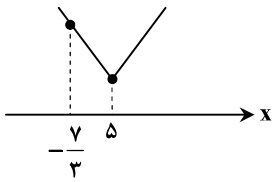
بدیهی است اگر $x=\frac{۵}{۳}a$ در بازهٔ $(-\frac{۷}{۳},۵)$ باشد، تابع f غیریکنوا خواهد شد؛ یعنی:

$$-\frac{۷}{۳}<\frac{۵}{۳}a<۵ \xrightarrow{\times\frac{۳}{۵}} -\frac{۷}{۵}<a<۳$$

بنابراین در بین گزینه‌های داده‌شده به‌ازای $a=-۱$ تابع f در بازهٔ موردنظر غیریکنوا است.

دقت کنید به‌ازای $a=۳$ نمودار تابع در بازهٔ $\left[-\frac{۷}{۳},۵\right]$ یکنوا است.

$$a=۳ \Rightarrow f(x)=|۳x-۱۵|+۱$$



SanjeshCloud

۳ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

جوابش اینه

با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم، داریم:

$$\begin{cases} max = c+|a| = ۷ \\ min = c-|a| = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = ۲ \\ |a| = ۵ \end{cases} \Rightarrow a = \pm ۵$$

همچنین با توجه به مقدار دورهٔ تناوب، داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{b}\right|} = ۲|b|\pi = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۴} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۴}$$

با توجه به اعداد به‌دست‌آمده برای a و b، مقدار ab می‌تواند برابر $\frac{۵}{۴}$ یا $-\frac{۵}{۴}$ باشد. پس برای مقدار خواسته‌شده یعنی $c+ab$ دو مقدار $\frac{۵}{۴}+۲$ و $-\frac{۵}{۴}+۲$ قابل‌قبول است که بیشترین آن برابر $\frac{۵}{۴}+۲=۳/۲۵$ است.

۳ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x\pm T)=f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را «دورهٔ تناوب» f می‌نامیم.

جوابش اینه

می‌دانیم اگر f متناوب با دورهٔ تناوب T باشد، آنگاه:

$$f(x)=f(x\pm T)=f(x\pm ۲T)=f(x\pm ۳T)=\cdots=f(x\pm nT)$$

ابتدا توجه کنید که:

$$f(۱۲۵/۵)=f(۱/۵+۱۲۰)=f(۱/۵+\underbrace{۳۰\times ۴}_{۳۰T})=f(۱/۵)$$

حالا معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(۱,۲)$ و $(۲,۰)$ را می‌نویسیم و مقدار $f(۱/۵)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (۱,۲) \\ (۲,۰) \end{cases} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۲-۰}{۱-۲} = -۲ \xrightarrow{(۲,۰)} y = -۲x+۴ \Rightarrow f(۱/۵)=۱$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$(fof)(۱۲/۵)=f(f(۱۲۵/۵))=f(f(۱/۵))=f(۱)=۲$$

SanjeshCloud

۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

جوابش اینه

با توجه به نمودار تابع، طول بازهٔ $[0,\pi]$ برابر $\frac{3}{2}T$ است (T دورهٔ تناوب تابع f است)؛ بنابراین:

$$\frac{3}{2}T=\pi \Rightarrow T=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{\left|\frac{b}{a}\right|}=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \left|\frac{b}{a}\right|=3 \Rightarrow \frac{|b|}{|a|}=3 \Rightarrow |b|=3|a|$$

در $x=0$ تابع f نزولی است، پس $a\times\frac{b}{a}$ عددی منفی است و در نتیجه b کوچک‌تر از صفر است. از طرفی ماکزیمم تابع f برابر ۲ است:

$$\max=2 \Rightarrow -2+|a|=2 \Rightarrow |a|=4 \xrightarrow{|b|=3|a|} |b|=12 \xrightarrow{b<0} b=-12$$

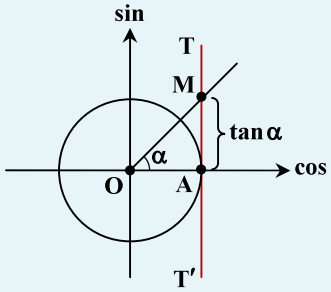
بنابراین دورهٔ تناوب تابع خواسته‌شده برابر است با:

$$T'=\frac{2\pi}{|b-2|}=\frac{2\pi}{14}=\frac{\pi}{7}$$

۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- در دایرهٔ مثلثاتی خط TAT' را محور تانژانت‌ها می‌نامیم.
- مقدار تانژانت زاویهٔ α برابر طول پاره‌خط AM است.



جوابش اینه

با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی، داریم: $a=\cos\theta\ ,\ c=\sin\theta\ ,\ b=\tan\theta$

بنابراین کسر $\frac{1-a}{b-c}$ برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ به‌صورت زیر است:

$$\frac{1-a}{b-c}=\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta-\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

بنابراین $\cot\theta=\frac{3}{4}$؛ پس با توجه به حاده بودن زاویهٔ θ، $\sin\theta=\frac{4}{5}$ و $\cos\theta=\frac{3}{5}$ و در نتیجه مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$a-c=\cos\theta-\sin\theta=-\frac{1}{5}$$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- دامنهٔ تابع $y=\tan x$ مجموعهٔ $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. تابع $y=\tan x$، تابعی متناوب است و دورهٔ تناوب آن π است.

SanjeshCloud

جوابش اینه

نقاط با طول $k\pi+\frac{\pi}{2}$ در دامنهٔ تابع تانژانت وجود ندارند، پس برای یافتن مقادیر تعریف‌نشده تابع $y=2-\tan(3x-\frac{\pi}{8})$، داریم:

$$3x-\frac{\pi}{8}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{5\pi}{24} \Rightarrow x=(8k+5)\frac{\pi}{24}$$

یعنی نمودار تابع داده‌شده، خطوط عمودی $x=(8k+5)\frac{\pi}{24}$ را قطع نمی‌کند. به‌ازای $k=0$ خط $x=\frac{5\pi}{24}$ به‌دست می‌آید.

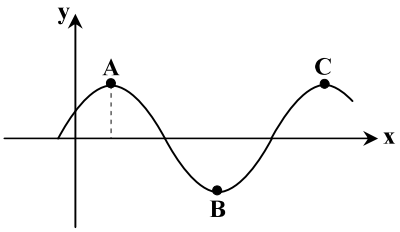
۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

جوابش اینه

با توجه به ضابطهٔ تابع، دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{2\pi}{2\pi}=1$ بوده و ماکزیمم و مینیمم آن برابر a و $-a$ است. مختصات نقاط A، B و C را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید برای رسیدن به تابع f کافی است در تابع $y=\cos x$، هر نقطه را $\frac{\pi}{3}$ به راست منتقل کرده و طول نقاط را بر 2π تقسیم کنیم و در نهایت عرض نقاط را a برابر کنیم.



$$\begin{cases} x_A=\frac{0+\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\frac{1}{6} \Rightarrow A(\frac{1}{6},a) \\ x_B=\frac{\pi+\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\frac{4}{6} \Rightarrow B(\frac{4}{6},-a) \\ x_C=\frac{2\pi+\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\frac{7}{6} \Rightarrow C(\frac{7}{6},a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_{AB}\times m_{BC}=-1 \Rightarrow \frac{-a-a}{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}\times\frac{a+a}{\frac{7}{6}-\frac{4}{6}}=-1 \Rightarrow \frac{-2a}{\frac{3}{6}}\times\frac{2a}{\frac{3}{6}}=-1 \Rightarrow 4a^2=\frac{9}{36} \Rightarrow a^2=\frac{1}{16} \xrightarrow{a>0} a=\frac{1}{4}$$

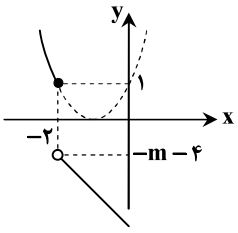
۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a<b$، آنگاه: $f(a)>f(b)$
- در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت.

جوابش اینه

نمودار هر دو ضابطه را رسم می‌کنیم. دو شرط برای ضابطهٔ دوم باید برقرار باشد. اولاً تابع خطی $y=mx+(m-4)$ باید نزولی باشد، پس شیب آن باید منفی باشد. ثانیاً نقطهٔ شروع تابع خطی باید پایین‌تر یا مساوی نقطهٔ پایان سهمی باشد.



$$\begin{cases} m<0 \\ -4-m\le 1 \end{cases} \Rightarrow -5\le m<0$$

پس m دارای پنج جواب صحیح شامل $-1,-2,-3,-4,-5$ است.

۱۰ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- به‌ازای تمام اعداد طبیعی n، $x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

جوابش اینه

ابتدا سعی می‌کنیم با استفاده از اتحادها از عبارت $p(x)$ عامل $x-1$ را فاکتور بگیریم:

$$p(x) = x^9 - 1 + x^5 - 1 = (x-1)(x^8 + x^7 + \cdots + x + 1) + (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$= (x-1)(\underbrace{x^8 + x^7 + \cdots + x + 1}_{f(x)} + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $(x-1)^2$ پرانتز دوم را به‌صورت $f(x) = (x-1)g(x) + R$ فرض کنید.

$$f(x) = (x-1)g(x) + R \Rightarrow f(1) = R \Rightarrow R = 14$$

بنابراین ضابطهٔ $p(x)$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$p(x) = (x-1)((x-1)g(x) + 14) = (x-1)^2 g(x) + 14x - 14$$

پس باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)^2$ برابر $14x - 14$ است.

گزینه دو

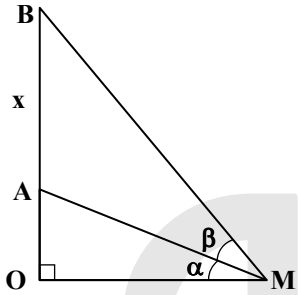
آزمون ۳۰ آذر

حسابان ۲

۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

نکته : $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$

با توجه به شکل داریم:



$\tan\alpha=\frac{OA}{OM}=\frac{۱}{۲}$ $\quad$ $\overset{\triangle}{OBM}: \tan(\alpha+\beta)=\frac{۱+x}{۲}$

مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{۱}{۲}+\tan\beta}{۱-\frac{۱}{۲}\tan\beta}=\frac{\frac{۱}{۲}+۱}{۱-\frac{۱}{۲}\times ۱}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۳$$

بنابراین: $\frac{۱+x}{۲}=۳ \Rightarrow x=۵$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

نکته : $\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲}x}$ ، $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}$

با توجه به‌صورت سؤال داریم:

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=-۲ \Rightarrow \frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan x}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan x}=-۲ \Rightarrow \frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=-۲ \Rightarrow ۱-\tan x=-۲-۲\tan x \Rightarrow \tan x=-۳$$

حال مقدار $\tan ۲x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲}x}=\frac{-۶}{۱-۹}=\frac{-۶}{-۸}=\frac{۳}{۴}$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

نکتهٔ ۱: تابع $y=aSinbx+c$ دارای مقدار ماکسیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دوره تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

نکتهٔ ۲ : $Cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-Sin\alpha$

ابتدا $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=a+۲Cos(\frac{\pi}{۲}+\pi bx) \Rightarrow f(x)=a-۲Sin b\pi x$$

با توجه به ضابطهٔ تابع، دورهٔ تناوب برابر $T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}$ است و کمترین مقدار تابع $a-۲$ است. از طرفی مطابق شکل، دورهٔ تناوب تابع برابر ۴ و کمترین مقدار آن -۱ است، پس:

$$a-۲=-۱ \Rightarrow a=۱$$

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۴ \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{۱}{۲} \\ b=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

تابع در همسایگی راست $x=۰$ صعودی اکید است، پس $b<۰$، بدین‌ترتیب $b=-\frac{۱}{۲}$ و $a=۱$؛ بنابراین: $a+b=\frac{۱}{۲}$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴) و حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

نکتهٔ ۱: جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که:

$k \in \mathbb{Z}$

نکتهٔ ۲: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

معادلهٔ داده‌شده را ساده کرده و سپس به‌کمک نکته حل می‌کنیم:

$$\cos 3x\cos 2x = \frac{1}{2} - \sin 3x\sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(3x - 2x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \xrightarrow{-\pi \le x \le \pi} x = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

بنابراین مجموع جواب‌های این معادله در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ برابر صفر است.

۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

نکتهٔ ۱: در توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ مقدار ماکسیمم برابر $|a| + c$، مقدار مینیمم برابر $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

نکتهٔ ۲: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sin^2 ax + \cos^2 ax + 2\sin ax\cos ax = 1 + \sin 2ax$$

راه‌حل اول:

با توجه به نمودار، $a < 0$ است. به‌ازای $x > 0$، در نقطهٔ $x = \frac{3\pi}{4}$ اولین ماکزیمم تابع اتفاق افتاده است:

$$2ax = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2a(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow a = -1$$

بنابراین:

$$f(\frac{7\pi}{12}) = 1 + \sin\frac{14a\pi}{12} = 1 - \sin\frac{7\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

راه‌حل دوم:

با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع $T = \pi$ است، یعنی:

$$T = \frac{2\pi}{|2|} \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|2|} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

با توجه به نمودار $a < 0$ و $a = -1$ قابل‌قبول است. ادامه راه‌حل مشابه است.

۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

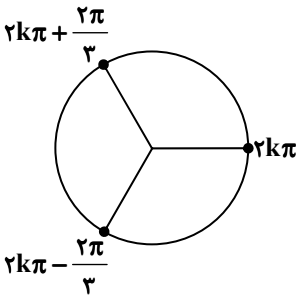
نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که:

$k \in \mathbb{Z}$

اگر $\cos x = a$ قرار دهیم، به معادلهٔ درجه‌دوم زیر می‌رسیم:

$$2a^2 - a - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} a = \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ a = \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$



این جواب‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی به‌شکل روبه‌رو قرار دارند.

اجتماع این جواب‌ها در $x = \frac{2k\pi}{3}$ قرار می‌گیرد.

۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

نکتهٔ ۱: جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشند که: $k \in \mathbb{Z}$

نکتهٔ ۲: $\sin 2x = 2\sin x\cos x \quad , \quad \sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$

می‌دانیم:

$$1+\sin 2x = \overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1} + 2\sin x\cos x \Rightarrow 1+\sin 2x = (\sin x+\cos x)^2$$

ابتدا معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 1+\sin 2x \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x) = (\sin x+\cos x)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x) - (\sin x+\cos x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x+\cos x)(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x - \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x+\cos x = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \\ \sin x+\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

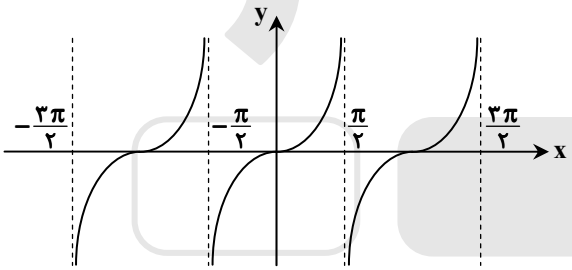
$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x = \frac{23\pi}{12} \\ x+\frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

پس مجموع جواب‌ها در بازهٔ $(0, 2\pi)$ برابر است با:

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \frac{23\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = 5\pi$$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

نکته: نمودار تابع $y = \tan x$ به‌صورت زیر است:



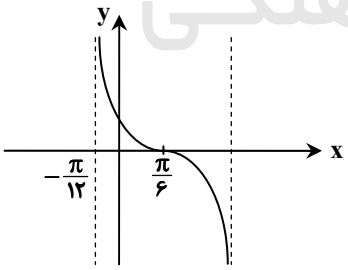
به‌دلیل نزولی بودن تابع، a منفی است، یعنی خط $x = \frac{\pi}{2}$ به‌سمت چپ رفته است.

$$x = -\frac{\pi}{12} \Rightarrow ax + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a(-\frac{\pi}{12}) + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = -2$$

نقطهٔ برخورد با محور طول‌ها را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$y = \tan(-2x + \frac{\pi}{3})$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$



پس اگر نمودار تابع را $\frac{\pi}{6}$ به چپ منتقل کنیم از مبدأ عبور می‌کند.

حسابان | ۱۷ مهرماه ۱۴۰۴

۱. اگر $f(x)=x^۲-۴x$ و $g(x)=f(kx)$ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر k برای این‌که تساوی $g(۲)=f(۱)$ برقرار باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

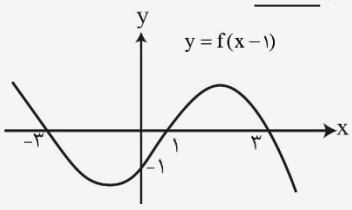
پاسخ: گزینه ۴

ضابطه‌ی تابع g را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=f(kx)=(kx)^۲-۴(kx)=k^۲x^۲-۴kx$$

$$\begin{cases} g(۲)=۴k^۲-۸k \\ f(۱)=۱-۴=-۳ \end{cases} \rightarrow g(۲)=f(۱) \rightarrow ۴k^۲-۸k=-۳ \rightarrow ۴k^۲-۸k+۳=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} S=\frac{-b}{a}=\frac{۸}{۴}=۲$$

۲. با توجه به نمودار تابع $y=f(x-۱)$ در شکل مقابل، اگر $f(m)=۰$ باشد، حاصل $m+f(۲)$ کدام نیست؟



۱) -۴
۲) صفر
۳) ۲
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به نمودار ریشه‌های تابع $y=f(x-۱)$ برابر ۳، ۱ و -۳ است، بنابراین ریشه‌های تابع $y=f(x)$ برابر با ۲، ۰ و -۴ است.

حال از $f(m)=۰$ می‌توان نتیجه گرفت m یکی از اعداد ۲، ۰ و -۴ است.

با توجه به نمودار $y=f(x-۱)$ داریم:

$$x=۳ \rightarrow f(۳-۱)=f(۲)=۰$$

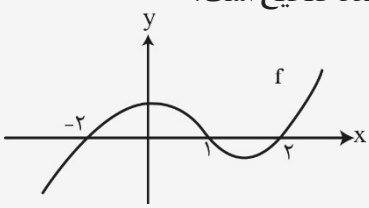
$$m=-۴ \rightarrow m+f(۲)=-۴+۰=-۴$$

$$m=۰ \rightarrow m+f(۲)=۰+۰=۰$$

$$m=۲ \rightarrow m+f(۲)=۲+۰=۲$$

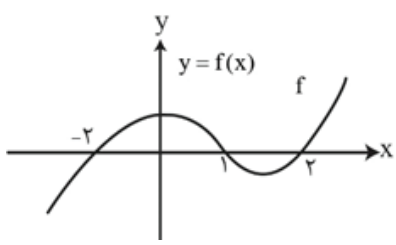
بنابراین گزینه‌ی (۴) نمی‌تواند جواب باشد.

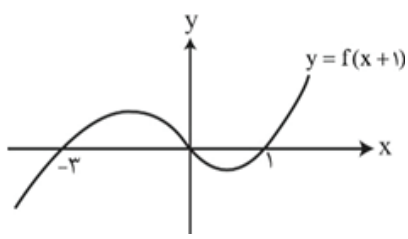
۳. نمودار زیر، تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y=\sqrt{\frac{xf(x)-۲f(x)}{f(x+۱)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۴





$f(x)=0 \to x=-2,1,2$

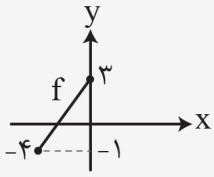
$f(x+1)=0 \to x=-3,0,1$

$y=\sqrt{\frac{(x-2)f(x)}{f(x+1)}} \to \frac{(x-2)f(x)}{f(x+1)} \geq 0$

x	-3		-2		0		1		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	$+$
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	$+$
$f(x+1)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
کل	$-$	ت ن	$+$	0	$-$	ت ن	$+$	ت ن	$+$	$+$

بنابراین دامنه‌ی تابع به صورت $(1,+\infty) \cup (0,1) \cup [-2,-3)$ است که شامل بی‌شمار عدد صحیح است.

۴. با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل، مساحت محدود به نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})$ و $y=f(-2x)$ و محور xها کدام است؟



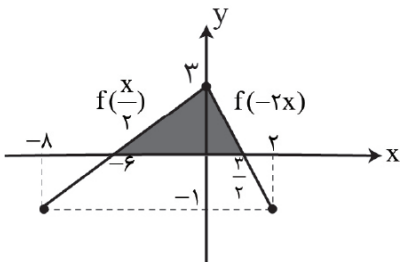
۱) $\frac{21}{2}$ ۲) $\frac{21}{4}$

۳) $\frac{45}{2}$ ۴) $\frac{45}{4}$

پاسخ: گزینه ۴

ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x)=x+3$ است و $x=-3$ محل تلاقی نمودار f با محور xهاست.

برای رسم نمودار $f(\frac{x}{2})$ کافی است طول نقاط تابع $f(x)$ را در ۲ ضرب کنیم و برای رسم نمودار $f(-2x)$ کافی است طول نقاط تابع $f(x)$ را بر -2 تقسیم کنیم.



ارتفاع مثلث $=3$

قاعده‌ی مثلث $=\frac{3}{2}+6=\frac{15}{2}$

مساحت مثلث $=\frac{1}{2}\times 3\times \frac{15}{2}=\frac{45}{4}$

۵. نمودار تابع $f(x)=ax^2-bx+3$ را یک واحد به طرف xهای مثبت و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. سپس آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا تابع $y=g(x)$ به دست آید. اگر خط به معادلهٔ $y=2$ در نقطهٔ $x=-2$ بر نمودار تابع g مماس باشد، عرض از مبدأ تابع g کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

$f(x)=ax^2-bx+3 \xrightarrow[\text{۱ واحد به بالا}]{\text{۱ واحد به راست}} y=a(x-1)^2-b(x-1)+3+1$

$\xrightarrow[\text{محور } y\text{ها}]{\text{قرینه نسبت به}} g(x)=a(-x-1)^2-b(-x-1)+4=ax^2+(2a+b)x+a+b+4$

خط $y=2$ در نقطهٔ $x=-2$ بر نمودار تابع g مماس است، پس می‌توان نتیجه گرفت این خط افقی در راس سهمی بر g مماس است.

راس سهمی $(-2,2) \to 2=a(2-1)^2-b(2-1)+4 \to a-b=-2$ (۱)

طول راس سهمی $x=\frac{-(2a+b)}{2a}=-2 \to 2a+b=4a \to b=2a$ (۲)

از (۱) و (۲) به $a=2$ و $b=4$ می‌رسیم.

$g(x)=2x^2+8x+10 \to$ عرض از مبدأ $=10$

۶. اگر نقطه‌ی $(۴x_۰, \frac{y_۰}{۲})$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ قرار داشته باشد، کدام نقطه روی نمودار تابع $y=-۲f(\frac{x-۳}{۲})+y_۰$ قرار دارد؟

۱) $(۴x_۰+۳, y_۰)$ ۲) $(۸x_۰+۳, ۰)$ ۳) $(\frac{۲x_۰-۳}{۲}, -y_۰)$ ۴) $(\frac{۲x_۰-۳}{۲}, ۰)$

پاسخ: گزینه ۲

نقطه‌ی $(۴x_۰, \frac{y_۰}{۲})$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ قرار دارد. بنابراین مختصات این نقطه در تابع f صدق می‌کند:

$$y=f(x) \xrightarrow{(۴x_۰, \frac{y_۰}{۲})} \frac{y_۰}{۲}=f(۴x_۰) \to y_۰=۲f(۴x_۰)$$

برای تشخیص این‌که کدام نقطه روی تابع $y=-۲f(\frac{x-۳}{۲})+y_۰$ قرار دارد، کافی است عبارت‌های داخل پرانتز را مساوی هم قرار دهیم و سپس مختصات نقطه جدید را می یابیم:

$$\begin{cases} ۴x_۰=\frac{x-۳}{۲} \to x-۳=۸x_۰ \to x=۸x_۰+۳ \\ y=-۲f(۴x_۰)+y_۰=-y_۰+y_۰=۰ \end{cases}$$

پس نقطه‌ی $(۸x_۰+۳, -۰)$ روی تابع $y=-۲f(\frac{x-۳}{۲})+y_۰$ قرار دارد.

۷. برای رسم نمودار $y=\sqrt{-\frac{۱}{۳}x+۱}$ از روی نمودار $f(x)=\sqrt{x}$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) ابتدا نمودار f را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را یک واحد به طرف راست می‌بریم و در انتها در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم.

۲) ابتدا نمودار f را یک واحد به طرف چپ می‌بریم، سپس آن را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم و در انتها در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم.

۳) ابتدا نمودار f را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم و در انتها آن را یک واحد به طرف چپ می‌بریم.

۴) ابتدا نمودار f را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبقساط می‌دهیم و در انتها ۳ واحد به طرف راست می‌بریم.

پاسخ: گزینه ۳

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ ✓ $y=\sqrt{x} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور y‌ها}} \sqrt{-x} \xrightarrow[x\to x-۱]{\text{۱ واحد به راست}} \sqrt{-(x-۱)}=\sqrt{-x+۱} \xrightarrow[x\to \frac{x}{۳}]{\text{انبساط افقی با ضریب ۳}} \sqrt{-\frac{x}{۳}+۱}$

۲ ✓ $y=\sqrt{x} \xrightarrow[x\to x+۱]{\text{۱ واحد به چپ}} \sqrt{x+۱} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور y‌ها}} \sqrt{-x+۱} \xrightarrow[x\to \frac{x}{۳}]{\text{انبساط افقی با ضریب ۳}} \sqrt{-\frac{x}{۳}+۱}$

۳ ✗ $y=\sqrt{x} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور y‌ها}} \sqrt{-x} \xrightarrow[x\to \frac{x}{۳}]{\text{انبساط افقی با ضریب ۳}} \sqrt{-\frac{x}{۳}} \xrightarrow[x\to x+۱]{\text{۱ واحد به چپ}} \sqrt{\frac{-(x+۱)}{۳}}=\sqrt{\frac{-x}{۳}-\frac{۱}{۳}} \neq \sqrt{-\frac{x}{۳}+۱}$

۴ ✓ $y=\sqrt{x} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور y‌ها}} \sqrt{-x} \xrightarrow[x\to \frac{x}{۳}]{\text{انبساط افقی با ضریب ۳}} \sqrt{-\frac{x}{۳}} \xrightarrow[x\to x-۳]{\text{۳ واحد به راست}} \sqrt{\frac{-(x-۳)}{۳}}=\sqrt{-\frac{x}{۳}+۱}$

۸. تابع $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸$ مفروض است. نمودار تابع $g(x)=\sqrt[۳]{۲x}$ با کدام‌یک از انتقال‌های زیر، بر نمودار تابع $f^{-۱}$ منطبق می‌شود؟

۱) یک واحد به سمت چپ و سپس ۲ واحد به سمت بالا
۲) یک واحد به سمت چپ و سپس ۲ واحد به پایین
۳) انبساط افقی با ضریب ۲ وسپس ۲ واحد به سمت بالا
۴) انبساط افقی با ضریب ۲ وسپس ۲ واحد به سمت پایین

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا ضابطه‌ی تابع $f(x)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸=(x-۲)^۳$$

حال ضابطه‌ی تابع $f^{-۱}$ را می‌یابیم:

$$y=(x-۲)^۳ \to y=(x-۲)^۳ \xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }} x-۲=\sqrt[۳]{y} \to x=۲+\sqrt[۳]{y} \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ و } y} f^{-۱}(x)=۲+\sqrt[۳]{x}$$

اکنون نمودار تابع g را با استفاده از انتقال‌های افقی و عمودی بر نمودار تابع $f^{-۱}$ منطبق می‌کنیم:

$$g(x)=\sqrt[۳]{۲x} \xrightarrow[x \to \frac{x}{۲}]{\text{انبساط افقی با ضریب ۲}} \sqrt[۳]{x} \xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} ۲+\sqrt[۳]{x}$$

پس برای منطبق کردن نمودار تابع g بر نمودار تابع $f^{-۱}$، ابتدا انبساط افقی با ضریب ۲ و سپس ۲ واحد به سمت بالا منتقل می کنیم.

۹. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}|۲x-۳| & x \geq ۱\\ x^۲-x & x<۱\end{cases}$ را ابتدا یک واحد به راست و سپس ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا به نمودار $g(x)$ برسیم اگر تابع $g(x)$ دارای ۲ ریشه باشد و α ریشه کوچک‌تر آن باشد، حاصل $(fof)(\alpha)$ کدام است؟

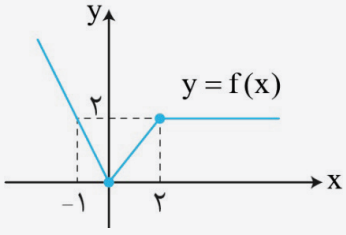
۱) ۱ ۲) ۰ ۳) -۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}|۲x-۳| & x \geq ۱\\ x^۲-x & x<۱\end{cases} \xrightarrow[\text{۲ واحد به پایین}]{\text{۱ واحد به راست}} y=f(x-۱)-۲=\begin{cases}|۲(x-۱)-۳|-۲ & x-۱ \geq ۱\\ (x-۱)^۲-(x-۱)-۲ & x-۱<۱\end{cases}$$

$$\to g(x)=\begin{cases}|۲x-۵|-۲ & x \geq ۲\\ x^۲-۳x & x<۲\end{cases} \to \begin{cases}|۲x-۵|-۲=۰ \to \begin{cases}x=\frac{۷}{۲} \ \checkmark\\ x=\frac{۳}{۲} \ \times\end{cases}\\ x^۲-۳x=۰ \to \begin{cases}x=۰ \ \checkmark \to \alpha=۰ \to (fof)(۰)=f(f(۰))=f(۰)=۰\\ x=۳ \ \times\end{cases}\end{cases}$$

۱۰. نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. اگر نمودار تابع $y=f(۱-|x|)$ و خط $y=m$ در چهار نقطه متقاطع باشند، مقادیر m کدام است؟



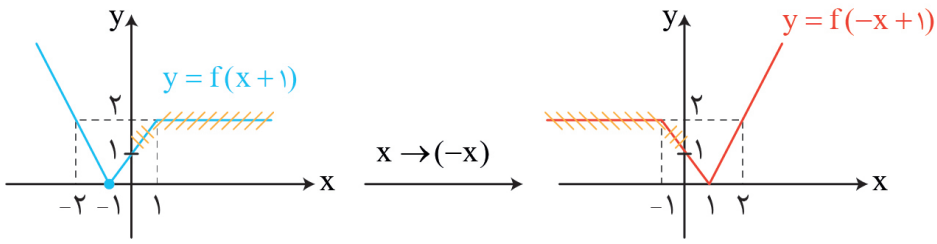
۱) $k>۱$
۲) $۰<k<۱$
۳) $۰ \leq k \leq ۱$
۴) $k \geq ۱$

پاسخ: گزینه ۲

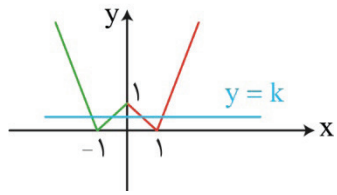
ابتدا $|x|$ را باز می‌کنیم و تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=f(۱-|x|)=\begin{cases}f(۱-x) & x \geq ۰\\ f(۱+x) & x<۰\end{cases}$$

حالا نمودار تابع $y=f(1+x)$ و $y=f(1-x)$ را رسم می‌کنیم:



پس نمودار تابع $y=f(1-|x|)$ به صورت زیر است:



با توجه به شکل، اگر $0<k<1$ باشد، آن‌گاه خط $y=k$ این نمودار را در چهار نقطه قطع می‌کند.

۱۱. در یک دنباله‌ی حسابی اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله باشد و $S_6-S_5=12$ و $S_9-S_7=60$ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۶/۸ ۲) ۷/۲ ۳) ۷/۴ ۴) ۷/۸

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم $S_n-S_{n-1}=a_n$ است، پس:

$$S_6-S_5=12 \Rightarrow a_6=12 \Rightarrow a_1+5d=12 \quad (1)$$

در ضمن $S_9-S_7=60$ است، پس:

$$(a_1+...+a_8+a_9)-(a_1+a_2+...+a_7)=60 \Rightarrow a_8+a_9=60 \Rightarrow 2a_1+15d=60 \quad (2)$$

از معادلات (۱) و (۲)، $d=7/2$ به دست می‌آید.

۱۲. در یک دنباله‌ی حسابی با ۱۳ جمله‌ی عمومی a_n، مجموع جملات شماره‌های زوج یعنی $a_2,a_4,...,a_{12}$ از مجموع جملات شماره‌های فرد یعنی $a_1,a_3,...,a_{13}$ به اندازه ۷ واحد کمتر است. اگر $a_{11}=3a_9$ باشد، جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟

۱) ۷ ۲) صفر ۳) -7 ۴) -14

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به صورت سوال داریم:

$$(a_1+a_3+...+a_{13})-(a_2+a_4+...+a_{12})=7 \Rightarrow a_1+\underbrace{(a_3-a_2)}_{d}+\underbrace{(a_5-a_4)}_{d}+...+\underbrace{(a_{13}-a_{12})}_{d}=7 \Rightarrow a_1+6d=7 \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم $a_{11}=3a_9$ است، پس:

$$a_1+10d=3(a_1+8d) \Rightarrow a_1=-7d \quad (2)$$

از معادلات (۱) و (۲)، $a_1=49$ و $d=-7$ به دست می‌آید. پس جمله‌ی دهم دنباله برابر است با:

$$a_{10}=a_1+9d=49+9(-7)=-14$$

۱۳. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های حقیقی و متمایز معادله‌ی $(2m-3)x^2-2mx+m-2=0$ باشند و $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<1$، آن‌گاه مقادیر m شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

شرط این‌که معادله‌ی $(2m-3)x^2-2mx+m-2=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز باشد:

$$\begin{cases} 2m-3\neq 0 \rightarrow m\neq \frac{3}{2} & (1) \\ \Delta>0 \rightarrow (-2m)^2-4(2m-3)(m-2)>0 \xrightarrow{\div 4} \end{cases}$$

$$\rightarrow m^2-(2m-3)(m-2)>0 \rightarrow -m^2+7m-6>0 \rightarrow 1<m<6 \quad (2)$$

از طرفی باید $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<1$ باشد:

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}<1 \rightarrow \frac{S}{P}-1<0 \rightarrow \frac{S-P}{P}<0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{2m}{2m-3} \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{m-2}{2m-3} \end{cases} \rightarrow \frac{\frac{2m}{2m-3}-\frac{m-2}{2m-3}}{\frac{m-2}{2m-3}}<0 \xrightarrow{m\neq\frac{3}{2}} \frac{m+2}{m-2}<0 \rightarrow -2<m<2 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)} (1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},2) \rightarrow \text{فاقد عدد طبیعی}$$

۱۴. اگر نقطه‌ی رأس سهمی $f(x)=x^2-4x+m^2+3$ در ناحیه‌ی چهارم دستگاه مختصات باشد، مقادیر m کدام است؟

۱) $|m|>1$ ۲) $|m|<1$ ۳) $m<2$ ۴) $-3<m<2$

پاسخ: گزینه ۲

برای آن‌که نقطه‌ی رأس سهمی $y=x^2-4x+m^2+3$ در ناحیه‌ی چهارم قرار بگیرد، باید طول رأس سهمی مثبت و عرض رأس سهمی منفی باشد:

۱) $x_S=-\frac{-4}{2(1)}=2>0$

۲) $y_S=(2)^2-4(2)+m^2+3<0 \Rightarrow m^2-1<0 \Rightarrow m^2<1 \Rightarrow |m|<1$

از اشتراک بازه‌ها $|m|<1$ است.

۱۵. نمودار تابع $f(x)=x^2-9$ و خط‌های $y=7$ و $y=-5$ در چهار نقطه‌ی A, B, C و D متقاطع‌اند. مساحت ذوزنقه‌ی ABCD کدام است؟

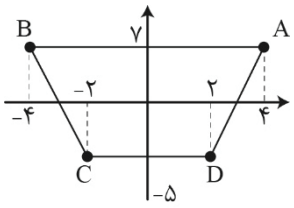
۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۲

تابع $f(x)$ را با خط‌های $y=7$ و $y=-5$ تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(x)=x^2-9 \\ y=7 \end{cases} \rightarrow x^2-9=7 \rightarrow x^2=16 \rightarrow x=\pm 4 \rightarrow A(4,7) \quad , \quad B(-4,7)$$

$$\begin{cases} f(x)=x^2-9 \\ y=-5 \end{cases} \rightarrow x^2-9=-5 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow C(-2,-5) \quad , \quad D(2,-5)$$



$|AB|=۸$

$|CD|=۴$

ارتفاع$=۱۲$

$S_{ABCD}=\frac{\text{مجموع دو قاعده}}{۲}\times\text{ارتفاع}=\frac{۸+۴}{۲}\times۱۲=۷۲$

۱۶. مجموع جواب‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{x^۲+x+۱}=۱-x-x^۲$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x^۲+x+\sqrt{x^۲+x+۱}=۱\xrightarrow{+۱}x^۲+x+۱+\sqrt{x^۲+x+۱}=۲$$

حالا با تغییر متغیر $\sqrt{x^۲+x+۱}=t$ داریم:

$$t^۲+t-۲=۰\Rightarrow(t-۱)(t+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۱\\t=-۲\end{cases}$$

$t=-۲\Rightarrow\sqrt{x^۲+x+۱}=-۲\Rightarrow$ فاقد ریشه حقیقی

$t=۱\Rightarrow\sqrt{x^۲+x+۱}=۱\Rightarrow x^۲+x=۰\Rightarrow x=۰,x=-۱$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با : $-۱+۰=-۱$

معادلات گنگ (رادیکالی)

اگر در یک معادله، مجهول زیر رادیکال باشد، به آن معادله گنگ (رادیکالی) می‌گوییم.

معادله $\sqrt{۱-۲x}=x+۱$ یک معادله رادیکالی (گنگ) است.

روش حل معادله

برای حل معادلات گنگ، رادیکال را در یک سمت تساوی صورت تنها می‌کنیم و با توان‌رسانی طرفین معادله، رادیکال را از بین می‌بریم؛ سپس با ساده سازی معادله به جواب می‌رسیم.

در آخر باید توجه داشته باشیم که جواب‌های به دست آمده، باید در معادله صدق کنند. (اگر می‌خواهی روش کلی یادت بمونه، میشه تا؛ یعنی تنها، توان، آزمایش)

$$\sqrt{x}+x=۶\Rightarrow\sqrt{x}=۶-x\Rightarrow(\sqrt{x})^۲=(۶-x)^۲\Rightarrow x=x^۲-۱۲x+۳۶\Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۴\ \text{ق ق}\\x=۹\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

نکات

از تساوی $\sqrt[۲n]{A}=B$ نتیجه می‌گیریم $A\geq۰$ و $B\geq۰$ است.

معادله $\sqrt{x-۳}=۱-x$ جواب ندارد، چرا که مجموعه جواب نامعادلات $x-۳\geq۰$ و $۱-x\geq۰$ با هم اشتراک ندارند.

در معادله خاص $(\sqrt[۲n]{A}+\sqrt[۲m]{B}+\cdots=۰)$ که جمع چند رادیکال فرجه زوج برابر صفر است، ریشه معادله، همان ریشه مشترک عبارات زیر رادیکال یعنی $A=B=\cdots=C=۰$ است؛ در واقع جواب، عددی است که تمام رادیکال ها را صفر کند.

$$\sqrt{x^۲-۲x+۱}+\sqrt{x^۲-۱}+\sqrt[۴]{x-۱}=۰\Rightarrow x=۱$$

در معادلات گنگ با ظاهر پیچیده، حواستان به حوزه تعریف رادیکال‌ها باشد. معمولا بازه جواب محدود به صفر یا یک عدد می‌شود که با جایگذاری آن اعداد تکلیف حل معادله مشخص می‌شود.

در معادله $\sqrt{۲x-۳}=\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}-\sqrt{۲-x}$ اشتراک حوزه تعریف رادیکال ها، تنها $x=۲$ است؛ چون این عدد در معادله صادق نیست، پس معادله فاقد ریشه حقیقی است.

کاربرد معادله گنگ

با توجه به رابطه فاصله دو نقطه $(AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲})$ از حل معادله گنگ در مسائلی که بحث فاصله دو نقطه باشد، استفاده می‌کنیم.

۱۷. دو فرد A و B در یک شرکت همکار هستند و در هر ۶ ساعت یک دستگاه کامل تولید می‌کنند. اگر سرعت کار فرد B، ۳برابر فرد A باشد، فرد B بعد از چند ساعت به تنهایی یک دستگاه را تولید می‌کند؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۱

دو فرد A و B هر ۶ ساعت یک دستگاه تولید می‌کنند پس در هر ساعت $\frac{۱}{۶}$ دستگاه را تولید می‌کنند. سرعت فرد B، ۳ برابر فرد A است پس مدت زمان تولید دستگاه توسط فرد B، $\frac{۱}{۳}$ برابر فرد A است.

$$\text{سرعت B} = ۳ \times \text{سرعت A} \rightarrow t_B = \frac{t_A}{۳} \rightarrow t_A = ۳t_B$$

بنابراین اگر فرد A و B به‌ترتیب در t_A و t_B ساعت یک دستگاه تولید کنند، پس در هر ساعت به ترتیب $\frac{۱}{t_A}$ و $\frac{۱}{t_B}$ از دستگاه را تولید می‌کنند.

از طرفی دو فرد A و B هر ۶ ساعت یک دستگاه را تولید می‌کنند پس در هر ساعت $\frac{۱}{۶}$ دستگاه را تولید می‌کنند. لذا داریم:

$$\frac{۱}{t_A} + \frac{۱}{t_B} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۳t_B} + \frac{۱}{t_B} = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳t_B} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow ۲۴ = ۳t_B \Rightarrow t_B = ۸ \Rightarrow t_A = ۲۴$$

پس فرد B به تنهایی در ۸ ساعت یک دستگاه را تولید می‌کند.

۱۸. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{|x-۲|+۳|۲-x|}{|x-۲|+۱۲} < ۱$ شامل چند صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم $|۲-x| = |x-۲|$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{|x-۲|+۳|x-۲|}{|x-۲|+۱۲} < ۱ \Rightarrow ۴|x-۲| < |x-۲|+۱۲ \Rightarrow ۳|x-۲| < ۱۲ \Rightarrow |x-۲| < ۴ \Rightarrow -۴ < x-۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < x < ۶$$

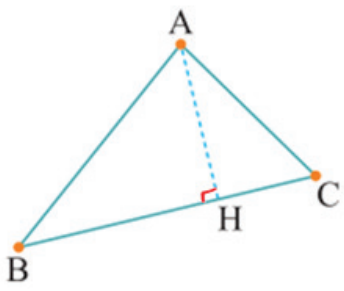
بنابراین مجموعه جواب نامعادله شامل ۷ عدد صحیح $x = -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ است.

۱۹. اگر رئوس مثلث ABC به صورت A(۱,۹)، B(۳,۳) و C(۷,۱۱) باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به شکل زیر، طول AH، همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از ضلع BC است. برای محاسبه‌ی AH، نیاز به معادله خط BC داریم، پس ابتدا معادله‌ی این خط را به دست می‌آوریم:

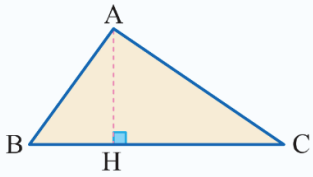


$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{۳-۱۱}{۳-۷} = \frac{-۸}{-۴} = ۲$$

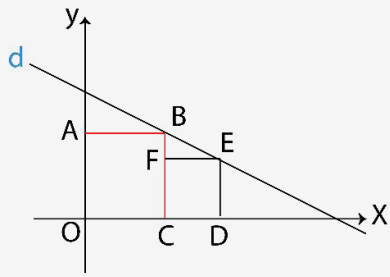
$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - ۳ = ۲(x-۳) \Rightarrow ۲x - y - ۳ = ۰$$

اکنون مقدار AH را به کمک رابطه فاصله‌ی نقطه از خط به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{|۲(۱) - (۹) - ۳|}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۲\sqrt{۵}$$

ارتفاع	تعریف :خطی است که از راس بر ضلع مقابل عمود میشود.	
	طول ارتفاع AH : فاصله نقطه A از خط BC است.	
	معادله ارتفاع AH : با داشتن مختصات A و عکس و قرینه شیب خط BC می‌توان معادله خط را نوشت: $y-y_A=\frac{-۱}{m_{BC}}(x-x_A)$	

۲۰. مطابق شکل، دو مربع در ناحیهٔ اول مختصات قرار گرفته‌اند و رأس B و E روی خط d به معادلهٔ $x+۲y-۱۸=۰$ قرار دارد. فاصلهٔ رأس E از مبدأ مختصات کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۲۹}$

۲) $۶\sqrt{۳}$

۳) ۱۰

۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینه ۱

چون OABC مربع است، پس باتوجه به شکل، طول و عرض نقطهٔ B برابر است، پس آن را به صورت $B(a,a)$ فرض می‌کنیم. حالا چون نقطهٔ B روی خط $x+۲y-۱۸=۰$ قرار دارد، پس در آن صدق می‌کند:

$$a+۲a-۱۸=۰\Rightarrow a=۶$$

حالا اگر ضلع مربع CDEF، را برابر b در نظر بگیریم، آن‌گاه $E(b+۶,b)$ است. این نقطه نیز روی خط d قرار دارد، پس در آن صدق می‌کند:

$$(b+۶)+۲b-۱۸=۰\Rightarrow ۳b=۱۲\Rightarrow b=۴$$

پس $E(۱۰,۴)$ است و فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OE=\sqrt{(۱۰-۰)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۱۱۶}=۲\sqrt{۲۹}$$

حسابان | ۱ آبان ماه ۱۴۰۴

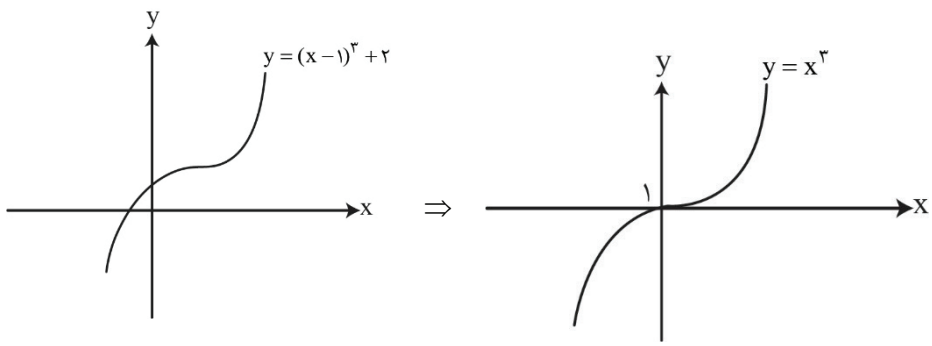
۱. نمودار تابع چندجمله‌ای $f(x)=x^{۳}-nx^{\frac{n}{۳}+۱}+۳x^{\frac{۳}{n}}+۱$ از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۴

در تابع چندجمله‌ای توان xها باید عددی حسابی باشند. بنابراین:

$$\begin{cases}\frac{n}{۳}+۱\in W\\ \frac{۳}{n}\in W\end{cases}\rightarrow n=۳\rightarrow f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+۱\rightarrow f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱+۲=(x-۱)^{۳}+۲$$

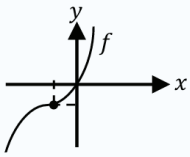


نمودار تابع f از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد.

تابع درجه سوم

در تابع با ضابطه $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d\,,(a\neq ۰)$، اگر $\Delta'_{f}=۰$ باشد، آنگاه این تابع به صورت $f(x)=k(x-\alpha)^{۳}+\beta$ قابل نمایش است. (با مشتق در فصل چهارم ریاضی۳ آشنا خواهید شد.)

تابع $f(x)=۲x^{۳}+۶x^{۲}+۶x$ را می‌توانیم به صورت $f(x)=۲(x+۱)^{۳}-۲$ نشان دهیم. نمودار آن به صورت مقابل است.



۲. تابع پیوسته $y=f(x)$ روی مجموعه اعداد حقیقی اکیداً صعودی است و $f(۳)=۰$ است. دامنه تابع $y=\sqrt{f(x)f(-۳x)}$ کدام است؟

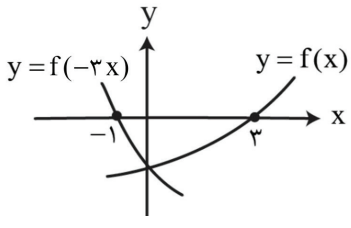
۱) $[-۳,-۱]$ ۲) $[۱,۳]$ ۳) $[-۳,۱]$ ۴) $[-۱,۳]$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا باید عبارت زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$f(x)f(-۳x)\geq ۰\rightarrow\begin{cases}f(x)=۰\rightarrow x=۳\\ f(-۳x)=۰\rightarrow -۳x=۳\rightarrow x=-۱\end{cases}$$

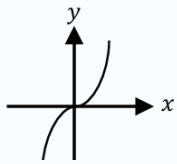
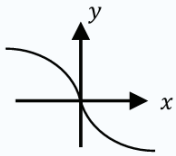
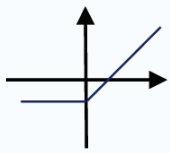
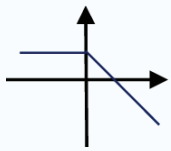
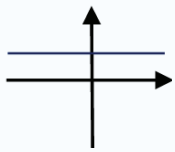
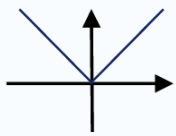
تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است. برای رسم نمودار تابع $y=f(-۳x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کرده و طول نقاط تابع $f(x)$ را $\frac{۱}{۳}$ کنیم.



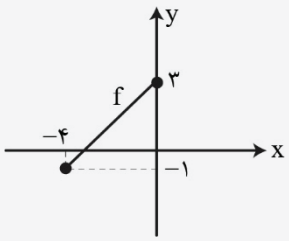
x		-۱		۳	
$f(x)$	$-$		$-$	۰	$+$
$f(-۳x)$	$+$	۰	$-$		$-$
کل	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$\rightarrow -۱\leq x\leq ۳$

SanjeshCloud

توابع صعودی و نزولی	انواع یکنوایی		تعریف	مثال نموداری
	یکنوا غیریکنوا	اکیدا صعودی	اگر $x_1 > x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$ باشد. تابع زیر، یک تابع اکیدا صعودی است. $f=\{(-1,-2),(1,0),(3,3)\}$	$f(x)=x^3$ 
		اکیدا نزولی	اگر $x_1 > x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$ باشد. تابع زیر، یک تابع اکیدا نزولی است. $f=\{(-2,-2),(0,-3),(2,-5)\}$	$f(x)=-\sqrt[3]{x}$ 
		صعودی	اگر $x_1 > x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \geq f(x_2)$ باشد. تابع زیر، یک تابع صعودی است. $f=\{(-1,-2),(0,0),(1,3),(3,3)\}$	$f(x)=x+\lvert x\rvert-1$ 
		نزولی	اگر $x_1 > x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \leq f(x_2)$ باشد. تابع زیر، یک تابع نزولی است. $f=\{(-3,-2),(-2,-3),(-1,-3),(2,-5)\}$	$f(x)=-x-\lvert x\rvert+1$ 
		هم صعودی هم نزولی	اگر $x_1 > x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) = f(x_2)$ باشد. تابع زیر، هم صعودی و هم نزولی است. $f=\{(-3,-2),(-2,-2),(-1,-2),(2,-2)\}$	$f(x)=2$ 
		نه صعودی نه نزولی	بخشی از آن صعودی و بخشی نزولی است. تابع زیر، نه صعودی و نه نزولی است. $f=\{(-3,-2),(-2,-1),(-1,-4),(2,4)\}$	$f(x)=\lvert x\rvert$ 
	نکات		توابع اکیداً یکنوا حتما یک به یک اند، اما عکس این مطلب همیشه صحیح نیست؛ مثل $f(x)=\frac{1}{x}$ که یک تابع یک به یک است اما اکیداً یکنوا نیست.	
			توابع اکیداً یکنوا، یکنوا هم محسوب می‌شوند اما عکس این مطلب همیشه صحیح نیست.	
			وارون کردن تابع یکنوایی را عوض نمی‌کند.	
			دو تابع $f(x)=2^x$ و $f^{-1}(x)=\log_2 x$ اکیداً صعودی اند.	
			تابع $f(x)=x+\sqrt{x}+1$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است اما تابع $g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x+\sqrt{x}+1}$ یک تابع اکیداً نزولی است.	
	اثر اعمال جبری	$f+g$	صعودی اکید + صعودی اکید = صعودی اکید	صعودی اکید + صعودی = صعودی اکید
			نزولی اکید + نزولی اکید = نزولی اکید	نزولی اکید + نزولی = نزولی اکید
			دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=\sqrt{x}$ اکیداً صعودی اند؛ پس مجموع آنها نیز اکیداً صعودی است.	
		fog	ترکیب دو تابع صعودی = تابع صعودی	ترکیب دو تابع نزولی = تابع صعودی
			ترکیب یک صعودی و نزولی = تابع نزولی	
			دو تابع $f(x)=x+1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ اکیداً صعودی اند؛ پس $(fog)(x)=\sqrt{x}+1$ نیز اکیداً صعودی است.	

۳. با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل، مساحت محدود به نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ و $y=f(-۲x)$ و محور xها کدام است؟



۱) $\frac{۲۱}{۲}$

۲) $\frac{۲۱}{۴}$

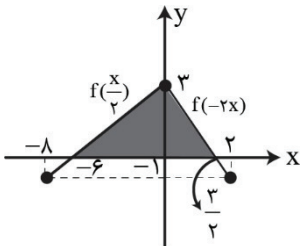
۳) $\frac{۴۵}{۲}$

۴) $\frac{۴۵}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴

ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x)=x+۳$ است و $x=-۳$ محل تلاقی نمودار f با محور xهاست.

برای رسم نمودار $f(\frac{x}{۲})$ کافی است طول نقاط تابع $f(x)$ را در ۲ ضرب کنیم و برای رسم نمودار $f(-۲x)$ کافی است طول نقاط تابع $f(x)$ را بر ۲− تقسیم کنیم.



ارتفاع مثلث $=۳$

قاعده‌ی مثلث $=\frac{۳}{۲}+۶=\frac{۱۵}{۲}$

مساحت مثلث $=\frac{۱}{۲}\times۳\times\frac{۱۵}{۲}=\frac{۴۵}{۴}$

۴. با فرض $f(x)=\log_{۲}(۳-x)+\log_{\frac{۱}{۲}}(۲x-۱)$ و $g=\{(-۱,۲),(۱,[a]),(\frac{۷}{۴},۴),(\frac{۷}{۹},۳)\}$ تابع $f+g$ اکیداً نزولی است. محدوده‌ی a کدام است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $[۳,۴)$ ۳) $[۲,۴]$ ۴) $(۲,۴)$

پاسخ: گزینه ۲

تابع $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی $(\frac{۱}{۲},۳)$ است، دقت کنید اگرچه مجموع دو تابع اکیداً نزولی، اکیداً نزولی است اما اگر مجموع دو تابع اکیداً نزولی باشد با این‌که $f(x)$ اکیداً نزولی است نمی‌توان به قطعیت اکیداً نزولی بودن g را نتیجه گرفت.

زوج‌مرتب $h(x)=f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$D_{h(x)}=\{۱,\frac{۷}{۴},\frac{۷}{۹}\} \quad , \quad f(x)=\log_{۲}\frac{۳-x}{۲x-۱}$$

$$h=\{(\frac{۷}{۹},۲+۳),(۱,[a]+۱),(\frac{۷}{۴},-۱+۴)\}$$

با توجه به اکیداً نزولی بودن $h(x)$:

$$۵>[a]+۱>۳\rightarrow\begin{cases}۲<[a]<۴\\ ۳\le a<۴\end{cases}$$

$$۳<[a]+۱<۵\Rightarrow ۲<[a]<۴\Rightarrow ۳\le a<۴$$

دام تستی: توجه کنید چون $[a]$ مقداری صحیح است، پس از $۲<[a]<۴$ نتیجه می‌گیریم $[a]=۳$ است.

۵. نمودار تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x-۱} & ;x>۱\\ ۱-x^{۲} & ;x<۱\end{cases}$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی منتقل می‌کنیم، سپس طول تمام نقاط را نصف می‌کنیم و در نهایت نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا تابع $y=\begin{cases}f(x); x>a\\ g(x); x<a\end{cases}$ دست آید. مقدار $f(۲a)+g(-۳a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}\sqrt{x-1} & ;x>1\\ 1-x^2 & ;x<1\end{cases}\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{۲ واحد}} y=\begin{cases}\sqrt{x+1} & ;x>-1\\ 1-(x+2)^2 & ;x<-1\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\to 2x} y=\begin{cases}\sqrt{2x+1} & ;x>-\frac{1}{2}\\ 1-(2x+2)^2 & ;x<-\frac{1}{2}\end{cases}\xrightarrow[\text{محور y‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\begin{cases}\sqrt{-2x+1} & ;x<\frac{1}{2}\\ 1-(-2x+2)^2 & ;x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

حال با مقایسه‌ی تابع $y=\begin{cases}f(x) & ;x>a\\ g(x) & ;x<a\end{cases}$ و تابع انتقال داده شده نتیجه می‌گیریم $a=\frac{1}{2}$ و $f(x)=1-(2x-2)^2$ و $g(x)=\sqrt{-2x+1}$ است. پس:

$$f(2a)+g(-3a)=f(1)+g(-\frac{3}{2})=(1-0)+\sqrt{3+1}=1+2=3$$

۶. نمودار تابع پیوسته و اکیداً صعودی $y=f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ از دو نقطه $A(-1,1)$ و $B(3,6)$ می‌گذرد. مجموعه جواب نامعادله $\frac{f^2(x)-7f(x)+6}{x-1}\geq 0$ کدام است؟

۱) $[-1,1)\cup[3,+\infty)$ ۲) $[3,+\infty)$ ۳) $(1,3]$ ۴) $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۱

تابع f از نقاط A و B می‌گذرد، بنابراین:

$$A(-1,1)\to f(-1)=1$$

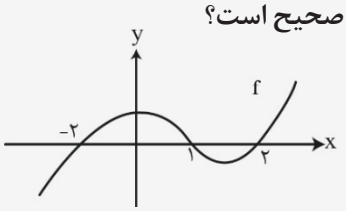
$$B(3,6)\to f(3)=6$$

$$\frac{f^2(x)-7f(x)+6}{x-1}\geq 0\to\frac{(f(x)-6)(f(x)-1)}{x-1}\geq 0\to\begin{cases}f(x)-6=0\to f(x)=6\to x=3\\ f(x)-1=0\to f(x)=1\to x=-1\\ x-1=0\to x=1\end{cases}$$

x		-1		1		3	
$f(x)-6$	$-$		$-$		$-$	○	$+$
$f(x)-1$	$-$	○	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	○	$+$		$+$
کل	$-$	○	$+$	تعریف نشده	$-$	○	$+$

جواب: $[-1,1)\cup[3,+\infty)$

۷. نمودار زیر، تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y=\sqrt{\frac{xf(x)-2f(x)}{f(x+1)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



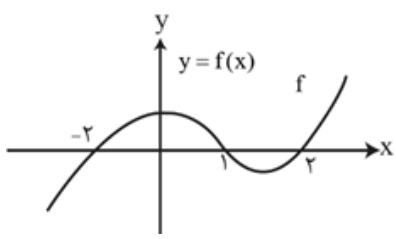
۱) ۱

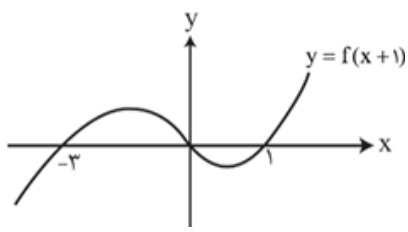
۲) ۲

۳) ۳

۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۴





$f(x)=۰ \rightarrow x=-۲,۱,۲$

$f(x+۱)=۰ \rightarrow x=-۳,۰,۱$

$y=\sqrt{\frac{(x-۲)f(x)}{f(x+۱)}} \rightarrow \frac{(x-۲)f(x)}{f(x+۱)} \geq ۰$

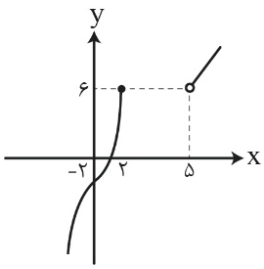
x		-۳		-۲		۰		۱		۲	
$x-۲$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$
$f(x)$	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x+۱)$	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$
کل	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	ت ن	$+$	ت ن	$+$	۰	$+$

بنابراین دامنه‌ی تابع به صورت $(-۳,-۲]\cup(۰,۱)\cup(۱,+\infty)$ است که شامل بی‌شمار عدد صحیح است.

۸. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^۳-۲ & ; \ x\leq ۲ \\ ۲x-۴ & ; \ x>a \end{cases}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، مقدار $(fof)(۲a)$ به ازای حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۸ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳



چون f تابعی اکیداً صعودی است، پس باید برد ضابطه $y=۲x-۴$ بزرگ‌تر از ۶ باشد، یعنی:

$۲x-۴>۶ \Rightarrow x>۵$

بنابراین حداقل مقدار a برابر ۵ است و برای به دست آوردن $f(f(۲a))=f(f(۱۰))$ باید از ضابطه‌ی پایین استفاده کنیم:

$f(f(۱۰))=f(۱۶)=۲۸$

۹. تابع f اکیداً نزولی و دامنه‌ی آن مجموعه‌ی از مقادیر مثبت است. اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x|x|)<f(|x^۳+۱|-۱)$ به صورت (a,b) باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

چون $x>۰$ است، پس $x^۳>۰$ و در نتیجه $x^۳+۱>۱$ است، یعنی:

$f(|x^۳+۱|-۱)=f(x^۳+۱-۱)=f(x^۳)$

حالا سراغ حل نامعادله می‌رویم:

$f(x|x|)<f(|x^۳+۱|-۱)=f(x^۲)<f(x^۳)$

$\xrightarrow{\text{اکیدا نزولی}} x^۲>x^۳ \Rightarrow x^۲-x^۳>۰$

$\rightarrow x^۲(۱-x)>۰ \Rightarrow ۱-x>۰ \Rightarrow x<۱$

از طرفی به دلیل شرط دامنه، نتیجه گرفتیم $x>۰$ است. از اشتراک جواب‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم مجموعه جواب نامعادله $۰<x<۱$ است. یعنی بازهٔ (a,b) همان بازهٔ $(۰,۱)$ است و $b-a=۱$ می‌باشد.

۱۰. بُرد تابع $f(x)=\frac{[x]|x|}{\sqrt{x-x^۲}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا دامنهٔ تابع f را می‌یابیم.

$$x-x^{۲}>۰ \rightarrow x(۱-x)>۰ \rightarrow ۰<x<۱$$

حال ضابطهٔ تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$۰<x<۱ \rightarrow [x]=۰ \rightarrow f(x)=۰$$

بنابراین مجموعهٔ برد این تابع برابر $\{۰\}$ است.

۱۱. دو عدد حقیقی a و b را در نظر بگیرید. اگر $f(x)=ax+b$ و $g(x)=bx-۶$ و $(f+g)(۲)=f(۲)$ و $(f+g)(-۱)=g(-۱)$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

از تساوی $(f+g)(۲)=f(۲)$ داریم:

$$f(۲)+g(۲)=f(۲) \Rightarrow g(۲)=۰$$

در ضمن می‌دانیم $g(x)=bx-۶$ است، پس:

$$g(۲)=۲b-۶=۰ \Rightarrow b=۳$$

حالا از تساوی $(f+g)(-۱)=g(-۱)$ داریم:

$$f(-۱)+g(-۱)=g(-۱) \Rightarrow f(-۱)=۰$$

از طرفی $f(x)=ax+۳$ است، پس:

$$f(-۱)=-a+۳=۰ \Rightarrow a=۳ \Rightarrow ab=۹$$

اعمال جبری روی توابع

عمل جبری	دامنه تابع	ضابطه تابع
مجموع دو تابع	$D_{f+g}=D_f \cap D_g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
تفاضل دو تابع	$D_{f-g}=D_f \cap D_g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
ضرب دو تابع	$D_{f\times g}=D_f \cap D_g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$
تقسیم دو تابع	$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ را در نظر بگیرید. دامنه اعمال جبری بین این دو تابع برابر است با:

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f\times g}=D_f \cap D_g=(\mathbb{R}-\{۱\}) \cap [۰,+\infty)=[۰,+\infty)-\{۱\}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}=(\mathbb{R}-\{۱\}) \cap ([۰,+\infty))-\{۰\}=(۰,+\infty)-\{۱\}$$

اکنون ضابطه‌های این توابع را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{۱}{x-۱}+\sqrt{x} \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{۱}{x-۱}-\sqrt{x}$$

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-۱} \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{۱}{x-۱}}{\sqrt{x}}$$

می‌توانیم از روی ضابطه جدید، دامنه را حساب کنیم، به شرطی که اصلا ساده سازی انجام نشود.

در اعمال جبری روی توابع زوج مرتبی، باید در دامنه مشترک، عملیات جبری را روی برد (مولفه دوم) انجام دهیم.

دو تابع $f=\{(۱,۳),(۳,۳),(-۱,۱)\}$ و $g=\{(۱,۰),(۲,۱),(۳,۴)\}$ را در نظر بگیرید، داریم:

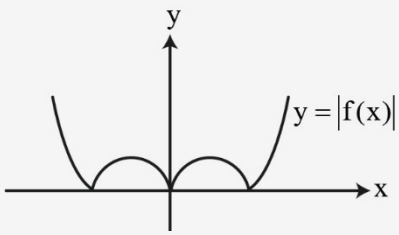
$$f+g=\{(۱,۳),(۳,۷)\} \qquad f-g=\{(۱,۳),(۳,-۱)\}$$

$$f\times g=\{(۱,۰),(۳,۱۲)\} \qquad \frac{f}{g}=\{(۳,\frac{۳}{۴})\}$$

نمودار

در رسم نمودار حاصل از عمل جبری روی توابع، پس از ساده کردن ضابطه، باید حواسمان به دامنه باشد. معمولا اختلاف اصلی گزینه‌ها در دامنه است که البته امکان استفاده از گزینه‌ها نیز فراهم است.

۱۲. نمودار تابع $y=f(x)$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است و نمودار تابع $y=|f(x)|$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(x)$ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟



۱) ۴

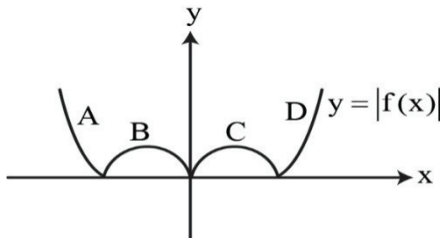
۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۴

هر قسمت از منحنی را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم.



هریک از قسمت‌های A, B, C و D می‌تواند دو حالت بالای محور x و زیر محور x (قرینه نسبت به محور x) داشته باشد. بنابر اصل ضرب داریم:

$۲\times۲\times۲\times۲=۱۶$

۱۳. اگر $f(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}$ و $g(x)=x^۲+۲x+۲$ باشند، مساحت محدود به نمودار تابع fog و خط $y=۳$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا تابع f و g را بازنویسی کرده و fog را تشکیل می‌دهیم.

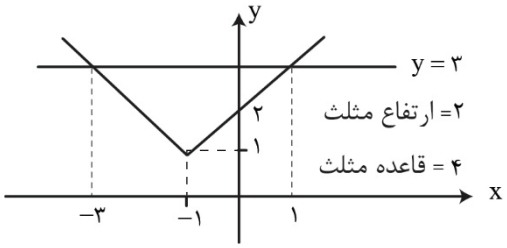
$$f(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}=\sqrt{(\sqrt{x-۱}+۱)^۲}=\sqrt{x-۱}+۱$$

$$g(x)=x^۲+۲x+۲=(x+۱)^۲+۱$$

$$(fog)(x)=\sqrt{(x+۱)^۲+۱-۱}+۱=|x+۱|+۱$$

$$|x+۱|+۱=۳\rightarrow|x+۱|=۲\rightarrow x=۱,-۳$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۲\times۴}{۲}=۴$$



ترکیب توابع

ضابطه

معنی $fog(x)=f(g(x))$ این است که جای های تابع $f(x)$ ، تابع $g(x)$ را قرار دهیم و سپس ضابطه حاصل را ساده کنیم.

دو تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۱}$ را در نظر بگیرید؛ ضابطه $(fog)(x)$ برابر است با:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)+۱}=\sqrt{\frac{۱}{x-۱}+۱}$$

اگر در گزینه ضابطه تابع مرکب را داده باشند، کافی است در یک عدد دلخواه، مقدار تابع مرکب را محاسبه کنیم و بعد در گزینه ها صدق دهیم.

ترکیب توابع	زوج مرتب	اگر نمایش دو تابع به صورت زوج مرتبی باشد، برای ترکیب آنها به صورت مقابل عمل می‌کنیم. در ساخت $f(g(x))$ داریم: $(a,b)\in g \ \text{و} \ (b,c)\in f \Rightarrow (a,c)\in f(g(x))$
		دو تابع $f=\{(-1,2),(3,4),(2,1)\}$ و $g=\{(5,-1),(0,3),(1,1)\}$ را در نظر بگیرید؛ fog برابر است با: $fog=\{(5,2),(0,4)\}$
	مقدار f(g(a))	ابتدا مقدار تابع درونی را به ازای x داده شده محاسبه کرده و سپس این مقدار را به عنوان ورودی در تابع بیرونی قرار می‌دهیم.
		دو تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ را در نظر بگیرید؛ مقدار $(fog)(x)$ در نقطه $x=0$ برابر است با: $g(0)=\frac{1}{0-1}=-1 \rightarrow f(-1)=\sqrt{-1+1}=0 \Rightarrow (fog)(0)=0$

۱۴. اگر $f(x)=3x+8$ و $(gof)(x)=(fog)(x)-3g(x)+6x$ باشد، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ کدام است؟

۱) $2x-8$ ۲) $-2x+8$ ۳) $6x+8$ ۴) $6x-8$

پاسخ: گزینه ۱

$(gof)(x)=f(g(x))-3g(x)+6x=3g(x)+8-3g(x)+6x$

$\rightarrow (gof)(x)=6x+8 \rightarrow g(3x+8)=6x+8$

$\rightarrow 3x+8=t \rightarrow x=\frac{t-8}{3} \rightarrow g(t)=6(\frac{t-8}{3})+8$

$g(t)=2(t-8)+8=2t-8 \rightarrow g(x)=2x-8$

ترکیب توابع	ضابطه	معنی $fog(x)=f(g(x))$ این است که جای های تابع $f(x)$ ، تابع $g(x)$ را قرار دهیم و سپس ضابطه حاصل را ساده کنیم.
		دو تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ را در نظر بگیرید؛ ضابطه $(fog)(x)$ برابر است با: $(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)+1}=\sqrt{\frac{1}{x-1}+1}$
		اگر در گزینه ضابطه تابع مرکب را داده باشند، کافی است در یک عدد دلخواه، مقدار تابع مرکب را محاسبه کنیم و بعد در گزینه ها صادق خائن کنیم.
	زوج مرتب	اگر نمایش دو تابع به صورت زوج مرتبی باشد، برای ترکیب آنها به صورت مقابل عمل می‌کنیم. در ساخت $f(g(x))$ داریم: $(a,b)\in g \ \text{و} \ (b,c)\in f \Rightarrow (a,c)\in f(g(x))$
		دو تابع $f=\{(-1,2),(3,4),(2,1)\}$ و $g=\{(5,-1),(0,3),(1,1)\}$ را در نظر بگیرید؛ fog برابر است با: $fog=\{(5,2),(0,4)\}$
	مقدار f(g(a))	ابتدا مقدار تابع درونی را به ازای x داده شده محاسبه کرده و سپس این مقدار را به عنوان ورودی در تابع بیرونی قرار می‌دهیم.
		دو تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ را در نظر بگیرید؛ مقدار $(fog)(x)$ در نقطه $x=0$ برابر است با: $g(0)=\frac{1}{0-1}=-1 \rightarrow f(-1)=\sqrt{-1+1}=0 \Rightarrow (fog)(0)=0$

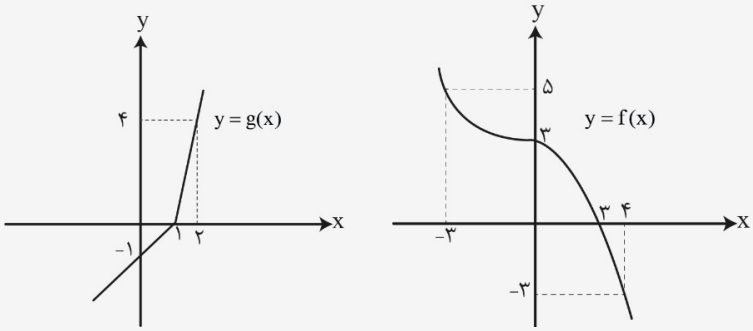
۱۵. نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ به صورت زیر است. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|(fog)(x)|\leq ۳$ کدام است؟

۱) $[-۳,۳]$

۲) $[۱,۲]$

۳) $[۰,۴]$

۴) $[-۳,۴]$



پاسخ: گزینه ۲

$$|(fog)(x)|\leq ۳ \rightarrow -۳\leq f(g(x))\leq ۳$$

با توجه به نمودار تابع f، برای این‌که مقدار تابع f در بازه‌ی $[-۳,۳]$ قرار بگیرد، باید $۰\leq g(x)\leq ۴$ باشد. حال با توجه به نمودار تابع g، برای این‌که مقدار تابع g در بازه‌ی $[۰,۴]$ قرار بگیرد، باید $۱\leq x\leq ۲$ باشد:

$$-۳\leq f(g(x))\leq ۳ \rightarrow ۰\leq g(x)\leq ۴ \rightarrow ۱\leq x\leq ۲$$

۱۶. اگر $f(x)=\frac{a}{x^۲+۲x+۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-۴}$ و دامنه تابع gof به صورت $[b,۴]$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰۴ ۲) ۱۰۰ ۳) ۹۸ ۴) ۱۱۰

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x)=\frac{a}{x^۲+۲x+۲} \rightarrow x^۲+۲x+۲=۰ \rightarrow \Delta<۰ \xrightarrow{a>۰} \text{همواره مثبت} \rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{x-۴} \rightarrow x-۴\geq ۰ \rightarrow x\geq ۴ \rightarrow D_g=[۴,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{a}{x^۲+۲x+۲}\in[۰,+\infty)$$

$$\rightarrow \frac{a}{x^۲+۲x+۲}\geq ۴ \rightarrow \frac{a}{(x+۱)^۲+۱}\geq ۴ \rightarrow \frac{a}{(x+۱)^۲+۱}-۴\geq ۰ \rightarrow \frac{a-۴((x+۱)^۲+۱)}{(x+۱)^۲+۱}\geq ۰$$

مجموعه جواب نامعادله به صورت $[b,۴]$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $x=b,۴$ ریشه‌های عبارت صورت کسر هستند. بنابراین:

$$a-۴((x+۱)^۲+۱)=۰ \rightarrow x=۴ \xrightarrow{\text{صدق}} a-۴(۲۶)=۰ \rightarrow a=۱۰۴$$

$$\xrightarrow{a=۱۰۴} ۱۰۴-۴((x+۱)^۲+۱)=۰ \rightarrow ۲۶=(x+۱)^۲+۱ \rightarrow x^۲+۲x-۲۴=۰$$

$$\rightarrow (x+۶)(x-۴)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=-۶=b \\ x=۴ \end{cases} \rightarrow a+b=۱۰۴-۶=۹۸$$

دامنه ترکیب توابع

روش ۱

دامنه $fog(x)$ به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$D_{fog}=\{\underbrace{x\in D_g}_{۱} \mid \overbrace{g(x)\in D_f}^{۲}\}$$

به همین ترتیب، برای $gof(x)$ داریم:

$$D_{gof}=\{\underbrace{x\in D_f}_{۱} \mid \overbrace{f(x)\in D_g}^{۲}\}$$

باید دو بخش را جداگانه محاسبه و جواب نهایی را اشتراک بگیریم.

دو تابع $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع $(fog)(x)$ برابر است با:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=[۰,+\infty)\cap[۰,+\infty)=[۰,+\infty)$$

دامنه ترکیب توابع	روش ۲	می‌توانیم ضابطه تابع مرکب را به دست آوریم و بعد دامنه آن را حساب کنیم. اما دقت کنید که ضابطه به دست آمده را نباید ساده کنیم.
	توجه	علاوه بر موارد گفته شده، اگر گزینه‌ها به صورت بازه‌ای باشند، می‌توانیم نقاطی از بازه‌ها انتخاب کرده و صدق دهیم.

۱۷. اگر $f(x)=x+\sqrt{x}-\sqrt{8-x}-a$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح a معادله‌ی $fof(x)=x$ دقیقاً دارای یک جواب است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

f تابعی اکیداً صعودی است. از $(fof)(x)=x$ می‌توان نتیجه گرفت $f=f^{-1}$ است. محل برخورد تابع f و f^{-1} را می‌توان از حل معادلهٔ $f(x)=x$ به دست آورد.

$$x+\sqrt{x}-\sqrt{8-x}-a=x\rightarrow\sqrt{x}-\sqrt{8-x}=a$$

$$g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{8-x}\rightarrow D_g=[0,8]\quad (\text{g اکیداً صعودی است.})$$

$$R_g=[g(0),g(8)]=[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]\rightarrow -2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$$

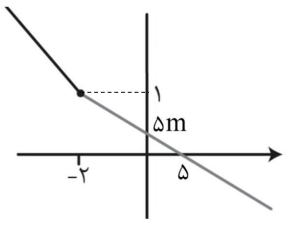
$$a\in\mathbb{Z}\rightarrow a=\{-2,-1,0,1,2\}$$

۱۸. تابع $f(x)=\begin{cases}-x-1 & ; x\le -2\\ 5m-mx & ; x>-2\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر است. اگر f^{-1}، وارون تابع f به ازای بیشترین مقدار m باشد، مقدار $f^{-1}(-1)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۱۲-

پاسخ: گزینه ۱

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، برای وارون‌پذیری تابع f باید $m>0$ باشد و اشتراک بردهای دو ضابطه برابر تهی باشد.



طبق نمودار باید $f(-2)$ ضابطه‌ی بالایی $\le f(-2)$ ضابطه‌ی پایینی باشد:

$$7m\le 1\rightarrow m\le\frac{1}{7}\rightarrow \max(m)=\frac{1}{7}$$

$$f^{-1}(-1)=a\rightarrow f(a)=-1\rightarrow 5m-am=-1\rightarrow\frac{5}{7}-\frac{a}{7}=-1\rightarrow a=12=f^{-1}(-1)$$

وارون تابع	تعریف	اگر جای مولفه های اول و دوم تابع f را در نمایش زوج مرتبی عوض کنیم، وارون تابع را ساخته‌ایم. وارون تابع را با f^{-1} نشان می‌دهیم.
		تابع $f=\{(1,3),(3,-1),(4,2),(0,5)\}$ را در نظر بگیرید. وارون آن برابر است با: $f^{-1}=\{(3,1),(2,3),(-1,4),(5,0)\}$
	وارون‌پذیری	وارون تابع ممکن است تابع باشد یا نباشد. اگر f تابعی یک به یک باشد، f^{-1} تابع است.
	دامنه و برد تابع وارون	دامنه تابع f برابر با برد تابع وارون یعنی f^{-1} است و برد f برابر دامنه f^{-1} است. $D_{f^{-1}}=R_f$ و $D_f=R_{f^{-1}}$
		تابع $f=\{(1,3),(-1,4),(4,0)\}$ و وارون آن یعنی $f^{-1}=\{(3,1),(4,-1),(0,4)\}$ را در نظر بگیرید، داریم: $D_f=R_{f^{-1}}=\{1,-1,4\}$ $D_{f^{-1}}=R_f=\{3,4,0\}$

وارون تابع	ترکیب تابع با وارونش	اگر تابع f وارون پذیر باشد، ضابطه ترکیب توابع f و f^{-1} همواره برابر تابع همانی $(y=x)$ است. $(f^{-1}of)(x)=x \quad D=D_f$ $(fof^{-1})(x)=x \quad D=D_{f^{-1}}$ با توجه به تفاوت دامنه دو تابع بالا، درحالت کلی $fof^{-1}(x)$ و $f^{-1}of(x)$ باهم مساوی نیستند؛ مگر داشته باشیم: $D_f=R_f$
	نتیجه	اگر $gof(x)=x$ و $fog(x)=x$ باشد، آنگاه $g(x)$ و $f(x)$ وارون یکدیگر اند.

۱۹. تابع $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-2x+1}$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه وارون آن، در این بازه کدام است؟

۱) $\frac{x+1}{2}\ ;\ x\geq 1$ ۲) $\frac{x-1}{2}\ ;\ -3\leq x\leq 3$ ۳) $2x+1\ ;\ x\geq 1$ ۴) $2x+1\ ;\ -3\leq x\leq 3$

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(x-1)^2}=|x+2|-|x-1| \rightarrow f(x)=\begin{cases}-3 & x<-2\\ 2x+1 & -2\leq x\leq 1\\ 3 & x>1\end{cases}$$

تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[-2,1]$ اکیداً صعودی و وارون‌پذیر است.

$$f(x)=2x+1 \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

$$D_f=[-2,1] \rightarrow R_f=D_{f^{-1}}=[f(-2),f(1)]=[-3,3]$$

۲۰. اگر $f(x)=2^{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $g(x)=(fof^{-1})(x)+(f^{-1}of)(x)$ کدام است؟

۱) $2x\ ;\ x>0$ ۲) $2^x\ ;\ x\in\mathbb{R}$ ۳) $2x\ ;\ x\in\mathbb{R}$ ۴) $2^x\ ;\ x>0$

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x)=2^{x-1} \rightarrow \begin{cases}D_f=\mathbb{R}\\ R_f=(0,+\infty)\end{cases}$$

$$\begin{matrix}D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f=(0,+\infty)\\ D_{f^{-1}of}=D_f=\mathbb{R}\end{matrix} \rightarrow D_g=(0,+\infty)\cap\mathbb{R}=(0,+\infty)$$

$$\begin{cases}(fof^{-1})(x)=x\\ (f^{-1}of)(x)=x\end{cases} \rightarrow g(x)=x+x=2x \quad ,x>0$$

آزمون‌های ماراتون

حسابان دوازدهم | ۱۵ آبان‌ماه ۱۴۰۴

۱. باقی‌ماندهٔ تابع چند جمله‌ای $P(x)=x^{3}+x^{\frac{2n+3}{n}}-2x^{n-2}+1+n$ بر $2x-1$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{13}$ ۲) $\frac{13}{2}$ ۳) $\frac{13}{4}$ ۴) $\frac{17}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

سرنخ توان x توی چند جمله‌ای‌ها همیشه باید عددی حسابی باشد، با این نکته تلاش کنید n رو بدست بیارید.

پله اول: طبق تعریف توابع چند جمله‌ای، در چند جمله‌ای $f(x)=ax^{n}+bx^{n-1}+\cdots+d$ ، توان متغیر x عددی حسابی است. پس در چند جمله‌ای $P(x)$ داریم:

$$(n-2)\in w \Rightarrow n-2\geq 0 \Rightarrow n\geq 2$$

$$\frac{2n+3}{n}\in w \Rightarrow \left(2+\frac{3}{n}\right)\in w \Rightarrow n=3$$

پله دوم: با $n=3$ تابع $P(x)$ را بازنویسی می کنیم.

$$\Rightarrow P(x)=x^{3}+x^{3}-2x^{1}+1+3 \Rightarrow P(x)=2x^{3}-2x+4$$

پله سوم: می‌دانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم تابع چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر $f\left(\frac{-b}{a}\right)$ است پس:

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-2\left(\frac{1}{2}\right)+4$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-1+4=\frac{13}{4}$$

درسنامه

۱- در کتاب حسابان دوازدهم خواندیم که توابع به شکل $f(x)=ax^{n}+bx^{n-1}+\ldots+c$ که در آن c,b,a اعدادی حقیقی و n عددی صحیح نامنفی (حسابی) باشد یک تابع چند جمله ای از درجه n می گویند.

۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ است به زبانی ساده‌تر، ریشهٔ مقسوم‌علیه را به‌دست آورده و سپس در مقسوم یعنی $f(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم.

۲. تابع چند جمله‌ای $p(x)$ را در نظر بگیرید. اگر $p(x^{2})=(a-2)x^{3}+bx^{2}+(b+3)x+a-b$ باشد، باقی ماندهٔ تقسیم $p(x^{3}-a)$ بر $x+b$ کدام است؟

۱) -۵۳ ۲) -۷۰ ۳) -۸۴ ۴) -۱۱۰

پاسخ: گزینه ۲

چون $p(x)$ چند جمله‌ای است، پس توان همهٔ xهای آن عدد حسابی است. پس در تابع $p(x^{2})$ توان همهٔ xها عدد طبیعی زوج خواهد بود. پس ضریب x^{3} و ضریب x در تابع $p(x^{2})$ باید برابر صفر باشند:

$$\begin{matrix} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ b+3=0 \Rightarrow b=-3 \end{matrix} \Rightarrow p(x^{2})=-3x^{2}+5 \Rightarrow p(x)=-3x+5$$

بنابراین $p(x)=-۳x+۵$ است. حال باید باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۳-۲)$ بر $x-۳$ را تعیین کنیم:

$$p(x^۳-۲)=(x-۳)Q(x)+R \xrightarrow{x=۳} R=p(۲۵)$$

$$p(۲۵)=-۳(۲۵)+۵=-۷۰ \Rightarrow R=p(۲۵)=-۷۰$$

۳. حاصل ضرب دوره تناوب و بیشترین مقدار تابع $f(x)$ کدام است؟

$$f(x)=\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)+\sin(x-۵\pi)+۷\sin(۱۰\pi+x)+۶\cos\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)$$

۱) ۱۳π ۲) ۱۵π ۳) ۲۶π ۴) ۳۰π

پاسخ: گزینه ۳

پله اول:

$$\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)=\sin x$$

$$\sin(x-۵\pi)=-\sin(۵\pi-x)=-\sin x$$

$$\sin(۱۰\pi+x)=\sin x$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)=\sin x$$

پله دوم: حال $f(x)$ را می‌توانیم ساده‌تر بنویسیم:

$$f(x)=\cancel{\sin x}-\cancel{\sin x}+۷\sin x+۶\sin x \Rightarrow f(x)=۱۳\sin x \Rightarrow \max(f)=۱۳\times ۱=۱۳$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۱}=۲\pi \Rightarrow T\times\max(f)=۲\pi\times ۱۳=۲۶\pi$$

۴. اگر $f(x)=-۲\cos^۲(۳x-\frac{\pi}{۲})$ باشد، آن‌گاه دوره‌ی تناوب تابع $g(x)=|f(\frac{x}{۶})-۶|$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) ۲π ۴) ۶π

پاسخ: گزینه ۳

$$\cos(۳x-\frac{\pi}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲}-۳x)=\sin ۳x$$

$$f(x)=-۲\cos^۲(۳x-\frac{\pi}{۲})=-۲\sin^۲ ۳x$$

$$f(\frac{x}{۶})=-۲\sin^۲(\frac{x}{۲}) \rightarrow g(x)=|-۲\sin^۲(\frac{x}{۲})-۶|$$

عبارت داخل قدرمطلق همواره منفی است پس قرینه این عبارت از قدرمطلق خارج می‌شود.

$$g(x)=۲\sin^۲(\frac{x}{۲})+۶=۱-\cos x+۶=۷-\cos x$$

انتقال‌های افقی و عمودی تأثیری روی دوره تناوب ندارند، بنابراین دوره‌ی تناوب تابع $g(x)$ برابر است با: $T=۲\pi$

۵. دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}}$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

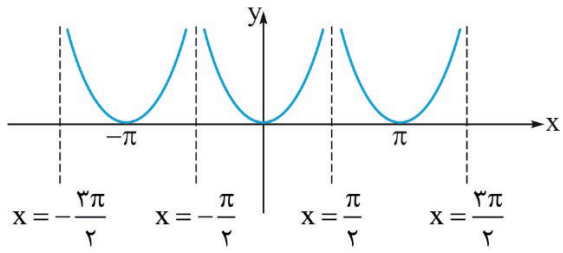
۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۲π

پاسخ: گزینه ۳

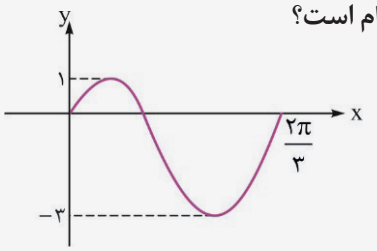
سرنخ با استفاده از روابط $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ و $1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$، عبارت‌ها را ساده کنید.

تک پله: با توجه به رابطهٔ طلایی می‌دانیم $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ و $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$ است، پس:

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}=\sqrt{\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}}=\sqrt{\tan^2 x}=|\tan x|\to t=\pi$$



۶. شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos\left(bx-\frac{\pi}{3}\right)+d$ است. حاصل $f\left(\frac{\pi}{9}\right)$ کدام است؟



۱) -2

۲) -1

۳) ۱

۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

پله اول:

$$f(x)=a\cos\left(bx-\frac{\pi}{3}\right)+d\Rightarrow f(x)=a\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{3}-bx\right)}_{\alpha}+d$$

اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\sin\beta$

$$\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{3}-bx\right)=\sin\overbrace{\left(bx+\frac{\pi}{6}\right)}^{\beta}$$

چون نمودار تابع در آغاز حرکت در $x=0$ صعودی است، پس $ab>0$ می‌باشد:

$$d=\frac{\max+\min}{2}=\frac{1+(-3)}{2}=-1$$

$$|a|=\frac{\max-\min}{2}=\frac{1-(-3)}{2}=2$$

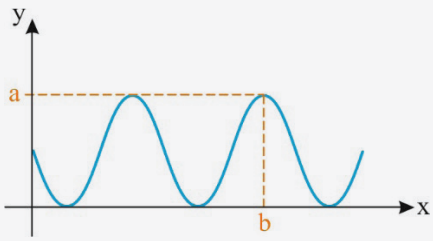
$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow|b|=3$$

حالا با فرض $a=2$ و $b=3$ تابع به صورت $f(x)=2\sin(3x+\frac{\pi}{6})-1$ است و داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{9}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{9}+\frac{\pi}{6}\right)-1\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{9}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-1=2-1=1$$

در ضمن توجه کنید که به ازای $a=-2$ و $b=-3$ تابع به صورت $f(x)=-2\sin(-3x+\frac{\pi}{6})-1$ خواهد بود و $f(\frac{\pi}{9})=0$ است که در گزینه‌ها موجود نیست.

۷. اگر $f(x)=۲-x^۲$ و $g(x)=\sin \pi x+\cos \pi x$ باشد و بخشی از نمودار تابع fog به صورت مقابل باشد، مقدار ab کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۴}$

۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۷}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۷}$

پاسخ: گزینه ۳

سرنخ تابع fog رو تشکیل بدید همون اول کار. مینیمم fog برابر با صفرو ماکزیمم اون هم a شده ...

پله اول: ابتدا تابع $fog(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=۲-\big(\sin \pi x+\cos \pi x\big)^۲=۲-\Big(\sin^۲ \pi x+\cos^۲ \pi x+۲\sin \pi x \cos \pi x\Big)=$$

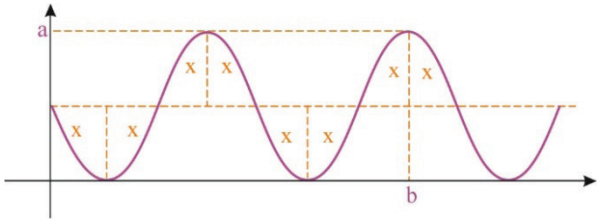
$$۲-\big(۱+\sin ۲\pi x\big)=۲-۱-\sin ۲\pi x \Rightarrow f\big(g(x)\big)=۱-\sin ۲\pi x$$

پله دوم: می‌دانیم در تابع مثلثاتی $y=a\sin bx+C$ بیشترین مقدار تابع از رابطهٔ $|a|+C$ به‌دست می‌آید.

$$f\big(g(x)\big)=۱-\sin ۲\pi x \Rightarrow \max=|-۱|+۱=۲$$

از طرفی با توجه به شکل، ماکزیمم تابع a است پس $a=۲$.

پله‌ی سوم: در ضمن مطابق شکل $b=\frac{۷T}{۴}$ است و داریم:



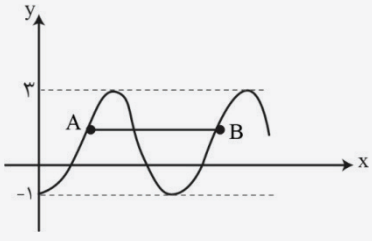
$$f(g(x))=۱-\sin ۲\pi x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|۲\pi|}=۱ \Rightarrow b=\frac{۷T}{۴}=\frac{۷\times ۱}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

$$\Rightarrow ab=۲\times \frac{۷}{۴}=\frac{۷}{۲}$$

نکته ۱- حداکثر مقدار تابع $y=a\sin bx+c$ از رابطهٔ مقابل به‌دست می آید $\max(y)=|a|+c$

۲- $\sin ۲\alpha=۲\sin \alpha \cos \alpha$ را فراموش نکنید!

۸. بخشی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+cx)$ به صورت مقابل است. اگر پاره‌خط AB موازی محور xها باشد و طول آن برابر π باشد، مقدار $\frac{b\times c^۲}{a}$ کدام است؟



۱) ۴

۲) -۴

۳) ۸

۴) -۸

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x)=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+cx)=a+b\cos(cx) \rightarrow T=\frac{۲\pi}{|c|}$$

دو نقطه‌ی A و B وضعیت یکسانی دارند و فاصله‌ی این دو نقطه برابر $T=\pi$ است. در ضمن چون نمودار در آغاز حرکت در $x=0$ صعودی است، پس $b<0$ است:

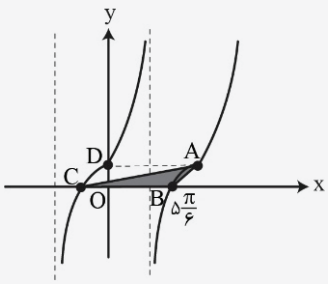
$$AB=T=\pi=\frac{2\pi}{|c|}\rightarrow|c|=2\rightarrow c^2=4$$

$$a=\frac{max+min}{2}=\frac{3+(-1)}{2}=1$$

$$|b|=\frac{max-min}{2}=\frac{3-(-1)}{2}=2\xrightarrow{b<0}b=-2$$

$$\rightarrow\frac{b\times c^2}{a}=\frac{-2\times4}{1}=-8$$

۹. بخشی از نمودار تابع $y=b+a\tan x$ به صورت مقابل است. اگر مساحت مثلث ABC برابر π باشد، مقدار ab کدام است؟



۱) ۲

۲) $2\sqrt{3}$

۳) $4\sqrt{3}$

۴) $8\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۳

دو نقطه‌ی B و C وضعیت یکسانی دارند، پس $BC=T=\pi$ است.

$$x=0\rightarrow y_D=y_A=b$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\times y_A=\pi\rightarrow\frac{T}{2}\times b=\pi\rightarrow\frac{\pi}{2}\times b=\pi\rightarrow b=2$$

$$(\frac{5\pi}{6},0)\rightarrow0=2+a\tan\frac{5\pi}{6}=2+a\tan(\pi-\frac{\pi}{6})$$

$$\rightarrow2-a\tan\frac{\pi}{6}=0\rightarrow2-\frac{a\sqrt{3}}{3}=0\rightarrow a=2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow ab=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

۱۰. اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x^2-(\tan\alpha+\cot\alpha)x+1}{\sin^2\alpha-x^2}>0$ کدام است؟

۱) $(-\sin\alpha,\sin\alpha)\cup(\tan\alpha,\cot\alpha)$

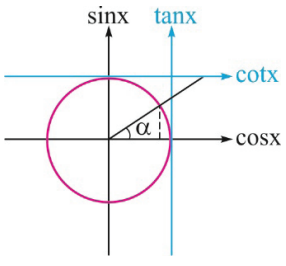
۲) $(-\sin\alpha,\tan\alpha)\cup(\sin\alpha,\cot\alpha)$

۳) $(-\sin\alpha,\cot\alpha)\cup(\tan\alpha,\sin\alpha)$

۴) $(-\sin\alpha,-\tan\alpha)\cup(\sin\alpha,\cot\alpha)$

پاسخ: گزینه ۱

سرنخ با تعیین ریشه‌های صورت و مخرج کسر و تشخیص بزرگ و کوچک بودن ریشه‌ها عبارت‌ها را تعیین علامت کنید.



پله اول: در صورت کسر به جای عدد ۱ می‌نویسم $\tan\alpha.\cot\alpha$ و داریم:

$$P(x)=\frac{x^2-(\tan\alpha+\cot\alpha)x+\tan\alpha\cot\alpha}{\sin^2\alpha-x^2}$$

$$\Rightarrow\frac{(x-\tan\alpha)(x-\cot\alpha)}{(\sin\alpha-x)(\sin\alpha+x)}>0\Rightarrow$$

پله دوم:

x	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
p(x)	− ت.ن +	ت.ن −	○ +	○ −

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت بازهٔ $(-\sin\alpha,\sin\alpha)\cup(\tan\alpha,\cot\alpha)$ است.

نکته وقتی $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ باشد، داریم: $\cot\alpha>\tan\alpha>\sin\alpha$

۱۱. اگر $f(x)=(\frac{m^2-m-6}{3m^2+5m-2})^x$ تابعی نمایی باشد، حدود m شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

در تابع نمایی $y=a^x$ باید $a>0$ و $a\neq1$ باشد:

$$\frac{m^2-m-6}{3m^2+5m-2}>0\rightarrow\frac{(m-3)(m+2)}{(3m-1)(m+2)}>0$$

	-2	$\frac{1}{3}$	3
m^2-m-6	+ ○	−	− ○ +
$3m^2+5m-2$	+ ○	− ○	+ +
کل	+ ت.ن	+ ت.ن	− ○ +

جواب: $(-\infty,\frac{1}{3})\cup(3,+\infty)-\{-2\}$

از طرفی باید $\frac{m^2-m-6}{3m^2+5m-2}\neq1$ باشد:

$$m^2-m-6\neq3m^2+5m-2\rightarrow2m^2+6m+4\neq0$$

$$\rightarrow m\neq-1,-2$$

بنابراین حدود m به صورت $(-\infty,\frac{1}{3})\cup(3,+\infty)-\{-2,-1\}$ است که شامل سه عدد طبیعی $\{1,2,3\}$ نیست.

۱۲. اگر مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(\sqrt{2}-1)^{2x^2}>(5\sqrt{2}+7)^{3-3x}$، بازه‌ی (a,b) باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا ملاحظه می‌کنیم که:

$$(\sqrt{2}+1)^3=5\sqrt{2}+7$$

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}+1)^{-1}$$

بنابراین داریم:

$$(\sqrt{2}-1)^{2x^2}>(5\sqrt{2}+7)^{3-3x}\Rightarrow(\sqrt{2}+1)^{-2x^2}>(\sqrt{2}+1)^{9-9x}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2}+1>1}-2x^2>9-9x\Rightarrow2x^2-9x+9<0\Rightarrow(x-3)(2x-3)<0$$

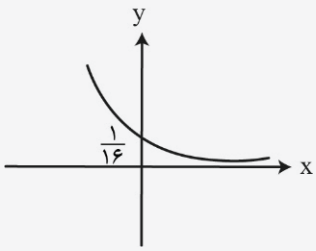
$$\Rightarrow\frac{3}{2}<x<3$$

در نتیجه:

$$b-a=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

SanjeshCloud

۱۳. توابع $f(x)=(۴a^۲-۱)x^۲+(۱-۲a)x+b$ و $g(x)=(a+۱)^x$ مفروض است. اگر نمودار تابع نمایی $gof(x)$ به صورت زیر باشد، مقدار $f(ab)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا ضابطه‌ی تابع $gof(x)$ را به دست می‌آوریم: $gof(x)=(a+۱)^{(۴a^۲-۱)x^۲+(۱-۲a)x+b}$

طبق نمودار تابع نمایی داده شده، ضریب $x^۲$ در توان باید صفر باشد: $۴a^۲-۱=۰ \Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}$

اگر $a=\frac{۱}{۲}$ باشد، ضریب x نیز صفر شده و تابع ثابت خواهد بود. در نتیجه $a=-\frac{۱}{۲}$ قابل‌قبول است. بنابراین:

$$(gof)(x)=(-\frac{۱}{۲}+۱)^{۲x+b} \xrightarrow{\text{نقطه}(۰,\frac{۱}{۱۶})} \frac{۱}{۱۶}=(\frac{۱}{۲})^b \Rightarrow b=۴$$

حال $f(ab)$ را به دست می‌آوریم: $f(x)=(\frac{۱}{۲})^{۲x+۴}$

$$f(ab)=f(-۲)=(\frac{۱}{۲})^{-۴+۴}=(\frac{۱}{۲})^۰=۱$$

۱۴. اگر $\log_{۱۸}۵۴=\frac{k+۲}{k+۱}$ باشد، حاصل $\log_۳ ۱۲$ کدام است؟

۱) $k+۱$ ۲) $۲k-۱$ ۳) k ۴) $۲k-۲$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا $\log_{۱۸}۵۴$ را ساده می‌کنیم:

$$\log_{۱۸}۱۸\times۳=\log_{۱۸}۱۸+\log_{۱۸}۳=\frac{k+۲}{k+۱} \to \log_{۱۸}۳=\frac{k+۲}{k+۱}-۱=\frac{۱}{k+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \log_۳ ۱۸=k+۱ \to \log_۳ ۹\times۲=\log_۳ ۹+\log_۳ ۲=k+۱$$

$$\to ۲+\log_۳ ۲=k+۱ \to \log_۳ ۲=k-۱$$

حال $\log_۳ ۱۲$ را ساده کرده و بر حسب $\log_۳ ۲$ می‌نویسیم: $\log_۳ ۱۲=\log_۳ ۳\times۲^۲=\log_۳ ۳+\log_۳ ۲^۲=۱+۲\log_۳ ۲$

$$=۱+۲(k-۱)=۲k-۱$$

۱۵. اگر $\frac{\log_۲ ۳+\log_۵ ۳}{\log_۲ ۳\times\log_۵ ۳}=a$ باشد، حاصل $\frac{۱}{۱+\log_۵ ۶}+\frac{۱}{۱+\log_۲ ۱۵}$ بر حسب a کدام است؟

۱) $\frac{a+۱}{a}$ ۲) $\frac{a}{a+۱}$ ۳) $\frac{۱}{a-۱}$ ۴) $\frac{a-۱}{a}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا عبارت داده شده در صورت سوال را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{\log_2 3+\log_5 3}{\log_2 3\times\log_5 3}=a \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} \frac{\log_2 3}{\log_2 3\times\log_5 3}+\frac{\log_5 3}{\log_2 3\times\log_5 3}=\frac{1}{\log_5 3}+\frac{1}{\log_2 3}$$

با توجه به نکته‌ی $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ داریم:

$$\frac{1}{\log_5 3}+\frac{1}{\log_2 3}=\log_3 5+\log_3 2=\log_3 10=a \rightarrow \log_{10} 3=\frac{1}{a}$$

حال حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم:

$$\frac{1}{1+\log_2 15}+\frac{1}{1+\log_5 6}=\frac{1}{\log_2 2+\log_2 15}+\frac{1}{\log_5 5+\log_5 6}$$

$$=\frac{1}{\log_2 30}+\frac{1}{\log_5 30}=\log_{30} 2+\log_{30} 5=\log_{30} 10$$

$$=\frac{1}{\log_{10} 30}=\frac{1}{\log_{10} 3+\log_{10} 10}=\frac{1}{\frac{1}{a}+1}=\frac{a}{a+1}$$

۱۶. اگر $\log_8 5=a$ و $\log_4 3=b$ باشد، مقدار $\log_{15} 9$ کدام است؟

۱) $\frac{2b}{2b+3a}$ ۲) $\frac{4a}{2a+3b}$ ۳) $\frac{4b}{2b+3a}$ ۴) $\frac{2a}{2a+3b}$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا عبارت‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\log_4 3=b \rightarrow \log_{2^2} 3=b \rightarrow \frac{1}{2}\log_2 3=b \rightarrow \log_2 3=2b\\ \log_8 5=a \rightarrow \log_{2^3} 5=a \rightarrow \frac{1}{3}\log_2 5=a \rightarrow \log_2 5=3a\end{cases}$$

حال با استفاده از تغییر مبنای لگاریتم داریم:

$$\log_{15} 9 \xrightarrow{\text{تغییر مبنا به ۲}} \frac{\log_2 9}{\log_2 15}=\frac{\log_2 3^2}{\log_2 3\times 5}=\frac{2\log_2 3}{\log_2 3+\log_2 5}$$

$$=\frac{2(2b)}{2b+3a}=\frac{4b}{2b+3a}$$

۱۷. اگر $\log_x(3x)\times\log_3 x^3=9$ باشد، حاصل $\log_{(x-3)} 4x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا عبارت‌ها را ساده کرده و x را می‌یابیم:

$$\log_x(3x)\times\log_3 x^3=9 \rightarrow (\log_x 3+1)(3\log_3 x)=9 \Rightarrow (\log_x 3+1)(\log_3 x)=3$$

$$\rightarrow (\log_x 3\times\log_3 x)+\log_3 x=3$$

$$\rightarrow 1+\log_3 x=3 \rightarrow \log_3 x=2$$

$$\rightarrow x=3^2=9$$

با جای‌گذاری $x=9$ داریم:

$$\log_{x-3} 4x=\log_{(9-3)}(4\times 9)=\log_6 36=\log_6 6^2=2$$

۱۸. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_2(6-x)\times\log_2(x-1)>0$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دامنه‌ی لگاریتم‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۶-x>۰ \to x<۶ \\ x-۱>۰ \to x>۱ \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۱<x<۶ \qquad (۱)$$

حاصل‌ضرب دو عبارت زمانی مثبت است که هر دو عبارت مثبت یا هر دو عبارت منفی باشند:

حالت اول:

$$\log_۲(۶-x)\times\log_۲(x-۱)>۰$$

$$\to \begin{cases} \log_۲(۶-x)>۰ \to ۶-x>۲^۰ \to ۶-x>۱ \to x<۵ \\ \log_۲(x-۱)>۰ \to x-۱>۲^۰ \to x-۱>۱ \to x>۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۲<x<۵$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} \log_۲(۶-x)<۰ \to ۶-x<۲^۰ \to ۶-x<۱ \to x>۵ \\ \log_۲(x-۱)<۰ \to x-۱<۲^۰ \to x-۱<۱ \to x<۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} \text{جواب ندارد.}$$

$$۲<x<۵ \qquad (۲)$$

حال از اشتراک (۱) و (۲) داریم:

$(۱,۶)\cap(۲,۵)=(۲,۵) \to$ شامل ۲ عدد صحیح است

۱۹. اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_x|۱-x^۲|$ به صورت $(a,b)\cup(c,+\infty)$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع لگاریتم داریم:

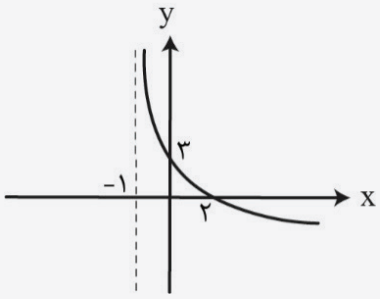
$$y=\log_{g(x)}f(x) \to \text{دامنه:} \begin{cases} f(x)>۰ \\ g(x)>۰ \to \text{اشتراک} \\ g(x)\neq ۱ \end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x)=\log_x|۱-x^۲| \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} |۱-x^۲|>۰ \to x\in\mathbb{R}-\{\pm ۱\} \\ x>۰ \\ x\neq ۱ \end{cases} \xrightarrow{\cap} (۰,+\infty)-\{۱\}=(۰,۱)\cup(۱,+\infty)$$

$$\to \begin{cases} a=۰ \\ b=۱ \to a+b+c=۲ \\ c=۱ \end{cases}$$

۲۰. نمودار تابع $f(x)=\log_a(bx+c)$ به صورت مقابل است. مقدار $\frac{a^۳}{bc}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۹}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ۹

۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

تابع از نقطه‌ی $(۲,۰)$ عبور می‌کند، پس:

$$۱)\ f(۲)=۰ \Rightarrow \log_a(۲b+c)=۰ \Rightarrow ۲b+c=۱$$

در ضمن دامنه‌ی تابع $x>-۱$ است، پس $x=-۱$ ریشه‌ی عبارت جلوی لگاریتم است:

$$۲)\ -b+c=۰ \Rightarrow b=c$$

از (۱) و (۲) مقادیر $b=c=\frac{۱}{۳}$ به دست می‌آید. از طرفی نمودار از نقطه‌ی $(۰,۳)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(۰)=۳ \Rightarrow \log_a \frac{۱}{۳}=۳ \Rightarrow a^۳=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{a^۳}{bc}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}}=۳$$

آزمون‌های ماراتون

حسابان دوازدهم | ۲۹ آبان‌ماه ۱۴۰۴

۱. تعداد جواب‌های معادله‌ی $\sin x - ۲ = \frac{۳}{\sin x}$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ ساده | محاسباتی- معادله مثلثاتی

$$\sin x - ۲ = \frac{۳}{\sin x} \xrightarrow[\sin x \neq ۰]{\times \sin x} \sin^۲ x - ۲\sin x - ۳ = ۰$$

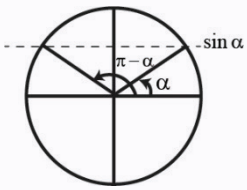
$$\rightarrow (\sin x - ۳)(\sin x + ۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} \sin x = ۳ \quad \text{غ ق ق} \\ \sin x = -۱ \rightarrow x = \frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ دارای یک جواب است.

درسنامه:

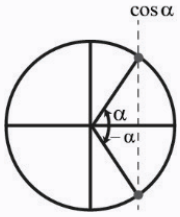
با توجه به دایره مثلثاتی، جواب کلی معادله‌های $\sin x = \sin \alpha$ و $\cos x = \cos \alpha$ به صورت زیر است:

$\sin x = \sin x\alpha$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha & ; \ k \in \mathbb{Z} \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha & ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\cos x = \cos \alpha$



$$\Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

۲. معادله‌ی مثلثاتی $x \sin ۲x - \cos x = ۰$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ دارای چند جواب است؟

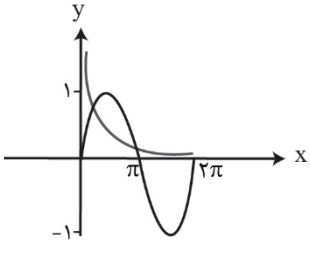
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی، مفهومی-معادله مثلثاتی

می‌دانیم $\sin ۲x = ۲\sin x \cos x$ است. بنابراین:

$$x \sin ۲x - \cos x = ۰ \rightarrow x ۲\sin x \cos x - \cos x = ۰$$

$$\rightarrow \cos x (۲x \sin x - ۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \rightarrow x = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲} \\ ۲x \sin x - ۱ = ۰ \rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲x} \end{cases}$$



با توجه به نمودارهای توابع $y = \sin x, y = \frac{۱}{۲x}$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ مشخص است که معادله‌ی $\sin x = \frac{۱}{۲x}$ در این بازه دارای ۲ جواب است.

بنابراین معادله‌ی $x \sin ۲x - \cos x = ۰$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ دارای ۴ جواب است.

نکته برای به دســـت آوردن جواب‌های $f(x)=g(x)$ یک راهکار این است که نمودار هر دو تابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم و طول نقاط تلاقی را مشخص کنیم. این روش حل معادله را روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامند.
از طریق روش هندسی، می‌توان تعداد، علامت و همچنین مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها را مشخص کرد.

۳. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله‌ی $\sin^۳ x+\cos^۳ x=\cos x$ بر روی دایره‌ی مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

۱) مربع ۲) مستطیل ۳) لوزی ۴) مثلث

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی- معادله مثلثاتی

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=\cos x \Rightarrow (\sin x+\cos x)(\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}-\sin x\cos x)=\cos x$$

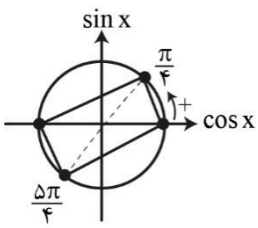
$$\Rightarrow (\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)=\cos x$$

$$\Rightarrow \sin x-\sin^۲ x\cos x+\cancel{\cos x}-\sin x\cos^۲ x=\cancel{\cos x}$$

$$\Rightarrow \sin x(۱-\sin x\cos x-\cos^۲ x)=۰ \Rightarrow \sin x(\sin^۲ x-\sin x\cos x)=۰$$

$$\Rightarrow \sin^۲ x(\sin x-\cos x)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\sin^۲ x=۰ \Rightarrow \sin x=۰ \Rightarrow x=k\pi\\ \sin x-\cos x=۰ \Rightarrow \sin x=\cos x \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

حالا جواب‌های موردنظر را روی دایره‌ی مثلثاتی نمایش می‌دهیم و نقاط پایانی کمان جواب‌ها را به هم وصل می‌کنیم.



$\Rightarrow$ شکل حاصل، مستطیل است

۴. تعداد جواب های معادلهٔ $\log_۲^{\sin x}+\log_۲^{\cos x}+\log_۲^{\cos ۲x}=-\frac{۵}{۲}$ در بازهٔ $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی، ترکیبی -معادله مثلثاتی

پله اول: می‌دانیم $\log_k^a+\log_k^b+\log_k^c=\log_k^{abc}$ است، پس:

$$\log_۲^{\sin x}+\log_۲^{\cos x}+\log_۲^{\cos ۲x}=-\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \log_۲^{\sin x\cos x\cos ۲x}=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow \underbrace{\sin x\cos x}_{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}\cos ۲x=(۲)^{-\frac{۵}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x=\frac{۱}{۴\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{۴}\sin ۴x=\frac{۱}{۴\sqrt{۲}} \Rightarrow \sin ۴x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}$$

پله دوم:

$$\Rightarrow \begin{cases}۴x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۶} \xrightarrow[k=۰]{x\in\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)} x=\frac{\pi}{۱۶}\\ ۴x=۲k\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{۴}\right) \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{۳\pi}{۱۶} \xrightarrow[k=۰]{x\in\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)} x=\frac{۳\pi}{۱۶}\end{cases}$$

پس معادله دارای ۲ جواب است.

SanjeshCloud

نکته چند نکته مهم:

$$\log_a^x + \log_a^y + \log_a^z = \log_a^{xyz}$$

$$\log_a^x = b \to x = a^b$$

$$\sin x = \sin\theta \to \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi + \pi - \theta \end{cases}$$

$$\cos x = \cos x \to x = 2k\pi \pm \theta$$

۵. اگر $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ و $g(x) = 2x$ باشد، معادلهٔ $(fog)(x) - (gof)(x) = \cos^2 x$ در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ سخت | محاسباتی - معادله مثلثاتی

سرنخ با استفاده از اتحاد مزدوج f(x) را ساده کرده و با تشکیل fog و gof معادله را حل کنید.

$$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1}$$

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$(fog)(x) = \cos 4x \text{ و } (gof)(x) = 2\cos 2x$$

$$(fog)(x) - (gof)(x) = \cos^2 x \to \cos 4x - 2\cos 2x = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

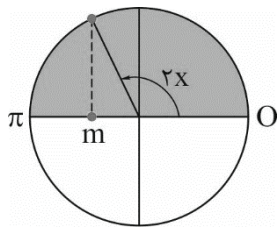
$$2\cos 4x - 4\cos 2x = 1 + \cos 2x$$

$$2(2\cos^2 2x - 1) - 5\cos 2x - 1 = 0$$

$$4\cos^2 2x - 5\cos 2x - 3 = 0 \to \Delta = 25 + 48 = 73$$

$$\cos 2x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{8} \xrightarrow{-1 \le \cos 2x \le 1} \cos 2x = \frac{5 - \sqrt{73}}{8} = m$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \to 0 < 2x < \pi$$



بنابراین معادلهٔ داده شده در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ دارای یک جواب است.

۶. جواب کلی معادلهٔ $\tan(3x + 10^\circ)\cos(x + 60^\circ) = \cos(30^\circ - x)$ کدام است؟

۱) $180^\circ k + 20^\circ$ ۲) $90^\circ k + 25^\circ$

۳) $180^\circ k + 25^\circ$ ۴) $90^\circ k + 20^\circ$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی - معادله مثلثاتی

می‌دانیم $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$، بنابراین:

$$\cos(30^\circ - x) = \sin(90^\circ - (30^\circ - x)) = \sin(x + 60^\circ)$$

$$\tan(3x + 10^\circ)\cos(x + 60^\circ) = \sin(x + 60^\circ)$$

$$\Rightarrow \tan(3x + 10^\circ) = \frac{\sin(x + 60^\circ)}{\cos(x + 60^\circ)} \Rightarrow \tan(3x + 10^\circ) = \tan(x + 60^\circ)$$

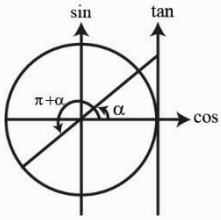
جواب عمومی معادله مثلثاتی به‌دست آمده برابر است با:

$$3x + 10^\circ = k\pi + x + 60^\circ \Rightarrow 2x = k\pi + 50^\circ$$

$$\xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} + 25^\circ = 90^\circ K + 25^\circ$$

درسنامه

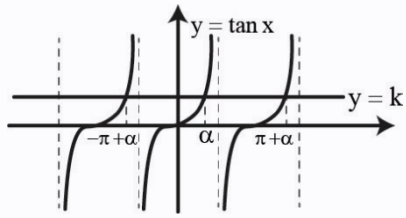
معادلهٔ مثلثاتی $\tan x = \tan \alpha$



با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، جواب کلی معادلهٔ $\tan x = \tan\alpha$ به صورت زیراست:

$$x = k\pi + \pi \,,\, k \in \mathbb{Z}$$

اگر $\tan \alpha = k$ باشد، جواب‌های معادلهٔ $\tan x = \tan \alpha$ همان طول نقاط برخورد نمودار $y = \tan x$ با خط $y = k$ هستند.



نکته در معادلهٔ $\tan x = \pm \cot \alpha$ می‌توانیم کتانژانت را با کمک نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ به تانژانت تبدیل کنیم.

۷. معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{3}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی، مفهومی-معادله مثلثاتی و روابط مجموع کمان‌ها

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{3} \xrightarrow{\div 2} \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}}\sin x - \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\frac{\pi}{6}}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

برای حل معادله مثلثاتی به‌دست آمده داریم:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

نکته برای پیدا کردن حاصل عبارت‌هایی به صورت $a\sin x \pm b\cos x$ می‌توانیم از a فاکتور بگیریم: $a(\sin x \pm \frac{b}{a}\cos x)$

سپس در صورت امکان، به جای $\frac{b}{a}$، تانژانت یک زاویهٔ معروف را قرار دهیم و از رابطهٔ $\sin(x \pm \theta)$ استفاده کنیم.

۸. اگر $\frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} = 2\left(\cos 76^\circ \cos 46^\circ + \sin 76^\circ \sin 46^\circ\right)$ باشد، زاویه x کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{7\pi}{12}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی، مفهومی-معادله مثلثاتی و روابط مجموع کمان‌ها

ابتدا با توجه به $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$، عبارت $\cos ۷۶^\circ\cos ۴۶^\circ+\sin ۷۶^\circ\sin ۴۶^\circ$ را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۷۶^\circ\cos ۴۶^\circ+\sin ۷۶^\circ\sin ۴۶^\circ=\cos(۷۶^\circ-۴۶^\circ)=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{\tan x-۱}{۱+\tan x}$ با $\tan\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$ برابر است:

$$\frac{\tan x-۱}{۱+\tan x}=۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\Rightarrow\tan\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=\sqrt{۳}\Rightarrow\tan\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=\tan\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x-\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲};\quad k\in Z$$

با توجه به گزینه‌ها $x=\frac{۷\pi}{۱۲}$ است.

نکته روابط $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ به صورت زیر است:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

اگر در این روابط به جای β زاویهٔ $-\beta$ جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

۹. یکی از جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۱۲^\circ\cos ۲x+\cos ۱۲^\circ\sin ۲x=\sin ۶^\circ\cos x-\sin x\cos ۶^\circ$ کدام است؟

۱) $(۱۸۰^\circ)k+۶^\circ$ ۲) $(۱۸۰^\circ)k+۴^\circ$ ۳) $(۱۲۰^\circ)k-۲^\circ$ ۴) $(۱۲۰^\circ)k-۸^\circ$

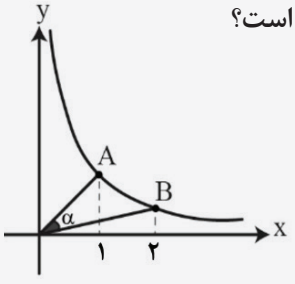
پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی-معادله مثلثاتی و روابط مجموع کمان‌ها

$$\underbrace{\sin ۱۲^\circ\cos ۲x+\cos ۱۲^\circ\sin ۲x}_{\sin(۲x+۱۲^\circ)}=\underbrace{\sin ۶^\circ\cos x-\sin x\cos ۶^\circ}_{\sin(۶^\circ-x)}$$

$$\Rightarrow\sin(۲x+۱۲^\circ)=\sin(۶^\circ-x)\Rightarrow\begin{cases}۲x+۱۲^\circ=(۳۶۰^\circ)k+(۶^\circ-x)\\ ۲x+۱۲^\circ=(۳۶۰^\circ)k+۱۸۰^\circ-(۶^\circ-x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=(۱۲۰^\circ)k-۲^\circ;\quad k\in Z\\ x=(۳۶۰^\circ)k+۱۶۲^\circ;\quad k\in Z\end{cases}$$

۱۰. بخشی از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و نقاط A و B روی آن به‌صورت مقابل است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

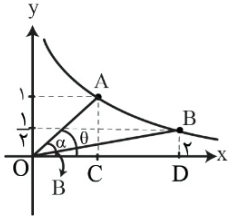


۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ آسان | محاسباتی- تانژانت تفاضل

از آنجایی که $f(۱)=۱, f(۲)=\frac{۱}{۲}$، نمودار مقابل را رسم می‌کنیم:



باتوجه به مثلث OAC داریم:

$$\tan(\theta)=\frac{AC}{OC}=\frac{۱}{۱}=۱\xrightarrow{۰<\theta<\frac{\pi}{۲}}\theta=\frac{\pi}{۴}$$

باتوجه به مثلث OBD داریم:

$$\tan\beta=\frac{DB}{OB}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

باتوجه به اینکه $\alpha=\theta-\beta$ است و چون $\theta=\frac{\pi}{4}$ است می‌توانیم بنویسیم:

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\beta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\beta}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{5}$$

درسنامه

اتحاد $\tan(\alpha\pm\beta)$:

برای محاسبهٔ تانژانت مجموع یا تفاضل دو زاویه، از اتحادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

مثلاً:

$$\tan(x+\frac{\pi}{3})=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\tan x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan x}$$

در رابطهٔ بالا اگر به جای β زاویه $\frac{\pi}{4}$ قرار دهیم، به رابطه‌های پرکاربرد زیر می‌رسیم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\qquad \tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

۱۱. کدام‌یک از نقاط زیر، می‌تواند روی یک دایره‌ی مثلثاتی باشد؟

۱) $(\tan 48^\circ,\sin x)$ ۲) $(-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{6}}{4})$ ۳) $(\cos x,\cot 20^\circ)$ ۴) $(1-\sin\frac{\pi}{2},\sin x)$

پاسخ: گزینه ۴ آسان | مفهومی، محاسباتی- دایره مثلثاتی

می‌دانیم مختصات نقطه‌ی P روی دایره‌ی مثلثاتی به صورت زیر است:

$$P(\cos x,\sin x)\to\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $\tan 48^\circ>1\to\tan^2 48^\circ+\sin^2 x>1$ ✗

۲) $(-\frac{3}{4})^2+(\frac{\sqrt{6}}{4})^2=\frac{9}{16}+\frac{6}{16}=\frac{15}{16}<1$ ✗

۳) $\cot 20^\circ>1\to\cos^2 x+\cot^2 20^\circ>1$ ✗

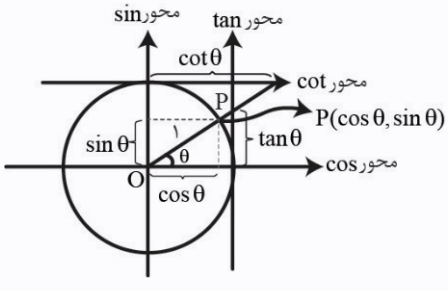
۴) $(1-\sin\frac{\pi}{2})^2+\sin^2 x=1\to 0+\sin^2 x=1\to x=\pm\frac{\pi}{2}$ ✓

پس اگر $x=\pm\frac{\pi}{2}$ باشد این نقطه روی دایره‌ی مثلثاتی قرار می‌گیرد.

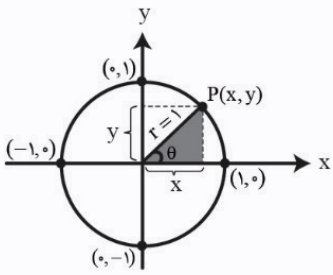
درسنامه

دایره مثلثاتی:

دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد است.



ویژگی نقطه‌های روی دایره‌ی مثلثاتی



۱- با توجه به شکل زیر طول هر نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی، برابر $\cos\theta$ و عرض آن برابر $\sin\theta$ است:

$P(\cos\theta\,,\sin\theta)$

۲- با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث رنگ شده برای هر نقطه $P(x\,,y)$ خواهیم داشت:

$$y^۲+x^۲=۱\Leftrightarrow \sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$$

۱۲. اگر $\cos x\tan x<۰$ و $\sin x\cot x>۰$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\sin(x-\frac{\pi}{۳}).\cos(x+\frac{\pi}{۲})<۰$

۲) $\tan(\frac{x}{۲})\sin(۲x)>۰$

۳) $\cot(x).\cot(\frac{x}{۳})<۰$

۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی- ناحیه کمان در دایره مثلثاتی

$\cos x\tan x<۰\to \cos x.\frac{\sin x}{\cos x}<۰\to \sin x<۰$ ناحیه‌ی ۳ و ۴

$\sin x\cot x>۰\to \sin x.\frac{\cos x}{\sin x}>۰\to \cos x>۰$ ناحیه‌ی ۱ و ۴

$\xrightarrow{\cap}$ ناحیه‌ی ۴

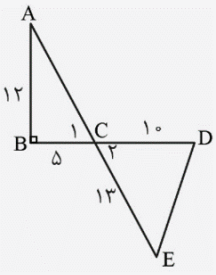
پس $\frac{۳\pi}{۲}<x<۲\pi$ است. حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\frac{۷\pi}{۶}<x-\frac{\pi}{۳}<\frac{۵\pi}{۳}\to\begin{cases}\sin(x-\frac{\pi}{۳})<۰\\ \cos(x+\frac{\pi}{۲})=\overbrace{-\sin x}^{\text{منفی}}>۰\end{cases}\to \sin(x-\frac{\pi}{۳})\cos(x+\frac{\pi}{۲})<۰\quad\checkmark$$

$$\begin{cases}\frac{۳\pi}{۴}<\frac{x}{۲}<\pi\to\tan\frac{x}{۲}<۰\\ ۳\pi<۲x<۴\pi\to\sin ۲x<۰\end{cases}\to\tan\frac{x}{۲}\sin ۲x>۰\quad\checkmark$$

$$\begin{cases}\frac{۳\pi}{۲}<x<۲\pi\to\cot x<۰\\ \frac{\pi}{۲}<\frac{x}{۳}<\frac{۲\pi}{۳}\to\cot\frac{x}{۳}<۰\end{cases}\to\cot x\cot\frac{x}{۳}>۰\quad\times$$

۱۳. با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث DEC کدام است؟



۱) ۳۰

۲) ۶۰

۳) ۵۰

۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۲ آسان | محاسباتی - فرمول مساحت با سینوس زاویه بین

مثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویه به طول وتر $AC=۱۳$ است. در این مثلث $\sin\hat{C}_۱=\frac{۱۲}{۱۳}$ است. از طرفی دو زاویه‌ی $C_۱$ و $C_۲$ متقابل به رأسند و با هم برابرند.

$$S_{DEC}=\frac{۱}{۲}CD\times CE\times\sin C_۲=\frac{۱}{۲}CD\times CE\sin C_۱$$

$$=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times ۱۳\times\frac{۱۲}{۱۳}=۶۰$$

۱۴. اگر $-\frac{\pi}{۳}<x<\frac{\pi}{۱۲}$ و $۱+۴\sin ۲x=m$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

۱) $[-۳,۳)$ ۲) $(۱-۲\sqrt{۳},۳)$ ۳) $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲},۱)$

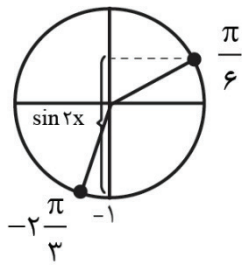
پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی، محاسباتی- معادله مثلثاتی

$$۱+۴\sin ۲x=m\rightarrow \sin ۲x=\frac{m-۱}{۴}$$

$$-\frac{\pi}{۳}<x<\frac{\pi}{۱۲}\rightarrow -\frac{۲\pi}{۳}<۲x<\frac{\pi}{۶}$$

$$\rightarrow -۱\le \sin ۲x<\frac{۱}{۲}\rightarrow -۱\le \frac{m-۱}{۴}<\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times ۴}-۴\le m-۱<۲$$

$$\rightarrow -۳\le m<۳$$



۱۵. اگر $\frac{\tan x}{\frac{۱}{\cos x}-۱}=k$ باشد، حاصل $(\frac{۱}{\cos x}+۱)\cot x$ بر حسب k کدام است؟

۱) $k-۱$ ۲) $\frac{۱}{k}$ ۳) k ۴) $k+۱$

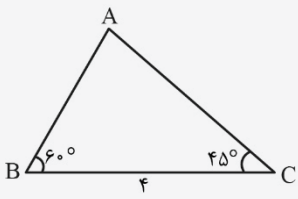
پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی- روابط نسبت‌های مثلثاتی

$$\frac{\tan x}{\frac{۱}{\cos x}-۱}=k\rightarrow \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{۱-\cos x}{\cos x}}=k\rightarrow \frac{\sin x}{۱-\cos x}=k$$

$$(\frac{۱}{\cos x}+۱)\cot x=\frac{۱+\cos x}{\cos x}\times \frac{\cos x}{\sin x}=\frac{۱+\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{(۱+\cos x)(۱-\cos x)}{\sin x(۱-\cos x)}=\frac{۱-\cos^{۲} x}{\sin x(۱-\cos x)}=\frac{\sin^{۲} x}{\sin x(۱-\cos x)}=\frac{\sin x}{۱-\cos x}=k$$

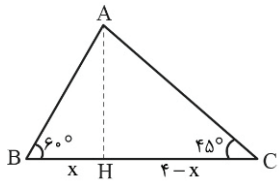
۱۶. در شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $۸(\sqrt{۳}-۱)$
۲) $۸(۳-\sqrt{۳})$
۳) $۴(۳-\sqrt{۳})$
۴) $۴(\sqrt{۳}-۱)$

پاسخ: گزینه ۳ آسان | محاسباتی- مثلثاتی پایه

ارتفاع رأس A را رسم می‌کنیم.



$$\tan ۴۵^{\circ}=\frac{AH}{HC}\rightarrow AH=HC$$

$$\tan ۶۰^{\circ}=\frac{AH}{BH}\rightarrow AH=\sqrt{۳}BH$$

$$\Rightarrow HC=\sqrt{۳}BH\rightarrow ۴-x=\sqrt{۳}x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{۳}+۱)x=۴\rightarrow x=\frac{۴}{\sqrt{۳}+۱}\xrightarrow{AH=HC}AH=۴-\frac{۴}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}$$

$$S_{ABC}=\frac{AH\times BC}{۲}=\frac{\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}\times ۴}{۲}=\frac{۸\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}\times \frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۸\sqrt{۳}(\sqrt{۳}-۱)}{۲}=۴(۳-\sqrt{۳})$$

۱۷. اگر $1+\tan^2 x=5\sin^2 x$ باشد، حاصل $\sin^4 x+\cos^4 x$ کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی- روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

می‌دانیم $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ است، پس:

$$1+\tan^2 x=5\sin^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}=5\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{5} \quad (*)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x \xrightarrow{(*)} 1-2\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=0/6$$

۱۸. حاصل عبارت $\frac{\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ۲) $2+\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ۴) $-(2+\sqrt{2})$

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی- روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

می‌دانیم $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm\sin 2\alpha$ است. بنابراین:

$$A=\frac{\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2=\frac{(\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8})^2}{(\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12})^2}$$

$$\rightarrow A^2=\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{1-\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=2+\sqrt{2}$$

$$\rightarrow A=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

چون $\sin\frac{\pi}{12}<\cos\frac{\pi}{12}$ است، پس در کسر A، صورت کسر عبارتی مثبت و مخرج کسر عبارتی منفی است. بنابراین $A<0$ و $A=-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ می‌باشد.

درسنامه:

نکته برخی روابط مثلثاتی مهم:

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ $\quad$ $\tan\theta\times\cot\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ $\quad$ $1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$

$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ $\quad$ $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ $\quad$ $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

۱۹. اگر $\log_{\sqrt[۳]{۲}}(\cos ۱۵^\circ)+\log_{\sqrt[۳]{۲}}(\sin ۱۵^\circ)=۳m-۱۲$ باشد، مقدار $\log_m(۳^m-۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -۴ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۲ سخت | محاسباتی، ترکیبی- روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

می‌دانیم $\log_c a+\log_c b+\log_c ab$ است. بنابراین:

$$\log_{\sqrt[۳]{۲}}(\cos ۱۵^\circ)+\log_{\sqrt[۳]{۲}}(\sin ۱۵^\circ)=۳m-۱۲$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt[۳]{۲}}\cos ۱۵^\circ \sin ۱۵^\circ=\log_{\sqrt[۳]{۲}}\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ=۳m-۱۲$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt[۳]{۲}}\frac{۱}{۴}=\log_{۲^{\frac{۱}{۳}}}۲^{-۲}=\frac{-۲}{\frac{۱}{۳}}\log_۲ ۲=-۶=۳m-۱۲$$

$$\rightarrow ۳m=۶\rightarrow m=۲$$

حال مقدار $\log_m(۳^m-۱)$ برابر است با:

$$\log_۲(۳^۲-۱)=\log_۲ ۸=\log_۲ ۲^۳=۳$$

۲۰. اگر $\frac{۱-\cos ۲x}{\sin x}+\frac{۱+\cos ۲x}{\cos x}=۱$ باشد، حاصل $\sin ۲x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی - روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

می‌دانیم $۱+\cos ۲x=۲\cos^۲ x$ و $۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x$ است.

بنابراین:

$$\frac{۱-\cos ۲x}{\sin x}+\frac{۱+\cos ۲x}{\cos x}=۱\rightarrow \frac{۲\sin^۲ x}{\sin x}+\frac{۲\cos^۲ x}{\cos x}=۱$$

$$\rightarrow ۲\sin x+۲\cos x=۱\rightarrow \sin x+\cos x=\frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

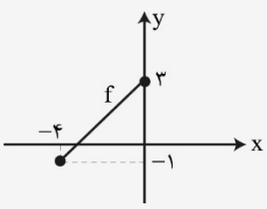
حال طرفین رابطه (۱) را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۱}{۴}\rightarrow ۱+\sin ۲x=\frac{۱}{۴}\rightarrow \sin ۲x=-\frac{۳}{۴}$$

آزمون‌های ماراتون

حسابان دوازدهم | ۱۳ آذرماه ۱۴۰۴

۱. با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل، مساحت محدود به نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ و $y=f(-۲x)$ و محور xها کدام است؟

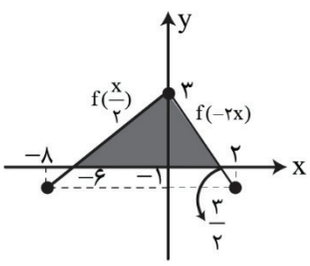


۱) $\frac{۲۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴}$ ۳) $\frac{۴۵}{۲}$ ۴) $\frac{۴۵}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴ ساده | مفهومی - تبدیل توابع

ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x)=x+۳$ است و $x=-۳$ محل تلاقی نمودار f با محور xهاست.

برای رسم نمودار $f(\frac{x}{۲})$ کافی است طول نقاط تابع $f(x)$ را در ۲ ضرب کنیم و برای رسم نمودار $f(-۲x)$ کافی است طول نقاط تابع $f(x)$ را بر -۲ تقسیم کنیم.



ارتفاع مثلث $=۳$

قاعده‌ی مثلث $=\frac{۳}{۲}+۶=\frac{۱۵}{۲}$

مساحت مثلث $=\frac{۱}{۲}\times۳\times\frac{۱۵}{۲}=\frac{۴۵}{۴}$

نکته تبدیل نمودارهای $f(x)$ و $f(ax+b)$ به یک‌دیگر:

برای رسم نمودار تابع $y=f(ax+b)$ با کمک نمودار تابع $y=f(x)$، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- با توجه به علامت b، نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ b واحد در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم.

۲- طول تمام نقاط نمودار را بر a تقسیم می‌کنیم.

۲. با فرض $f(x)=\log_{۲}(۳-x)+\log_{\frac{۱}{۲}}(۲x-۱)$ و $g=\{(-۱,۲),(۱,[a]),(\frac{۷}{۴},۴),(\frac{۷}{۹},۳)\}$ تابع $f+g$ اکیداً نزولی است. محدوده‌ی a کدام است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $[۳,۴)$ ۳) $[۲,۴]$ ۴) $(۲,۴)$

پاسخ: گزینه ۲ ساده | مفهومی - یکنوایی

تابع $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی $(\frac{۱}{۲},۳)$ است، دقت کنید اگرچه مجموع دو تابع اکیداً نزولی، اکیداً نزولی است اما اگر مجموع دو تابع اکیداً نزولی باشد با این‌که $f(x)$ اکیداً نزولی است نمی‌توان به قطعیت اکیداً نزولی بودن g را نتیجه گرفت.

زوج‌مرتب $h(x)=f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$D_{h(x)}=\{۱,\frac{۷}{۴},\frac{۷}{۹}\} \quad , \quad f(x)=\log_{۲}\frac{۳-x}{۲x-۱}$$

$$h=\{(\frac{۷}{۹},۲+۳),(۱,[a]+۱),(\frac{۷}{۴},-۱+۴)\}$$

با توجه به اکیداً نزولی بودن $h(x)$:

$$۵>[a]+۱>۳\rightarrow۳<[a]+۱<۵\Rightarrow۲<[a]<۴\Rightarrow۳\le a<۴$$

تله‌تستی توجه کنید چون $[a]$ مقداری صحیح است، پس از $۲<[a]<۴$ نتیجه می‌گیریم $[a]=۳$ است.

۳. تابع چندجمله‌ای $P(x+۲)=x^۳+۲x^۲+mx-۶$ را در نظر بگیرید. اگر $P(۳-x)$ بر $x-۴$ بخش‌پذیر باشد، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۵ ۳) ۵ ۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲ ساده | محاسباتی - بخش‌پذیری و تقسیم

$p(۳-x)$ بر $x-۴$ بخش‌پذیر است، پس با جای‌گذاری $x=۴$ در $p(۳-x)$ داریم:

$$p(۳-x) \xrightarrow{x=۴} p(۳-۴)=۰ \Rightarrow p(-۱)=۰$$

حالا برای به دست آوردن $p(-۱)$ باید در ضابطهٔ $p(x+۲)$، به جای $x=-۳$ قرار دهیم:

$$p(x+۲)=x^۳+۲x^۲+mx-۶ \xrightarrow{x=-۳} p(-۱)=(-۳)^۳+۲(-۳)^۲-۳m-۶=۰$$

$$\Rightarrow -۲۷+۱۸-۳m-۶=۰ \Rightarrow ۳m=-۱۵ \Rightarrow m=-۵$$

تذکر: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر $f(-\frac{b}{a})$ است.

۴. اگر x زاویه‌ای در ربع اول و $\frac{۲\sin^۲x+\sin x\cos x-\cos^۲x}{۶\sin^۲x-\sin x\cos x-\cos^۲x}=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\sin x\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی - معادله مثلثاتی

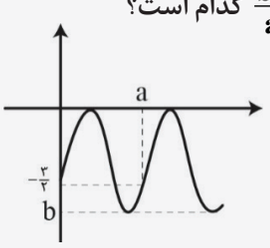
$$\frac{۲\sin^۲x+\sin x\cos x-\cos^۲x}{۶\sin^۲x-\sin x\cos x-\cos^۲x}=\frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow ۴\sin^۲x+۲\sin x\cos x-۲\cos^۲x=۶\sin^۲x-\sin x\cos x-\cos^۲x$$

$$\rightarrow ۲\sin^۲x-۳\sin x\cos x+\cos^۲x=۰ \xrightarrow{\div\cos^۲x} ۲\tan^۲x-۳\tan x+۱=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan x=\frac{۱}{۲} \rightarrow \text{باعث صفر شدن مخرج کسر می‌شود.} \times \\ \tan x=۱ \xrightarrow{x \text{ ربع اول}} x=۴۵^\circ \Rightarrow \sin x\cos x=\sin ۴۵^\circ\cos ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۵. بخشی از نمودار تابع $f(x)=۲\sin^۲(۳x+c)-۲$ به صورت مقابل است. اگر $۰<c<\frac{\pi}{۴}$ باشد، حاصل $\frac{bc}{a}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی، محاسباتی - نمودار توابع مثلثاتی

با استفاده از فرمول $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲x$ ضابطه‌ی صورت سوال را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f=۲\sin^۲(۳x+c)-۲=۲\sin^۲(۳x+c)-۱-۱$$

$$=-(۱-۲\sin^۲(۳x+c))-۱$$

$$=-(\cos(۶x+۲c))-۱=-\cos(۶x+۲c)-۱$$

حالا با توجه به نمودار صورت سوال، واضح است بیشترین مقدار تابع برابر صفر و کم‌ترین مقدار آن -۲ است:

$$Max=|-۱|-۱=۰$$

$$Min=-|-۱|-۱=-۲ \Rightarrow b=-۲$$

از طرفی دورهٔ تناوب برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi}{|۶|} \Rightarrow T=\frac{\pi}{۳} \Rightarrow a=\frac{\pi}{۳}$$

چون $f(۰)=-\frac{۳}{۲}$ است، پس:

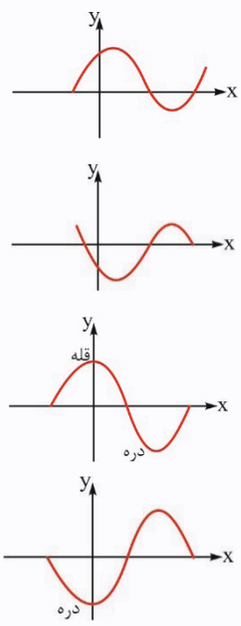
$$-\cos(۰+۲c)-۱=-\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow -\cos(۲c)=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲c=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲c=\frac{\pi}{۳} \Rightarrow c=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \frac{bc}{a}=\frac{-۲(\frac{\pi}{۶})}{\frac{\pi}{۳}}=-۱$$

درسنامه

توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$:



تابع $\min=-|a|+c$ و تابع $\max=|a|+c$

$$|a|=\frac{\max-\min}{۲} \qquad c=\frac{\max+\min}{۲}$$

$$y=a\sin bx+c \rightarrow \begin{cases} ab>۰ & \text{نمودار در } x=۰ \text{ صعودی} \\ ab<۰ & \text{نمودار در } x=۰ \text{ نزولی} \end{cases}$$

$$y=a\cos bx+c \rightarrow \begin{cases} a>۰ & \text{قله روی محور } y\text{ها} \\ a<۰ & \text{دره روی محور } y\text{ها} \end{cases}$$

۶. اگر $f(x)=x^۲+x+۱$ و $g(x)=\cos^۴ x-\sin^۴ x$ باشد، معادله‌ی $(fog)(x)=۳$ در بازه‌ی $[۰,\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی - معادله مثلثاتی

می‌دانیم $g(x)=\cos^۴ x-\sin^۴ x=\cos ۲x$ است. حالا ضابطه‌ی $(fog)(x)$ را پیدا می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$(fog)(x)=۳ \Rightarrow \cos^۲ ۲x+\cos ۲x+۱=۳ \Rightarrow \cos^۲ ۲x+\cos ۲x-۲=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=۰} \begin{cases} \cos ۲x=۱ \Rightarrow ۲x=۲k\pi \Rightarrow x=k\pi \\ \cos ۲x=-۲ \quad \times \end{cases}$$

پس در بازه‌ی $[۰,\pi]$ این معادله دارای ۲ جواب $x=۰$ و $x=\pi$ است.

معادلات مثلثاتی شامل کمان ۲α

در بعضی از معادلات مثلثاتی، علاوه بر $\sin x$ یا $\cos x$، نسبت‌های مثلثاتی دو برابر زاویه یعنی $\sin ۲x$ یا $\cos ۲x$ نیز وجود دارند. در این سوالات باید با استفاده از روابط نصف کمان و به کمک نسبت‌های مثلثاتی مانند $\sin ۲x$ و $\cos ۲x$ و ... معادلهٔ مثلثاتی را ساده کنیم.

اگر معادله، تبدیل به یک معادلهٔ درجهٔ دوم بر حسب یک نسبت مثلثاتی شود، در این صورت باید با استفاده از روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم، جواب معادله رابه دست آوریم.

۷. اگر $f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x-۱}{ax^۲+bx+۲}$ باشد و حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۱$ باشد حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی - حد بینهایت

روش اول:

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{-۲x^۲+۳x-۱}{ax^۲+bx+۲}\right)=\frac{۰}{۰}\to \lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(-۲x+۱)}{(x-۱)(ax+a+b)}$$

$$\begin{cases} ax^۲+bx+۲=۰ \xrightarrow{x=۱} a+b=-۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱}\frac{-۲x+۱}{ax-۲}=\frac{-۱}{a-۲}=۱\to a-۲=-۱\to a=۱\to b=-۳ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-۲x^۲+۳x-۱}{x^۲-۳x+۲}=\frac{-۳}{۰^-}=+\infty$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{-۲x^۲+۳x-۱}{ax^۲+bx+۲}=۱\xrightarrow[\text{HOP}]{\div}\begin{cases} ax^۲+bx+۲=۰\xrightarrow{x=۱} a+b=-۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱}\frac{-۴x+۳}{۲ax+b}=۱\to ۲a+b=-۱ \end{cases}\to a=۱\ ,\ b=-۳$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-۲x^۲+۳x-۱}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-۳}{۰^-}=+\infty$$

درسنامه

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$

۱) اگر $L>۰$ و g در همسایگی محذوف a مثبت باشد، داریم:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L>۰}{۰^+}=+\infty$$

۲) اگر $L>۰$ و g در همسایگی محذوف a منفی باشد، داریم:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L>۰}{۰^-}=-\infty$$

۳) اگر $L<۰$ و g در همسایگی محذوف a مثبت باشد، داریم:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L<۰}{۰^+}=-\infty$$

۴) اگر $L<۰$ و g در همسایگی محذوف a منفی باشد، داریم:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L<۰}{۰^-}=+\infty$$

۸. اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲+a[\frac{-۳}{x}]}{۲x^۲-۷x+۵}=-\infty$ باشد، $[-۶a]$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۴- ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ دشوار | مفهومی، محاسباتی - حد بینهایت

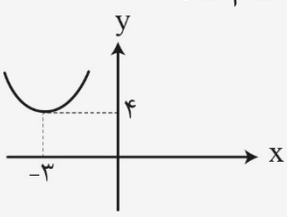
$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲+a[-\frac{۳}{x}]}{(x-۱)(۲x-۵)}=\frac{۲+a(-۳)}{۰^-}=\frac{۲-۳a}{۰^-}=-\infty\to\begin{cases} ۲-۳a>۰ \\ a<\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲+a[-\frac{۳}{x}]}{(x-۱)(۲x-۵)}=\frac{۲+a(-۴)}{۰^+}=\frac{۲-۴a}{۰^+}=-\infty\to\begin{cases} ۲-۴a<۰ \\ a>\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

زیدستاز

اشتراک ۲ جواب: $\frac{۱}{۲}<a<\frac{۲}{۳} \xrightarrow{\times(-۶)} -۳>-۶a>-۴ \rightarrow [-۶a]=-۴$

۹. نمودار سهمی $y=f(x)$ به صورت شکل مقابل است اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۲+۱}{a-f(x+b)}=-\infty$ باشد حاصل $a+b$ کدام است؟



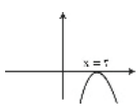
۱) -۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) -۲

۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی، محاسباتی - حد بینهایت

اگر عبارت $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۲+۱}{a-f(x+b)}=-\infty$ همواره برقرار باشد و جواب آن $-\infty$ شود با توجه به صورت که همواره عددی مثبت است مخرج در $x=۲$ باید دارای ریشه‌ی مضاعف باشد. یعنی مخرج در حوالی $x=۲$ به صورت  باشد. پس باید نمودار f را انتقال دهیم.

$$f(x) \xrightarrow{\text{۵ واحد به سمت راست}} f(x-۵) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به x‌ها}} -f(x-۵) \xrightarrow{\text{۴ واحد بالا}} ۴-f(x-۵)$$

$$\begin{cases} a-f(x+b) \\ ۴-f(x-۵) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ b=-۵ \end{cases} \rightarrow a+b=-۱$$

۱۰. اگر $x=۱$ تنها مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{(۲a-۱)x^۳-(a+۳)x}{a^۲x^۲-(a+۲)x+۲a}$ باشد، مقدار $f(۴)$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴ دشوار | مفهومی، محاسباتی- حد بینهایت

چون $x=۱$ مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{(۲a-۱)x^۳-(a+۳)x}{a^۲x^۲-(a+۲)x+۲a}$ است، پس $x=۱$ ریشهٔ مخرج تابع می‌باشد:

$$x=۱: a^۲(۱)-(a+۲)(۱)+۲a=۰ \Rightarrow a^۲+a-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ a=-۲ \end{cases}$$

حالا چون $x=۱$ تنها مجانب قائم تابع می‌باشد، باید چک کنیم که به ازای کدام مقدار a، تابع تنها یک مجانب قائم دارد. بنابراین داریم:

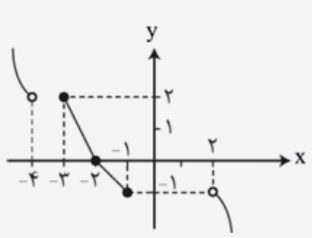
$$a=۱: f(x)=\frac{x^۳-۴x}{x^۲-۳x+۲}=\frac{x(x-۲)(x+۲)}{(x-۱)(x-۲)}=\frac{x^۲+۲x}{x-۱} \Rightarrow \text{تنها مجانب قائم تابع است } x=۱$$

$$a=-۲: f(x)=\frac{-۵x^۳-x}{۴x^۲-۴}=\frac{x(-۵x^۲-۱)}{۴(x-۱)(x+۱)} \Rightarrow \text{مجانب قائم‌های تابع هستند. } x=۱ \text{ , } x=-۱$$

بنابراین $a=۱$ قابل‌قبول است و داریم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۲x}{x-۱} \Rightarrow f(۴)=\frac{۲۴}{۳}=۸$$

۱۱. نمودار تابع $f^{-۱}$ به صورت زیر رسم شده است؛ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{[f(۲x-۱)]+[f(۲-x)]}{[f(x^۲-۱)]}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ دشوار | مفهومی، محاسباتی - حد توابع

پلهٔ اول: ابتدا حد داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[f(2x-1)]+[f(2-x)]}{[f(x^2-1)]}=\frac{\lim\limits_{x\to(-1)^-}[f(x)]+\lim\limits_{x\to 2^+}[f(x)]}{\lim\limits_{x\to(-1)^+}[f(x)]}=\frac{[f((-1)^-)]+[f(2^+)]}{[f((-1)^+)]}$$

پلهٔ دوم:

$$f((-1)^-)=a \Rightarrow f^{-1}(a)=(-1)^- \Rightarrow a=2^+ \Rightarrow [f((-1)^-)]=[2^+]=2$$

$$f(2^+)=b \Rightarrow f^{-1}(b)=2^+ \Rightarrow b=(-4)^- \Rightarrow [f(2^+)]=[(-4)^-]=-5$$

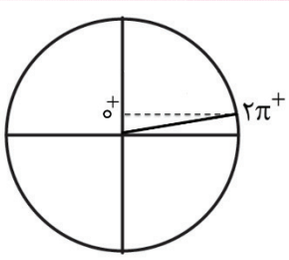
$$f((-1)^+)=c \Rightarrow f^{-1}(c)=(-1)^+ \Rightarrow c=(-1)^- \Rightarrow [f((-1)^+)]=[(-1)^-]=-2$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to(-1)^-}[f(x)]+\lim\limits_{x\to 2^+}[f(x)]}{\lim\limits_{x\to(-1)^+}[f(x)]}=\frac{2+(-5)}{-2}=\frac{3}{2}$$

۱۲. حاصل $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{1-2x}{[\sin\frac{\pi}{2}x]+1}$ کدام است؟

۱) -7 ۲) 7 ۳) $-\infty$ ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی، محاسباتی - حد توابع مثلثاتی



چون به ازای $x=4$ داخل براکت عددی صحیح است پس باید حد راست را به صورت مجزا محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{1-2x}{[\sin\frac{\pi x}{2}]+1}=\frac{-7}{[\sin 2\pi^+]+1}=\frac{-7}{[0^+]+1}=-7$$

درسنامه

برای محاسبهٔ حد توابع جزء صحیح [براکتی] در $x=a$ ابتدا باید جزء صحیح را حذف کنیم و سپس از تابع حد بگیریم. در این مسائل با دو حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱) اگر $x=a$، عبارت داخل براکت را صحیح نکند، مقدار عبارت داخل براکت را به ازای $x=a$ مشخص کرده و براکت را حذف می‌کنیم، سپس حد تابع را محاسبه می‌کنیم.

۲) اگر $x=a$، عبارت داخل براکت را صحیح کند، به‌طور مجزا حد چپ و راست تابع را در $x=a$ به دست آوریم.

برای محاسبهٔ حدهای شامل قدرمطلق و جزء صحیح وقتی $x\to a^+$، از نامساوی $x>a$ استفاده می‌کنیم و منظور این است که x عددی بسیار بسیار نزدیک به a و فقط کمی بزرگ‌تر از آن است. به‌طور مشابه وقتی $x\to a^-$، از نامساوی $x<a$ استفاده می‌کنیم و منظور این است که x عددی بسیار بسیار نزدیک به a و فقط کمی کوچک‌تر از آن است.

۱۳. اگر f یک تابع خطی باشد و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^{-1}(2x)}{x+\sqrt{2x+3}}=\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه مقدار $f(1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی - صفرصفرم

با توجه به این‌که f تابعی خطی است برای به دست آوردن ضابطهٔ $f^{-1}(2x)$ داریم:

$$f(x)=ax+b \to f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a} \to f^{-1}(2x)=\frac{2x-b}{a}$$

با توجه به این‌که مخرج کسر به ازای $x=-1$ برابر صفر است و حاصل حد یک عدد است باید $f^{-1}(2x)$ به ازای $x=-1$ نیز صفر شود پس:

$$f^{-1}(-2)=\frac{-2-b}{a}=0 \to b=-2$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f^{-1}(2x)}{x+\sqrt{2x+3}}=\lim_{x\to -1}\frac{2x+2}{a(x+\sqrt{2x+3})}=\frac{0}{0}$$

حال با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{a(x+\sqrt{2x+3})(x-\sqrt{2x+3})}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{a(x^2-2x-3)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{a(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-\sqrt{2x+3})}{a(x-3)}=\frac{1}{2} \to \frac{2(-2)}{-4a}=\frac{1}{2} \to a=2$$

حال تابع $f(x)$ را با جای‌گذاری a و b تشکیل داده و حاصل $f(1)$ را می‌یابیم.

$$f(x)=ax+b=2x-2 \to f(1)=2-2=0$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+2}{a(x+\sqrt{2x+3})}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to -1}\frac{2}{a(1+\frac{2}{2\sqrt{2x+3}})}=\frac{1}{a}=\frac{1}{2} \to a=2$$

$$\to f(x)=2x-2 \xrightarrow{x=1} f(1)=0$$

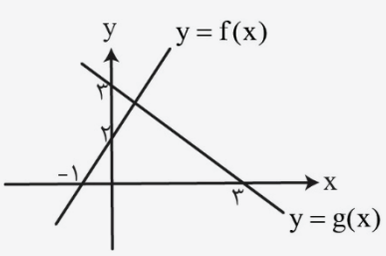
نکته برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر پس از جای‌گذاری $x=a$ به ابهام $\frac{0}{0}$ برسیم، برای رفع ابهام می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم.

طبق این قاعده به جای $\frac{f(x)}{g(x)}$ می‌توانیم از کسر $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وقتی $x\to a$ حد بگیریم، یعنی:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

در محاسبهٔ حد کسرهای شامل رادیکال، اگر عبارت زیر رادیکال صفر شود، نمی‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم؛ در این حدها باید ابتدا رادیکال را از بین ببریم و سپس حد را محاسبه کنیم.

۱۴. نمودار دو تابع f و g به صورت مقابل است. مقدار $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)(x-3)}{(x+2)g(x)}$ کدام است؟



۱) $-1/6$

۲) $-1/4$

۳) $-1/2$

۴) -1

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی، محاسباتی - حد توابع

پلهٔ اول: با توجه به نمودار و این‌که شیب خطوط و عرض از مبدأهای دو خط f و g مشخص است بنابراین ضابطهٔ آن‌ها را می‌نویسیم:

پلهٔ دوم: حاصل حد داده شده را با توجه به ضابطه‌های به دست آمده مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)(x-3)}{(x+2)g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{(2x+2)(x-3)}{\underbrace{(-x+3)}_{-(x-3)}(x+2)}=\frac{2x+2}{-(x+2)}=-\frac{8}{5}=-1/6$$

۱۵. اگر $f(x)=\frac{[۳x^۲]+\sqrt{۲+a|x|}}{۵x^۲-b|-x^۲+۱|}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^+}[\frac{۱}{x-۲}]f(x)=\frac{-۸}{۵}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۲ ۴) −۲

پاسخ: گزینه ۲ دشوار | مفهومی، محاسباتی - حدود توابع

پلهٔ اول:

$$\lim_{x\to ۱^+}[\frac{۱}{x-۲}]f(x)=\frac{-۸}{۵}\to \lim_{x\to ۱^+}-۲f(x)=-\frac{۸}{۵}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}f(x)=\frac{۴}{۵}\to \lim_{x\to ۱^+}\frac{[۳x^۲]+\sqrt{۲+a|x|}}{۵x^۲-b|-x^۲+۱|}=\frac{۳+\sqrt{۲+a}}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

پلهٔ دوم:

$$۳+\sqrt{۲+a}=۴\Rightarrow a=-۱$$

۱۶. حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\log_{\sqrt{x}}\frac{x}{۳}}{۲\log_۳\sqrt{x}-\log_x ۳}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) −۱ ۴) −۲

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی - صفرصفرم

پلهٔ اول: با قرار دادن $x=۳$ درون کسر به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم.

$$=\frac{\log_{\sqrt{۳}}۱}{۲\log_۳\sqrt{۳}-\log_۳ ۳}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

پلهٔ دوم: برای رفع ابهام با توجه به ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\to \lim_{x\to ۳}\frac{\log_{\sqrt{x}}x-\log_{\sqrt{x}}۳}{۲(\frac{۱}{۲})\log_۳ x-\log_x ۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\log_{\sqrt{x}}x-\log_{\sqrt{x}}۳}{\frac{۱}{\log_x ۳}-\log_x ۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{۲\log_x x-۲\log_x ۳}{\frac{۱-(\log_x ۳)^۲}{\log_x ۳}}=\lim_{x\to ۳}\frac{۲(۱-\log_x ۳)}{\frac{(۱-\log_x ۳)(۱+\log_x ۳)}{\log_x ۳}}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{۲\log_x ۳(۱-\log_x ۳)}{(۱-\log_x ۳)(۱+\log_x ۳)}=\lim_{x\to ۳}\frac{۲\log_x ۳}{(۱+\log_x ۳)}=\frac{۲\times ۱}{۱+۱}=۱$$

۱۷. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}+x^۲-۴}{\sqrt[۳]{x^۲-۴}+x^۳-۸}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی - صفرصفرم

پلهٔ اول: با قرار دادن $x=۲$ درون کسر به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}+x^۲-۴}{\sqrt[۳]{x^۲-۴}+x^۳-۸}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

پلهٔ دوم: با تجزیهٔ عبارت‌ها و فاکتورگیری، عامل صفرکننده را از صورت و مخرج کسر حذف می‌کنیم.

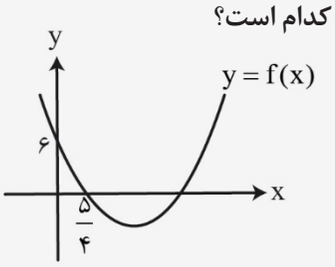
$$\to \lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}+(x-۲)(x+۲)}{\sqrt[۳]{x^۲-۴}+(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}$$

$$\to \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x-2}\left(1+\sqrt[3]{(x-2)^2}\,(x+2)\right)}{\sqrt[3]{x-2}\left(\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}\,(x^2+2x+4)\right)}$$

$$\to \lim_{x\to 2} \frac{\left(1+\sqrt[3]{(x-2)^2}\,(x+2)\right)}{\left(\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}\,(x^2+2x+4)\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

نکته برای رفع ابهام حد $\frac{0}{0}$ می‌توانیم به کمک فاکتورگیری و تجزیه یا گویا کردن عوامل صفرشونده مشترک در صورت و مخرج کسر را از بین ببریم و سپس حاصل حد را به دست آوریم.

۱۸. نمودار تابع درجهٔ دوم f به صورت مقابل است. اگر $\lim_{x\to 1} \frac{f(2x)-f(x)}{x^2-1} = 3$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟



۱) $\frac{4}{9}$

۲) $\frac{18}{35}$

۳) $\frac{15}{41}$

۴) $\frac{19}{70}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی، محاسباتی - صفرصفرم

پلهٔ اول: با توجه به این‌که جواب حد داده شده یک عدد حقیقی است و همچنین مخرج تابع در همسایگی $x=1$ برابر صفر می‌شود پس با یک حد $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم، بنابراین:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(2x)-f(x)}{x^2-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow f(2)-f(1)=0 \Rightarrow f(2)=f(1)$$

پلهٔ دوم: چون $f(2)=f(1)$ است پس نقاط $x=1$ و $x=2$ دو نقطهٔ هم‌عرض هستند از طرفی طول رأس سهمی میانگین هر دو نقطهٔ هم‌عرض است؛ بنابراین:

$$x_s = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

پلهٔ سوم: با توجه به این‌که طول رأس سهمی میانگین طول ۲ ریشه تابع است با توجه به ریشه $x=\frac{5}{4}$ ریشه دیگر یعنی x_2 را می‌یابیم.

$$x_s = \frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{\frac{5}{4}+x_2}{2} \Rightarrow x_2 = 3-\frac{5}{4} = \frac{7}{4}$$

پلهٔ چهارم: با توجه به دو ریشه و نقطه عرض از مبدأ، معادلهٔ سهمی را می‌یابیم:

$$f(x)=a(x-\tfrac{5}{4})(x-\tfrac{7}{4}) \xrightarrow{c(0,6)} 6=a(-\tfrac{5}{4})(-\tfrac{7}{4}) \Rightarrow a=\frac{96}{35}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{96}{35}(x-\tfrac{5}{4})(x-\tfrac{7}{4}) \Rightarrow f(2)=\frac{96}{35}(2-\tfrac{5}{4})(2-\tfrac{7}{4})$$

$$\Rightarrow f(2)=\frac{96}{35}(\tfrac{3}{4})(\tfrac{1}{4})=\frac{18}{35}$$

۱۹. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x\geq a \\ 2x-5 & x<a \end{cases}$، تابعی همواره پیوسته است؟

۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) هیچ مقدار a

پاسخ: گزینه ۱ آسان | محاسباتی - پیوستگی

توابع مربوط به ضابطه‌های داده شده در دامنه‌شان پیوسته هستند، برای این‌که f همواره پیوسته باشد باید پیوستگی f را در $x=a$ بررسی کنیم.

$$f(a)=a^{۲}-۴$$

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x)=\lim_{x\to a^{+}} (x^{۲}-۴)=a^{۲}-۴$$

$$\lim_{x\to a^{-}} f(x)=\lim_{x\to a^{-}} (۲x-۵)=۲a-۵$$

$$\to a^{۲}-۴=۲a-۵\to a^{۲}-۲a+۱=۰\to a=۱$$

تابع f را در نقطهٔ $x=a$ از دامنه‌اش پیوسته می‌گوییم، هرگاه حد این تابع در $x=a$ موجود و برابر $f(a)$ باشد؛ به عبارت دیگر:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

۲۰. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}-b & |[x]|\le ۲ \\ ۳x+۴ & |[x]|>۲ \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۴ ۳) ۱۱ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ دشوار | مفهومی، محاسباتی - پیوستگی

پلهٔ اول: ابتدا حدود دامنه هر ضابطه را مشخص می‌کنیم.

$$|[x]|\le ۲\to -۲\le [x]\le ۲\to -۲\le x<۳$$

$$|[x]|>۲\to \begin{cases} [x]>۲\to x\ge ۳ \\ [x]<-۲\to x<-۲ \end{cases}$$

پلهٔ دوم:

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}-b\to -۲\le x<۳ \\ ۳x+۴\to x<-۲\cup x\ge ۳ \end{cases}$$

توابع $y=ax^{۲}-b$ و $y=۳x+۴$ در دامنهٔ تعریفشان پیوسته هستند پس کافی است پیوستگی نقاط مرزی را بررسی کنیم.

$$\begin{matrix} \lim_{x\to (-۲)^{+}} f(x)=\lim_{x\to (-۲)^{+}} (ax^{۲}-b)=۴a-b \\ \lim_{x\to (-۲)^{-}} f(x)=\lim_{x\to (-۲)^{-}} (۳x+۴)=-۲ \end{matrix} \to ۴a-b=-۲$$

$$\begin{matrix} \lim_{x\to ۳^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۳^{+}} (۳x+۴)=۱۳ \\ \lim_{x\to ۳^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۳^{-}} (ax^{۲}-b)=۹a-b \end{matrix} \to ۹a-b=۱۳$$

پلهٔ سوم:

$$\to \begin{cases} ۴a-b=-۲ \\ ۹a-b=۱۳ \end{cases} \to \begin{cases} a=۳ \\ b=۱۴ \end{cases} \to b-a=۱۱$$

۱۷ مهرماه
حسابان ۲

۱- کدام تابع زیر از انبساط افقی و انبساط عمودی تابع غیرثابت $y=\frac{۳}{۲}f(\frac{۲}{۳}x)$ به‌دست آمده است؟

۱) $\frac{۱}{۳}f(\frac{۱}{۳}x)$ ۲) $\frac{۱}{۳}f(۳x)$ ۳) $۳f(\frac{۱}{۳}x)$ ۴) $۳f(۳x)$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰)

روش اول

اگر به جای x، ax قرار دهیم به‌طوری‌که $۰<a<۱$ باشد، آن‌گاه انبساط افقی داریم.

اگر به جای $f(x)$، $bf(x)$ قرار دهیم به‌طوری‌که $b>۱$ باشد، آن‌گاه انبساط عمودی داریم:

$$y=\frac{۳}{۲}f(\frac{۲}{۳}x)\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}bf(\frac{۲}{۳}ax)$$

$$۰<a<۱\Rightarrow ۰<\frac{۲a}{۳}<\frac{۲}{۳}$$

فقط در گزینه‌های ۱ و ۳، ضریب x کمتر از $\frac{۲}{۳}$ است.

$$b>۱\Rightarrow \frac{۳}{۲}b>\frac{۳}{۲}$$

فقط گزینه‌های ۳ و ۴ ضریب پشت f از $\frac{۳}{۲}$ بزرگ‌تر است.

پس گزینهٔ ۳ صحیح است.

روش دوم

راه دیگر رسیدن به جواب این است که ببینیم برای رسیدن به هر گزینه، ضریب در چه عددی ضرب شده و بعد با توجه به محدودهٔ قابل قبول برای انبساط افقی و عمودی اقدام به حذف گزینه کنیم. می‌دانیم که اگر $b>۱$ باشد، $bf(x)$ در راستای عمودی منبسط می‌شود.

ضریب f در سؤال $\frac{۳}{۲}$ است و در گزینه‌ها $\frac{۱}{۳}$ یا ۳. با توجه به این‌که:

$\frac{۳}{۲}\times\frac{۲}{۹}=\frac{۱}{۳}$ ($\frac{۲}{۹}<۱$)

و

$\frac{۳}{۲}\times ۲=۳$ ($۲>۱$)

پس برای انبساط عمودی از بین ضرب کردن در $\frac{۲}{۹}$ یا ۲، فقط ضرب کردن در ۲ قابل قبول است. پس جواب بین گزینه‌های ۳ و ۴ است.

از طرفی می‌دانیم که اگر $۰<a<۱$ باشد، با ضرب کردن x در a، نمودار در راستای افقی منبسط می‌شود. ضریب x در سؤال $\frac{۲}{۳}$ است و در گزینه‌های باقی مانده $\frac{۱}{۳}$ و ۳. با توجه به این‌که:

$$\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}\quad\left(\frac{۱}{۲}<۱\right)\qquad\text{و}\qquad \frac{۲}{۳}\times\frac{۹}{۲}=۳\quad\left(\frac{۹}{۲}>۱\right)$$

پس برای انبساط افقی از بین ضرب کردن در $\frac{۹}{۲}$ یا $\frac{۱}{۲}$، فقط ضرب کردن در $\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است. پس گزینهٔ ۴ هم حذف می‌شود و فقط گزینهٔ ۳ هم انبساط افقی دارد و هم انبساط عمودی.

۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ را نسبت به محور yها قرینه کرده و سپس ۳ واحد به راست و k واحد به پایین انتقال می‌دهیم. تابع g به‌دست می‌آید. به‌ازای کدام مقدار k، نمودار توابع f و g در نقطه‌ای به عرض ۱− متقاطع‌اند؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۶)

به محاسبهٔ تابع g می‌پردازیم:

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}}y=f(-x)\xrightarrow[x\to x-۳]{\text{۳ واحد به راست}}y=f\big(-(x-۳)\big)\xrightarrow[-k]{\text{k واحد به پایین}}y=f(-x+۳)-k=g(x)$$

$$\Rightarrow g(x)=f(-x+۳)-k$$

در تابع $f(x)$، اگر $y=-۱$ باشد، آن‌گاه:

$$\frac{۲x-۱}{x+۱}=-۱\Rightarrow ۲x-۱=-x-۱\Rightarrow x=۰$$

پس طول نقطهٔ برخورد توابع f و g برابر $x=۰$ می‌باشد و داریم:

$$f(۰)=g(۰)\Rightarrow f(۰)=f(۳)-k\Rightarrow -۱=\frac{۵}{۴}-k\Rightarrow k=\frac{۹}{۴}$$

۳- اگر طول نقاط نمودار تابع $y=f(-x+۱)$ را نصف کرده و سپس نمودار به‌دست آمده را سه واحد به سمت راست انتقال دهیم تابع $g(x)$ به‌دست می‌آید. اگر عرض نقاط تابع $g(x)$ را دو برابر کنیم سپس نسبت به مبدأ قرینه کنیم، کدام تابع زیر به‌دست می‌آید؟

۱) $-\frac{۱}{۲}f(۲x+۷)$ ۲) $-\frac{۱}{۲}f(۲x-۲)$ ۳) $-۲f(۲x-۲)$ ۴) $-۲f(۲x+۷)$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰)

اگر به‌جای x، ۲x قرار دهیم طول نقاط نصف می‌شود.

$$y=f(-(۲x)+۱)$$

اگر به‌جای x، $x-۳$ قرار دهیم، نمودار ۳ واحد به سمت راست منتقل می‌شود.

$$y=f(-۲(x-۳)+۱)=f(-۲x+۷)=g(x)$$

اگر ضابطه را در ۲ ضرب کنیم عرض نقاط دو برابر می‌شود.

$$y=۲f(-۲x+۷)$$

و اگر به‌جای x، $-x$ قرار دهیم و کل ضابطه را در ۱− ضرب کنیم نمودار نسبت به مبدأ قرینه می‌شود.

$$y=-۲f(۲x+۷)$$

۴- نمودار تابع $f(x)=۲x^۲-۸x$ را نسبت به خط $x=-۲$ قرینه کرده و سپس سه واحد به چپ انتقال می‌دهیم. نمودار به‌دست آمده و نمودار f نسبت به کدام خط زیر تقارن دارند؟

۱) $x=-\frac{۵}{۲}$ ۲) $x=-\frac{۷}{۲}$ ۳) $x=-۲$ ۴) $x=-۳$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷)

روش اول

برای یافتن قرینه نسبت به $x=a$ کافی است به‌جای x، $۲a-x$ را قرار دهیم.

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to -۴-x]{\text{قرینه نسبت به } x=-۲}y=f(-۴-x)\xrightarrow[x\to x+۳]{\text{۳ واحد به چپ}}y=f(-۴-(x+۳))=f(-x-۷)$$

$$\Rightarrow f(-x-۷)=۲(-x-۷)^۲-۸(-x-۷)=۲x^۲+۳۶x+۱۵۴$$

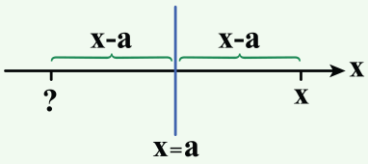
طول رأس سهمی f، $x=۲$ و طول رأس سهمی نمودار نهایی، $x=-۹$ است. این دو رأس نسبت به خط وسط یعنی $x=\frac{۲-۹}{۲}=-\frac{۷}{۲}$ تقارن دارند.

روش دوم

رأس f برابر $x=۲$ است. نسبت به $x=-۲$ قرینه کنیم رأس جدید، $x=-۶$ است. ۳ واحد به چپ ببریم رأس جدید، $x=-۹$ است.

ادامهٔ راه حل مشابه روش اول است.

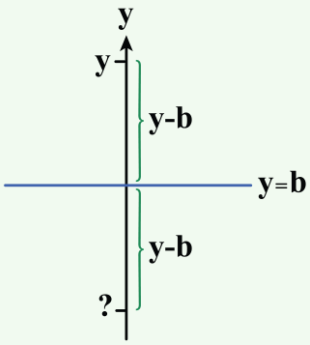
قرینهٔ نمودار نسبت به خطی افقی



برای یافتن قرینهٔ نمودار نسبت به $x=a$ کافی است به‌جای x، $۲a-x$ را قرار دهیم. (می‌دونی چرا؟ چون اولاً عرض نقاط تغییری نمی‌کنه و دوماً کافیه اندازهٔ فاصلهٔ هر نقطه تا خط $x=a$ رو به‌دست بیاریم و همون قدر در جهت مخالف حرکت کنیم تا به تبدیل‌یافتهٔ نقطه برسیم.)

$$?=a-(x-a)=۲a-x$$

قرینهٔ نمودار نسبت به خطی عمودی



برای یافتن قرینهٔ نمودار نسبت به $y=b$ کافی است به‌جای y، $۲b-y$ را قرار دهیم. (می‌دونی چرا؟ چون اولاً طول نقاط تغییری نمی‌کنه و دوماً کافیه اندازهٔ فاصلهٔ هر نقطه تا خط $y=b$ رو به‌دست بیاریم و همون قدر در جهت مخالف حرکت کنیم تا به تبدیل‌یافتهٔ نقطه برسیم.)

$$?=b-(y-b)=۲b-y$$

۵- سهمی f به معادلهٔ $f(x)=۲x^۲-۱۲x+۳$ مفروض است. مجموع مختصات نقطهٔ متناظر با رأس سهمی f روی نمودار تابع $y=۱-۲f(\frac{x-۲}{۳})$ کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۳۶ ۳) ۳۵ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹)

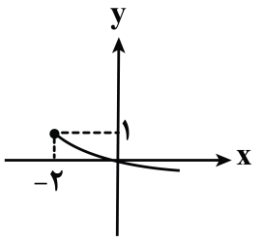
رأس سهمی f طبق رابطهٔ $S(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$ نقطهٔ $(۳,-۱۵)$ است، یعنی $f(۳)=-۱۵$ می‌باشد، بنابراین:

$$y=۱-۲f(\frac{x-۲}{۳})\Rightarrow f(\frac{x-۲}{۳})=\frac{۱-y}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-۲}{۳}=۳\Rightarrow x=۱۱\\ \frac{۱-y}{۲}=-۱۵\Rightarrow y=۳۱\end{cases}$$

پس $S'(۱۱,۳۱)$ مختصات رأس جدید است که مجموع طول و عرض آن برابر ۴۲ است.

طراز

۶- نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. با کدام شرط زیر، نمودار تابع $y=a-f(\frac{۲a-x}{۳})$ هر دو محور مختصات را قطع می‌کند؟

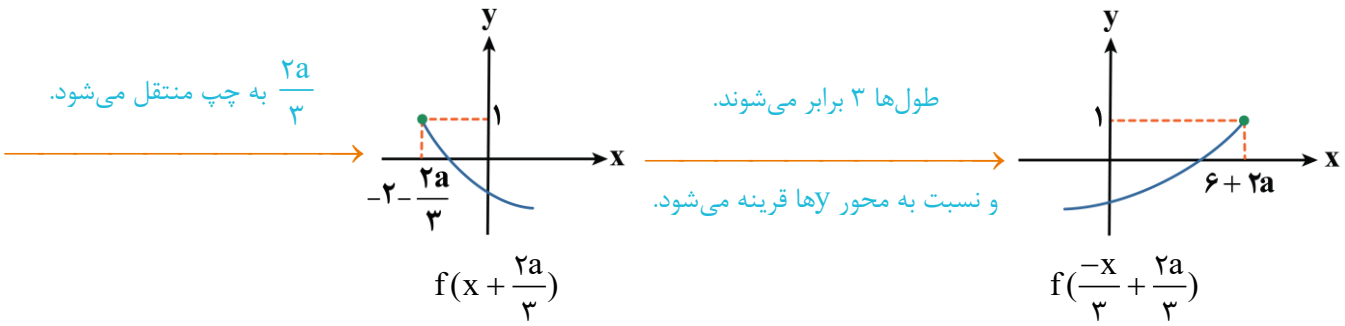


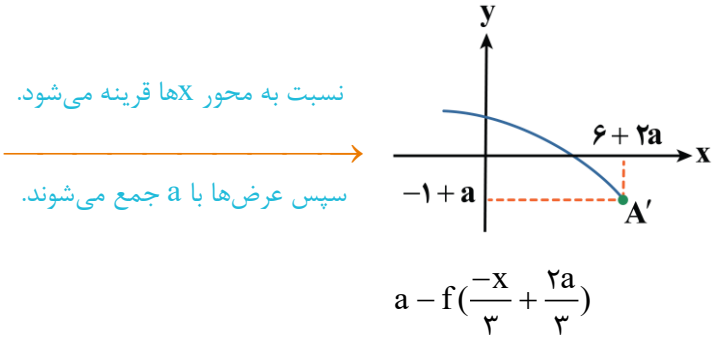
۱) $-۱<a<۳$
۲) $-۲<a<۴$
۳) $-۳<a<۱$
۴) $-۴<a<۲$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰)

روش اول

رسم نمودار تبدیل یافته به روش گام‌به‌گام کتاب:





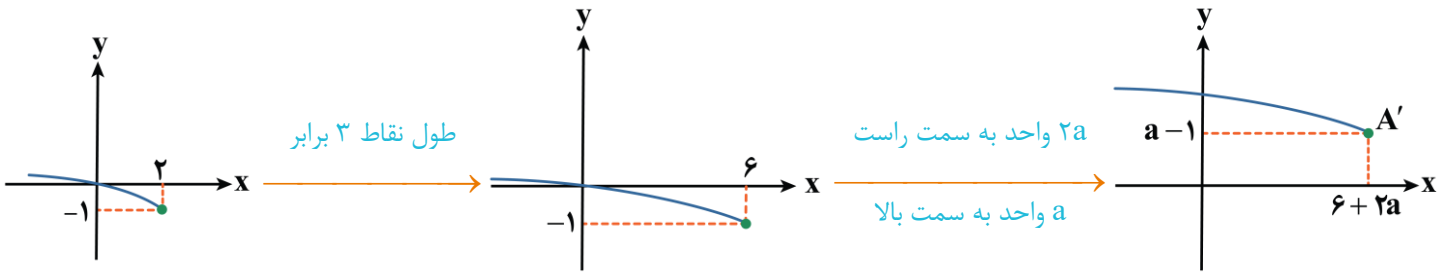
اگر نقطهٔ A' در ناحیهٔ چهارم باشد، نمودار نهایی هر دو محور را قطع می‌کند. برای آن باید طول این نقطه مثبت و عرض آن منفی باشد:

$$\begin{cases} ۶+۲a>۰ \\ -۱+a<۰ \end{cases} \Rightarrow -۳<a<۱$$

دقت کنید حالت $a=۱$ و $a=-۳$ هم قابل قبول است. همچنین اگر نمودار از مبدأ بگذرد، باز هم هر دو محور را قطع کرده است.

روش دوم روش سریع‌تر در رسم نمودار برای اونایی که روش‌های خفن می‌پسندن! 😉

اگر نمودار f را نسبت به مبدأ قرینه کنیم تابع $-f(-x)$ به‌دست می‌آید.

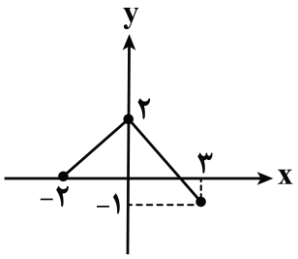


$$-f(-x) \xrightarrow{x\to\frac{x}{۳}} -f(-\frac{x}{۳}) \xrightarrow[+a]{x\to x-۲a} a-f(-\frac{(x-۲a)}{۳})=a-f(-\frac{x}{۳}+\frac{۲a}{۳})$$

ادامهٔ راه حل مانند روش اول می‌باشد.

تست

۷- نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. اگر اشتراک دامنه و برد تابع $g(x)=a-۲f(\frac{x}{۲}-a)$ یک مجموعهٔ تک‌عضوی باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟



۱) ۸
۲) ۲
۳) -۶
۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ⏲ ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰)

دامنهٔ f بازهٔ $[-۲,۳]$ است، پس:

$$-۲\le\frac{x}{۲}-a\le۳ \Rightarrow ۲a-۴\le x\le ۶+۲a$$

برد f بازهٔ $[-۱,۲]$ است، پس:

$$-۱\le f(\frac{x}{۲}-a)\le ۲ \Rightarrow a-۴\le a-۲f(\frac{x}{۲}-a)\le a+۲$$

دامنه و برد تابع g به ترتیب به‌صورت $[۲a-۴,۶+۲a]$ و $[a-۴,a+۲]$ است. به شرطی اشتراک این دو بازه، تک‌عضوی است، که:

$$۲a-۴=a+۲ \Rightarrow a=۶$$

یا

$$۶+۲a=a-۴ \Rightarrow a=-۱۰$$

مجموع جواب‌های ممکن برای a برابر -۴ است.

دامنه و برد تبدیل‌یافتهٔ یک تابع

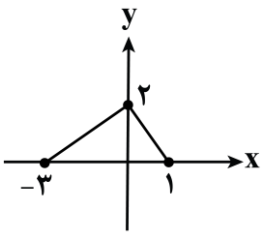
اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[m,n]$ باشد، برای تعیین دامنهٔ تابع $y=af(bx+c)+d$ کافی است نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$m\le bx+c\le n$$

اگر برد تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[p,q]$ باشد، برای تعیین برد تابع $y=af(bx+c)+d$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$p\le f(x)\le q \Rightarrow p\le f(bx+c)\le q \Rightarrow$$ سه طرف را در a ضرب و با d جمع می‌کنیم.

۸- نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. اگر نمودار تابع $y=f(\frac{a-2x}{3})$ نمودار f را قطع نکند، حداقل مقدار طبیعی a کدام است؟



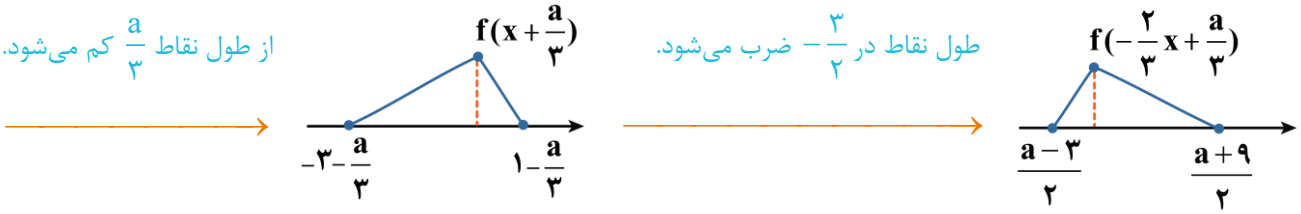
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بر ⏲ ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰)

روش اول

به ترتیب زیر، تبدیلات را انجام می‌دهیم. برای آن‌که ذهن ما درگیر محور yها نشود، محورyها را رسم نمی‌کنیم. دقت کنید که a عدد طبیعی است. (این‌جا برای نشان دادن تبدیلات به طور خاص مثبت بودن آن مدنظر است.)

برای رسم تبدیل‌یافتهٔ نمودار ابتدا آن را به‌صورت مقابل می‌نویسیم: $y=f(-\frac{2}{3}x+\frac{a}{3})$



توجه کنید که هیچ تغییری روی yها اتفاق نمی‌افتد. بنابراین در دو حالت نمودارها یکدیگر را قطع نمی‌کنند. نمودار حاصل زمانی با نمودار $f(x)$ برخورد ندارد که یا $\frac{a-3}{2}>1$ و یا $\frac{a+9}{2}<-3$ باشد:

$\frac{a+9}{2}<-3\Rightarrow a<-15$ ✗

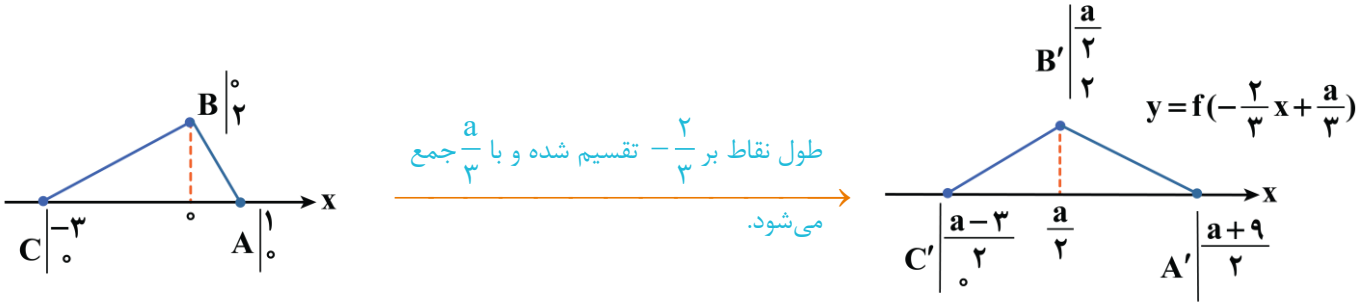
یا

$\frac{a-3}{2}>1\Rightarrow a>5$ ✓

با توجه به طبیعی بودن مقدار a، حداقل مقدار a، ۶ خواهد بود.

روش دوم

نمودار $y=f(x)$ دارای ۳ نقطهٔ مهم $A\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$، $B\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}-3\\0\end{vmatrix}$ است. نقاط متناظر را در نمودار $y=f(\frac{a-2x}{3})$ مشخص می‌کنیم، ببینید:



ادامهٔ راه حل مشابه روش اول است.

۹- نمودار تابع $f(x)=x^2-2x$ را یک بار ۳ واحد به چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا تابع g به‌دست آید. بار دیگر از ابتدا نمودار f را یک واحد به بالا انتقال داده و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا تابع h به‌دست آید. مجموع طول نقاط برخورد نمودار توابع g و h چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ **(متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۶)**

ابتدا ضابطهٔ توابع g و h را به‌دست می‌آوریم. ببینید:

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to x+3]{\text{۳ واحد به چپ}}y=f(x+3)\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور y ها}}y=f(-x+3)=g(x)$$

$$\Rightarrow g(x)=(-x+3)^2-2(-x+3)\Rightarrow g(x)=x^2-4x+3$$

$$y=f(x)\xrightarrow[+1]{\text{۱ واحد به بالا}}y=f(x)+1\xrightarrow[\times(-1)]{\text{قرینه نسبت به محور x ها}}y=-f(x)-1=h(x)$$

$$\Rightarrow h(x)=-(x^2-2x)-1\Rightarrow h(x)=-x^2+2x-1$$

برخورد توابع g و h را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x)=h(x)\Rightarrow x^2-4x+3=-x^2+2x-1\Rightarrow 2x^2-6x+4=0$$

بنابراین مجموع طول نقاط برخورد ۲ تابع g و h برابر است با:

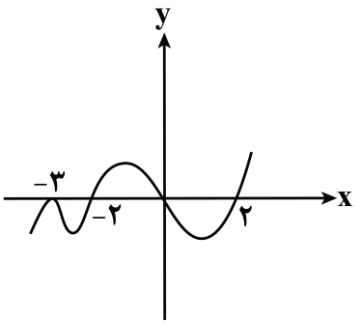
$$2x^2-6x+4=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=3$$

میانبر!

با استفاده از دانسته‌های سال‌های قبل می‌دانیم که می‌توانستیم با استفاده از فرمول مجموع ریشه‌ها سریع‌تر به جواب برسیم:

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{(-6)}{2}=3$$

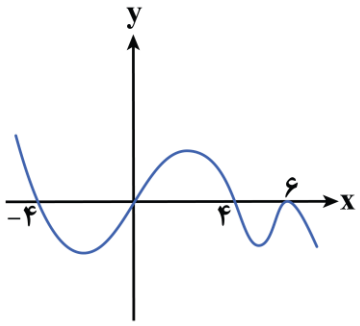
۱۰- نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(-\frac{x}{۲})}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰)

نمودار تابع $y=f(-\frac{x}{۲})$ به‌صورت مقابل است:



عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم:

	-۴	۰	۴	۶
$f(-\frac{x}{۲})$	+ ۰ −	۰ +	۰ −	۰ −
x	−	− ۰ +	+	+
	− ۰	+ ۰ +	۰ −	۰ −

دامنهٔ تابع شامل بازه‌هایی است که زیر رادیکال مثبت یا صفر شود؛ بنابراین، دامنه برابر مجموعهٔ $[-۴,۴]\cup\{۶\}$ است؛ که شامل ۱۰ عدد صحیح می‌باشد.

رسم نمودار تبدیل‌یافتهٔ تابع

برای رسم نمودار تابع $y=f(ax+b)$ از روی نمودار $f(x)$ می‌توانیم به دو صورت عمل کنیم:

۱) ابتدا نمودار $f(x)$ را به اندازهٔ b واحد به راست یا چپ منتقل می‌کنیم، سپس طول نقاط را بر a تقسیم می‌کنیم.

۲) ابتدا طول نقاط $f(x)$ را بر a تقسیم کرده و به اندازهٔ ریشهٔ $ax+b$ نمودار را روی محور x جلو یا عقب ببریم.

مشاوره‌نامه!

شما به هر روشی که راحت‌تر بودید عمل کنید. فقط حواستون باشه که تا آخرش یا از راه ۱ برید یا راه ۲ و مراحل رو درست انجام بدید!

یه نمونهٔ باحال ببین!

نمودار تابع $y=f(x)$ مفروض است. توضیح دهید چگونه می‌توان نمودارهای زیر را رسم کرد؟

الف) $y=f(۳x-۲)$

از روش اول: ابتدا نمودار $f(x)$ را ۲ واحد روی محور x به سمت راست می‌بریم، سپس طول نقاط را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم.

ب) $y=f(\frac{x}{۲}+۲)$

از روش دوم: طول نقاط نمودار $f(x)$ را بر $\frac{۱}{۲}$ تقسیم کرده (در ۲ ضرب می‌کنیم) و به اندازهٔ ریشهٔ $\frac{x}{۲}+۲$ یعنی -۴ واحد روی محور x به سمت چپ حرکت می‌کنیم.

۱۱- دامنهٔ تابع $y=f(x)$ برابر بازهٔ $[-۳,۵]$ و دامنهٔ تابع $y=f(\frac{a-x}{b})$ برابر $[-۶,۱۰]$ است. اگر $b>۰$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰)

روش اول

به کمک تبدیلات، دامنهٔ تابع $f(\frac{a}{b}-\frac{x}{b})$ را به‌دست می‌آوریم.

تابع	$f(x)$	$f(x+\frac{a}{b})$	$f(\frac{x}{b}+\frac{a}{b})$	$f(-\frac{x}{b}+\frac{a}{b})$
دامنه	$[-۳,۵]$	$[-۳-\frac{a}{b},۵-\frac{a}{b}]$	$[-۳b-a,۵b-a]$	$[-۵b+a,۳b+a]$

پس بازهٔ $[-۵b+a,۳b+a]$ با بازهٔ $[-۶,۱۰]$ برابر است.

$$\begin{cases}-۵b+a=-۶\\ ۳b+a=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\ b=۲\end{cases}\Rightarrow a+b=۶$$

روش دوم

وسط بازهٔ $[-۳,۵]$ برابر $x=۱$ است. اگر نمودار f را نسبت به خط $x=۱$ قرینه کنیم دامنه تغییر نمی‌کند. پس دامنهٔ $f(۲-x)$ (قرینه شده نسبت به $x=۱$) همان بازهٔ $[-۳,۵]$ است. پس دامنهٔ $f(۲-\frac{x}{۲})$ بازهٔ $[-۶,۱۰]$ است. پس $a=۴$ و $b=۲$ است و $a+b=۶$.

روش سوم

$$D_{f(x)}=[-۳,۵]\Rightarrow$$

با توجه به این‌که دامنهٔ تابع $f(x)$ بازهٔ $[-۳,۵]$ است، پس برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=f(\frac{a-x}{b})$ که بازهٔ $[-۶,۱۰]$ است، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-۳\le\frac{a-x}{b}\le۵\xrightarrow[b>۰]{\times b}-۳b\le a-x\le۵b\Rightarrow-۳b-a\le-x\le۵b-a$$

$$\xrightarrow{\times(-۱)}a-۵b\le x\le a+۳b\Rightarrow\begin{cases}a-۵b=-۶\\ a+۳b=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=۲\\ a=۴\end{cases}\Rightarrow a+b=۲+۴=۶$$

آزمون ماز

۱ آبان‌ماه

حسابان ۲

۱- به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f=\{(1,3-m),(2,2m+6),(-2,3m-1)\}$ صعودی است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

اگر xها افزایش یابند باید yها یا زیاد شوند و یا ثابت باشند.

$$\{(-2,3m-1),(1,3-m),(2,2m+6)\}$$

افزایش افزایش

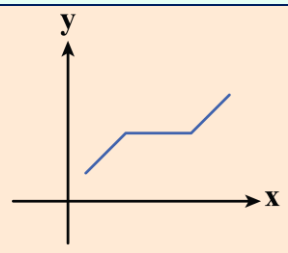
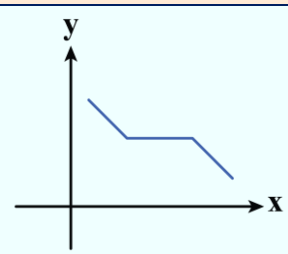
در نتیجه باید برای yهای نظیرشان داشته باشیم:

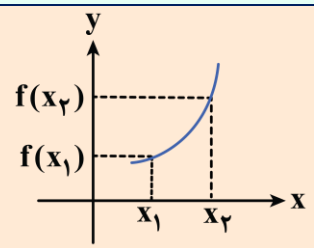
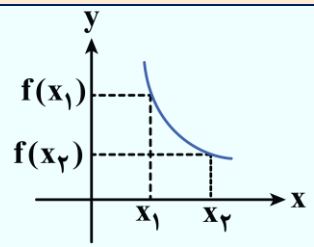
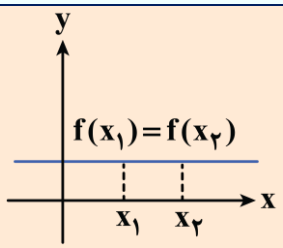
$$\Rightarrow 3m-1\le 3-m\le 2m+6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m-1\le 3-m \Rightarrow m\le 1 & (1) \\ 3-m\le 2m+6 \Rightarrow -1\le m & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)\cap(2)} -1\le m\le 1$$

پس m، سه جواب صحیح دارد.

هر آنچه باید دربارهٔ «توابع یکنوا» بدانید!

تابع	توضیح	تعریف ریاضی	مثال نموداری
صعودی	با افزایش x، مقدار تابع $f(x)$ افزایش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$	
نزولی	با افزایش x، مقدار تابع $f(x)$ کاهش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$	

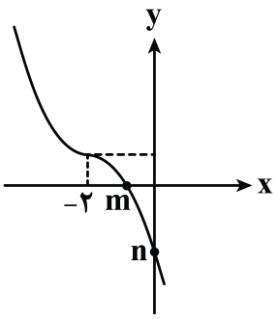
تابع	توضیح	تعریف ریاضی	مثال نموداری
اکیداً صعودی	با افزایش x، مقدار تابع $f(x)$ همواره افزایش می‌یابد.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	
اکیداً نزولی	با افزایش x، مقدار تابع $f(x)$ همواره کاهش می‌یابد.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	
تابع ثابت (هم صعودی و هم نزولی)	با افزایش x، مقدار تابع $f(x)$ همواره ثابت است.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$	

توجه!

به تابعی که **نه صعودی** باشد و **نه نزولی**، تابع **غیریکنوا** می‌گوییم. به عبارت دیگر تابع غیریکنوا تابعی است که در دامنهٔ تعریف خود در بازه‌هایی صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد.

تست

۲- نمودار تابع $f(x)=a-(x+۲a)^۳$ به صورت مقابل است. حاصل $m+n$ کدام است؟



۱) -۲

۲) -۳

۳) -۹

۴) -۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

تابع $y=x^۳$ انتقال افقی یافته، پس نقطه‌ای به طول $x=-۲$ همان ریشهٔ داخل پرانتز است. پس:

$$x=-۲a=-۲ \Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow f(x)=۱-(x+۲)^۳$$

m در واقع محل برخورد نمودار با محور xها و n محل برخورد نمودار با محور yها است:

$$\begin{cases} x=m \xrightarrow{y=۰} ۰=۱-(m+۲)^۳ \Rightarrow m=-۱ \\ y=n \xrightarrow{x=۰} n=۱-(۰+۲)^۳ \Rightarrow n=-۷ \end{cases}$$

پس $m+n=-۸$ است.

۳- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x^۲-۱$ برابر $۳x+۵$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $xf(x-۱)+۲f(x-۳)$ بر $x-۲$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا قضیهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(x)=(x^۲-۱)q(x)+۳x+۵$$

اگر ریشه‌های $x^۲-۱$ که برابر ۱ و -۱ هستند را در عبارت بالا قرار دهیم، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(۱)=۸ \\ f(-۱)=۲ \end{cases}$$

برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم بر $x-۲$، به جای x، ۲ را جایگزین می‌کنیم:

$$g(x)=xf(x-۱)+۲f(x-۳)$$

$$R=g(۲)=۲f(۱)+۲f(-۱)=۱۶+۴=۲۰$$

قضیهٔ تقسیم در چندجمله‌ای‌ها

قضیهٔ تقسیم: اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر چندجمله‌ای $p(x)$ تقسیم کنیم و خارج‌قسمت به‌دست آمده را $q(x)$ و باقی‌مانده را $r(x)$ فرض کنیم، رابطهٔ زیر بین آن‌ها برقرار است:

مقسوم: $f(x)$ — مقسوم‌علیه: $p(x)$ — خارج‌قسمت: $q(x)$ — باقی‌مانده: $r(x)$

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

$$\begin{array}{c|c} f(x) & p(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

دقت کنید که درجهٔ باقی‌مانده از درجهٔ مقسوم‌علیه کم‌تر است.

همیشه درجهٔ باقی‌مانده از درجهٔ مقسوم‌علیه کم‌تر است!

اگر مقسوم‌علیه از درجهٔ اول باشد، باقی‌مانده از درجهٔ صفر (عدد ثابت) است و اگر مقسوم‌علیه از درجهٔ دوم باشد، باقی‌مانده حداکثر از درجهٔ اول $(ax+b)$ است.

$$f(x)=(\underbrace{ax^۲+bx+c}_{\text{چندجمله‌ای درجه دوم}})q(x)+(\underbrace{mx+n}_{\text{حداکثر از درجه اول}})$$

$$f(x)=(\underbrace{ax+b}_{\text{چندجمله‌ای درجه اول}})q(x)+\underbrace{R}_{\text{عدد ثابت}}$$

به طور کلی می‌توان گفت: اگر مقسوم $(f(x))$ از درجهٔ n و مقسوم‌علیه $(p(x))$ از درجهٔ m باشد، آن‌گاه:

- خارج‌قسمت $(q(x))$ از درجهٔ $(n-m)$ است.
- باقی‌مانده $(r(x))$، حداکثر از درجهٔ $(m-۱)$ است.

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر چندجمله‌ای $x^۵-۲x^۴+۳x-۱$ را بر $x^۳+۳x^۲+۱$ تقسیم کنیم، خارج‌قسمت از درجهٔ $۵-۳=۲$ و باقی‌مانده حداکثر از درجهٔ $۳-۱=۲$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(ax+b)$

زمانی که چندجمله‌ای $f(x)$ را بر عبارت درجه اول $(ax+b)$ تقسیم می‌کنیم، باقی‌مانده‌ای که حاصل می‌شود، عددی ثابت است و در این حالت رابطهٔ تقسیم برابر است با: $f(x)=(ax+b)q(x)+\boxed{R}$ ⇒ باقی‌مانده (عدد ثابت)

حالا برای این‌که باقی‌مانده را به‌دست بیاوریم، اول $ax+b$ را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشهٔ آن را به‌دست می‌آوریم (که میشه $x=\frac{-b}{a}$)، سپس ریشه‌ای که به‌دست آوردیم را در چندجمله‌ای $f(x)$ قرار می‌دهیم و عددی که به‌دست می‌آید را به عنوان باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ معرفی می‌کنیم، به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a} \\ R=f(-\frac{b}{a}) \end{cases}$$

تست

۴- تابع $f(x)=(ax+b)(2x-1)+x(6x+b)$ روی $\mathbb{R}$ هم صعودی است و هم نزولی. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) -4 ۴) -6

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

تنها تابع هم صعودی و هم نزولی، تابع ثابت است.

روش اول

کافی است سه نقطه را آزمایش کنیم:

$$f(0)=-b$$

$$f(1)=a+b+6+b=a+2b+6$$

$$f(-1)=-3(-a+b)+6-b=-4b+3a+6$$

چون تابع ثابت است باید $f(-1)=f(1)=f(0)$ باشد؛ پس:

$$\begin{cases} a+2b+6=-b \\ -4b+3a+6=-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+3b=-6 \\ 3a-3b=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a+b=-4$$

روش دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع را بازنویسی می‌کنیم و با توجه به این‌که ضریب x^2 و x باید صفر باشد تا تابع f ثابت باشد، داریم:

$$f(x)=2ax^2+(2b-a)x-b+6x^2+bx=(2a+6)x^2+(3b-a)x-b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+6=0 \\ 3b-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a+b=-4$$

تست

۵- چندجمله‌ای $f(x)=x^3+ax^2+3x-2$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $fof(x)$ بر $x+a$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر $f(a)$ است. درنتیجه چون $f(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، پس $f(1)=0$.

$$f(1)=1+a+3-2=a+2=0 \Rightarrow a=-2$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3-2x^2+3x-2$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $fof(x)$ بر $x+a$ همان $fof(-a)$ است.

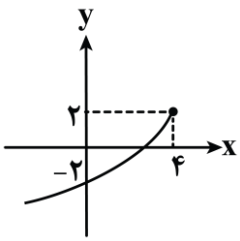
$$R=fof(-a)=fof(2)=f(4)=64-32+12-2=42$$

بخش‌پذیری در چندجمله‌ای‌ها

اگر در تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای $q(x)$ باقی‌مانده برابر صفر باشد، می‌گوییم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای $q(x)$ «**بخش‌پذیر**» است.

تاز

۶- نمودار تابع $f(x)=a+b\sqrt{k-x}$ به صورت مقابل است. نمودار کدام تابع زیر از نظر یکنوایی با سایر گزینه‌های دیگر متفاوت است؟



۱) $y=[ax]$

۲) $y=b[x]$

۳) $y=[kx]$

۴) $y=k[ax]$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

ریشهٔ زیر رادیکال همان $x=۴$ است، پس:

$k-۴=۰\Rightarrow k=۴$

حال از جای‌گذاری نقاط معلوم روی نمودار در معادلهٔ تابع داریم: $f(۴)=۲$ و $f(۰)=-۲$

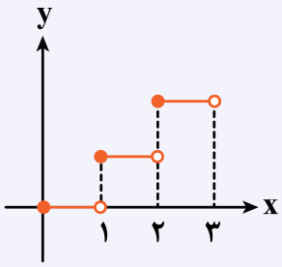
$f(۴)=۲\Rightarrow a+b\sqrt{۴-۴}=۲\Rightarrow a=۲$

$f(۰)=-۲\Rightarrow a+b\sqrt{۴}=-۲\Rightarrow b=-۲$

چون a و k مثبت‌اند، پس گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ صعودی‌اند و چون b منفی است، پس گزینهٔ ۲ نزولی است.

یادآوری تابع براکتی!

تابع براکتی یا تابع جزء صحیح، تابعی است که به هر عدد حقیقی جزءصحیحش را نسبت می‌دهد و نمودار آن به‌صورت زیر است:



$$y=[x]=\begin{cases}\vdots & \\ ۱ & ۱\le x<۲\\ ۰ & ۰\le x<۱\\ -۱ & -۱\le x<۰\\ \vdots & \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید تابع براکتی $[x]$ در حالت کلی صعودی است.

تاز

۷- تابع $f(x)=۲x^۲+mx-۱$ مفروض است. بازهٔ $[۲,+\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $y=m-f(\frac{۱-۲x}{۳})$ در آن بازه اکیداً نزولی می‌باشد. مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

طول رأس سهمی جدید برابر ۲ است. طول رأس $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=m-f(\frac{۱-۲x}{۳})\xrightarrow{x=۲}\frac{۱-۲x}{۳}=\frac{-۳}{۳}=-۱$$

پس طول رأس سهمی $f(x)$ برابر -۱ است. در نتیجه:

$$-۱=-\frac{b}{۲a}=-\frac{m}{۴}\Rightarrow m=۴$$

رأس سهمی و یکنوایی سهمی!

رأس یک سهمی در واقع بالاترین نقطه یا پایین‌ترین نقطه از آن با معادلهٔ $(x_S, y_S) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است؛ که با توجه به علامت ضریب x^2 در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ می‌توان گفت: اگر $a > 0$ باشد، رأس سهمی، پایین‌ترین نقطه و اگر $a < 0$ باشد، رأس سهمی، بالاترین نقطهٔ آن است، ببینید:

$a > 0$	$a < 0$
 رأس سهمی	 رأس سهمی
قبل از رأس تابع اکیداً نزولی و بعد از رأس تابع اکیداً صعودی است.	قبل از رأس تابع اکیداً صعودی و بعد از رأس تابع اکیداً نزولی است.

تاز

۸- قرینهٔ تابع $y = 4(x^2 + 3x + 2)$ نسبت به محور xها را ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا انتقال داده، سپس طول نقاط آن را دو برابر می‌کنیم. تابع g به‌دست می‌آید. دامنهٔ تابع $y = \sqrt{g(x)}$ کدام است؟

۱) $[1, 3]$ ۲) $[-3, -1]$ ۳) $[-3, 1]$ ۴) $[-1, 3]$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

$$y = 4(x^2 + 3x + 2) \xrightarrow[\times(-1)]{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} y = -4(x^2 + 3x + 2)$$

$$\xrightarrow[x \to x-2]{\text{۲ واحد به راست}} y = -4\left((x-2)^2 + 3(x-2) + 2\right) = -4\left(x^2 - x\right)$$

$$\xrightarrow[+3]{\text{۳ واحد به بالا}} y = -4x^2 + 4x + 3$$

$$\xrightarrow[x \to \frac{1}{2}x]{\text{طول نقاط دو برابر}} y = -4(\frac{x}{2})^2 + 4(\frac{x}{2}) + 3 = -x^2 + 2x + 3$$

بنابراین تابع g به‌صورت زیر است:

$$g(x) = -x^2 + 2x + 3$$

دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، با نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال مشخص می‌شود:

$$g(x) \geq 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

جمع‌بندی رسم نمودار تابع

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = af(bx + c) + d$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) تاثیرات روی دامنه

۱) تأثیر عدد ثابت c: اگر $c > 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ c واحد به سمت چپ و اگر $c < 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ $|c|$ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.

۲) تأثیر ضریب x: طول تمامی نقاط را در $\frac{۱}{|b|}$ ضرب می‌کنیم. (اگه b منفی باشه نمودار تابع نسبت به محور y قرینه هم می‌شه.)

ب) تاثیرات روی برد

۳) تأثیر ضریب f: عرض تمامی نقاط را در $|a|$ ضرب می‌کنیم. (اگه a منفی باشه نمودار تابع نسبت به محور xها قرینه هم می‌شه.)

۴) تأثیر عدد ثابت d: اگر $d>۰$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ d واحد به سمت بالا و اگر $d<۰$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ $|d|$ واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.

۹- تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(۲)=۰$ است. اگر دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(ax+b)f(-x)}$ تک عضوی باشد، آن‌گاه زوج مرتب (a,b) کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(۲,-۴)$ ۲) $(-۲,-۴)$ ۳) $(-۲,۴)$ ۴) $(۲,۴)$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ۲ ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

برای آن‌که دامنهٔ تابع داده شده تک عضوی باشد باید جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال به صورت روبه‌رو باشد:

α	
−	−

پس باید $ax+b$ و $f(-x)$ ریشهٔ مشترک داشته باشند و در دو طرف ریشهٔ مشترک غیرهم‌علامت باشند.

طبق فرض سؤال داریم $f(۲)=۰$. در نتیجه ریشهٔ $f(-x)=۰$ همان $x=-۲$ است، پس:

$$-۲a+b=۰ \Rightarrow b=۲a$$

در ضمن $f(-x)$ اکیداً صعودی است.

	−۲	
$f(-x)$	−	+
$ax+b$	+	−

با توجه به جدول چون تابع خطی ابتدا دارای علامت مثبت بوده و سپس منفی شده پس علامت a منفی است، پس $b=۲a$ و $a<۰$ است.

فقط گزینهٔ ۲ یعنی $(-۲,-۴)$ دارای شرایط به‌دست آمده است.

دامنهٔ توابع رادیکالی

برای محاسبهٔ دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt[۲n]{g(x)} \Rightarrow D_f=D_g \cap \{x \mid g(x) \geq ۰\}$$

یعنی علاوه بر تعیین دامنهٔ عبارت زیر رادیکال، **زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید همیشه نامنفی باشد.**

توجه!

وقتی طول‌ها قرینه می‌شوند یعنی نمودار نسبت به محور yها قرینه شده و در نتیجه یکنوایی آن برعکس می‌شود.

یادآوری جدول تعیین علامت توابع خطی

جدول تعیین علامت تابع خطی $y=ax+b$ با توجه به مثبت یا منفی بودن a تعیین می‌شود:

۱) $a>۰$

x	$-\frac{b}{a}$	
y=ax+b	-	+

۲) $a<۰$

x	$-\frac{b}{a}$	
y=ax+b	+	-

۱۰- قرینهٔ نمودار $f(x)=\frac{۲x-a}{x-b}$ نسبت به مبدأ مختصات بر نمودار وارون f منطبق است. در این‌صورت کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) $a=b$ ۲) $b=۲$ ۳) $a=-b$ ۴) $b=-۲$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

برای یافتن قرینهٔ f نسبت به مبدأ، آن را نسبت به هر دو محور قرینه می‌کنیم:

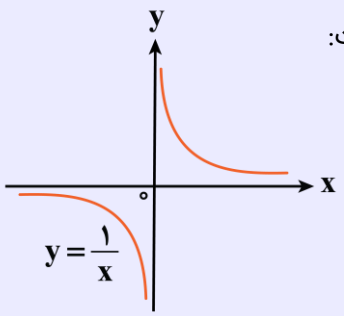
$$y=-f(-x)=-\frac{-۲x-a}{-x-b}=\frac{-۲x-a}{x+b}$$

از طرفی $f^{-۱}(x)=\frac{bx-a}{x-۲}$، پس:

$$\frac{bx-a}{x-۲}=\frac{-۲x-a}{x+b} \xrightarrow{\text{با مقایسهٔ طرفین}} b=-۲$$

ساده‌ترین تابع هموگرافیک

معروف‌ترین و ساده‌ترین تابع هموگرافیک، تابع $y=\frac{۱}{x}$ است که در حالت کلی نمودار آن به‌صورت زیر است:



چطوری ضابطهٔ وارون یه تابع وارون‌پذیر رو پیدا کنم؟

۱) به جای $f(x)$، می‌گذاریم y و بعد سعی می‌کنیم که x را برحسب y به‌دست آوریم (x رو در یک طرف تنها می‌کنیم.).

۲) وقتی که x تنها شد به جای y می‌گذاریم x و به جای x می‌گذاریم $f^{-۱}(x)$.

وارون تابع هموگرافیک

وارون تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، تابع $f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

اثبات: برای یافتن وارون همواره سعی داریم که x را تنها کنیم:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow ycx+yd=ax+b$$
$$\Rightarrow ycx-ax=b-yd \Rightarrow (yc-a)x=b-yd$$
$$\Rightarrow x=\frac{-dy+b}{cy-a}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

راهنمای زرنگ‌بازی!

لازم نیست نکتهٔ وارون تابع هموگرافیک رو حفظ کنی. به طریقهٔ به‌دست آوردن وارونش دقت کن تا برای همیشه تو ذهنت بمونه. 😊

۱۱- هر نقطه مانند $A(a,b)$ بر روی نمودار $f(x)=۲-\sqrt{x+۴}$ با نقطهٔ $A'(۲a-۱,\frac{b+۱}{۲})$ روی $y=g(x)$ متناظر است و برعکس. اشتراک دامنه و برد g کدام است؟

۱) $[-۹,۳]$ ۲) $[-۹,\frac{۳}{۲}]$ ۳) $[-\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}]$ ۴) $[-\frac{۳}{۲},۳]$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

نقطهٔ $x=a$ به $x=۲a-۱$ تبدیل شده است، یعنی a ابتدا دو برابر شده و سپس یک واحد از آن کم شده است.

$$f(x)\xrightarrow[x\to\frac{x}{۲}]{\text{طول‌ها دو برابر می‌شوند.}}f(\frac{x}{۲})\xrightarrow[x\to x+۱]{\text{یک واحد از طول کم می‌شود.}}f(\frac{x+۱}{۲})$$

نقطهٔ $y=b$ به $y=\frac{b+۱}{۲}=\frac{۱}{۲}b+\frac{۱}{۲}$ تبدیل شده است، یعنی b ابتدا نصف می‌شود و سپس $\frac{۱}{۲}$ بیش‌تر می‌شود.

$$f(x)\xrightarrow[\times(\frac{۱}{۲})]{\text{عرض‌ها نصف می‌شوند.}}\frac{۱}{۲}f(x)\xrightarrow[+\frac{۱}{۲}]{\text{عرض‌ها }\frac{۱}{۲}\text{ بیش‌تر می‌شوند.}}\frac{۱}{۲}f(x)+\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۲}f(\frac{x+۱}{۲})+\frac{۱}{۲}$$

اکنون برای محاسبهٔ دامنه و برد داریم:

$$\begin{cases}D_f=[-۴,+\infty)\\R_f=(-\infty,۲]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x+۱}{۲}\geq -۴\Rightarrow x\geq -۹\\y\leq ۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}y+\frac{۱}{۲}\leq\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

پس اشتراک این دو مجموعه بازهٔ $[-۹,\frac{۳}{۲}]$ است.

روش دوم

دامنهٔ f بازهٔ $[-۴,+\infty)$ و برد f بازهٔ $(-\infty,۲]$ است، پس:

$$\begin{cases}a\geq -۴\Rightarrow ۲a-۱\geq -۹\Rightarrow x_g\geq -۹\\b\leq ۲\Rightarrow\frac{b+۱}{۲}\leq\frac{۳}{۲}\Rightarrow y_g\leq\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

پس دامنهٔ g بازهٔ $[-۹,+\infty)$ و برد f بازهٔ $(-\infty,\frac{۳}{۲}]$ و اشتراک آن‌ها بازهٔ $[-۹,\frac{۳}{۲}]$ است.

دامنه و برد تبدیل‌یافتهٔ یک تابع

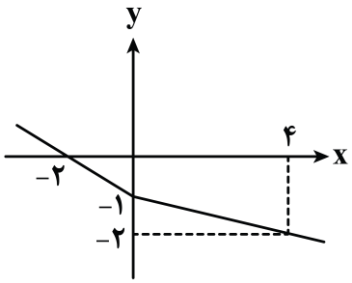
اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[m,n]$ باشد، برای تعیین دامنهٔ تابع $y=af(bx+c)+d$ کافی است نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$m\leq bx+c\leq n$$

اگر برد تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[p,q]$ باشد، برای تعیین برد تابع $y=af(bx+c)+d$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$p\le f(x)\le q \Rightarrow p\le f(bx+c)\le q \Rightarrow$ سه طرف را در a ضرب و با d جمع می‌کنیم.

۱۲- نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. مجموعه جواب نامعادلهٔ $fof(x^2+3x)<0$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

دقت کنید که $f(-2)=0$ و $f(4)=-2$ است.

$$fof(x^2+3x)<0 \Rightarrow fof(x^2+3x)<f(-2) \Rightarrow f(x^2+3x)>-2$$

$$\Rightarrow f(x^2+3x)>f(4) \Rightarrow x^2+3x<4 \Rightarrow x^2+3x-4<0$$

$$\Rightarrow -4<x<1 \Rightarrow x=-3,-2,-1,0$$

پس مجموعه جواب نامعادلهٔ مذکور شامل ۴ عدد صحیح است.

رفع ابهام!

در واقع نامساوی سومی که نوشتیم، پیاده کردن تعریف نزولی بودن برای آرگومان تابع $f(x)$ بود!

$$\underbrace{fof(x^2+3x)}_{f(f(x))}<f(-2) \Rightarrow f(\underline{f(x^2+3x)})<f(\underline{-2}) \xrightarrow{f \text{ نزولی}} f(x^2+3x)>-2$$

۱۳- تابع f با دامنهٔ $[-1,7]$ اکیداً نزولی است. اگر $f(2m+1)\le f(m+3)$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m\le 2$
۲) $-1\le m\le 3$
۳) $-1\le m\le 2$
۴) $-4\le m\le 2$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

چون f اکیداً نزولی است، پس اگر $f(a)<f(b)$ باشد، آن‌گاه $a>b$ است.

$$f(m+3)\le f(2m+1) \Rightarrow m+3\ge 2m+1 \Rightarrow m\le 2 \quad (1)$$

شرط دامنه را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} -1\le m+3\le 7 \\ -1\le 2m+1\le 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\le m\le 4 \\ -1\le m\le 3 \end{cases} \Rightarrow -1\le m\le 3 \quad (2)$$

بنابراین جواب نامعادله به صورت اشتراک (۱) و (۲) یعنی $-1\le m\le 2$ است.

سوتی‌های پرتکرار!

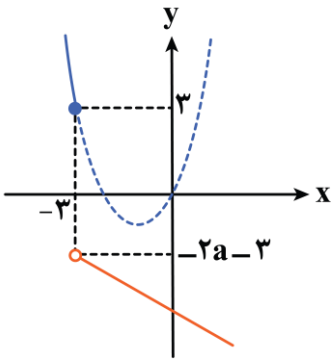
اگه حواست نباشه و تا رسیدی به $-1\le m\le 3$ تست رو بزنی و با $m\le 2$ اشتراک نگیری به گزینهٔ اشتباه ۲ می‌رسی!
از اون بدتر اگه شرط دامنه رو کلا چک نکنی و فقط شرط نزولی بودن رو چک کنی به گزینهٔ اشتباه ۱ می‌رسی!

۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\le -3 \\ ax+a-3 & x>-3 \end{cases}$ اکیداً یکنوا است. برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

در بازهٔ $(-\infty,-3]$ سهمی x^2+2x اکیداً نزولی است. پس ضابطهٔ دوم هم باید اکیداً نزولی باشد (که برای آن باید ضریب x منفی باشد) و برد ضابطهٔ دوم و ضابطهٔ اول، اشتراک نداشته باشند. پس:



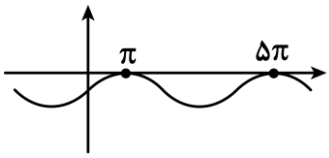
$$\begin{cases} a<0 \\ -2a-3\le 3 \Rightarrow -3\le a \end{cases} \Rightarrow -3\le a<0$$

پس a می‌تواند برابر ۳ مقدار صحیح -3، -2 و -1 باشد.

آزمون ماز

۱۵ آبان‌ماه
حسابان ۲

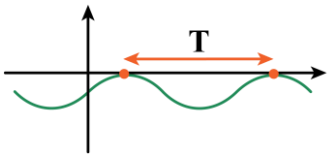
۱- نمودار تابع $f(x)=\sin(\frac{x}{m})-۱$ رسم شده است. دورهٔ تناوب تابع $g(x)=۲\sin(mx)+۱$ کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۲}$
۲) π
۳) ۲π
۴) ۴π

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۲)

با توجه به شکل نمودار، فاصلهٔ دو Max متوالی برابر ۴π است، پس:



$$T=۴\pi$$

از طرفی با توجه به ضابطهٔ تابع داریم:

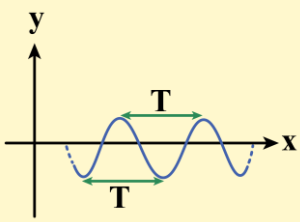
$$T=\frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{m}\right|}=۴\pi\Rightarrow|m|=۲$$

دورهٔ تناوب تابع g برابر است با:

$$T'=\frac{۲\pi}{|m|}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

کلاس درس یافتن دورهٔ تناوب

در حالت کلی، دو روش برای پیدا کردن دورهٔ تناوب وجود دارد:



۱) از روی شکل نمودار: در توابع سینوسی و کسینوسی، فاصلهٔ دو قله (ماکزیمم) یا دو دره (مینیمم) متوالی را دورهٔ تناوب می‌گوییم.

۲) از روی ضابطهٔ تابع: دورهٔ تناوب توابع زیر را به خاطر بسپارید. $(n\in\mathbb{N})$

$$\begin{cases}y=\sin^{۲n-۱}(bx)\\ y=\cos^{۲n-۱}(bx)\end{cases}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$$

$$\begin{cases} y=\sin^{2n}(bx) \\ y=\cos^{2n}(bx) \\ y=|\sin(bx)| \\ y=|\cos(bx)| \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

کدوم تبدیل‌ها روی دورهٔ تناوب تأثیر می‌ذارن؟ فقط ضریب x

اگر T دورهٔ تناوب $f(x)$ باشد، آن‌گاه دورهٔ تناوب $kf(x+a)+c$ نیز برابر T است. یعنی مقادیر a ،c و k تاثیری بر دورهٔ تناوب ندارند و تنها ضریب x اهمیت دارد. $(k\neq 0)$

یه نمونهٔ باحال ببین!

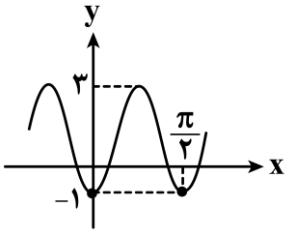
دورهٔ تناوب $f(x)=\sin(2x)$ و $g(x)=-3\sin(2x-1)+5$ برابر است. ببینید:

$$f(x)=\sin(2x) \Rightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$g(x)=-3\sin(2x-1)+5 \Rightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

مثال

۲- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos(bx)+c$ رسم شده است. $f(\frac{\pi}{6})$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) $\frac{3}{2}$

۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۴۰۲)

گام اول

با توجه به این‌که فاصلهٔ دو مینیمم متوالی برابر $\frac{\pi}{2}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

$$T=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=4 \Rightarrow b=\pm 4$$

چون علامت b تاثیری در نمودار ندارد هر دو مورد قابل قبول است و راحت‌تر است که $b=4$ را در نظر بگیریم.

گام دوم

در گام بعد برای محاسبهٔ a و c از اطلاعات روی نمودار داریم:

$$\max=3 \Rightarrow |a|+c=3 \quad (I)$$

$$\min=-1 \Rightarrow -|a|+c=-1 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)+(II)} 2c=2 \Rightarrow c=1$$

$$|a|+c=3 \xrightarrow{c=1} |a|+1=3 \Rightarrow |a|=2$$

چون نمودار کسینوسی است و در $x=۰$ نمودار به‌صورت صعودی است، پس $a<۰$ می‌باشد.

$$|a|=۲ \xrightarrow{a<۰} a=-۲$$

بنابراین ضابطهٔ تابع برابر است با:

$$\begin{cases} b=۴ \\ c=۱ \\ a=-۲ \end{cases} \Rightarrow f(x)=a\cos(bx)+c \Rightarrow f(x)=-۲\cos(۴x)+۱$$

کام آخر

محاسبهٔ $f(\frac{\pi}{۶})$:

$$f(x)=-۲\cos(۴x)+۱ \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۶}} f(\frac{\pi}{۶})=-۲\cos(\frac{۴\pi}{۶})+۱=-۲(-\frac{۱}{۲})+۱=۲$$

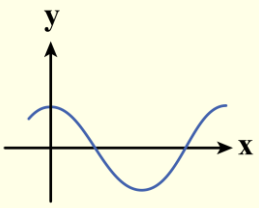
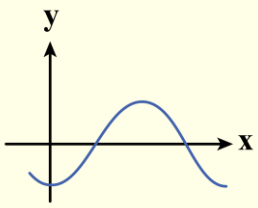
توجه!

اگر با $b<۰$ محاسبه کنیم باز هم به همین جواب می‌رسیم.

تعیین علامت b و a در تابع کسینوسی

در تابع $y=a\cos(bx)+c$ برای تعیین علامت a و b داریم:

تعیین علامت a:

$a>۰$	$a<۰$
	
با شروع از $x=۰$ نمودار به صورت نزولی است و موج نمودار مشابه موج تابع کسینوسی است. $y=\cos x$	با شروع از $x=۰$ نمودار به صورت صعودی است و موج نمودار مشابه موج تابع کسینوسی است. $y=-\cos x$

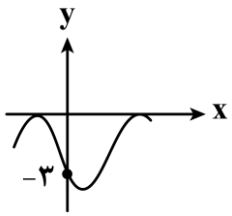
تعیین علامت b: چون کسینوس منفی‌خوار است علامت b تاثیری روی نمودار ندارد.

$$\cos(-b)=\cos(b)$$

یادآوری!

توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای **ماکزیمم** $|a|+c$ و **مینیمم** $-|a|+c$ می‌باشند.

۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\cos(-x+\frac{\pi}{۳})+b$ است. b کدام است؟



۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) −۱/۵

۴) −۲

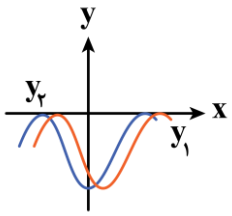
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۲)

چون $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$ است، داریم: $y=a\cos(-x+\frac{\pi}{۳})+b=a\cos(-(x-\frac{\pi}{۳}))+b=a\cos(x-\frac{\pi}{۳})+b$

حال به یافتن مقادیر a و b می‌پردازیم:

$$f(x)=a\cos(x-\frac{\pi}{۳})+b\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=-۳\Rightarrow a\cos(-\frac{\pi}{۳})+b=-۳\Rightarrow\frac{a}{۲}+b=-۳ & (I)\\ \max=۰\Rightarrow|a|+b=۰ & (II)\end{cases}$$

با توجه به این‌که در صورت سؤال نمودار $y_۱=a\cos(x-\frac{\pi}{۳})+b$ رسم شده است، اگر نمودار را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}$ به چپ انتقال دهیم به نمودار $y_۲=a\cos(x)+b$ می‌رسیم و چون با شروع از $x=۰$ نمودار به‌صورت صعودی است، پس: $a<۰$.



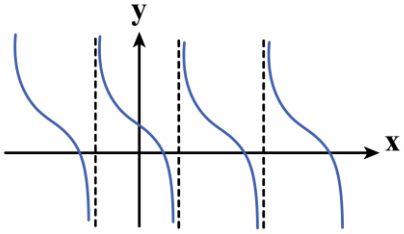
$$\begin{cases}-a+b=۰\\ \frac{a}{۲}+b=-۳\end{cases}\Rightarrow\frac{۳}{۲}a=-۳\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ b=-۲\end{cases}$$

ماز

۴- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y=۱-\tan x$ در آن نزولی است، چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۲ ـ ۱۲۰۲)



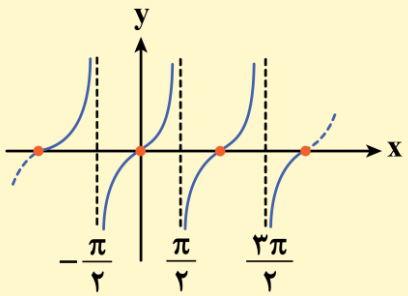
تابع $y=۱-\tan x$ در بازه‌هایی که در آن تعریف شده است نزولی می‌باشد. یعنی این تابع در فاصله‌های $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$، $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$، $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲})$ و... نزولی است. طول همهٔ این بازه‌ها برابر π است.

تانژانت زیر ذره‌بین!

۱) نمودار $y=\tan(x)$ به‌صورت مقابل است.

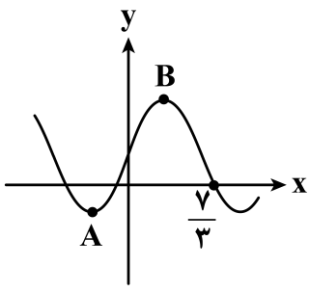
۲) در هر یک از بازه‌های $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$، $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ و ... اکیداً صعودی، اما تابع در کل دامنه‌اش غیریکنواست.

۳) دورهٔ تناوب تابع تانژانت



$$y=a\tan(bx)\Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

۵- تابع $f(x)=a\sin\frac{\pi}{a}x+b$ رسم شده است. اگر $AB=2\sqrt{5}$ باشد، $f(\frac{1}{3})$ چقدر است؟



۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۲)

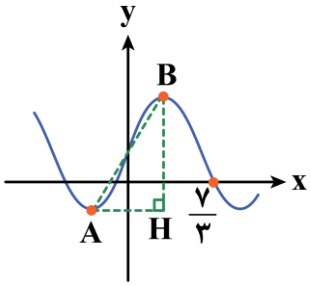
دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|}=2|a|$ می‌باشد. از طرفی می‌دانیم:

$$\max=b+|a|,\quad \min=b-|a|$$

پس:

$$\max-\min=2|a|$$

می‌دانیم $AH=\frac{T}{2}=|a|$ و $BH=\max-\min=2|a|$ است.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABH}$: $AB^2=AH^2+BH^2=20\Rightarrow a^2+4a^2=20\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2$ ($a=-2$ نیز درست می‌باشد.)

بنابراین:

$$f(x)=2\sin\frac{\pi}{2}x+b$$

$$f(\frac{7}{3})=2\sin\frac{7\pi}{6}+b=0\Rightarrow -1+b=0\Rightarrow b=1$$

خواهیم داشت:

$$f(x)=2\sin\frac{\pi}{2}x+1\xrightarrow{x=\frac{1}{3}}f(\frac{1}{3})=2\sin\frac{\pi}{6}+1=2$$

در باب ماکزیمم و مینیمم!

در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ داریم:

$$\left.\begin{matrix}\max=c+|a|\\ \min=c-|a|\end{matrix}\right\}\Rightarrow \max-\min=2|a|$$

یادآوری!

فاصلهٔ بین طول یک ماکزیمم (max) و یک مینیمم (min) متوالی $\frac{T}{2}$ است.

۶- اگر $x=\frac{\pi}{۲}$ طول یک نقطهٔ ماکزیمم تابع $y=۲-a\sin(۳x+a)$ باشد. کدام نقطه می‌تواند طول نقطهٔ مینیمم تابع باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۴) π

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۲)

فاصلهٔ طول یک ماکزیمم و یک مینیمم متوالی در تابع سینوسی و کسینوسی برابر نصف دورهٔ تناوب است.

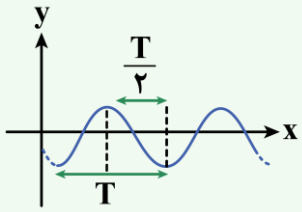
$$T=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\frac{T}{۲}=\frac{\pi}{۳}$$

$x=\frac{\pi}{۲}$ طول یک نقطهٔ ماکزیمم است، بنابراین $x=\frac{\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۳}$ طول نقاط مینیمم می‌باشند، که فقط $x=\frac{۵\pi}{۶}$ در گزینه‌ها وجود دارد:

$$x=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۶}$$

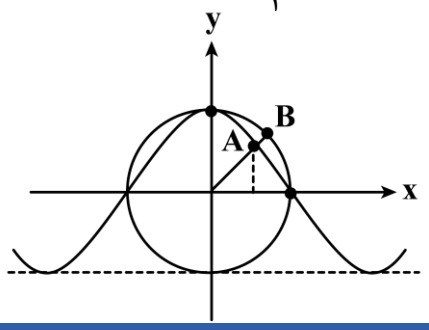
یه نکتهٔ طلایی!

می‌دانیم که فاصلهٔ دو ماکزیمم (max) یا دو مینیمم (min) متوالی در توابع سینوسی و کسینوسی برابر دورهٔ تناوب است، پس نتیجه می‌شود که فاصلهٔ یک ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است.



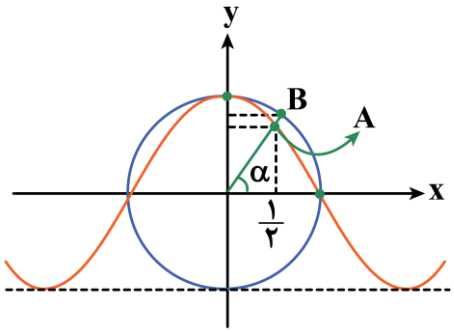
تاز

۷- در شکل مقابل، دایرهٔ مثلثاتی و نمودار تابع $f(x)=a\cos bx$ رسم شده است. اگر طول نقطهٔ A برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، عرض نقطهٔ B کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۲)



می‌دانیم شعاع دایرهٔ مثلثاتی یک است، پس نتیجه می‌شود: $f(۱)=۰$ و $f(۰)=۱$.

$$f(x)=a\cos bx\xrightarrow{x=۰}f(۰)=a=۱$$

$$f(x)=\cos bx\xrightarrow{x=۱}\cos b=۰\Rightarrow b=\frac{\pi}{۲}$$

پس داریم:

$$f(x)=\cos(\frac{\pi}{۲}x)\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}}f(\frac{۱}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow y_A=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

یعنی:

$$A\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۲}\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{matrix}\right.$$

اما می‌دانیم اگر نقطهٔ B روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، آن‌گاه $B\begin{vmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{vmatrix}$ که در آن α زاویهٔ مرکزی است.

$$\cot\alpha=\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$$

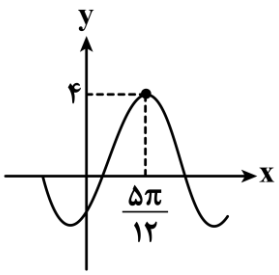
$$\Rightarrow\sin^{۲}\alpha=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

نکته!

شعاع دایرهٔ مثلثاتی یک است.

مثال

۸- تابع $y=a-۳\sin(bx+\frac{\pi}{۳})$ رسم شده است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) -۱

۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۲)

می‌دانیم:

$$\max=a+|-۳|=۴\Rightarrow a=۱$$

$$y=۱-۳\sin(bx+\frac{\pi}{۳})$$

تابع در $x=۰$ صعودی است، بنابراین $-۳b>۰$ و در نتیجه $b<۰$ می‌باشد. حال برای یافتن b دو روش داریم:

روش اول

نقطهٔ $A(\frac{۵\pi}{۱۲},۴)$ روی نمودار است، پس:

$$۴=۱-۳\sin(\frac{۵\pi}{۱۲}b+\frac{\pi}{۳})\Rightarrow\sin(\frac{۵\pi}{۱۲}b+\frac{\pi}{۳})=-۱$$

با توجه به این‌که $b<۰$ است؛ پس اولین نقطهٔ min در حالتی است که:

$$\frac{۵\pi}{۱۲}b+\frac{\pi}{۳}=-\frac{\pi}{۲}$$

$$\frac{۵\pi}{۱۲}b=-\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow b=-۲$$

$$a+b=۱-۲=-۱$$

روش دوم

طول اولین نقطهٔ max تابع $y=\sin x$ برابر $\frac{\pi}{۲}$ است. در تابع $y=\sin(x-\frac{\pi}{۳})$ این نقطه به $\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۶}$ انتقال می‌یابد. در تابع $y=\sin(|b|x-\frac{\pi}{۳})$ این نقطه به $\frac{۵\pi}{۶|b|}$ تبدیل می‌شود، بنابراین:

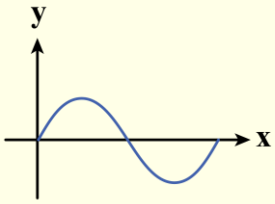
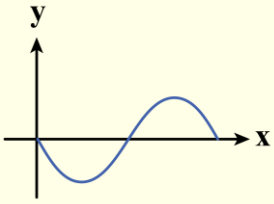
$$\frac{۵\pi}{۶|b|}=\frac{۵\pi}{۱۲}\Rightarrow|b|=۲\Rightarrow b=-۲$$

خواهیم داشت:

$$a+b=۱-۲=-۱$$

تعیین علامت a و b در تابع سینوسی

در تابع $y = a\sin(bx) + c$ برای تعیین علامت a و b داریم:

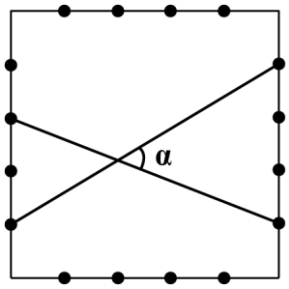
$ab > 0$	$ab < 0$
	
با شروع از $x = 0$ نمودار به صورت صعودی است و موج نمودار مشابه موج تابع سینوسی $y = \sin x$ است.	با شروع از $x = 0$ نمودار به صورت نزولی است و موج نمودار مشابه موج تابع سینوسی $y = -\sin x$ است.

آزمون ماز

۲۹ آبان‌ماه

حسابان ۲

۱- در مربع شکل مقابل هر ضلع به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۵}{۱۹}$

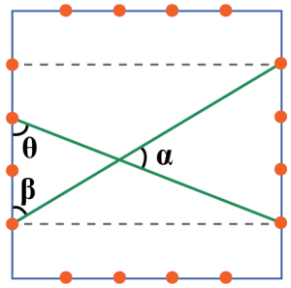
۲) $\frac{۲۵}{۱۷}$

۳) $\frac{۵}{۳}$

۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

مجموع زوایای داخلی در هر مثلث ۱۸۰° است، پس داریم:



$$\tan\alpha = \tan(\pi-\theta-\beta)$$

با استفاده از روابط نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل داریم:

$$\tan(\pi-(\theta+\beta)) = -\tan(\theta+\beta)$$

با استفاده از تانژانت مجموع دو زاویه داریم:

$$-\tan(\theta+\beta) = -\frac{\tan\theta+\tan\beta}{۱-\tan\theta\tan\beta}$$

در نتیجه:

$$\tan\alpha = -\frac{\frac{۵}{۲}+\frac{۵}{۳}}{۱-\frac{۲۵}{۶}} = \frac{۲۵}{۱۹}$$

۲- معادلهٔ $\cos 4x+\cos x=0$ در بازهٔ $[0,\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۲۰۲)

ابتدا جواب‌های کلی معادله را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos 4x+\cos x=0 \Rightarrow \cos 4x=-\cos x$$

$$\cos 4x=\cos(\pi-x) \Rightarrow 4x=2k\pi\pm(\pi-x)$$

$$\begin{cases} 4x=2k\pi+\pi-x \Rightarrow 5x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{5} \\ 4x=2k\pi-\pi+x \Rightarrow 3x=2k\pi-\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر k جواب‌هایی که در بازهٔ $[0,\pi]$ قرار دارند را می‌یابیم:

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5},\frac{\pi}{3}$	π

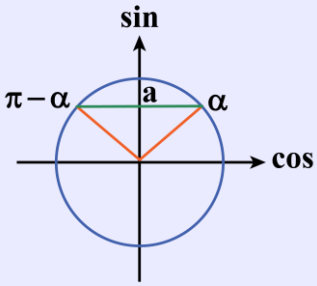
بنابراین معادله در بازهٔ $[0,\pi]$ دارای ۴ جواب است.

معادلات مثلثاتی

معادلهٔ مثلثاتی معادله‌ای است که مجهول آن (x) در کمان یک نسبت مثلثاتی قرار بگیرد. مثلاً معادلهٔ $\sin x=\frac{1}{2}$ یک معادلهٔ مثلثاتی است که با حل این معادله به دنبال زوایایی هستیم که سینوس آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است.

برای حل معادلات مثلثاتی باید در دو طرف تساوی، نسبت مثلثاتی یکسان و هم‌علامت داشته باشیم. اگر در یک طرف به جای نسبت مثلثاتی عدد داشتیم، ابتدا باید به جای آن، نسبت مثلثاتیِ زاویه‌ای که این عدد را می‌دهد بنویسیم؛ سپس با قواعد زیر جواب‌های کلی معادله را به‌دست آوریم:

۱) معادلهٔ مثلثاتی سینوسی:

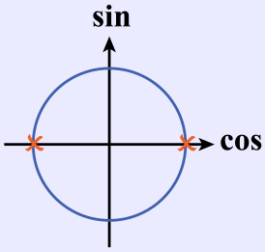


$$\sin x=a \xrightarrow{-1\le a\le 1} \sin x=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$$

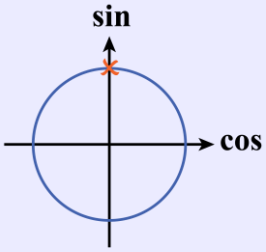
$$\sin x=\sin y \longrightarrow \begin{cases} x=2k\pi+y \\ x=2k\pi+\pi-y \end{cases}$$

حالت‌های خاص:

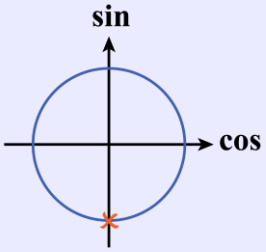
۱) $\sin A=0 \Rightarrow A=k\pi$



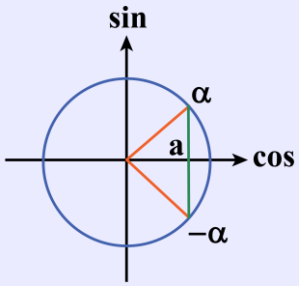
۲) $\sin A=1 \Rightarrow A=2k\pi+\frac{\pi}{2}$



۳) $\sin A=-1 \Rightarrow A=2k\pi-\frac{\pi}{2}$



۲) معادلهٔ مثلثاتی کسینوسی:

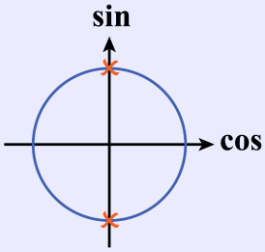


$$\cos x = a \xrightarrow{-1 \le a \le 1} \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

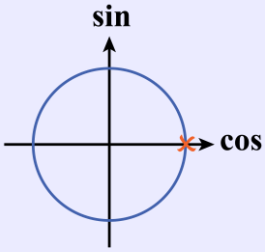
$$\cos x = \cos y \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi - y \end{cases}$$

حالت‌های خاص:

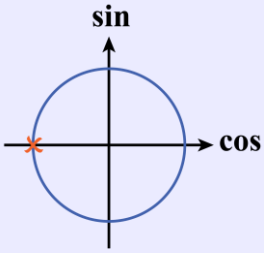
۱) $\cos A = 0 \Rightarrow A = k\pi + \frac{\pi}{2}$



۲) $\cos A = 1 \Rightarrow A = 2k\pi$



۳) $\cos A = -1 \Rightarrow A = 2k\pi + \pi$



نمونه‌های باحال ببین!

معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

۱) $\sin^2 x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$

$$\sin x(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

۲) $\sin 4x = \sin x$

$$\sin 4x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 4x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 5x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

۳) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

۴) $\cos ۲x = \cos x$

$$\cos ۲x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \\ ۲x = ۲k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \\ ۳x = ۲k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\cup} x = \frac{۲k\pi}{۳}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

توجه!

برای حل معادلات مثلثاتی باید در دو طرف تساوی دو نسبت مثلثاتی یکسان و هم‌علامت داشته باشیم. یعنی اگر نسبت‌ها یکسان نبودند باید با استفاده از روابط زوایای متمم نسبت‌ها را یکی کنیم و سپس اگر علامت منفی پشت یک نسبت بود، آن را با استفاده از روابط زوایای قرینه یا مکمل از بین ببریم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$\sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right)$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x = -\cos x$ را به‌دست آورید.

پاسخ تشریحی:

$$\cos ۳x = -\cos x \Rightarrow \cos ۳x = \cos(\pi - x) \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm (\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی در بازه‌ای خاص

برای به‌دست آوردن جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی به‌طوری که جواب‌های به‌دست آمده در بازهٔ $[\alpha, \beta]$ باشند، کافی است در مجموعه جواب معادلهٔ مثلثاتی به جای k، اعداد صحیح مناسب را قرار دهیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin ۳x + ۱ = ۰$ در بازهٔ $[۰, \pi]$ چند جواب دارد؟

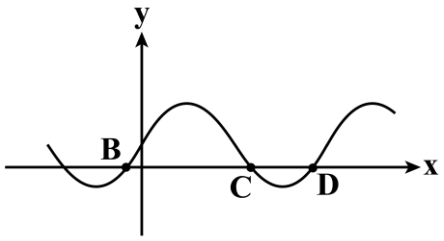
پاسخ تشریحی:

$$۲\sin ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \sin ۳x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin ۳x = \sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right) \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۱۸} \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{۷\pi}{۱۸} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

k	۰		۱		۲	
x	$-\frac{\pi}{۱۸}$ ✗	$\frac{۷\pi}{۱۸}$ ✓	$\frac{۱۱\pi}{۱۸}$ ✓	$\frac{۱۹\pi}{۱۸}$ ✗	$\frac{۲۳\pi}{۱۸}$ ✗	$\frac{۳۱\pi}{۱۸}$ ✗

پس معادلهٔ فوق در بازهٔ $[۰,\pi]$ دارای ۲ جواب است.

۳- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=۱+۲\sin\frac{x}{۲}$ به شکل مقابل است. در این صورت نسبت طول پاره‌خط BC به طول پاره‌خط CD کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) ۳

۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۲۰۲)

برای محاسبهٔ طول نقاط B، C و D باید معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنیم و دو جواب مثبت کوچک‌تر در بین جواب‌های مثبت و همچنین اولین جواب منفی قبل از $x=۰$ را بیابیم.

$$۱+۲\sin\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\sin\frac{x}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin\frac{x}{۲}=\sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{۲}=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ \frac{x}{۲}=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۴k\pi-\frac{\pi}{۳}\\ x=۴k\pi+\frac{۷\pi}{۳}\end{cases}$$

k	۰	۱
x	$-\frac{\pi}{۳},\frac{۷\pi}{۳}$	$\frac{۱۱\pi}{۳}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_B=-\frac{\pi}{۳}\\ x_C=\frac{۷\pi}{۳}\\ x_D=\frac{۱۱\pi}{۳}\end{cases}$$

اکنون می‌توانیم طول پاره‌خط‌ها را حساب کنیم:

$$BC=\frac{۷\pi}{۳}-(-\frac{\pi}{۳})=\frac{۸\pi}{۳}\ ,\ CD=\frac{۱۱\pi}{۳}-\frac{۷\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}$$

درنتیجه:

$$\Rightarrow\frac{BC}{CD}=\frac{\frac{۸\pi}{۳}}{\frac{۴\pi}{۳}}=۲$$

۴- بیش‌ترین مقدار عبارت $P=\frac{۲-۲\tan^۲ ۲x}{۱+\tan^۲ ۲x}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۱۰۴)

ابتدا ضابطهٔ P را ساده می‌کنیم:

$$P=\frac{۲(۱-\tan^۲ ۲x)}{۱+\tan^۲ ۲x}=۲\cos ۴x$$

(زیرا طبق فرمول‌های مثلثاتی همواره وقتی $\cos\alpha\neq ۰$ باشد، رابطهٔ $\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\cos ۲\alpha$ برقرار است.)

پس بیش‌ترین مقدار P برابر ۲ است.

رفع ابهام!

فرمول مثلثاتی $\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\cos ۲\alpha$ از کجا اومد؟ از این‌جا:

$$\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۱-\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}}{۱+\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}}=\frac{\frac{\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}}{\frac{\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}}=\frac{\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha}{۱}=\cos ۲\alpha$$

ماز

۵- اگر $\tan(\frac{\alpha}{۲}+\beta)=۳$ و $\tan(\alpha+\frac{\beta}{۲})=۷$ باشد، آن‌گاه حاصل $\tan(\frac{\alpha-\beta}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۱}$ ۲) $\frac{۴}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

ابتدا با دقت به زوایای $\alpha+\frac{\beta}{۲}$، $\frac{\alpha}{۲}+\beta$ و $\frac{\alpha-\beta}{۲}$ می‌یابیم که تفاضل $\frac{\alpha-\beta}{۲}$ برابر $\alpha+\frac{\beta}{۲}$ و $\frac{\alpha}{۲}+\beta$ است؛ یعنی:

$$\frac{\alpha-\beta}{۲}=(\alpha+\frac{\beta}{۲})-(\frac{\alpha}{۲}+\beta)$$

پس بنابر رابطهٔ تانژانت تفاضل دو زاویه داریم:

$$\tan(\underbrace{(\alpha+\frac{\beta}{۲})-(\frac{\alpha}{۲}+\beta)}_{\frac{\alpha}{۲}-\frac{\beta}{۲}})=\frac{\tan(\alpha+\frac{\beta}{۲})-\tan(\frac{\alpha}{۲}+\beta)}{۱+\tan(\alpha+\frac{\beta}{۲})\tan(\frac{\alpha}{۲}+\beta)}=\frac{۷-۳}{۱+۲۱}=\frac{۴}{۲۲}=\frac{۲}{۱۱}$$

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{۱}{\tan(\alpha\pm\beta)}$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

۶- اگر $x=\frac{\pi}{۲۴}$ کوچک‌ترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $\tan ۳x\cdot\tan nx=۱$ باشد، مقدار طبیعی n کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

می‌دانیم که برای حل معادلهٔ مثلثاتی تانژانتی باید دو طرف تساوی تانژانت داشته باشیم. پس:

$$\tan nx=\frac{۱}{\tan ۳x}=\cot ۳x=\tan(\frac{\pi}{۲}-۳x)$$

$$\Rightarrow nx=\frac{\pi}{۲}-۳x+k\pi$$

$$\Rightarrow (n+۳)x=\frac{\pi}{۲}+k\pi$$

می‌دانیم که به‌ازای $k=۰$ کوچک‌ترین جواب مثبت معادله به‌دست می‌آید. در نتیجه:

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲n+۶}$$

و از آن‌جا که در سؤال گفته شده کوچک‌ترین جواب مثبت معادله برابر با $\frac{\pi}{۲۴}$ است، پس:

$$\frac{\pi}{۲n+۶}=\frac{\pi}{۲۴}\Rightarrow n=۹$$

۷- معادلهٔ $\sin^۲ ۲x+\cos^۲ ۶x=۱$ در بازهٔ $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ چند جواب دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۲۰۲)

ابتدا معادله را به معادله‌ای تبدیل می‌کنیم که تنها یک نوع نسبت مثلثاتی در آن وجود داشته باشد:

$$\sin^۲ ۲x+\cos^۲ ۶x=۱$$

$$\Rightarrow \sin^۲ ۲x=۱-\cos^۲ ۶x$$

$$\Rightarrow \sin^۲ ۲x=\sin^۲ ۶x$$

$$\Rightarrow \frac{۱-\cos ۴x}{۲}=\frac{۱-\cos ۱۲x}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱-\cos ۴x=۱-\cos ۱۲x$$

$$\Rightarrow \cos ۴x=\cos ۱۲x$$

$$\Rightarrow ۱۲x=۲k\pi\pm ۴x$$

$$\begin{cases} ۱۲x=۲k\pi+۴x\Rightarrow ۸x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴} \\ ۱۲x=۲k\pi-۴x\Rightarrow ۱۶x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۸} \end{cases}\xrightarrow{\cup} x=\frac{k\pi}{۸}$$

به‌ازای مقادیر $k=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ جواب‌های $x=۰$، $x=\frac{\pi}{۸}$، $x=\frac{\pi}{۴}$، $x=\frac{۳\pi}{۸}$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ در بازهٔ موردنظر قرار دارند که تعداد آن‌ها برابر ۵ است.

نسبت‌های مثلثاتی دو برابر زاویه

اگر در محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه، هر دو زاویه را α در نظر بگیریم، داریم:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \sin 2\bigcirc = 2\sin\bigcirc\cos\bigcirc$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{به‌طور کلی}} \cos 2\bigcirc = \begin{cases} \cos^2\bigcirc - \sin^2\bigcirc \\ 1 - 2\sin^2\bigcirc \\ 2\cos^2\bigcirc - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \tan 2\bigcirc = \frac{2\tan\bigcirc}{1-\tan^2\bigcirc}$$

جرقهٔ ذهنی!

بسیاری از اوقات برای از بین بردن توان ۲ برای سینوس یا کسینوس در معادلات مثلثاتی، از روابط بالا به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

مثال

۸- میانگین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۴ ـ ۱۲۰۲)

ابتدا معادله را به معادله‌ای تبدیل می‌کنیم که تنها یک نوع نسبت مثلثاتی در آن وجود داشته باشد:

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{-1\pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{2} & \text{جواب ندارد.} \\ \sin x = \frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$$

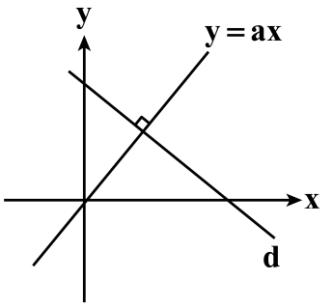
$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=1} x = \frac{17\pi}{6} \end{cases}$$

کوچک‌ترین جواب معادله در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲}, ۳\pi\right]$ برابر $\frac{\pi}{۶}$ و بزرگ‌ترین جواب آن برابر $\frac{۱۷\pi}{۶}$ است که میانگین آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\frac{۱۷\pi}{۶}+\frac{\pi}{۶}}{۲}=\frac{۳\pi}{۲}$$

تست

۹- در شکل مقابل، خط d با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α می‌سازد. به‌ازای کدام مقدار a، رابطهٔ $\cos ۲\alpha = ۰/۹$ برقرار است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۱۹}$
۴) $\sqrt{۱۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۱۰۴)

چون خط d با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ α می‌سازد، پس شیب خط d برابر $\tan\alpha$ است. از طرفی داریم:

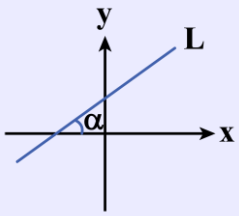
$$\cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} \Rightarrow \frac{۹}{۱۰}=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} \Rightarrow ۹+۹\tan^۲\alpha=۱۰-۱۰\tan^۲\alpha \Rightarrow ۱۹\tan^۲\alpha=۱ \Rightarrow \tan^۲\alpha=\frac{۱}{۱۹}$$

چون α منفرجه است، پس باید $\tan\alpha$ منفی باشد. $\Rightarrow \tan\alpha=\frac{-۱}{\sqrt{۱۹}} \Rightarrow$ شیب خط d: $m=-\frac{۱}{\sqrt{۱۹}}$

چون خطوط بر هم عمودند. $\Rightarrow a.(\frac{-۱}{\sqrt{۱۹}})=-۱ \Rightarrow a=\sqrt{۱۹}$

شیب خط و تانژانت

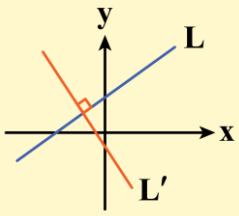
شیب یک خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.



$$m_L=\tan\alpha$$

شیب خطوط عمود برهم

اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌هایشان ۱− می‌باشد:



$$L\perp L' \Leftrightarrow m_L\times m_{L'}=-۱$$

روابط مثلثاتی زوایای دو برابر کمان برحسب تانژانت

نسبت‌های مثلثاتی ۲ برابر یک زاویه را می‌توان برحسب tan آن زاویه نوشت:

$$\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} \qquad \cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} \qquad \cot ۲\alpha=\frac{۱}{\tan ۲\alpha}$$

۱۰- معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin ۴x}{۱+\cos ۴x}=\tan(x-\frac{\pi}{۸})$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

طبق فرمول مثلثاتی $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{۲}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\sin ۴x}{۱+\cos ۴x}=\tan ۲x$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\tan ۲x=\tan(x-\frac{\pi}{۸})\Rightarrow ۲x=k\pi+x-\frac{\pi}{۸}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۸}$$

تنها جواب معادله در بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌ازای $k=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با $x=\frac{۷\pi}{۸}$.

پس معادله در بازهٔ مطلوب فقط یک جواب دارد.

تذکر!

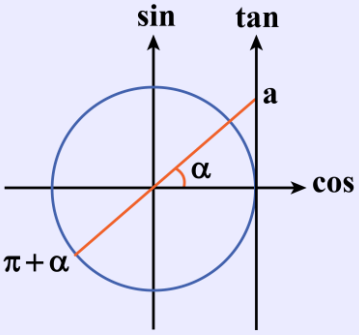
دقت کنید $x=\frac{۷\pi}{۸}$ نباید مخرج سمت چپ تساوی در معادله را صفر کند و همین‌طور به‌ازای $x=\frac{۷\pi}{۸}$ عبارت سمت راست معادله باید تعریف شده باشد که هر دو شرط برقرار است.

رفع ابهام!

بیاید بریم ببینیم فرمول $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{۲}$ از کجا اومد؟

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۱+\left(۲\cos^{۲}\left(\frac{\alpha}{۲}\right)-۱\right)}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^{۲}\left(\frac{\alpha}{۲}\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}=\tan\frac{\alpha}{۲}$$

معادلهٔ مثلثاتی تانژانت



$$\tan x=a\Rightarrow \tan x=\tan\alpha\xrightarrow{a\in\mathbb{R}}x=k\pi+\alpha$$
$$\tan x=\tan y\Rightarrow x=k\pi+y$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$\tan x=-۱\Rightarrow \tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{۴}\right)\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}$$

$$\tan ۴x=\tan x\Rightarrow ۴x=k\pi+x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}$$

آزمون ماز

۱۳ آذرماه

حسابان ۲

۱- دامنهٔ تعریف تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[-۱,۲]$ می‌باشد. دامنهٔ تعریف تابع $y=۲-f(۳-\frac{x}{۴})$ کدام است؟

۱) $[۴,۱۶]$ ۲) $[-\frac{۵}{۴},-\frac{۱}{۲}]$ ۳) $[-\frac{۵}{۴},\frac{۱}{۲}]$ ۴) $[۱,۱۲]$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

بررسی سریع:

$$-۱\le ۳-\frac{x}{۴}\le ۲\Rightarrow -۴\le -\frac{x}{۴}\le -۱\Rightarrow ۴\le x\le ۱۶$$

با توجه به این‌که دامنهٔ تابع $y=f(x)$ برابر با $[-۱,۲]$ است، می‌توان گفت:

$$-۱\le ۳-\frac{x}{۴}\le ۲\Rightarrow -۴\le -\frac{x}{۴}\le -۱\Rightarrow ۴\le x\le ۱۶$$

چطوری دامنه و برد تابع بعد از انتقال محاسبه می‌شه؟

اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[m,n]$ باشد، برای تعیین دامنهٔ تابع $y=af(bx+c)+d$ کافی است نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$m\le bx+c\le n$$

اگر برد تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[p,q]$ باشد، برای تعیین برد تابع $y=af(bx+c)+d$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$p\le f(x)\le q\Rightarrow p\le f(bx+c)\le q\Rightarrow$$ سه طرف را در a ضرب و با d جمع می‌کنیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[-۱,۲]$ و $[۰,۴]$ باشد، دامنه و برد تابع $y=۲+۳f(۲x-۵)$ را محاسبه کنید.

$$\text{دامنه}\Rightarrow -۱\le ۲x-۵\le ۲\xrightarrow{+۵} ۴\le ۲x\le ۷\Rightarrow ۲\le x\le \frac{۷}{۲}$$

$$D_{۲+۳f(۲x-۵)}=[۲,\frac{۷}{۲}]$$

برد $\Rightarrow 0 \le f(x) \le 4 \Rightarrow 0 \le f(2x-5) \le 4 \xrightarrow{\times 3} 0 \le 3f(2x-5) \le 12 \xrightarrow{+2} 2 \le 2+3f(2x-5) \le 14$

$R_{2+3f(2x-5)} = [2,14]$

ماز

۲- نمودار تابع $f(x)=2x^2-x-2$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده و طول نقاط واقع بر آن را نصف می‌کنیم. اگر تابع حاصل را g بنامیم، وسیع‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع g در آن بازه، نزولی اکید باشد، کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{16},+\infty)$ ۲) $(-\infty,\frac{1}{16}]$ ۳) $[-\frac{1}{8},+\infty)$ ۴) $(-\infty,\frac{1}{8}]$

پاسخ: گزینهٔ ۳ **(متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)**

بررسی سریع:

$f(x)=2x^2-x-2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y=-2x^2-x+2 \xrightarrow{x\to 2x} g(x)=-8x^2-2x+2$

رأس سهمی $g(x)$ برابر با $-\frac{-2}{2(-8)}=-\frac{1}{8}$ است. پس در بازهٔ $[-\frac{1}{8},+\infty)$ اکیداً نزولی است.

مراحل تبدیل را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$f(x)=2x^2-x-2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} \underbrace{y=-(2(-x)^2-(-x)-2)}_{y=-2x^2-x+2} \xrightarrow[x\to 2x]{\text{طول نقاط نصف}} \underbrace{y=-2(2x)^2-(2x)+2}_{g(x)=-8x^2-2x+2}$$

تابع $g(x)$ یک سهمی است که دهانهٔ آن رو به پایین است، بنابراین در بازهٔ $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ اکیداً نزولی می‌باشد.

تابع در بازهٔ $[-\frac{-2}{2\times(-8)},+\infty)$ یعنی $[-\frac{1}{8},+\infty)$ نزولی اکید است. $\Rightarrow g(x)=-8x^2-2x+2$

توابع صعودی و نزولی

تابع f را **«صعودی»** می‌گوییم هرگاه در آن با افزایش x، y زیاد شده یا ثابت باقی بماند.

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \ge f(x_1) :$$

تابع f را **«اکیداً صعودی»** گوییم هرگاه در آن با افزایش x، y زیاد شود.

$$x_2 > x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) : \text{اکیداً صعودی}$$



تابع f را **«نزولی»** گوییم هرگاه در آن با افزایش x، y کم شده یا ثابت باقی بماند.

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1) : \text{نزولی}$$

تابع f را «**اکیداً نزولی**» گوییم هرگاه در آن با افزایش x، y کم شود.

$$x_۲ > x_۲ \Rightarrow f(x_۲) < f(x_۱) : \text{اکیداً نزولی}$$



یکنوایی

تابعی که **صعودی یا نزولی** باشد را **یکنوا** و تابعی که **اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی** باشد را **اکیداً یکنوا** می‌گوییم.

تابعی که **در بازه‌ای صعودی و در بازه‌ای نزولی** باشد را **غیریکنوا** می‌گوییم.

تذکر!

تابع ثابت $f(x)=k$ هم صعودی و هم نزولی (یکنوا) می‌باشد.

مثال

۳- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x+۲$ و $x-۱$ به ترتیب -۶ و صفر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^۲+f(x-۱)$ بر $x^۲-x-۲$ کدام است؟

۱) $۲x+۱$ ۲) $۲x-۱$ ۳) $۳x-۲$ ۴) $۳x+۲$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+۲$ و $x-۱$ به ترتیب -۶ و صفر است، بنابراین:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x+۲ \\ \vdots & \\ \hline -۶ & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} f(x) & x-۱ \\ \vdots & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$f(-۲)=-۶ \qquad f(۱)=۰$$

در تقسیم $x^۲+f(x-۱)$ بر $x^۲-x-۲$، چون مقسوم‌علیه درجهٔ دوم است، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم، حداکثر درجهٔ ۱ است، بنابراین باقی‌مانده را $r(x)=ax+b$ فرض می‌کنیم و طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{array}{l|l} x^۲+f(x-۱) & x^۲-x-۲ \\ \vdots & Q(x) \\ \hline ax+b & \end{array}$$

$$x^۲+f(x-۱)=(\underbrace{x^۲-x-۲}_{(x-۲)(x+۱)})\times Q(x)+ax+b$$

با جای‌گذاری $x=۲$ و $x=-۱$ در عبارت قبل به‌دست می‌آید:

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲ \Rightarrow ۴+f(۱)=۲a+b \Rightarrow ۲a+b=۴ \\ x=-۱ \Rightarrow ۱+f(-۲)=-a+b \Rightarrow -a+b=-۵ \end{cases} \Rightarrow a=۳, b=-۲$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^۲+f(x-۱)$ بر $x^۲-x-۲$ برابر $۳x-۲$ است.

قضیهٔ تقسیم

در تقسیم چندجمله‌ای $A(x)$ بر چندجمله‌ای $B(x)$، اگر خارج‌قسمت $q(x)$ و باقی‌مانده $r(x)$ فرض شود، داریم:

مقسوم ↑

$A(x)$ | $B(x)$ → مقسوم‌علیه

$\vdots$ $q(x)$ → خارج‌قسمت

$r(x)$ → باقی‌مانده

$$A(x)=B(x)\times q(x)+r(x)$$

درجهٔ باقی‌مانده!

درجهٔ باقی‌مانده یعنی $r(x)$ باید از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر باشد.

درجهٔ خارج‌قسمت!

به طور کلی، اگر مقسوم از درجهٔ n و مقسوم‌علیه از درجهٔ m باشد $(n>m)$، آن‌گاه خارج‌قسمت از درجهٔ $n-m$ و باقی‌مانده حداکثر از درجهٔ $m-1$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم بر چندجمله‌ای خطی

اگر مقسوم‌علیه از درجهٔ اول باشد، باقی‌مانده از درجهٔ صفر (عدد) است که برای محاسبهٔ آن، کافی است ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم جای‌گذاری کنیم.

$A(x)$ | $ax+b$

$\vdots$ $q(x)$

r

$$A(x)=(ax+b)\times q(x)+r \xrightarrow{x=-\frac{b}{a}} r=A(-\frac{b}{a})$$

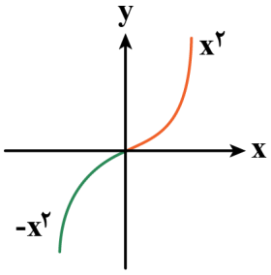
مثال

۴- هرگاه تابع $f(x)=|2x-4|(ax+b)$ در مجموعهٔ $\mathbb{R}$ نزولی اکید باشد، زوج‌مرتب (a,b) کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(-2,4)$ ۲) $(2,4)$ ۳) $(-2,-4)$ ۴) $(2,-4)$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم تابع $y=x|x|$ در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است:



$$y=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x\leq 0\end{cases}$$

لذا اگر تابع $f(x)=|2x-4|(ax+b)$ بخواهد اکیداً یکنوا باشد، باید ریشهٔ $2x-4$ و $ax+b$ یکسان باشد، پس:

$$2x-4=0\Rightarrow x=2\xrightarrow{ax+b=0}2a+b=0$$

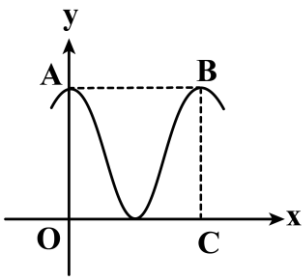
یعنی $b=-2a$ می‌باشد، به این ترتیب:

$$f(x)=|2x-4|(ax+b)=|2x-4|(ax-2a)\Rightarrow f(x)=2a(x-2)|x-2|$$

تابع $y=(x-2)|x-2|$ اکیداً صعودی است، پس برای آن‌که f اکیداً نزولی باشد، باید $a<0$ باشد و چون $b=-2a$ است، پس: $b>0$

لذا زوج‌مرتب $(-2,4)$ قابل قبول است.

۵- بخشی از نمودار تابع $f(x)=a-2\sin^2(\frac{\pi}{b}x)$ شکل مقابل است. اگر چهارضلعی OABC مربع باشد، مقدار $f(\frac{11}{3})$ چه عددی است؟



۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۲)

به کمک اتحاد $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=a-(1-\cos(\frac{2\pi}{b}x))=\cos(\frac{2\pi}{b}x)+a-1$$

با توجه به نمودار می‌بینیم $\min(f)=0$ می‌باشد، پس:

$$\min(f)=a-1-1=0\Rightarrow a=2$$

بنابراین:

$$\max(f)=a-1+1=a\Rightarrow \max(f)=2$$

مشخص است که $T=OC$ و چون چهارضلعی OABC مربع است، پس $T=\max(f)=2$ می‌باشد و داریم:

$$T=2\Rightarrow T=\frac{2\pi}{|\frac{2\pi}{b}|}=2\Rightarrow |b|=2\Rightarrow b=\pm 2$$

حال به محاسبهٔ $f(\frac{11}{3})$ می‌پردازیم:

$$f(x)=1+\cos(\pm\pi x)\Rightarrow f(\frac{11}{3})=1+\cos(\pm\frac{11\pi}{3})=1+\cos(\pm(4\pi-\frac{\pi}{3}))=1+\cos(\mp\frac{\pi}{3}))=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

دورهٔ تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم توابع سینوسی و کسینوسی

در مورد توابع $f(x)=a\sin(bx+c)+d$ یا $f(x)=a\cos(bx+c)+d$ می‌توان گفت:

$$\min(f)=-|a|+d$$
$$\max(f)=|a|+d$$

دورهٔ تناوب: $T=\frac{2\pi}{|b|}$

راهنمای مسیرت

آیا ما نمودار تابع‌های مثلثاتی سینوسی و کسینوسی با توان ۲ رو بلدیم؟ خیر!

پس چیکار باید کرد؟ باید هر موقع از این دست سؤالات داشتیم که نمودار داده شده بود و ضابطه توان ۲ داشت، با استفاده از روابط طلایی در اولین قدم توان دوم رو توی فرمول از بین ببریم.

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} 1-2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

مثال

۶- اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ جواب‌های معادلهٔ $2x^2 - x - 4 = 0$ باشند، مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

از آن‌جایی که $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ جواب‌های معادلهٔ $2x^2 - x - 4 = 0$ هستند، بنابراین:

$$\tan\alpha + \tan\beta = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \tan\alpha \times \tan\beta = \frac{-4}{2} = -2$$

حال به محاسبهٔ $\tan(\alpha+\beta)$ می‌پردازیم، ببینید:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \times \tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}}{1-(-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

یادآوری روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

اگر α و β ($\alpha > \beta$) ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم:

۱) $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

۲) $P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

۳) $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

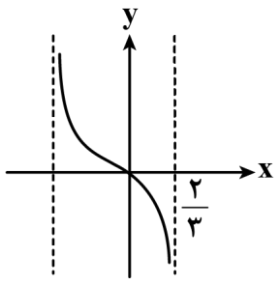
۴) $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}}$

۵) $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

۶) $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$

مثال

۷- بخشی از نمودار تابع $f(x) = \sqrt{3} - \tan(ax+b)$ با فرض $0 < a,b < \frac{\pi}{2}$ شکل مقابل است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟



۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۲ ـ ۱۲۰۲)

با توجه به نمودار تابع $f(0) = 0$ می‌باشد، پس:

$$f(0) = \sqrt{3} - \tan b = 0 \Rightarrow \tan b = \sqrt{3} \xrightarrow{0<b<\frac{\pi}{2}} b = \frac{\pi}{3}$$

از طرفی در $x=\frac{۲}{۳}$ تابع تعریف نشده است، لذا کمان تابع به‌ازای $x=\frac{۲}{۳}$ باید برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد، بنابراین:

$$\frac{۲}{۳}a+b=\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{b=\frac{\pi}{۳}}\frac{۲}{۳}a=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow a=\frac{\pi}{۴}$$

پس حاصل $\frac{b}{a}$ برابر است با:

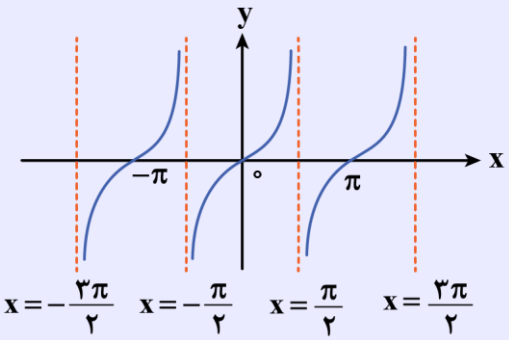
$$\frac{b}{a}=\frac{\frac{\pi}{۳}}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

رسم نمودار تابع تانژانت

دامنه: دامنهٔ تابع $y=\tan x$ برابر $\mathbb{R}-\left\{x=k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\right\}$ است.

برد: برد تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد.

دورهٔ تناوب: دورهٔ تناوب تابع $T=\pi$ می‌باشد.



تابع در حالت کلی غیریکنوا است و یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نمی‌باشد.

۸- اگر $x=\frac{\pi}{۱۲}$ یک جواب معادلهٔ $a+۴\sin^۲x=۲$ باشد، چهارمین جواب مثبت معادله چه عددی است؟

۱) $\frac{۱۷\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۹\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۲۵\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۳\pi}{۱۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۲۰۲)

$\frac{\pi}{۱۲}$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند، بنابراین:

$$a+۴\sin^۲x=۲\Rightarrow a=۲-۴\sin^۲x\Rightarrow a=۲(۱-۲\sin^۲x)\Rightarrow a=۲\cos۲x$$

$$\xrightarrow{\text{جواب معادله }\frac{\pi}{۱۲}}a=۲\cos\frac{\pi}{۶}\Rightarrow a=\sqrt{۳}$$

حال به محاسبهٔ جواب‌های معادله می‌پردازیم:

$$\sqrt{۳}=۲\cos۲x\Rightarrow\cos۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۱۲}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

k	۰	۱	۲	...
x	$\pm\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{۱۱\pi}{۱۲},\frac{۱۳\pi}{۱۲}$	$\frac{۲۳\pi}{۱۲},\frac{۲۵\pi}{۱۲}$	...

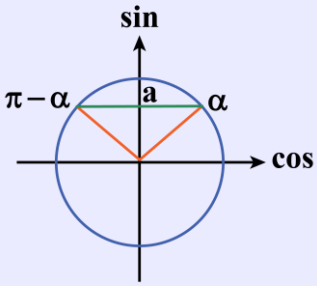
بنابراین چهارمین جواب مثبت معادله برابر $\frac{۲۳\pi}{۱۲}$ است.

معادلات مثلثاتی

معادلهٔ مثلثاتی معادله‌ای است که مجهول آن (x) در کمان یک نسبت مثلثاتی قرار بگیرد. مثلاً معادلهٔ $\sin x = \frac{۱}{۲}$ یک معادلهٔ مثلثاتی است که با حل این معادله به دنبال زوایایی هستیم که سینوس آن‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

برای حل معادلات مثلثاتی باید در دو طرف تساوی، نسبت مثلثاتی یکسان و هم‌علامت داشته باشیم. اگر در یک طرف به جای نسبت مثلثاتی عدد داشتیم، ابتدا باید به جای آن، نسبت مثلثاتیِ زاویه‌ای که این عدد را می‌دهد بنویسیم؛ سپس با قواعد زیر جواب‌های کلی معادله را به‌دست آوریم:

۱) معادلهٔ مثلثاتی سینوسی:

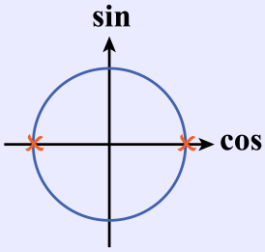


$$\sin x = a \xrightarrow{-۱\le a\le ۱} \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

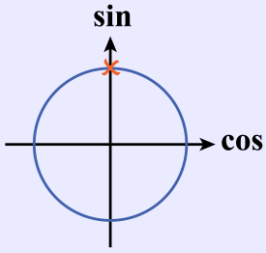
$$\sin x = \sin y \longrightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + y \\ x = ۲k\pi + \pi - y \end{cases}$$

حالت‌های خاص:

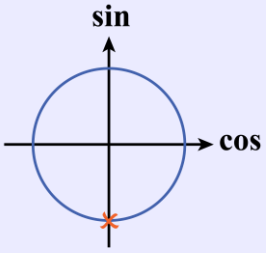
۱) $\sin A = ۰ \Rightarrow A = k\pi$



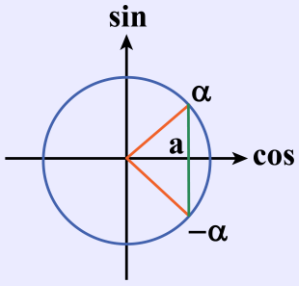
۲) $\sin A = ۱ \Rightarrow A = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$



۳) $\sin A = -۱ \Rightarrow A = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$



۲) معادلهٔ مثلثاتی کسینوسی:

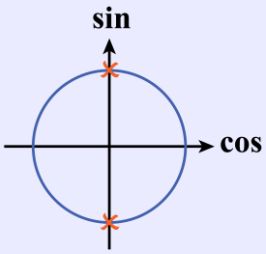


$$\cos x = a \xrightarrow{-۱\le a\le ۱} \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \end{cases}$$

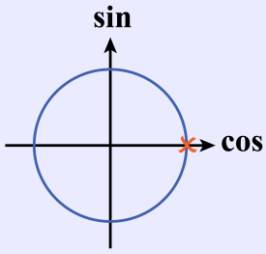
$$\cos x = \cos y \longrightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + y \\ x = ۲k\pi - y \end{cases}$$

حالت‌های خاص:

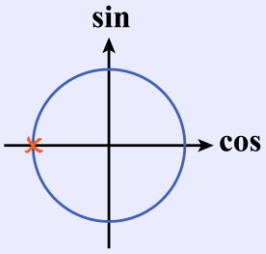
۱) $\cos A = ۰ \Rightarrow A = k\pi + \frac{\pi}{۲}$



۲) $\cos A = ۱ \Rightarrow A = ۲k\pi$



۳) $\cos A = -۱ \Rightarrow A = ۲k\pi + \pi$



۹- اگر $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{ax+b}{(x+۱)(ax-۲)}=-\infty$ باشد، حدود b کدام است؟

۱) $b>۲$ ۲) $b<-۲$ ۳) $b>-۲$ ۴) $b<۲$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۵۱ ـ ۱۲۰۳)

حد هر دو طرف در $x=-۱$ برابر $-\infty$ است، یعنی در $x=-۱$ حدهای راست و چپ هر دو $-\infty$ می‌باشند، پس مخرج در $x=-۱$ ریشهٔ مضاعف دارد.

$$ax-۲=۰\Rightarrow x=\frac{۲}{a}\Rightarrow \frac{۲}{a}=-۱\Rightarrow a=-۲$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{-۲x+b}{(x+۱)(-۲x-۲)}=-\infty\Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{۲x-b}{۲(x+۱)^{۲}}=\frac{-۲-b}{۰^{+}}=-\infty$$

$$\Rightarrow -۲-b<۰\Rightarrow b>-۲$$

حد بی‌نهایت

در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ ، اگر حاصل حد برابر ∞ شود به آن **حد بی‌نهایت** می‌گوییم. در حد توابع کسری که پس از ساده‌سازی صورت و مخرج، حاصل حد صورت، عددی ثابت و غیرصفر، و حاصل حد مخرج برابر صفر (صفرحدی) شود، به جواب ∞ می‌رسیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{g(a)\neq ۰}{(\text{صفرحدی})۰}=\infty$$

یه نکتهٔ طلایی!

$$\frac{\text{عدد مثبت غیرصفر}}{۰^{+}}=+\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت غیرصفر}}{۰^{-}}=-\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی غیرصفر}}{۰^{+}}=-\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی غیرصفر}}{۰^{-}}=+\infty$$

به نمودارهای زیر توجه کنید:



$\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=$ وجود ندارد	$\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=+\infty$

یه نمونهٔ باحال ببین!

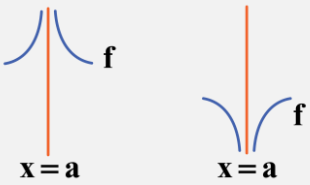
حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{۲x}{x-۳}=\frac{۲\times ۳}{۳^- -۳}=\frac{۶}{۰^-}=-\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۴x}{|x-۳|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{۴x}{|x-۳|}=\frac{۴\times ۳}{۰^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{۴x}{|x-۳|}=\frac{۴\times ۳}{۰^+}=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳}\frac{۴x}{|x-۳|}=+\infty$

۳ حالت خاص رو یادت باشه!

در محاسبهٔ حد بی‌نهایت، اگر پس از ساده‌سازی در مخرج، **عامل صفرشونده با توان زوج** یا **عامل صفرشونده در قدرمطلق** داشته باشیم یا **عامل صفر** شوندهٔ **مخرج به صورت** $۱\pm\sin x$ **یا** $۱\pm\cos x$ باشد، در این صورت حدهای راست و چپ در آن نقطه هر دو هم‌علامت خواهند شد و هر دو شاخه در اطراف مجانب قائم به یک سمت حرکت می‌کنند.



$f(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^{۲n}}\quad g(a)\neq ۰$

$f(x)=\frac{g(x)}{|x-a|}\quad g(a)\neq ۰$

$f(x)=\frac{g(x)}{۱\pm\cos\bigcirc}\quad g(a)\neq ۰$ ↓ مخرج صفر می‌شود

$f(x)=\frac{g(x)}{۱\pm\sin\bigcirc}\quad g(a)\neq ۰$ ↓ مخرج صفر می‌شود

۱۰- به‌ازای چند مقدار حقیقی m رابطهٔ $\lim\limits_{x\to m^-}\frac{۲x-۵}{x^۴-۵x^۳+۶x^۲}=-\infty$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۵۲ ـ ۱۲۰۳)

$x=m$ یکی از ریشه‌های مخرج است که صورت را صفر نمی‌کند:

$x^۴-۵x^۳+۶x^۲=x^۲(x^۲-۵x+۶)=x^۲(x-۲)(x-۳)$

کافی است نقاط $x=۰$، $x=۲$ و $x=۳$ که ریشه‌های مخرج هستند را به جای m قرار داده و درستی حد را بررسی کنیم:

$\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۲x-۵}{x^۲(x-۲)(x-۳)}=\frac{-۵}{۰^+}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۲x-۵}{x^۲(x-۲)(x-۳)}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{۲x-۵}{x^۲(x-۲)(x-۳)}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$

پس هر ۳ مقدار m قابل قبول است.

۱۱- اگر $\lim\limits_{x\to a^-}\log\frac{x^۲-۱}{۴-x^۲}=-\infty$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۲۰۳)

با توجه به این‌که $\lim\limits_{x\to ۰^+}\log x=-\infty$ ، پس باید در نقطهٔ $x=a$ عبارت $\frac{x^۲-۱}{۴-x^۲}$ برابر صفر شود و با توجه به دامنهٔ تابع لگاریتمی و این‌که حد چپ در نقطهٔ a در حال محاسبه است، باید $\frac{x^۲-۱}{۴-x^۲}$ در سمت چپ $x=a$ مثبت باشد تا $\log\frac{x^۲-۱}{۴-x^۲}$ تعریف شده باشد.

$$P=\frac{x^۲-۱}{۴-x^۲}>۰\Rightarrow$$

	-۲	-۱	۱	۲	
P	−	+	−	+	−
	ت ن			ت ن	

تابع داده شده در سمت چپ $x=-۱$ و $x=۲$ تعریف شده است ولی $x=-۱$ ریشهٔ کسر $\frac{x^۲-۱}{۴-x^۲}$ است.

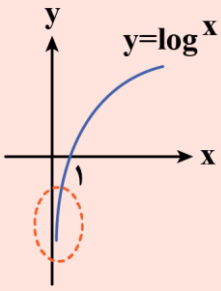
دامنهٔ تابع لگاریتمی

$$h(x)=\log_{g(x)}^{f(x)}\Rightarrow\begin{cases}f(x)>۰ & (۱)\\ g(x)>۰ & (۲)\\ g(x)\neq ۱ & (۳)\end{cases}\Rightarrow D_h=(۱)\cap(۲)\cap(۳)$$

توجه داشته باشید که ۳ شرط بالا فقط برای دامنهٔ لگاریتم است و در حقیقت باید دامنهٔ $f(x)$ و $g(x)$ هم محاسبه شده و با (۱)، (۲) و (۳) اشتراک گرفته شوند تا دامنهٔ واقعی $h(x)$ به‌دست آید.

تذکر!

برای درک بهتر $\lim\limits_{x\to ۰^+}\log x=-\infty$ نمودار $y=\log x$ را ببینید:



۱۲- هرگاه $f(x)=-x^۲+۶x-۶$ به طوری‌که $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۱}{\alpha-f(x+\beta)}=+\infty$ باشد، مقدار $\beta-\alpha$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۵۲ ـ ۱۲۰۳)

روش اول

از آن‌جایی که حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۱}{\alpha-f(x+\beta)}$ برابر $+\infty$ است، پس باید حد مخرج برابر ۰^+ باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to ۲}\alpha-f(x+\beta)=۰^+$$

از طرفی چون هر دو حد راست و چپ در $x=۲$ برابر $+\infty$ شده است و $f(x)$ از درجهٔ دوم است، پس در مخرج عامل $(x-۲)^۲$ وجود دارد:

$$\alpha-f(x+\beta)=(x-۲)^۲\Rightarrow\alpha-\Big(-(x+\beta)^۲+۶(x+\beta)-۶\Big)=(x-۲)^۲\Rightarrow\alpha+(x+\beta)^۲-۶(x+\beta)+۶=(x-۲)^۲$$

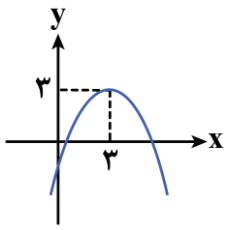
$$\Rightarrow x^۲+(۲\beta-۶)x+\beta^۲-۶\beta+۶+\alpha=x^۲-۴x+۴\Rightarrow\begin{cases}۲\beta-۶=-۴\Rightarrow\beta=۱\\ \beta^۲-۶\beta+۶+\alpha=۴\xrightarrow{\beta=۱}۱-۶+۶+\alpha=۴\Rightarrow\alpha=۳\end{cases}$$

بنابراین $\beta-\alpha$ برابر است با:

$$\beta-\alpha=۱-۳=-۲$$

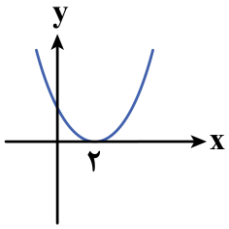
روش دوم

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



$$f(x)=-(x-۳)^۲+۳$$

با توجه به این‌که $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۱}{\alpha-f(x+\beta)}=+\infty$، پس نمودار $y=\alpha-f(x+\beta)$ در $x=۲$ بر محور xها مماس خواهد شد و البته تابع در این نقطه دارای min به شکل مقابل خواهد بود.



پس اگر نمودار f را یک واحد به چپ انتقال دهیم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم به $y=-f(x+۱)$ می‌رسیم که در $M\Big|_{-۳}^{۲}$ دارای min است و با انتقال ۳ واحد به سمت بالا بر محور xها مماس خواهد شد، یعنی:

$$\alpha-f(x+\beta)=۳-f(x+۱)$$

پس:

$$\begin{matrix}\alpha=۳\\ \beta=۱\end{matrix}\Rightarrow\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۳+(x-۲)^۲-۳}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty\Rightarrow\beta-\alpha=۱-۳=-۲$$

۱۳- اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}\frac{a-b\sin(\frac{۳}{۲}x)}{\cos ۲x-a\cos x}=-\infty$ باشد، حدود b کدام است؟

۱) $b>۱$ ۲) $b<-۱$ ۳) $b>-۱$ ۴) $b<۱$

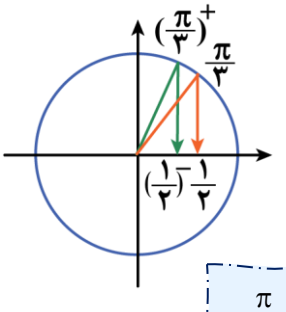
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۵۲ ـ ۱۲۰۳)

چون حد تابع برابر بی‌نهایت شده است، پس $x=\frac{\pi}{۳}$ مخرج را صفر می‌کند:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}\cos ۲x-a\cos x=۰\Rightarrow \cos\frac{۲\pi}{۳}-a\cos\frac{\pi}{۳}=۰\Rightarrow -\frac{۱}{۲}-\frac{a}{۲}=۰\Rightarrow a=-۱$$

با توجه به مقدار a حد را بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}\frac{-۱-b\sin(\frac{۳}{۲}x)}{\cos ۲x+\cos x}=-\infty\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}\frac{-۱-b\sin(\frac{۳}{۲}x)}{\underbrace{۲\cos^۲x-۱}_{\cos ۲x}+\cos x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}\frac{-۱-b\sin(\frac{۳}{۲}x)}{\underbrace{(۲\cos x-۱)}_{۰^-}\underbrace{(\cos x+۱)}_{+}}$$



دقت کنید در مخرج عامل $۲\cos x-۱$ هنگامی که $x\to(\frac{\pi}{۳})^+$ برابر ۰^- می‌شود، زیرا:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}\cos x<\frac{۱}{۲}\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}۲\cos x-۱<۰\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}۲\cos x-۱=۰^-$$

$\cos x$ وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از $\frac{\pi}{۳}$ به آن نزدیک می‌شود از $\frac{۱}{۲}$ کم‌تر است.
$\cos x<۰$

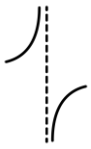
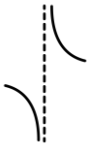
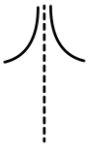
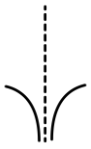
در نتیجه $۲\cos x-۱$ وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از $\frac{\pi}{۳}$ به آن نزدیک می‌شود از صفر کم‌تر است.
$۲\cos x-۱<۰$

بنابراین:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}\frac{-۱-b\sin(\frac{۳}{۲}x)}{\underbrace{(۲\cos x-۱)}_{۰^-}(\cos x+۱)}=-\infty\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}-۱-b\sin(\frac{۳}{۲}x)>۰\Rightarrow -۱-b\sin(\frac{\pi}{۲})^+>۰$$

$$\Rightarrow -۱-b>۰\Rightarrow b<-۱$$

۱۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲-۳(-۱)^{[x]}}{۲-\sqrt{x}}$ در مجاورت مجانب قائم تابع به کدام شکل است؟

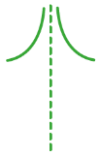
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۲۰۳)

$x=۴$ مجانب قائم تابع است، زیرا ریشهٔ مخرج است و عبارت صورت به‌ازای آن تعریف شده و غیرصفر است به طوری‌که:

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^+}\frac{۲-۳(-۱)^{[x]}}{۲-\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۴^+}\frac{۲-۳\times ۱}{۲-\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۴^+}\frac{-۱}{\underbrace{۲-\sqrt{x}}_{\circ^-}}=+\infty$$

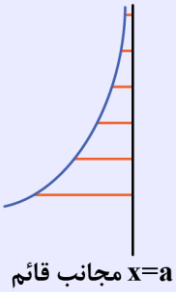
$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=\lim_{x\to ۴^-}\frac{۲-۳(-۱)^{[x]}}{۲-\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۴^-}\frac{۲-۳(-۱)}{۲-\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۴^-}\frac{۵}{\underbrace{۲-\sqrt{x}}_{\circ^+}}=+\infty$$

پس نمودار تابع در همسایگی مجانب قائم $x=۴$ به صورت  است.

مجانب قائم

مجانب قائم خط قائمی است که نمودار تابع به آن نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. اگر خط $x=a$ مجانب قائم تابع $f(x)$ باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$



برای به‌دست آوردن مجانب قائم در توابع کسری ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم به شرطی که ریشهٔ صورت نباشد و حداقل در یک همسایگی آن تابع تعریف شود.

توابعی که دارای برد محدود هستند مانند $y=\sin x$، $y=\cos x$ و ... مجانب قائم ندارند زیرا y نمی‌تواند به ∞ میل کند.

یه نمونهٔ باحال ببین!

مجانب قائم توابع زیر را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{x+۱}{|x|-۱}$$

$$|x|-۱=\circ\Rightarrow|x|=۱\Rightarrow\begin{cases}x=۱ & \text{مجانب قائم}\\ x=-۱ & \text{مجانب قائم نیست زیرا صورت را صفر می‌کند.}\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$$

$\sqrt{x}=\circ\Rightarrow x=\circ$ مجانب قائم نیست

$\sqrt{x-۱}=\circ\Rightarrow x-۱=\circ\Rightarrow x=۱$ مجانب قائم

$$D_g=(۱,+\infty)$$

$x=\circ$ مجانب قائم نیست زیرا تابع در همسایگی آن تعریف نمی‌شود.

۱۵- تابع $f(x)=\frac{۲x^۲-۳x-۱۴}{mx^۲+۴x+۸}$ فقط یک مجانب قائم دارد. برای m چند مقدار مختلف به‌دست می‌آید؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۲۰۳)

چند حالت می‌توانیم بررسی کنیم:

حالت اول

مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta_{\text{مخرج}}=b^۲-۴ac=۰\Rightarrow ۱۶-۳۲m=۰\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

$$f(x)=\frac{(x+۲)(۲x-۷)}{\frac{۱}{۲}(x+۴)^۲}\Rightarrow x=-۴$$ مجانب قائم است.

حالت دوم

مخرج درجه اول باشد، در این حالت داریم: $m=۰$

$$f(x)=\frac{(x+۲)(۲x-۷)}{۴(x+۲)}=\frac{۲x-۷}{۴}$$ فاقد مجانب قائم است، پس $m=۰$ غیرقابل قبول است.

حالت سوم

ریشهٔ صورت، همان ریشهٔ مخرج باشد تا پس از ساده‌سازی کسر، عبارت مخرج به درجه اول تبدیل شود، یعنی $x=\frac{۷}{۲}$ ریشهٔ مخرج باشد.

$$m\times\frac{۴۹}{۴}+۱۴+۸=۰\Rightarrow\frac{۴۹m}{۴}=-۲۲\Rightarrow m=\frac{-۸۸}{۴۹}$$

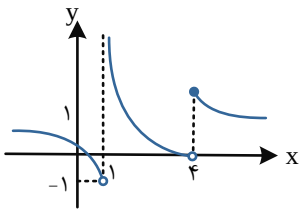
البته توجه کنید که اگر $x=-۲$ ریشهٔ مخرج باشد، همان $m=۰$ به‌دست می‌آید که قابل قبول نمی‌باشد، پس در کل ۲ مقدار $m=\frac{۱}{۲}$ و $m=\frac{-۸۸}{۴۹}$ قابل قبول‌اند.

آزمون ماز

۹/۲۹

حسابان ۲

۱- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(fof)(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(fof)(x)}$ کدام است؟



۱) $-\infty$

۲) $+\infty$

۳) صفر

۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

$f(x)$ را برابر t فرض کرده و با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} x\to+\infty \Rightarrow f(x)=t\to ۱^+ \\ x\to-\infty \Rightarrow f(x)=t\to ۱^- \end{cases}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to-\infty} f\big(f(x)\big)}{\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)} = \frac{\lim\limits_{t\to ۱^-} f(t)}{\lim\limits_{t\to ۱^+} f(t)} = \frac{-۱}{+\infty} = ۰$$

گروه آموزشی ماز

۲- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۱-\cos x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}-\sqrt{\cos x-\sin x}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{-۱}{x})$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

می‌دانیم $\frac{\text{عدد منفی}}{-\infty}=۰^+$ است، بنابراین به جای محاسبه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{-۱}{x})$، می‌توانیم $\lim\limits_{x\to۰^+} f(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{\sqrt{۱-\cos x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}-\sqrt{\cos x-\sin x}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{\sqrt{۱-\cos x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}-\sqrt{\cos x-\sin x}}\times\frac{\sqrt{\sin x+\cos x}+\sqrt{\cos x-\sin x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}+\sqrt{\cos x-\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to۰^+}\frac{\sqrt{۱-\cos x}\times(\sqrt{\sin x+\cos x}+\sqrt{\cos x-\sin x})}{۲\sin x}=\lim_{x\to۰^+}\frac{\sqrt{۱-\cos x}\times(۲)}{۲\sqrt{۱-\cos x}\sqrt{۱+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to۰^+}\frac{۱}{\sqrt{۱+\cos x}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

توجه

$$\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x=(۱-\cos x)(۱-\cos x)$$

گروه آموزشی ماز

۳- با فرض $f(x)=x-[۲x]$ و $g(x)=|۲x|-x-۱$، مساحت ناحیه محصور بین مجانب‌های قائم و افقی تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

می‌دانیم که در توابع کسری، آن دسته از ریشه‌های مخرج که ریشه صورت کسر نباشند، مجانب قائم هستند، لذا خواهیم داشت:

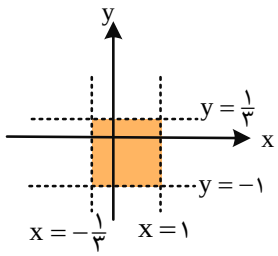
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x-[۲x]}{|۲x|-x-۱}\Rightarrow\begin{cases}x>۰:(\frac{f}{g})(x)=\frac{x-[۲x]}{x-۱}\Rightarrow x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ x<۰:(\frac{f}{g})(x)=\frac{x-[۲x]}{-۳x-۱}\Rightarrow -۳x-۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

بنابراین، $x=۱$ و $x=-\frac{۱}{۳}$، مجانب‌های قائم تابع $\frac{f}{g}$ می‌باشند. از طرفی می‌دانیم که اگر $x\to\pm\infty$ میل کند، $[\bigcirc]\sim\bigcirc$ است، پس:

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{f}{g})(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-[۲x]}{|۲x|-x-۱}\xrightarrow[|۲x|=+۲x]{[۲x]\sim۲x}\lim_{x\to+\infty}\frac{x-۲x}{۲x-x-۱}\xrightarrow{\text{پرتوان}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x}=-۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{f}{g})(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-[۲x]}{|۲x|-x-۱}\xrightarrow[|۲x|=-۲x]{[۲x]\sim۲x}\lim_{x\to-\infty}\frac{x-۲x}{-۲x-x-۱}\xrightarrow{\text{پرتوان}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-۳x}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین $y=-1$ و $y=\frac{1}{3}$ نیز مجانب‌های افقی تابع $\frac{f}{g}$ می‌باشند، در نتیجه مطابق شکل زیر، مساحت ناحیه محصور بین مجانب‌های افقی و قائم تابع $\frac{f}{g}$ برابر است با:



$$S=\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{16}{9}$$

گروه آموزشی ماز

۴- با فرض آن‌که $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+x-1}}{ax+a^2-3}$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

با توجه به آن‌که $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$ ، پس $x=2$ ریشه مخرج است.

$$2a+a^2-3=0\Rightarrow a^2+2a-3=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\a=-3\end{cases}$$

در همسایگی راست $x=2$ صورت تابع f مقداری مثبت است و حاصل حد $-\infty$، پس مخرج صفر منفی است، بنابراین باید $a<0$ باشد یعنی $a=-3$ قابل قبول است.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{|2x|}{-3x}=\frac{2}{3}$$

قاعدهٔ پرتوان

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ که در صورت و مخرج چندجمله‌ای وجود دارد کافی است در صورت و مخرج کسر عبارت با توان بیشتر را قرار دهیم.

گروه آموزشی ماز

۵- اگر $f(x)=\frac{2ax+2}{4-ax}$ و مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(2+f(2x)\big)$ برابر ۱۰ شده باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

$$f(2x)=\frac{4ax+2}{4-2ax}=\frac{2ax+1}{2-ax}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x\left(2+\frac{2ax+1}{2-ax}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\frac{5}{2-ax}=-\frac{5}{a}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{a}=10\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۶- اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax-\sqrt{4x^2+bx})\sin\frac{2}{x}=6$ ، مقدار a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+bx}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4}\left|x+\frac{b}{4\times 2}\right|=\lim_{x\to-\infty}\left|2x+\frac{b}{4}\right|$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to-\infty}(ax-\left|2x+\frac{b}{4}\right|)\times\frac{2}{x}=\lim_{x\to-\infty}((a+2)x+\frac{b}{4})\times\frac{2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4(a+2)x+b}{2x}$$

$$=2(a+2)=6\Rightarrow a+2=3\Rightarrow a=1$$

هم‌ارزی مهم

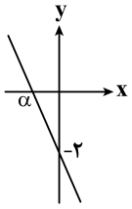
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots}\sim\begin{cases}n\text{ زوج}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|\\ n\text{ فرد}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[n]{a}(x+\frac{b}{na})\end{cases}$$

هم‌ارزی مثلثاتی

۱) $\sin A\underset{A\to0}{\sim}A$ ۲) $\cos A\underset{A\to0}{\sim}1-\frac{A^2}{2}$ ۳) $\tan A\underset{A\to0}{\sim}A$ ۴) $\cot A\underset{A\to0}{\sim}\frac{1}{A}$

گروه آموزشی ماز

۷- نمودار f شکل مقابل است. اگر $g(x)=\frac{fof(-x)}{|x|+f(2x)}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\frac{4}{5}$ باشد، مقدار α کدام است؟



۱) -2
۲) -1
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) $-\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

$$f(x)=mx-2\Rightarrow fof(x)=m(mx-2)-2=m^2x-2m-2$$

$$fof(-x)=-(m^2x+2m+2)$$

$$|x|+f(2x)=-x+2mx-2$$

از طرفی:

به این ترتیب:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-m^2x-2m-2}{(2m-1)x-2}=-\frac{m^2}{2m-1}=\frac{4}{5}$$

شیب خط f منفی است. پس:

$$\frac{m^2}{2m-1}=\frac{-4}{5}\Rightarrow-5m^2=8m-4\Rightarrow5m^2+8m-4=0\Rightarrow(m+2)(5m-2)=0\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{2}{5}\text{ غ ق}\\ m=-2\text{ ق ق}\end{cases}$$

$$f(x)=-2x-2=0\Rightarrow\alpha=-1$$

گروه آموزشی ماز

۸- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{\frac{ax+b}{x-2}}-3)=2$، مقدار ab کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) -54 ۳) -24 ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{\frac{ax+b}{x-2}}-3)=2\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{ax+b}{x-2}}-3=0\Rightarrow\sqrt{a}-3=0\Rightarrow a=9$$

$a=9$ قابل قبول است، زیرا در غیر این صورت حد نامتناهی می‌شد. ($\infty\times$عدد غیرصفر $=\infty$) از طرفی:

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{\frac{9x+b}{x-2}}-3)=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\frac{9x+b}{x-2}-9}{\sqrt{\frac{9x+b}{x-2}}+3}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\frac{b+18}{x-2}}{6}=\frac{b+18}{6}=2\Rightarrow b=-6$$

پس: $ab=-54$.

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)}{x^۲-۹}=\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار $\lim_{x\to\infty} xf(\frac{۳x}{x+۲})$ چه عددی است؟

۱) -۴۸ ۲) -۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

$\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)}{x^۲-۹}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f(۳)=۰$

و علاوه بر آن: $\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)}{(x-۳)(x+۳)}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow \lim_{x\to ۳}\frac{f(x)}{x-۳}=۸$

پس: $\lim_{x\to\infty} xf(\frac{۳x+۶-۶}{x+۲})=\lim_{x\to\infty} xf(۳-\frac{۶}{x+۲})$

$۳-\frac{۶}{x+۲}=t\Rightarrow x=\frac{۲t}{۳-t}\quad x\to\infty\Rightarrow t\to ۳$

$\lim_{t\to ۳}\frac{۲t}{۳-t}f(t)=\lim_{t\to ۳}\overset{۶}{۲t}.\frac{f(t)}{۳-t}=۶\times\overset{-۸}{-۸}=-۴۸$

حل معادلات حدی

اگر حاصل $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عدد مشخص و حقیقی k باشد، در این صورت:

$\xrightarrow{\lim_{x\to a} g(x)=۰}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{\text{حدی }۰}=k\Rightarrow$

چون حاصل حد، عدد مشخص k می‌شود، پس حد باید مبهم $(\frac{۰}{۰})$ شود، در نتیجه صورت کسر یعنی $f(x)$ هم صفر می‌شود. (۰ حدی)

$\xrightarrow{\lim_{x\to a} f(x)=۰}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{حدی }۰}{g(a)}=k\neq ۰\Rightarrow$

چون حاصل حد، مشخص k می‌شود، پس حد باید مبهم $(\frac{۰}{۰})$ شود، در نتیجه مخرج کسر یعنی $g(a)$ هم صفر می‌شود. (۰ حدی)

گروه آموزشی ماز

۱۰- هرگاه $f(x)=\frac{۲^{۲x+۱}-۳^{x+۲}}{۴^{x-۱}+۳^x}$، مقدار $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{f(-x)}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$ ۳) $-\frac{۹}{۸}$ ۴) $-\frac{۸}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

$f(x)=\frac{۲\times۴^x-۹\times۳^x}{\frac{۱}{۴}\times۴^x+۳^x}=\frac{\cancel{۴^x}(۲-۹\times(\frac{۳}{۴})^x)}{\cancel{۴^x}(\frac{۱}{۴}+(\frac{۳}{۴})^x)}$

دقت کنید: $\lim_{x\to-\infty}(\frac{۳}{۴})^x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(\frac{۳}{۴})^x=۰$، پس:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲-۹(\frac{۳}{۴})^x}{\frac{۱}{۴}+(\frac{۳}{۴})^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۹\times(\frac{۳}{۴})^x}{(\frac{۳}{۴})^x}=-۹$

$\lim_{x\to-\infty} f(-x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲-۹(\frac{۳}{۴})^x}{\frac{۱}{۴}+(\frac{۳}{۴})^x}=۸$

پس حاصل برابر است با: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{f(-x)}=\frac{-۹}{۸}=-\frac{۹}{۸}$

حد در بی‌نهایت

در محاسبهٔ حد در بی‌نهایت، هنگامی که فقط تابع نمایی در صورت و مخرج کسر وجود دارد، اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه در صورت و مخرج، تابع نمایی با پایهٔ بزرگ‌تر را قرار می‌دهیم و اگر $x\to-\infty$ در صورت و مخرج، تابع نمایی با پایهٔ کوچک‌تر را قرار می‌دهیم.

۱- **گزینهٔ «۱»** *(اسفندیار)*

درایه‌های ستون سوم ماتریس به صورت $\begin{matrix}۲(۱)+۳\\۲(۲)+۳\\\vdots\\۲(n)+۳\end{matrix}$ است. مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس برابر است با:

$$(۲(۱)+۳)+(۲(۲)+۳)+\ldots+(۲(n)+۳)=۷۷$$

$$۲(۱+۲+\ldots+n)+\underbrace{(۳+۳+\ldots+۳)}_{n\text{ بار}}=۷۷$$

$$۲(\frac{n(n+۱)}{۲})+۳n=۷۷\Rightarrow n^۲+۴n-۷۷=۰\Rightarrow\begin{cases}n=-۱۱\\n=۷\end{cases}$$

ماتریس از مرتبهٔ ۷ است. بنابراین مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس برابر است با:

$$(۲(۳)+۱)+(۲(۳)+۲)+\ldots+(۲(۳)+۷)$$

$$=۶\times۷+\frac{۷(۸)}{۲}=۴۲+۲۸=۷۰$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(اسفندیار)*

از ماتریس‌های B و C فاکتور می‌گیریم:

$$B(\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&-۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲&-۲\\۱&۶\end{bmatrix})C=B(\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix})C=B(۳I)C$$

$$۳BC=\begin{bmatrix}۶&۱۲\\۳&۹\end{bmatrix}\Rightarrow BC=\begin{bmatrix}۲&۴\\۱&۳\end{bmatrix}$$

$$D=ABC=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۴\\۱&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&\square\\\square&۲\end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی برابر با $۲\times۲=۴$.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱}&a_{۱۲}\\a_{۲۱}&a_{۲۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۱&۱\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}x&۰\\۰&x\end{bmatrix}\Rightarrow ۲x=۶\Rightarrow x=۳\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳&۰\\۳&۳\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{جمع درایه‌ها}}۳$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۱، ۱۷ و ۱۸)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

مطابق فرض $A=-۳I$ است، پس داریم:

$$۳B^۲+BAB=B(۳I)B+BAB=B(۳I+A)B=B\times\bar{O}\times B=\bar{O}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

$$۷A=\begin{bmatrix}۱&۳\\۲&۶\end{bmatrix}\Rightarrow A=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۱&۳\\۲&۶\end{bmatrix}$$

$$A^۲=A\times A=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۱&۳\\۲&۶\end{bmatrix}\times\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۱&۳\\۲&۶\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{۴۹}\begin{bmatrix}۷&۲۱\\۱۴&۴۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۱&۳\\۲&۶\end{bmatrix}=A$$

$$A^۲=A\xrightarrow{\times A}A^۳=A^۲=A\xrightarrow{\times A}A^۴=A^۲=A$$

$$\longrightarrow\ldots.\Rightarrow A^n=A$$

$$A+A^۲+\ldots+A^۷=A+A+\ldots+A=۷A=\begin{bmatrix}۱&۳\\۲&۶\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\text{مجموع درایه‌ها}=۱+۳+۲+۶=۱۲$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

ستون سوم A^4 = ستون سوم $A\times A\times A\times A$

برای این منظور کافی است، محاسبات را از سمت راست انجام دهیم. چون سطر اول و سوم ماتریس A مانند هم هستند، کار ساده‌تر است. ضمن این‌که سطر دوم A نیز ضرب کردن را ساده‌تر می‌کند.

$$\text{ستون سوم } A^2 = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\text{ستون سوم } A^3 = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\4\end{bmatrix}$$

$$\text{ستون سوم } A^4 = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\0\\8\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ستون سوم $= 8+0+8=16$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا ماتریس BA را به دست می‌آوریم:

$$BA=\begin{bmatrix}a&2\\-1&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+2&-a+2x\\-2+b&1+bx\end{bmatrix}$$

در ماتریس اسکالر، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر یکدیگرند، پس داریم:

$$\begin{cases}-a+2x=0\Rightarrow a=2x\\-2+b=0\Rightarrow b=2\\2a+2=1+bx\Rightarrow 2a+2=1+2x\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a+2=1+a\Rightarrow a=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۲، ۱۷ و ۱۸)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

چون فقط درایه‌های ستون دوم مد نظر است $j=2$ و به i مقادیر ۱، ۲ و ۳ را می‌دهیم:

$$\left.\begin{aligned}a_{12}&=1^2-6+1=-4\\a_{22}&=2^2-6+1=-1\\a_{32}&=3^2-6+1=4\end{aligned}\right\}\Rightarrow(-4)+(-1)+4=-1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(هومن عقیلی)*

طبق فرض: $\overbrace{A_{2\times3}\times B_{m\times n}}^{\text{مربعی}}$

حاصل $A\times B$ یک ماتریس مربعی است، پس $m=3$ و $n=2$ است.

$$A\times B=\begin{bmatrix}3&1&2\\3&-1&2\end{bmatrix}_{2\times3}\times\begin{bmatrix}2&3\\3&4\\4&5\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}17&23\\11&15\end{bmatrix}_{2\times2}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس $A\times B$ مساوی ۶۶ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۱، ۱۷ و ۱۸)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(هومن عقیلی)*

$$\begin{bmatrix}-1&2&1\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}x&2&1\\1&-x&0\\-1&1&1\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}-x+1&-2x-1&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-x+1&-2x-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix}=-x^2+x-4x-2=0$$

$$\Rightarrow x^2+3x+2=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=-2\end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2/5$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

$$[1 \quad x \quad -1]\begin{bmatrix} x-1 & 1-x \\ 1 & 1 \\ 3 & \frac{x}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [2x-4 \quad 1-\frac{x}{2}]\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x(2x-4)+(1-\frac{x}{2})\times 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2-4x+1-\frac{x}{2}=0 \Rightarrow 2x^2-\frac{9x}{2}+1=0 \Rightarrow 4x^2-9x+2=0$$

$$\Rightarrow (4x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}, 2$$

(هندسه ۳: ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(آرین تفضلی‌زاده)*

در تساوی داده شده $3I$ را به طرف راست منتقل کرده و سپس از ماتریس A در سمت چپ فاکتور می‌گیریم:

$$A^3-5A^2+A=-3I \Rightarrow A(A^2-5A+I)=-3I$$

$$\xrightarrow{\times(-\frac{1}{3})} A\times(-\frac{1}{3})(A^2-5A+I)=I$$

می‌دانیم برای ماتریس وارون‌پذیر A، $AA^{-1}=I$ است، پس با توجه به رابطهٔ فوق داریم:

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}(A^2-5A+I)$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(اسفاق اسفندیار)*

ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\bar{O}$$

بنابراین به ازای $n \geq 2$، $A^n=\bar{O}$ است و در نتیجه داریم:

$$A^{2!}=A^{3!}=...A^{10!}=\bar{O} \Rightarrow A^{0!}+A^{1!}+\underbrace{A^{2!}+...+A^{10!}}_{\bar{O}}$$

$$=A+A=2A$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(هومن عقیلی)*

با توجه به گزینه‌ها داریم: $(I-5A)^{-1}=I+mA$

بنابراین با توجه به تعریف ماتریس وارون، می‌توان نوشت:

$$(I-5A)(I+mA)=I \Rightarrow I+mA-5A-5mA^2=I$$

$$\Rightarrow I+(m-5-5m)A=I \Rightarrow (-4m-5)A=\bar{O}$$

چون ماتریس A غیرصفر است، پس ضریب A لزوماً باید صفر باشد، بنابراین:

$$-4m-5=0 \Rightarrow m=-\frac{5}{4} \Rightarrow (I-5A)^{-1}=I-\frac{5}{4}A$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(اسفاق اسفندیار)*

طرفین رابطه را در ماتریس A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$2A^2-4A+5I=\bar{O} \xrightarrow{\times A^{-1}}$$

$$2\underbrace{A^{-1}A}_{I}A-4\underbrace{A^{-1}A}_{I}+5\underbrace{A^{-1}I}_{A^{-1}}=A^{-1}\times\bar{O}$$

$$\Rightarrow 2A-4I+5A^{-1}=\bar{O} \Rightarrow 5A^{-1}=-2A+4I$$

$$\Rightarrow A^{-1}=-\frac{2}{5}A+\frac{4}{5}I \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{2}{5} \\ \beta=\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta=-\frac{8}{25}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ماتریس مربعی A وارون‌پذیر است، هرگاه $|A| \neq 0$ باشد. در این صورت ماتریسی مانند A^{-1} وجود دارد به‌طوری که $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ باشد.

اگر A وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه به ازای ماتریس‌های B و C داریم:

$$AB=AC \xrightarrow{A^{-1}\times} \underbrace{A^{-1}A}_{I}B=\underbrace{A^{-1}A}_{I}C \Rightarrow B=C$$

بنابراین در صورتی که A وارون‌پذیر باشد، قانون حذف برقرار است، یعنی از رابطهٔ $AB=AC$، می‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

در بین گزینه‌ها، تنها در گزینهٔ «۴»، $|A|=0$ و ماتریس A وارون‌پذیر نیست. به عنوان مثال برای $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$، و $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ داریم: $C=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $AB=AC$، ولی $B \neq C$.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

ابتدا وارون A را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{|A|=-1} A^{-1}=-1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A(A+B)^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A^{-1}\times} \overbrace{A^{-1}A}^{I}(A+B)^{-1}=A^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)}(A+B)^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow((A+B)^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}^{-1}=-1\begin{bmatrix}1&-1\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}-A=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-1\end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌های B برابر است با: $(-1)+1+(-1)=-1$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ماتریس A اسکالر است، پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر یکدیگرند.

$$\begin{cases}y^2-4=0\Rightarrow(y-2)(y+2)=0\Rightarrow y=2,-2\\3y^2+6y=0\Rightarrow 3y(y+2)=0\Rightarrow y=0,-2\end{cases}\Rightarrow y=-2$$

$$x^2=4-3x\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow(x+4)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\x=1\end{cases}$$

اما به ازای $x=1$، درایه‌های قطر اصلی A برابر یک می‌شوند و در نتیجه A ماتریس همانی می‌شود، پس این مقدار طبق فرض سؤال غیرقابل قبول است. با جای‌گذاری مقادیر $x=-4$ و $y=-2$ داریم:

$$B=\begin{bmatrix}z-4&-2\\-12&z-2\end{bmatrix}$$

ماتریس B وارون‌پذیر نیست، پس دترمینان آن برابر صفر است:

$$|B|=0\Rightarrow(z-4)(z-2)-24=0\Rightarrow z^2-6z-16=0$$

$$\Rightarrow(z-8)(z+2)=0\Rightarrow z=8,-2$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۲، ۱۹، ۲۲ و ۲۳)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

ماتریس C به صورت مقابل است:

$$C=\begin{bmatrix}0&-1&3&4\\2&1&5&0\\-1&0&1&-1\\1&1&0&2\end{bmatrix}$$

با فرض $C^2=D$، درایه‌های قطر فرعی ماتریس C^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$d_{14}=C\text{ سطر اول}\times C\text{ ستون چهارم}=\begin{bmatrix}0&-1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\-1\\2\end{bmatrix}=5$$

$$d_{23}=C\text{ سطر دوم}\times C\text{ ستون سوم}=\begin{bmatrix}2&1&5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\\1\\0\end{bmatrix}=16$$

$$d_{32}=C\text{ سطر سوم}\times C\text{ ستون دوم}=\begin{bmatrix}-1&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=0$$

$$d_{41}=C\text{ سطر چهارم}\times C\text{ ستون اول}=\begin{bmatrix}1&1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\-1\\1\end{bmatrix}=4$$

بنابراین کمترین اختلاف دو درایه از قطر فرعی C^2 برابر است با:

$$|d_{14}-d_{41}|=|5-4|=1$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم هر ماتریس اسکالر از جمله ماتریس همانی (I) با هر ماتریس هم‌مرتبهٔ خود، تعویض‌پذیر است. حال ماتریس‌های A^2، A^3، B^2 و B^3 را محاسبه می‌کنیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-4\\-4&5\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}5&-4\\-4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&-14\\-14&13\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}-2&3\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&3\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\1&-2\end{bmatrix}$$

$$B^3=\begin{bmatrix}1&-3\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&3\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

بنابراین ماتریس B^3 با هر ماتریس هم‌مرتبهٔ خود از جمله A تعویض‌پذیر است، یعنی رابطهٔ $AB^3=B^3A$ برقرار است. نادرستی بقیهٔ روابط را خودتان بررسی کنید.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(نیما مهندس)*

ابتدا دستگاه را مرتب می‌کنیم:

$$\begin{cases}(۲-k)x+y=۰\\-۳x+ky=۲\end{cases}$$

معادله در صورتی بی‌شمار جواب دارد که تساوی $\frac{۲-k}{-۳}=\frac{۱}{k}=\frac{۰}{۲}$ برقرار باشد، ولی به وضوح معادلهٔ $\frac{۱}{k}=\frac{۰}{۲}$ فاقد جواب است، پس این دستگاه به ازای هیچ مقدار k، بی‌شمار جواب ندارد.

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۶)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

ابتدا شرط جواب نداشتن دستگاه اول را می‌نویسیم:

$$\frac{k}{۴}=\frac{-۱}{-k}\neq\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{k}{۴}=\frac{۱}{k}\Rightarrow k^۲=۴\Rightarrow k=\pm۲$$

$$k=۲\Rightarrow\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\quad \text{غ ق ق}$$

$$k=-۲\Rightarrow-\frac{۲}{۴}\neq\frac{۱}{۲}\quad \text{ق ق}$$

پس $k=-۲$ است. حال این مقدار را در دستگاه دوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}-۲x-۳y=۱\\۴x-۶y=m+۳\end{cases}$$

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را با A نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۴ & -۶\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=(-۲)(-۶)-(-۳)\times۴=۲۴\neq۰$$

پس این دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۶)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا فلاح)*

دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ از دو خط تشکیل شده است. اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$، شیب دو خط یکسان نبوده و متقاطع هستند. در صورتی که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$، دو خط شیب یکسان و عرض از مبدأ متفاوت دارند، پس موازی و غیرمنطبق هستند و چنانچه $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$، شیب و عرض از مبدأ دو خط یکسان است و دو خط بر هم منطبق هستند.

$$m=۴\Rightarrow\begin{cases}x-۴y=۸\\۴(x-y)=۴(y+۴)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-۴y=۸\\x-۲y=۴\end{cases}$$

از آنجا که $\frac{۱}{۱}\neq\frac{-۴}{-۲}$، دو خط متقاطع هستند. از طرفی شیب خط اول برابر $\frac{۱}{۴}$ و شیب خط دوم برابر $\frac{۱}{۲}$ است و از آنجا که $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}\neq-۱$، پس دو خط بر هم عمود نیستند.

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۶)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

وارونِ وارون یک ماتریس، برابر خود آن ماتریس است، پس کافی است وارونِ وارون ماتریس ضرایب دستگاه را به دست آورده و در ماتریس مجهولات ضرب کنیم.

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵}\\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵}\end{bmatrix}\xrightarrow{((A^{-۱})^{-۱})=A}A=\frac{۱}{-\frac{۱}{۵}}\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۵} & -\frac{۲}{۵}\\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$AX=B\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\ ۳\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس مقادیر معلوم دستگاه، برابر $۴+۳=۷$ است.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه خاکپاش)*

دستگاه معادلات دو معادله دو مجهول در صورتی جواب منحصر به فرد دارد که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه مخالف صفر باشد. بنابراین دستگاهی به ازای تمام مقادیر حقیقی m دارای جواب منحصر به فرد است که دترمینان آن همواره مخالف صفر باشد.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $A=\begin{bmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -m^2+1=0 \Rightarrow m=\pm 1$

۲) $A=\begin{bmatrix} m & -1 \\ 3 & m-2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = m(m-2)+3 = m^2-2m+3=0$

$\Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$ معادله فاقد ریشه حقیقی است.

۳) $A=\begin{bmatrix} m^2 & 4 \\ m-1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = m^2-4(m-1)=m^2-4m+4=0$

$\Rightarrow (m-2)^2=0 \Rightarrow m=2$

۴) $A=\begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m+2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (m+2)-m^2=-m^2+m+2=0$

$\Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-1 \end{cases}$

بنابراین دستگاه معادلات گزینهٔ «۲» به ازای تمام مقادیر حقیقی m، دارای جواب منحصر به فرد است.

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۶)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

ابتدا معادلاتی که فاقد m و n هستند را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4x+5y=3 \\ 2x-3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

با جای‌گذاری در معادلات دیگر داریم:

$$\begin{cases} x+2my=4 \\ mx-ny=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2m=4 \Rightarrow m=-1 \\ 2m+n=m \Rightarrow m+n=0 \\ \xrightarrow{m=-1} n=1 \end{cases}$$

بنابراین خواستهٔ سؤال برابر است با: $n-m=1-(-1)=2$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طرفین رابطهٔ ماتریسی را از سمت چپ در ماتریس A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$AX=A^{-1}-A \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}(A^{-1}-A)$$

$$\Rightarrow X=(A^{-1})^2-I$$

حال ماتریس A^{-1} را محاسبه کرده و در رابطه جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-\frac{1}{3}}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}-I=\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -45 & 18 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -45 & 17 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس X برابر است با:

$$12-5-45+17=-21$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا به کمک رابطهٔ داده شده، ماتریس A^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2-3A+2I=\bar{O}\Rightarrow -A^2+3A=2I$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}A^2+\frac{3}{2}A=I\Rightarrow A\underbrace{(-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}I)}_{A^{-1}}=I$$

$$\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}I \qquad (*)$$

حال طرفین معادلهٔ $AX=A-I$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}(A-I)$$

$$\Rightarrow X=I-A^{-1}\xrightarrow{(*)}=I-(-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}I)$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}I=\frac{1}{2}(A-I)$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(هومن عقیلی)*

طرفین تساوی را از سمت چپ در ماتریس A^{-1} و از سمت راست در ماتریس B^{-1} ضرب می‌کنیم. بنابراین لازم است ماتریس‌های A^{-1} و B^{-1} را پیدا کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}8 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 8\end{bmatrix}$$

$$AXB=C\Rightarrow A^{-1}(AXB)B^{-1}=(A^{-1}A)X(BB^{-1})=A^{-1}CB^{-1}$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -9\\ -2 & 6\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس X برابر است با:

$$3-9-2+6=-2$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا از ماتریس A در سمت چپ تساوی فاکتور می‌گیریم:

$$A\times\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}+A\times 3I=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\times\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

طرفین تساوی را از راست در وارون ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & 5\end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & 5\end{bmatrix}^{-1}$$

برای دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر و هم‌مرتبهٔ C و D، رابطهٔ $(CD)^{-1}=D^{-1}C^{-1}$ برقرار است، پس با وارون کردن طرفین رابطهٔ فوق داریم:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & 5\end{bmatrix}\times\frac{1}{1}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

حال جواب‌های دستگاه را به دست می‌آوریم:

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-3\end{cases}\Rightarrow x+y=-2$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

هندسه ۳

۱- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق فرض سؤال می‌دانیم:

$$AB-BC=BD\Rightarrow AB=BD+BC$$
$$\Rightarrow AB=B(D+C) \qquad (۱)$$

از طرفین تساوی (۱) دترمینان می‌گیریم:

$$|AB|=|B(D+C)|\Rightarrow|A||B|=|B||D+C| \qquad (۲)$$

از آنجا که $|B|\neq ۰$ است (چرا؟)، آن را از طرفین تساوی (۲) ساده کرده و خواهیم داشت: $|A|=|D+C|$

ماتریس $D+C$ را محاسبه کرده و دترمینان آن را برحسب سطر اول به دست می‌آوریم:

$$D+C=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۳ & ۲\\ ۳ & ۲ & ۵\end{bmatrix}$$

$$|D+C|=۱\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}۱ & ۳\\ ۳ & ۲\end{vmatrix}=۱\times۱\times(۲-۹)=-۷$$

$$\Rightarrow|A|=|D+C|=-۷$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق تمرین ۸ صفحهٔ ۳۱ کتاب درسی، در محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس مربعی دلخواه، می‌توان از یک عدد دلخواه در یک سطر یا ستون دلخواه فاکتور گرفته و به صورت ضریبی در کنار دترمینان قرار بدهیم؛ بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix}۶ & ۱ & ۸\\ ۱۸ & ۴ & ۸\\ ۶a & ۰ & ۸\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم.}]{\text{در سطر دوم و سوم}}۲\times۲\times\begin{vmatrix}۶ & ۱ & ۸\\ ۹ & ۲ & ۴\\ ۳a & ۰ & ۴\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{ستون سوم از ۴ فاکتور می‌گیریم.}]{\text{در ستون اول از ۳ و در}}۲\times۲\times۳\times۴\underbrace{\begin{vmatrix}۲ & ۱ & ۲\\ ۳ & ۲ & ۱\\ a & ۰ & ۱\end{vmatrix}}_{k}=۴۸k$$

(هندسه ۳- صفحهٔ ۳۱)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(آرین تفضلی‌زاده)*

دترمینان ماتریس A را با دستور ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & x\\ x & ۰ & ۱\end{vmatrix}\begin{matrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\\ x & ۰\end{matrix}\Rightarrow|A|=(۰+x^۲+۰)-(۰+۰+۱)=x^۲-۱$$

طبق فرض داریم $x^۲-۱=۸$، بنابراین $x^۲=۹$ و در نتیجه:

$$\log_۳^{x^۲}=\log_۳^۹=۲$$

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۹)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(اسحاق اسفندیار)*

ابتدا ماتریس A را حساب کرده و سپس دترمینان آن را به دست می‌آوریم:

$$۲A=\begin{bmatrix}|A| & ۲\\ -۲ & |A|\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{|A|}{۲} & ۱\\ -۱ & \frac{|A|}{۲}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow|A|=\frac{|A|}{۲}\times\frac{|A|}{۲}+۱\Rightarrow|A|^۲-۴|A|+۴=۰$$

$$\Rightarrow(|A|-۲)^۲=۰\Rightarrow|A|=۲$$

همچنین می‌توانیم دترمینان ماتریس B را برحسب سطر دوم محاسبه کنیم:

$$|B|=۱\times(-۱)^{۲+۲}\times\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۳\end{vmatrix}=۱\times۱\times(۳-۱)=۲$$

با استفاده از خواص دترمینان خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\left|-|A|B^{-۱}\right|\xrightarrow[k\in\mathbb{R},\ B_{۳\times۳}]{|kB|=k^۳|B|}=(-|A|)^۳|B^{-۱}|$$

$$\xrightarrow{|B^{-۱}|=\frac{۱}{|B|}}=(-|A|)^۳\times\frac{۱}{|B|}=(-۲)^۳\times\frac{۱}{۲}=-۴$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷، ۲۸ و ۳۱)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

طرفین تساوی داده شده را محاسبه کرده و مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix}۳ & ۱۱ & -۹\\ ۰ & -۷ & ۳\\ a & ۱ & -۴\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۵ & a\\ ۱۰ & ۱۱\end{vmatrix}\Rightarrow۳\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}-۷ & ۳\\ ۱ & -۴\end{vmatrix}$$

$$+a\times(-۱)^{۳+۱}\times\begin{vmatrix}۱۱ & -۹\\ -۷ & ۳\end{vmatrix}=۵۵-۱۰a$$

$$\Rightarrow۳\times۱\times(۲۸-۳)+a\times۱\times(۳۳-۶۳)=۵۵-۱۰a$$

$$\Rightarrow۷۵-۳۰a=۵۵-۱۰a\Rightarrow a=۱$$

خواستهٔ سؤال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix}a & ۱-a\\ ۲a & a+۱\end{vmatrix}\overset{a=۱}{=\!=}\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۲\end{vmatrix}=۱\times۲-۰\times۲=۲$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

با استفاده از خواص دترمینان طرفین تساوی داده شده را تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$۲|A|=\left||A|A\right|+\left|\frac{۱}{|A|}A\right|\xrightarrow[k\in\mathbb{R},\ A_{۳\times۳}]{|kA|=k^۳|A|}$$

$$۲|A|=(|A|)^۳|A|+(\frac{۱}{|A|})^۳|A|$$

$$\Rightarrow 2|A| = |A|^4 + \frac{1}{|A|^2} \xrightarrow{\times |A|^2} 2|A|^3 = |A|^6 + 1$$

$$\Rightarrow |A|^6 - 2|A|^3 + 1 = 0 \Rightarrow (|A|^3 - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow |A|^3 = 1 \Rightarrow |A| = 1$$

(هندسه ۳- صفحهٔ ۳۱)

۷- **گزینهٔ «۱»** (کیوان دارابی)

سمت چپ تساوی را برحسب سطر اول به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} x & y & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = x \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + y \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \quad (*)$$

از مقایسهٔ (*) با سمت راست تساوی صورت سؤال درمی‌یابیم که k همان $2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ است؛ بنابراین:

$$k = 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(20+1) = 42$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۸- **گزینهٔ «۳»** (مجتبی مظاهری‌فر)

ماتریس B را تشکیل داده و دترمینان آن را برحسب سطر دوم به دست می‌آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & x-1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2x+1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 2 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 1 \times (6+12) = 36$$

دترمینان ماتریس A را نیز برحسب سطر اول به دست می‌آوریم:

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2x & 3 \end{vmatrix} + x \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1) \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2x \end{vmatrix}$$

$$= 2(6-2x) - x(-3-2) - (-2x-4) = 3x + 16$$

از تساوی $|A| = |B|$ نتیجه می‌شود:

$$3x + 16 = 36 \Rightarrow 3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۹- **گزینهٔ «۲»** (نیما مهندس)

دترمینان ماتریس داده شده را با دستور ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\cos\theta \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \big((1+\sin\theta)(1+\cos\theta)+1+1\big) - \big((1+\sin\theta)+1+(1+\cos\theta)\big)$$

$$\Rightarrow (\sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \cos\theta + 3) - (\sin\theta + \cos\theta + 3)$$

$$= \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \xrightarrow{-1 \le \sin 2\theta \le 1} -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\sin 2\theta \le \frac{1}{2}$$

طبق نامساوی به دست آمده، بیشترین مقدار ممکن دترمینان داده شده $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۹)

۳۰- **گزینهٔ «۳»** (هومن عقیلی)

طبق فرض سؤال داریم: $A^2 - A - I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = A + I$

از طرفین رابطهٔ اخیر، دترمینان می‌گیریم:

$$|A+I| = |A^2| = |A|^2 = (-1)^2 = 1$$

با فرض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم:

$$|A| = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow ad - bc = -1 \qquad (1)$$

$$|A+I| = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow ad + a + d + 1 - bc = 1 \xrightarrow{ad-bc=-1} a + d = 1 \qquad (2)$$

دترمینان ماتریس مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|A+2I| = \begin{vmatrix} a+2 & b \\ c & d+2 \end{vmatrix} = ad + 2(a+d) + 4 - bc$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} = -1 + 2 + 4 = 5$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

ابتدا ماتریس A را طبق فرض پیدا می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

سپس براساس قوانین ضرب ماتریس‌ها، ماتریس A^3 را می‌یابیم:

$$A^3=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ -4 & 5 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 0\\ 13 & -19 & -27\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی برابر است با: $-6=-19+13+0$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

از سمت چپ، ماتریس A^{-1} و از سمت راست، ماتریس A را در عبارت فرض سؤال ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1}(A+A^{-1})A=A^{-1}(ABA^{-1})A$$

$$\Rightarrow (I+(A^{-1})^2)A=IBI\Rightarrow A+A^{-1}=B$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

طبق فرض داریم:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}=I-2X$$

$$\Rightarrow\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}+2I\right)X=I-\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}0 & -4\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

حال باید وارون ماتریس $\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ را از سمت چپ در طرفین ضرب کنیم:

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -4\\ -2 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -4\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}2 & -6\\ -8 & 20\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های X برابر ۸ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

d و d' دو خط موازی با شیب‌های مثبت هستند که فقط یکی از آن‌ها از مبدأ عبور می‌کند. لذا در معادلهٔ ماتریسی متناظر، دترمینان ماتریس ضرایب بایستی صفر بوده و فقط یکی از درایه‌های ماتریس مقادیر معلوم نیز صفر می‌باشد. پس گزینه‌های «۱» و «۴» حذف می‌شوند. همچنین در گزینهٔ «۲» شیب هر دو خط منفی است. (درایه‌های سطرها هم‌علامت‌اند.)

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

با استفاده از دستور ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix}0 & x & \log x\\ -x & 0 & x^2-1\\ -\log x & 1-x^2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\left(0-x\underbrace{(x^2-1)}\log x-x\underbrace{(1-x^2)}\log x\right)-(0+0+0)=0$$

قرینه

دترمینان فوق همواره به ازای $x>0$ (دامنهٔ تعریف لگاریتم) برابر صفر است؛ پس معادله بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(اسحاق اسفندیار)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست

$$|BA-I|=|BA-BB^{-1}|=|B||A-B^{-1}|$$

$$=|A-B^{-1}||B|=|AB-I|$$

۲) درست

$$|ABA^{-1}-2I|=|ABA^{-1}-2AA^{-1}|$$

$$=|A||B-2I||A^{-1}|=|B-2I|$$

۳) نادرست؛ برای ماتریس‌های مربعی A و B از مرتبهٔ ۳ داریم:

$$|A-B|=|-(B-A)|=(-1)^3|B-A|=-|B-A|$$

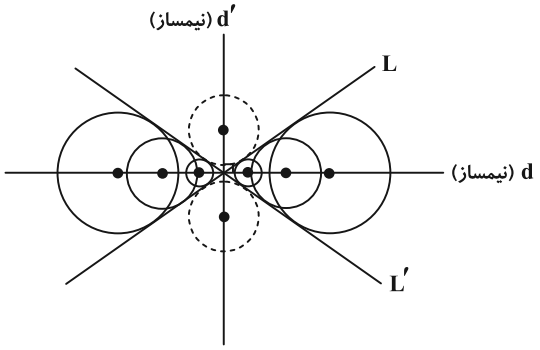
۴) درست

$$|(A^{-1}BA)^2|=|A^{-1}B^2A|=|A^{-1}||B|^2|A|=|B|^2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

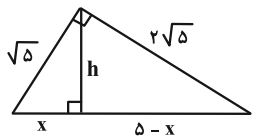
مطابق شکل، مرکز دایره‌هایی کـه بـر دو خـط متقـاطع، ممـاس هسـتند روی نیمسازهای داخلی و خارجی دو خط قرار می‌گیرد. (d و d' عمود بر هم)



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

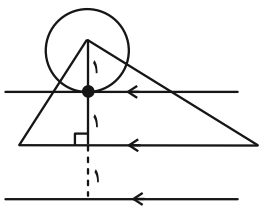
۸- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به معلومات مسئله، طول وتر برابر ۵ است. حال طبق روابـط طـولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$(\sqrt{5})^2 = 5x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow h^2 = 1\times(5-1) \Rightarrow h = 2$$

اکنون به مرکز رأس قائم و شعاع ۱ دایره‌ای رسم می‌کنیم. همچنـین دو خـط به موازات وتر و به فاصلهٔ ۱ واحد از آن رسم می‌کنیم. چون طول ارتفـاع وارد بر وتر برابر ۲ واحد است، لذا مطابق نمودار، تعداد نقاط تقاطع دو خط و دایره ۱ نقطه خواهد بود.

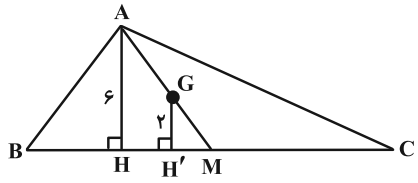


(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(هومن عقیلی)*

چون فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC همـواره برابـر ۶ اسـت، مکـان هندسـی رأس A دو خط به موازات BC و به فاصـلهٔ ۶ از آن مـی‌باشـد. همچنـین می‌دانیم فاصلهٔ مرکز ثقل هر مثلث از هر ضلع آن، $\frac{۱}{۳}$ طـول ارتفـاع وارد بـر آن ضلع می‌باشد، بنابراین:

$$GH' = \frac{۱}{۳}AH = ۲$$



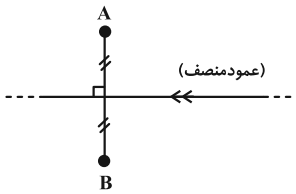
در نتیجه مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ABC برابـر دو خـط بـه مـوازات BC و به فاصلهٔ ۲ از آن خواهد بود.

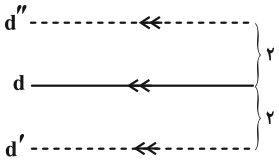
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

الف) مکان هندسی حاصل، تقاطع دو نیمساز عمود بـر هـم و دو خـط مـوازی می‌باشد و هرگز نمی‌تواند تهی باشد. (در بهترین حالت اگر $\Delta \parallel L$، آن‌گـاه $\Delta \perp L'$ و بنابراین با هم متقاطع خواهند بود.)

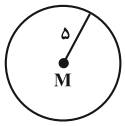
ب)

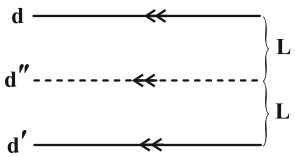




اگر عمودمنصف AB یک خـط مـوازی d و d' (و غیرمنطبـق بـر آن‌هـا) باشد، مجموعه جواب تهی است.

پ)





مطابق شکل دایره و خط d'' نقطهٔ مشترک ندارد و در نتیجه مجموعه جواب تهی است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(اسفاق اسفندیار)*

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-۲x-۴y+۴=۰ \\ y-x-۱=۰ \Rightarrow y=x+۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^۲+(x+۱)^۲-۲x-۴(x+۱)+۴=۰$$

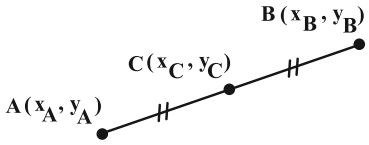
$$\Rightarrow ۲x^۲-۴x+۱=۰$$

اگر $A(x_A\ ,\ y_A)$ و $B(x_B\ ,\ y_B)$ مختصات نقاط برخورد خط و دایره باشند، داریم:

$$S=x_A+x_B=-\frac{b}{a}=\frac{۴}{۲}=۲$$

حال طبق شکل زیر می‌توانیم بگوییم:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱$$



(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(اسفاق اسفندیار)*

معادلهٔ داده شده، زمانی می‌تواند معادلهٔ دایره باشد که ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ با هم برابر باشند:

$$۱=a^۲-۸ \Rightarrow a^۲=۹ \Rightarrow a=\pm ۳$$

همچنین می‌دانیم دایره‌ای به معادلهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ وجود دارد اگر شرط $a^۲+b^۲-۴c>۰$ برقرار باشد.

به ازای $a=۳$ معادلهٔ صورت سؤال، معادلهٔ دایره نیست، زیرا:

$$a=۳ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱۵=۰$$

$$\Rightarrow ۴+۱۶-۴\times ۱۵<۰ \quad \text{(غ ق ق)}$$

ولی به ازای $a=-۳$ داریم: $a=-۳ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱۵=۰$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایره}: r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۶۰}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}=۲\sqrt{۵}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

چون شعاع هر دو دایره برابر ۲ است، لذا:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۲-a)^۲+a^۲-۴}=۲ \Rightarrow \sqrt{۲a^۲-۴a}=۴$$

$$\Rightarrow ۲a^۲-۴a=۱۶ \Rightarrow a^۲-۲a-۸=۰$$

$$\Rightarrow (a-۴)(a+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \Rightarrow O(۱\ ,\ -۲) \\ a=-۲ \Rightarrow O'(-۲\ ,\ ۱) \end{cases}$$

$$\Rightarrow OO'=\sqrt{(-۲-۱)^۲+(۱+۲)^۲}=\sqrt{۹+۹}=۳\sqrt{۲}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

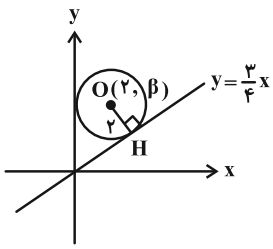
مطابق شکل زیر مرکز دایره به صورت $O(۲\ ,\ \beta)$ و طول شعاع دایره برابر فاصلهٔ مرکز آن تا خط $y=\frac{۳}{۴}x$ می‌باشد. بنابراین:

$$y=\frac{۳}{۴}x \Rightarrow ۳x-۴y=۰$$

$$OH=\frac{|۶-۴\beta|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=۲$$

$$\Rightarrow |۶-۴\beta|=۱۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta=-۱ \quad \times \\ \beta=۴ \quad \text{ق ق} \end{cases} \Rightarrow O(۲\ ,\ ۴)$$



(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

معادلهٔ ضمنی دایرهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ تنها در صورتی بیانگر یک نقطه خواهد بود که شعاع دایره برابر صفر باشد:

$$r=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=۰ \Rightarrow a^۲+b^۲-۴c=۰$$

بنابراین برای معادلهٔ ضمنی دایره داده شده می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow (m-۱)^۲+m^۲-۴(۲m)=۰ \Rightarrow ۲m^۲-۱۰m+۱=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta>۰} S=m_۱+m_۲=\frac{-b}{a}=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^۲+(y-۱)^۲=۴ \Rightarrow \begin{cases} O(۰\ ,\ ۱) \\ r=۲ \end{cases}$$

$$x^۲+y^۲+۲mx=۰ \Rightarrow \begin{cases} O'(-m\ ,\ ۰) \\ r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴m^۲}=|m| \end{cases}$$

طول خط‌المرکزین دو دایره برابر است با:

$$OO'=\sqrt{(-m-۰)^۲+(۰-۱)^۲}=\sqrt{m^۲+۱}$$

چون دو دایره فقط یک نقطهٔ مشترک دارند، پس مماس داخل یا مماس خارج هستند. به بررسی هر دو حالت می‌پردازیم:

۱) مماس خارج $\Rightarrow OO'=r+r' \Rightarrow \sqrt{m^۲+۱}=|m|+۲$

$$\Rightarrow m^۲+۱=m^۲+۴|m|+۴ \Rightarrow ۴|m|=-۳ \quad \text{غ ق ق}$$

۲) مماس داخل $\Rightarrow OO'=|r-r'| \Rightarrow \sqrt{m^۲+۱}=||m|-۲|$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} m^۲+۱=m^۲-۴|m|+۴$$

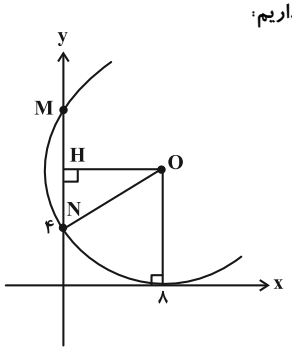
$$\Rightarrow ۴|m|=۳ \Rightarrow |m|=\frac{۳}{۴} \Rightarrow m=\pm\frac{۳}{۴}$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر قابل قبول برای m برابر $\frac{۳}{۴}\times(-\frac{۳}{۴})=\frac{-۹}{۱۶}$ می‌باشد.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌طیبی)*

دایره بر محور طول‌ها در نقطهٔ $(۰\ ,\ ۸)$ مماس است پس مختصات مرکز آن به شکل $O(۸\ ,\ \beta)$ است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقاط $(۴\ ,\ ۰)$ و $(۰\ ,\ ۸)$ یکسان است، پس داریم:



$$\sqrt{(۸-۰)^۲+(\beta-۴)^۲}=\sqrt{(۸-۸)^۲+(\beta-۰)^۲}$$

$$\Rightarrow ۶۴+\beta^۲-۸\beta+۱۶=\beta^۲ \Rightarrow ۸\beta=۸۰ \Rightarrow \beta=۱۰$$

$$\begin{cases}\text{مرکز دایره}: O(۸\ ,\ ۱۰)\\ \text{شعاع دایره}: R=|\beta|=۱۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ دایره}: (x-۸)^۲+(y-۱۰)^۲=۱۰۰$$

حال عرض نقاط برخورد دایره با محور yها و طول وتر ایجاد شده را به دست می‌آوریم:

$$x=۰ \Rightarrow ۶۴+(y-۱۰)^۲=۱۰۰$$

$$\Rightarrow |y-۱۰|=۶ \Rightarrow \begin{cases}y=۴\\ y=۱۶\end{cases} \Rightarrow \text{طول وتر } MN=|۱۶-۴|=۱۲$$

روش دوم: عمود OH را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases}OH=۸\\ ON=R=۱۰\end{cases}$$

$$HN=\sqrt{ON^۲-OH^۲}=\sqrt{۱۰۰-۶۴}=۶$$

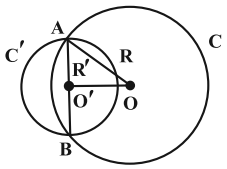
$$\Rightarrow MN=۲NH=۱۲$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(هومن عقیلی)*

دایرهٔ C محیط دایرهٔ C' را نصف می‌کند، یعنی مطابق شکل دایرهٔ C از دو سر قطری از دایرهٔ C' عبور می‌کند و در نتیجه:

$$R^۲=OO'^۲+R'^۲ \qquad (*)$$



حال مختصات مرکز و شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$O(۱\ ,\ ۱)\ ,\ O'(۲\ ,\ ۲)$$

$$\Rightarrow OO'=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۲}$$

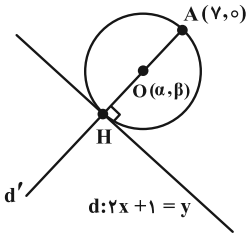
$$R^۲=\frac{۴+۴-۴m}{۴}=۲-m \quad , \quad R'^۲=\frac{۱۶+۱۶+۴}{۴}=۹$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲-m=۲+۹ \Rightarrow m=-۹$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۱ تا ۴۴)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از نقطهٔ A و مماس بر خط d، دایره‌ای به قطر AH است که AH عمود وارد بر خط d از رأس A می‌باشد. با توجه به شکل زیر داریم:



$$m_d=۲ \xrightarrow{d\perp d'} ۲\times m_{d'}=-۱ \Rightarrow m_{d'}=\frac{-۱}{۲}$$

$$A(۷\ ,\ ۰)\in d' \Rightarrow y-۰=\frac{-۱}{۲}(x-۷) \Rightarrow y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}$$

$$d' \text{ و } d \text{ تلاقی} \Rightarrow \begin{cases}d: y=۲x+۱\\ d': y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}\end{cases} \Rightarrow H(۱\ ,\ ۳)$$

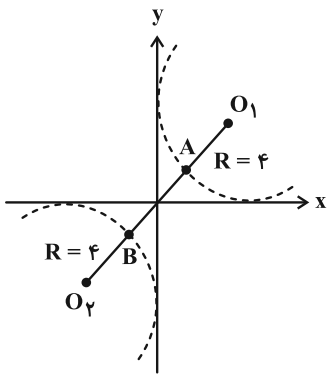
$$O(\alpha\ ,\ \beta)=\frac{۱}{۲}(A+H) \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{۷+۱}{۲}=۴\\ \beta=\frac{۰+۳}{۲}=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha+۲\beta=۴+۳=۷$$

(هندسه ۳- صفحهٔ ۴۵)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(نیما مهندس)*

برای حل، نیازی به نوشتن معادلات دایره‌ها نیست. با توجه به شکل، نقاط $O_۱(۴\ ,\ ۴)$ و $O_۲(-۴\ ,\ -۴)$ مرکزهای این دو دایره هستند و نقاط A و B، نزدیک‌ترین نقاط دو دایره از یکدیگرند:



$$AB=O_۱O_۲-۲R=\sqrt{۸^۲+۸^۲}-۲(۴)=۸\sqrt{۲}-۸=۸(\sqrt{۲}-۱)$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

هندسه ۳

۱- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

مثال نقض برای گزینهٔ «۱»:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\bar{O}$$

مثال نقض برای گزینهٔ «۲»:

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2&-1\\1&5\end{bmatrix}$$

تساوی گزینهٔ «۴» تنها در صورتی درست است که دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند و در غیر این صورت این رابطه برقرار نیست.

اگر $A=\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}b&0\\0&b\end{bmatrix}$ دو ماتریس اسکالر باشند،

آن‌گاه $AB=BA=\begin{bmatrix}ab&0\\0&ab\end{bmatrix}$ است، پس رابطهٔ گزینهٔ «۳» همواره برقرار بوده و مثال نقض ندارد.

(هندسه ۳- مشابه تمرین‌های ۳، ۴ و ۱۰ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(اسماق اسفندیار)*

در سطر سوم ماتریس مربعی A شماره سطر $i=3$ و j از ۱ تا n تغییر می‌کند.

$$\text{سطر سوم}\Rightarrow\begin{bmatrix}\vdots&&&&\\3+2\times1&3+2\times2&3+2\times3&\dots&3+2\times n\\\vdots&&&&\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های سطر سوم}=(3+2\times1)+(3+2\times2)$$

$$+\dots+(3+2\times n)=96\Rightarrow 3n+2(1+2+\dots+n)=96$$

$$3n+2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=96$$

$$\Rightarrow \underbrace{n^2+4n-96}_{(n+12)(n-8)}=0\Rightarrow\begin{cases}n=-12 & \text{غ ق}\\ n=8 & \text{ق}\end{cases}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون سوم برابر است با:

$$(1+2\times3)+(2+2\times3)+\dots+(8+2\times3)$$

$$=(1+2+\dots+8)+8\times6=36+48=84$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا شریف‌فطیبی)*

مطابق ضابطهٔ ماتریس A داریم:

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\3&0&-1\\4&5&0\end{bmatrix}$$

$$B=2I=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow BA=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&-2\\3&0&-1\\4&5&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-2&-4\\6&0&-2\\8&10&0\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر سوم BA برابر است با ۱۸.

(هندسه ۳- مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۱)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

$$AB=\begin{bmatrix}m&1\\p&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\3&n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2m+3&m+n\\2p+3&p+n\end{bmatrix}$$

در ماتریس اسکالر درایه‌های قطر اصلی برابرند و بقیه درایه‌ها صفرند:

$$\begin{cases}2p+3=0\Rightarrow p=-\frac{3}{2}\\ m+n=0\\ 2m+3=p+n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-\frac{3}{2}\\ n=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}&1\\-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\3&\frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&2\\\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۲ تا ۲۱)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}2&5\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

حال به راحتی می‌توان به‌طور مستقیم ماتریس A^{1404} را به دست آورد:

$$A^{1404}=(A^2)^{702}=(-I)^{702}=I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۲ است.

(هندسه ۳- مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۲۰)

۶- **گزینهٔ «۳»** (هومن عقیلی)

با توجه به فاکتورگیری و خواص ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$CAB+CB^2=C(A+B)B=(C)(3I)(B)=3CB=3\times\begin{bmatrix}2&3\\0&5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6&9\\0&15\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=6+9+15+0=30$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۷- **گزینهٔ «۲»** (روح‌اله مسنی)

A یک ماتریس قطری است. پس برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$A^n=\begin{bmatrix}2^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&1^n\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$B=I+A+A^2+\ldots+A^k$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2^2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\ldots+\begin{bmatrix}2^k&0&0\\0&(-1)^k&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+2+2^2+\ldots+2^k&0&0\\0&1+(-1)+\ldots+(-1)^k&0\\0&0&k+1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B \text{ مجموع درایه‌های }=\begin{cases}2^{k+1}+k & ,\ k \text{ فرد}\\ 2^{k+1}+k+1 & ,\ k \text{ زوج}\end{cases}$$

اما چون $2^{10}+9=1024+9=1033$، پس $k+1=10$ و $k=9$.

تذکر: $1+2+2^2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۲ تا ۲۱)

۸- **گزینهٔ «۲»** (کیوان دارابی)

بهتر است به جای ۳ بار انجام عمل ضرب، از ماتریس A فاکتور بگیریم:

$$A(B-C+A)=A\times\left(\begin{bmatrix}2&0&1\\3&-1&4\\1&2&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&2&4\\6&-1&6\\3&5&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=A\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=A$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=3(1+2+3)=18$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۹- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا دو ماتریس سمت چپ را در هم ضرب کرده و سپس حاصل را در ماتریس سمت راست ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\-6\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-x+2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\-6\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-x^2+2x+24\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x-24=0\Rightarrow(x-6)(x+4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=6\\x=-4\end{cases}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (هومن عقیلی)

$$\forall i,j\ ;\ a_{ij}=-a_{ji}$$

$$a_{21}=-a_{12}\Rightarrow y=-4$$

$$a_{11}=-a_{11}\Rightarrow a_{11}=0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2$$

$$a_{32}=-a_{23}\Rightarrow z=-(y+2)=-(-4+2)=2$$

$$\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}0&4&-7\\-4&0&-2\\7&2&0\end{bmatrix}_{3\times3}\times\begin{bmatrix}0&4&-7\\-4&0&-2\\7&2&0\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}-65&&\\&-20&\\&&-53\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$\text{جمع درایه‌های قطر اصلی}=-138$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۱ تا ۲۱)

هندسه ۳

۱- **گزینهٔ «۱»** *(اسحاق اسفندیار)*

روش اول: طبق فرض می‌نویسیم:

$$A^۲+A+I=-A^۳$$

$$A^۳+A^۲+A+I=\bar{O}\Rightarrow A(A^۲+A+I)+I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A(-A^۳)+I=\bar{O}\Rightarrow A^۴=I$$

$$\xrightarrow{\text{توان }۳۵۱} A^{۱۴۰۴}=(A^۴)^{۳۵۱}=(I)^{۳۵۱}=I$$

روش دوم: طرفین رابطه را در ماتریس $A-I$ ضرب می‌کنیم:

$$(A-I)(A^۳+A^۲+A+I)=(A-I)\times\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^۴-I=\bar{O}\Rightarrow A^۴=I$$

$$\xrightarrow{\text{توان }۳۵۱} A^{۱۴۰۴}=I$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

ماتریس A را تشکیل داده و ماتریس $A+B$ را می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix} m+n-۱ & m+n-۲ \\ ۲m+n-۱ & ۲m+n-۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} m+n+۱ & m+n-۱ \\ ۲m+n & ۲m+n+۱ \end{bmatrix}$$

در ماتریس قطری $A+B$، درایه‌های غیرقطر اصلی صفرند، پس:

$$\begin{cases} m+n-۱=۰ \\ ۲m+n=۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=-۱ \\ n=۲ \end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۴ & -۷ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر ۸- است.

(هندسه ۳- مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۲۱)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$(AB)^{۱۴۰۵}=ABAB\ \dots\ AB=A(BA)(BA)(BA)\ \dots\ (BA)B$$

از طرفی:

$$BA=\begin{bmatrix} ۱-m & ۲m & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

$$=۲-۲m+۲m-۳=-۱$$

پس داریم:

$$(AB)^{۱۴۰۵}=A\underbrace{[-۱][-۱]\ \dots\ [-۱]}_{\text{۱۴۰۴ بار}}B=AB$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(عباس الهی)*

با استفاده از ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس، تساوی داده شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$۲(A+\frac{۵}{۲}C)=۳(۲B+C)\Rightarrow ۲A+۵C=۶B+۳C$$

$$\Rightarrow ۲C=۶B-۲A\Rightarrow C=۳B-A$$

$$\xrightarrow{\text{بنابراین}} C=۳\begin{bmatrix} ۰ & -۳ & ۲ \\ -۴ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۰ & -۹ & ۶ \\ -۱۲ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix} ۱ & -۱۲ & ۴ \\ -۱۶ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب درایه‌ها}=(۱)(-۱۲)(۴)(-۱۶)(۲)(۳)$$

$$=(۲^۲\times۳)(۲^۲)(۲^۴)(۲)(۳)=۲^۹\times۳^۲=۲^{\alpha}\times۳^{\beta}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۹\\ \beta=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha-\beta=۹-۲=۷$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

می‌دانیم $(A-B)(A+B)=A^۲+AB-BA-B^۲$، لذا با توجه به مفروضات سوال، ماتریس BA را می‌یابیم:

$$BA=(\underbrace{B^۲B^{-۱}}_{B})(\underbrace{A^{-۱}A^۲}_{A})=B^۲(B^{-۱}A^{-۱})A^۲$$

$$=B^۲(AB)^{-۱}A^۲ \qquad (۱)$$

از طرفی $(AB)^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، پس:

$$(۱):\ BA=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۵ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۹ & ۳ \\ -۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-B)\times(A+B)=A^۲+AB-BA-B^۲$$

$$=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۹ & ۳ \\ -۳ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۸ & -۱ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۵$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۲۳)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ماتریس B وارون‌پذیر نیست، هرگاه $|B|=0$. بنابراین داریم:

$$6I-kA=\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/5k&k\\0/5k&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-1/5k&-k\\-0/5k&6-k\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow|6I-kA|=0\Rightarrow 36-6(2/5k)+1/5k^2-0/5k^2=0$$

$$\Rightarrow k^2-15k+36=0\Rightarrow(k-12)(k-3)=0\Rightarrow\begin{cases}k=12\\k=3\end{cases}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۲۳)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(روح‌اله حسنی)*

$$A^3=2I\Rightarrow A^3-I=I\Rightarrow(A-I)(A^2+A+I)=I$$

پس ماتریس $A-I$ وارون‌پذیر است و وارون آن برابر A^2+A+I است. از طرفی:

$$BA=I+B\Rightarrow BA-B=I\Rightarrow B(A-I)=I$$

بنابراین B وارون ماتریس $A-I$ است. چون وارون ماتریس در صورت وجود منحصر به فرد است. پس: $B=A^2+A+I$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(اسحاق اسفندیار)*

با توجه به فرض داریم:

$$(BC^{-1})^{-1}=(3I)^{-1}\Rightarrow CB^{-1}=\frac{1}{3}I$$

طرفین تساوی را از سمت راست در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$CB^{-1}A^{-1}=(\frac{1}{3}I)A^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix})=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی برابر است با $\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{2}{81}$.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

روش اول:

$$\begin{cases}A^2=\begin{bmatrix}2&m\\-1&n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&m\\-1&n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-m&2m+mn\\-2-n&-m+n^2\end{bmatrix}\\6A=\begin{bmatrix}12&6m\\-6&6n\end{bmatrix}\end{cases}$$

طبق فرض داریم:

$$6A-A^2=\begin{bmatrix}8+m&4m-mn\\-4+n&6n+m-n^2\end{bmatrix}=13I=\begin{bmatrix}13&0\\0&13\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}8+m=13\Rightarrow m=5\\-4+n=0\Rightarrow n=4\end{cases}\Rightarrow 2n-m=8-5=3$$

روش دوم:

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^2=(a+d)A-(ad-bc)I$.

$$A=\begin{bmatrix}2&m\\-1&n\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=(n+2)A-(2n+m)I$$

از طرفی چون $6A-A^2=13I$ پس $A^2=6A-13I$ و بنابراین:

$$\begin{cases}n+2=6\Rightarrow n=4\\2n+m=13\Rightarrow m=5\end{cases}\Rightarrow 2n-m=8-5=3$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۹ تا ۲۱)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق فرض داریم:

$$AB=2I\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}A)B=I$$

یعنی ماتریس B، وارون ماتریس $\frac{1}{2}A$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$B=(\frac{1}{2}A)^{-1}=2A^{-1}=2\times(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix}1&-4\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4\\1&-2\end{bmatrix}$$

حال ماتریس $A-B$ را تشکیل داده و وارون آن را محاسبه می‌کنیم:

$$A-B=\begin{bmatrix}2&4\\1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&4\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}=3I$$

$$\Rightarrow(A-B)^{-1}=\frac{1}{3}I$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۹ تا ۲۳)

هندسه ۳

۱- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

معادلهٔ ماتریسی را ساده کرده و به روش ماتریس وارون حل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{۱}{۱۰-۱۲}\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}-۴ & -۸\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ -۱ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}=۳$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

(مشابه فعالیت صفحهٔ ۲۴ کتاب درسی)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+۲y=۱\\ ۴x-by=۲\end{cases}$ فاقد جواب است، پس داریم:

$$\frac{a}{۴}=\frac{۲}{-b}\neq\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}ab=-۸\\ a\neq ۲\ ,\ b\neq -۴\end{cases}$$

یک دستگاه در صورتی بی‌شمار جواب دارد که در درجهٔ اول دترمینان ضرایب دستگاه صفر باشد. اگر ماتریس ضرایب دستگاه را A بنامیم، آن‌گاه برای گزینه‌ها داریم:

(۱) $|A|=ab-۸=-۱۶\neq ۰$

(۲) $|A|=ab+۸=۰$

(۳) $|A|=-۸-ab=۰$

(۴) $|A|=۸-ab=۱۶$

حال شرط بی‌شمار جواب را برای گزینه‌های «۲» و «۳» بررسی می‌کنیم:

(۲) $$\frac{a}{۸}=-\frac{۱}{b}=-\frac{۲}{۱}\Rightarrow\begin{cases}a=-۱۶\\ b=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

(۳) $$\frac{۸}{b}=\frac{a}{-۱}=-\frac{۲}{۱}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=-۴\end{cases}$$

با توجه به بخش اول پاسخ، قطعاً $a\neq ۲$ و $b\neq -۴$، پس گزینهٔ «۳» نیز نادرست است و تنها دستگاه معادلات گزینهٔ «۲» می‌تواند بی‌شمار جواب داشته باشد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

از جمع دو تساوی داریم:

$$\left(\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\right)X=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ -۳ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۴X=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی اول را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}(۴X)+(۴Y)=\begin{bmatrix}۸ & ۴\\ -۴ & ۸\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}+(۴Y)=\begin{bmatrix}۸ & ۴\\ -۴ & ۸\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۷ & ۰\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}+۴Y=\begin{bmatrix}۸ & ۴\\ -۴ & ۸\end{bmatrix}\Rightarrow ۴Y=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ -۷ & ۸\end{bmatrix}$$

$$۴X+۴Y=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ -۷ & ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ -۴ & ۸\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$\begin{bmatrix}\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵}\\ \frac{۲}{۵} & -\frac{۳}{۵}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۳a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۵}a\\ y=\frac{۲}{۵}-\frac{۹}{۵}a\end{cases}$$

مقادیر x و y را در معادلهٔ اول جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a(\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۵}a)+\frac{۲}{۵}-\frac{۹}{۵}a=۱$$

$$\frac{۱}{۵}a+\frac{۳}{۵}a^۲+\frac{۲}{۵}-\frac{۹}{۵}a=۱\Rightarrow ۳a^۲-۸a-۳=۰$$

$$\Rightarrow (a-۳)(۳a+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ a=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$a=۳\Rightarrow \begin{cases} ۳x+y=۱ \\ ۲x-y=۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{-۳-۲}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۲}{۵} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix}=A$$ (قابل قبول)

$$a=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow \begin{cases} -\frac{۱}{۳}x+y=۱ \\ ۲x+\frac{۷}{۳}y=-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{-\frac{۷}{۹}-۲}\begin{bmatrix} \frac{۷}{۳} & -۱ \\ -۲ & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۲۱}{۲۵} & \frac{۹}{۲۵} \\ \frac{۱۸}{۲۵} & \frac{۳}{۲۵} \end{bmatrix}\neq A$$ (غیرقابل قبول)

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

ابتدا شرط وجود بی‌شمار جواب را برای دستگاه می‌نویسیم:

$$\frac{m}{m+۲}=\frac{m-۳}{-m}=\frac{k}{k+۱}$$

$$-m^۲=(m+۲)(m-۳)=m^۲-m-۶$$

$$\Rightarrow ۲m^۲-m-۶=۰\Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ m=-\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

اگر $m=۲$ را در عبارت دوم (شرط وجود جواب) جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$\frac{k}{k+۱}=\frac{۲-۳}{-۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲k=k+۱\Rightarrow k=۱$$

اگر $m=-\frac{۳}{۲}$ را در عبارت دوم (شرط وجود جواب) جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$\frac{k}{k+۱}=\frac{-\frac{۳}{۲}-۳}{\frac{۳}{۲}}=-۳\Rightarrow k=-۳k-۳$$

$$\Rightarrow ۴k=-۳\Rightarrow k=-\frac{۳}{۴}$$

پس اختلاف مقادیر k برابر است با: $|۱-(-\frac{۳}{۴})|=|\frac{۷}{۴}|=\frac{۷}{۴}$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

ماتریس A را از سمت راست در طرفین رابطه ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ a & b \\ c & d \end{bmatrix}A^{-۱}A=\begin{bmatrix} m & n \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m & n \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲m-n & m-n \\ ۲ & -۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} ۲m-n=۲ \\ m-n=۱ \end{matrix}\right\}\Rightarrow m=۱\,,\,n=۰ \\ a=۲ \\ b=-۱ \\ c=۴ \\ d=-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ab+cd+mn=-۲-۴+۰=-۶$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

SanjeshCloud

۷- **گزینهٔ «۴»** *(عباس الهی)*

ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه می‌باشد و وارون آن به صورت $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ معرفی شده است. پس:

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-3k\\ 2k\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+3k+6k\\ 4-6k+8k\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+9k\\ 4+2k\end{bmatrix}$$

چون دستگاه دارای جواب $(8k-6\ ,\ 2t+2)$ است پس:

$$\begin{bmatrix}-2+9k\\ 4+2k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8k-6\\ 2t+2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2+9k=8k-6\Rightarrow k=-4\\ 4+2k=2t+2\Rightarrow 4+2(-4)=2t+2\end{cases}$$

در نتیجه: $-4=2t+2\Rightarrow 2t=-6\Rightarrow t=-3$

پس: $k+t=-4+(-3)=-7$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(اسحاق اسفندیار)*

دو خط تشکیل دهندهٔ دستگاه موازی هستند، پس داریم:

$$\frac{2}{4}=\frac{m}{-4}\Rightarrow m=-2$$

حال مقدار m را در دستگاه دوم قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}-2x+2y=1\\ 2x-3y=2\end{cases}\Rightarrow-\frac{2}{2}\neq-\frac{2}{3}$$

بنابراین دو خط متقاطع‌اند. برای بررسی عمود بودن دو خط، حاصل‌ضرب شیب‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$m=1\quad,\quad m'=\frac{2}{3}\quad,\quad mm'=\frac{2}{3}\neq-1$$

بنابراین دو خط متقاطع نامتعامد هستند.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ باشد. در این صورت داریم:

$$AXB=4I\Rightarrow A^{-1}(AXB)B^{-1}=A^{-1}(4I)B^{-1}$$

$$\Rightarrow X=4A^{-1}B^{-1}=4(BA)^{-1}$$

بنابراین کافی است وارون ماتریس BA را در ۴ ضرب کنیم:

$$BA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$(BA)^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow X=4(BA)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس X برابر ۴ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(محمد خندان)*

با توجه به روش حل معادلهٔ ماتریسی $(AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B)$، برای به دست آوردن ماتریس مجهولات کافی است، وارون ماتریس ضرایب در ماتریس مقادیر معلوم، ضرب شود، بنابراین:

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ 2d\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\ y=2d\end{cases}$$

ماتریس ضرایب $A=\begin{bmatrix}a & 2\\ b & c\end{bmatrix}$ اگر در وارونش ضرب شود، برابر ماتریس همانی می‌شود. پس:

$$\begin{bmatrix}a & 2\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3a-2=1\Rightarrow a=1 & (*)\\ -2a+2d=0\xrightarrow{(*)}d=1\end{cases}$$

بنابراین $\begin{cases}x=-4\\ y=2\end{cases}$ طول و عرض نقطهٔ تلاقی دو خط مذکور بوده و مجموع آن‌ها برابر ۲- است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

هندسه ۳

۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمد ناری‌ایانه)*

حاصل دترمینان را برحسب سطر اول به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = x(4-3)-(x+1)(2-0)+(x+2)(1-0)$$

$$= x-2x-2+x+2=0$$

حاصل دترمینان همواره برابر صفر است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

(مشابه مثال صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(عباس الهی)*

دترمینان را برحسب سطر اول به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & -y \\ x+1 & 0 & -z \\ y+1 & z & 0 \end{vmatrix} = (1)\times\begin{vmatrix} 0 & -z \\ z & 0 \end{vmatrix}$$

$$-(-x)\times\begin{vmatrix} x+1 & -z \\ y+1 & 0 \end{vmatrix}+(-y)\times\begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ y+1 & z \end{vmatrix}$$

$$= z^2+x(z)(y+1)+(-y)(z)(x+1)$$

$$= z^2+xyz+xz-xyz-yz=0$$

$$\Rightarrow z^2+xz-yz=0 \xrightarrow{+z} x+z=y$$

توجه: چون طبق فرض $xyz\neq 0$، پس $z\neq 0$ می‌باشد و به این دلیل طرفین را بر z تقسیم کرده‌ایم.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(اسحاق اسفندیار)*

دترمینان ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} 4|A| & 1 \\ 3 & |A| \end{vmatrix}=4|A|^2-3 \Rightarrow 4|A|^2-|A|-3=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A|=1 \\ |A|=-\frac{3}{4} \quad (\text{غ ق ق طبق فرض}) \end{cases}$$

طبق $|kA_{n\times n}|=k^n|A_{n\times n}|$ می توان نوشت:

$$|2A|=2^2|A|=4|A|=4$$

دترمینان ماتریس B را برحسب سطر اول می‌یابیم:

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}=1\times(0-(-1))-(-1)(3-4)+2(-1-0)$$

$$=1-1-2=-2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

(مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(روح‌اله حسنی)*

ابتدا ماتریس $A-xI$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A-xI=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}-x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-x & 0 & -3 \\ 0 & -2-x & 1 \\ -1 & 0 & -1-x \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس $A-xI$ را برحسب ستون دوم به دست می‌آوریم:

$$|A-xI|=(-2-x)\begin{vmatrix} 1-x & -3 \\ -1 & -1-x \end{vmatrix}=-(x+2)((x+1)(x-1)-3)$$

$$=-(x+2)(x^2-1-3)=-(x+2)(x^2-4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

پس $x=\pm 2$ ریشه‌های متمایز معادله هستند.

بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌های متمایز این معادله برابر است با:

$$(-2)\times 2=-4$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(ایمان ساریخانی)*

ابتدا دترمینان دو ماتریس A و B را توسط روش ساروس می‌یابیم:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{matrix} \Rightarrow |A|=(0+0+0)-(-\frac{4}{3}+0+0)=\frac{4}{3}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2&0&0\\-1&2&0\\4&3&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}2&0\\-1&2\\4&3\end{matrix}\Rightarrow|B|=(-4+0+0)-(0+0+0)=-4$$

می‌دانیم اگر $A_{3\times3}$ و $k\in\mathbb{R}$ در آن صورت $|kA|=k^3|A|$، پس:

$$||B|A+A|=|-4A+A|=|-3A|=(-3)^3|A|$$

$$=-27\times\frac{4}{3}=-36$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

(مشابه کار در کلاس (۳) صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی)

۶- **گزینهٔ «۱»** (هومن عقیلی)

برای ماتریس $A_{2\times2}$ طبق فرض داریم:

$$A+\frac{1}{|A|}A=2I\Rightarrow|A+\frac{1}{|A|}A|=|2I|$$

$$\Rightarrow|(1+\frac{1}{|A|})A|=|2I|\Rightarrow(1+\frac{1}{|A|})^2|A|=2^2\underbrace{|I|}_{1}$$

$$\Rightarrow(1+\frac{1}{|A|^2}+\frac{2}{|A|})|A|=4$$

$$\Rightarrow\frac{|A|^2+1+2|A|}{|A|}=4\Rightarrow|A|^2-2|A|+1=0$$

$$\Rightarrow(|A|-1)^2=0\Rightarrow|A|=1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۷- **گزینهٔ «۲»** (روح‌اله حسنی)

می‌دانیم:

$$\begin{cases}\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\\\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

پس:

$$|A|=\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos x-\sin x(\cos(x+\frac{\pi}{4}))$$

$$=\sin(x+\frac{\pi}{4}-x)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|B|=\cos x(\cos(\frac{\pi}{6}-x))-\sin x(\sin(\frac{\pi}{6}-x))$$

$$=\cos(x+\frac{\pi}{6}-x)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

از طرفی $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$، بنابراین:

$$|C|=||A^{-1}|B|=|\sqrt{2}B|=(\sqrt{2})^2|B|=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۸- **گزینهٔ «۱»** (اسحاق اسفندیار)

دترمینان مورد نظر را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$|4I-2A^{-1}|=|4A^{-1}A-2A^{-1}|=|2A^{-1}(2A-I)|$$

$$=2^3|A^{-1}||2A-I|=8\times\frac{1}{|A|}|2A-I|=8(\frac{1}{2})(10)=40$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۹- **گزینهٔ «۳»** (هومن عقیلی)

طبق فرض داریم:

$$A=\begin{bmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{bmatrix}$$

$$A-I=\begin{bmatrix}k-1&0&0\\0&k-1&0\\0&0&k-1\end{bmatrix}\Rightarrow|A-I|=(k-1)^3$$

$$|A|=|A-I|+19\Rightarrow k^3=(k-1)^3+19$$

$$\Rightarrow k^3=k^3-3k^2+3k-1+19\Rightarrow 3k^2-3k-18=0$$

$$\Rightarrow k^2-k-6=0\Rightarrow(k-3)(k+2)=0$$

$$\Rightarrow k=3\ ,\ k=-2\Rightarrow|A|=k^3=27\ \text{یا}\ -8$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (روح‌اله حسنی)

می‌دانیم اگر A ماتریس مربعی و I ماتریس همانی از همان مرتبه باشد آن‌گاه $AI=IA=A$، بنابراین:

$$(A+I)(A+2I)=\bar{O}\Rightarrow A^2+A+2A+2I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2+3A+2I=\bar{O}\Rightarrow A^2+2I=-3A$$

بنابراین:

$$|A^2+2I|=|-3A|=(-3)^3|A|=(-3)^3(-2)$$

$$=(-27)\times(-2)=54$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

هندسه ۳

۱- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به فرض داریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}=۲^۲I$$

$$A^۹=(A^۲)^۴A=(۲^۸I)A=۲^۸A$$

$$A^{۱۰}=(A^۲)^۵=۲^{۱۰}I$$

در نتیجه:

$$A^۹=\begin{bmatrix}-۲^۹ & ۲^۸\\ ۰ & ۲^۹\end{bmatrix},\ A^{۱۰}=\begin{bmatrix}۲^{۱۰} & ۰\\ ۰ & ۲^{۱۰}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}A^{۱۰}-A^۹=\begin{bmatrix}۲\times۲^۹ & -۲^۸\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها: $۲^{۱۰}-۲^۸=۲^۸(۲^۲-۱)=۲۵۶\times۳=۷۶۸$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

(مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۲۰)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(ایمان ساریفانی)*

ضرب دو ماتریس که وارون هم هستند برابر I می‌شود، پس:

$$(A+۲I)(A-I)=I\Rightarrow A^۲+A-۲I=I$$

$$A^۲=-A+۳I\xrightarrow{\text{به توان ۲}}A^۴=A^۲-۶A+۹I$$

$$=(-A+۳I)-۶A+۹I=-۷A+۱۲I\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-۷\\ \beta=۱۲\end{cases}$$

بنابراین خواستهٔ مسئله برابر است با: $\alpha+\beta=۵$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۷ & ۰ & -۴\\ -۲ & ۱ & -۱\\ -۱۳ & ۰ & ۸\end{bmatrix}$ کافی است

برحسب ستون دوم بسط دهیم:

$$|A|=۱\times\begin{vmatrix}۷ & -۴\\ -۱۳ & ۸\end{vmatrix}=۵۶-۵۲=۴$$

بنابراین معادلهٔ ماتریسی به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}۴ & -۲\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}۴ & -۲\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix}-۴ & ۲\\ -۸ & -۱\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس X برابر است با:

$$\frac{۱}{۱۰}(-۴+۲-۸-۱)=-\frac{۱۱}{۱۰}=-۱/۱$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمد شاه‌محمدی)*

$|A|=۸a^۲-۶a^۲=۲a^۲\neq۰$ (ماتریس A غیرصفر است)

$\Rightarrow$ A وارون‌پذیر است

پس: $A^۲BA=A^۲\xrightarrow{\times(A^۲)^{-۱}}BA=I\Rightarrow A^{-۱}=B$

حالا $A^{-۱}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲a^۲}\begin{bmatrix}۴a & -a\\ -۶a & ۲a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{a} & -\frac{۱}{۲a}\\ -\frac{۳}{a} & \frac{۱}{a}\end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}=B\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{۲}{a} & -\frac{۱}{۲a}\\ -\frac{۳}{a} & \frac{۱}{a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴b & b\\ ۶b & -۲b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{a}=-۴b\Rightarrow ab=-\frac{۱}{۲}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۳۰)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌خرد)*

با توجه به فرض داریم:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&-2&0\\2&0&a\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=-2a\ ,\ B=\begin{bmatrix}a^2&a&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=6a^2$$

$$|AB|=|A||B|=12\Rightarrow -2a\times 6a^2=12\Rightarrow a^3=-1\Rightarrow a=-1$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix}-1&0\\-2&-2\end{bmatrix}\Rightarrow|C|=2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

(مشابه کار در کلاس (۳) صفحهٔ ۳۰)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(عباس الهی)*

ابتدا از طرفین رابطهٔ داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$3A=\begin{bmatrix}|A|&4\\9&|A|\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{دترمینان}}|3A_{2\times 2}|=|A|^2-36$$

$$\Rightarrow 3^2|A|=|A|^2-36\Rightarrow|A|^2-9|A|-36=0$$

$$\Rightarrow(|A|-12)(|A|+3)=0\xrightarrow{|A|>0}|A|=12$$

$$\Rightarrow 3A=\begin{bmatrix}12&4\\9&12\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}4&\frac{4}{3}\\3&4\end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ $|A-I|$ ابتدا $A-I$ را می‌یابیم:

$$A-I=\begin{bmatrix}3&\frac{4}{3}\\3&3\end{bmatrix}\Rightarrow|A-I|=(3)(3)-(\frac{4}{3})(3)=9-4=5$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

(مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۳۰)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(عباس الهی)*

به کمک دستور ساروس می‌توان نوشت:

$$\begin{vmatrix}0&x-2&x-1&0&x-2\\x+2&0&-3&x+2&0\\x+2&5&0&x+2&5\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow(0+(-3)(x-2)(x+2)+(x-1)(x+2)(5))-(0+0+0)=0$$

$$\Rightarrow -3(x^2-4)+5(x^2+x-2)=0$$

$$\Rightarrow -3x^2+12+5x^2+5x-10=0\Rightarrow 2x^2+5x+2=0$$

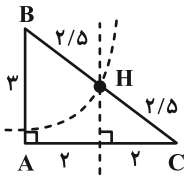
$$\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm 3}{4}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2\\x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

داریم: $|x_1^2-x_2^2|=(-2)^2-(-\frac{1}{2})^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۰)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو رأس A و C به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AC است که وتر را در H، نقطهٔ وسط آن، قطع می‌کند به‌طوری که $HA=HC$. از طرفی مکان هندسی نقاطی از صفحه که از رأس B به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر باشند، دایره‌ای است به مرکز B و شعاع ۲/۵ سانتی‌متر که از نقطهٔ H (وسط وتر) می‌گذرد. نقطهٔ H تنها نقطهٔ مطلوب سوال است.



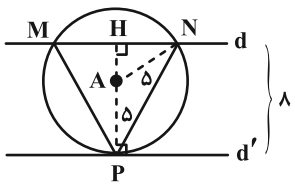
$$BC^{۲} = ۳^{۲} + ۴^{۲} = ۲۵ \Rightarrow BC = ۵$$

توجه: در حالتی که $AC = ۳$ و $AB = ۴$ باشد نیز مشابه حالت قبل، یک نقطه به دست خواهد آمد.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۹- **گزینهٔ «۴»** (سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)

باید دایرهٔ به مرکز A و شعاع ۵ یکی از دو خط d و d' را قطع کند و بر دیگری مماس باشد تا دقیقاً سه نقطه واقع بر خطوط d و d' موجود باشد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ واحد باشند. مطابق شکل داریم:



$$AH = HP - AP = ۸ - ۵ = ۳$$

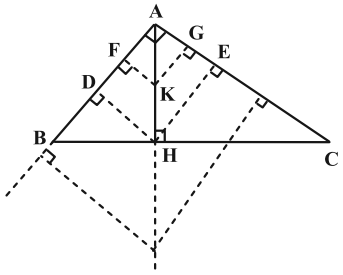
$$\Rightarrow NH = \sqrt{۵^{۲} - ۳^{۲}} = ۴ \Rightarrow MN = ۲NH = ۸$$

$$\Rightarrow S_{PMN} = \frac{۱}{۲} PH \times MN = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۸ = ۳۲$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

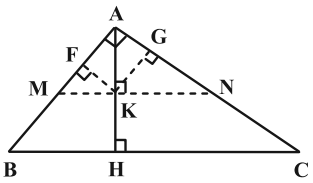
۱۰- **گزینهٔ «۱»** (محمد شاه‌محمدی)

ارتفاع وارد بر وتر و امتداد آن در هر مثلث قائم‌الزاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که نسبت فواصل آن‌ها از دو ضلع قائمه، برابر است با نسبت اندازهٔ دو ضلع قائمه متناظر؛ زیرا مطابق شکل داریم:



$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{CAH} \ , \ \text{نسبت تشابه} = \frac{AB}{AC} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$$

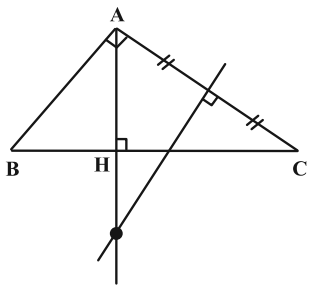
به همین ترتیب به کمک تالس و تشابه، این مطلب برای بقیهٔ نقاط روی AH هم ثابت می‌شود؛ مثلاً $\frac{KF}{KG} = \frac{۳}{۴}$، زیرا:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{AMK} \sim \overset{\Delta}{NAK} \ , \ \text{نسبت تشابه} = \frac{AM}{AN}$$

پس: $\text{نسبت ارتفاع‌های نظیر} = \frac{KF}{KG} = \frac{۳}{۴}$

همچنین می‌دانیم مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو رأس A و C به یک فاصله باشند، عمودمنصف AC است. بنابراین پاسخ مسئله، محل تقاطع عمودمنصف AC با راستای ارتفاع AH است که یک نقطه می‌باشد.



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۱ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی هستند. کدام گزینه درست است؟

۱) $x<y$ ۲) $x=z$

۳) $y>z$ ۴) $y=z$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box دو ماتریس با هم مساوی هستند، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند.

پاسخ خیلی تشریحی از $A=B$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \\ z-۱=۵ \Rightarrow z=۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x=۶ \\ y=۳ \end{cases}$$

بنابراین $x=z$ و سایر گزینه‌ها نادرست هستند.

۲ اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ x & y \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه حاصل $x-y$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۶ ۴) -۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint AB را با BA برابر قرار دهید.

درس Box دو ماتریس مربعی A و B را تعویض‌پذیر می‌نامند، در صورتی که $AB=BA$.

نکته شرط تعویض‌پذیربودن دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$ آن است که:

$$\frac{a-d}{m-q}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ماتریس AB را حساب می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ x & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵+۲x & ۶+۲y \\ ۱۵+۴x & ۱۸+۴y \end{bmatrix}$$

گام دوم: ماتریس BA را حساب می‌کنیم:

$$BA=\begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲۳ & ۳۴ \\ x+۳y & ۲x+۴y \end{bmatrix}$$

گام سوم: شرط تعویض‌پذیربودن دو ماتریس A و B آن است که $AB=BA$، یعنی:

$$\begin{bmatrix} ۵+۲x & ۶+۲y \\ ۱۵+۴x & ۱۸+۴y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲۳ & ۳۴ \\ x+۳y & ۲x+۴y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۵+۲x=۲۳ \Rightarrow x=۹ \\ ۶+۲y=۳۴ \Rightarrow y=۱۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x-y=-۵$$

یه‌جور دیگه از آن‌چه در قسمت نکتهٔ درس‌باکس گفتیم، استفاده می‌کنیم:

شرط تعویض‌پذیربودن دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ x & y \end{bmatrix}$ آن است که:

$$\frac{۱-۴}{۵-y}=\frac{۲}{۶}=\frac{۳}{x} \Rightarrow \frac{-۳}{۵-y}=\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-۳}{۵-y}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۵-y=-۹ \Rightarrow y=۱۴ \\ \frac{۱}{۳}=\frac{۳}{x} \Rightarrow x=۹ \end{cases}$$

۳ ماتریس‌های A و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A+B$ ماتریسی اسکالر و مجموع درایه‌های ماتریس BA برابر با ۱۸ باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint در نظر بگیرید $A+B=\begin{bmatrix}x & ۰\\ ۰ & x\end{bmatrix}$.

درس Box **ماتریس اسکالر**: ماتریس‌های مربعی که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن با هم برابر و سایر درایه‌های آن صفر باشند، اسکالر نامیده می‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: ماتریس اسکالر $A+B$ را به صورت $A+B=\begin{bmatrix}x & ۰\\ ۰ & x\end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$A+\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & ۰\\ ۰ & x\end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}x & ۰\\ ۰ & x\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-۳ & -۲\\ ۲ & x-۱\end{bmatrix}$$

گام دوم: ماتریس BA را به دست می‌آوریم و مجموع درایه‌های آن را برابر با ۱۸ قرار می‌دهیم تا x به دست بیاید.

$$BA=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-۳ & -۲\\ ۲ & x-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳x-۵ & ۲x-۸\\ -۲x+۸ & x+۳\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (۳x-۵)+(۲x-۸)+(-۲x+۸)+(x+۳)=۱۸ \Rightarrow ۴x-۲=۱۸ \Rightarrow x=۵$$

گام سوم: اگر $x=۵$، آن‌گاه $A=\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$، پس بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A برابر با ۴ است.

۴ اگر A یک ماتریس مربعی باشد، به طوری که $A^۲=A-I$، آن‌گاه ماتریس $I+A^{۳۶}$ برابر با کدام است؟

مشاوره محاسبهٔ توان‌های بزرگ ماتریس‌ها، از تیپ‌های پرتکرار در امتحان‌های تشریحی و تستی است.

۱) $\bar{O}$ ۲) $۲I$

۳) $A-I$ ۴) $I-A$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ماتریس $A^۳$ را به دست آورید.

درس Box **ماتریس همانی**: ماتریسی اسکالر است که همهٔ درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن ۱ باشند، مثلاً $I_۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$، $I_۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و ... .

ماتریس همانی، عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌ها است، یعنی اگر A و B قابل ضرب در I باشند، آن‌گاه $AI=A$ و $IB=B$.

نکته اگر k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه $(kI)^n=k^nI$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: طرفین تساوی $A^۲=A-I$ را در A ضرب می‌کنیم:

$$A.A^۲=A(A-I) \Rightarrow A^۳=A^۲-A \xrightarrow{A^۲=A-I} A^۳=(A-I)-A \Rightarrow A^۳=-I \quad (*)$$

گام دوم: با توجه به این‌که $A^{۳۶}=(A^۳)^{۱۲}$، داریم:

$$\xrightarrow{(*)} A^{۳۶}=(-I)^{۱۲}=(-۱)^{۱۲}I=I$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$I+A^{۳۶}=I+I=۲I$$

۵ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱۰ & ۳۰\\ ۲۰ & ۴۰\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه ماتریس $-۲BA^۲B+۸BAB-۱۰B^۲$ برابر با کدام است؟

۱) A

۲) B

۳) $\bar{O}$

۴) I

مشاوره رابطهٔ مهمی در ماتریس‌های ۲×۲ وجود دارد که به رابطهٔ کیلی ـ همیلتون معروف است. این رابطه را که در درس‌باکس گفته‌ایم، حتماً فرابگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

در عبارتی که سؤال، حاصل آن را خواسته، B را هم از سمت راست و هم از سمت چپ فاکتور بگیرید و از رابطهٔ کیلی ـ همیلتون استفاده کنید.

درس Box

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^۲-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در عبارتی که سؤال، حاصل آن را خواسته است، هم از سمت راست و هم از سمت چپ از B فاکتور می‌گیریم:

$$-۲BA^۲B+۸BAB-۱۰B^۲=۲B(-A^۲+۴A-۵I)B \quad (*)$$

گام دوم: رابطهٔ کیلی ـ همیلتون را برای ماتریس A می‌نویسیم، داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix} \Rightarrow A^۲-(۱+۳)A+(۳+۲)I=\bar{O} \xrightarrow{\times -۱} -A^۲+۴A-۵I=\bar{O} \quad (**)$$

گام سوم: با در نظر گرفتن معادله‌های $(*)$ و $(**)$، عبارت مورد نظر سؤال برابر است با:

$$۲B\bar{O}B=\bar{O}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۲\\ -۱ & ۱ & ۱\\ ۳ & -۲ & ۰/۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه جزء صحیح مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A^۳$ کدام است؟

۱) -۱۸
۲) -۱۹
۳) -۱۷
۴) -۱۶

مشاوره این تیپ سؤال‌ها، در آزمون‌های آزمایشی و کنکور، بسیار پرتکرار هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

لازم نیست کلِ درایه‌های ماتریس $A^۳$ را حساب کنید.

درس Box

فرض کنید $D=ABC$، در این صورت درایهٔ d_{ij} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$d_{ij}=[\text{سطر } i\text{اُم ماتریس } A].B.[\text{ستون } j\text{اُم ماتریس } C]$$

با این توضیح، ستون jاُم ماتریس D به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[\text{ستون } j\text{اُم ماتریس } D]=A.B.[\text{ستون } j\text{اُم ماتریس } C]$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ماتریس $A^۳$ را به صورت $A.A.A$ می‌نویسیم، تا بتوانیم از آن‌چه در درس‌باکس گفته شد، استفاده کنیم، پس با توجه به درس‌باکس، باید حاصل $A.A.\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ -۲\end{bmatrix}$ را حساب کنیم، برای این منظور، ابتدا $A.\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ -۲\end{bmatrix}$ را حساب کرده و سپس حاصل آن را از سمت راست در A ضرب می‌کنیم.

گام دوم: ماتریس $A.\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ -۲\end{bmatrix}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A.\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۲\\ -۱ & ۱ & ۱\\ ۳ & -۲ & ۰/۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴\\ -۱\\ -۲/۴\end{bmatrix}$$

گام سوم: ماتریس به‌دست‌آمده در گام دوم را از سمت راست در A ضرب می‌کنیم:

$$A.\begin{bmatrix}-۴\\ -۱\\ -۲/۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۲\\ -۱ & ۱ & ۱\\ ۳ & -۲ & ۰/۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۴\\ -۱\\ -۲/۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸/۸\\ ۰/۶\\ -۱۰/۴۸\end{bmatrix}$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$[-۸/۸+۰/۶-۱۰/۴۸]=[-۱۸/۶۸]=-۱۹$$

۱ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد به طوری که $|A| = \frac{۱}{۲}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $۴A$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۳۲

مشاوره این مدل سؤال‌ها، در امتحان‌های نهایی بسیار پرتکرار هستند و از نمونه‌های آسان سؤال‌های امتحان نهایی محسوب می‌شوند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اگر A یک ماتریس $n\times n$ و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه: $|kA| = k^n |A|$

پاسخ خیلی تشریحی

بنا به آن‌چه در درس‌باکس گفتیم، داریم:

$$|۴A_{۳\times۳}| = ۴^۳ |A| = ۴\times۴\times۴\times\frac{۱}{۲} = ۳۲$$

۲ اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$، آن‌گاه بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A^{۱۰} + (A-I)^۳$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۵
۳) ۱۰
۴) ۶

مشاوره اگر در سؤال‌ها، توان‌های بزرگی از یک ماتریس مربعی مانند A مطرح شده بود، ابتدا ماتریس $A^۲$ را به دست آورید. احتمالاً $A^۲$ برابر است با ماتریس صفر یا ضریبی از I یا ضریبی از A که در این صورت، محاسبهٔ توان‌های بزرگ، کاری ساده خواهد بود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

ابتدا ماتریس $A^۲$ را به دست آورید.

درس Box

۱) اگر ماتریس مربعی A به گونه‌ای باشد که $A^۲ = A$، آن‌گاه به ازای همهٔ nهای طبیعی داریم $A^n = A$. به عنوان مثال، ماتریس همانی (I) نمونه‌ای از این‌گونه ماتریس‌ها است، زیرا همواره داریم $I^n = I$.

۲) ماتریس I با تمام ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبهٔ خود تعویض‌پذیر است، پس تمام اتحادهای جبری در مورد ماتریس مربعی A و ماتریس همانی هم‌مرتبه با آن برقرار است، مثلاً:

$$(A-I)^۳ = A^۳ - ۳A^۲I + ۳AI^۲ - I^۳ = A^۳ - ۳A^۲ + ۳A - I$$

توجه کنید که I عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌ها است، پس $AI = IA = A$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ماتریس $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} = A$$

گام دوم: از آن‌جا که $A^۲ = A$، نتیجه می‌گیریم به ازای تمام nهای طبیعی، داریم $A^n = A$.

گام سوم: بنا به قسمت (۲) درس‌باکس، داریم $(A-I)^۳ = A^۳ - ۳A^۲ + ۳A - I$، بنا به گام دوم داریم $A^n = A$، پس:

$$(A-I)^۳ = A - ۳A + ۳A - I = A - I$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$A^{۱۰} + (A-I)^۳ = A + (A-I) = ۲A - I = \begin{bmatrix} ۶ & -۱۲ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & -۱۲ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}$$

در نتیجه بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A برابر ۵ است.

SanjeshCloud

۳ دستگاه $\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ مفروض است. اگر A ماتریس ضرایب این دستگاه و B ماتریس مقادیر معلوم آن باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $(A+7A^{-1}).B$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۵ امتحان نهایی هندسه (۳) خرداد ۱۴۰۴ طرح شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) در دستگاه دو معادله ـ دو مجهولی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، ماتریس $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و ماتریس $\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم نامیده می‌شود.

۲) اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه با شرط $ad-bc\neq 0$، ماتریس A وارون‌پذیر است و داریم $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در دستگاه دو معادله ـ دو مجهولی $\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases}$، ماتریس ضرایب و $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر $B=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ معلوم است.

گام دوم: ماتریس A^{-1} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{1\times 1-(-2)\times 3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 7A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$(A+7A^{-1})B=\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

بنابراین پاسخ سؤال، برابر است با: $8+10=18$

۴ اگر $\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ سطر اول، ستون دوم ماتریس A کدام است؟

مشاوره محاسبهٔ ماتریس مجهول در یک معادلهٔ ماتریسی از تیپ‌های پرتکرار سؤال در آزمون‌های آزمایشی و کنکورها است که معمولاً روش حل آن‌ها، استفاده از خواص ماتریس وارون است.

۱) ۲/۳
۲) ۱/۴
۳) −۱/۴
۴) −۲/۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

حاصل‌ضرب هر ماتریس مربعی وارون‌پذیر در وارونش، برابر با ماتریس همانی است.

درس Box

اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تساوی داده‌شده را از سمت چپ در ماتریس $\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}^{-۱}$ و از سمت راست در ماتریس $\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}^{-۱}$ ضرب می‌کنیم تا در سمت چپ تساوی فقط A باقی بماند:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}}_{I}A\underbrace{\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}^{-۱}}_{I}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}^{-۱}$$

گام دوم: ماتریس‌های $\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}^{-۱}$ و $\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۲\times۴-۱\times۳}\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۳\times-۲-(-۱)\times۴}\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$A=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\times\frac{-۱}{۲}\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}=\frac{-۱}{۱۰}\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}$$

$$=\frac{-۱}{۱۰}\begin{bmatrix}۲ & ۷\\ ۱ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}=\frac{-۱}{۱۰}\begin{bmatrix}-۳۲ & ۲۳\\ ۱۴ & -۱۱\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{-۱}{۱۰}]{\text{سطر ۱ ستون ۲}}\frac{-۱}{۱۰}\times۲۳=-۲/۳$$

پس خواستهٔ سؤال برابر است با ۲/۳−.

۵ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به طوری که $a_{ij}=\begin{cases} ij-a_{ij} & ; i>j \\ ۱ & ; i\le j \end{cases}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $I+A$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

دستور سارروس برای محاسبهٔ دترمینان ۳×۳:

برای محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس ۳×۳، $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ابتدا ستون‌های اول و دوم ماتریس را به ترتیب در سمت راست دترمینان بنویسید و از دستور زیر استفاده کنید:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = \underbrace{(aei+bfg+cdh)}_{\text{مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر خط‌های قرمز}} - \underbrace{(ceg+afh+bdi)}_{\text{مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر خط‌های آبی}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به شرط داده‌شده، درایه‌های ماتریس A را محاسبه می‌کنیم، درایه‌های $a_{۲۱}$، $a_{۳۱}$ و $a_{۳۲}$ از رابطهٔ بالایی به دست می‌آیند و سایر درایه‌ها ۱ هستند.

$$a_{۲۱}=۲\times ۱-a_{۲۱} \Rightarrow ۲a_{۲۱}=۲ \Rightarrow a_{۲۱}=۱$$
$$a_{۳۱}=۳\times ۱-a_{۳۱} \Rightarrow ۲a_{۳۱}=۳ \Rightarrow a_{۳۱}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$
$$a_{۳۲}=۳\times ۲-a_{۳۲} \Rightarrow ۲a_{۳۲}=۶ \Rightarrow a_{۳۲}=۳$$

گام دوم: با توجه به گام قبل $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱/۵ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و در نتیجه داریم:

$$I+A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱/۵ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱/۵ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

گام سوم: بنا به دستور سارروس، برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱/۵ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱/۵ & ۳ & ۲ & ۱/۵ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$|B|=(۸+۱/۵+۳)-(۳+۶+۲)=۱/۵$$

۶ اگر $A=\begin{bmatrix}۰/۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰/۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵ & ۰/۹ & ۱۰\\ ۰ & ۶ & ۳\\ ۰ & ۰ & -۴\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $A^۲B$ کدام است؟

مشاوره این سؤال، مشابه سؤال ۳۴ کنکور ریاضی تیرماه ۱۴۰۴ طراحی شده است.

۱) ۲/۴ ۲) −۲/۴

۳) ۱/۲ ۴) −۱/۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) اگر تمام درایه‌های بالا یا پایین قطر اصلی یک ماتریس مربعی صفر باشند، دترمینان آن ماتریس، برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی آن.

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ ۰ & d & e\\ ۰ & ۰ & f\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=adf$$

۲) اگر A و B دو ماتریسی مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $|AB|=|A||B|$. از این مطلب نتیجه می‌شود که اگر n، عددی طبیعی باشد آن‌گاه $|A^n|=|A|^n$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: محاسبهٔ دترمینان‌های دو ماتریس A و B را به کمک قسمت (۱) درس‌باکس، انجام می‌دهیم.

$$|A|=\begin{vmatrix}۰/۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰/۲\end{vmatrix}=۰/۵\times\sqrt{۲}\times۰/۲=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۲}\times\frac{۲}{۱۰}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}۵ & ۰/۹ & ۱۰\\ ۰ & ۶ & ۳\\ ۰ & ۰ & -۴\end{vmatrix}=۵\times۶\times-۴=-۱۲۰$$

گام دوم: خواستهٔ سؤال را به کمک قسمت (۲) درس‌باکس به دست می‌آوریم:

$$|A^۲B|=|A^۲||B|=|A|^۲|B|=(\frac{\sqrt{۲}}{۱۰})^۲\times(-۱۲۰)=-\frac{۲}{۱۰\times۱۰}\times۱۲\times۱۰=-\frac{۲۴}{۱۰}=-۲/۴$$

خیلی سبز

آزمون ۷ آذر ۱۴۰۴

هندسه ۳

۱ **اگر صفحه‌ای موازی با مولد یک سطح مخروطی از رأس آن عبور نکند، آن‌گاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی کدام است؟**

۱) هذلولی ۲) سهمی

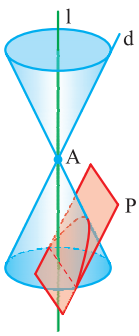
۳) دایره ۴) بیضی

مشاوره بررسی وضعیت صفحه و سطح مخروطی، از تیپ‌های پرتکرار سؤال‌های امتحان نهایی است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آن‌ها یک خط است.)



امتحان نهایی

پاسخ صحیح را از میان کلمات داخل پرانتز انتخاب کنید و در پاسخ‌برگ بنویسید.

الف) اگر صفحه‌ای موازی با مولد یک سطح مخروطی، از رأس آن عبور نکند، آن‌گاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک ..... است. (هذلولی ـ سهمی)

(سؤال ۲ (قسمت الف)ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)

۲ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. تعداد نقاطی که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله هستند، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲

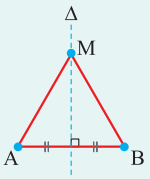
۳) صفر ۴) بی‌شمار

مشاوره این سؤال، یکی از تمرین‌های کتاب درسی است که در امتحان‌های نهایی هم مورد پرسش قرار گرفته است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.



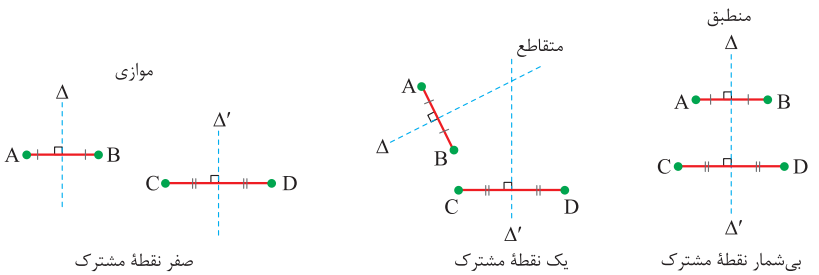
$$M \in \Delta \Leftrightarrow MA = MB$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB واقع‌اند؛ نقاطی که از C و D به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف پاره‌خط CD واقع‌اند.

گام دوم: با توجه به گام قبل، نقطهٔ مشترک عمودمنصف AB و عمودمنصف CD، نقطه‌ای است که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله است.

گام سوم: عمودمنصف AB و عمودمنصف CD حالت‌های زیر را می‌توانند نسبت به هم داشته باشند:



Δ و Δ′ نمی‌توانند دارای دقیقاً ۲ نقطهٔ مشترک باشند.

کتاب درسی

نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

(هندسه (۳) ـ تمرین ۲ صفحهٔ ۳۹ کتاب درسی)

۳ اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد، به طوری که $|A| = ۲$، آن‌گاه حاصل $|۲A^{-۱}|^{۳} \times |(A^{۲})^{-۱}|$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر A ماتریسی $n\times n$، k عددی حقیقی و m عددی طبیعی باشد، آن‌گاه:

۱) $|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|}$

۲) $|A^{m}| = |A|^{m}$

۳) $|kA| = k^{n}|A|$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به درس‌باکس، داریم:

$$|۲A^{-۱}|^{۳} \times |(A^{۲})^{-۱}| = (۲^{۳}|A^{-۱}|)^{۳} \times \frac{۱}{|A^{۲}|} = ۲^{۹}(\frac{۱}{|A|})^{۳} \times \frac{۱}{|A|^{۲}} = \frac{۲^{۹}}{|A|^{۵}} = \frac{۲^{۹}}{۲^{۵}} = ۲^{۴} = ۱۶$$

۴ اگر A ماتریسی مربعی و I ماتریس همانی هم‌مرتبه با آن و وارون ماتریس $A-۲I$ برابر با ماتریس B باشد، حاصل $B^{-۱}(A+I)B$ کدام است؟

۱) $A+۲I$ ۲) $B^{-۱}+۳I$

۳) $B+۳I$ ۴) $A^{-۱}+۲I$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) اگر ماتریس X وارون ماتریس Y باشد، آن‌گاه داریم: $XY=YX=I$.

۲) ماتریس همانی (I) عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌ها است، یعنی $IX=XI=X$.

۳) برای محاسبهٔ ماتریس XYZ می‌توانیم ابتدا XY را حساب کرده، از چپ در Z ضرب کنیم یا ابتدا YZ را حساب کرده از راست در X ضرب کنیم، یعنی $XYZ=(XY)Z=X(YZ)$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ چون ماتریس B وارونِ ماتریس $A-۲I$ است، پس داریم: $A-۲I=B^{-۱}$. اکنون به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$B^{-۱}(A+I)B=B^{-۱}[(A-۲I)+۳I]\,B=B^{-۱}(A-۲I)B+۳B^{-۱}IB=B^{-۱}B^{-۱}B+۳B^{-۱}B=B^{-۱}I+۳I=B^{-۱}+۳I$$

۵ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به طوری‌که a_{ij}، عضو کوچک‌تر مجموعهٔ $\{i,j\}$ باشد و $\begin{bmatrix} |A|+۱ & -۳|A| \\ -|A| & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ آن‌گاه $x+y$ کدام است؟

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱۳۹ کنکور ریاضی داخل ۱۴۰۱ طراحی شده است.

۱) ۸ ۲) -۷ ۳) ۷ ۴) -۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box اگر A یک ماتریس مربعی باشد، به طوری که $AX=B$، آن‌گاه $X=A^{-۱}B$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A=[a_{ij}]_{۳\times۳}\ ;\ a_{ij}=\min\{i,j\} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

گام دوم: با بسط‌دادن نسبت به سطر اول، دترمینان ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$|A|=۱\times(۶-۴)-۱\times(۳-۲)+۱\times(۲-۲)=۲-۱=۱$$

گام سوم: حالا با توجه به فرض سؤال، می‌توانیم x و y را به دست آوریم:

$$\begin{bmatrix} |A|+۱ & -۳|A| \\ -|A| & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۴-۳}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=۴\ ,\ y=۳ \Rightarrow x+y=۷$$

کنکور اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و ماتریس X در رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲|A| & |A| \\ ۱ & \frac{۲}{|A|} \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ صدق کند، کوچک‌ترین درایهٔ قطر اصلی ماتریس X کدام است؟ (سؤال ۱۳۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۱)

۱) -۱۵ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) ۸

SanjeshCloud

۶ **در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع a، مکان هندسی نقاطی درون مثلث که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو ضلع AB و AC، دو برابر فاصلهٔ آن‌ها از ضلع BC است، کدام است؟**

۱) پاره‌خطی به طول $\frac{۲}{۳}a$ عمود بر BC

۲) پاره‌خطی به طول $\frac{۲}{۳}a$ موازی با BC

۳) پاره‌خطی به طول $\frac{۱}{۳}a$ عمود بر BC

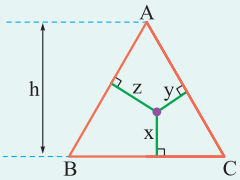
۴) پاره‌خطی به طول $\frac{۱}{۳}a$ موازی با BC

مشاوره سؤالی نسبتاً دشوار که ترکیبی از «مکان هندسی» از هندسه (۳) و «خواص مثلث متساوی‌الاضلاع» از هندسه (۱) است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

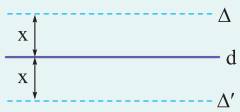
۱) مجموع فاصله‌های هر نقطه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن برابر با ارتفاع آن مثلث است.



$$x+y+z=h$$

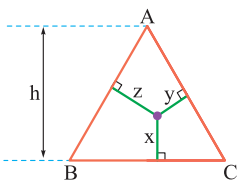
۲) در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های نظیر، برابر با نسبت تشابه است.

۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط ثابت d به فاصلهٔ معلوم x هستند، دو خط موازی با d و به فاصلهٔ x از آن است (Δ و Δ').



پاسخ خیلی تشریحی

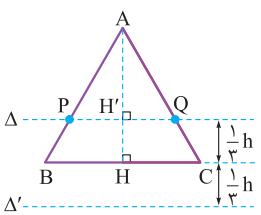
گام اول: فرض کنید در شکل زیر $y+z=۲x$، داریم:



$$x+y+z=h \Rightarrow x+۲x=h \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}h$$

یعنی نقطهٔ مطلوب، به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}h$ از ضلع BC واقع است.

گام دوم: مکان هندسی نقاطی که از BC به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}h$ هستند، دو خط موازی با BC، به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}h$ از آن است.



گام سوم: با توجه به شکل گام قبل، قسمتی از دو خط Δ و Δ' که درون مثلث ABC قرار می‌گیرند، پاسخ سؤال است (پاره‌خط PQ).

به دلیل متشابه‌بودن دو مثلث APQ و ABC، داریم:

$$\frac{PQ}{BC}=\frac{AH'}{AH} \Rightarrow \frac{PQ}{a}=\frac{\frac{۲}{۳}h}{h} \Rightarrow PQ=\frac{۲}{۳}a$$

خیلی سبز

آزمون ۳۰ آذر

هندسه ۳

۱ در ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۶ \\ -۶ & x & ۵ \\ ۱۱ & ۹ & -۳ \end{bmatrix}$ اگر به درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون سوم، ۹ واحد اضافه کنیم، دترمینان آن تغییری نمی‌کند. مقدار x کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -۲

Hint

دترمینان ۲×۲ که از حذف سطر و ستون درایهٔ x به دست می‌آید، باید صفر باشد.

درس Box

۱) دترمینان ماتریس ۳×۳

اگر $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان این ماتریس با بسط حول سطر اول به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|A|=a_{۱۱}\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۱۲}\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۱۳}\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$

پس دترمینان برحسب سطر اول به صورت $|A|=a_{۱۱}\times\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}-a_{۱۲}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۱۳}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$ می‌باشد.

توجه: دترمینان هر ماتریس ۳×۳ دلخواه را می‌توان برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که حاصل همواره عددی حقیقی و منحصربه‌فرد است، ولی بهتر است براساس سطر یا ستونی بسط دهیم که بیشترین صفر را دارد تا محاسبات ساده‌تر شود. به طور کلی علامت هر درایه از ماتریس ۳×۳ برای محاسبهٔ دترمینان به صورت مقابل است: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

۲) برای این‌که تغییر یک درایه از ماتریس بر کل دترمینان تأثیری نگذارد، لازم است که دترمینان ۲×۲ متناظر با آن درایه برابر صفر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس داده‌شده، دترمینان را نسبت به سطر سوم بسط می‌دهیم. با تغییر درایهٔ $a_{۳۳}$ هیچ تغییری در دترمینان‌های ۲×۲ متناظر با درایه‌های دیگر این سطر ایجاد نمی‌شود، در نتیجه برای این‌که تغییر این درایه بر کل دترمینان تأثیری نگذارد، لازم است که دترمینان متناظر با درایهٔ $a_{۳۳}$ یعنی $\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix}$ برابر صفر باشد؛ پس:

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۶ & x \end{vmatrix}=۰ \Rightarrow ۴x+۱۲=۰ \Rightarrow x=-۳$$

SanjeshCloud

۲ اگر A یک ماتریس اسکالر مرتبهٔ دو و ماتریس‌های B و C وارون یکدیگر باشند به طوری که $|(AC-C)(B-2BA)|=0$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱ ● ۲) -1 ۳) -2 ۴) ۲

درس Box

۱) وارون (معکوس) ماتریس: برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی چون B می‌باشد به طوری‌که $AB=BA=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

۲) ماتریس اسکالر: ماتریسی است که درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن برابر با صفر و درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابرند، مثل این ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

۳) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، آن‌گاه: $|AB|=|A||B|$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (تحلیل صورت سؤال):

ماتریس اسکالر A را به صورت $A=\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ و ماتریس‌های B و C را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $BC=I$ و $CB=I$

گام دوم (ساده‌کردن عبارت دترمینان): عبارت داخل دترمینان داده‌شده در صورت مسئله را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$|(AC-C)(B-2BA)|=|(A-I)\underbrace{CB}_{I}(I-2A)|=|A-2A^2-I+2A|$$

$$\Rightarrow |-2A^2+3A-I|=0 \Rightarrow |(-A+I)(2A-I)|=0 \Rightarrow |-A+I||2A-I|=0 \Rightarrow \begin{cases} |-A+I|=0 \\ |2A-I|=0 \end{cases}$$

گام سوم (محاسبهٔ مجموع درایه‌های ماتریس A در حالت‌های مختلف): حالا درایه‌های ماتریس A را با استفاده از دترمینان آن به دست می‌آوریم:

$$|-A+I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-n & 0 \\ 0 & 1-n \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-n)^2=0 \Rightarrow n=1 \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A} 2n=2$$

$$|2A-I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2n-1 & 0 \\ 0 & 2n-1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (2n-1)^2=0 \Rightarrow n=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A} 2n=1$$

مجموع درایه‌های ماتریس A می‌تواند ۲ یا ۱ باشد؛ بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

مشاوره این سؤال ساده، با ایده گرفتن از یکی از سؤال‌های امتحان نهایی طرح شده است، این گونه سؤال‌ها را به‌هیچ‌وجه نباید از دست بدهید.

۳ اگر A ماتریسی ۳×۳ و دترمینان آن برابر ۲ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $|A|.A^{۲}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ●

۲) ۱۲۸

۳) ۸

۴) ۱۶

درس Box

۱) اگر m عددی طبیعی و A ماتریسی مربعی باشد، آن‌گاه: $|A^{m}|=|A|^{m}$

۲) اگر k عددی حقیقی و A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه: $|kA|=k^{n}|A|$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس باکس بالا داریم:

$$||A|.A^{۲}| \overset{\text{درس باکس ۲}}{=\!=} |A|^{۳}\times|A^{۲}| \overset{\text{درس باکس ۱}}{=\!=} |A|^{۳}\times|A|^{۲}=۲^{۳}\times۲^{۲}=۳۲$$

۴ از تقاطع یک صفحه با یک سطح استوانه‌ای، چه تعداد از شکل‌های زیر، می‌تواند ایجاد شود؟

الف) دایره　　ب) بیضی

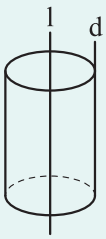
پ) یک خط　　ت) دو خط موازی

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

مشاوره تمرین ۶ در صفحهٔ ۳۹ کتاب درسی هندسه (۳) به بررسی سطح استوانه‌ای می‌پردازد و این سؤال بر مبنای آن طراحی شده است.

درس Box

هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شودکه آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم.



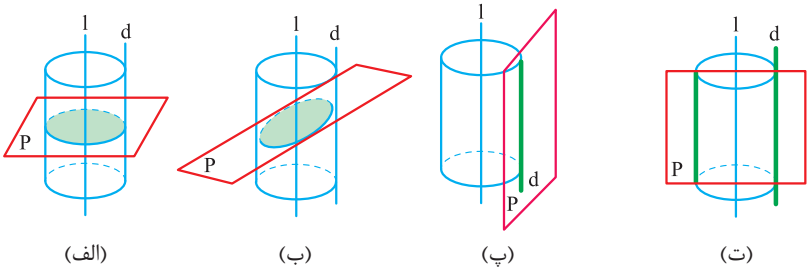
پاسخ خیلی تشریحی با توجه به درس‌باکس:

الف) اگر صفحهٔ P بر d و l عمود باشد، مقطع حاصل دایره است.

ب) اگر صفحهٔ P با d و l متقاطع غیرعمود باشد، مقطع حاصل بیضی است.

پ) اگر صفحهٔ P بر سطح استوانه مماس باشد، مقطع حاصل یک خط است.

ت) اگر صفحهٔ P شامل d و l باشد، مقطع حاصل دو خط موازی است.



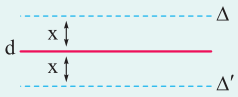
SanjeshCloud

۵ دو خط d و d' به فاصلهٔ ۴ واحد از یکدیگر مفروض‌اند، مکان هندسی نقاطی از صفحه که حاصل‌ضرب فاصلهٔ آن‌ها از این دو خط برابر ۴ واحد باشد، کدام است؟

۱) یک خط
۲) دو خط
۳) سه خط
۴) چهار خط

درس Box

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ x هستند، دو خط موازی با d در طرفین آن هستند.



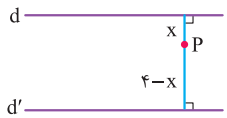
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (تحلیل حالت‌های ممکن مسئله):

دو خط d و d' به فاصلهٔ ۴ از یکدیگر مفروض‌اند، برای نقطهٔ P که حاصل‌ضرب فواصل آن از d و d' برابر ۴ است، دو حالت در نظر می‌گیریم: P بین دو خط یا خارج از دو خط باشد.

گام دوم (محاسبهٔ مکان هندسی در حالت اول):

P بین دو خط است؛ پس اگر فاصلهٔ نقطهٔ P از یک خط برابر x باشد، فاصله‌اش از خط دیگر برابر $۴-x$ است:

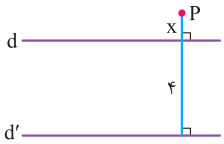


$$x(۴-x)=۴ \Rightarrow x^۲-۴x+۴=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

یعنی مکان هندسی P در این حالت خطی به فاصلهٔ ۲ از دو خط d و d' است.

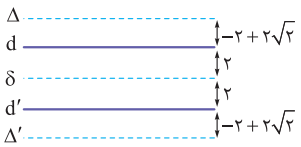
گام سوم (محاسبهٔ مکان هندسی در حالت دوم):

P خارج دو خط است؛ پس اگر فاصلهٔ P از یک خط برابر x باشد، فاصله‌اش از خط دیگر $۴+x$ است:



$$x(۴+x)=۴ \Rightarrow x^۲+۴x-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲-۲\sqrt{۲}<۰ \text{ (غیر قابل قبول)} \\ x=-۲+۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

یعنی مکان هندسی P در این حالت، خطی به فاصلهٔ $-۲+۲\sqrt{۲}$ از خط d در بالای آن یا خطی به فاصلهٔ $-۲+۲\sqrt{۲}$ از خط d' در پایین آن است؛ پس در نهایت مکان هندسی چنین نقاطی سه خط است که آن‌ها را درشکل زیر می بینید: $(\delta, \Delta', \Delta)$



۶ مثلث متساوی‌الاضلاع **ABC** به طول ضلع $۲\sqrt{۳}$ مفروض است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از سه ضلع این مثلث برابر با ۳ باشد، کدام است؟

۱) محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۴\sqrt{۳}$

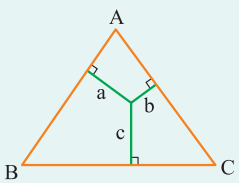
۲) محیط مثلث ABC

۳) نقاط واقع بر محیط و داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۴\sqrt{۳}$

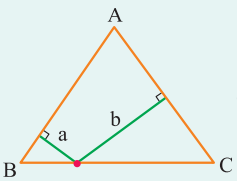
۴) نقاط واقع بر محیط و داخل مثلث ABC

درس Box

۱) در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، مجموع فواصل هر نقطهٔ داخل و روی مثلث از سه ضلع، برابر ارتفاع مثلث است:



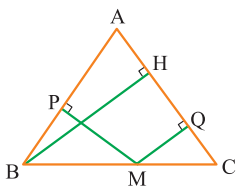
ارتفاع مثلث $= a + b + c$



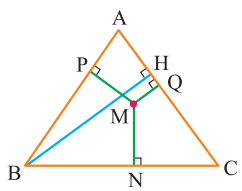
ارتفاع مثلث $= a + b$

۲) اندازهٔ ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس پاسخ سؤال نقاط روی محیط و نقاط داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است.



$$MP + MQ = BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲\sqrt{۳} = ۳$$



$$MN + MQ + MP = BH = ۳$$

توجه: دقت کنید که اگر نقطه‌ای بیرون یک مثلث متساوی‌الاضلاع واقع باشد، مجموع فواصل آن از سه ضلع مثلث، بیشتر از ارتفاع مثلث است.

۷ دو صفحهٔ موازی P_1 و P_2 و نقطهٔ A در فضا مفروض‌اند. اگر خط d واقع در صفحهٔ P_1 و نقطهٔ A غیرواقع بر خط d باشد، چند خط گذرا از A و موازی صفحهٔ P_2 وجود دارد به طوری که متقاطع با خط d باشد؟

۱) صفر
۲) بی‌شمار
۳) ۱
۴) صفر یا بی‌شمار

درس Box

۱) خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر d را در فضا در نظر می‌گیریم؛ تنها یک خط وجود دارد که از A گذشته و با d موازی باشد.

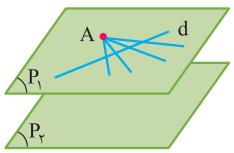
۲) دو خطی که در یک صفحه واقع‌اند، یا با هم موازی‌اند، یا متقاطع.

۳) اگر خطی یکی از دو صفحهٔ موازی را قطع کند، حتماً دیگری را هم قطع می‌کند.

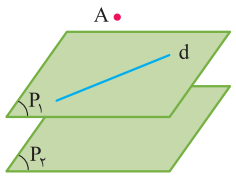
۴) اگر دو صفحه با هم موازی باشند، هر خط واقع در یکی از این صفحات، با صفحهٔ دیگر موازی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ دو حالت داریم:

۱) A روی صفحهٔ P_1 باشد: در این حالت مطابق شکل زیر، بی‌شمار خط وجود دارد که از نقطهٔ A بگذرد، با d متقاطع باشد و با صفحهٔ P_2 موازی باشد.



۲) A روی صفحهٔ P_1 نباشد: در این حالت خطی با شرایط مورد نظر وجود ندارد؛ زیرا هر خطی از A رسم کنیم که خط d را قطع کند حتماً صفحهٔ P_2 را نیز قطع می‌کند.



آزمون ۲۵ مهر ۱۴۰۴

هندسه ۳

۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

– هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم.

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

جوابش اینه

طبق نکته، ماتریس $A_{2\times 3}$ به‌صورت زیر است:

$$a_{ij}=i+2mj$$

$$A_{2\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+2m & 1+4m & 1+6m\\ 2+2m & 2+4m & 2+6m\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها}=24m+9=81\Rightarrow 24m=72\Rightarrow m=3$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$a_{23}=2+6(3)=20$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

– (ضرب ماتریس در ماتریس): اگر A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریسی $p\times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابر باشد)، در این صورت $A_{m\times p}\times B_{p\times n}$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{m\times p}\times B_{p\times n}=C_{m\times n}=[c_{ij}]$ ماتریس C ماتریسی $m\times n$ بوده که درایهٔ روی سطر iاُم و ستون jاُم در آن یعنی، c_{ij} از ضرب سطر iاُم A در ستون jاُم B به‌دست می‌آید، یعنی:

$$c_{ij}=A\text{ سطر }i\text{اُم}\times B\text{ ستون }j\text{اُم}$$

$$\Rightarrow c_{ij}=\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{pj}\end{bmatrix}=a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}+\cdots+a_{ip}\times b_{pj}$$

جوابش اینه

ابتدا درایه‌های ماتریس $A=[2i-j]_{2\times 3}$ را مشخص می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-1 & 2-2 & 2-3 \\ 4-1 & 4-2 & 4-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

در ماتریس $A\times B$، درایهٔ سطر دوم و ستون چهارم را تعیین می‌کنیم. برای این کار سطر دوم A را در ستون چهارم B ضرب می‌کنیم.

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \boxed{3 & 2 & 1} \end{bmatrix}_{2\times 3}\times\begin{bmatrix} x & -1 & 0 & \boxed{3x} \\ 2 & x & x-1 & \boxed{0} \\ -1 & 2x & 3 & \boxed{x+2} \end{bmatrix}_{3\times 4}=\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3x \\ 0 \\ x+2 \end{bmatrix}=12 \Rightarrow 9x+0+x+2=12 \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1$$

حال برای تعیین سطر اول ماتریس $A\times B$، سطر اول A را در ماتریس B ضرب می‌کنیم.

$$AB=\begin{bmatrix} \boxed{1 & 0 & -1} \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$2-3-3=-4$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- توان‌های ماتریس مربعی A به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A^2=A\cdot A\ ,\ A^3=A\cdot A^2=A^2\cdot A\ ,\ A^4=A\cdot A^3=A^2\cdot A^2=A^3\cdot A\ ,\ A^{n+1}=A\cdot A^n=A^n\cdot A$$

- خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری): ضرب ماتریس‌ها بر روی جمع و تفریق قابل پخش کردن است.

$$A(B\pm C)=AB\pm AC$$
$$(A\pm B)\cdot C=AC\pm BC$$

جوابش اینه

ابتدا با فاکتور گرفتن، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$(A^2B+A^2C)\cdot(CA+BA)=A^2(B+C)\cdot(C+B)A=A^2(B+C)^2A=A^2(4I^2)A=4A^3$$

بنابراین داریم:

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$4A^3=4\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 32 & -28 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه و تعویض‌پذیر باشند، آنگاه اتحادها در مورد آن‌ها برقرار است. مانند:

$$(AB)^n=A^n\cdot B^n$$
$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$$
$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$
$$(A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3$$

SanjeshCloud

جوابش اینه

از فرض $A^۲-۲A+۳I=\overline{O}$، داریم $A^۲=۲A-۳I$. ماتریس‌های A و I تعویض‌پذیرند، پس اتحادها در مورد آن‌ها برقرار است. حال طرفین این تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$A^۲=۲A-۳I \Rightarrow A^۴=(۲A-۳I)^۲=۴A^۲-۱۲A+۹I$$

در این رابطه به‌جای $A^۲$ عبارت $۲A-۳I$ را جایگزین می‌کنیم:

$$A^۴=۴(۲A-۳I)-۱۲A+۹I=۸A-۱۲I-۱۲A+۹I$$

$$A^۴=-۴A-۳I \Rightarrow A^۴+۴A+۳I=\overline{O} \Rightarrow \begin{cases} m=۴ \\ n=۳ \end{cases}$$

طبق فرض: $A^۴+mA+nI=\overline{O}$

بنابراین $m+n=۷$

۵ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- توان‌های ماتریس مربعی A به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A^۲=A\cdot A \ , \ A^۳=A\cdot A^۲=A^۲\cdot A \ , \ A^۴=A\cdot A^۳=A^۲\cdot A^۲=A^۳\cdot A \ , \ A^{n+۱}=A\cdot A^n=A^n\cdot A$$

جوابش اینه

ابتدا ماتریس $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A^۲=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۴ & -۵ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۴ & -۵ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}=-A$$

حال توان‌های طبیعی A را مشخص می‌کنیم.

$$A^۲=-A \xrightarrow{\times A} A^۳=-A^۲=A \xrightarrow{\times A} A^۴=A^۲=-A$$

مشخص است که توان‌های زوج A برابر $-A$ و توان‌های فرد A برابر خود A می‌باشند. با توجه به اینکه از $۲!$ به بعد همگی زوج هستند، داریم:

$$B=A^{۱!}+A^{۲!}+A^{۳!}+\ldots+A^{۱۴۰۴!}=A\underbrace{-A-A-\ldots-A}_{\text{۱۴۰۳تا}}$$

$$B=-۱۴۰۲A=-۱۴۰۲\begin{bmatrix} -۲ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۴ & -۵ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر است با:

$$-۱۴۰۲(-۲+۳+۵+۱-۴-۵-۱+۳+۴)=-۵۶۰۸$$

آزمون ۱۶ آبان ۱۴۰۴

هندسه ۳

۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون B به‌طوری‌که $A\times B=B\times A=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

$$A\times B=B\times A=I \Rightarrow A^{-1}=B$$

جوابش اینه

رابطهٔ $A^{2}=10I$ را به‌صورت زیر نوشته و داریم:

$$A^{2}=10I \Rightarrow A^{2}-9I=I \Rightarrow (A-3I)(A+3I)=I$$

ضرب دو ماتریس برابر I شده است، پس هرکدام وارون دیگری است:

$$(A-3I)^{-1}=A+3I$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- ماتریس مربعی A وارون‌پذیر نیست هرگاه $|A|=0$ باشد.

جوابش اینه

ابتدا ماتریس $B+2A$ را تشکیل می‌دهیم.

$$B+2A=\begin{bmatrix} m & -3 \\ 5 & m+2 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m-2 & 3 \\ 9 & m+4 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس بالا باید برابر صفر باشد، پس:

$$|B+2A|=0 \Rightarrow (m-2)(m+4)-9\times 3=0 \Rightarrow m^{2}+2m-35=0$$

$$(m+7)(m-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-7 \\ m=5 \end{cases}$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

SanjeshCloud

جوابش اینه

از رابطهٔ داده‌شده، داریم:

$$B-2A=BA \Rightarrow B-BA=2A \Rightarrow B(I-A)=2A \quad (I)$$

دترمینان ماتریس $I-A$ را محاسبه می‌کنیم:

$$I-A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -3 & -3\end{bmatrix} \Rightarrow |I-A|=0-6\neq 0$$

ماتریس $I-A$ وارون‌پذیر است. طرفین تساوی (I) را از سمت راست در $(I-A)^{-1}$ ضرب می‌کنیم:

$$B(I-A)(I-A)^{-1}=2A(I-A)^{-1}$$

$$\Rightarrow B=2A(I-A)^{-1}=2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{6}\right)\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$B=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & 2\\ * & *\end{bmatrix}$$

بنابراین سطر اول ماتریس B برابر است با:

$$\begin{bmatrix}-1 & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- توان‌های ماتریس مربعی A به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A^2=A\cdot A \ , \ A^3=A\cdot A^2=A^2\cdot A \ , \ A^4=A\cdot A^3=A^2\cdot A^2=A^3\cdot A \ , \ A^{n+1}=A\cdot A^n=A^n\cdot A$$

جوابش اینه

ماتریس $(3AB)^2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$3AB=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow (3AB)^2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 9(AB)^2=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=3(3AB)=9AB$$

$$\Rightarrow 9(AB)^2=9(AB) \Rightarrow (AB)^2=AB \xrightarrow{\times AB} (AB)^3=(AB)^2=AB$$

به همین ترتیب همهٔ توان‌های AB برابر با خودش است. حال خواستهٔ سؤال را ساده می‌کنیم.

$$A(BA)^{1404}B=A(BA)(BA)(BA)\cdots(BA)B=\underline{AB}\,\underline{AB}\,\underline{AB}\,\underline{A}\cdots\underline{AB}\,\underline{AB}=(AB)^{1405}=AB=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس فوق برابر است با: $9\times\frac{1}{3}=3$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- در حالت کلی اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ باشند، در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادلهٔ ماتریسی $AX=B$ نوشته شده و در صورتی که ماتریس A وارون‌پذیر باشد یا $|A|\neq 0$ با ضرب A^{-1} از چپ در معادلهٔ فوق می‌توان مجهولات را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

- برای ماتریس وارون‌پذیر A داریم:

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

جوابش اینه

از دستگاه معادلات داده‌شده، داریم:

$$\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=-3 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A=(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ d=-1 \end{cases}$$

$$X=A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$ax+dy=(\frac{1}{3})\times 3-3=-2$$

۱ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- سه حالت زیر را برای دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ می‌توان در نظر گرفت:

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، در این صورت دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد.

$$\begin{array}{l} ax+by=c \\ \hline \\ a'x+b'y=c' \end{array}$$

ب) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$، در این صورت دو خط موازی‌اند و یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، در این حالت دو خط موازی‌اند و هیچ نقطهٔ اشتراکی ندارند، لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

$$\begin{array}{l} ax+by=c \\ \hline a'x+b'y=c' \\ \hline \end{array}$$

۲) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و روی یکدیگر واقع‌اند یا به عبارتی هر دو معادله یک خط را نشان می‌دهند، لذا دستگاه تعداد بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه‌ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می‌کند.

$$\begin{array}{l} ax+by=c \\ \hline a'x+b'y=c' \end{array}$$

جوابش اینه

با توجه به نکتهٔ بالا، شرط آنکه دستگاه معادلات بی‌شمار جواب داشته باشد به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} ۳x+Ky=۶ \\ (K-۱)x+۲y=۴ \end{cases} : \frac{۳}{K-۱}=\frac{K}{۲}=\frac{۶}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۳}{K-۱}=\frac{۶}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{K-۱}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow K-۱=۲ \Rightarrow K=۳ \\ \frac{K}{۲}=\frac{۶}{۴} \Rightarrow \frac{K}{۲}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow K=۳ \end{cases}$$

بنابراین به‌ازای $K=۳$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۲ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- برای ماتریس وارون‌پذیر A داریم: $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$

جوابش اینه

طبق فرض سؤال، داریم:

$$A^{-۱}=A \xrightarrow{\times A} AA^{-۱}=A^{۲} \Rightarrow A^{۲}=I$$

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} m & ۱ \\ -۱ & -m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & ۱ \\ -۱ & -m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} m^{۲}-۱ & ۰ \\ ۰ & m^{۲}-۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$m^{۲}-۱=۱ \Rightarrow m^{۲}=۲ \Rightarrow m=\pm\sqrt{۲}$$

۳ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون B به طوری که $A\times B=B\times A=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

$$A\times B=B\times A=I \Rightarrow A^{-۱}=B$$

- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه و تعویض‌پذیر باشند، آنگاه اتحادها در مورد آن‌ها برقرار است. مانند:

$$(AB)^n = A^n \cdot B^n \qquad (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \qquad (A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

جوابش اینه

دو ماتریس A و $I+A$ وارون یکدیگرند، در نتیجه:

$$A(I+A) = I \Rightarrow A + A^2 = I \Rightarrow A^2 = I - A$$

ماتریس‌های A و I تعویض‌پذیرند، پس به کمک اتحادها عبارت $A^4 - I$ را ساده می‌کنیم:

$$A^4 - I = (A^2 - I)(A^2 + I) = (I - A - I)(I - A + I) = (-A)(2I - A) = -2A + A^2 = -2A + (I - A) = -3A + I$$

۵ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به‌دست می‌آید: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

جوابش اینه

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت $|A|A^{-1} = |A| \times \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

بنابراین:

$$|A|A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} d = 3 \ , \ b = 1 \\ c = -2 \ , \ a = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

حال وارون ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{-1} = \frac{1}{3-(-2)}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

در رابطهٔ $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ با ضرب طرفین در A^{-1}، داریم:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & * \end{bmatrix}$$

و تفاضل درایه‌های قطر فرعی ماتریس X برابر است با: $\frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0$

۶ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبهٔ A^n باید درایه‌های قطر اصلی آن را به توان n برسانیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

- دترمینان ماتریس‌های قطری برابر با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی است. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

جوابش اینه

با استفاده از نکات بالا، داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۴}=\begin{bmatrix}(-۲)^{۴} & ۰ & ۰\\ ۰ & (-۱)^{۴} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲^{۴}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۶ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱۶\end{bmatrix},\ A^{۳}=\begin{bmatrix}(-۲)^{۳} & ۰ & ۰\\ ۰ & (-۱)^{۳} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲^{۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۸\end{bmatrix}$$

$$A^{۴}-A^{۳}=\begin{bmatrix}۲۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۸\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{۱}{۲}(A^{۴}-A^{۳})=\begin{bmatrix}۱۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow \left|\frac{۱}{۲}(A^{۴}-A^{۳})\right|=۱۲\times ۱\times ۴=۴۸$$

$$B^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow \left|B^{۲}\right|=۴\times ۱\times ۴=۱۶$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$۴۸+۱۶=۶۴$$

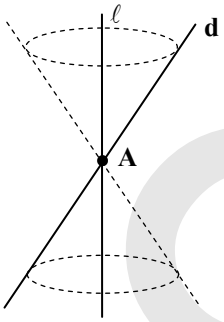
گزینه دو

آزمون ۳۰ آذر

هندسه ۳

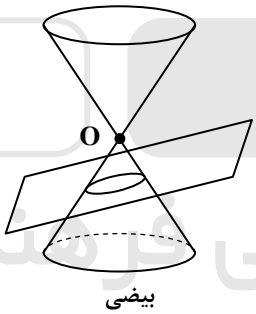
۱ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۱)

نکتهٔ ۱: فرض کنید دو خط d و ℓ در نقطهٔ A متقاطع (غیرعمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط ℓ را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط ℓ را محور، نقطهٔ A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.



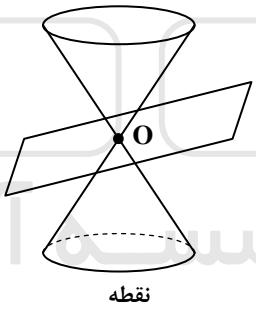
نکتهٔ ۲: در حالتی که صفحهٔ P بر محور ℓ عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ رویهٔ مخروطی را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.

مطابق نکات، دو حالت زیر را طبق فرض سؤال می‌توان در نظر گرفت:



بیضی

(صفحه از رأس رویه عبور نکرده است.)



نقطه

(صفحه از رأس رویه عبور کرده است.)

بنابراین مقطع این صفحه با رویه، نقطه یا بیضی است و گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۲ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

نکتهٔ ۱: برای ماتریس مربعی A، داریم:

$$|A^n| = |A|^n$$

نکتهٔ ۲: اگر A ماتریسی مربعی مرتبهٔ n و k عدد حقیقی باشد، داریم:

$$|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$$

طبق فرض سؤال و نکات فوق، داریم:

$$|A| = ۲$$

$$۳\left|۲\left|۲A^۳\right|A\right| = ۳\left|۲\times ۲^۳|A|^۳ A\right| = ۳\left|۲^۴|A|^۳ A\right| = ۳(۲^۴|A|^۳)^۳|A| = ۳\times ۲^{۱۲}|A|^۹\times|A| = ۳\times ۲^{۱۲}\times|A|^{۱۰}$$

$$= ۳\times ۲^{۱۲}\times ۲^{۱۰} = ۳\times ۲^{۲۲}$$

SanjeshCloud

۳ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

نکتهٔ ۱: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد، $(۳ \le n \le ۱)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$I)\ A = [k]_{۱\times۱} \Rightarrow |A| = k$$

$$II)\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$III)\ A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{۱۱}\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۲}\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۳}\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$

برحسب سطر اول $|A| = a_{۱۱}\times\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} - a_{۱۲}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۳}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$

(برای هر ماتریس ۳×۳ دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که حاصل در همهٔ حالت‌ها یکسان خواهد بود.)

نکتهٔ ۲: برای ماتریس وارون‌پذیر A، داریم:

$$|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|}$$

طبق نکات فوق، داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} -۳ & ۱ & n \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ -n & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = -۳(-۴+۱) - ۱\times(-۲-n) + n(۱+۲n) = ۹+۲+n+(۱+۲n)n = ۲n^{۲} + ۲n + ۱۱$$

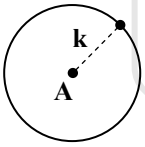
$$|A| = ۴|A^{-۱}| \Rightarrow |A| = \frac{۴}{|A|} \Rightarrow |A|^{۲} = ۴ \Rightarrow |A| = \pm ۲$$

$$۲n^{۲} + ۲n + ۱۱ = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲n^{۲} + ۲n + ۱۳ = ۰ \\ ۲n^{۲} + ۲n + ۹ = ۰ \end{cases}$$

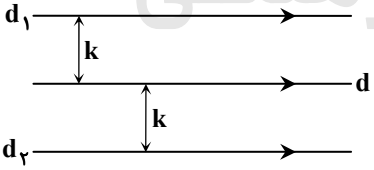
هیچ‌کدام از دو معادله ریشه ندارد چون Δ در هر دو منفی است.

۴ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۱)

نکتهٔ ۱: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ثابت k قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع k است.

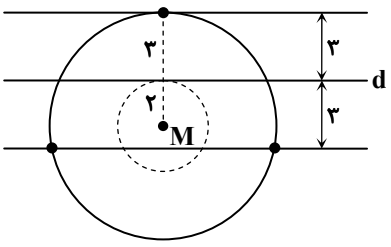


نکتهٔ ۲: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ثابت k قرار دارند، دو خط موازی با d، در طرفین d و به فاصلهٔ k از d می‌باشد.



با توجه به نکتهٔ ۱، مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ M به فاصلهٔ ۵ هستند، دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۵ است

با توجه به نکتهٔ ۲، مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ هستند، دو خط موازی d به فاصلهٔ ۳ و در طرفین خط d هستند.

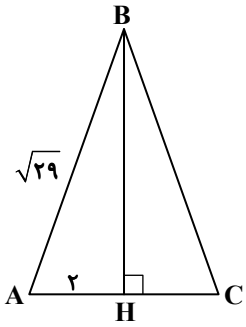


از آنجایی که سه نقطه در صفحه با ویژگی‌های داده‌شده، وجود دارد، پس باید شکل روبه‌رو ایجاد شده باشد؛ یعنی از دو خط موازی d بایستی یکی مماس بر دایرهٔ مفروض و دیگری متقاطع با آن باشد.

اینک، با توجه به شکل، نقطه‌ای که به فاصلهٔ ۲ از نقطهٔ M قرار دارد باید روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۲ باشد که در این صورت، این دایره بر خط d مماس خواهد بود و تنها یک نقطه با این شرایط وجود خواهد داشت.

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۵ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۱)



نکتهٔ ۱: مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ ثابت A و B در صفحه به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

نکتهٔ ۲: مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله هستند، نیمساز آن زاویه است.

مکان هندسی نقاطی که از دو رأس A و C به یک فاصله هستند، عمودمنصف ضلع AC و مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع AB و BC به یک فاصله هستند، نیمساز زاویهٔ B است. طبق فرض عمودمنصف ضلع AC و نیمساز زاویهٔ B باید در بی‌شمار نقطه متقاطع باشند؛ یعنی بر هم منطبق هستند. در نتیجه مثلث در رأس B متساوی‌الساقین است. اکنون با توجه به شکل داریم:

$$AH^۲+BH^۲=AB^۲ \Rightarrow ۴+BH^۲=۲۹ \Rightarrow BH^۲=۲۵ \Rightarrow BH=۵ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}BH\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۴=۱۰$$

۶ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: $|A^n|=|A|^n$

ابتدا ماتریس $(۲I+A)^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(۲I+A)^۲=۴I^۲+A^۲+۴A=۴A+۴I+A^۲=۴(A+I)+A^۲ \overset{\text{طبق فرض}}{=\!=} ۴\times ۲A^۲+A^۲=۹A^۲$$

اکنون از طرفین تساوی $(۲I+A)^۲=۹A^۲$ دترمینان می‌گیریم:

$$|۲I+A|^۲=|۹A^۲|=۹^۲|A|^۲=۹^۲ \Rightarrow |۲I+A|=\pm ۹$$

فقط مقدار ۹ در گزینه‌ها وجود دارد، پس گزینهٔ ۴ پاسخ است.

هندسه | ۱۷ مهرماه ۱۴۰۴

۱ . ماتریس $A=\begin{bmatrix} x+y & ۲x-۱ & ۰ \\ ۰ & z & ۰ \\ x-\frac{۱}{۲}y & ۰ & ۳xy \end{bmatrix}$ **قطری است. حاصل** $x-y$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

ماتریس قطری، ماتریسی مربعی است که همهٔ درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.

$$A=\begin{bmatrix} x+y & ۲x-۱ & ۰ \\ ۰ & z & ۰ \\ x-\frac{۱}{۲}y & ۰ & ۳xy \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ x-\frac{۱}{۲}y=۰ \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} y=۱ \end{cases} \Rightarrow x-y=-\frac{۱}{۲}$$

۲ . اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}$ **به‌طوری که** $a_{ij}=\begin{cases} ij-a_{ij} & i<j \\ i+j & i=j \\ ۱ & i>j \end{cases}$ **آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس** A **کدام است؟**

۱) ۱۱ ۲) ۱۱/۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینه ۴

به کمک رابطه‌های داده شده، تمام درایه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱} \xrightarrow[\text{رابطه دوم}]{۱=۱} a_{۱۱}=۱+۱=۲$$

$$a_{۱۲} \xrightarrow[\text{رابطه اول}]{۱<۲} a_{۱۲}=۱\times ۲-a_{۱۲} \Rightarrow a_{۱۲}=۱$$

$$a_{۱۳} \xrightarrow[\text{رابطه اول}]{۱<۳} a_{۱۳}=۱\times ۳-a_{۱۳} \Rightarrow a_{۱۳}=۱/۵$$

$$a_{۲۱} \xrightarrow[\text{رابطه سوم}]{۲>۱} a_{۲۱}=۱$$

$$a_{۲۲} \xrightarrow[\text{رابطه دوم}]{۲=۲} a_{۲۲}=۲+۲=۴$$

$$a_{۲۳} \xrightarrow[\text{رابطه اول}]{۲<۳} a_{۲۳}=۲\times ۳-a_{۲۳} \Rightarrow a_{۲۳}=۳$$

پس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱/۵ \\ ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$، در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس A برابر است با:

$$۲+۱+۱/۵+۱+۴+۳=۱۲/۵$$

۳ . اگر مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ x & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ **برابر با ۱۱ باشد، مقدار** x **کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا حاصل‌ضرب ماتریس‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ x & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-1 & 4\\ x+1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x+5 & 8\\ -x+1 & 4\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر با ۱۱ است. بنابراین:

$$(-2x+5)+(4)=11 \Rightarrow -2x=2 \Rightarrow x=-1$$

۴ . اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^3=\alpha A+\beta I$، حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۱

از نکته‌ای که در درسنامه گفته‌ایم استفاده می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow A^2=(1+3)A-(1\times 3+2\times 0)I \Rightarrow A^2=4A-3I \quad (*)$$

حالا اگر طرفین تساوی (*) را در A ضرب کنیم، داریم:

$$A^3=4A^2-3A \xrightarrow{(*)} A^3=4(4A-3I)-3A \Rightarrow A^3=13A-12I \Rightarrow \begin{cases}\alpha=13\\ \beta=-12\end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=1$$

درسنامه:

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه همواره $A^2=(a+d)A-(ad-bc)I$. این رابطه، معروف است به رابطهٔ کیلی - همیلتون.

۵ . ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ با کدام‌یک از ماتریس‌های زیر، تعویض‌پذیر نیست؟

۱) $\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -6 & 5\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1-\sqrt{3} & 0\\ 0 & \sqrt{3}+1\end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۲

همان‌طور که در درسنامه گفته‌ایم، ماتریس‌های مربعی، با ماتریس‌های قطری هم مرتبه‌شان، تعویض‌پذیرند، پس گزینه‌های ۱ و ۴ حذف می‌شوند.

از طرفی شرط تعویض‌پذیر بودن ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ با ماتریس $\begin{bmatrix}m & n\\ p & q\end{bmatrix}$ آن است که $\frac{-3}{m-q}=\frac{2}{n}=\frac{-3}{p}$ که با در نظر گرفتن این شرط، گزینه ۳ هم حذف می‌شود، اما این شرط برای گزینه ۲ برقرار نیست.

درسنامه:

اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند، به‌طوری که $AB=BA$، آن‌گاه A و B را تعویض‌پذیر می‌نامیم.

۱) هر ماتریس مربعی، با ماتریس‌های قطری هم مرتبه‌اش تعویض‌پذیر است.

۲) شرط تعویض‌پذیر بودن دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}m & n\\ p & q\end{bmatrix}$ آن است که $\frac{a-d}{m-q}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$.

۶ . اگر A، B و C سه ماتریس مربعی هم‌مرتبه و k عددی حقیقی باشد، کدام گزینه، همواره درست است؟

۱) اگر $kA=kB$، آن‌گاه $A=B$ ۲) $(AB)^2=A^2B^2$

۳) اگر $AB=AC$، آن‌گاه $A=\overline{O}$ یا $B=C$ ۴) $(AB)C=A(BC)$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم:

۱ ممکن است درست نباشد، در حالتی $k=0$، A و B می‌توانند هر دو ماتریس هم‌مرتبه باشند.

۲ تنها در صورتی که $AB=BA$ باشد، اتحادهای جبری در مورد دو ماتریس A و B برقرار است، پس اگر $AB=BA$، می‌توانیم نتیجه بگیریم $(AB)^2=A^2B^2$، در غیر این‌صورت داریم: $(AB)^2=(AB)(AB)$.

۳ اگر $AB=AC$، آن‌گاه $AB-AC=\overline{O}$ پس $A(B-C)=\overline{O}$ تساوی اخیر در صورتی که $A=\overline{O}$ یا $B=C$ حتما برقرار است، اما در حالت‌های دیگری هم ممکن است برقرار باشد، مثلا فرض کنید $A=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}$ در این‌صورت داریم:

$$A(B-C)=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\overline{O}$$

۴ یکی از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌هاست، یعنی برای محاسبه ماتریس ABC می‌توانیم ابتدا ماتریس AB را حساب کرده و آن را از سمت چپ در C ضرب کنیم یا ابتدا ماتریس BC را حساب کرده و آن را از سمت راست در A ضرب کنیم، در هر دو حالت جواب به دست آمده، یکسان است.

۷. اگر A ماتریس مربعی باشد، به طوری‌که $A^2=A$، آن‌گاه ماتریس $A^5+(A+I)^3$ برابر با کدام است؟

۱) $8I+A$ ۲) $I+8A$ ۳) $4I+A$ ۴) $I+4A$

پاسخ: گزینه ۲

از $A^2=A$ نتیجه می‌گیریم به ازای همهٔ nهای طبیعی، داریم $A^n=A$. از آن‌جا که هر ماتریس مربعی مانند A، با ماتریس واحد هم‌مرتبه با آن تعویض‌پذیر است، اتحادهای جبری برابر A و I برقرار است، پس:

$$(A+I)^3=A^3+3A^2+3A+I^3=A+3A+3A+I=I+7A$$

پس خواستهٔ مسأله، برابر است با:

$$A^5+(A+I)^3=A+(I+7A)=I+8A$$

درسنامه:

۱ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، به طوری‌که $AB=BA$، آن‌گاه A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر نامیده می‌شوند. یکی از خواص مهم ماتریس‌های تعویض‌پذیر آن است که اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرارند.

۲ هر ماتریس مربعی مانند A با ماتریس همانی هم‌مرتبه خود تعویض‌پذیر است، زیرا $AI=IA=A$، بنابراین اتحادهای جبری برای A و I برقرارند، مثلاً:

$$(A+I)^2=A^2+2A+I^2$$

۳ اگر ماتریس مربعی A به گونه‌ای باشد $A^2=A$، آن‌گاه A یک ماتریس خودتوان نامیده می‌شود، خاصیت مهم ماتریس‌های خودتوان آن است که به ازای همه nهای طبیعی، داریم $A^n=A$، زیرا مثلاً اگر $n=5$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$A^5=A^4.A=(A^2)^2.A=A^2.A=A.A=A^2=A$$

ماتریس همانی (I) نمونه‌ای از ماتریس‌های خودتوان است و به ازای همه nهای طبیعی داریم $I^n=I$.

۸. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-5\\2&-3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}7&8\\-9&10\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس A^9B+BA^{10} کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰۹

پاسخ: گزینه ۱

چون در سوال، توان‌های بزرگ ماتریس A مطرح شده‌اند، ابتدا ماتریس A^2 را حساب می‌کنیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I$$

پس:

$$A^9=A^8.A=(A^2)^4.A=IA=A$$
$$A^{10}=(A^2)^5=(-I)^5=-I$$

بنابراین داریم:

$$A^9B+BA^{10}=AB+B(-I)=AB-B=(A-I)B=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8\\ -9 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}59 & -34\\ \dots & \dots\end{bmatrix}$$

و مجموع درایه‌های سطر اول این ماتریس برابر است با $25=34-59$.

درسنامه:

اگر در سوالی محاسبه توان‌های بزرگ یک ماتریس مربعی مانند A مدنظر بود، ابتدا توان‌های کوچک‌تر آن مثل A^2 (یا در صورت لزوم A^3) را حساب کنید. معمولا با محاسبه A^2 به ماتریسی خاص می‌رسید (ضریبی از I، یا ماتریس صفر یا ضریبی A) که این موضوع به محاسبه توان‌های بزرگ کمک می‌کند.

مثلا فرض کنید A ماتریسی با این خاصیت است که $A^2=-2I$، در این‌صورت می‌توان گفت:

$$\begin{cases}A^7=A^6.A=(A^2)^3A=(-2I)^3A=-8IA=-8A\\ A^8=(A^2)^4=(-2I)^4=16I\end{cases}$$

۹. اگر $A=\begin{bmatrix}x & -1 & 2y\\ z & 1 & -x\\ 0 & -y & -z\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & z & 0\\ \frac{x}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3y\end{bmatrix}$ و ماتریس $C=\begin{bmatrix}1 & -xz & 6y\\ -\frac{x}{2} & 1 & 3xy\\ \frac{xy}{2} & 0 & 1\end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، حاصل $x+y+z$ کدام است؟ $(y,z\neq 0)$

۱) ۱۶ ۲) -18 ۳) ۱۸ ۴) -16

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ماتریس AB را محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}x & -1 & 2y\\ z & 1 & -x\\ 0 & -y & -z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & z & 0\\ \frac{x}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{x}{2} & xz & 6y^2\\ \frac{x}{2} & z^2 & -3xy\\ \frac{-xy}{2} & 0 & -3yz\end{bmatrix}$$

حال ماتریس $AB+C$ را به دست می‌آوریم:

$$AB+C=\begin{bmatrix}-\frac{x}{2} & xz & 6y^2\\ \frac{x}{2} & z^2 & -3xy\\ -\frac{xy}{2} & 0 & -3yz\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -xz & 6y\\ -\frac{x}{2} & 1 & 3xy\\ \frac{xy}{2} & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{x}{2}+1 & 0 & 6y^2+6y\\ 0 & z^2+1 & 0\\ 0 & 0 & 1-3yz\end{bmatrix}$$

ماتریس $AB+C$ اسکالر است. بنابراین همه‌ی درایه‌هایی که روی قطر اصلی قرار ندارند برابر با صفر هستند. پس:

$$6y^2+6y=0 \Rightarrow 6y(y+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}y=0 \text{ غ ق ق (با توجه به فرض مسئله)}\\ y=-1\end{cases}$$

از طرف دیگر، در ماتریس اسکالر درایه‌های واقع بر قطر اصلی با هم برابرند. بنابراین:

$$-\frac{x}{2}+1=z^2+1=1-3yz \Rightarrow -\frac{x}{2}=z^2=-3yz \xrightarrow{y=-1} -\frac{x}{2}=z^2=3z \xrightarrow{z\neq 0} \begin{cases} z=3 \\ x=-18 \end{cases}$$

بنابراین:

$$x+y+z=-18+(-1)+3=-16$$

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1&2&2\\0&-3&1\\0&0&2\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس A^3+B^3 کدام است؟

۱) ۱۲- ۲) ۳۲ ۳) ۱۱- ۴) ۳۴

پاسخ: گزینه ۱

ماتریس A قطری است، پس:

$$A^3=\begin{bmatrix}1^3&0&0\\0&2^3&0\\0&0&3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&27\end{bmatrix}$$

همه درایه‌های پایین قطر اصلی ماتریس B صفر هستند، پس:

$$B^3=\begin{bmatrix}(-1)^3&x&y\\0&(-3)^3&z\\0&0&2^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&x&y\\0&-27&z\\0&0&8\end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ z که درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس B.B.B است به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$z=[\text{سطر دوم}B].B.\begin{bmatrix}\text{ستون}\\\text{سوم}\\B\end{bmatrix}=[0\ \ -3\ \ 1]\begin{bmatrix}-1&2&2\\0&-3&1\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=[0\ \ 9\ \ -1]\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=7$$

پس سطر ماتریس A^3 به صورت $[0\ \ 8\ \ 0]$ و سطر دوم ماتریس B^3 به صورت $[7\ \ -27\ \ 0]$ است، بنابراین سطر دوم ماتریس A^3+B^3 می‌شود:

$$[0\ \ 8\ \ 0]+[0\ \ -27\ \ 7]=[0\ \ -19\ \ 7]$$

که مجموع درایه‌های آن برابر است با $0-19+7=-12$.

درسنامه:

۱) اگر A یک ماتریس قطری باشد، A^n نیز یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن، توان n اُم درایه‌های قطر اصلی A هستند.

$$A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{bmatrix}$$

۲) فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد، به طوری‌که درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفر هستند، در این صورت درایه‌های پایین قطر اصلی ماتریس مربعی A^n نیز صفر هستند و درایه‌های قطر اصلی A^n، توان n اُم درایه‌های قطر اصلی ماتریس A هستند، سایر درایه‌های A^n را باید محاسبه کرد.

$$A=\begin{bmatrix}a&b&e\\0&d&f\\0&0&c\end{bmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}a^n&x&y\\0&b^n&z\\0&0&c^n\end{bmatrix}$$

شبیه همین نکته، در مورد ماتریسی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند هم برقرار است.

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ x & b^n & 0 \\ y & z & c^n \end{bmatrix}$$

۳ اگر $D=A.B.C$، آن‌گاه درایه سطر i اُم و ستون j اُم ماتریس D به صورت زیر بدست می‌آید:

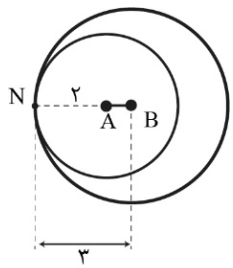
$$d_{ij}=[A\text{ سطر }i\text{ اُم}].B.\begin{bmatrix} \text{ستون} \\ j\text{ اُم} \\ C \end{bmatrix}$$

۱۱. دو نقطه‌ی متمایز A و B را در صفحه در نظر بگیرید. اگر در این صفحه تنها یک نقطه وجود داشته باشد که از A به فاصله‌ی ۲ و از B به فاصله‌ی ۳ باشد، برای طول پاره‌خط AB چند مقدار متفاوت امکان‌پذیر است؟

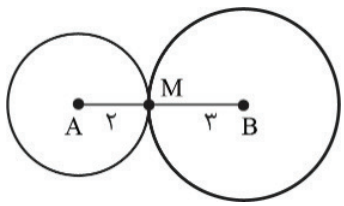
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

تمام نقاطی که از A به فاصله‌ی ۲ هستند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ واقع‌اند و به همین ترتیب، تمام نقاطی که از B به فاصله‌ی ۳ هستند روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ واقع‌اند. در دو حالت زیر، این دو دایره تنها یک نقطه‌ی مشترک دارند:



$AB=BN-AN=۳-۲=۱$



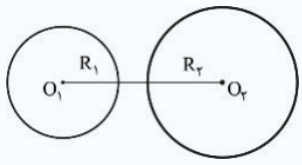
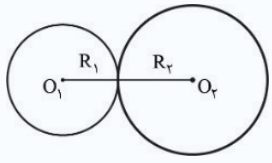
$AB=AM+BM=۲+۳=۵$

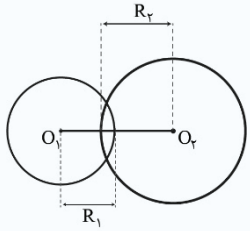
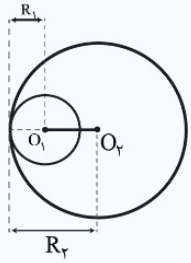
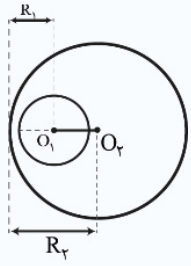
پس برای طول پاره‌خط AB، دو مقدار متفاوت به دست می‌آید.

درسنامه:

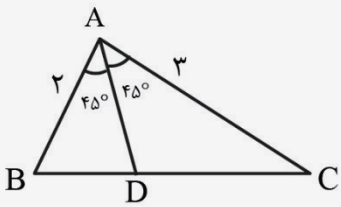
۱ در سوالاتی که به دنبال نقطه‌ای با دو ویژگی مشخص هستیم، باید شکل متناظر هر کدام از ویژگی‌ها را رسم کنیم، نقطه‌ی موردنظر، نقطه‌ی مشترک آن دو شکل است.

۲ **بررسی وضعیت دو دایره در صفحه:** فرض کنیم $C_۱$ دایره‌ای به مرکز $O_۱$ و شعاع $R_۱$ و $C_۲$ دایره‌ای به مرکز $O_۲$ و شعاع $R_۲$ باشد. این دو دایره نسبت به هم، یکی از وضعیت‌های زیر را دارند:

تعداد نقاط مشترک	رابطه‌ی بین شعاع‌ها و فاصله‌ی بین مراکز دو دایره	شکل	وضعیت
۰	$O_۱O_۲>R_۱+R_۲$		متخارج
۱	$O_۱O_۲=R_۱+R_۲$		مماس خارج

۲	$\lvert R_۲ - R_۱ \rvert < O_۱O_۲ < R_۱ + R_۲$		متقاطع
۱	$O_۱O_۲ = \lvert R_۲ - R_۱ \rvert$		مماس درون
۰	$O_۱O_۲ < \lvert R_۲ - R_۱ \rvert$		متداخل

۱۲. در شکل مقابل مجموع فاصله‌های نقطه‌ی D از دو پاره‌خط AB و AC کدام است؟



۱) ۲/۴

۲) ۲/۵

۳) ۲/۷

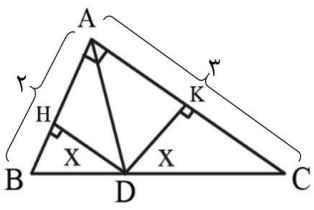
۴) ۲/۸

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا توجه کنید که D نقطه‌ای واقع بر نیمساز زاویه‌ی $B\hat{A}C$ است، بنابراین، از دو ضلع این زاویه به یک فاصله است، پس در نظر می‌گیریم $DH = DK = x$.

از طرفی $B\hat{A}C = ۴۵^\circ + ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$، یعنی $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث قائم‌الزاویه است، بنابراین: $S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AB.AC \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۳ = ۳$

با توجه به شکل، داریم:



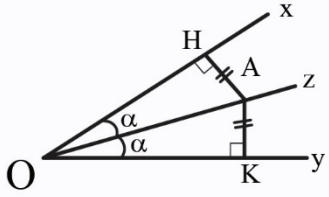
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow ۳ = \frac{۱}{۲}DH.AB + \frac{۱}{۲}DK.AC$$

$$\Rightarrow ۳ = \frac{۱}{۲}x\times ۲ + \frac{۱}{۲}x\times ۳ \xrightarrow{\times ۲} ۶ = ۲x + ۳x \Rightarrow x = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

در نهایت داریم: خواسته‌ی سوال: $DH + DK = x + x = ۲x = ۲\times ۱/۲ = ۲/۴$

درسنامه:

اگر نقطه‌ی روی نیمساز یک زاویه واقع باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. مثلاً در شکل مقابل که Oz نیمساز زاویه‌ی $x\hat{O}y$ و A نقطه‌ای واقع بر آن است، داریم $AH = AK$.



۱۳. در مثلث ABC که $AB=AC$ و $\hat{A}=80^\circ$، عمودمنصف ضلع AB و نیمساز زاویه‌ی داخلی $\hat{B}$، هم‌دیگر را در نقطه‌ی T قطع می‌کنند، زاویه‌ی $C\hat{A}T$ چند درجه است؟

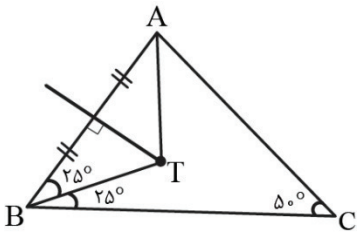
۱) ۵۵ ۲) ۶۵ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا توجه کنید از آن‌جا که در مثلث ABC داریم $AB=AC$، نتیجه می‌شود $\hat{B}=\hat{C}$، پس اگر $\hat{A}=80^\circ$، آن‌گاه:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}} 80^\circ+2\hat{B}=180^\circ \Rightarrow \hat{B}=50^\circ$$

پس نیمساز زاویه‌ی داخلی $\hat{B}$، آن را به دو زاویه‌ی 25° تقسیم می‌کند و شکل مناسب به صورت مقابل است.



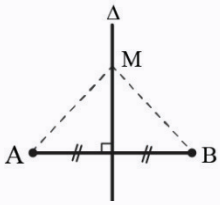
همان‌طور که می‌بینید، T نقطه‌ای واقع بر عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس T از A و B به یک فاصله است، یعنی $TA=TB$ و مثلث $\overset{\Delta}{TAB}$ متساوی‌الساقین است، بنابراین $T\hat{A}B=T\hat{B}A=25^\circ$

بنابراین:

$$C\hat{A}T=B\hat{A}C-T\hat{A}B=80^\circ-25^\circ=55^\circ$$

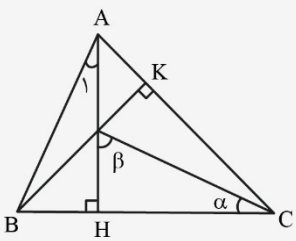
درسنامه:

هر نقطه که بر عمودمنصف یک پاره‌خط واقع باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.



مثلا در شکل مقابل که خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB و M نقطه‌ای واقع بر آن است، داریم $MA=MB$.

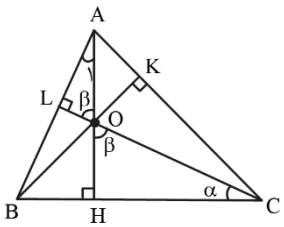
۱۴. در شکل رسم شده، اگر $\hat{A}_1=\frac{1}{3}\beta$، آن‌گاه $\beta-\alpha$ چند درجه است؟



۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۵۴
۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۲

مطابق شکل، AH و BK دو تا از ارتفاع‌های مثلث ABC هستند که در نقطه‌ی O متقاطع‌اند. از آن‌جا که ارتفاع‌های هر مثلث همرس هستند، امتداد CO هم ارتفاع سوم مثلث ABC است، یعنی بر ضلع AB عمود است. داریم:



$$A\hat{O}L=\beta \text{ (متقابل به راس)}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{COH}: \alpha+\beta=90^\circ \\ \overset{\Delta}{AOL}: \hat{A}_1+\beta=90^\circ\end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1=\alpha \xrightarrow[\hat{A}_1=\frac{1}{3}\beta]{\text{طبق فرض}} \frac{1}{3}\beta=\alpha \Rightarrow \beta=3\alpha$$

از دستگاه $\begin{cases}\beta=3\alpha \\ \alpha+\beta=90^\circ\end{cases}$ به دست می‌آید $\begin{cases}\alpha=22/5^\circ \\ \beta=67/5^\circ\end{cases}$، پس $\alpha-\beta=45^\circ$.

درسنامه:

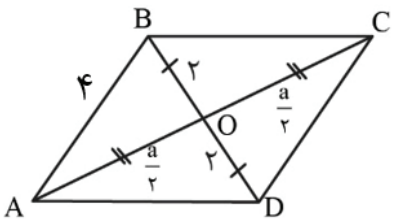
۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجموع دو زاویه‌ی حاده، برابر با 90° است.

۲) ارتفاع‌های هر مثلث همرس هستند.

۱۵. متوازی‌الاضلاعی که طول یکی از قطرهای آن a و طول قطر دیگر و یکی از اضلاع آن برابر ۴ است، قبل رسم است. اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار طبیعی قابل‌قبول برای a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲



فرض کنید ABCD متوازی‌الاضلاع مورد نظر است که در آن $AB=۴$، $BD=۴$ و $AC=a$. از آن‌جا که قطرهای متوازی‌الاضلاع هم‌دیگر را نصف می‌کنند، داریم $BO=\frac{۴}{۲}=۲$, $AO=\frac{a}{۲}$.

در مثلث ABO باید:

$$|۴-۲|<\frac{a}{۲}<۴+۲ \Rightarrow ۲<\frac{a}{۲}<۶ \xrightarrow{\times ۲} ۴<a<۱۲$$

پس کوچک‌ترین مقدار طبیعی قابل‌قبول برای a برابر با ۵ و بزرگ‌ترین مقدار طبیعی قابل‌قبول برای آن ۱۱ است که اختلاف این دو مقدار برابر است با $۱۱-۵=۶$.

درسنامه:

۱ در هر متوازی‌الاضلاعی، قطرها هم‌دیگر را نصف می‌کنند.

۲ مثلثی به طول اضلاع a، b و c زمانی قابل رسم است که: $|b-c|<a<b+c$

هندسه | ۱ آبان ماه ۱۴۰۴

۱ . اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ و AB ماتریسی قطری باشد، آن‌گاه حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

هر ماتریس مربعی که درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، قطری نامیده می‌شود.

ماتریس AB را محاسبه کرده، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$AB=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-۸+۲a=۰ \Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰ \Rightarrow b=۳\end{cases}\Rightarrow a-b=۱$$

۲ . اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ و $AB=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ باشند، مجموعه درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس $B\begin{bmatrix}۶ & ۲\\ ۰ & -۴\end{bmatrix}B+\frac{۱}{۲}A\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا خواسته سوال را ساده می‌کنیم:

$$A\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}B+\frac{۱}{۲}A\begin{bmatrix}۶ & ۲\\ ۰ & -۴\end{bmatrix}B=A\left(\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶ & ۲\\ ۰ & -۴\end{bmatrix}\right)B$$

$$=A\left(\underbrace{\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}}_{BA}\right)B=ABAB=(AB)(AB)=(AB)^۲$$

بنابراین ماتریس حاصل برابر است با:

$$(AB)^۲=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر است با $۱+۴=۵$

۳ . اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به طوری‌که $a_{ij}=\begin{cases}ij-a_{ij} & ; i+j=۴\\ i+j & ; i+j\neq ۴\end{cases}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

در ماتریس‌های مربعی، درایه‌هایی که شماره‌ی سطر و شماره‌ی ستون آن‌ها باهم برابر است، بر قطر اصلی واقع‌اند، پس باید حاصل $a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}$ را محاسبه کنیم:

$$a_{۱۱}\xrightarrow[\text{رابطه‌ی دوم}]{۱+۱\neq ۴}a_{۱۱}=۱+۱=۲$$

$$a_{۲۲} \xrightarrow[\text{رابطه‌ی اول}]{۲+۲=۴} a_{۲۲}=۲\times۲-a_{۲۲} \Rightarrow ۲a_{۲۲}=۴ \Rightarrow a_{۲۲}=۲$$

$$a_{۳۳} \xrightarrow[\text{رابطه‌ی دوم}]{۳+۳\neq۴} a_{۳۳}=۳+۳=۶$$

پس خواستهٔ سوال برابر است با $a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}=۲+۲+۶=۱۰$.

۴ . اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰/۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس $A^{۳}$ کدام است؟

۱) ۴/۹ ۲) ۴/۸۱ ۳) −۴/۸۱ ۴) −۴/۹

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

اگر $D=ABC$، آن‌گاه درایه‌ی سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس D به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d_{ij}=[\text{سطر } i\text{اُم } A].B.\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\text{اُم}\\ C\end{bmatrix}$$

از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت:

الف) سطر iاُم ماتریس D برابر است با:

$$d_{ij}=[\text{سطر } i\text{اُم } A].B.C$$

ب) ستون jاُم D برابر است با:

$$A.B.\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\text{اُم}\\ C\end{bmatrix}$$

برای آن‌که بتوانیم از آن‌چه در درسنامه گفتیم استفاده کنیم، ماتریس $A^{۳}$ را به صورت $D=A.A.A$ در نظر می‌گیریم. ستون اول ماتریس D برابر است با:

$$A.A.\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\text{اُم}\\ A\end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس $A.\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\text{اُم}\\ A\end{bmatrix}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰/۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۹ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

حالا ماتریس A ار از سمت چپ، در ماتریس بدست آمده ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰/۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰/۹ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱/۹ \\ ۴/۹ \\ -۱/۹ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس $A^{۳}$ برابر است با:

$$۱/۹+۴/۹-۱/۹=۴/۹$$

۵ . اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$، آن‌گاه به ازای کدام مقدار k، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۹}-kI$ برابر ۷۵۰ است؟

۱) ۱۵۴ ۲) ۱۵۳ ۳) ۲۶۳ ۴) ۲۶۲

پاسخ: گزینه ۴

نکته اگر ماتریس مربعی A به گونه‌ای باشد که $A^2=kA$، آن‌گاه $A^n=k^{n-1}A$.

ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\2&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&2\\-2&-2&-2\\4&4&4\end{bmatrix}=2A$$

پس $A^2=2A$ و بنا به آن‌چه در درسنامه گفتیم $A^9=2^8A$، پس داریم:

$$A^9-kI=\begin{bmatrix}2^8&2^8&2^8\\-2^8&-2^8&-2^8\\2^9&2^9&2^9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^8-k&2^8&2^8\\-2^8&-2^8-k&-2^8\\2^9&2^9&2^9-k\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A^9-kI برابر است با $3\times2^9-3k$ که بنا به فرض سوال، باید ۷۵۰ باشد:

$$3\times2^9-3k=750\xrightarrow{\times\frac{1}{3}}2^9-k=250\Rightarrow k=512-250=262$$

۶. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2&-1\\1&x\end{bmatrix}$، آن‌گاه به ازای کدام مقدار x، تساوی $|A+B|=|A|+|B|$ برقرار است؟

۱) همه‌ی مقادیر x ۲) $x=-\frac{2}{3}$ ۳) $x=\frac{5}{2}$ ۴) هیچ مقدار x

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته می‌دانیم $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه $|A|=ad-bc$.

داریم:

$$A=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&2\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=3\times2-(-2)\times(-4)=-2$$

$$B=\begin{bmatrix}2&-1\\1&x\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=2x+1$$

$$A+B=\begin{bmatrix}5&-3\\-3&2+x\end{bmatrix}\Rightarrow|A+B|=5(2+x)-9=5x+1$$

بنابراین، $|A+B|=|A|+|B|$ نتیجه می‌دهد:

$$5x+1=2x-1\Rightarrow3x=-2\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

۷. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0\\-2&2\end{bmatrix}$ و $AB=BC=I$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $2A+B-C$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

درسنامه:

۱) اگر A یک ماتریس مربعی با دترمینان غیرصفر باشد، وارون A را با نماد A^{-1} نمایش می‌دهیم. خاصیت ماتریس A^{-1} آن است که $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

۲) ماتریس A^{-1} در حالتی موجود است که $|A|\neq0$ و ماتریس A^{-1} در صورت وجود یکتا است.

۳) اگر بدانیم X و Y دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه هستند، به طوری‌که $XY=I$، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم X و Y هر دو وارون‌پذیر هستند و داریم: $X^{-1}=Y$ و $Y^{-1}=X$.

SanjeshCloud

۴ اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

از $AB=BC=I$ نتیجه می‌گیریم:

الف) $AB=I$, پس $B^{-1}=A$

ب) $BC=I$, پس $B^{-1}=C$

پس $\underbrace{C=A}_{(1)}$.

ضمن آن‌که از $AB=I$ نتیجه می‌شود $\underbrace{B=A^{-1}}_{(2)}$.

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$2A+B-C=2A+A^{-1}-A=A+A^{-1}$$

داریم $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$، پس:

$$A^{-1}=\frac{1}{2-0}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+A^{-1}|=2\times\frac{5}{2}-0\times(-1)=5$$

۸. اگر $A=\begin{bmatrix} -4 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$، آن‌گاه $\frac{1}{2}A^2+2A^{-1}=\alpha A+\beta I$. حاصل $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) -6 ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) -3

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^2=(a+d)A-|A|I$.

داریم $A=\begin{bmatrix} -4 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$، پس: $|A|=-4\times2+\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=-4$.

پس بنا به رابطه‌ای که در درسنامه گفتیم، داریم: $A^2=-2A+4I$.

حالا اگر طرفین این تساوی را (راست یا چپ فرقی ندارد) در A^{-1} ضرب کنیم، داریم:

$$A^2.A^{-1}=-2A.A^{-1}+4I.A^{-1} \Rightarrow A=-2I+4A^{-1}$$

بنابراین:

$$4A^{-1}=A+2I \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}(A+2I)$$

پس داریم:

$$\frac{1}{2}A^2+2A^{-1}=\frac{1}{2}(-2A+4I)+2(\frac{1}{4}(A+2I))=-A+2I+\frac{1}{2}A+I=-\frac{1}{2}A+3I$$

از مقایسه‌ی $\frac{1}{2}A^2+2A^{-1}=-\frac{1}{2}A+3I$ با $\frac{1}{2}A^2+2A^{-1}=\alpha A+\beta I$ نتیجه می‌گیریم $\alpha=-\frac{1}{2}$ و $\beta=3$ پس $\frac{\beta}{\alpha}=-6$.

۹. اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$، آن‌گاه درایه‌ی سطر دوم و ستون دوم ماتریس $(BAB^{-1})^{81}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

SanjeshCloud

درسنامه:

اگر ماتریس‌های مربعی A و B هم‌مرتبه و B وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه به ازای همه‌ی nهای طبیعی داریم:

$$(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}$$

زیرا مثلاً برای $n=2$ داریم:

$$(BAB^{-1})^2 = BA\underbrace{B^{-1}B}_{I}AB^{-1} = BAIAB^{-1} = BA^2B^{-1}$$

بنا به آن‌چه در درسنامه گفتیم داریم:

$$(BAB^{-1})^{81} = BA^{81}B^{-1} \qquad (*)$$

از طرفی داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

پس:

$$A^{81} = (A^2)^{40}A = I^{40}A = IA = A$$

ماتریس B^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$B^{-1} = \frac{1}{1\times 2 + 3\times 0}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

با توجه به $(*)$، درایه‌ی سطر دوم و ستون دوم ماتریس BAB^{-1} را می‌خواهیم که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$[\text{سطر دوم } B]\,A\begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{دوم} \\ B^{-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 9 - 2 = 7$$

۱۰. اگر A یک ماتریس 3×3 باشد، به طوری‌که $A^3 = 2I$، آن‌گاه وارون ماتریس $(A+I)^3$ برابر با کدام است؟

۱) $3(A-I)$ ۲) $\frac{1}{3}(A-I)$ ۳) $\frac{1}{3}A+I$ ۴) $(A+I)$

پاسخ: گزینه ۲

به طرفین تساوی $A^3 = 2I$، ماتریس $-I^3$ را اضافه می‌کنیم، داریم:

$$A^3 - I^3 = 2I - I^3 \Rightarrow (A-I)(A^2+A+I^2) = 2I - I^3$$

می‌دانیم $I = I^2 = I^3$، پس:

$$(A-I)(A^2+A+I) = I \qquad (*)$$

از طرفی داریم:

$$(A+I)^3 = A^3 + 3A^2I + 3AI^2 + I^3 \Rightarrow (A+I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$$

$$\xrightarrow{A^3 = 2I} (A+I)^3 = 2I + 3A^2 + 3A + I \Rightarrow (A+I)^3 = 3A^2 + 3A + 3I \Rightarrow A^2 + A + I = \frac{1}{3}(A+I)^3$$

با در نظر گرفتن تساوی اخیر و تساوی $(*)$، داریم:

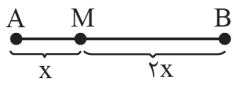
$$(A-I).\frac{1}{3}(A+I)^3 = I \Rightarrow \frac{1}{3}(A-I).(A+I)^3 = I \Rightarrow ((A+I)^3)^{-1} = \frac{1}{3}(A-I)$$

۱۱. پاره‌خط AB، نقطهٔ M بر این پاره خط و نقطهٔ N واقع بر امتداد آن مفروض‌اند. اگر $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{1}{2}$ و طول پاره خط MN برابر با ۶ واحد باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟

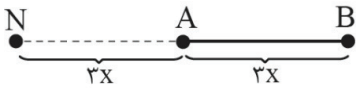
۱) ۳ ۲) ۷/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل داریم:

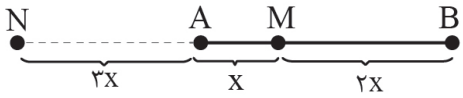


$$\frac{MA}{MB}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} MA=x \\ MB=۲x \end{cases}$$



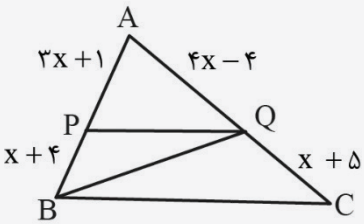
$$\frac{NA}{NB}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{NA}{NA+AB}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{NA}{NA+۳x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow NA=۳x$$

حالا با ترکیب شکل‌های بالا خواهیم داشت:



$$MN=۶ \Rightarrow NA+AM=۳x+x=۴x=۶ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow AB=۳x=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۱۲. در شکل مقابل PQ با BC موازی است. نسبت مساحت مثلث BPQ به مساحت مثلث BCQ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

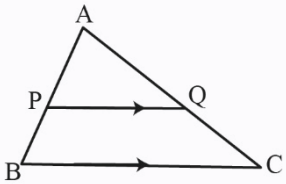
۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

۱) در شکل مقابل PQ با BC موازی است، داریم:

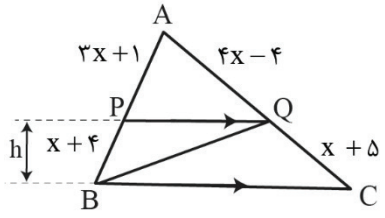


$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \quad \text{(قضیه‌ی تالس)}$$

$$\frac{AB}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC} \quad \text{(تعمیم قضیه‌ی تالس)}$$

۲) اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع برابر باشند، مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع برابر.

با توجه به شکل، بنا به قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، داریم:



$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{۳x+۱}{x+۴}=\frac{۴x-۴}{x+۵} \Rightarrow (۳x+۱)(x+۵)=(۴x-۴)(x+۴)$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۱۵x+x+۵=۴x^۲+۱۶x-۴x-۱۶ \Rightarrow x^۲-۴x-۲۱=۰$$

$$\Rightarrow (x+۳)(x-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۳ & \text{(غیر قابل قبول)} \\ x=۷ \end{cases}$$

از طرفی بنا به تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{PQ}{BC}=\frac{AP}{AB}=\frac{۳x+۱}{۴x+۵} \xrightarrow{x=۷} \frac{PQ}{BC}=\frac{۲۲}{۳۳}=\frac{۲}{۳} \quad (*)$$

در نهایت داریم:

$$\frac{S_{BPQ}}{S_{BCQ}}=\frac{\frac{۱}{۲}h.PQ}{\frac{۱}{۲}h.BC}=\frac{PQ}{BC} \overset{(*)}{=\!=} \frac{۲}{۳}$$

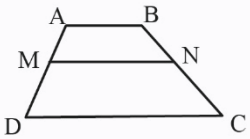
SanjeshCloud

۱۳. در ذوزنقه‌ی ABCD، AB قاعده‌ی کوچک‌تر است. نقطه‌ی M را روی ساق AD و نقطه‌ی N را روی ساق BC طوری در نظر می‌گیریم که $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{۴}{۹}$. اگر پاره‌خط MN توسط قطرهای ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شود، آن‌گاه حاصل $\frac{CD}{AB}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

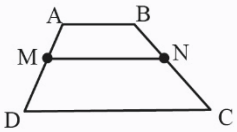
پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:



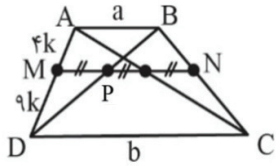
۱) مطابق شکل، اگر دو نقطه‌ی M و N را روی ساق‌های ذوزنقه‌ی ABCD در نظر بگیریم که MN با قاعده‌ها موازی باشد، آن‌گاه:

$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{MN-AB}{CD-MN}$$



۲) عکس قضیه‌ی تالس در ذوزنقه: مطابق شکل در ذوزنقه‌ی ABCD اگر دو نقطه‌ی M و N را به ترتیب روی ساق‌های AD و BC طوری در نظر بگیریم که $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$، آن‌گاه MN با قاعده‌های ذوزنقه موازی است.

شکل مناسب را رسم می‌کنیم. از آن‌جا که $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$، پاره‌خط MN با قاعده‌های ذوزنقه موازی است.



از آن‌جا که $\frac{AM}{MD}=\frac{۴}{۹}$، در نظر می‌گیریم $AM=۴k$ و $MD=۹k$.

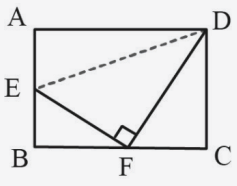
در مثلث ABD بنا به تعمیم قضیه‌ی تالس، داریم:

$$\frac{MP}{AB}=\frac{DM}{DA}\Rightarrow\frac{MP}{a}=\frac{۹k}{۹k+۴k}\Rightarrow MP=\frac{۹}{۱۳}a$$

پس $MN=۳MP=\frac{۲۷}{۱۳}a$ و داریم:

$$\frac{MN-AB}{CD-MN}=\frac{AM}{MD}\Rightarrow\frac{\frac{۲۷}{۱۳}a-a}{b-\frac{۲۷}{۱۳}a}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{\frac{۱۴}{۱۳}a}{b-\frac{۲۷}{۱۳}a}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{۱۲۶}{۱۳}a=۴b-\frac{۱۰۸}{۱۳}a\Rightarrow\frac{۲۳۴}{۱۳}a=۴b\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۱۸\times۱۳}{۴\times۱۳}=۴/۵$$

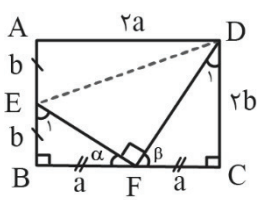
۱۴. مطابق شکل، E و F وسط‌های دو ضلع مستطیل ABCD هستند. نسبت $\frac{DE}{AD}$ برابر با کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴

طول اضلاع مستطیل را ۲a و ۲b در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل، داریم:



$$B\hat{F}C=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha+۹۰^\circ+\beta=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha+\beta=۹۰^\circ\quad(*)$$

از طرفی در مثلث $\overset{\Delta}{BEF}$ داریم $\alpha+\hat{E}_۱=۹۰^\circ$ و در مثلث $\overset{\Delta}{CDF}$ داریم $\hat{D}_۱+\beta=۹۰^\circ$ پس بنا به (*)، داریم $\hat{E}_۱=\beta$ و $\hat{D}_۱=\alpha$. پس زاویه‌های دو مثلث $\overset{\Delta}{BEF}$ و $\overset{\Delta}{CFD}$ با هم برابر و در نتیجه این دو مثلث متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{BF}{CD}=\frac{BE}{CF}\Rightarrow\frac{a}{۲b}=\frac{b}{a}\Rightarrow a^۲=۲b^۲\Rightarrow b^۲=\frac{۱}{۲}a^۲\quad(*)$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی فیثاغورس، داریم:

$$\overset{\Delta}{BEF}:EF^۲=a^۲+b^۲\overset{(*)}{=\!=}\frac{۳}{۲}a^۲\quad,\quad\overset{\Delta}{CFD}:FD^۲=a^۲+۴b^۲\overset{(*)}{=\!=}۳a^۲$$

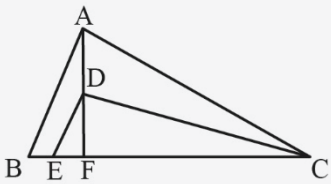
$$\overset{\Delta}{DEF}:DE^۲=EF^۲+FD^۲\Rightarrow DE^۲=\frac{۳}{۲}a^۲+۳a^۲=\frac{۹}{۲}a^۲$$

از $DE^2=\frac{9}{2}a^2$ نتیجه می‌گیریم:

$$DE^2=\frac{9}{2}(\frac{1}{2}AD)^2 \Rightarrow DE^2=\frac{9}{8}AD^2 \Rightarrow \frac{DE^2}{AD^2}=\frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AD}=\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

۱۵. در شکل مقابل، زاویه‌های BAC، CDE و AFC قائمه‌اند. اگر E وسط BF و DF = BF آن‌گاه حاصل $\frac{AC}{DC}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{1/2}$

۲) $\sqrt{1/3}$

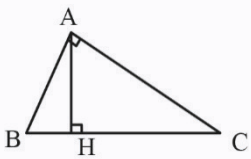
۳) $\sqrt{1/4}$

۴) $\sqrt{1/5}$

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

مطابق شکل، اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، آن‌گاه:



۱) $AH^2=BH.CH$

۲) $AB^2=BH.BC$

۳) $AC^2=CH.BC$

مطابق شکل، از آن‌جا که E وسط BF است، در نظر می‌گیریم $BE=EF=x$ که در این‌صورت، از $DF=BF$ نتیجه می‌گیریم $DF=2x$.

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی DEF، DF ارتفاع وارد بر وتر است، پس:

$$DF^2=EF.CF \Rightarrow (2x)^2=x.CF \Rightarrow CF=\frac{4x^2}{x}=4x$$

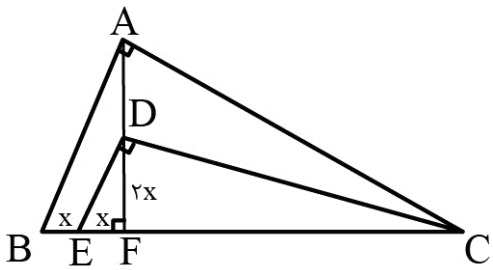
$$DC^2=CF.CE \Rightarrow DC^2=(4x)(5x)=20x^2$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، AF ارتفاع وارد بر وتر است، پس:

$$AC^2=CF.BC \Rightarrow AC^2=(4x)(6x)=24x^2$$

پس:

$$\frac{AC^2}{DC^2}=\frac{24\times x^2}{20x^2}=1/2 \Rightarrow \frac{AC}{DC}=\sqrt{1/2}$$



آزمون‌های ماراتون

هندسه دوازدهم | ۱۵ آبان‌ماه ۱۴۰۴

۱ . در دستگاه دو معادله‌ی دومجهولی $\begin{cases}۲x-y=۰/۱\\ ۴x+۳y=۰/۲\end{cases}$ مجموع درایه‌های وارون ماتریس ضرایب کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه

۱) در دستگاه دو معادله‌ی دومجهولی $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ که x و y مجهول‌های آن‌هستند، ماتریس $\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}$ را ماتریس ضرایب، ماتریس $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ را ماتریس مجهولات و ماتریس $\begin{bmatrix}c\\ c'\end{bmatrix}$ را ماتریس مقادیر ثابت می‌نامیم.

۲) اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ c' & a\end{bmatrix}$.

ماتریس ضرایب دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی $\begin{cases}۲x-y=۰/۱\\ ۴x+۳y=۰/۲\end{cases}$ به صورت $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$ است، وارون این ماتریس برابر است با:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲\times۳-(-۱)\times۴}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳ & ۰/۱\\ -۰/۴ & ۰/۲\end{bmatrix}$$

بنابراین، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{-۱}$ برابر است با $۰/۲=۰/۲+۰/۴-۰/۱+۰/۳$.

۲ . در دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی $\begin{cases}ax+by+۱=۰\\ a'x+b'y+c'=۰\end{cases}$، وارون ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۴ & -۳\end{bmatrix}$ است. اگر جواب $y=۱$ از این دستگاه حاصل شود، برای x چه جوابی به دست می‌آید؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه

در دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ که $A=\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و $B=\begin{bmatrix}c\\ c'\end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم است، داریم $X=A^{-۱}.B$.

ابتدا دستگاه را به فرم استاندارد، یعنی به صورت $\begin{cases}ax+by=-۱\\ a'x+b'y=-c'\end{cases}$ می‌نویسیم.

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}$، ماتریس ضرایب و طبق فرض $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۳ & ۴\end{bmatrix}$ وارون آن است، ضمن آن‌که $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و $B=\begin{bmatrix}-۱\\ -c'\end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر ثابت است.

پس بنا به درسنامه، داریم:

$$X=A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-c'\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-2c'\\3-4c'\end{bmatrix}$$

پس $\begin{cases}x=-1-2c'\\y=3-4c'\end{cases}$ و طبق فرض $y=1$، پس:

$$1=3-4c' \Rightarrow 4c'=\frac{2}{3}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=-1-2c' \Rightarrow x=-1-2(\frac{1}{2})=-2$$

۳ . شکل ماتریسی یک دستگاه معادلات، به صورت $\begin{bmatrix}1 & 2\\m & 1\\3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2m\\2\end{bmatrix}$ است. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، این دستگاه دارای جواب است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{2,-1\}$ ۳) $\{-1\}$ ۴) R

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی

ابتدا دستگاه را از فرم ماتریسی خارج می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\m & 1\\3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2m\\m\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x+2y\\mx+y\\3x-4y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2m\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x+2y=4\\mx+y=2m\\3x-4y=2\end{cases}$$

نکته برای آن‌که یک دستگاه سه معادله‌ی دومجهولی که از خط‌های غیرموازی تشکیل شده است دارای جواب باشد، باید نقطه‌ی تقاطع دو تا از آن‌ها، در معادله‌ی خط سوم صدق کند.

با توجه به نکته‌ی بالا، ابتدا نقطه‌ی برخورد دو خط $x+2y=4$ و $3x-4y=2$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x+2y=4\\3x-4y=2\end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases}2x+4y=8\\3x-4y=2\end{cases}$$

جمع: $5x+0=10 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=1$

پس باید مختصات نقطه‌ی $(2,1)$ در معادله‌ی $mx+y=2m$ صدق کند:

$$m(2)+1=2m \Rightarrow 1=0$$ (غیر قابل‌قبول)

پس هیچ مقداری برای m وجود ندارد و مجموعه‌ی مقادیر m تهی است.

۴ . کدام گزینه در مورد دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی $\begin{cases}kx+(k+1)y=1\\(k-4)x+(2k+1)y=3\end{cases}$ درست است؟

۱) همواره فاقد جواب است.
۲) همواره دارای جواب یکتا است.
۳) می‌تواند بی‌شمار جواب داشته باشد.
۴) فاقد جواب یا دارای جواب یکتا است.

پاسخ: گزینه ۳ سخت | مفهومی

درسنامه

حل دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ در واقع، یافتن نقطه‌ی مشترک دو خط $L:ax+by=c$ و $L':a'x+b'y=c'$ است. سه حالت برای این دو خط وجود دارد:

۱) $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ که در این‌صورت دو خط متقاطع‌اند و دستگاه جواب یکتا دارد. در این حالت، دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است.

۲) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ که در این‌صورت دو خط موازی‌اند و فاقد نقطه‌ی مشترک و دستگاه فاقد جواب است. در این حالت دترمینان ماتریس ضرایب صفر است.

۳) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ که در این‌صورت دو خط برهم منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد. در این حالت هم مثل حالت قبل، دترمینان ماتریس ضرایب صفر است.

ماتریس ضرایب این دستگاه به صورت $A=\begin{bmatrix} k & k+1 \\ k-4 & 2k+1 \end{bmatrix}$ است.

دترمینان ماتریس ضرایب را می‌یابیم: $|A|=k(2k+1)-(k+1)(k-4)=(2k^2+k)-(k^2-3k-4)=k^2+4k+4=(k+2)^2$

پس اگر $k\neq -2$، آن‌گاه $|A|\neq 0$ و دستگاه جواب یکتا دارد، اما اگر $k=-2$، آن‌گاه دستگاه به صورت $\begin{cases} -2x-y=1 \\ -6x-3y=3 \end{cases}$ در می‌آید و داریم $\frac{1}{3}=\frac{-1}{-3}=\frac{-2}{-6}$ یعنی دو خط تشکیل‌دهنده‌ی دستگاه برهم منطبق‌اند و در نتیجه دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

خلاصه آن‌که این دستگاه، همواره دارای جواب است، به ازای $k=-2$ بی‌شمار جواب و به ازای $k\neq -2$، تنها یک جواب دارد.

۵ . دستگاه معادلات $\begin{cases} 3x-y=m \\ 2y-6x-3=0 \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب است. به ازای کدام مقدار n دستگاه معادلات $\begin{cases} -mx+ny=n \\ nx+6=k \end{cases}$ دارای جواب منحصربه‌فرد است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) -5 ۴) دستگاه جواب منحصربه‌فرد ندارد.

پاسخ: گزینه ۳

دستگاه اول دارای بی‌شمار جواب است. بنابراین: $\frac{3}{-6}=\frac{-1}{2}=\frac{m}{3} \Rightarrow m=-\frac{3}{2}$

بنابراین دستگاه دوم به صورت $\begin{cases} \frac{3}{2}x+ny=n \\ nx+6=k \end{cases}$ نوشته می‌شود.

برای آن‌که دستگاه اخیر دارای جواب منحصربه‌فرد باشد داریم: $\frac{\frac{3}{2}}{n}\neq\frac{n}{6} \Rightarrow n^2\neq 9 \Rightarrow n\neq\pm 3$

۶ . از هر رأس یک n ضلعی محدب $3(n-7)$ قطر می‌گذرد. تعداد کل قطرهای این n ضلعی کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۴ ۳) ۲۰ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۴ ساده | مفهومی

درسنامه

۱) از هر رأس یک n ضلعی محدب، $(n-3)$ قطر می‌گذرد.

۲) تعداد کل قطرهای یک n ضلعی محدب $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

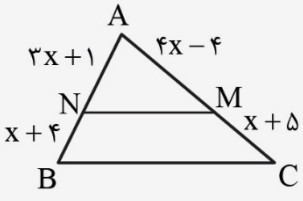
بنا به درسنامه، از هر رأس n ضلعی محدب، $(n-3)$ قطر می‌گذرد. پس بنا به فرض سوال، داریم:

$3(n-7)=n-3 \Rightarrow 3n-21=n-3 \Rightarrow 2n=18 \Rightarrow n=9$

پس تعداد کل قطرهای این ضلعی برابر است با:

$\frac{n(n-3)}{2} \xrightarrow{n=9} \frac{9\times 6}{2}=27$

۷ . در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت ذوزنقه‌ی MNBC کدام است؟



۱) ۰/۶۵

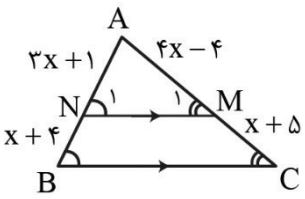
۲) ۰/۷

۳) ۰/۷۵

۴) ۰/۸

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | ترکیبی

نکته در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر است با مجذور نسبت تشابه.



چهارضلعی MNBC ذورنقه است، یعنی MN با BC موازی است، پس می‌توانیم در مثلث ABC از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم:

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{3x+1}{x+4}=\frac{4x+4}{x+5} \Rightarrow (3x+1)(x+5)=(4x-4)(x+4)$$

$$\Rightarrow 3x^2+15x+x+5=4x^2+16x-4x-16 \Rightarrow x^2-4x-21=0$$

$$\Rightarrow (x-7)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=-3 \quad \text{(غیر قابل‌قبول)} \end{cases}$$

از طرفی به دلیل قضیه‌ی موازی – مورب، $\hat{N}_1=\hat{B}$ و $\hat{M}_1=\hat{C}$، پس مثلث ANM با مثلث ABC متشابه است، در نتیجه:

$$\frac{S_{ANM}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AN}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{ANM}}{S_{ABC}}=\left(\frac{3x+1}{4x+5}\right)^2 \xrightarrow{x=7} \frac{S_{ANM}}{S_{ABC}}=\left(\frac{22}{33}\right)^2$$

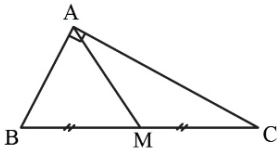
$$\Rightarrow \frac{S_{ANM}}{S_{ABC}}=\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{ANM}}{S_{ABC}-S_{ANM}}=\frac{4}{9-4} \Rightarrow \frac{S_{ANM}}{S_{MNBC}}=\frac{4}{5}=0/8$$

۸ . در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، AH و AM به ترتیب ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر هستند. اگر $MH=\frac{1}{4}BC$ آن‌گاه طول BC، چند برابر فاصله‌ی نقطه‌ی H از خط AM است؟

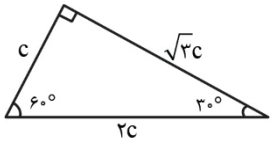
۱) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ ۴) $3+\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی

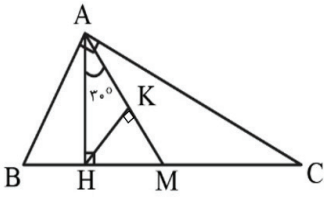
۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه‌ی وارد بر وتر، نصف طول وتر است. مثلاً در شکل مقابل داریم $AM=\frac{1}{2}BC$.



۲) مطابق شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویه‌های حاده‌ی آن ۳۰° و ۶۰°، اضلاع به نسبت ۱ ، $\sqrt{3}$ و ۲ هستند و بالعکس.



شکل مناسب را رسم می‌کنیم. می‌دانیم $AM=\frac{1}{2}BC$. پس اگر $MH=\frac{1}{4}BC$، آن‌گاه $MH=\frac{1}{2}AM$، بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه‌ی HAM، طول ضلع روبه‌روی زاویه‌ی $H\hat{A}M$، نصف طول وتر است، پس این زاویه، ۳۰° است، پس در این مثلث داریم $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AM$.

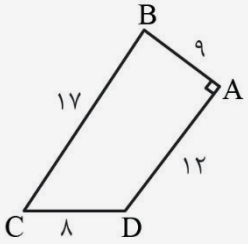


از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHK داریم:

$$HK=\frac{1}{2}AH \Rightarrow HK=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}AM\right) \Rightarrow HK=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}BC\right)$$

$$\Rightarrow HK=\frac{\sqrt{3}}{8}BC \Rightarrow \frac{BC}{HK}=\frac{8}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

۹ . در شکل مقابل، وسط‌های ضلع‌های چهارضلعی ABCD، رأس‌های یک چهارضلعی هستند، مساحت این چهارضلعی کدام است؟



۱) ۵۷

۲) ۵۸

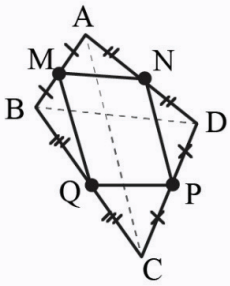
۳) ۵۹

۴) ۶۰

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | ترکیبی

سرنخ قطر BD را رسم کنید.

درسنامه

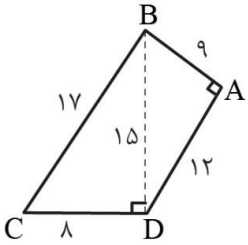


اگر وسط‌های ضلع‌های یک چهارضلعی محدب را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود که:

الف) ضلع‌های آن با قطرهای چهارضلعی اولیه موازی‌اند.

ب) مساحت آن، نصف مساحت چهارضلعی اولیه است.

مثلاً در شکل بالا $\begin{cases} NM, PQ \parallel BD \\ NP, MQ \parallel AC \end{cases}$ و $S_{MNPQ} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$.



قطر BD را رسم می‌کنیم، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABD، بنا به قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$BD = \sqrt{۹^۲ + ۱۲^۲} = \sqrt{۳^۲ \times ۳^۲ + ۳^۲ \times ۴^۲} = ۳\sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۱۵$$

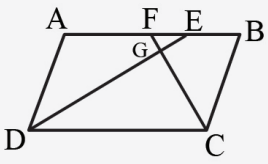
از طرفی از آن‌جا که $۱۵^۲ + ۸^۲ = ۱۷^۲$، پس در مثلث BCD رابطه‌ی فیثاغورس برقرار است و در نتیجه $B\hat{D}C = ۹۰^\circ$، پس:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{DBC} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۹ \times ۱۲}{۲} + \frac{۸ \times ۱۵}{۲} = ۵۴ + ۶۰ = ۱۱۴$$

بنا به درسنامه، مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن متوالی وسط‌های ضلع‌های چهارضلعی ABCD برابر است با:

$$\frac{۱}{۲} S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} \times ۱۱۴ = ۵۷$$

۱۰ . در شکل مقابل چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع و ضلع AB به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی AFGD و BEGC کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۱۰}$

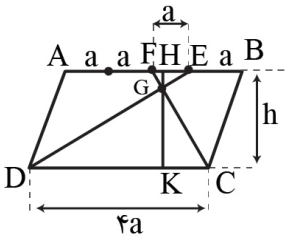
۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۹}{۱۴}$

پاسخ: گزینه ۴ سخت | ترکیبی

نکته در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های نظیر، برابر است با نسبت تشابه.



بنا به قضیه‌ی موازی - مورب، داریم: $E\hat{F}G = G\hat{C}D \ , \ F\hat{E}G = G\hat{D}C$

پس بنا به حالت تساوی دو زاویه، داریم: $\overset{\Delta}{GCD} \sim \overset{\Delta}{GFE}$.

بنابراین نسبت GK به GH که دو ارتفاع متناظر در این دو مثلث متشابه هستند، برابر با نسبت تشابه است،

یعنی $\frac{GK}{GH} = \frac{CD}{EF} = ۴$، پس می‌توانیم این‌طور در نظر بگیریم که $GH = \frac{۱}{۵}h$ و $GK = \frac{۴}{۵}h$.

ضمن آن‌که داریم:

$$S_{GEF} = \frac{۱}{۲}GH.EF = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۵}h)(a) = \frac{۱}{۱۰}ah$$

$$S_{CBF} = \frac{۱}{۲}h.BF = \frac{۱}{۲}h(۲a) = ah \Rightarrow S_{BEGC} = S_{CBF} - S_{GEF} = ah - \frac{۱}{۱۰}ah = \frac{۹}{۱۰}ah$$

$$S_{DAE} = \frac{۱}{۲}h.AE = \frac{۱}{۲}h(۳a) = \frac{۳}{۲}ah \Rightarrow S_{AFGD} = S_{DAE} - S_{GEF} = \frac{۳}{۲}ah - \frac{۱}{۱۰}ah = \frac{۱۴}{۱۰}ah$$

بنابراین:

$$\frac{S_{BEGC}}{S_{AFGD}} = \frac{\frac{۹}{۱۰}ah}{\frac{۱۴}{۱۰}ah} = \frac{۹}{۱۴}$$

آزمون‌های ماراتون

هندسه دوازدهم | ۲۹ آبان‌ماه ۱۴۰۴

۱ . اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ و $a_{ij}=\begin{cases} i+۲ & i>j \\ j-۱ & i\le j \end{cases}$ باشد، مقدار دترمینان ماتریس $A+I$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

پاسخ: گزینه ۲ ساده | محاسباتی

ابتدا ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A+I=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین دترمینان ماتریس $A+I$ برابر است با:

$$|A+I|=۱\times ۲-۱\times ۴=۲-۴=-۲$$

۲ . اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۲$ باشد، حاصل $|۲A|+|۲A^{-۱}|$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

پاسخ: گزینه ۲ ساده | محاسباتی

با توجه به خاصیت دترمینان ماتریس داریم:

$$|۲A|+|۲A^{-۱}|=۲^{۳}|A|+۲^{۳}|A^{-۱}|=۸|A|+\frac{۸}{|A|}=۸\times ۲+\frac{۸}{۲}=۲۰$$

نکته اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد داریم:

$$|rA|=r^{n}|A|$$

۳ . اگر $\begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ \frac{۱}{\cos\alpha} & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۴ & -۲ \end{vmatrix}=۲۲$ باشد، مقدار $\tan^{۲}\alpha$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه ۲ سخت | محاسباتی

دترمینان موردنظر را بر حسب سطر سوم بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ \frac{۱}{\cos\alpha} & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۴ & -۲ \end{vmatrix}=۰\begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}-۴\begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ \frac{۱}{\cos\alpha} & ۳ \end{vmatrix}+(-۲)\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ \frac{۱}{\cos\alpha} & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=-۴(-۳)-۲(-۱-\frac{۲}{\cos\alpha})=۱۲+۲+\frac{۴}{\cos\alpha}=۱۴+\frac{۴}{\cos\alpha}$$

طبق داده مسئله داریم:

$$۱۴+\frac{۴}{\cos\alpha}=۲۲ \Rightarrow \frac{۴}{\cos\alpha}=۸ \Rightarrow \cos\alpha=\frac{۱}{۲}$$

طبق روابط مثلثاتی داریم:

$$۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha} \Rightarrow ۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}=۴ \Rightarrow \tan^{۲}\alpha=۳$$

۴ . اگر دترمینان ماتریس $A-۳I$ برابر با ۳ و $|A|=۲$ باشد، مقدار $|I-۳A^{-۱}|$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی

دو طرف تساوی $|A-3I|=3$ را در $|A^{-1}|$ ضرب می‌کنیم:

$$|A-3I|=3 \xrightarrow{\times|A^{-1}|} |A^{-1}||A-3I|=3|A^{-1}|=3(\frac{1}{|A|})=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |A^{-1}(A-3I)|=\frac{3}{2} \Rightarrow |I-3A^{-1}|=\frac{3}{2}$$

۵ . اگر $A^3=3I$ ماتریسی ۲×۲ و دترمینان ماتریس A^2+A+I برابر با ۲۴- باشد، مقدار $|(A-I)^{-1}|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ: گزینه ۲ سخت | مفهومی

طبق اتحادهای ماتریسی داریم:

$$(A-I)(A^2+A+I)=A^3-I \xrightarrow{A^3=3I} (A-I)(A^2+A+I)=2I$$

$$\Rightarrow (A-I)(\frac{A^2+A+I}{2})=I$$

بنابراین وارون ماتریس $A-I$ به صورت $\frac{1}{2}(A^2+A+I)$ است. پس:

$$|(A-I)^{-1}|=|\frac{1}{2}(A^2+A+I)|=\frac{1}{4}|\underbrace{A^2+A+I}_{-24}|=-6$$

۶ . اگر $x+y+z=-6$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} x & y & z+5 \\ x & y+5 & z \\ x+5 & y & z \end{vmatrix}$ چقدر است؟

۱) ۲۵- ۲) ۵- ۳) ۲۵ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

سطر اول را از سطرهای دوم و سوم کم می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} x & y & z+5 \\ x & y+5 & z \\ x+5 & y & z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z+5 \\ 0 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

حال دترمینان را حول سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} x & y & z+5 \\ 0 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix}=x(-25)-y(25)+(z+5)(-25)$$

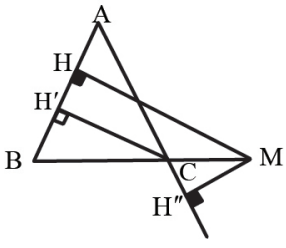
$$=-25x-25y-25z-125=-25(\underbrace{x+y+z}_{-6})-125$$

$$=+150-125=25$$

۷ . در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۶ واحد از نقطه‌ی M واقع بر امتداد ضلع BC بر ضلع AB عمود کرده و پای عمود را H می‌نامیم. اگر $MH=5\sqrt{3}$، فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط شامل ضلع AC کدام است؟ $(MB>MC)$

۱) ۳ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی



از M بر خط شامل ضلع AC عمود کرده و پای عمودی را H'' می‌نامیم.

می‌دانیم تفاضل فواصل هر نقطه روی امتداد یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر با ارتفاع مثلث است. پس:

$$MH>MH''$$

$$|MH-MH''|=CH' \Rightarrow 5\sqrt{3}-MH''=\frac{\sqrt{3}}{2}(6)=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow MH''=2\sqrt{3}$$

۸ . در شکل زیر ساخت ناحیه‌ی رنگی چند واحد سطح است؟



۱) ۱۰

۲) ۱۳

۳) ۷

۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ ساده | محاسباتی

طبق رابطهٔ پیک داریم: $S=\frac{b}{۲}+i-۱$

بنابراین:

$$S_{\text{رنگی}}=S_{\text{کل}}-S_{\text{حفره}}$$

$$=(\frac{۱۴}{۲}+۷-۱)-(\frac{۶}{۲}+۱-۱)=۱۳-۳=۱۰$$

۹ . در یک چندضلعی شبکه‌ای مجموع تعداد نقاط درونی و تعداد نقاط مرزی برابر با ۷ است. اختلاف بیشترین و کم‌ترین مساحت ممکن برای این چندضلعی چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی

اگر تعداد نقاط مرزی را با b و تعداد نقاط درونی را با i نمایش دهیم: $b+i=۷$

بیشترین مساحت زمانی رخ می‌دهد که $b=۳$ (کم‌ترین مقدار b) و کم‌ترین مساحت زمانی اتفاق افتد که $b=۷$ (بیشترین مقدار b). بنابراین:

$$S_{Max}=\frac{۳}{۲}+۴-۱=۴/۵$$

$$S_{Min}=\frac{۷}{۲}+۰-۱=۲/۵$$

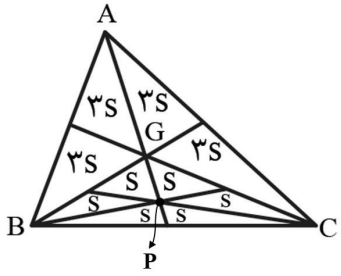
$$\Rightarrow S_{Max}-S_{Min}=۴/۵-۲/۵=۲$$

۱۰ . نقطه‌ی G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC است. اگر نقطه‌ی P محل تلاقی میانه‌های مثلث BGC باشد، مساحت مثلث GPC چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی

ابتدا شکل را رسم می‌کنیم: می‌دانیم که رسم سه میانهٔ مثلث آن را به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند. بنابراین توزیع مساحت‌ها به شکل زیر است:



بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{\triangle GPC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{۲S}{۱۸S}=\frac{۱}{۹}$$

آزمون‌های ماراتون

هندسه دوازدهم | ۱۳ آذرماه ۱۴۰۴

۱ . ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ **و** $A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۱\\ ۰ & c & ۰\\ b & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ **مفروضند. اگر** a **و** b **و** c **اعداد حقیقی و** $A^۲=۴I$ **باشد. مجموع درایه‌های ماتریس** BA **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی - ضرب ماتریس‌ها

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۱\\ ۰ & c & ۰\\ b & ۰ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & ۰ & ۱\\ ۰ & c & ۰\\ b & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲+b & ۰ & a+۱\\ ۰ & c^۲ & ۰\\ ab+b & ۰ & b+۱\end{bmatrix}$$

$$a^۲+b=c^۲=b+۱=۴\Rightarrow\begin{cases}b=۳\\ c=۲\\ a+۱=۰\Rightarrow a=-۱\end{cases}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & -۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۳ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۲ & -۲\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۴ & -۲ & ۴\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس برابر ۶ است.

۲ . قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادله $\begin{vmatrix}x & ۳ & ۴\\ -۲ & x & +۱\\ ۰ & -x & ۲\end{vmatrix}=۷$ **برابر کدام گزینه است؟**

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی - محاسبه دترمینان

با کمک بسط دترمینان فوق را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}x & ۳ & ۴\\ -۲ & x & ۱\\ ۰ & -x & ۲\end{vmatrix}=۷\rightarrow x(\underbrace{(۲\times x)-(-x\times ۱)}_{۳x})-۳(\underbrace{(-۲\times ۲)-(۱\times ۰)}_{-۴})+۴(\underbrace{(-۲\times -x)-(x\times ۰)}_{۲x})=۷$$

$$۳x^۲+۱۲+۸x=۷\rightarrow ۳x^۲+۸x+۵=۰\rightarrow x_۱=-۱\ ,\ x_۲=-\frac{c}{a}=-\frac{۵}{۳}$$

$$|x_۱-x_۲|=|-۱-(-\frac{۵}{۳})|=|\frac{۲}{۳}|=\frac{۲}{۳}$$

۳ . اگر A **ماتریس مرتبه دو و** $|A|=۲$ **و** $|۲A+۲I|=۱۶$ **باشد حاصل** $|A^{-۱}+I|$ **کدام است؟**

۱) ۶ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ سخت | محاسباتی - خواص دترمینان

می‌دانیم اگر ماتریس A از مرتبه n باشد برای محاسبه $|kA|$ داریم:

$$|kI-kA|=k^n|I-k|$$

بنابراین:

$|۲A+۲I|=۱۶ \rightarrow |۲(A+I)|=۱۶ \rightarrow ۲^{۲}|A+I|=۱۶$

از طرفی می‌دانیم $AA^{-۱}=I$ است. در نتیجه با تغییر I داریم:

$\Rightarrow |A+I|=۴ \Rightarrow |A+A\times A^{-۱}|=۴ \Rightarrow |A(I+A^{-۱})|=۴$

$\Rightarrow |A|.|A^{-۱}+I|=۴ \Rightarrow |A^{-۱}+I|=۲$

۴ . اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۱ & \frac{۱}{|A|} \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس X از معادله ماتریسی $AX=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) -۱۷ ۳) ۱۸ ۴) -۱۸

پاسخ: گزینه ۲ ساده | محاسباتی - دستگاه معادلات

ابتدا با کمک خواص دترمینان، مقدار $A^{-۱}$ را محاسبه می‌کنیم. برای این کار دترمینان $A^{-۱}$ را محاسبه می‌کنیم.

$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۱ & \frac{۱}{|A|} \end{bmatrix} \rightarrow |A^{-۱}|=\begin{vmatrix} ۴ & -۶ \\ ۱ & \frac{۱}{|A|} \end{vmatrix} \xrightarrow{|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}} \frac{۱}{|A|}=(۴\times\frac{۱}{|A|})-(۱\times -۶)$

$\rightarrow \frac{۱}{|A|}=\frac{۴}{|A|}+۶ \rightarrow \frac{۳}{|A|}=-۶ \rightarrow |A|=-\frac{۱}{۲}$

بنابراین ماتریس $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ است. برای حل معادله $AX=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$، معادله را در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$A^{-۱}\times(AX=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}) \rightarrow X=A^{-۱}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱۲ \\ -۵ \end{bmatrix}$

بنابراین $X=\begin{bmatrix} -۱۲ \\ -۵ \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌ها برابر -۱۷ است.

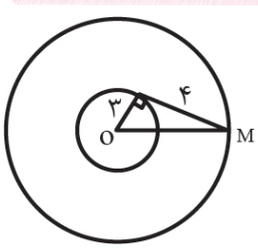
۵ . مکان هندسی نقاطی که از آن نقطه‌ها می‌توان مماس‌هایی به طول ۴ بر دایره $C(O,۳)$ رسم کرد، کدام است؟

۱) دایره $C'(O,۵)$ ۲) دایره $C'(O,۷)$

۳) مربعی به مرکز O و قطر ۱۰ ۴) دایره $C'(O,\sqrt{۷})$

پاسخ: گزینه ۱ ساده | مفهومی - مکان هندسی

مکان هندسی موردنظر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OM=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵$ است.



۶ . چه تعداد از جملات زیر گزاره درست هستند.

آ) در فضا از هر نقطه خارج خط فقط یک خط می‌توان عمود بر خط d رسم کرد.

ب) از هر نقطه خارج صفحه بی‌شمار صفحه وجود دارد که بر آن صفحه عمود است.

پ) از هر نقطه خارج خط بی‌شمار صفحه موازی آن صفحه وجود دارد.

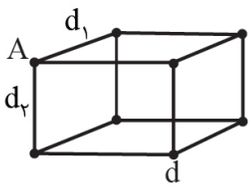
ت) از هر نقطه خارج صفحه یک خط می‌توان بر آن عمود رسم کرد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | مفهومی- تجسم فضایی

گزینهٔ (آ) نادرست است.

از نقطه A بی‌شمار خط می‌گذرد که بر خط d عمود است.

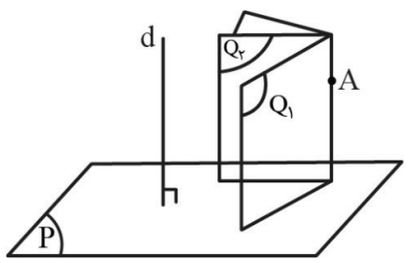


۷ . نقطه A و خط d و صفحه p مفروض است. اگر بی‌شمار صفحه از A بگذرد و با خط d موازی باشد و بر صفحه p عمود باشد، وضعیت خط d و صفحه p کدام است؟

۱) $d \perp p$ ۲) $d \parallel p$ ۳) $d \cap p = A$ ۴) $d \cap p = d$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی - تجسم فضایی

اگر خط d بر صفحه p عمود باشد، بی‌شمار صفحه از A می‌گذرد که با خط d موازی و بر صفحه p عمود است.

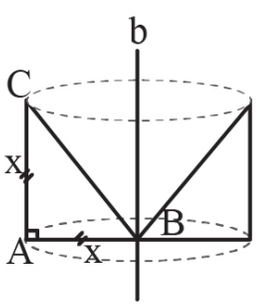


۸ . مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$، $\hat{A} = ۹۰$ مفروض است. از رأس B خطی موازی ضلع قائم AC رسم می‌کنیم. سپس مثلث را نسبت به خط d دوران می‌دهیم. اگر حجم جسم فضای حاصل ۱۴۴π باشد، محیط مثلث قائم‌الزاویه کدام است؟

۱) $۶(۱+\sqrt{۲})$ ۲) $۶(۲+\sqrt{۲})$ ۳) $۱۲(۱+\sqrt{۲})$ ۴) $۱۲(۲+\sqrt{۲})$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی - تجسم فضایی

اگر مثلث قائم‌الزاویه حول خط d دوران دهیم، یک استوانه و یک مخروط با قاعده مشترک دیده می‌شود. حجم جسم فضایی برابر است با:



$$V_{\text{جسم فضایی}} = \text{حجم مخروط} - \text{حجم استوانه} = \pi r^۲ h - \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

$$= \frac{۲}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۲}{۳}\pi (x)^۲ (x) = \frac{۲}{۳}\pi x^۳$$

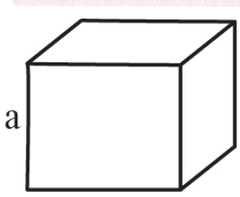
$$۱۴۴\pi = \frac{۲}{۳}\pi x^۳ \Rightarrow x^۳ = ۲۱۶ \Rightarrow x = ۶$$

$$\text{محیط مثلث} = ۶+۶+۶\sqrt{۲} = ۱۲+۶\sqrt{۲} = ۶(۲+\sqrt{۲})$$

۹ . مکعب توپری توسط صفحه قطری برش داده می‌شود و سپس به کمک وجه مثلث به هم چسبیده می‌شود تا یک منشور با قاعده مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ساخته شود. مساحت کل منشور حاصل چند برابر مساحت کل مکعب است؟

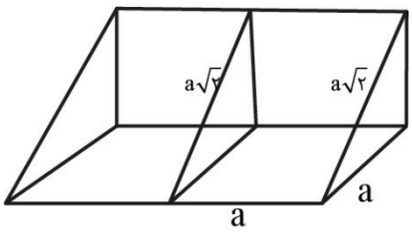
۱) $\frac{۵+۲\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $\frac{۴+۲\sqrt{۶}}{۶}$ ۳) $\frac{۵+۲\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۴+۲\sqrt{۶}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱ سخت | محاسباتی - تجسم فضایی



$$\Rightarrow \text{مساحت مکعب اولیه} = ۶a^۲$$

می‌دانیم طول قطر مکعب $a\sqrt{۲}$ است.



$$\text{مساحت کل} = (۲a \times a\sqrt{۲}) + ۲(\frac{۱}{۲}a^۲) + ۴a^۲$$

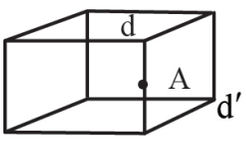
$$= ۵a^۲ + ۲\sqrt{۲}a^۲$$

$$\frac{\text{مساحت کل منشور}}{\text{مساحت کل مکعب}} = \frac{a^۲(۵+۲\sqrt{۲})}{۶a^۲} = \frac{۵+۲\sqrt{۲}}{۶}$$

۱۰. دو خط متنافر d و d' و نقطهٔ A مفروضند. چند خط وجود دارد که از نقطه A می‌گذرد و بر هر دو خط d و d' عمود و متقاطع است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) حداکثر یک ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی - تجسم فضایی



اگر نقطه A همانند شکل روبه‌رو باشد فقط یک خط وجود دارد. اگر نقطه خارج عمود مشترک باشد هیچ خط.

بنابراین حداکثر یک خط، یک عمود مشترک، دو خط متنافر وجود دارد.

۱۷ مهرماه

هندسه

۱- کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) اگر ماتریسی اسکالر باشد، مربعی است.

۲) ماتریس صفر می‌تواند قطری غیراسکالر باشد.

۳) ماتریس صفر می‌تواند اسکالر باشد یا مربعی نباشد.

۴) ماتریس صفر، اگر مربعی باشد، قطری نیز است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۲)

چون همهٔ درایه‌های ماتریس صفر، برابر صفر هستند، بنابراین اگر مربعی باشد، قطعاً اسکالر است. بنابراین گزینهٔ ۲ نادرست است.

ماتریس مربعی

اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم.

دو نمونهٔ باحال ببین!

ماتریس‌های زیر ماتریس‌هایی مربعی هستند:

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}_{۲\times ۲} \qquad B=\begin{bmatrix}۲ & -۳ & ۶\\ ۵ & ۰ & ۱\\ ۴ & -۲ & ۳\end{bmatrix}_{۳\times ۳}$$

ماتریس صفر

ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشد و آن را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$\bar{O}_{۲\times ۳}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix} \qquad \bar{O}_{۲\times ۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

تذکر!

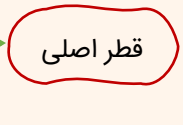
یک ماتریس صفر لزوما ماتریسی مربعی نیست و می‌تواند تعداد سطرها و ستون‌هایش متفاوت باشد.

ماتریس قطری

ماتریس قطری، ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.)

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$



ماتریس اسکالر

ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، همگی با هم برابرند.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$$

ماتریس همانی (واحد)

ماتریس اسکالری است که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن همگی ۱ هستند.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$I_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix} \qquad I_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

ماتریس بالامثلثی

ماتریسی مربعی است که درایه‌های زیر قطر اصلی آن همگی صفر هستند.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی

ماتریسی مربعی است که درایه‌های بالای قطر اصلی آن همگی صفر هستند.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 7 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 2 & 7 & 0\\ 9 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

تذکر!

اگر ماتریس صفر، مربعی باشد هم قطری، هم اسکالر، هم بالا مثلثی و هم پایین‌مثلثی است.

ماز

۲- اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند، به‌طوری‌که $A-B=2I$ و $3A+2B=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 10 & 1\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A چند برابر مجموع درایه‌های ماتریس B است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۳)

کافی است یک دستگاه دو معادله دو مجهولی را حل کنیم:

$$\begin{cases}A-B=2I \Rightarrow 2A-2B=4I\\ 3A+2B=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 10 & 1\end{bmatrix}\end{cases} \Rightarrow 5A=4I+\begin{bmatrix}1 & 10\\ 10 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 10\\ 10 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow 5A=\begin{bmatrix}5 & 10\\ 10 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

از طرفی:

$$B=A-2I=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\frac{\text{مجموع درایه‌های } A}{\text{مجموع درایه‌های } B}=\frac{6}{2}=3$$

جمع و تفاضل دو ماتریس

برای جمع و تفاضل دو ماتریس، در وهلهٔ اول دو ماتریس باید هم‌مرتبه باشند، یعنی تعداد سطرهایشان با هم و تعداد ستون‌هایشان نیز با هم برابر باشد؛ که در این صورت هر درایه با درایهٔ نظیر خود در ماتریس دیگر، جمع و تفریق می‌شود.

ماز

۳- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$، به‌طوری‌که $a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j}(i+j) & ; i\neq j\\ 1 & ; i=j\end{cases}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A چقدر است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) -5

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۱)

ابتدا درایه‌های ماتریس را با استفاده از فرمول داده شده می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}1 & (-1)^3\times 3 & (-1)^4\times 4\\ (-1)^3\times 3 & 1 & (-1)^5\times 5\\ (-1)^4\times 4 & (-1)^5\times 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ -3 & 1 & -5\\ 4 & -5 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=-5$$

تاز

۴- ماتریس $A=\begin{bmatrix}x-y & 0 & x+z\\ y-z & -4 & 0\\ x+y & xy+y^2 & t\end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر است. حاصل $x^2+y^2+z^2$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۲)

ماتریس A اسکالر است، بنابراین درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفرند و درایه‌های قطر اصلی با هم برابرند، بنابراین:

$$\begin{cases}x-y=-4 & (1)\\ x+z=0 & (2)\\ y-z=0 & (3)\\ x+y=0 & (4)\\ y(x+y)=0\end{cases}\xrightarrow{(1),(4)} x=-2, y=2 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (۲) یا (۳)}} z=2$$

بنابراین:

$$x^2+y^2+z^2=4+4+4=12$$

تاز

۵- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & x & y\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$، $C=2A-B$ و $c_{12}+c_{13}=10$ باشد، آن‌گاه $x+y$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۶)

ابتدا ماتریس C را با نوشتن درایه‌ها مشخص می‌کنیم:

$$C=2A-B=\begin{bmatrix}4 & 2x & 2y\\ -2 & 2 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}? & 2x-3 & 2y+1\\ ? & ? & ?\end{bmatrix}$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$c_{12}+c_{13}=10\Rightarrow 2x-3+2y+1=10\Rightarrow 2(x+y)=12\Rightarrow x+y=6$$

ماتریس هم ضریب می‌گیره؟!

اگر عددی مانند r در یک ماتریس ضرب شود، آن عدد را در تک‌تک درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 7\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}\qquad 2A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 14\\ 6 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

نکته‌ای در باب نمایش ماتریس!

اگر درایه‌های ماتریس A را با حرف a نشان دهیم، a_{ij} درایهٔ واقع بر سطر iام و ستون j ام ماتریس A است.

راهنمای زرنگ‌بازی!

می‌دونی چرا به‌جای بعضی درایه‌های C علامت سؤال گذاشتیم با این‌که می‌تونستیم حسابشون کنیم؟ خب معلومه! چون برای حل مسئله نیازی بهشون نداشتیم پس الکی وقت رو تلف نمی‌کنیم تو تایم حیاتی آزمون! 😉

آزمون ماز

۱ آبان‌ماه

هندسه

۱- اگر $A=\left[j^{۲}+i^{۲}\right]_{۲\times ۳}$ و $B=\left[j^{\sqrt{i}}+۲\right]_{۱\times ۳}$ و ماتریس C به صورت $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ تعریف شده باشد، مجموع درایه‌های ستون وسط ماتریس C دارای کدام ویژگی است؟ (i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون است.)

۱) مضرب ۳ است. ۲) زوج است. ۳) اول است. ۴) مربع کامل است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس‌های A و B را با توجه به تعریف ارائه شده برای درایه‌ها می‌سازیم:

$$A=\begin{bmatrix}۱^{۲}+۱^{۲} & ۲^{۲}+۱^{۲} & ۳^{۲}+۱^{۲}\\ ۱^{۲}+۲^{۲} & ۲^{۲}+۲^{۲} & ۳^{۲}+۲^{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۵ & ۱۰\\ ۵ & ۸ & ۱۳\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}۱^{۱}+۲ & ۲^{۱}+۲ & ۳^{۱}+۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۴ & ۵\end{bmatrix}$$

حال ماتریس C به صورت $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ تعریف شده است، بنابراین:

$$C=\begin{bmatrix}۲ & ۵ & ۱۰\\ ۵ & ۸ & ۱۳\\ ۳ & ۴ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های ستون دوم}=۵+۸+۴=۱۷$$

همان‌طور که می‌دانیم ۱۷ عددی اول است.

ماتریس

در ماتریس‌هایی که به شکل $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ یا $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ تعریف می‌شوند، اگر ضابطه‌ای برای A و B داده می‌شود، ابتدا باید خود ماتریس‌های A و B را تشکیل دهیم و سپس زیر هم یا در کنار هم بنویسیم.

ماز

۲- اگر $AB=\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$ و ماتریس‌های مربعی A و B در تساوی $A(BA)^{۲}B=۴AB$ صدق کنند، مجموعهٔ جواب‌های قابل قبول برای x کدام است؟

۱) $\{۱,-۱\}$ ۲) $\{۰,۱\}$ ۳) $\{۰,-۱\}$ ۴) $\{۰,۱,-۱\}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ **(متوسط ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)**

ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A(BA)^{۲}B=A(BA)(BA)B=(AB)(AB)(AB)=(AB)^{۳}$$

بنابراین تساوی به صورت $(AB)^{۳}=۴(AB)$ خلاصه می‌شود. حال $(AB)^{۳}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(AB)^{۲}=\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲x^{۲} & ۲x^{۲} \\ ۲x^{۲} & ۲x^{۲} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)^{۳}=\begin{bmatrix} ۲x^{۲} & ۲x^{۲} \\ ۲x^{۲} & ۲x^{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴x^{۳} & ۴x^{۳} \\ ۴x^{۳} & ۴x^{۳} \end{bmatrix}$$

حال باید جواب‌های معادلهٔ $(AB)^{۳}=۴AB$ را پیدا کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۴x^{۳} & ۴x^{۳} \\ ۴x^{۳} & ۴x^{۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴x & ۴x \\ ۴x & ۴x \end{bmatrix}\Rightarrow ۴x^{۳}=۴x\Rightarrow ۴x^{۳}-۴x=۰$$

$$\Rightarrow ۴x(x-۱)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۰,۱,-۱$$

شرکت‌پذیری در ماتریس‌ها

طبق خاصیت شرکت‌پذیری در ماتریس‌ها داریم:

$$A(BC)=(AB)C$$

تعریف توان برای ماتریس‌ها

طبق تعریف توان در ماتریس‌ها داریم:

$$A^{۲}=A\times A$$

$$A^{۳}=A\times A\times A$$

$$\vdots$$

$$A^{n}=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{ بار}}$$

۳- اگر A و B دو ماتریس مربعی دلخواه باشند، چه تعداد از گزاره‌های داده شده همواره برقرار است؟

الف) $AB=\bar{O}\Rightarrow A=\bar{O}\vee B=\bar{O}$

ب) $AB=BA$

ج) $A^{۲}+B^{۲}=\bar{O}\Rightarrow A=\bar{O}\wedge B=\bar{O}$

د) $(A-I)(A+I)=A^{۲}-I$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف) اگر ضرب دو ماتریس صفر باشد، ممکن است هیچ‌کدام از ماتریس‌ها صفر نباشند، به مثال نقض زیر دقت کنید:

$$\begin{bmatrix}۰ & a\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & b\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

ب) ضرب دو ماتریس در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست مگر در موارد خاص.

ج) تساوی‌های ماتریسی همانند تساوی‌های اعداد نیستند و خواصی که برای اعداد برقرار هستند، الزاماً برای آن‌ها برقرار نیست.

$$A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}+B^{۲}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\bar{O}$$

د) اتحادهای جبری زمانی در ماتریس‌ها برقرار است که ضرب دو ماتریس دارای خاصیت جابه‌جایی باشد و چون I با هر ماتریس مربعی دارای خاصیت جابه‌جایی است تمام اتحادهای جبری برای ماتریس دلخواه A و ماتریس I برقرار است، یعنی:

$$(A-I)(A+I)=A^{۲}-I^{۲}=A^{۲}-I$$

پس در مجموع فقط ۱ گزاره صحیح است.

از اتحاد برای ماتریس استفاده کنم؟ همیشه نه!

اگر A و B ماتریس‌هایی «مربعی» باشند؛ به‌طوری که «$AB=BA$»، اتحادهای جبری مثل مربع دوجمله‌ای، مکعب دوجمله‌ای، مزدوج و چاق و لاغر برایشان برقرار است.

$$(A\pm B)^{۲}=A^{۲}\pm ۲AB+B^{۲}$$

$$(A\pm B)^{۳}=A^{۳}\pm ۳A^{۲}B+۳AB^{۲}\pm B^{۳}$$

$$A^{۲}-B^{۲}=(A-B)(A+B)$$

$$A^{۳}\pm B^{۳}=(A\pm B)(A^{۲}\mp AB+B^{۲})$$

ماتریس همانی

ماتریس I در مجموعهٔ ماتریس‌های مربعی همانند عدد ۱ در مجموعهٔ اعداد حقیقی است و همانند آن عضو بی‌اثر ضرب است و همچنین هر توانی از آن با خود ماتریس برابر است.

۴- اگر $A^{۳}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $A^{۴}=\begin{bmatrix}۵ & ۳\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس $A^{۱۱}$ مجموع درایه‌های قطر فرعی کدام است؟

۱) ۱۷۶ ۲) ۱۷۸ ۳) ۱۷۴ ۴) ۱۸۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

باید بررسی کنیم ۱۱ را چگونه می‌توان به‌صورت جمعِ ضریبی از ۴ و ضریبی از ۳ نوشت:

$$۱۱=۲\times۴+۳\times۱\Rightarrow A^{۱۱}=(A^{۴})^{۲}\times(A^{۳})^{۱}$$

بنابراین کافی است مربع $A^{۴}$ را به‌دست آورده و در $A^{۳}$ ضرب کنیم:

$$(A^{۴})^{۲}=\begin{bmatrix}۵ & ۳\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & ۳\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۴ & ۲۱\\ ۲۱ & ۱۳\end{bmatrix}$$

$$A^{۱۱}=\begin{bmatrix}۳۴ & ۲۱\\ ۲۱ & ۱۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۴۴ & ۸۹\\ ۸۹ & ۵۵\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر فرعی $A^{۱۱}$ برابر است با: $۸۹+۸۹=۱۷۸$

نکته!

۱) توان‌های ماتریس با هم دارای خاصیت جابه‌جایی هستند، یعنی:

$$A^{m}\times A^{n}=A^{n}\times A^{m}$$

۲) اگر بخواهیم از روی ماتریس‌های A^{a} و A^{b} ماتریس A^{c} را پیدا کنیم، ابتدا باید جواب معادلهٔ $ax+by=c$ را پیدا کنیم و در تساوی زیر قرار دهیم:

$$(A^{a})^{x}\times(A^{b})^{y}=A^{c}$$

جاز

۵- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}a & -۷\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰ & b\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ مفروض‌اند، یک تاس را دو بار پرتاب کرده و به جای a و b در ماتریس‌های A و B جای‌گذاری می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مجموع دو ماتریس وارون‌پذیر باشد؟

۱) $\frac{۷}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

مجموع دو ماتریس $A+B=\begin{bmatrix}a & b-۷\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$ می‌باشد، حال شرط وارون‌پذیری این است که دترمینان ماتریس مخالف صفر باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$|A+B|=a+b-۷\neq۰\Rightarrow a+b\neq۷$$

بنابراین حالاتی از (a,b) که مجموع دو تاس برابر ۷ می‌باشد قابل قبول نیست، یعنی:

$$\text{حالات نامطلوب}=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}\Rightarrow n(\text{مطلوب})=۳۶-۶=۳۰$$

از ۳۶ حالت ممکن در پرتاب دو تاس در ۳۰ حالت مجموع آن‌ها ۷ نخواهد شد و مجموع دو ماتریس وارون‌پذیر است، بنابراین:

$$P(\text{مطلوب})=\frac{۳۰}{۳۶}=\frac{۵}{۶}$$

آزمون ماز

۱۵ آبان‌ماه

هندسه

۱- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ۳x+my=a+۱ \\ nx+y=b \end{cases}$، اگر معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به‌صورت $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و مجموعهٔ جواب دستگاه به‌صورت $(b+۱,-۱)$ باشد، دترمینان ماتریس $B=\begin{bmatrix} a & m \\ n & b \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۴۰۱)

ماتریس ضرایب مجهولات به‌صورت $A=\begin{bmatrix} ۳ & m \\ n & ۱ \end{bmatrix}$ است. از طرفی $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ می‌باشد.

بنابراین:

$$A=(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۳-۲}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس $m=۱$ و $n=۲$ و در نتیجه دستگاه به‌صورت $\begin{cases} ۳x+y=a+۱ \\ ۲x+y=b \end{cases}$ درمی‌آید و باید $(b+۱,-۱)$ در آن صدق کند، پس:

$$\begin{cases} ۳(b+۱)+(-۱)=a+۱ \\ ۲(b+۱)+(-۱)=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳b+۲=a+۱ \\ ۲b+۱=b \Rightarrow b=-۱ \end{cases}$$

با جای‌گذاری $b=-۱$ در معادلهٔ بالایی $a=-۲$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین:

$$B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |B|=۲-۲=۰$$

یادآوری وارون ماتریس!

شرط لازم و کافی برای آن‌که ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر باشد، آن است که:

$$|A| = ad - bc \neq 0$$

و وارون آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۲- دو خط با معادلات ماتریسی $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ a+b^2-1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b+2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **داده شده‌اند. اگر این دستگاه دارای جوابی غیریکتا باشد، مقدار a کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) -12 ۳) ۳ ۴) -3

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۲۰۱)

جوابی غیریکتا یعنی بیش از یک جواب دارد و این زمانی امکان‌پذیر است که دو خط بر هم منطبق باشند (که در این صورت بی‌شمار جواب داریم.)، یعنی باید داشته باشیم:

$$\frac{6}{a+b^2-1} = \boxed{\frac{4}{2} = \frac{b+2}{-1}} \Rightarrow b = -4$$

با جای‌گذاری $b=-4$ در معادلهٔ $\frac{6}{a+b^2-1}=\frac{4}{2}$ خواهیم داشت:

$$\frac{6}{a+15} = \frac{4}{2} \Rightarrow a+15=3 \Rightarrow a=-12$$

تعداد جواب‌های دستگاه معادلات دو معادله دو مجهولی

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ را درنظر بگیرید، برای جواب‌های آن ۳ حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

۱) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد، دستگاه یک جواب منحصر به فرد به فرم (x_0, y_0) دارد.

۲) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه دارای بی‌شمار جواب می‌باشد.

۳) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه دارای جواب نمی‌باشد.

۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ -۲ & a+۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}b & ۳\\ ۱ & b+۲\end{bmatrix}$ و دستگاه‌های معادلات $AX=\begin{bmatrix}۲\\ b-۱\end{bmatrix}$ و $BX=\begin{bmatrix}۳\\ a-۲\end{bmatrix}$ فاقد جواب باشند، دستگاه معادلات $(A+B)X=\begin{bmatrix}۱\\ c\end{bmatrix}$ چگونه است؟

۱) بی‌شمار جواب دارد.
۲) جواب منحصر به فرد دارد.
۳) فاقد جواب است.
۴) بستگی به مقدار c دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۲۰۱)

چون دستگاه‌های $AX=\begin{bmatrix}۲\\ b-۱\end{bmatrix}$ و $BX=\begin{bmatrix}۳\\ a-۲\end{bmatrix}$ فاقد جواب هستند، یعنی دو خط موجود در دستگاه باید موازی باشند:

۱) $\frac{۱}{-۲}=\frac{-۳}{a+۲}\neq\frac{۲}{b-۱}\Rightarrow\begin{cases}a+۲=۶\Rightarrow a=۴\\ b-۱\neq-۴\Rightarrow b\neq-۳\end{cases}$

۲) $\frac{b}{۱}=\frac{۳}{b+۲}\neq\frac{۳}{a-۲}\Rightarrow\begin{cases}b^۲+۲b-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}b=۱\\ b=-۳\end{cases}\text{غ ق ق}\\ a\neq۵\end{cases}$

زیرا در شرط (۱) به این رسیدیم که b نباید -۳ باشد.

بنابراین $a=۴$ و $b=۱$ می‌باشد، حال داریم:

$$A+B=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ -۲ & ۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ -۱ & ۹\end{bmatrix}$$

بنابراین $|A+B|=۱۸\neq۰$ و این یعنی ماتریس $A+B$ وارون‌پذیر است و دستگاه $(A+B)X=\begin{bmatrix}۱\\ c\end{bmatrix}$، به‌ازای هر مقدار دلخواه c دارای جواب منحصر به فرد است.

چجوری اون جواب منحصر به فرد به‌دست میاد؟!

جواب به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$(A+B)^{-۱}\Big((A+B)X=\begin{bmatrix}۱\\ c\end{bmatrix}\Big)\Rightarrow(A+B)^{-۱}(A+B)X=(A+B)^{-۱}\begin{bmatrix}۱\\ c\end{bmatrix}\Rightarrow X=(A+B)^{-۱}\begin{bmatrix}۱\\ c\end{bmatrix}$$

حالا گرفتی وارون داشتن ماتریس ضرایب چرا مهمه؟ 😉

ماز

۴- یک تاس را پرتاب و عدد رو شده را به جای a در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & -۳\\ -۲ & ۵-a\end{bmatrix}$ قرار می‌دهیم. چقدر احتمال دارد دستگاه معادلات $AX=\bar{O}$ دارای جواب غیرصفر باشد؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم دستگاه $AX=\bar{O}$ همواره یک جواب صفر را دارد و زمانی که گفته می‌شود دستگاه $AX=\bar{O}$ جواب غیرصفر دارد، یعنی بیش از یک جواب یا به عبارت دیگر بی‌شمار جواب دارد، بنابراین باید $|A|=۰$ باشد:

$$|A|=a(۵-a)-(-۲)(-۳)=۰\Rightarrow ۵a-a^۲-۶=۰$$

$$\Rightarrow a^۲-۵a+۶=۰\Rightarrow(a-۲)(a-۳)=۰\Rightarrow a=۲,۳$$

بنابراین اگر تاس ۲ یا ۳ بیاید دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه صفر شده و دستگاه دارای جواب غیرصفر خواهد شد، یعنی داریم:

$$\begin{matrix} n(A)=۲ \\ n(S)=۶ \end{matrix} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

قِلِقِشو یاد بگیر!

در دستگاه $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ خطوط $ax+by=۰$ و $cx+dy=۰$ هر دو از مبدأ مختصات می‌گذرند یعنی چنین دستگاه‌هایی همواره یک جواب صفر را دارند، اما در حالت خاصی که $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد یا به عبارتی دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه صفر باشد دو خط بر هم منطبق شده و علاوه بر مبدأ در نقاط دیگری نیز اشتراک پیدا می‌کنند که در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود دستگاه جواب غیرصفر دارد.

مثال

۵- اگر A یک ماتریس ۲×۲ و $A^{-۱}+A=I$ باشد، از دستگاه معادلات $A^{۹۹}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) -۵ ۴) -۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی/ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

طرفین تساوی $A^{-۱}+A=I$ را در ماتریس A ضرب می‌کنیم:

$$A(A^{-۱}+A)=A\times I \Rightarrow I+A^{۲}=A \Rightarrow A^{۲}-A+I=\bar{O}$$

حال طرفین این تساوی را در $A+I$ ضرب می‌کنیم:

$$(A+I)(A^{۲}-A+I)=\bar{O} \Rightarrow A^{۳}+I=\bar{O} \Rightarrow A^{۳}=-I$$

طرفین تساوی اخیر را به توان ۳۳ می‌رسانیم و داریم:

$$(A^{۳}=-I)^{۳۳} \Rightarrow A^{۹۹}=-I$$

بنابراین دستگاه معادلات $A^{۹۹}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ y=-۳ \end{cases} \Rightarrow x+y=-۵$$

از اتحاد برای ماتریس استفاده کنم؟ همیشه نه!

اگر A و B ماتریس‌هایی «مربعی» باشند؛ به‌طوری که «$AB=BA$»، اتحادهای جبری مثل مربع دوجمله‌ای، مکعب دوجمله‌ای، مزدوج و چاق و لاغر برایشان برقرار است.

$$(A\pm B)^{۲}=A^{۲}\pm ۲AB+B^{۲}$$

$$(A\pm B)^{۳}=A^{۳}\pm ۳A^{۲}B+۳AB^{۲}\pm B^{۳}$$

$$A^{۲}-B^{۲}=(A-B)(A+B)$$

$$A^{۳}\pm B^{۳}=(A\pm B)(A^{۲}\mp AB+B^{۲})$$

ماتریس همانی

ماتریس I در مجموعهٔ ماتریس‌های مربعی همانند عدد ۱ در مجموعهٔ اعداد حقیقی است و همانند آن عضو بی‌اثر ضرب است و همچنین هر توانی از آن با خود ماتریس برابر است.

توجه!

توجه کنید که چون $AI = IA = A$ است، توانستیم در این سؤال از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم.

آزمون ماز

۲۹ آبان‌ماه

هندسه

۱- اگر $(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ باشد، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) $|A^3|=216$ ب) $|A^{-1}|=\frac{1}{6}$

ج) $|A+I|=-4$ د) $|A^2-2I|=14$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{وارون}}A-I=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}+I\Rightarrow A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

بررسی موارد:

الف

$$|A|=-6\Rightarrow|A^3|=|A|^3=-216$$

پس مورد «الف» نادرست است.

ب)

$$|A|=-۶ \Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=-\frac{۱}{۶}$$

پس مورد «ب» نادرست است.

ج)

$$A+I=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix} \Rightarrow |A+I|=-۴ \checkmark$$

پس مورد «ج» درست است.

د)

$$A^{۲}-۲I=\begin{bmatrix}۹ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix} \Rightarrow |A^{۲}-۲I|=۱۴ \checkmark$$

پس مورد «د» درست است.

در مجموع ۲ مورد درست هستند.

وارونِ وارونِ یه ماتریس می‌شه خود ماتریس!

اگر $A^{-۱}$ را داشته باشیم برای به‌دست آوردن A از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$(A^{-۱})^{-۱}=A$$

چند قانون مهم در دترمینان ماتریس‌ها

۱) $|A^{n}|=|A|^{n}$ ۲) $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$ ۳) $|(A^{-۱})^{n}|=\frac{۱}{|A|^{n}}$

تذکر!

دقت کنید که $|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$ یعنی دترمینان جمع و تفریق دو ماتریس برابر با جمع یا تفریق دترمینان آن‌ها نیست.

دترمینان ضرب دو ماتریس

دترمینان ضرب دو ماتریس برابر با ضرب دترمینان‌های آن‌هاست.

$$|AB|=|A|\times|B|$$

وارون ماتریس‌های قطری

برای به‌دست آوردن وارون ماتریس‌های قطری کافیست درایه‌های قطر اصلی را معکوس کنیم.

۲- اگر $A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$ باشد و $B=\left[\begin{array}{cc:c}۳ & ۱ & ۲\\ \hdashline A^{-۱} & & ۱\\ & & ۰\end{array}\right]$، $|B-I|$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) -۲ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

حال وارون A را به‌دست می‌آوریم و در ماتریس B قرار می‌دهیم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۳\times۱-۴\times۱}\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳ & ۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\\ -۳ & ۴ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow B-I=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۲\\ -۳ & ۳ & ۱\\ ۱ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B-I|=۲\underbrace{(-۳+۱)}_{-۲}-۱\underbrace{(۳-۱)}_{۲}+۲\underbrace{(۳-۳)}_{۰}=-۴-۲+۰=-۶$$

محاسبهٔ وارون ماتریس ۲×۲

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، داریم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

ماز

۳- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix}ax & bx & cx\\ x+a & y+a & z+a\\ a^۲ & ab & ac\end{vmatrix}$ به کدام پارامتر وابسته است؟

۱) پارامترهای a، b و c
۲) فقط پارامتر x و a
۳) پارامترهای x، y و z
۴) مستقل از همهٔ پارامترهاست.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۱)

از پارامتر x در سطر اول و از پارامتر a در سطر سوم فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$\begin{vmatrix}ax & bx & cx\\ x+a & y+a & z+a\\ a^۲ & ab & ac\end{vmatrix}=x\times a\begin{vmatrix}a & b & c\\ x+a & y+a & z+a\\ a & b & c\end{vmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در این دترمینان سطر اول و سوم مثل هم هستند و حاصل دترمینان صفر است، بنابراین مقدار دترمینان به هیچ پارامتری وابسته نیست و مستقل از همهٔ پارامترهاست.

دو نکتهٔ طلایی!

۱) می‌توان یک عدد را از سطر یا ستون دترمینان فاکتور گرفت.

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

۲) اگر دو سطر یا دو ستون از یک دترمینان برابر یا مضرب هم باشند، حاصل دترمینان صفر است.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} = ۰$$

مثال

۴- اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ و $|A+B|=۶$ و $|B|=۲$ باشد، دترمینان ماتریس $I+AB^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۲۰۱)

به جای ماتریس I از $BB^{-۱}$ استفاده می‌کنیم:

$$\left|I+AB^{-۱}\right| = \left|BB^{-۱}+AB^{-۱}\right| = \left|(B+A)B^{-۱}\right| = \frac{|B+A|}{|B|} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

قِلقِشو یاد بگیر!

برای به‌دست آوردن دترمینان ماتریس‌هایی که در آن‌ها I و وارون یک ماتریس وجود دارد با توجه به شرایط به جای I از $AA^{-۱}$ یا $A^{-۱}A$ استفاده می‌کنیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$\left|I+A^{-۱}BA\right| = \left|A^{-۱}A+A^{-۱}BA\right| = \left|A^{-۱}(I+B)A\right|$$

$$= \left|A^{-۱}\right||I+B||A| = \frac{۱}{|A|}|I+B||A| = |I+B|$$

دانستنی‌ها!

دترمینان ماتریس $\left|A^{-۱}+B^{-۱}\right|$ را می‌توان برحسب A و B به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\left|A^{-۱}\pm B^{-۱}\right| = \frac{|B\pm A|}{|A||B|}$$

۵- اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد و $2A=\begin{bmatrix}5|A| & |2A|\\ 4 & |A^2|\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\left\|2A^{-1}\right|A^4|$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۲۰۱)

از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$|2A|=\begin{vmatrix}5|A| & |2A|\\ 4 & |A^2|\end{vmatrix}\Rightarrow 2^2|A|=5|A|^3-4(2^2|A|)$$

$$\Rightarrow 5|A|^3=20|A|\xrightarrow[|A|\neq 0]{A\text{ وارون‌پذیر است.}}|A|^2=4\Rightarrow\begin{cases}|A|=2\\ |A|=-2\end{cases}$$

حال به سراغ محاسبهٔ $\left\|2A^{-1}\right|A^4|$ می‌رویم:

$$\left\|2A^{-1}\right|A^4|=\left|2^2|A^{-1}|A^4|\right|=\left|\frac{4}{|A|}A^4\right|=|2A^4|=2^2|A|^4=4\times 16=64$$

دقت کنید چه به‌ازای $|A|=2$ و چه به‌ازای $|A|=-2$ حاصل‌ها یکسان خواهد شد.

قِلِقِشو یاد بگیر!

از طرفین هر تساوی ماتریسی (اگر مربعی باشند!) می‌توان دترمینان گرفت.

ضریب به توان می‌رسه بعد از دترمینان میاد بیرون!

اگر k یک عدد حقیقی و A یک ماتریس $n\times n$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$|kA|=k^n|A|$$

۱۳ آذرماه

هندسه

۱- اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر و $A^۲=I$ باشد، مجموع تمام درایه‌های ماتریس $(۲A+A^{-۱})^۲-(۲A-A^{-۱})^۲$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

بررسی سریع:

$$A^۲=I\xrightarrow{\times A^{-۱}}A^{-۱}A^۲=A^{-۱}I\Rightarrow A=A^{-۱}$$

$$(۲A+A^{-۱})^۲-(۲A-A^{-۱})^۲=(۲A+A)^۲-(۲A-A)^۲=۹A^۲-A^۲=۸A^۲=۸I=\begin{bmatrix}۸ & ۰\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=۱۶$

چون A وارون‌پذیر است، پس $A^{-۱}$ وجود دارد، طرفین تساوی $A^۲=I$ را در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$A^۲=I\xrightarrow{\times A^{-۱}}A^{-۱}A^۲=A^{-۱}I\Rightarrow A=A^{-۱}$$

حال به جای $A^{-۱}$ در عبارت خواسته شده از A استفاده می‌کنیم:

$$(۲A+A^{-۱})^۲-(۲A-A^{-۱})^۲=(۲A+A)^۲-(۲A-A)^۲=۹A^۲-A^۲=۸A^۲=۸I=\begin{bmatrix}۸ & ۰\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=۱۶$

قِلِقِشو یاد بگیر!

۱) طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک ماتریس دلخواه ضرب کرد اما نمی‌توان حذف کرد:

$$A=B\Rightarrow AC=BC$$

زنگ خطر!

در حالت کلی اصلا اجازه نداریم این کار رو بکنیم!

$$AC=BC\not\Rightarrow A=B$$

عضو بی‌اثر در ضرب ماتریس‌ها

I عضو بی‌اثر ضرب در ماتریس‌ها است. یعنی اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه: $AI=IA=A$

وارون‌پذیری ماتریس

اگر A وارون‌پذیر باشد، (یعنی $|A|\neq ۰$)، آن‌گاه $A^{-۱}$ وجود دارد، در این صورت:

$$AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$$

۲- اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ و $a_{ij}=\begin{cases}۱ & i\neq j\\ ۲-i & i=j\end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix}۶ & ۰\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ باشند، دامنهٔ تعریف تابع $y=\dfrac{\sqrt{x-|A+I|}}{\sqrt{|B-I|-[x]}}$ کدام است؟ ($[x]$ نماد جزء صحیح x است.)

۱) $[۱,۶)$ ۲) $[۱,۵]$ ۳) $[۱,۵)$ ۴) $(۱,۵)$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس A و سپس ماتریس‌های $A+I$ و $B-I$ را تشکیل داده و دترمینان هر کدام را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow |A+I|=۲\times ۱-۱\times ۱=۱$$

$$B=\begin{bmatrix}۶ & ۰\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow B-I=\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow |B-I|=۵\times ۱-۰\times(-۱)=۵$$

حال باید دامنهٔ تعریف تابع $y=\frac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۵-[x]}}$ را پیدا کنیم:

$$۱)\ x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱$$
$$۲)\ ۵-[x]>۰\Rightarrow [x]<۵\Rightarrow x<۵$$
$$\Rightarrow ۱\leq x<۵\Rightarrow x\in[۱,۵)$$

یادآوری!

برای به‌دست آوردن دترمینان $A+B$ یا $A-B$، ابتدا باید این ماتریس‌ها را تشکیل دهیم و سپس دترمینان بگیریم.

$$|A\pm B|\neq |A|\pm |B|$$

۳- اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$، $a_{ij}=\begin{cases}i^j & i\neq j\\ i & i=j\end{cases}$ **و** $B=\left[\begin{array}{cc|c}۱ & ۲ & ۰\\ \multicolumn{2}{c|}{A+I} & ۱\\ & & ۱\end{array}\right]$ **و** $C=\left[\begin{array}{cc|c}\multicolumn{2}{c|}{A-I} & ۴\\ & & ۰\\ \hline ۲ & ۳ & ۱\end{array}\right]$ **باشد،** $|BC|$ **کدام است؟**

۱) ۲۸ ۲) -۱۴ ۳) ۱۴ ۴) -۲۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس A و سپس $A+I$، $A-I$ و سرانجام ماتریس‌های B و C را مشخص کرده و دترمینان آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱^{۲}\\ ۲^{۱} & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\\ A-I=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\end{cases}$$

حال ماتریس‌های B و C را تشکیل داده و دترمینان آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{بسط حول سطر اول}}|B|=۱(-۲)-۲(۰)+۰=-۲$$

$$C=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۴\\ ۲ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{بسط حول سطر اول}}|C|=۰-۱(۲)+۴(۴)=۱۴$$

از طرفی می‌دانیم $|BC|=|B||C|$، بنابراین:

$$|BC|=-۲\times ۱۴=-۲۸$$

دترمینانِ ضرب ماتریس‌ها، همان ضربِ دترمینانِ ماتریس‌ها!

اگر A و B دو ماتریس $n\times n$ باشند، آن‌گاه:

$$|A\times B|=|A|\times |B|$$

۴- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اگر صفحهٔ p عمود بر محور سطح مخروطی آن را قطع کند و از رأس آن عبور کند، سطح مقطع حاصل دایره است.

ب) اگر صفحهٔ p به گونه‌ای هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور سطح مخروطی نباشد، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است.

ج) اگر صفحهٔ p موازی با مولد سطح مخروطی آن را قطع کند و از رأس مخروطی عبور کند، سطح مقطع حاصل سهمی است.

د) اگر صفحهٔ p غیرموازی با مولد و غیرعمود بر محور سطح مخروطی تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، سطح مقطع حاصل یک بیضی است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

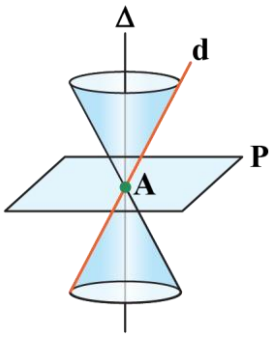
پاسخ: گزینهٔ ۲ **(آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۲۰۲)**

بررسی سریع:

۲ مورد (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

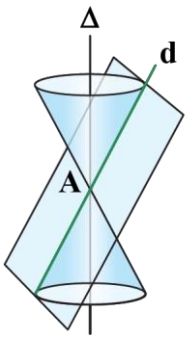
(الف) به عبارت «از رأس آن عبور کند» دقت کنید! در این حالت سطح مقطع حاصل **یک نقطه** است و در حالتی سطح مقطع دایره خواهد شد که صفحهٔ p از رأس سطح مخروطی عبور نکند!!



پس مورد «الف» نادرست است.

(ب) طبق متن کتاب درسی صفحهٔ ۳۵ کاملاً درست است. ✓

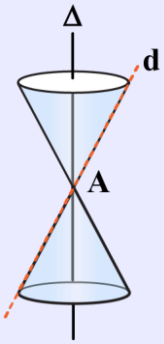
(ج) باز هم به عبارت «از رأس سطح مخروطی عبور کند» دقت کنید. در این حالت جواب **یک خط** است و در صورتی جواب یک سهمی است که صفحه از رأس مخروطی عبور نکند!



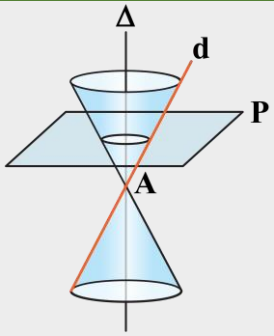
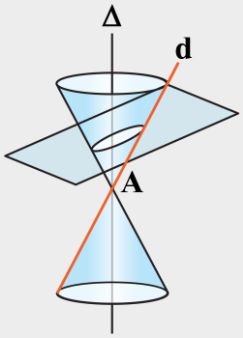
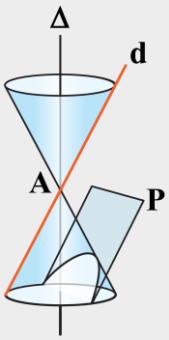
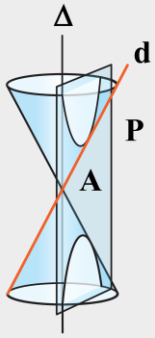
پس مورد «ج» نادرست است.

(د) طبق متن کتاب درسی صفحهٔ ۳۵ کاملاً درست است. ✓

مقاطع مخروطی

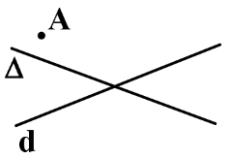


دو خط d و Δ را که در نقطهٔ A مانند شکل متقاطع (غیرعمود) هستند، در نظر می‌گیریم. اگر خط Δ ثابت باشد و خط d را حول خط Δ دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط Δ را محور، خط d را مولد و نقطهٔ A را رأس سطح مخروطی می‌نامیم. فصل مشترک یک صفحه و سطح مخروطی، مقطع مخروطی نامیده می‌شود و انواع مختلفی دارد که عبارتند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی که البته در حالت‌های خاص ممکن است نقطه، یک خط یا دو خط متقاطع باشند، نوع مقطع ایجاد شده بستگی به وضعیت صفحه نسبت به دو خط d و Δ دارد که در جدول زیر این حالات بررسی شده است.

دایره	بیضی	سهمی	هذلولی
صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند.	صفحهٔ P بر محور Δ عمود نبوده و غیرموازی با مولد d است.	صفحهٔ P با مولد d موازی است و از رأس مخروط عبور نمی‌کند.	صفحهٔ P از رأس مخروط عبور نمی‌کند و دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع می‌کند.
			
حالات خاص			
در این حالت، اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطهٔ رأس خواهد بود.	در این حالت، اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند. فصل مشترک فقط نقطهٔ رأس خواهد بود.	در این حالت، اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط یک خط خواهد بود.	در این حالت، اگر صفحهٔ P از رأس مخروطی عبور کرده و هر دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک دو خط متقاطع خواهد بود.

اگر دو صفحهٔ موازی یک رویهٔ مخروطی را قطع کنند، سطح مقطع ایجاد شده به غیر از دو دایره، دو بیضی، دو سهمی، دو هذلولی می‌تواند سهمی و خط یا دایره و نقطه یا بیضی و نقطه یا هذلولی و دو خط متقاطع نیز باشد.

۵- مطابق شکل، نقطهٔ A در صفحهٔ دو خط متقاطع d و Δ واقع است. حداکثر چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از d و Δ به یک فاصله و از A به فاصلهٔ ۵ واحد باشند؟

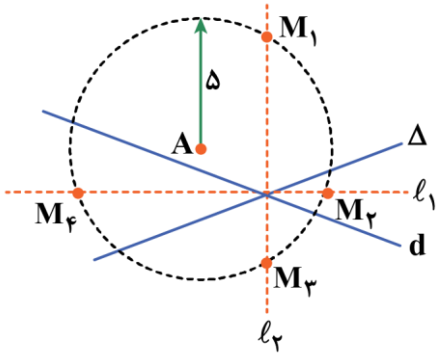


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۲۰۲)

می‌دانیم مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و Δ به یک فاصله هستند، نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط d و Δ است.

همچنین نقاطی که به فاصلهٔ ۵ واحد از نقطهٔ A هستند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ است، حال این دایره نیمساز زوایای بین دو خط d و Δ (یعنی ℓ_1 و ℓ_2) را حداکثر در ۴ نقطه ممکن است قطع کند.



رفع ابهام!

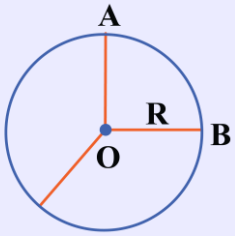
چرا می‌گوییم حداکثر در ۴ نقطه؟ چون بسته به فاصلهٔ A تا خطوط d و Δ ممکن است حتی هیچ نقطه‌ای با خصوصیات ذکر شده وجود نداشته باشد!

مکان هندسی

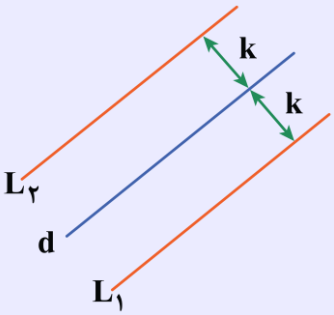
مجموعه نقاطی از فضا یا صفحه که دارای ویژگی یکسانی باشند را «**مکان هندسی**» می‌گوییم.

به معرفی چند مکان هندسی معروف می‌پردازیم:

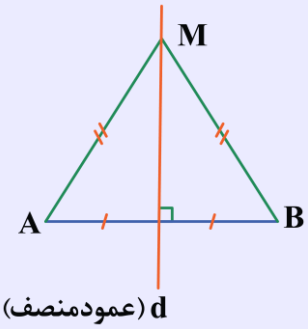
۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.



۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ معلوم k باشند، ۲ خط موازی d و به فاصلهٔ k از آن است.

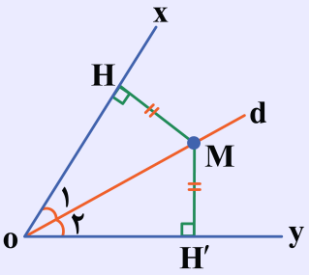


۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از ۲ سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، نقاط واقع بر عمودمنصف آن پاره‌خط است.



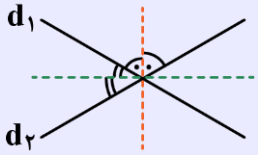
$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$$

۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از ۲ ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند، نقاط واقع بر نیمساز آن زاویه است.



$M \Leftrightarrow MH = MH'$ روی نیمساز زاویهٔ $x\hat{o}y$ واقع است.

۵) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، نیمسازهای زوایای بین آن دو خط متقاطع است.



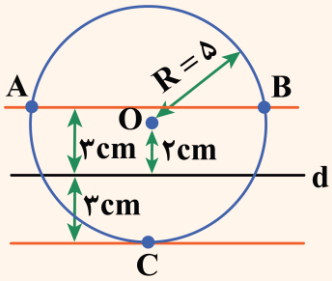
اشتراک چند مکان هندسی

اگر در یک سوال چند مکان هندسی مدنظر باشد تمامی آن‌ها را رسم کرده و نقاط برخورد (مشترک) را به عنوان جواب در نظر می‌گیریم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

سؤال: نقطهٔ O به فاصلهٔ ۲cm از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از O به فاصلهٔ ۵ و از خط d به فاصلهٔ ۳cm باشد؟

ابتدا دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵cm رسم می‌کنیم، سپس ۲ خط به فاصلهٔ ۳cm موازی با d در دو طرف آن رسم می‌کنیم، همان‌طور که در شکل می‌بینید، این دو مکان هندسی ۳ نقطهٔ مشترک (C, B, A) دارند، پس مسئله ۳ جواب دارد.



۱- به ازای چند عدد صحیح m، دایرهٔ $C: x^۲+y^۲+۴x-۳y+m=۰$ از ۳ ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

مرکز دایره C نقطه $O'=(-۲,\frac{۳}{۲})$ در ناحیه دوم است. اگر $r>۲$ باشد، هم از $\frac{۳}{۲}$ و هم از $|-۲|$ بیشتر است، پس هر دو محور مختصات را قطع می‌کند و در ناحیه‌های اول و سوم هم قرار می‌گیرد و اگر $r\le OO'=\frac{۵}{۲}$ باشد، مبدأ مختصات درون دایره قرار نمی‌گیرد و از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند، پس r را برحسب m حساب می‌کنیم و با حل نامعادله $۲<r\le\frac{۵}{۲}$، حدود m را تعیین می‌کنیم:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۹-۴m}\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵-۴m}$$

$$\Rightarrow ۲<\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵-۴m}\le\frac{۵}{۲}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=۰\ \text{یا}\ m=۱\ \text{یا}\ m=۲$$

گروه آموزشی ماز

۲- حدود m را طوری تعیین کنید که از بین نقاط $A(۱,۳)$ و $B(۱,-۳)$ یکی درون و دیگری بیرون دایره $x^۲+y^۲-۲x+۴y+m=۰$ باشد؟

۱) $m<۵$ ۲) $-۲۰<m<۵$ ۳) $-۲۰<m<۴$ ۴) $۴<m<۵$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

ابتدا با توجه به درسنامه $f(۱,۳)$ و $f(۱,-۳)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(۱,۳)=m+۲۰$$

$$f(۱,-۳)=m-۴$$

از آن‌جایی که $m-۴<m+۲۰$ است، باید $m-۴<۰$ و $m+۲۰>۰$ باشد، یعنی $-۲۰<m<۴$ (۱)

از طرفی، معادله داده شده باید معادله دایره باشد، یعنی:

$$۰<a^۲+b^۲-۴c\Rightarrow ۰<۲۰-۴m\Rightarrow ۴m<۲۰\Rightarrow m<۵\quad(۲)$$

که اشتراک (۱) و (۲) همان $-۲۰<m<۴$ است.

وضعیت نقطه و دایره

برای تشخیص وضعیت نسبی نقطه $A(\alpha,\beta)$ و دایره $x^۲+y^۲+Ax+By+C=۰$، ابتدا $f(\alpha,\beta)=\alpha^۲+\beta^۲+A\alpha+B\beta+C$ را حساب می‌کنیم.

$f(\alpha,\beta)<۰\Rightarrow$ نقطه درون دایره است.

$f(\alpha,\beta)=۰\Rightarrow$ نقطه روی دایره است.

$f(\alpha,\beta)>۰\Rightarrow$ نقطه بیرون دایره است.

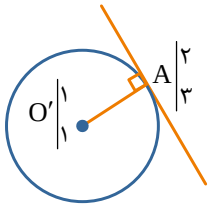
گروه آموزشی ماز

۳- از نقطه $A(۲,۳)$ بر دایره $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳=۰$ خطی مماس رسم کرده‌ایم. این خط محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نقطهٔ A در معادلهٔ دایره صدق می‌کند، یعنی روی دایره قرار دارد. می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است بنابراین شیب شعاع در نقطه تماس و خط مماس عکس و قرینه یکدیگرند، پس داریم:



مرکز دایره: $O'=(۱,۱) \Rightarrow m'_{O'A}=\frac{y_A-y_{O'}}{x_A-x_{O'}}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$

شیب خط مماس: $m=\frac{-۱}{۲}$

معادله خط مماس: $y=-\frac{۱}{۲}x+h \xrightarrow[x=۲]{y=۳} ۳=-\frac{۱}{۲}(۲)+h \Rightarrow h=۴$

برخورد با محور yها: $h=۴$

گروه آموزشی ماز

۴- فاصله مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲+ax+b=۰$ که دو خط $y=۲x-۱$ و $y=۲x+۳$ بر آن مماس‌اند تا محور y ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

چون ضریب y در معادلهٔ دایره صفر است پس مرکز دایره روی محور xها و البته طبق درسنامه روی خط $y=۲x+۱$ قرار دارد، پس نقطه تقاطع خط $y=۲x+۱$ و محور xها را به دست می‌آوریم.

$$y=۲x+۱ \xrightarrow{y=۰} ۲x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

فاصله نقطهٔ $(-\frac{۱}{۲},۰)$ از محور yها برابر است با $\frac{۱}{۲}$.

خطوط مماس

اگر دو خط موازی $y=ax+b$ و $y=ax+c$ بر یک دایره مماس باشند، مرکز دایره روی خط $y=ax+\frac{b+c}{۲}$ قرار دارد و شعاع آن برابر با $\frac{|b-c|}{۲\sqrt{a^۲+۱}}$ است.

گروه آموزشی ماز

۵- دایره $x^۲+y^۲-۲x+۲y+m=۰$ بر روی خط $x-y=۲$ وتری به طول ۲ ایجاد می‌کند. این دایره و محورهای مختصات چند نقطه مشترک دارند؟

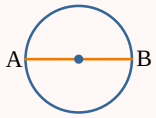
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

مرکز دایره $(۱,-۱)$ است که روی خط $x-y=۲$ قرار دارد یعنی قطر دایره برابر با ۲ و شعاع آن ۱ است. فاصله مرکز دایره از هر کدام از محورهای مختصات برابر با ۱ یعنی شعاع دایره است، پس دایره بر هر دو محور مختصات مماس است در نتیجه دایره و محورهای مختصات ۲ نقطه مشترک دارند.

بزرگترین وتر

اگر مرکز دایره روی وتر باشد، آن وتر قطر دایره است.



گروه آموزشی ماز

۶- نقاط $A(۰,-۵)$، $B(-۳,۴)$ و $C(-۴,-۳)$ روی دایره C قرار دارند. مجموع طول مرکز دایره، عرض مرکز دایره و شعاع دایره کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نقاط داده شده را در معادله گستردهٔ دایره یعنی $x^۲+y^۲+Ax+By+C=۰$ قرار می‌دهیم:

$(۰,-۵) \Rightarrow -۵B+C=-۲۵$

$(-۳,۴) \Rightarrow -۳A+۴B+C=-۲۵$

$(-۴,-۳) \Rightarrow -۴A-۳B+C=-۲۵$

برای حل این دستگاه، معادله اول را از دو معادله دیگر کم می‌کنیم:

$$\begin{matrix}-۳A+۹B=۰\\-۴A+۲B=۰\end{matrix}\Rightarrow A=۰,B=۰$$

با قرار دادن این مقادیر در یکی از معادلات $C=-۲۵$ حاصل می‌شود. یعنی دایره به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۵ است.

گروه آموزشی ماز

۷- به ازای کدام مقدار m دو دایره $x^۲+y^۲-۴x+۶y+m=۰$ و $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۲$ مماس خارج هستند؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

مرکز و شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^۲+y^۲-۴x+۶y+m=۰\Rightarrow O(۲,-۳)\ ,\ r=\frac{\sqrt{۱۶+۳۶-۴m}}{۲}$$

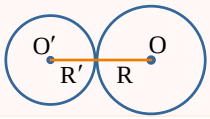
$$x^۲+y^۲+۲x-۲y-۲=۰\Rightarrow O'(-۱,۱)\ ,\ r'=\frac{\sqrt{۴+۴+۸}}{۲}=۲$$

$$OO'=r+r'\Rightarrow\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۲+\frac{\sqrt{۵۲-۴m}}{۲}\Rightarrow m=۴$$

دو دایرهٔ مماس خارج

دو دایره در صورتی مماس خارج‌اند که فاصله مرکزها با مجموع دو شعاع برابر باشد.

$$OO'=R+R'$$



گروه آموزشی ماز

۱- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

بررسی موارد:

الف) درست

$$k+1=n(n+2)+1=n^2+2n+1=(n+1)^2 \qquad n\in\mathbb{N}$$

ب) درست

$$k=(n-1)n(n+1)=n(n^2-1)=n^3-n\Rightarrow k+n=n^3 \qquad n\in\mathbb{N}$$

پ) درست

$$k=(2n-1)^2+(2n+1)^2=8n^2+2\Rightarrow k-2=8n^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(k-2)=4n^2=(2n)^2 \qquad n\in\mathbb{N}$$

ت) نادرست

$$k=n+n+1=2n+1\Rightarrow k(k-1)+1=(2n+1)(2n)+1$$

$$=4n^2+2n+1 \qquad n\in\mathbb{N}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲ و ۳)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2\Leftrightarrow x^4+1\geq 2x^2\Leftrightarrow x^4-2x^2+1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)^2\geq 0$$

اثبات به روش بازگشتی می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

اگر $\frac{n^3(n+1)^3}{125}$ عددی زوج باشد $\frac{n(n+1)}{5}$ هم زوج است و با توجه به زوج بودن $n(n+1)$ کافی است یکی از این دو حالت اتفاق بیافتد:

$n=5k\Rightarrow 10\leq 5k\leq 99\Rightarrow 2\leq k\leq 19\Rightarrow$ تعداد: ۱۸

یا

$n=5k-1\Rightarrow 10\leq 5k-1\leq 99\Rightarrow 11\leq 5k\leq 100$

$\Rightarrow 3\leq k\leq 20\Rightarrow$ تعداد: ۱۸

۳۶ تا که مربع کامل است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۵)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

اثبات گزارهٔ (الف)؛ برهان خلف: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$

$$\xrightarrow{\times abcd} bcd+acd+abd+abc=abcd$$

$\Rightarrow$ فرد = زوج فرض خلف نادرست و حکم درست است.

اثبات گزارهٔ (ب):

$$(2k+1)^3+(2k+3)^3$$

$$=8k^3+12k^2+6k+1+8k^3+36k^2+54k+27$$

$$=2k' \quad \text{زوج}$$

مثال نقض گزارهٔ (پ):

اگر عدد گویا را صفر و عدد گنگ را $\sqrt{3}$ انتخاب کنیم، حاصل‌ضرب آن‌ها برابر صفر و عددی گویاست.

مثال نقض گزارهٔ (ت):

$k=2\Rightarrow 8(2)+1=17$ که مربع عدد فرد نیست

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲، ۳ و ۵)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

تابع $\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}g$ چون ضریبی عددی از تابع پیوسته $f+g$ است، بنابراین پیوسته است. $2f+3g$ ناپیوسته است زیرا:

$$۲f+۳g=۲(f+g)+g$$

ناپیوسته = ناپیوسته + پیوسته =

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۵ و ۶)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی دیداری)*

ثابت می‌کنیم عدد داده شده همواره زوج است. چون اگر طبق روش برهان خلف فرض کنیم عدد $(۳a_۱-b_۱)(۳a_۲-b_۲)(۳a_۳-b_۳)$ فرد است نتیجه می‌شود $۳a_۱-b_۱$ ، $۳a_۲-b_۲$ و $۳a_۳-b_۳$ هر سه فرد هستند. جمع سه عدد فرد، فرد است. پس داریم:

$$۳a_۱-b_۱+۳a_۲-b_۲+۳a_۳-b_۳= \text{فرد}$$

$$۳(a_۱+a_۲+a_۳)-(b_۱+b_۲+b_۳)= \text{فرد}$$

$$۲(a_۱+a_۲+a_۳)= \text{فرد} \Rightarrow \text{تناقض}$$

فرض خلف باطل و نتیجه می‌شود عدد داده شده همواره زوج است.

توجه: $b_۱+b_۲+b_۳=a_۱+a_۲+a_۳$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۶)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی دیداری)*

دو عدد طبیعی را n و $n+۳$ در نظر می‌گیریم:

$$۴k+a=۴n(n+۳)+a=۴n^۲+۱۲n+a$$

عبارت به دست آمده وقتی همواره مربع کامل است که $a=۹$ باشد که داشته باشیم: $۴n^۲+۱۲n+۹=(۲n+۳)^۲$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۳)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی دیداری)*

$$x^۲+y^۲+۲\geq(x+۱)(y+۱) \Leftrightarrow x^۲+y^۲+۲\geq xy+x+y+۱$$

$$\xleftrightarrow{\times ۲} ۲x^۲+۲y^۲+۴\geq ۲xy+۲x+۲y+۲$$

$$\Leftrightarrow x^۲+x^۲+y^۲+y^۲-۲xy-۲x-۲y+۱+۱\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-۱)^۲+(x-y)^۲+(y-۱)^۲\geq ۰$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید k عدد طبیعی سه رقمی مورد نظر باشد. اگر دو عدد طبیعی متوالی را با n و $n+۱$ نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$k=۴n(n+۱)+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲$$

بنابراین عدد مورد نظر مربع یک عدد فرد است. برای اعداد طبیعی سه رقمی داریم:

$$۱۰۰\leq(۲n+۱)^۲\leq ۹۹۹ \Rightarrow ۱۰\leq ۲n+۱\leq ۳۱$$

$$\Rightarrow ۹\leq ۲n\leq ۳۰ \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} ۵\leq n\leq ۱۵$$

بنابراین ۱۱ عدد طبیعی سه رقمی با مشخصات مورد نظر در صورت سؤال وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲ تا ۵)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر $a^۲+b^۲$ عددی زوج باشد، آن‌گاه a و b یا هر دو زوج هستند و یا هر دو فرد.

اگر a و b هر دو فرد باشند، آن‌گاه ab، $۲a+۳b$ و $۴a^۲+b^۲$ همگی عدد فرد خواهند بود، پس هیچ کدام از گزاره‌های گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» نمی‌توانند هم‌ارز گزارهٔ صورت سؤال باشند. اما در صورتی که a و b هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، عبارت $a+۵b$ عددی زوج است و برعکس اگر $a+۵b$ زوج باشد، آن‌گاه a و $۵b$ یا هر دو زوج و یا هر دو فرد هستند که در نتیجه a و b هر دو زوج یا هر دو فرد خواهند بود.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱- **گزینهٔ «۳»** *(آرین تفضلی‌زاده)*

مقادیر گزینه‌ها را در n جای‌گذاری می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که آیا گزاره صحیح است یا خیر.

$$\begin{cases} n=5 \Rightarrow 2^n = 2^5 = 32 \Rightarrow 32 = 7\times 4 + 4 \\ \Rightarrow R = 4 = 2^2 \\ n=6 \Rightarrow 2^n = 2^6 = 64 \Rightarrow 64 = 7\times 9 + 1 \\ \Rightarrow R = 1 = 1^2 \\ n=7 \Rightarrow 2^n = 2^7 = 128 \Rightarrow 128 = 7\times 18 + 2 \\ \Rightarrow R = 2 \Rightarrow \text{مربع کامل نمی‌باشد.} \\ n=8 \Rightarrow 2^n = 2^8 = 256 \Rightarrow 256 = 7\times 36 + 4 \\ \Rightarrow R = 4 = 2^2 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲ و ۳)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(نیما مهندس)*

گزینهٔ «۴» نادرست است، زیرا دارای مثال نقض است:

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{2}+1 \\ \beta = -\sqrt{2}+1 \end{cases}$$
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = \frac{2}{-1} = -2$$

بررسی درستی سایر گزینه‌ها:

۱) چون $p \mid p$ و $p \mid a-p$، نتیجه می‌گیریم $p \mid a$. این گزاره دقیقاً بخش دوم کار در کلاس صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی است.

۲) عدد $101!$ بر تمامی اعداد ۲ تا ۱۰۱ بخش‌پذیر است و از این‌رو جمع $101!$ با هر یک از اعداد ۲ تا ۱۰۱ نیز بر خود آن عدد بخش‌پذیر است. بنابراین اعداد $101!+2$ ، $101!+3$ ، ... ، $101!+101$ صد عدد متوالی و غیراول هستند.

۳) چون این دنباله حسابی است و این اعداد متساوی‌الفاصله هستند، واسطهٔ حسابی دو عددی که نسبت به جملهٔ وسطی فاصلهٔ یکسانی دارند (یکی قبل و یکی بعد) همان عدد وسط است. با استفاده از این استدلال می‌توان درستی گزینهٔ «۳» را اثبات کرد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲، ۳ و ۹ تا ۱۲)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(نیلوفر مهدوی)*

الف) اگر اعداد صحیح متوالی برابر n و $n+1$ باشند، داریم:

$$(n+1)^3 - n^3 = (n^3+3n^2+3n+1) - n^3$$
$$= 3n^2+3n+1 = 3n(n+1)+1$$

عبارت $n(n+1)$ چون حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی است، عددی زوج می‌باشد.

$$3n(n+1)+1 \xrightarrow{n(n+1)=2q} 3(2q)+1 = 6q+1$$
$$\xrightarrow{3q=q'} 2(3q)+1 = 2q'+1$$

$2q'+1$ عددی فرد است، پس این گزاره صحیح است.

ب) این گزاره نادرست است و مثال نقض دارد:

$$a=1,\ b=4 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{1\times 4}}_{2} < \frac{1+4}{\underbrace{2}_{\frac{5}{2}}}$$

پ) می‌دانیم مربع هر عدد فرد به شکل $8q+1$ است، برای اعداد صحیح و فرد a و b داریم:

$$\begin{cases} a^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow 4k^2+4k+1 = 4\underbrace{k(k+1)}_{2k'}+1 = 8k'+1 \\ b^2 = (2q+1)^2 \Rightarrow 4q^2+4q+1 = 4\underbrace{q(q+1)}_{2q'}+1 = 8q'+1 \end{cases}$$
$$a^2-b^2 = (8k'+1)-(8q'+1) = 8k'-8q' = 8(k'-q')$$

عبارت $8(k'-q')$ مضرب ۸ است و این گزاره درست است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲، ۳ و ۷)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهدوی)*

طبق روابط بازگشتی داریم:

$$5x^2+13y^2 \geq 2(-x+5y-2)+3xy$$
$$\Leftrightarrow 5x^2+13y^2 \geq -2x+10y-4+3xy$$
$$\Leftrightarrow 5x^2+13y^2+2x-10y-3xy+4 \geq 0$$

(طرفین نامعادله را در ۲ ضرب می‌کنیم.)

$$\xleftarrow{\times 2} 10x^2+26y^2+4x-20y-6xy+8 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+4x+4)+(y^2-6xy+9x^2)+(25y^2-20y+4) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3x)^2+(5y-2)^2 \geq 0 \qquad (*)$$

عبارت (*) حاصل‌جمع چند مربع کامل است و می‌دانیم که اعداد مربع کامل اعدادی بزرگ‌تر مساوی صفر می‌باشند. پس مجموع چند مربع کامل هم بزرگ‌تر مساوی صفر می‌باشد و عبارت (*) همواره درست است و از آنجا که تمامی عبارات با همدیگر هم‌ارز هستند، نامساوی اولیه و عبارت (*) هم‌ارز هستند.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۶ تا ۸)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

طبق فرض می‌دانیم که: $n^2+6 \mid 5n \xrightarrow{\times n} n^2+6 \mid 5n^2$ (۱)

از طرفی می‌دانیم که $n^2+6 \mid n^2+6$ و در نتیجه:

$$n^2+6 \mid n^2+6 \xrightarrow{\times 5} n^2+6 \mid 5n^2+30 \qquad (2)$$

از تفاضل عبارت‌های ۱ و ۲ درمی‌یابیم که $n^2+6 \mid 30$. از آنجا که n عددی طبیعی است و $n>0$، لذا می‌توان گفت که $n^2+6>6$ است.

حال مقادیری را که n^2+6 می‌تواند اختیار کند را بررسی می‌کنیم:

$n^2+6=10 \Rightarrow n^2=4 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=2 \Rightarrow 2^2+6 \mid 5\times 2$ ✓

$n^2+6=15 \Rightarrow n^2=9 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=3 \Rightarrow 3^2+6 \mid 5\times 3$ ✓

✗ $n^2+6=30 \Rightarrow n^2=24 \Rightarrow$ مقداری طبیعی برای n یافت نمی‌شود

در مجموع ۲ مقدار طبیعی برای n وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

طبق فرض می‌دانیم که:

$$\begin{cases} 7 \mid ma+b \xrightarrow{\times 3} 7 \mid 3ma+3b & (1) \\ 7 \mid 2a+3b & (2) \end{cases}$$

از تفاضل عبارت‌های (۱) و (۲) درمی‌یابیم که $7 \mid (3m-2)a$. (۳)

برای این‌که رابطهٔ (۳) به ازای هر مقادیری از a که مضرب ۷ نیستند برقرار باشد، باید $7 \mid 3m-2$ برقرار باشد. با بررسی گزینه‌ها داریم:

$m=1 \Rightarrow 7 \mid 3-2$ ✗

$m=2 \Rightarrow 7 \mid 6-2$ ✗

$m=3 \Rightarrow 7 \mid 9-2$ ✓

بنابراین حداقل مقدار طبیعی m، برابر ۳ است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

طبق فرض سؤال داریم:

$$5x+7y=xy-2 \Rightarrow 5x+2=xy-7y$$

$$\Rightarrow 5x+2=y(x-7) \Rightarrow \frac{5x+2}{x-7}=y$$

از آنجا که y عددی طبیعی است، پس $\frac{5x+2}{x-7}$ هم عددی طبیعی است، بنابراین $x-7 \mid 5x+2$. (۱)

از طرفی می‌دانیم که: $x-7 \mid x-7 \xrightarrow{\times 5} x-7 \mid 5x-35$ (۲)

از تفاضل روابط ۱ و ۲ درمی‌یابیم که $x-7 \mid 37$. حال مقادیر مختلف x را محاسبه و بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x-7=-1 \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=\frac{32}{-1}=-32 \notin \mathbb{N} \\ x-7=1 \Rightarrow x=8 \Rightarrow y=\frac{42}{1}=42 \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y=50 \\ x-7=-37 \Rightarrow x=-30 \notin \mathbb{N} \\ x-7=37 \Rightarrow x=44 \Rightarrow y=\frac{222}{37}=6 \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y=50 \end{cases}$$

مجموع دو عدد طبیعی x و y برابر ۵۰ می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌طبیی)*

طبق فرض می‌دانیم که:

$$\begin{cases} n \mid 3a+5 \xrightarrow{\times a} n \mid 3a^2+5a & (1) \\ n \mid 3a^2-2a+6 & (2) \end{cases}$$

از تفاضل عبارت‌های ۱ و ۲ داریم $n \mid -7a+6$ و در نتیجه:

$n \mid 3(-7a+6)$ (۳)

از طرفی می‌توانیم بگوییم که:

$n \mid 3a+5 \xrightarrow{\times 7} n \mid 21a+35$ (۴)

از جمع کردن عبارت‌های ۳ و ۴ داریم:

$$n \mid (21a+35)+(-21a+18) \Rightarrow n \mid 53$$

پس $n=1$ یا $n=53$.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

از آنجا که ب. م. م a^6-1 و ۱۶ برابر ۴ شده است نتیجه می‌شود که a^6-1 به صورت ۴ برابر عددی فرد است یعنی $a^6-1=4(2k+1)$.

طبق اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$a^6-1=(a^2-1)(a^4+a^2+1)=(a^2-1)(a^2(a^2+1)+1) \quad (*)$$

a^2 و a^2+1 دو عدد صحیح متوالی‌اند و حاصل‌ضرب آن‌ها عددی زوج خواهد بود و در نتیجه $a^2(a^2+1)+1$ عددی فرد است و در نتیجه از اتحاد (*) نتیجه می‌گیریم:

$$a^2-1=4(2q+1)=8q+4 \Rightarrow a^2=8q+5$$

با بررسی همهٔ حالت‌های a، مقادیری از a که به ازای آن‌ها $a^2=8q+5$ است را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a=4k \Rightarrow a^2=16k^2=8k' \\ a=4k\pm 1 \Rightarrow a^2=16k^2\pm 8k+1=8k'+1 \\ a=4k+2 \Rightarrow a^2=16k^2+16k+4=8k'+4 \end{cases}$$

بنابراین مربع هیچ عدد صحیحی به فرم $8q+5$ نیست و در نتیجه هیچ عدد صحیح دو رقمی برای a یافت نمی‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴، ۱۳ و ۱۴)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی دیداری)*

می‌دانیم: $a \mid b \Rightarrow (a\ ,\ b)=|a|$ (*)

اگر $d=(a\ ,\ b)$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d \mid a \Rightarrow d \mid a^2 \\ d \mid b \Rightarrow d \mid 2b \end{cases} \xrightarrow{+} d \mid a^2+2b$$

طبق (*) می‌توانیم بگوییم که $(d\ ,\ a^2+2b)=|d|=d$ و در نتیجه درمی‌یابیم که $d=40$.

پس کافی است تعداد اعداد $b<300$ را بیابیم به گونه‌ای که:

$$(360\ ,\ b)=40 \Rightarrow (2^3\times 3^2\times 5\ ,\ b)=2^3\times 5$$

می‌توانیم نتیجه بگیریم که عدد طبیعی b حداقل یک عامل ۵ و سه عامل ۲ دارد و عامل ۳ ندارد و بنابراین از آنجا که ب. م. م برابر حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک با توان کمتر است، تجزیهٔ b به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} b=2^n\times 5^m\times 7^t\times 11^k\times \dots \\ n\geq 3\ ,\ \ m\geq 1 \end{cases}$$

اعداد طبیعی $b<300$ به صورت زیر هستند:

$$b=2^3\times 5\ ,\ 2^4\times 5\ ,\ 2^5\times 5\ ,\ 2^3\times 5^2\ ,\ 2^3\times 5\times 7$$

در مجموع ۵ مقدار طبیعی برای عدد b یافت می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم از هر سه عدد متوالی، یکی بر ۳ بخش‌پذیر است. حال فرض کنیم $\overset{۳}{a\equiv k}$، در این صورت داریم:

بررسی گزینه‌ها:

(۱) $\begin{cases}\overset{۳}{a+۲\equiv k+۲}\\ \overset{۳}{a+۴\equiv k+۴\equiv k+۱}\end{cases}$

(۲) $\begin{cases}\overset{۳}{a+۳\equiv k+۳\equiv k}\\ \overset{۳}{a+۶\equiv k+۶\equiv k}\end{cases}$

(۳) $\begin{cases}\overset{۳}{a+۵\equiv k+۵\equiv k+۲}\\ \overset{۳}{a+۱۰\equiv k+۱۰\equiv k+۱}\end{cases}$

(۴) $\begin{cases}\overset{۳}{a+۷\equiv k+۷\equiv k+۱}\\ \overset{۳}{a+۱۴\equiv k+۱۴\equiv k+۲}\end{cases}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴»، سه عدد داده شده با اعداد متوالی k، $k+۱$ و $k+۲$ به پیمانهٔ ۳ هم‌نهشت هستند، پس یکی قطعاً بر ۳ بخش‌پذیر است. به عنوان مثال نقض گزینهٔ «۲»، می‌توان $a=۱$ را در نظر گرفت که هیچ کدام از اعداد ۱، ۴ و ۷ بر ۳ بخش‌پذیر نیستند.

(ریاضیات گسسته- مشابه تمرین ۱۳ صفحهٔ ۱۷)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

ابتدا $۱۰!$ را به عامل‌های اول آن تجزیه می‌کنیم:

$$۱۰!=۱\times۲\times۳\times۲^۲\times۵\times(۲\times۳)\times۷\times۲^۳\times۳^۲\times(۲\times۵)$$

$$=۲^۸\times۳^۴\times۵^۲\times۷$$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار طبیعی m، برای این‌که $۱۰!\times m$ مربع کامل شود، برابر ۷ است.

$$\overset{۷}{a\equiv b}\Rightarrow a-۲\times۷\overset{۷}{\equiv}b\Rightarrow a-۱۴\overset{۷}{\equiv}b$$

نادرستی سایر گزینه‌ها با استفاده از خواص هم‌نهشتی قابل اثبات است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

با توجه به این‌که مجموعهٔ اعداد صحیح در رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به ۱۳ کلاس هم‌نهشتی افراز شده است، پس $m=۱۳$ و در نتیجه داریم:

$$\overline{۵a۸}\overset{۱۳}{\equiv}۵\Rightarrow ۸+۱۰a+۵۰۰\overset{۱۳}{\equiv}۵\Rightarrow ۸+۱۰a+۶\overset{۱۳}{\equiv}۵$$

$$\Rightarrow ۱۰a\overset{۱۳}{\equiv}-۹\Rightarrow ۱۰a\overset{۱۳}{\equiv}-۹+۳۹\overset{۱۳}{\equiv}۳۰$$

$$\xrightarrow[(۱۰,۱۳)=۱]{+۱۰} a\overset{۱۳}{\equiv}۳\xrightarrow{۰<a\leq۹} a=۳$$

$$\overline{aa}\overset{۱۳}{\equiv}۳۳\overset{۱۳}{\equiv}۷\Rightarrow \overline{aa}\in[۷]_{۱۳}$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸، ۱۹ و ۲۲)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

ابتدا تمام مقادیر را به سمت چپ رابطهٔ هم‌نهشتی منتقل می کنیم:

$$a^۳-۲\overset{m}{\equiv}۲a^۲-a\Rightarrow a^۳-۲a^۲+a-۲\overset{m}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow a^۲(a-۲)+(a-۲)\overset{m}{\equiv}۰\Rightarrow (a-۲)(a^۲+۱)\overset{m}{\equiv}۰$$

طبق ویژگی ۷ هم‌نهشتی و با توجه به این‌که $(a^۲+۱ , m)=۱$ ، طرفین رابطهٔ هم‌نهشتی را بر $a^۲+۱$ تقسیم می‌کنیم (بدون این‌که پیمانه تغییر کند):

$$a-۲\overset{m}{\equiv}۰ \Rightarrow m \mid a-۲$$

درستی سایر گزینه‌ها به ازای $m=۷$ و $a=۲$ رد می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۲۲)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا شریف‌طبیبی)*

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$۱۰۵=bq+۱۵ \quad , \quad b>۱۵$$

$$\Rightarrow ۹۰=bq \Rightarrow b \mid ۹۰ \qquad (۱)$$

$$۱۴۱=bq'+۲۱ \quad , \quad b>۲۱$$

$$\Rightarrow ۱۲۰=bq' \Rightarrow b \mid ۱۲۰ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} b \mid (۹۰ , ۱۲۰) \Rightarrow b \mid ۳۰ \xrightarrow{b>۲۱} b=۳۰$$

پس فقط یک مقدار قابل قبول برای b وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌طبیبی)*

ابتدا کلاس هم‌نهشتی n را به پیمانهٔ ۱۹ به دست می‌آوریم:

$$۱۱^۲=۱۲۱=۶\times۱۹+۷ \Rightarrow ۱۱^۲ \overset{۱۹}{\equiv} ۷ \xrightarrow{\times ۱۱} ۱۱^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۷۷ \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } ۹} ۱۱^{۲۷} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۱۱^۲} ۱۱^{۲۹} \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱^۲ \overset{۱۹}{\equiv} ۷$$

$$\Rightarrow ۱۱^{۲۹}+n \overset{۱۹}{\equiv} ۷+n \Rightarrow ۷+n \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow n \overset{۱۹}{\equiv} -۷ \Rightarrow n=۱۹k-۷$$

n عددی دو رقمی است، پس داریم:

$$۱۰ \le n \le ۹۹ \Rightarrow ۱۰ \le ۱۹k-۷ \le ۹۹ \Rightarrow ۱۷ \le ۱۹k \le ۱۰۶$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} ۱ \le k \le ۵$$

پس ۵ عدد طبیعی دو رقمی برای n پیدا می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۵، یکی از اعداد صفر تا ۴ است، پس داریم:

$$a \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow a^۳ \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow a^۳-۳ \overset{۵}{\equiv} -۳ \overset{۵}{\equiv} ۲$$

$$a \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow a^۳ \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow a^۳-۳ \overset{۵}{\equiv} -۲ \overset{۵}{\equiv} ۳$$

$$a \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow a^۳ \overset{۵}{\equiv} ۸ \Rightarrow a^۳-۳ \overset{۵}{\equiv} ۵ \overset{۵}{\equiv} ۰$$

$$a \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow a^۳ \overset{۵}{\equiv} ۲۷ \Rightarrow a^۳-۳ \overset{۵}{\equiv} ۲۴ \overset{۵}{\equiv} ۴$$

$$a \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow a^۳ \overset{۵}{\equiv} ۶۴ \Rightarrow a^۳-۳ \overset{۵}{\equiv} ۶۱ \overset{۵}{\equiv} ۱$$

بنابراین با توجه به فرض سؤال، تنها حالت $a \overset{۵}{\equiv} ۲$ قابل قبول است. در این صورت داریم:

$$a \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow a=۵k+۲ \Rightarrow a-۱۳=۵k-۱۱$$

k در تقسیم بر ۳، به یکی از سه صورت زیر نوشته می‌شود:

$$k=۳t \Rightarrow a-۱۳=۱۵t-۱۱ \overset{۱۵}{\equiv} ۴$$

$$k=۳t+۱ \Rightarrow a-۱۳=۱۵t-۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۹$$

$$k = 3t+2 \Rightarrow a-13 = 15t-1 \overset{15}{\equiv} 14$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای باقی‌مانده‌ها، برابر $27 = 4+9+14$ است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا شریف‌طبیبی)*

عدد $7^{10} \times 11^{20}$ عددی فرد است، پس حاصل‌ضرب سه عدد صحیح a، b و c، عددی فرد شده است و در نتیجه هر یک از مقادیر a، b و c، عددی فرد هستند. می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1 \ (k \in \mathbb{Z})$ نوشته می‌شود، پس داریم:

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 = (8k+1) + 2(8k'+1) + 3(8k''+1)$$

$$= 8k + 16k' + 24k'' + 6 = 8(\underbrace{k + 2k' + 3k''}_{q}) + 6 \Rightarrow r = 6$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

با توجه به تعریف هم‌نهشتی و کلاس‌های هم‌نهشتی داریم:

$$m \mid 3a-5 \Rightarrow 3a \overset{m}{\equiv} 5 \xrightarrow{\times 4} 12a \overset{m}{\equiv} 20$$
$$4a \in [9]_m \Rightarrow 4a \overset{m}{\equiv} 9 \xrightarrow{\times 3} 12a \overset{m}{\equiv} 27$$

$$\Rightarrow 27 \overset{m}{\equiv} 20 \Rightarrow m \mid 27-20 \Rightarrow m \mid 7 \xrightarrow{m \neq 1} m = 7$$

با فرض $m = 7$، روابط را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3a \overset{7}{\equiv} 5 \\ 4a \overset{7}{\equiv} 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a \overset{7}{\equiv} 4$$

$$a^3 - 3a^2 - 4a - 6 \overset{7}{\equiv} 4^3 - 3\times 4^2 - 4\times 4 - 6$$

$$\overset{7}{\equiv} 1 - (-1) - 2 - (-1) \overset{7}{\equiv} 1$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = bq + r \Rightarrow 5r = bq + r \Rightarrow 4r = bq \qquad (*)$$

$$r < b \Rightarrow 4r < 4b \xrightarrow{(*)} bq < 4b$$

$$\Rightarrow q < 4 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} q_{max} = 3$$

با جای‌گذاری $q = 3$ در رابطهٔ (۱) داریم:

$$4r = bq \xrightarrow{q=3} 4r = 3b \Rightarrow 4 \mid 3b$$

$$\Rightarrow 3b \overset{4}{\equiv} 0 \xrightarrow[+3]{(3,4)=1} b \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 4 \mid b$$

$$\Rightarrow b = 4k \xrightarrow{b<20} b = 4, 8, 12, 16$$

پس ۴ مقدار برای مقسوم علیه و در نتیجه ۴ مقدار طبیعی برای مقسوم وجود دارد که این مقادیر عبارتند از:

$$\begin{cases} b = 4 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a = 15 \\ b = 8 \Rightarrow r = 6 \Rightarrow a = 30 \\ b = 12 \Rightarrow r = 9 \Rightarrow a = 45 \\ b = 16 \Rightarrow r = 12 \Rightarrow a = 60 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۴، ۱۵ و ۲۲)

۱- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

از آنجا که عدد $\overline{ab۳۲۱}$ مضرب ۹۹ است، بنابراین هم مضرب ۹ و هم مضرب ۱۱ است. با توجه به قاعدهٔ تقسیم بر اعداد ۹ و ۱۱ در صفحه‌های ۲۲ و ۲۳ کتاب درسی، داریم:

$$\overline{ab۳۲۱}\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow ۱-۲+۳-b+a\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow a-b\overset{۱۱}{\equiv}-۲ \xrightarrow{-۹<a-b\leq ۹} a-b=-۲\ ,\ ۹$$

$$\overline{ab۳۲۱}\overset{۹}{\equiv}۰ \Rightarrow ۱+۲+۳+a+b\overset{۹}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow a+b\overset{۹}{\equiv}-۶\overset{۹}{\equiv}۳ \xrightarrow{۰<a+b\leq ۱۸} a+b=۳\ ,\ ۱۲$$

با بررسی حالت‌های ممکن برای عبارت‌های $a+b$ و $a-b$، مقادیر طبیعی قابل قبول برای a و b را می‌یابیم:

$a+b=۳\ ,\ a-b=-۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=\frac{۵}{۲}$	غ ق ق
$a+b=۳\ ,\ a-b=۹ \Rightarrow a=۶\ ,\ b=-۳$	غ ق ق
$a+b=۱۲\ ,\ a-b=-۲ \Rightarrow a=۵\ ,\ b=۷$	ق ق
$a+b=۱۲\ ,\ a-b=۹ \Rightarrow a=\frac{۲۱}{۲}\ ,\ b=\frac{۳}{۲}$	غ ق ق

تنها مقادیر طبیعی قابل قبول $a=۵$ و $b=۷$ می‌باشند، بنابراین مقدار $۲a+b$ برابر ۱۷ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

دو عدد وقتی رقم یکان یکسانی دارند که به پیمانهٔ ۱۰ هم‌نهشت باشند، بنابراین داریم:

$$a^۲-۳a\overset{۱۰}{\equiv}a+۲ \Rightarrow a^۲-۴a-۲\overset{۱۰}{\equiv}۰ \xrightarrow{۱۰\equiv ۰} \overset{۱۰}{}$$

$$a^۲-۴a-۱۲\overset{۱۰}{\equiv}۰ \Rightarrow (a-۶)(a+۲)\overset{۱۰}{\equiv}۰ \qquad (*)$$

دو عدد $(a-۶)$ و $(a+۲)$ که ۸ واحد اختلاف دارند، یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد؛ از رابطهٔ همنهشتی (*) نتیجه می‌گیریم که هر دو عدد فوق، زوج هستند، یعنی a نیز زوج می‌باشد. از طرفی زمانی حاصل‌ضرب این دو عدد مضرب ۵ می‌شود که یکی از آن‌ها مضرب ۵ باشد:

$$\begin{cases} a-۶\overset{۵}{\equiv}۰ \Rightarrow a\overset{۵}{\equiv}۶ \xrightarrow{a\ \text{زوج}} a=۶\ ,\ ۱۶\ ,\ \dots \\ a+۲\overset{۵}{\equiv}۰ \Rightarrow a\overset{۵}{\equiv}-۲ \xrightarrow{a\ \text{زوج}} a=۸\ ,\ ۱۸\ ,\ \dots \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین عدد طبیعی دو رقمی a برابر ۱۶ و بزرگ‌ترین عدد طبیعی یک رقمی a برابر ۸ بوده و نسبت خواسته شده برابر $\frac{۱۶}{۸}=۲$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۲۳)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

از آنجا که روزهای هفته هر ۷ روز یکبار تکرار می‌شوند، می‌توان فاصلهٔ بین دو تاریخ دور از هم را به پیمانهٔ ۷ کوچک کرد. (*)

حال باید بررسی کنیم که ۱۲ بهمن، چند روز بعد از ۱۷ شهریور است:

$$(۳۱-۱۷)+۴\times ۳۰+۱۲=۱۴۶ \xrightarrow{(*)} ۱۴۶\overset{۷}{\equiv}۶$$

این بدان معناست که ۱۲ بهمن از نظر روز هفته، ۶ روز بعد از ۱۷ شهریور است؛ بنابراین ۱۲ بهمن به‌طور حتم چهارشنبه یا پنجشنبه نمی‌تواند باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۲۴)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

طبق فرض می‌دانیم: $۱۴۰۳x\overset{۷}{\equiv}۲۰۲۴ \Rightarrow ۱۴۰۰x+۳x\overset{۷}{\equiv}۲۰۲۳+۱$

$$\Rightarrow ۳x\overset{۷}{\equiv}۱\overset{۷}{\equiv}۱۵ \xrightarrow[(۳\ ,\ ۷)=۱]{\div ۳} x\overset{۷}{\equiv}۵$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x\overset{۷}{\equiv}۵ \\ ۲۰۲۴\overset{۷}{\equiv}۱ \end{cases} \Rightarrow ۲۰۲۴x\overset{۷}{\equiv}۱\times ۵\overset{۷}{\equiv}۵$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

نکته: معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ به ازای مقادیر صحیح a و b دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a\ ,\ m)\mid b$.

فرض می‌کنیم $d=(۱۷n+۱۱\ ,\ ۷n+۲)$؛ آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} d\mid ۱۷n+۱۱ \xrightarrow{\times ۷} d\mid ۱۱۹n+۷۷ \\ d\mid ۷n+۲ \xrightarrow{\times ۱۷} d\mid ۱۱۹n+۳۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid ۴۳ \Rightarrow d=۱ \ \text{یا}\ ۴۳$$

به ازای $d=۱$ داریم $۱\mid ۸۰$ و بنابراین معادله دارای جواب است؛ ولی به ازای $d=۴۳$ معادله جوابی ندارد (چرا؟). حال مقادیری از n را می‌یابیم که $d=۴۳$ می‌شود:

$$\begin{cases} ۴۳\mid ۷n+۲ \xrightarrow{\times ۶} ۴۳\mid ۴۲n+۱۲ \\ ۴۳\mid ۴۳n \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} ۴۳\mid n-۱۲ \Rightarrow n=۴۳k+۱۲$$

$$\Rightarrow n=۱۲\ ,\ ۵۵\ ,\ ۹۸ \qquad \text{(نامطلوب)}$$

در نتیجه به ازای $۹۰-۳=۸۷$ مقدار دو رقمی n، معادلهٔ هم‌نهشتی داده شده، در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

از مجموعه جواب x که به صورت $\{\dots,-۲۰,-۷,۶,۱۹,\dots\}$ است، نتیجه می‌شود که x به صورت $۱۳k+۶ \quad (k\in\mathbb{Z})$ می‌باشد. از طرفی طبق فرض داریم:

$$ax-۱\overset{۱۳}{\equiv}۲\Rightarrow ax\overset{۱۳}{\equiv}۳\Rightarrow a(۱۳k+۶)\overset{۱۳}{\equiv}۳$$

$$\Rightarrow ۱۳ak+۶a\overset{۱۳}{\equiv}۳\Rightarrow ۶a\overset{۱۳}{\equiv}۳\Rightarrow ۶a\overset{۱۳}{\equiv}۴۲$$

$$\xrightarrow[(۶,۱۳)=۱]{\div ۶} a\overset{۱۳}{\equiv}۷$$

بنابراین a به صورت $۱۳k'+۷ \quad (k'\in\mathbb{Z})$ می‌باشد و بزرگ‌ترین مقدار دو رقمی a به صورت $۱۳\times۷+۷=۹۸$ بوده و مجموع ارقام آن برابر $۹+۸=۱۷$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا فرم کلی اعدادی را پیدا می‌کنیم که ۵ برابر آن‌ها به علاوه ۹، بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد:

$$۵a+۹\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}-۹\Rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}-۲۰$$

$$\xrightarrow[(۵,۱۱)=۱]{\div ۵} a\overset{۱۱}{\equiv}-۴\Rightarrow a=۱۱k-۴ \quad (k\in\mathbb{Z})$$

بزرگ‌ترین عدد طبیعی دو رقمی a، به ازای $k=۹$ به دست می‌آید:

$$a=۱۱k-۴\xrightarrow{k=۹}a=۱۱\times۹-۴=۹۵$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام}=۹+۵=۱۴$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق فرض داریم:

$$\overline{xyx}\overset{۳۰}{\equiv}۱\Rightarrow ۱۰۰x+۱۰y+x\overset{۳۰}{\equiv}۱\Rightarrow ۱۰۱x+۱۰y\overset{۳۰}{\equiv}۱$$

نکته: اگر k مقسوم‌علیه طبیعی (و بزرگ‌تر از یک) عدد طبیعی n باشد و داشته باشیم $x\overset{n}{\equiv}y$، آن‌گاه با استفاده از تعریف هم‌نهشتی ثابت می‌شود: $x\overset{k}{\equiv}y$

از آنجا که ۵ و ۶ مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۰ هستند، پس:

$$\begin{cases} ۱۰۱x+۱۰y\overset{۵}{\equiv}۱\Rightarrow x\overset{۵}{\equiv}۱\xrightarrow{۰<x\le۹}x=۱,۶ & (۱)\\ ۱۰۱x+۱۰y\overset{۶}{\equiv}۱\Rightarrow ۵x+۴y\overset{۶}{\equiv}۱ & (۲)\end{cases}$$

از عبارت‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} x=۱\xrightarrow{(۲)}۵+۴y\overset{۶}{\equiv}۱\Rightarrow ۴y\overset{۶}{\equiv}-۴\overset{۶}{\equiv}۸\Rightarrow y\overset{۳}{\equiv}۲\\ \xrightarrow{۰\le y\le۹}y=۲,۵,۸\Rightarrow \overline{xyx}=۱۲۱,۱۵۱,۱۸۱\\ x=۶\xrightarrow{(۲)}۳۰+۴y\overset{۶}{\equiv}۱\Rightarrow ۴y\overset{۶}{\equiv}۱ \quad \text{(معادله در } \mathbb{Z} \text{ فاقد جواب است.)}\end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین عدد سه رقمی ۱۸۱ و کوچک‌ترین عدد سه رقمی ۱۲۱ می‌باشد و اختلاف این دو عدد برابر ۶۰ است.

توجه: معادلهٔ همنهشتی $۴y\overset{۶}{\equiv}۱$ به دلیل این‌که $۱\not\mid(۶,۴)$، فاقد جواب است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهروی)*

طبق فرض می‌دانیم:

$$x^۲-۱۶x+۶۳\overset{۹}{\equiv}۰\Rightarrow (x-۷)(x-۹)\overset{۹}{\equiv}۰$$

اختلاف دو عدد $(x-۹)$ و $(x-۷)$ برابر با ۲ است، از این‌رو هر دو عدد فوق نمی‌توانند همزمان مضرب ۳ باشند، بنابراین باید یکی از این دو عدد مضرب ۹ باشند:

$$\Rightarrow\begin{cases} x-۷\overset{۹}{\equiv}۰\Rightarrow x=۹k+۷=۳(۳k+۲)+۱=۳k'+۱\\ x-۹\overset{۹}{\equiv}۰\Rightarrow x=۹k''\end{cases}$$

بنابراین x نمی‌تواند به صورت $۳k+۲$ باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

طبق فرض می‌دانیم:

$$\overline{aba}\overset{۳۳}{\equiv}۰\Rightarrow ۱۰۰a+۱۰b+a\overset{۳۳}{\equiv}۰\Rightarrow ۱۰۱b+۲a\overset{۳۳}{\equiv}۰$$

$$\xrightarrow[(۲,۳۳)=۱]{\times ۲} ۵b+a\overset{۳۳}{\equiv}۰ \qquad (*)$$

از طرفی می‌دانیم که عبارت $۵b+a$ حداقل برابر ۱ و حداکثر برابر ۵۴ است (چرا؟). با در نظر گرفتن رابطهٔ (*) درمی‌یابیم که تنها حالت $۵b+a=۳۳$ ممکن است، بنابراین داریم:

$$۵b+a=۳۳\Rightarrow\begin{cases} b=۵\ ,\ a=۸\Rightarrow \overline{aba}=۸۵۸\\ b=۶\ ,\ a=۳\Rightarrow \overline{aba}=۳۶۳\end{cases}$$

در نتیجه دو مقدار سه رقمی طبیعی ۳۶۳ و ۸۵۸ برای $\overline{aba}$ یافت می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

طبق فرض می‌دانیم q عددی زوج است، پس:

$$q=2t\Rightarrow (6q+5)^2=(12t+5)^2=144t^2+120t+25$$

$$=24(\underbrace{6t^2+5t+1}_{k})+1=24k+1$$

بنابراین مجموع ضرایب جمله‌ها در چندجمله‌ای k برابر است با:

$$6+5+1=12$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴ و ۵)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق فرض سؤال می‌دانیم:

$$\frac{a}{b}+\frac{4}{7}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{7a+4b}{7b}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 7b\mid 7a+4b$$

از طرفی می‌دانیم $7b\mid 7b$، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}7b\mid 7b\xrightarrow{\times a}7b\mid 7ab\\ 7b\mid 7a+4b\xrightarrow{\times b}7b\mid 7ab+4b^2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}}7b\mid 4b^2\Rightarrow 7\mid 4b\xrightarrow{\times 2}7\mid 8b\xrightarrow{7\mid 7b}7\mid b$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

طبق قضیهٔ تقسیم داریم: $a=12q+7$

برای این‌که مقسوم علیه تبدیل به ۳۶ شود، برای q سه حالت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}q=3k\Rightarrow a=12(3k)+7=36k+7\\ q=3k+1\Rightarrow a=12(3k+1)+7=36k+19\\ q=3k+2\Rightarrow a=12(3k+2)+7=36k+31\end{cases}$$

از آنجا که باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۳۶ نباید برابر ۱۹ باشد، پس a باید به صورت $36k+7$ یا $36k+31$ باشد:

$$\begin{cases}1\le 36k+7<500\Rightarrow k=0,1,2,\dots,13\Rightarrow \text{۱۴ مقدار}\\ 1\le 36k+31<500\Rightarrow k=0,1,2,\dots,13\Rightarrow \text{۱۴ مقدار}\end{cases}$$

پس در مجموع ۲۸ عدد قابل قبول برای a وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

عدد $\overline{aab}$ را در پیمانهٔ ۲۳ به صورت گسترده می‌نویسیم:

$$\overline{aab}\overset{23}{\equiv}0\Rightarrow 100a+10a+b\overset{23}{\equiv}0\Rightarrow 110a+b\overset{23}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow -5a+b\overset{23}{\equiv}0\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}b$$

با توجه به این‌که b فرد و $1\le a,b\le 9$ می‌باشد، داریم:

$$*\ b=1\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}1\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}70\xrightarrow[(5,23)=1]{\div 5}a\overset{23}{\equiv}14$$

$$\Rightarrow a=14,37,\dots \quad ✗$$

$$*\ b=3\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}3\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}-20\Rightarrow a\overset{23}{\equiv}-4\overset{23}{\equiv}19$$

$$\Rightarrow a=19,42,\dots \quad ✗$$

$$*\ b=5\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}5\Rightarrow a\overset{23}{\equiv}1\Rightarrow a=1 \quad ✓$$

$$*\ b=7\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}7\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}30\Rightarrow a\overset{23}{\equiv}6\Rightarrow a=6 \quad ✓$$

$$*\ b=9\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}9\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}55\Rightarrow a\overset{23}{\equiv}11$$

$$\Rightarrow a=11,34,\dots \quad ✗$$

بنابراین دو عدد مطلوب ۱۱۵ و ۶۶۷ به دست می‌آید.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۲)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی دیداری)*

نکته: می‌دانیم اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $a\overset{n}{\equiv}b$، آن‌گاه $a\overset{[m,n]}{\equiv}b$.

از آنجا که $7\times 11=77$، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد داده شده را بر ۷ و ۱۱ به دست می‌آوریم:

$$2\times 6^{53}-41\overset{7}{\equiv}2\times(-1)^{53}-41=-43\overset{7}{\equiv}6$$

$$6^2\overset{11}{\equiv}3\xrightarrow{\text{توان ۲}}6^4\overset{11}{\equiv}9\xrightarrow{\times 6}6^5\overset{11}{\equiv}54\overset{11}{\equiv}-1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۱۰}}6^{50}\overset{11}{\equiv}1\xrightarrow{\times 6^3}6^{53}\overset{11}{\equiv}6^3=216\overset{11}{\equiv}7$$

$$\Rightarrow 2\times 6^{53}-41\overset{11}{\equiv}2\times 7-41\overset{11}{\equiv}6$$

بنابراین اگر عدد داده شده را A در نظر بگیریم، کافی است سمت راست دو همنهشتی را یکسان کنیم:

$$\begin{cases}A\overset{7}{\equiv}6\\ A\overset{11}{\equiv}6\end{cases}\xrightarrow{[7,11]=77}A\overset{77}{\equiv}6$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های۱۹ تا ۲۲)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

عبارت داده شده را به پیمانهٔ ۹۹ به صورت گسترده می‌نویسیم:

$$\overline{a2b3}+\overline{2a3b}\overset{99}{\equiv}1000a+200+10b+3+2000+100a+30+b$$

$$\overset{99}{\equiv}1100a+11b+2233\overset{99}{\equiv}11a+11b-44\overset{99}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow 11(a+b)\overset{99}{\equiv} 44 \xrightarrow[(11,99)=11]{+11} a+b\overset{9}{\equiv}4$$

از آنجا که $0 \le a+b < 20$، مقادیر ممکن برای $a+b$، اعداد ۴ و ۱۳ هستند که تنها مقدار ۴ در گزینه‌ها وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۲)

۷- **گزینهٔ «۱»** (فرشاد صدیقی‌فر)

$$\begin{cases} x: \text{تعداد پسرها} \\ y: \text{تعداد دخترها} \end{cases} \Rightarrow 7x+4y=82 \Rightarrow 7x\overset{4}{\equiv}82 \Rightarrow 3x\overset{4}{\equiv}2\overset{4}{\equiv}6$$

$$\xrightarrow[(3,4)=1]{+3} x\overset{4}{\equiv}2 \Rightarrow x=4k+2$$

با جای‌گذاری x در معادلهٔ اولیه داریم:

$$7(4k+2)+4y=82 \Rightarrow 4y=-28k+68$$

$$\xrightarrow{+4} y=-7k+17$$

می‌دانیم x و y اعدادی بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} x\ge 0 \Rightarrow 4k+2\ge 0 \Rightarrow k\ge -\frac{1}{2} \\ y\ge 0 \Rightarrow -7k+17\ge 0 \Rightarrow k\le \frac{17}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\le k\le \frac{17}{7} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2$$

بنابراین مقادیر ممکن برای x و y عبارتند از:

$$\begin{cases} x=2 , y=17 \Rightarrow x+y=19 \\ x=6 , y=10 \Rightarrow x+y=16 \\ x=10 , y=3 \Rightarrow x+y=13 \end{cases} \quad (\text{کمترین تعداد افراد})$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

۸- **گزینهٔ «۳»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

ابتدا به کمک معادلهٔ همنهشتی، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$9x+15y=120 \xrightarrow{+3} 3x+5y=40 \Rightarrow 3x\overset{5}{\equiv}40$$

$$\xrightarrow{5\times 8=40} 3x\overset{5}{\equiv}0 \xrightarrow[(3,5)=1]{+3} x\overset{5}{\equiv}0 \Rightarrow x=5k \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

پس بزرگ‌ترین مقدار طبیعی دو رقمی x برابر $a=5\times 19=95$ بوده و داریم:

$$a^{1403}\overset{4}{\equiv}95^{1403} \xrightarrow{95\overset{4}{\equiv}-1} a^{1403}\overset{4}{\equiv}(-1)^{1403}\overset{4}{\equiv}-1\overset{4}{\equiv}3$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

۹- **گزینهٔ «۲»** (احمدرضا فلاح)

طبق فرض می‌دانیم که اعداد طبیعی x و y به صورت $3k$ و $3k'$ هستند و داریم:

$$4x+7y=300 \Rightarrow 4(3k)+7(3k')=300$$

$$\Rightarrow 4k+7k'=100 \qquad (k , k'\in\mathbb{N}) \qquad (*)$$

معادلهٔ سیالهٔ به دست آمده را می‌توان به یک معادلهٔ همنهشتی تبدیل کرد:

$$7k'\overset{4}{\equiv}100 \xrightarrow{4\times 25=100} 7k'\overset{4}{\equiv}0 \xrightarrow[(4,7)=1]{+7} k'\overset{4}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow k'=4q \qquad (q\in\mathbb{N})$$

$$(*): 4k+7(4q)=100 \Rightarrow k=25-7q$$

از آنجا که k و k' اعدادی طبیعی هستند، داریم:

$$\begin{cases} k\ge 1 \Rightarrow 25-7q\ge 1 \Rightarrow q\le \frac{24}{7} \qquad (1) \\ k'\ge 1 \Rightarrow 4q\ge 1 \Rightarrow q\ge \frac{1}{4} \qquad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{1}{4}\le q\le \frac{24}{7} \xrightarrow{q\in\mathbb{N}} q=1 , 2 , 3$$

مقادیری که برای x و y به دست می‌آید عبارتند از:

$$\begin{cases} x=54 , y=12 \\ x=33 , y=24 \\ x=12 , y=36 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

۴۰- **گزینهٔ «۱»** (نیلوفر مهدوی)

نکته: شرط آن که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب باشد، آن است که: $(a , b) \mid c$

$$(152 , 209) \mid 4m+2 \Rightarrow (19\times 8 , 19\times 11) \mid 4m+2$$

$$\Rightarrow 19 \mid 4m+2 \Rightarrow 4m+2\overset{19}{\equiv}0 \Rightarrow 4m\overset{19}{\equiv}-2 \Rightarrow 4m\overset{19}{\equiv}36$$

$$\xrightarrow[(4,19)=1]{+4} m\overset{19}{\equiv}9 \Rightarrow m=19k+9 \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

$$1\le m<340 \Rightarrow 1\le 19k+9<340 \Rightarrow k=0 , 1 , 2 , \dots , 17$$

بنابراین ۱۸ مقدار طبیعی و کوچک‌تر از ۳۴۰ برای m یافت می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا شریف‌فطیبی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) $p=۵ , q=۷ , \delta=۲ , \Delta=۴$

$\Rightarrow ۲۵+۴۹ \neq ۸+۶۴+۲۲$ غ ق ق

۲) $p=۵ , q=۵ , \delta=۱ , \Delta=۳$

$\Rightarrow ۲۵+۲۵=۱+۲۷+۲۲$ ق ق

۳) $p=۵ , q=۴ , \delta=۰ , \Delta=۲$

$\Rightarrow ۲۵+۱۶ \neq ۰+۸+۲۲$ غ ق ق

۴) $p=۶ , q=۷ , \delta=۱ , \Delta=۳$

$\Rightarrow ۳۶+۴۹ \neq ۱+۲۷+۲۲$ غ ق ق

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۳۷)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

دورهای به طول ۴:

$uvwzu , uwzvu , uzvwu , zwxyz , zvwyz , zuwyz \Rightarrow m=۶$

دورهای به طول ۵:

$uvwyzu , uvzywu , vwxyzv , uwxyzu \Rightarrow n=۴$

در نتیجه $m+n=۱۰$.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۳۸)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌خرد)*

با توجه به $\delta=۳$ و $\Delta=۵$، حداقل اندازهٔ گراف حالتی است که در آن تا حد امکان درجهٔ رأس‌ها ۳ باشد. همچنین به دلیل این‌که گراف نمی‌تواند دارای فرد رأس از درجهٔ فرد باشد (چرا؟)، باید یک رأس درجهٔ ۴ نیز داشته باشیم:

$۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۴ , ۵$: درجهٔ رئوس گراف

بنابراین اندازهٔ گراف برابر است با:

$$q=\frac{\sum_{i=۱}^{۹}\deg(v_i)}{۲}=\frac{۳۰}{۲}=۱۵$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۷، ۳۹ و ۴۰)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

گراف مرتبهٔ ۸ که ۶ یال داشته باشد حتماً ناهمبند است (چرا؟).

$$q(K_۸)=\binom{۸}{۲}=۲۸ \Rightarrow ۲۸-۶=۲۲$$

پس حداقل ۲۲ یال به‌طور دلخواه، از گراف کامل $K_۸$ باید حذف شود تا گراف حاصل، قطعاً ناهمبند باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌فطیبی)*

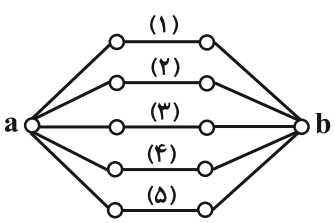
- $acb \Rightarrow$ یک مسیر به طول ۲
- $acdb , aecb \Rightarrow$ دومسیر به طول ۳
- $acedb , aecdb , aedcb , afecb \Rightarrow$ چهارمسیر به طول ۴
- $afecdb , afedcb \Rightarrow$ دومسیر به طول ۵

پس در کل ۹ مسیر داریم.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۳۸)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

گراف مورد نظر سؤال به صورت زیر است:



برای تشکیل هر دور به طول ۶، باید دو تا از مسیرهای ۱ تا ۵ را انتخاب نمود.

$$\text{تعداد دورهای به طول ۶} = \binom{۵}{۲} = ۱۰$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۶ و ۳۸)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

در گراف $k-$منتظم داریم:

$$kp = ۲q = ۲(۱۲) = ۲۴$$

با اضافه کردن دو یال مجاور به گراف منتظم، گراف G به دست می‌آید؛ پس $\Delta(G) = k + ۲$ و طبق فرض داریم:

$$\overbrace{pk}^{۲۴} - (k+۲) = ۱۹ \Rightarrow k = ۳ \Rightarrow ۳p = ۲۴ \Rightarrow p = ۸$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(نیلوفر مهدوی)*

۳ رأس زیر گراف را از ۱۰ رأس گراف $K_{۱۰}$ به صورت $\binom{۱۰}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم. از طرفی چون گراف کامل است، پس سه رأس زیرگراف به هم متصل هستند و در نتیجه ۳ یال بین آن‌ها وجود دارد که هر کدام می‌توانند در زیرگراف باشند یا نباشند، یعنی دو حالت دارند. بنابراین تعداد کل زیرگراف‌های از مرتبهٔ ۳ برابر است با:

$$\binom{۱۰}{۳} \times ۲ \times ۲ \times ۲ = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳ \times ۲} \times ۸ = ۱۲۰ \times ۸ = ۹۶۰$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهدوی)*

می‌دانیم:

$$d_G(v_i) + d_{\bar{G}}(v_i) = p - ۱ = ۱۱ \Rightarrow d_{\bar{G}}(v_i) = ۱۱ - d_G(v_i)$$

اگر درجهٔ هر رأس گراف منتظم G را x فرض کنیم، داریم:

$$\frac{x}{۱۱-x} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow ۶x = ۵۵ - ۵x \Rightarrow ۱۱x = ۵۵ \Rightarrow x = ۵$$

$$\Rightarrow d_{\bar{G}}(v_i) = ۱۱ - ۵ = ۶$$

پس گراف G، ۵- منتظم از مرتبهٔ ۱۲ و گراف $\bar{G}$، ۶- منتظم از مرتبهٔ ۱۲ است. اندازهٔ گراف $\bar{G}$ برابر است با:

$$۱۲ \times ۶ = ۲q \Rightarrow q = ۳۶$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

می‌دانیم:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta(\bar{G}) = p - ۱ - \delta(G) \\ \delta(\bar{G}) = p - ۱ - \Delta(G) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طبق فرض}}$$

$$(p - ۱ - \delta(G)) - (p - ۱ - \Delta(G)) = ۵$$

$$\Rightarrow \Delta(G) - \delta(G) = ۵$$

حال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta(G) - \delta(G) = ۵ \\ \Delta(G) + ۲\delta(G) = ۲۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(G) = ۱۱ \ , \ \ \delta(G) = ۶$$

چون $\Delta = ۱۱$، پس گراف G حداقل ۱۲ رأس دارد؛

اگر تعداد رئوس گراف G را برابر با ۱۲ در نظر بگیریم، این گراف با شرط $\Delta(G) = ۱۱$، رأس Full درجه (از درجهٔ $p-۱$) خواهد داشت که این نتیجه می‌دهد گراف $\bar{G}$ رأس تنها دارد و در نتیجه همبند نیست. پس برای همبند $\bar{G}$، حداقل مقدار ممکن برای p، ۱۳ است.

گراف $\bar{G}$ در کمترین حالت ۱۲ یال دارد، بنابراین گراف G در بیشترین حالت ممکن $\binom{۱۳}{۲} - ۱۲ = ۶۶$ یال دارد و در این صورت مجموع درجات رئوس آن برابر $۲ \times ۶۶ = ۱۳۲$ خواهد شد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

ریاضیات گسسته

۱- **گزینهٔ «۴»** *(اسحاق اسفندیار)*

می‌دانیم برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲$

$$x+۲=a \ , \ y+۳=b$$

$$(x+۲+y+۳)(\frac{۱}{x+۲}+\frac{۱}{y+۳})=(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})$$

$$=\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{b}=۱+۱+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=۲+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲+۲=۴$$

(ریاضیات گسسته- مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۸)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

گزاره‌های ۱، ۲ و ۴ به روش اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها، ثابت می‌شوند اما گزینهٔ «۳» به روش مستقیم اثبات می‌شود.

$$(۲k-۱)(۲k+۱)+۱=۴k^۲-۱+۱=۴k^۲=(۲k)^۲$$

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۴)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

اگر x یا y و یا هر دو برابر صفر شوند آن‌گاه تساوی برقرار است و اگر x و y هر دو غیرصفر باشند تساوی برقرار نیست. پس تعداد مثال نقض برابر خواهد بود با:

$$۴\times ۴=۱۶$$

(ریاضیات گسسته- مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۸)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(حامد قاسمیان)*

$$۳x^۲+y^۲+۲z^۲+A\geq -x^۲+۱۲x-۸y-۲z^۲+۴z$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۱۲x+y^۲+۸y+۴z^۲-۴z+A\geq ۰$$

$$\Rightarrow (۲x-۳)^۲+(y+۴)^۲+(۲z-۱)^۲-۲۶+A\geq ۰$$

برای این‌که رابطه همواره درست باشد حداقل A برابر ۲۶.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۶ تا ۸)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

عبارت $x^۲y-xy^۲=xy(x-y)$ همواره زوج است؛ زیرا اگر x یا y حداقل یکی زوج باشد، xy زوج است و اگر x و y هر دو فرد باشند، $x-y$ زوج است. بنابراین مسئله جواب ندارد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

$$\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\text{زوج}\Rightarrow(\frac{n(n+۱)}{۲})^۲=\text{زوج}$$

می‌دانیم اگر a عددی صحیح و $a^۲$ زوج باشد، آن‌گاه a زوج است، بنابراین داریم:

$$\frac{n(n+۱)}{۲}=\text{زوج}=۲k\Rightarrow n(n+۱)=۴k$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n=۴k'\Rightarrow n=۴\ ,\ ۸\\ n+۱=۴k'\Rightarrow n=۳\ ,\ ۷\end{cases}$$

توجه: دو عدد متوالی n و $n+۱$ همزمان زوج نیستند.

(ریاضیات گسسته- مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا شریف‌طیبی)*

$$۴x^۲+۲y^۲+۸y\geq ۲x-۱۱$$

$$\Leftrightarrow ۴x^۲+۲y^۲-۲x+۸y+۱۱\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow x^۲+۳x^۲+۲y^۲-۲x+۸y+۱+۲+۸\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+3x^2+(2y^2+8y+8)+2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+3x^2+2(y^2+4y+4)+2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+3x^2+2(y+2)^2+2\geq 0$$ همواره درست است

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۶ تا ۸)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

بررسی گزینه‌ها:

$\alpha+\beta$ می‌تواند گنگ یا گویا باشد، مثلاً:

$$\begin{cases}\alpha=\sqrt{2}-1\\ \beta=\sqrt{2}+1\end{cases}\Rightarrow \alpha\beta=1\in Q\ ,\ \alpha+\beta=2\sqrt{2}\notin Q$$

یا

$$\begin{cases}\alpha=1-\sqrt{2}\\ \beta=1+\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow \alpha\beta=-1\in Q\ ,\ \alpha+\beta=2\in Q$$ (مثال نقض)

پس گزینهٔ «۱» رد می‌شود. اما گزینهٔ «۲» عدد گویای غیرصفر $\alpha\beta$ در عدد نامعلوم $\alpha+\beta$ ضرب شده است. پس گنگ یا گویا بودن آن به $\alpha+\beta$ ربط دارد که آن هم نامعلوم است. مثلاً در صورت انتخاب اعداد α و β مانند مثال دوم بالا، حاصل عبارت گزینه «۲»، عددی گویا خواهد بود. اما گزینهٔ «۴»:

$$\alpha(1-\beta)+\beta=\alpha-\alpha\beta+\beta=(\alpha+\beta)-\alpha\beta$$

چون $\alpha\beta$ گویا است، پس باز هم گنگ یا گویا بودن این عدد مانند گزینهٔ «۲» به $\alpha+\beta$ بستگی دارد. اما گزینهٔ «۳» قطعاً گنگ است، زیرا:

$$\alpha^2\beta^3(1+\alpha)=\underbrace{\alpha^2\beta^2}_{\text{عدد گویای غیرصفر}}\times\beta(1+\alpha)\Rightarrow \underbrace{\beta}_{\text{گنگ}}+\underbrace{\beta\alpha}_{\text{گویا}}\in Q'$$

توجه: حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است و حاصل‌ضرب یک عدد گنگ در یک عدد گویای غیرصفر، قطعاً گنگ است.

(ریاضیات گسسته- مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۸)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

راه‌حل اول:

$$8k+1=(2n+1)^2\Rightarrow 8k+1=4n^2+4n+1$$

$$\Rightarrow 8k=4(n^2+n)\Rightarrow 2k=n(n+1)\Rightarrow k=\binom{n+1}{2}$$

$$29\leq\binom{n+1}{2}\leq 113\Rightarrow 9\leq n+1\leq 15$$

$$\Rightarrow 8\leq n\leq 14\Rightarrow n \text{ تعداد مقادیر} = 14-8+1=7$$

راه‌حل دوم:

$$k\in\{29,30,\ldots,113\}$$

$$\Rightarrow 8k+1\in\{233,241,\ldots,905\}$$

با فرض $8k+1=n^2$ داریم: $233\leq n^2\leq 905\Rightarrow 16\leq n\leq 30$

n عددی فرد است، پس: $n=17,19,\ldots,29$ (۷ مقدار)

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

با برهان خلف می‌توانیم ثابت کنیم A حتماً زوج است چون اگر فرض کنیم A فرد باشد، هر سه عدد a_1-b_1، a_2-b_2 و a_3-b_3 نیز فرد هستند. از طرفی مجموع ۳ عدد فرد، فرد است پس داریم:

$$a-b_1+a_2-b_2+a_3-b_3 = \text{فرد}$$

$$\Rightarrow (a_1+a_2+a_3)-(b_1+b_2+b_3)=\text{فرد}$$

$$\xrightarrow{\text{یک اضافه و کم}}\underbrace{(a_1+1+a_2-1+a_3)}_{\text{یکسان}}-(b_1+b_2+b_3)=\text{فرد}$$

$$\Rightarrow \text{فرد} = \text{صفر}$$

تناقض حاصل نشان می‌دهد که فرض خلف باطل و حکم درست است.

یعنی A الزاماً عددی زوج است.

(ریاضیات گسسته- مشابه مثال صفحهٔ ۶)

ریاضیات گسسته

۱- **گزینهٔ «۳»** *(رضا توکلی)*

می‌دانیم $[a\ ,\ b]\,|\,a$ و $(a\ ,\ b)\,|\,a$ پس داریم:

$$۷۵\,|\,[a\ ,\ ۷۵] \Rightarrow ۷۵\,|\,۳(a\ ,\ ۷۵) \Rightarrow ۲۵\,|\,(a\ ,\ ۷۵)$$

با توجه به این‌که $(a\ ,\ ۷۵)$ مقسوم‌علیه ۷۵ است، تنها مقسوم‌علیه‌های ۷۵ که مضرب ۲۵ هستند، ۲۵ و ۷۵ می‌باشد.

الف) $(a\ ,\ ۷۵) = ۷۵ \Rightarrow ۷۵\,|\,a \Rightarrow [a\ ,\ ۷۵] = a$

$$\Rightarrow [a\ ,\ ۷۵] = ۳(a\ ,\ ۷۵) \Rightarrow a = ۳\times ۷۵ = ۲۲۵$$

ب) $(a\ ,\ ۷۵) = ۲۵ \Rightarrow [a\ ,\ ۷۵] = ۳(a\ ,\ ۷۵) = ۷۵ \Rightarrow a\,|\,۷۵$

$$\Rightarrow (a\ ,\ ۷۵) = a \Rightarrow a = ۲۵$$

پس ۲۵ یا $a = ۲۲۵$ و مجموع مقادیر قابل قبول ۲۵۰ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۳)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(سوکند روشنی)*

$$a^۲ + ab + b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow \frac{a^۲}{۴} + \frac{۳a^۲}{۴} + ab + b^۲ \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (\frac{a}{۲} + b)^۲ + \frac{۳a^۲}{۴} \geq ۰ \quad \text{بدیهی}$$

$$\begin{cases} m = ۲ \\ n = ۳ \end{cases} \Rightarrow m + n = ۵$$

(ریاضیات گسسته- مشابه مثال صفحهٔ ۷)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(سوکند روشنی)*

$$(n-۲)(n+۲)\,|\,(n+۳)(n-۲) \qquad (*)$$

$$+(n-۲) \xrightarrow{n\neq ۲} \begin{matrix} n+۲\,|\,n+۳ \\ \underline{n+۲\,|\,n+۲} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow n+۲\,|\,۱ \Rightarrow \begin{cases} n+۲ = ۱ \Rightarrow n = -۱ & \text{غ ق ق} \\ n+۲ = -۱ \Rightarrow n = -۳ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

رابطهٔ عاد کردن (*) به ازای $n = ۲$ به صورت $۰\,|\,۰$ تبدیل می‌شود که قابل قبول است و تنها $n = ۲$ جواب سؤال است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

بررسی موارد:

الف) درست

$$k = (۲n+۱)(۲n+۳) \Rightarrow k+۱ = (۲n+۱)(۲n+۳)+۱$$

$$= ۴n^۲ + ۸n + ۴ = (۲n+۲)^۲$$

ب) نادرست؛ حکم بیان شده نادرست است، مثلاً مجموع دو عدد $\sqrt{۲}$ و $۲-\sqrt{۲}$ عددی گویا است، پس نمی‌توان چنین حکمی را از طریق برهان خلف اثبات کرد.

پ) نادرست؛ مثلاً مجموع اعداد $۴+۳+۲+۱$ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳ تا ۶)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

$$xy + ۳y - x^۲ + x = ۱ \Rightarrow y(x+۳) = x^۲ - x + ۱$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^۲ - x + ۱}{x+۳} \Rightarrow x+۳\,|\,x^۲ - x + ۱$$

$$\Rightarrow x+۳\,|\,x^۲ - x + ۱ - x(x+۳)$$

$$\Rightarrow x+۳\,|\,-۴x+۱ \Rightarrow x+۳\,|\,-۴x+۱+۴(x+۳)$$

$$\Rightarrow x+۳\,|\,۱۳ \Rightarrow x+۳ = \pm ۱\ ,\ \pm ۱۳$$

به ازای مقادیر ۲- و ۱۰ به جای x مقدار ماکزیمم $y = ۷$ به دست می‌آید.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا شریف‌طیبی)*

عوامل سازندهٔ ۱۰ اعداد ۲ و ۵ هستند و عدد ۲۰ به صورت $۲۰ = ۲^۲ \times ۵$ تجزیه می‌شود. a نباید عامل $۲^۲$ یا ۴ داشته باشد چون ب.م.م آن با عدد ۲۰ دیگر مقسوم‌علیه ۱۰ نخواهد شد. پس $a \neq ۴q$؛ تعداد مضارب ۴ در اعداد ۱ تا ۲۰۰ مساوی $۵۰ = [\frac{۲۰۰}{۴}]$ است، پس تعداد اعداد پذیرفته $۲۰۰ - ۵۰ = ۱۵۰$ می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا شریف‌طبیی)*

$$(a+1,\ 7a-4)=d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 7a-4 \\ d \mid a+1 \xrightarrow{\times 7} d \mid 7a+7 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 11$$

$$\begin{cases} d=1 \\ d=11 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

طبق اصل متمم ابتدا حالت‌هایی که ب.م. م برابر ۱۱ می‌شود را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow 11 \mid a+1 \Rightarrow a+1=11k \Rightarrow a=11k-1$$

$$10 \le 11k-1 \le 99 \Rightarrow \frac{11}{11} \le k \le \frac{100}{11} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 \le k \le 9$$

به ازای ۹ مقدار دو رقمی a، دو عبارت مذکور، نسبت به هم اول نیستند، پس به ازای $81=9-90$ عدد دو رقمی این دو عبارت نسبت به هم اول‌اند.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

بررسی موارد:

الف) درست؛ با برهان خلف ثابت می‌شود که معکوس عدد گنگ، گنگ است. پس اگر x گنگ باشد $\frac{1}{x}$ نیز گنگ و اگر $\frac{1}{x}$ گنگ باشد معکوس آن یعنی x نیز گنگ است.

ب) نادرست؛ مثلاً $-2<-1$ درست است ولی $(-2)^2>(-1)^2$ نادرست است. پس از درستی $a>b$ نمی‌توانیم به درستی $a^2>b^2$ برسیم و این ترکیب دوشرطی نادرست است.

پ) درست؛ با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت می‌شود اگر a عددی مثبت باشد $a+\frac{1}{a} \ge 2$ است:

$$a+\frac{1}{a} \ge 2 \xrightarrow{\times a} a^2+1 \ge 2a \Leftrightarrow a^2-2a+1 \ge 0 \Leftrightarrow \underbrace{(a-1)^2 \ge 0}_{\text{همواره درست}}$$

اما عکس این رابطه هم درست است. چون اگر $a+\frac{1}{a} \ge 2$ درست باشد، $a>0$ باید باشد و a منفی یا صفر نمی‌تواند باشد پس این ترکیب دو شرطی درست است.

ت) درست؛ اگر ضرب دو عبارت صفر باشد یا اولی صفر است یا دومی. عکس مطلب هم درست است. اگر حداقل یکی از a یا b صفر باشد، $ab=0$ است. پس این ترکیب هم درست است.

بنابراین فقط یکی از ترکیب‌های دو شرطی نادرست است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲ تا ۸)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

گام اول: با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$x^2+y^2=2xy \Rightarrow x^2+y^2-2xy=0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2=0 \Rightarrow x=y$$

گام دوم: باید دید تساوی $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ چه زمانی برقرار می‌شود.

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{ab} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} (b+a)^2=ab$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab=ab \Rightarrow a^2+b^2+ab=0$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2ab=0 \Rightarrow a^2+a^2+b^2+b^2+2ab=0$$

$$\Rightarrow (a+b)^2+a^2+b^2=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

اما طبق فرض هیچ کدام از عددهای a، b و $a+b$ صفر نیستند. پس چنین زوج مرتبی وجود ندارد.

(ریاضیات گسسته- مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۸)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن داریم:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \mid 3k+1 \xrightarrow{\times 4} 16 \mid 12k+4 \\ 4 \mid 3k+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 16 \mid 9k^2+6k+1 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع}} 16 \mid 9k^2+18k+5$$

از طرفی $16 \mid 16k$، پس می‌توان نوشت:

$$16 \mid (9k^2+18k+5)-16k \Rightarrow 16 \mid 9k^2+2k+5$$

که طبق گزینه‌ها، عدد $m=2$ قابل قبول است.

توجه: به عنوان تمرین نشان دهید که در حالت کلی $m=16q+2$ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

ریاضیات گسسته

۱- **گزینهٔ «۲»** *(اسحاق اسفندیار)*

$$a=۵q+۲\Rightarrow ۱۱a=۵۵q+۲۲ \quad (۱)$$

$$a=۱۱q'+۶\Rightarrow ۵a=۵۵q'+۳۰\xrightarrow{\times ۲}۱۰a=۵۵(۲q')+۶۰ \quad (۲)$$

اگر تفاضل رابطهٔ (۱) و (۲) را بنویسیم، داریم:

$$a=۵۵(q-۲q')-۳۸\Rightarrow a=۵۵(q-۲q')-۱\times ۵۵+۱۷$$

$$a=۵۵(q-۲q'-۱)+۱۷\Rightarrow r=۱۷$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

(مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۱۶)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(آرین تفضلی‌زاده)*

راه‌حل اول: توانی از ۷ را طوری می‌یابیم که به پیمانهٔ ۱۵ با اعداد ۱ یا ۱- همنهشت شود:

$$۷^۲=۴۹\overset{۱۵}{\equiv}۴\xrightarrow{\text{به توان }۲}۷^۴\overset{۱۵}{\equiv}۱۶\overset{۱۵}{\equiv}۱$$

در نتیجه:

$$۷^{۱۰۰}=(۷^۴)^{۲۵}\overset{۱۵}{\equiv}۱^{۲۵}=۱$$

راه‌حل دوم: می‌دانیم اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $a\overset{n}{\equiv}b$ آن‌گاه $a\overset{[m,n]}{\equiv}b$.

$$\begin{cases}۷\overset{۳}{\equiv}۱\Rightarrow ۷^{۱۰۰}\overset{۳}{\equiv}۱^{۱۰۰}\overset{۳}{\equiv}۱\\ ۷^۲\overset{۵}{\equiv}-۱\Rightarrow ۷^{۱۰۰}\overset{۵}{\equiv}(-۱)^{۵۰}\overset{۵}{\equiv}۱\end{cases}\xrightarrow{[۳,۵]=۱۵}۷^{۱۰۰}\overset{۱۵}{\equiv}۱$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

(مشابه مثال صفحهٔ ۲۱)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(رضا توکلی)*

$$m\mid ۳a+m+۲\Rightarrow ۳a+m+۲\overset{m}{\equiv}۰\xrightarrow{m\overset{m}{\equiv}۰}۳a\overset{m}{\equiv}-۲$$

$$a^۲-۱\overset{m}{\equiv}a(۲a-۱)\Rightarrow a^۲-۱\overset{m}{\equiv}۲a^۲-a$$

$$\Rightarrow a^۲-a+۱\overset{m}{\equiv}۰\xrightarrow{\times(a+۱)}(a+۱)(a^۲-a+۱)\overset{m}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow a^۳+۱\overset{m}{\equiv}۰\Rightarrow a^۳\overset{m}{\equiv}-۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳a\overset{m}{\equiv}-۲\xrightarrow{\text{توان }۳}۲۷a^۳\overset{m}{\equiv}-۸\\ a^۳\overset{m}{\equiv}-۱\xrightarrow{\times ۲۷}۲۷a^۳\overset{m}{\equiv}-۲۷\end{cases}$$

$$\Rightarrow -۲۷\overset{m}{\equiv}-۸\Rightarrow ۱۹\overset{m}{\equiv}۰\Rightarrow m\mid ۱۹\xrightarrow{m\neq ۱}m=۱۹$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام}=۱+۹=۱۰$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

می‌دانیم $(n-۱)n(n+۱)$ حاصل‌ضرب سه عدد متوالی است و دقیقاً یکی از آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیر است. حال کافی است n را با عدد ۴ افراز کنیم تا حالت‌هایی که عبارت داده شده بر ۴ بخش‌پذیر است را مشخص کنیم.

(۱) $n=۴k\rightarrow (۴k-۱)\underline{\underline{۴k}}(۴k+۱)$

(۲) $n=۴k+۱\rightarrow \underline{\underline{۴k}}(۴k+۱)(۴k+۲)$

(۳) $n=۴k+۲\rightarrow (۴k+۱)(۴k+۲)(۴k+۳)$

(۴) $n=۴k+۳\rightarrow (۴k+۲)(۴k+۳)\underline{\underline{(۴k+۴)}}$

همان‌طور که مشخص است اگر $n=۴k+۲$ باشد، عبارت داده شده بر ۱۲ بخش‌پذیر نیست.

$$۱۰\le ۴k+۲\le ۹۹\Rightarrow ۸\le ۴k\le ۹۷\Rightarrow ۲\le k\le ۲۴$$

۲۳ عدد دو رقمی قابل قبول نیست.

$$\Rightarrow ۹۰-۲۳=۶۷$$

در نتیجه ۶۷ عدد دو رقمی در شرایط مسئله صدق می‌کند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

اگر تقسیم را به صورت $a=bq+r$ با شرط $۰\le r<b$ بنویسیم داریم:

$$۱۰۰+b=bq+۷\Rightarrow ۹۳=b(q-۱)$$

از طرفی عدد ۹۳ را می‌توان به صورت ۹۳×۱ یا ۳۱×۳ نوشت، پس دو حالت قابل بررسی است، با توجه به $b>r=۷$ داریم:

$$\begin{cases} ۹۳\times۱ = b(q-۱) \Rightarrow b = ۹۳ \ , \ q = ۲ \\ ۳۱\times۳ = b(q-۱) \Rightarrow b = ۳۱ \ , \ q = ۴ \end{cases}$$

بنابراین خارج قسمت عدد ۲ یا ۴ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

دو عدد با رقم یکان‌های برابر به پیمانهٔ ۱۰ هم‌نهشت هستند، پس:

$$۵a+۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۲a-۵ \Rightarrow ۳a \overset{۱۰}{\equiv} -۹ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} -۳ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۱۷$$

پس کوچک‌ترین مقدار دو رقمی a برابر ۱۷ است:

$$a^{۱۴۰۴} \overset{۴}{\equiv} ۱۷^{۱۴۰۴} \overset{۴}{\equiv} ۱^{۱۴۰۴} \overset{۴}{\equiv} ۱$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

(مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۲۹)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌طیبی)*

نکته: اعداد اول بزرگ‌تر از ۲ همگی فردند. پس P و $P^{۱۷}$ عددی فرد هستند و می‌دانیم $۱۷!$ عددی زوج است. پس $P^{۱۷}+۱۷!$ عددی فرد است و چون a مقسوم‌علیه عددی فرد است پس a نیز فرد است.

نکته: مربع هر عدد فرد به شکل $۸k+۱$ نوشته می‌شود. پس:

$$a^{۱۸}+P^{۱۸} = \underbrace{(a^۹)^۲}_{\text{فرد}} + \underbrace{(P^۹)^۲}_{\text{فرد}} = ۸k+۱+۸k'+۱$$

$$= ۸\underbrace{(k+k')}_{q}+۲ \Rightarrow r = ۲$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا شریف‌طیبی)*

$$۷^۳ = ۳۴۳ \overset{۴۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۴۳}{\equiv} -۱$$

$$۴۳ \mid ۷^{۱۰۰}+a \Rightarrow ۷^{۱۰۰}+a \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow (۷^۳)^{۳۳}\times۷+a \overset{۴۳}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow (-۱)^{۳۳}\times۷+a \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow -۷+a \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a = ۴۳k+۷$$

$$\xrightarrow{k=۳} a = ۱۲۹+۷ = ۱۳۶$$

پس رقم دهگان برابر ۳ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(عزیزاله علی‌اصغری)*

در این‌گونه سوالات همانند دو معادله دو مجهول رفتار می‌کنیم. یعنی با یکسان کردن ضرایب یک مجهول در هر دو رابطه، آن را حذف کرده و مجهول دیگر را می‌یابیم:

$$\begin{cases} ۴x+۳y \overset{۹}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times۳} ۱۲x+۹y \overset{۹}{\equiv} ۶ \\ ۳x+۲y \overset{۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times۴} ۱۲x+۸y \overset{۹}{\equiv} ۴ \end{cases} \xrightarrow{(-)}$$

$$(۱۲x+۹y)-(۱۲x+۸y) \overset{۹}{\equiv} ۶-۴ \Rightarrow y \overset{۹}{\equiv} ۲ \Rightarrow y = ۹k+۲$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را به یکی از دو صورت $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ می‌توان نوشت، بنابراین داریم:

۱) $P = ۶k+۱ \Rightarrow ۲P+۳ = ۲(۶k+۱)+۳ = ۱۲k+۵ \Rightarrow r_۱ = ۵$

۲) $P = ۶k+۵ \Rightarrow ۲P+۳ = ۲(۶k+۵)+۳ = ۱۲k+\underbrace{۱۳}_{۱۲+۱}$

$$= ۱۲k'+۱ \Rightarrow r_۲ = ۱$$

از طرفی به ازای دو عدد اول ۲ و ۳ داریم:

۳) $P = ۲ \Rightarrow ۲P+۳ = ۲(۲)+۳ = ۷ \Rightarrow r_۳ = ۷$

۴) $P = ۳ \Rightarrow ۲P+۳ = ۲(۳)+۳ = ۹ \Rightarrow r_۴ = ۹$

بنابراین در مجموع ۴ مقدار متمایز از مجموعهٔ $\{۱,۵,۷,۹\}$ برای باقی‌مانده در تقسیم عدد $۲P+۳$ بر ۱۲ وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

ریاضیات گسسته

۱- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

وقتی باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر m یکسان باشند، آنگاه داریم $a \overset{m}{\equiv} b$. بنابراین طبق فرض داریم:

$$5x-1 \overset{11}{\equiv} 2x+3 \quad , \quad 7x-3 \overset{5}{\equiv} 4x+1$$

$$5x-1 \overset{11}{\equiv} 2x+3 \Rightarrow 3x \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow 3x \overset{11}{\equiv} 4+1\times 11=15$$

$$\xrightarrow[(3,11)=1]{+3} x \overset{11}{\equiv} 5$$

$$7x-3 \overset{5}{\equiv} 4x+1 \Rightarrow 3x \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow 3x \overset{5}{\equiv} 4+1\times 5=9$$

$$\xrightarrow[(3,5)=1]{+3} x \overset{5}{\equiv} 3$$

$$\begin{cases} x \overset{11}{\equiv} 5 \xrightarrow{\times 5} 5x \overset{55}{\equiv} 25 \\ x \overset{5}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 11} 11x \overset{55}{\equiv} 33 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 11x-5x \overset{55}{\equiv} 33-25$$

$$\Rightarrow 6x \overset{55}{\equiv} 8 \Rightarrow \begin{cases} 6x \overset{55}{\equiv} 8 \\ 5x \overset{55}{\equiv} 25 \end{cases} \Rightarrow 6x-5x \overset{55}{\equiv} 8-25$$

$$\Rightarrow x \overset{55}{\equiv} -17 \overset{55}{\equiv} 38$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم x بر ۵۵ برابر ۳۸ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی دیداری)*

می‌دانیم $11\times 3 = 33$، پس عدد داده شده بر ۳ و ۱۱ بخش‌پذیر است و داریم:

$$\overline{3a1b1} \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow 3+a+1+b+1 \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow a+b \overset{3}{\equiv} -5 \overset{3}{\equiv} 1$$

$$\overline{3a1b1} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 1-b+1-a+3 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a+b \overset{11}{\equiv} 5$$

سعی می‌کنیم سمت راست دو رابطهٔ هم‌نهشتی را یکسان کنیم تا بتوانیم پیمانه را به ک. م. م پیمانه‌ها تغییر دهیم:

$$\begin{cases} a+b \overset{3}{\equiv} 1 \overset{3}{\equiv} 16 \\ a+b \overset{11}{\equiv} 5 \overset{11}{\equiv} 16 \end{cases} \xrightarrow{[3,11]=33} a+b \overset{33}{\equiv} 16 \Rightarrow a+b \in [16]_{33}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(ایمان ساریفانی)*

عددی بر ۴۴ بخش‌پذیر است که هم مضرب ۴ و هم مضرب ۱۱ باشد.

می‌دانیم عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم آخر آن مضرب ۴ باشد

پس:

$$\overline{7b} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow b = 2, 6$$

از طرفی عدد مورد نظر مضرب ۱۱ است، پس:

$$b-7+a-5+4 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b+a \overset{11}{\equiv} 8$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{b=2} 2+a \overset{11}{\equiv} 8 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 6 \Rightarrow a=6 \\ \xrightarrow{b=6} 6+a \overset{11}{\equiv} 8 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow a=2 \end{cases}$$

بنابراین مقدار بزرگ‌تر a، عدد ۶ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق فرض $A \overset{99}{\equiv} 51$ است، بنابراین:

$$1)\ A=\overline{7x32y9} \overset{9}{\equiv} 51 \Rightarrow 9+y+2+3+x+7 \overset{9}{\equiv} 51$$

$$\Rightarrow x+y\overset{9}{\equiv}3 \xrightarrow{0\le x,\,y\le 9} x+y=3 \text{ یا } 12$$

۲) $A=\overline{7x32y9}\overset{11}{\equiv}51 \Rightarrow 9-y+2-3+x-7\overset{11}{\equiv}1-5$

$$\Rightarrow x-y\overset{11}{\equiv}6 \qquad (1)$$

با توجه به محدودهٔ ارقام x و y بدیهی است که $-9\le x-y\le 9$ می‌باشد.

پس با توجه به رابطهٔ (۱)، $x-y=6$ و $x-y=-5$ قابل قبول هستند.

پس باید چهار دستگاه دو معادله و دو مجهول حل کنیم.

$$I:\begin{cases}x+y=3\\x-y=6\end{cases}\Rightarrow x=\frac{9}{2} \quad \text{غ ق ق}$$

$$II:\begin{cases}x+y=12\\x-y=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9\\y=3\end{cases}$$

$$III:\begin{cases}x+y=3\\x-y=-5\end{cases}\Rightarrow x=-1 \quad \text{غ ق ق}$$

$$IV:\begin{cases}x+y=12\\x-y=-5\end{cases}\Rightarrow x=\frac{7}{2} \quad \text{غ ق ق}$$

بنابراین $x=9$ و $y=3$ و در نتیجه $xy=27$ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد ۱۴۰۴ و ۲۰۲۵ بر ۱۱ را تعیین می‌کنیم:

$$(4-0+4-1)x\overset{11}{\equiv}5-2+0-2 \Rightarrow 7x\overset{11}{\equiv}1$$

$$\Rightarrow 7x\overset{11}{\equiv}1+5\times 11\overset{11}{\equiv}56 \xrightarrow[(7,11)=1]{\div 7} x\overset{11}{\equiv}8$$

$$\Rightarrow x\overset{11}{\equiv}8-11\overset{11}{\equiv}-3 \Rightarrow x=11k-3$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۳ و ۲۵)

(مشابه امتحان نهایی- شهریور ۱۴۰۲)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(رضا توکلی)*

می‌دانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ برابر است، پس برای این‌که پاسخ علی درست باشد، باید:

$$\overline{abcd}\overset{9}{\equiv}a+b+c+d\overset{9}{\equiv}d-c+b-a \Rightarrow a+c\overset{9}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccccccccc} a & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 \\ \hline c & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 9 \end{array}$$

پس برای a و c ده حالت داریم. از طرفی تعداد اعداد چهار رقمی که با توجه به اشتباه علی جواب درست به دست می‌آید، به روش زیر محاسبه می‌شود:

تعداد حالت شانسی درست $\quad \overline{abcd} \Rightarrow \overline{\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}d}$ $\quad 10\times 10\times 10$

تعداد کل حالات $\quad \overline{\underset{\downarrow}{a}\ \underset{\downarrow}{b}\ \underset{\downarrow}{c}\ \underset{\downarrow}{d}}$ $\quad \underset{9}{\downarrow}\times\underset{10}{\downarrow}\times\underset{10}{\downarrow}\times\underset{10}{\downarrow}$

و احتمال مطلوب برابر $\frac{10\times 10\times 10}{9\times 10\times 10\times 10}=\frac{1}{9}$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌طبیی)*

اگر فرض کنیم روز یکشنبه روز صفر است، داریم:

یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

باید ببینیم که ۱۲ بهمن، چند روز بعد از ۲ مهر است و قرینهٔ آن عدد را به پیمانهٔ هفت می‌بریم:

$$-((۳۰-۲)+\underbrace{۳۰+۳۰+۳۰+}_{\text{مهر}}\ ۱۲\ \text{بهمن}\ \text{دی}\ \text{آذر}\ \text{آبان})\overset{۷}{\equiv}-۱۳۰\overset{۷}{\equiv}-۴\overset{۷}{\equiv}۳$$

مطابق جدول قبل روز سوم همان چهارشنبه است یعنی دوم مهرماه روز چهارشنبه بوده است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۲۴)

(مشابه فعالیت صفحهٔ ۲۴ کتاب درسی)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(عزیزاله علی‌اصغری)*

$$۳x\overset{۷}{\equiv}m\xrightarrow{x=۷k+۲}۳(۷k+۲)\overset{۷}{\equiv}m\Rightarrow ۳(۲)\overset{۷}{\equiv}m$$

$$\Rightarrow m\overset{۷}{\equiv}۶\overset{۷}{\equiv}-۱$$

حال داریم:

$$m^m+۱\overset{۷}{\equiv}(-۱)^m+۱$$

اگر m فرد باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر صفر و اگر m زوج باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر ۲ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۲۵)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(ایمان ساریفانی)*

شرط این‌که معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ در $\mathbb{Z}$ جواب داشته باشد، این است که $(a,m)\mid b$، پس:

$$(۳۶,۴۸)\mid ۵m-۱\Rightarrow ۱۲\mid ۵m-۱\Rightarrow ۵m-۱\overset{۱۲}{\equiv}۰\Rightarrow ۵m\overset{۱۲}{\equiv}۱$$

$$\xrightarrow{+۲\times ۱۲}۵m\overset{۱۲}{\equiv}۲۵\xrightarrow[(۵,۱۲)=۱]{+۵}m\overset{۱۲}{\equiv}۵\Rightarrow m=۱۲k+۵$$

اگر $k=۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷$ مقدار m دو رقمی است و در نتیجه ۷ مقدار برای m وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۲۵)

(مشابه مثال صفحهٔ ۲۵ کتاب درسی)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

شرط وجود جواب معادلهٔ هم‌نهشتی داده شده در آن است که:

$$(۵n-۲\ ,\ ۱۲n+۷)\mid ۲۵$$

با فرض $d=(۵n-۲\ ,\ ۱۲n+۷)$ داریم:

$$\begin{cases}d\mid ۵n-۲\xrightarrow{\times ۱۲}d\mid ۶۰n-۲۴\\ d\mid ۱۲n+۷\xrightarrow{\times ۵}d\mid ۶۰n+۳۵\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}}d\mid ۵۹\Rightarrow d=۱\ \text{یا}\ ۵۹$$

واضح است که $d=۵۹$ قابل قبول نیست و فقط $d=۱$ می‌تواند باشد. با فرض $d=۵۹$ داریم:

$$۵۹\mid ۵n-۲\Rightarrow ۵n-۲\overset{۵۹}{\equiv}۰\Rightarrow ۵n\overset{۵۹}{\equiv}۲+۲\times ۵۹=۱۲۰$$

$$\xrightarrow[(۵\ ,\ ۵۹)=۱]{\div ۵}n\overset{۵۹}{\equiv}۲۴\Rightarrow n=۵۹t+۲۴$$

تعداد اعداد سه رقمی n که $d=۵۹$ باشد، برابر است با:

$$۱۰۰\le ۵۹t+۲۴<۱۰۰۰\Rightarrow ۷۶\le ۵۹t<۹۷۶$$

$$\Rightarrow ۲\le t\le ۱۶\qquad (۱۵\ \text{مقدار})$$

پس ۱۵ مقدار سه رقمی n قابل قبول نیست و تعداد اعداد مورد نظر برای n برابر است با:

$$۹۰۰-۱۵=۸۸۵$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۲۵)

ریاضیات گسسته

۱- **گزینهٔ «۳»** *(رسول حاجی‌زاده)*

با فرض $n \in \mathbb{N}$، عدد $4n+1$ مربع کامل است اگر و تنها اگر n به صورت حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد (مانند ۱۱۰، ۱۳۲، ۱۵۶، ...) (چرا؟)

$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج است اگر و تنها اگر n به یکی از دو فرم $4k$ یا $4k+3$ باشد. (چرا؟)

اولین عدد طبیعی سه رقمی که هر دو خواسته را برآورده کند، عدد ۱۳۲ است. پس $t=132$ که مجموع ارقام آن برابر ۶ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۳ تا ۵)

(مشابه کار در کلاس صفحه‌های ۳ و ۵)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

می‌دانیم اگر $a \mid b$ آنگاه $[a,b]=|b|$ و $(a,b)=|a|$ پس:

$$[m^2,1]=(3m,6m^2) \Rightarrow m^2=|3m| \Rightarrow m=0 \text{ یا } m=\pm 3$$

با توجه به فرض، فقط $m=3$ قابل قبول است و داریم:

$$3^{1404} \overset{4}{\equiv} (-1)^{1404} \overset{4}{\equiv} 1$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۸ تا ۲۲)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

چون $341=11\times 31$، اگر 2^n-1 بر ۳۴۱ بخش‌پذیر باشد، آنگاه:

$$341 \mid 2^n-1 \Rightarrow 2^n \overset{341}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^n \overset{11\times 31}{\equiv} 1$$

از طرفی:

$$2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32$$

$$\begin{cases} 2^5 \overset{11}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 2^{10} \overset{11}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } k} 2^{10k} \overset{11}{\equiv} 1 \\ 2^5 \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 2^{10} \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } k} 2^{10k} \overset{31}{\equiv} 1 \end{cases}$$

نتیجه‌گیری کلی: به ازای nهای مضرب ۱۰، عدد 2^n-1 مضرب 11×31 است، بنابراین باید $n=10k$ باشد. پس:

$$10k<500 \Rightarrow k<50 \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} k=1,2,3,\ldots,49$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(رسول حاجی‌زاده)*

راه‌حل اول: ب. م. م دو عدد ۷۲ و ۴۵ برابر ۹ است. بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a در هر دو تقسیم صورت سوال باید با هم هماهنگی داشته باشند:

$$a \overset{72}{\equiv} 29 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} 29 \overset{9}{\equiv} 2 \Rightarrow 7a \overset{9}{\equiv} 14 \overset{9}{\equiv} 5$$

در بین گزینه‌ها فقط ۱۴ در تقسیم بر ۹ باقی‌ماندهٔ ۵ دارد.

راه‌حل دوم:

$$a \overset{72}{\equiv} 29 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} 29 \overset{9}{\equiv} 2 \Rightarrow 7a \overset{9}{\equiv} 14 \overset{9}{\equiv} 5$$

$$\Rightarrow 7a=9k+5$$

بسته به این که k به فرم $5q$، $5q+1$، $5q+2$، $5q+3$ و یا $5q+4$ باشد عدد $7a$ به یکی از پنج فرم $45q+5$، $45q+14$، $45q+23$، $45q+32$، $45q+41$ خواهد شد که فقط $45q+14$ در گزینه‌ها آمده است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی شاهرخی)*

داریم:

$$1000=13\times 76+12 \Rightarrow 1000 \overset{13}{\equiv} 12 \overset{13}{\equiv} -1$$

$$\Rightarrow (1000)^{1001} \overset{13}{\equiv} -1 \Rightarrow (1000)^{1001}\times 14 \overset{13}{\equiv} -14$$

$$\Rightarrow (1000)^{1001}\times 14+10 \overset{13}{\equiv} -4 \overset{13}{\equiv} 9$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

(مشابه مثال صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی دیداری)*

به بیان هم‌نهشتی داریم:

$$\begin{cases} 2a \overset{7}{\equiv} 4 \xrightarrow{+2} a \overset{7}{\equiv} 2 \overset{7}{\equiv} -5 \\ a-3 \overset{11}{\equiv} 3 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 6 \overset{11}{\equiv} -5 \end{cases}$$

چون $77=[7,11]$، پس:

$$a\overset{77}{\equiv}-5\Rightarrow a^{2}\overset{77}{\equiv}25$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی دیداری)*

عدد $x=\overline{abc}$ را در نظر می‌گیریم. چون دهگان برابر ۷ است، پس:

$$x=\overline{a7c}=100a+70+c$$

طبق فرض داریم:

$$3x\overset{20}{\equiv}19\overset{20}{\equiv}39\xrightarrow[(3,20)=1]{+3}x\overset{20}{\equiv}13$$

$$\Rightarrow 100a+70+c\overset{20}{\equiv}13\Rightarrow 10+c\overset{20}{\equiv}13\Rightarrow c\overset{20}{\equiv}3$$

چون $1\le c\le 9$ است، تنها $c=3$ قابل قبول است که عددی اول می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(بابک نهرینی)*

اگر x وزنهٔ ۴ کیلویی و y وزنهٔ ۵ کیلویی استفاده کنیم آنگاه باید تساوی مقابل برقرار باشد:

$$4x+5y=34$$

ابتدا شرط وجود جواب را بررسی می‌کنیم، $(4,5)\mid 34$، که برقرار است.

حال تساوی فوق را تبدیل به یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌کنیم که پیمانهٔ آن یکی از ضرایب x و y است (ترجیحاً پیمانه را ضریب بزرگ‌تر در نظر می‌گیریم)، پس خواهیم داشت:

$$4x+5y\overset{5}{\equiv}34\Rightarrow 4x\overset{5}{\equiv}4$$

حال طرفین را بر ۴ تقسیم می‌کنیم و با توجه به این‌که $(4,5)=1$ است

پیمانه تغییری نمی‌کند:

$$x\overset{5}{\equiv}1\Rightarrow x=5k+1\quad,\quad k\in\mathbb{Z}$$

حال x را از رابطهٔ بالا در تساوی اصلی قرار می‌دهیم:

$$4x+5y=34\Rightarrow 4(5k+1)+5y=34\Rightarrow 20k+4+5y=34$$

$$\Rightarrow y=-4k+6\quad,\quad k\in\mathbb{Z}$$

با توجه به صورت سوال باید $x,y\ge 0$ باشند:

$$\begin{cases}x=5k+1\ge 0\Rightarrow k\ge -\frac{1}{5}\\ y=-4k+6\ge 0\Rightarrow k\le \frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{5}\le k\le \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=0,1$$

بنابراین ۲ حالت داریم.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

(مشابه تمرین ۱۸ صفحهٔ ۳۰)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(روح‌اله مسنی)*

طبق فرض داریم:

$$23x+11y=216\Rightarrow 23x\overset{11}{\equiv}216$$

$$\Rightarrow 23x\overset{11}{\equiv}x\overset{11}{\equiv}216\overset{11}{\equiv}7\Rightarrow x=11k+7$$

اکنون در معادلهٔ سیاله $x=11k+7$ را جای‌گذاری می‌کنیم. پس:

$$23(11k+7)+11y=216\Rightarrow 23\times 11k+161+11y=216$$

$$\Rightarrow 11y=-23\times 11k+55\xrightarrow{+11}y=-23k+5$$

بنابراین:

$$x+y=(11k+7)+(-23k+5)$$

$$=-12k+12=12(-k+1)=12k'$$

پس $x+y$ مضرب ۱۲ است. بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۱۲ برابر است با:

$$x+y=996=12\times 83$$

اکنون چون $996=17\times 58+10$ لذا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۹۹۶ بر ۱۷ برابر ۱۰ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(اسحاق اسفندیار)*

معادلهٔ $m^{2}x+12y=20$ زمانی جواب دارد که $(m^{2},12)\mid 20$؛ اگر m مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $(9k,12)\nmid 20$. بنابراین اگر m مضرب ۳ باشد مسئله فاقد جواب است. در غیر این صورت $(m^{2},12)$ یا برابر ۱ یا برابر ۴ است که ۲۰ را عاد می‌کند. بنابراین اعداد مضرب ۳ را از کل مجموعهٔ فوق حذف می‌کنیم:

تعداد اعداد مضرب ۳: $[\frac{100}{3}]=33\Rightarrow 100-33=67$

$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر}=\frac{67}{100}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

آزمون ۲۵ مهر ۱۴۰۴

گسسته

۱ کدام گزاره فاقد مثال نقض است؟

۱) حاصل‌ضرب یک عدد گویا در معکوس یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) اگر عدد k برابر با حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $\sqrt{4k+1} \in \mathbb{N}$.

۳) اگر برای سه مجموعهٔ A، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$؛ آن‌گاه $B = C$.

۴) میانگین ۵ عدد فرد برابر با عدد وسطی است.

مشاوره درس اول نظریهٔ اعداد در مورد روش‌های استدلال است. خط‌به‌خط کتاب درسی در این قسمت خیلی‌خیلی مهم است و بیشتر تست‌های این درس مشابه تمرین‌های کتاب هستند. درست است که تا به حال از این درس سؤالی در کنکور نیامده است، اما در امتحان نهایی بارم خوبی دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint فاقد مثال نقض است، یعنی درست است.

درس Box **بخش‌پذیری‌های مهم کتاب درسی:**

ردیف	فارسی	ریاضی
۱	ضرب دو عدد صحیح متوالی، زوج است.	$n(n+1) = 2q$
۲	ضرب سه عدد صحیح متوالی، مضرب ۶ است.	$n(n+1)(n+2) = 6q$ یا $n(n-1)(n+1) = n^3 - n = 6q$
۳	ضرب n عدد صحیح متوالی، بر $n!$ بخش‌پذیر است.	—
۴	مربع هر عدد فرد، در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر یک دارد.	$n = 2k+1 \rightarrow n^2 = 8q+1$
۵	اگر k ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، $4k+1$ مربع کامل است.	$k = n(n+1) \rightarrow 4k+1 = (2n+1)^2$

پاسخ خیلی تشریحی گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): نادرست است؛ برای مثال نقض کافی است عدد گویا را برابر صفر و عدد گنگ را برابر $\sqrt{2}$ بگیریم، پس داریم:

$$0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{گویا}$$

گزینهٔ (۲): درست است؛ اگر k را به صورت ضرب دو عدد طبیعی متوالی، یعنی $n(n+1)$ بگیریم.

$$k = n(n+1) \rightarrow 4k+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

$$\sqrt{4k+1} = \sqrt{(2n+1)^2} = 2n+1 \in \mathbb{N}$$

گزینهٔ (۳): نادرست است؛ کافی است ۳ مجموعهٔ A، B و C را طوری مثال بزنیم که رابطهٔ $A \cup B = A \cup C$ درست باشد، ولی $B \neq C$. مثلاً:

$$A = \{1,2\} \quad , \quad B = \{1\} \quad , \quad C = \{2\}$$

گزینهٔ (۴): نادرست است؛ کافی است ۵ عدد فرد ۱۱ و ۹ و ۷ و ۳ و ۱ را مثال بزنیم که میانگین آن‌ها برابر با عدد وسطی نیست.

حواست باشه: میانگین ۵ عدد صحیح متوالی برابر با عدد وسط است.

۲ مجموعهٔ S برابر با اعداد طبیعی یک‌رقمی بوده و $n \in S$. اگر عدد $\frac{n^۲(n^۲+۲n+۱)}{۴}$ زوج باشد، آن‌گاه $n \in A$. مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

مشاوره نکتهٔ کلی این سؤال را حتماً خوب‌خوب یاد بگیرید، چون پای ثابت تمام کنکورهای آزمایشی (یا شاید کنکور) است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

$$\frac{n^۲(n^۲+۲n+۱)}{۴} = (\frac{n(n+۱)}{۲})^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: $S = \{۱,۲,...,۹\}$ است. کافی است ببینیم به ازای کدام اعداد عضو S عبارت $\frac{n^۲(n^۲+۲n+۱)}{۴}$، زوج می‌شود.

گام دوم: داریم $\frac{n^۲(n^۲+۲n+۱)}{۴} = \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴} = (\frac{n(n+۱)}{۲})^۲$. از طرفی اگر توان‌دوم عددی زوج باشد، خود عدد هم باید زوج باشد؛ پس $\frac{n(n+۱)}{۲}$ باید زوج باشد.

گام سوم:

$$\frac{n(n+۱)}{۲} = ۲k \rightarrow n(n+۱) = ۴k$$

گام چهارم: n و $n+۱$ دو عدد متوالی هستند، پس یکی فرد و دیگری زوج است. برای این‌که ضرب آن‌ها مضرب ۴ باشد، یکی از آن‌ها باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد:

$$\begin{cases} n = ۴k \\ \text{یا} \\ n+۱ = ۴k \rightarrow n = ۴k-۱ \end{cases}$$

گام پنجم: اعداد مضرب ۴ (مثل ۴ و ۸) یا اعدادی که یک واحد از مضرب ۴ کم‌تر هستند (مثل ۷ و ۳)، قابل قبول هستند؛ پس عدد n باید متعلق به مجموعهٔ $\{۳,۴,۷,۸\}$ باشد. پس A دارای ۴ عضو است.

حواست باشه: با جست‌وجوی اعداد ۱ تا ۹ هم می‌توانستید بفهمید که چه موقع عبارت زوج می‌شود، ولی بهتر است شکل n را حفظ باشید. پس اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ زوج باشد، $n = ۴k$ یا $n = ۴k-۱$.

۳ α و β دو عدد گنگ و $\alpha+\beta$، عددی گویا است. کدام گزینه در مورد اعداد $\alpha-\beta$ و $\alpha\beta$ به ترتیب درست است؟

۱) گنگ ـ گنگ

۲) گنگ ـ ممکن است گنگ یا گویا باشد.

۳) ممکن است گنگ یا گویا باشد. ـ گنگ

۴) ممکن است گنگ یا گویا باشد. ـ ممکن است گنگ یا گویا باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

مثال‌هایی بزنید که در فرض صدق کنند.

درس Box

اثبات گنگ‌بودن اعداد با برهان خلف صورت می‌گیرد. در کل حالت‌های زیر را برای جمع و تفریق و ضرب اعداد گویا و گنگ داریم:

x^y	xy	$x \pm y$	
ممکن است گنگ یا گویا باشد.	ممکن است گنگ یا گویا باشد. $\begin{cases} 0 \times \text{گنگ} = 0\ (\text{گویا}) \\ \text{گنگ} \times \text{گویای غیرصفر} = \text{گنگ} \end{cases}$	گنگ	y و x یکی گنگ و دیگری گویا
ممکن است گنگ یا گویا باشد.	ممکن است گنگ یا گویا باشد.	ممکن است گنگ یا گویا باشد.	y و x هر دو گنگ

حواست باشه: وارون عدد گنگ، گنگ است و وارون عدد گویای ناصفر نیز گویا است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: سعی می‌کنیم $\alpha-\beta$ را به اعداد داده‌شده ارتباط دهیم:

$$\alpha-\beta=\underbrace{\alpha+\beta}_{\text{گویا}}-\underbrace{2\beta}_{\text{گنگ}}=\text{گنگ}$$

گام دوم: $\alpha\beta$ ممکن است گویا باشد یا گنگ؛ مثلاً اگر $\alpha=\sqrt{2}$ و $\beta=-\sqrt{2}$ بگیریم، $\alpha+\beta$ گویا می‌شود و (گویا) $\alpha\beta=-2$.

اما اگر $\alpha=1+\sqrt{2}$ و $\beta=-\sqrt{2}$ بگیریم، $\alpha+\beta$ گویا می‌شود، ولی $\alpha\beta$ گنگ است:

$$(1+\sqrt{2})(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}-2$$

۴ میانگین اعداد صحیح a_1، a_2 و a_3 با میانگین اعداد صحیح b_1، b_2 و b_3 برابر است. با استفاده از روش ..... می‌توان ثابت کرد که عدد $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ همواره عددی ..... است.

۱) برهان خلف ـ زوج
۲) برهان خلف ـ فرد
۳) اثبات مستقیم ـ زوج
۴) اثبات بازگشتی ـ فرد

مشاوره تمرین مهم کتاب درسی. اثبات و نکات حاشیه‌ای مربوط به آن را به خوبی یاد بگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint عددگذاری کرده و رد گزینه کنید (اما اثبات آن را یاد بگیرید).

درس Box

تمرین مهم کتاب درسی:

تمرین مهمی در کتاب درسی وجود دارد که می‌گوید: «اگر a_1، a_2 و a_3 سه عدد صحیح و b_1، b_2 و b_3 همان اعداد ولی با ترتیب متفاوتی باشند، آن‌گاه $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است».

اثبات با برهان خلف: فرض می‌کنیم $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد؛ پس فرد است. از طرفی می‌دانیم حاصل‌ضرب چند عدد، فقط وقتی فرد می‌شود که تک‌تک آن اعداد فرد باشند، پس (a_1-b_1)، (a_2-b_2) و (a_3-b_3) فرد هستند. جمع سه عدد فرد، فرد است، ولی جمع این ۳ عدد صفر می‌شود؛ چون:

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)=\overbrace{(a_1+a_2+a_3)}^{\text{همون}}-(b_1+b_2+b_3)=0 \text{ (تناقض)}$$

در مورد این تمرین، خوب است نکات زیر را به یاد داشته باشید:

۱) این قضیه برای اعداد $a_1,a_2,\dots,a_n$ و $b_1,b_2,\dots,b_n$ که b_iها همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری هستند نیز برقرار است، به شرطی که n (تعداد اعداد) فرد باشد.

۲) اگر b_i در پرانتزها را جابه‌جا کنیم، باز هم قضیه برقرار است؛ مثلاً عدد $(a_1-b_3)(a_2-b_2)(a_3-b_1)$ نیز زوج است.

۳) $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ (چون فقط ترتیب اعداد فرق دارد؛ پس مجموع اعداد یکسان می‌شود). تناقض حاصل در روش برهان خلف نیز از همین‌جا می‌آید.

۴) تساوی زیر همواره درست است:

$$a_1a_2\dots a_n=b_1b_2\dots b_n$$

۵) اگر k فرد باشد، عبارت $(ka_1-b_1)(ka_2-b_2)\dots(ka_n-b_n)$ نیز زوج است.

۶) عبارت $(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)$ نیز زوج است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از روش برهان خلف می‌توانیم ثابت کنیم که عدد $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$، عددی زوج است.

گام دوم: فرض می‌کنیم عبارت داده‌شده فرد است، پس سه پرانتز موجود فرد است، در نتیجه همگی آن‌ها فرد هستند.

گام سوم: a_1-b_1، a_2-b_2 و a_3-b_3 فرد هستند، پس جمع آن‌ها نیز فرد است.

$$A=a_1-b_1+a_2-b_2+a_3-b_3=(a_1+a_2+a_3)-(b_1+b_2+b_3)$$

گام چهارم: میانگین a_1، a_2 و a_3 با میانگین اعداد b_1، b_2 و b_3 برابر است، پس $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=\frac{b_1+b_2+b_3}{3}$، پس $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$.

گام پنجم: طبق گام سوم، جمع ۳ عدد فرد، فرد است؛ ولی با توجه به گام چهارم $A=0$. تناقض حاصل نشان می‌دهد که خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۵ برای اثبات درستی رابطهٔ $۶x^۲+۵y^۲\geq ۲x+۸yx-۱$ به روش بازگشتی، به کدام نامساوی همواره درست می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^۲+(y-۱)^۲+(۲y-x)^۲\geq ۰$

۲) $(x-۲y)^۲+(x+۱)^۲+(۲y-x)^۲\geq ۰$

۳) $(x-۱)^۲+(x-۲y)^۲+(۲x-y)^۲\geq ۰$

۴) $(x-۱)^۲+(x-۲y)^۲+(۲y-x)^۲\geq ۰$

مشاوره سؤال بسیار مهمی است، مشابه تمرین‌های کتاب و سؤال‌های نهایی. در کنکور ۱۴۰۴ توجه بسیار زیادی به تمرین‌های کتاب درسی شده بود و مطمئن باشید این روند در سال‌های آینده هم تکرار خواهد شد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint $۶x^۲$ و $۵y^۲$ را جوری خرد کنید که چندتا اتحاد مربع دربیاید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف منتقل می‌کنیم:

$$۶x^۲+۵y^۲-۲x-۸yx+۱\geq ۰$$

گام دوم: عبارت‌های $۶x^۲$، $۵y^۲$ و $-۸yx$ را می‌شکنیم تا بتوانیم سه‌تا اتحاد مربع درست کنیم:

$$x^۲+x^۲+۴x^۲+۴y^۲+y^۲-۲x-۴yx-۴yx+۱\geq ۰$$

$$\underbrace{(x-۱)^۲+(x-۲y)^۲+(۲x-y)^۲\geq ۰}_{\text{همواره درست}}$$

۱ **برای اثبات درستی گزارهٔ «حاصل‌ضرب ۳ عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۳ است.»، از کدام هم‌ارزی استفاده می‌کنیم؟**

۱) $(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \Rightarrow r) \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge (p_3 \Rightarrow r)$

۲) $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \Rightarrow r) \equiv (p_1 \Rightarrow r) \vee (p_2 \Rightarrow r) \vee (p_3 \Rightarrow r)$

۳) $p_1 \wedge p_2 \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \vee (p_2 \Rightarrow r)$

۴) $p_1 \vee p_2 \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r)$

مشاوره تفاوت این سؤال با سؤال مشابه دیگر کنکورهای آزمایشی این است که باید دقت کنید که برای اثبات، فرض باید به ۳ جزء تقسیم گردد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

فرض باید به ۳ جزء تقسیم گردد.

درس Box

روش اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها: مسئله را به چند حالت که در ضمن همهٔ حالت‌ها را پوشش دهند، تقسیم می‌کنیم و در هر کدام، ثابت می‌کنیم که حکم نتیجه می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها، اگر فرض را به n جزء $p_1, p_2, \ldots, p_n$ افراز کنیم، از هم‌ارزی زیر استفاده می‌کنیم:

$$p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge \ldots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

گام دوم: برای اثبات حکم داده‌شده، باید فرض را به ۳ جزء زیر افراز کنیم:

$$n = 3k+2,\ n = 3k+1,\ n = 3k$$

و در هر جزء ثابت کنیم که $n(n+1)(n+2)$ عددی مضرب ۳ است.

پس گزینهٔ (۱) درست است.

حواست باشه: اثبات این قضیه با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها، به صورت زیر است:

$$n = 3k \Rightarrow n(n+1)(n+2) = 3\overbrace{k(3k+1)(3k+2)}^{q} = 3q$$

$$n = 3k+1 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)\underbrace{(3k+3)}_{3(k+1)} = 3q$$

$$n = 3k+2 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+2)\underbrace{(3k+3)}_{3(k+1)}(3k+4) = 3q$$

۲ **دو عدد $6k+1$ و $13k+3$ هر دو بر عدد طبیعی $a>1$ بخش‌پذیرند. اگر $p>3$ عددی اول باشد، p به کدام صورت ممکن است باشد؟**

۱) $(a+1)n+2a$

۲) $(a+1)n+a$

۳) $(a+1)n+a-2$

۴) $(a+1)n+a-1$

مشاوره سؤال بسیار خوبی است مشابه کنکور ۱۴۰۴، حتماً آن را تحلیل کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint از ویژگی‌های عادکردن، a را پیدا کنید.

درس Box

شکل اعداد اول

در تقسیم بر ۴	هر عدد اول $p>2$ به یکی از صورت‌های $4k+1$ یا $4k+3$ است.
در تقسیم بر ۶	هر عدد اول $p>3$ به یکی از صورت‌های $6k+1$ یا $6k+5$ است. (تمرین کتاب درسی)
مربع اعداد اول	مربع هر عدد اول $p>3$ به صورت $24k+1$ است، پس در تقسیم بر ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

بررسی یک تیپ مهم عادکردن

اگر دو عبارت $f(k)$ و $g(k)$، هر دو بر a بخش‌پذیر باشند، a هر دو عبارت را عاد می‌کند. سمت راست دو طرف رابطهٔ عادکردن را در اعداد مناسب ضرب کرده و بعد با جمع یا تفریق عبارت‌های سمت راست، کاری می‌کنیم که در سمت راست k حذف شده و یک عدد باقی بماند، تا بتوانیم a را به دست آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اول سعی می‌کنیم a را پیدا کنیم. هر دو عدد $6k+1$ و $13k+3$ بر a بخش‌پذیرند، پس a هر دو عدد را عاد می‌کند.

گام دوم:

$$a \mid 6k+1 \xrightarrow{\times 13} a \mid 78k+13$$

$$a \mid 13k+3 \xrightarrow{\times(-6)} a \mid -78k-18$$

سمت راست دو رابطه را جمع می‌کنیم، پس $a \mid -5$، در نتیجه $a \mid 5$ و چون $a>1$، پس $a=5$.

گام سوم: a را در گزینه‌ها قرار می‌دهیم:

گزینهٔ (۱): $6n+10=2(3n+5)$ → غیر اول ← زوج و بزرگ‌تر از ۲

گزینهٔ (۲): $6n+5$

گزینهٔ (۳): $6n+3=3(2n+2)$ → غیر اول ← مضرب ۳ و بزرگ‌تر از ۳

گزینهٔ (۴): $6n+4=2(3n+2)$ → غیر اول ← زوج و بزرگ‌تر از ۳

پس عدد اول $p>3$ در بین گزینه‌ها فقط به صورت $6n+5$ ممکن است نوشته شود.

SanjeshCloud

۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد m بر دو عدد ۵ و ۷ به ترتیب برابر ۱ و ۳ است. کدام گزینه در مورد باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد m بر ۳۵ درست است؟

۱) اول است
۲) مضرب ۳ است.
۳) مربع کامل است.
۴) یک‌رقمی است.

مشاوره آماده باشید که امسال ممکن است از قضیهٔ تقسیم سؤال در کنکور بیاید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint دو بار قضیهٔ تقسیم را بنویسید و آن‌ها را در اعداد مناسب ضرب کنید.

درس Box قضیهٔ تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، با تقسیم a بر b، اعداد صحیح و منحصربه‌فرد q و r وجود دارند که؛ $a = bq + r$ و $0 \le r < b$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: دو رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} m = 5q + 1 \\ m = 7q' + 3 \end{cases}$$

گام دوم: برای این‌که مقسوم‌علیه تبدیل به ۳۵ شود، رابطهٔ اول را در ۷ و دومی را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} 7m = 35q + 7 \\ 5m = 35q' + 15 \end{cases} \xrightarrow{-} 2m = 35(q - q') - 8$$

گام سوم: دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$m = 35(\underbrace{\frac{q - q'}{2}}_{k}) - 4 = 35k - 4$$

گام چهارم: باقی‌مانده نباید منفی باشد، پس یکی از خارج‌قسمت کم کرده و یک ۳۵ تا به ۴− اضافه می‌کنیم.

$$m = 35(k - 1) + 35 - 4 \Rightarrow m = 35(k - 1) + 31$$

پس باقی‌مانده m بر ۳۵ برابر ۳۱ است که عددی اول است.

نکته
- حواستان به شرط باقی‌مانده باشد. باقی‌مانده هیچ‌گاه منفی نبوده و از مقسوم‌علیه کوچک‌تر است. در بسیاری از مسئله‌ها کلید حل مسئله در دستان همین نکته قرار گرفته است!
- در تقسیم عدد a بر b اگر باقی‌مانده به صورت ظاهری منفی باشد، آن‌قدر از مقسوم‌علیه (b) به آن اضافه می‌کنیم تا در محدودهٔ خودش قرار گیرد. مثلاً داریم:

$$a = \overset{+8}{\curvearrowright} 8k - 10 = \overset{+8}{\curvearrowright} 8k' - 2 = 8k'' + 6 \Rightarrow \text{باقی‌ماندهٔ } a \text{ بر } 8$$

$$a = \overset{+2\times15}{\curvearrowright} 15k - 23 = 15k' + 7 \Rightarrow \text{باقی‌ماندهٔ } a \text{ بر } 15$$

۴ اگر $a \mid ۲a, c^۳ \mid b^۲$ حاصل $[((c^۳, a), b), (a^۳, a^۵)]$ کدام است؟

۱) $|b|^۲$ ۲) $|c|^۳$

۳) $|a|^۳$ ۴) $|a|$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint اگر $a \mid b$ آن‌گاه $(a,b) = |a|$ و $[a,b] = |b|$.

درس Box **ب.م.م و ک.م.م**

ضرب عامل‌های مشترک با توان کم‌تر $= (a,b)$	a,b دو عدد ب.م.م $= (a,b) = d$ ، $d \mid a$ ، $d \mid b$
ضرب عامل‌های مشترک با توان بیشتر در غیرمشترک‌ها $= [a,b]$	a,b دو عدد ک.م.م $= [a,b] = c$ ، $a \mid c$ ، $b \mid c$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:**

$$a \mid ۲a \ , \ ۲a \mid b \xrightarrow[\text{تعدی}]{\text{قانون}} a \mid b$$

گام دوم:

$$a \mid b \xrightarrow{\times b} a \mid b^۲ \ , \ b^۲ \mid c^۳ \rightarrow a \mid c^۳$$

گام سوم: a عدد $c^۳$ را عاد می‌کند، پس ب.م.م آن‌ها همان قدرمطلق a می‌شود، یعنی $(c^۳, a) = |a|$.

گام چهارم: $a \mid b$ پس $|a| = (|a|, b)$. از طرفی $a^۳ \mid a^۵$ پس $|a^۳| = (a^۳, a^۵)$.

گام پنجم: چون $|a| \mid |a^۳|$ پس داریم: $|a^۳| = |a| = [|a|, |a^۳|]$ = عبارت داده‌شده

نکته

$$a \mid b \begin{cases} (a,b) = |a| \\ [a,b] = |b| \end{cases}$$

۵ اگر $x+y=۱۳$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $x^۳+y^۳$ بر ۱۲ چه مقادیری ممکن است داشته باشد؟

۱) فقط ۱
۲) ۱ یا ۷
۳) ۲ یا ۷
۴) ۱ یا ۳ یا ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

$x^۳-x$ مضرب ۶ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $x^۳-x=x(x^۲-۱)=(x)(x-۱)(x+۱)$، پس $x^۳-x$ ضرب سه عدد متوالی بوده و بر ۶ بخش‌پذیر است.

گام دوم:

$$x^۳-x+y^۳-y=۶k \Rightarrow x^۳+y^۳-\overbrace{(x+y)}^{۱۳}=۶k$$

$$\Rightarrow x^۳+y^۳=۶k+۱۲+۱=۶(k+۲)+۱$$

پس باقی‌ماندهٔ $x^۳+y^۳$ بر ۶ برابر ۱ است، در نتیجه $x^۳+y^۳=۶q+۱$.

گام سوم: باید کاری کنیم که مقسوم‌علیه برابر ۱۲ بشود. برای q دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$q=۲t\ (\text{زوج}) \Rightarrow x^۳+y^۳=۶(۲t)+۱=۱۲t+۱$$

$$q=۲t+۱\ (\text{فرد}) \Rightarrow x^۳+y^۳=۶(۲t+۱)+۱=۱۲t+۷$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^۳+y^۳$ بر ۱۲ برابر ۱ یا ۷ می‌تواند باشد.

خیلی سبز

آزمون ۷ آذر ۱۴۰۴

گسسته

۱ **چند عدد صحیح a وجود دارد که به ازای آن‌ها رابطهٔ $(۴a,۱۲۵) = |a|$ درست باشد؟**

۱) صفر

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۸

مشاوره در سال ۱۴۰۴ یک تست در آزمون نهایی مطرح شد که مشابه این سؤال بود. پس حواستان باشد که حل تست‌های متنوع، هم برای کنکور لازم است و همه برای نهایی!

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

a مقسوم‌علیه ۱۲۵ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عدد $|a|$ بمم دو عدد $۴a$ و ۱۲۵ است. از طرفی مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲۵ اعداد ۱، ۵، ۲۵، ۱۲۵ هستند، پس کافی است همین اعداد و قرینهٔ آن‌ها را امتحان کنیم. دقت کنید که (a,b) با $(-a,b)$ فرقی ندارد.

گام دوم:

$a = \pm ۱ \Rightarrow (\pm ۴, \overbrace{۱۲۵}^{۵^۳}) = |\pm ۱| = ۱$ ✓

$a = \pm ۵ \Rightarrow (\pm ۴ \times ۵, ۵^۳) = |\pm ۵| = ۵$ ✓

$a = \pm ۲۵ \Rightarrow (\pm ۴ \times \overbrace{۲۵}^{۵^۲}, ۵^۳) = |\pm ۲۵| = ۵^۲$ ✓

$a = \pm ۱۲۵ \Rightarrow (\pm ۴ \times ۱۲۵, ۵^۳) = |\pm ۱۲۵| = ۵^۳$ ✓

گام سوم: به ازای هر هشت عدد، رابطهٔ داده‌شده درست است.

امتحان نهایی

به ازای چند مقدار a، تساوی $(۲a,۲۷) = a$ برقرار است؟ *(سؤال ۳ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)*

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۸

۲ n یک عدد طبیعی دورقمی است. دو عدد a و b به پیمانه‌های $3n+1$ و n^2-n+3 که نسبت به هم غیراول هستند، هم‌نهشت‌اند. این دو عدد به کدام پیمانه قطعاً هم‌نهشت هستند؟

۱) ۴۱ ۲) ۳۱ ۳) ۲۳ ۴) ۳۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ب.م.م دو عدد پیمانه را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ب.م.م دو عدد $3n+1$ و n^2-n+3 را برابر d فرض می‌کنیم، پس:

$$\begin{cases} d \mid n^2-n+3 \\ d \mid 3n+1 \end{cases}$$

گام دوم: سعی می‌کنیم n را از روابط بالا حذف کنیم:

$$\begin{cases} d \mid n^2-n+3 \xrightarrow{\times 3} d \mid 3n^2-3n+9 \\ d \mid 3n+1 \xrightarrow{\times(-n)} d \mid -3n^2-n \end{cases} \xrightarrow{+} d \mid -4n+9$$

دوباره رابطهٔ به‌دست‌آمده را با $d \mid 3n+1$ می‌گیریم:

$$\begin{cases} d \mid 3n+1 \xrightarrow{\times 4} d \mid 12n+4 \\ d \mid -4n+9 \xrightarrow{\times 3} d \mid -12n+27 \end{cases} \xrightarrow{+} d \mid 31 \xrightarrow{d \neq 1} d = 31$$

گام سوم: دو عدد a و b به پیمانه‌های $3n+1$ و n^2-n+3 هم‌نهشت هستند، پس به پیمانهٔ ب.م.م آن‌ها نیز (طبق نکته) هم‌نهشت هستند.

نکته اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $a \overset{n}{\equiv} b$ آن‌گاه a و b به پیمانهٔ ب‌م‌م n و m نیز هم‌نهشت هستند. $(a \overset{(m,n)}{\equiv} b)$

۳ اگر $۹k+۴ \mid ۵$ و $۱۵k-۸ \mid ۷$، باقی‌ماندهٔ $k^۲+۱$ بر ۳۵ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

مشاوره عادکردن و قضیهٔ تقسیم و هم‌نهشتی ۳ موضوع کاملاً مرتبط با هم هستند. حواستان باشد که تبدیل مسئلهٔ عادکردن و قضیهٔ تقسیم به هم‌نهشتی همواره باید در ذهنتان باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint دو رابطه را به زبان هم‌نهشتی نوشته و $k^۲+۱$ را بسازید.

درس Box

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

	ویژگی	توضیح
۱	$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c$	دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم با عددی ثابت جمع (یا تفریق) کنیم.
۲	$a+x \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a \overset{m}{\equiv} b-x$	اگر عددی از یک طرف هم‌نهشتی به طرف دیگر برود، علامت آن عوض می‌شود.
۳	$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$	دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم در عدد ثابت c ضرب کنیم.
۴	$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{(n\in\mathbb{N})} a^n \overset{m}{\equiv} b^n$	دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان عدد طبیعی دلخواه n برسانیم.
۵	$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+d \\ \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd \end{matrix}$	اگردو هم‌نهشتی به پیمانهٔ m داشته باشیم، می‌توانیم سمت راست‌ها را با هم جمع (ضرب) و سمت چپ‌ها را نیز با هم جمع (ضرب) کنیم.
۶	$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a \overset{m}{\equiv} b \pm mk$	مضارب پیمانه را می‌توانیم به هر کدام از طرفین اضافه یا کم کنیم.
۷	$a \overset{m}{\equiv} b, n \mid m \rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$	به جای پیمانه می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم.

نکته اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم x بر m، برابر r باشد، داریم:

$$x \overset{m}{\equiv} r \leftrightarrow m \mid x-r \leftrightarrow x=mq+r \leftrightarrow x \in [r]_m$$

قضیه ک.م.م پیمانه: اگر a و b به پیمانهٔ m و n هم‌نهشت باشند، به پیمانهٔ $[m,n]$ (یعنی ک.م.م پیمانه‌ها) نیز هم‌نهشت هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $۹k+۴$ بر ۵ بخش‌پذیر است، پس به زبان هم‌نهشتی $۹k+۴ \overset{۵}{\equiv} ۰$.

شبیه همین $۱۵k-۸ \overset{۷}{\equiv} ۰$.

گام دوم:

$$۹k+۴ \overset{۵}{\equiv} ۰ \xrightarrow{۹\equiv -۱} -k \overset{۵}{\equiv} -۴ \rightarrow k \overset{۵}{\equiv} ۴ \overset{۵}{\equiv} -۱$$

$$۱۵k-۸ \overset{۷}{\equiv} ۰ \xrightarrow[۸\equiv ۱]{۱۵\equiv ۱} k-۱ \overset{۷}{\equiv} ۰ \rightarrow k \overset{۷}{\equiv} ۱$$

گام سوم: دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی را یکسان کرده و از قضیهٔ ک.م.م پیمانه‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} k^۲ \overset{۵}{\equiv} (-۱)^۲ = ۱ \\ k^۲ \overset{۷}{\equiv} ۱ \end{cases} \longrightarrow k^۲ \overset{۳۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{+۱} k^۲+۱ \overset{۳۵}{\equiv} ۲$$

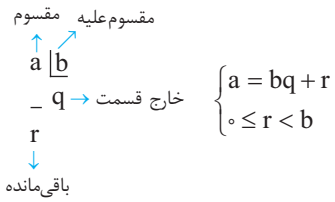
۴ در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده از مربع مقسوم‌علیه ۴۳ واحد کم‌تر است. کدام گزینه در مورد مقسوم‌علیه درست است؟

۱) عددی اول
۲) مضرب ۳
۳) دورقمی
۴) مربع کامل

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint به شرط باقی‌مانده توجه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** داریم:



$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \le r < b \end{cases}$$

گام دوم: باقی‌مانده به صورت $b^2 - 43$ است. شرط باقی‌مانده این است که $0 \le b^2 - 43 < b$. با کمی دقت و جست‌وجو تنها عدد طبیعی که در این رابطه درست درمی‌آید $b = 7$ است که عددی اول است.

۵ چند عدد n از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,...,۳۰\}$ وجود دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم $n^۲$ بر ۸ برابر ۴ باشد؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint n باید زوج باشد، از افراز اعداد زوج به $۴k$ و $۴k+۲$ استفاده کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $۴k$ و $۴k+۱$ و $۴k+۲$ و $۴k+۳$ است. سعی می‌کنیم شکل nهای قابل قبول را پیدا کنیم.

گام دوم: اگر این عدد فرد باشد (به صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$)، مربع آن به صورت $۸k+۱$ است، پس مربع آن در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد (نه ۴.)

گام سوم: اگر n زوج باشد به صورت $۴k$ یا $۴k+۲$ است. داریم:

$$n=۴k \Rightarrow n^۲=۱۶k^۲ \overset{۸}{\equiv} ۰$$

$$n=۴k+۲ \Rightarrow n^۲=۱۶k^۲+۱۶k+۴ \overset{۸}{\equiv} ۴$$

پس اعدادی قابل قبول هستند که به صورت $۴k+۲$ باشند.

گام چهارم: تعداد اعداد به صورت $۴k+۲$ در مجموعهٔ داده‌شده برابر است با:

$$۱ \le ۴k+۲ \le ۳۰ \Rightarrow k=۰,۱,۲,...,۷$$

پس ۸ عدد وجود دارد.

نکته مربع هر عدد فرد به صورت $۸k+۱$ است.

۶ عدد $۲۶^{۱۴۰۵} + ۲۱۶^{۱۴۰۳}$ به کدام کلاس هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۹ متعلق است؟

۱) [۰]　　۲) [۷]

۳) [۱۳]　　۴) [۱۸]

مشاوره مهم‌ترین کاربرد هم‌نهشتی، پیداکردن باقی‌مانده است. همواره باید آمادهٔ حل چنین سؤالی در کنکور و نهایی باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint به جای پایه‌ها هم‌نهشت آن‌ها را قرار دهید و دقت کنید که $۷^{۳} \overset{۱۹}{\equiv} ۱$.

درس Box **پیداکردن باقی‌مانده با استفاده از هم‌نهشتی:** مهم‌ترین کاربرد هم‌نهشتی پیداکردن باقی‌مانده اعداد بزرگ در تقسیم بر m است. مراحل کار به صورت زیر است:

روش	مثال (باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۲\times۳^{۱۹}-۴$ بر ۸)
۱) یک هم‌نهشتی اولیه را می‌نویسیم. اگر این هم‌نهشتی جوری باشد که سمت راست ۱ یا ۱− باشد، بهتر است.	$۳^{۲} \overset{۸}{\equiv} ۱$
۲) با توان‌رسانی و ضرب و جمع، مقسوم را می‌سازیم.	$۳^{۲} \overset{۸}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان } ۹} ۳^{۱۸} \overset{۸}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳^{۱۹} \overset{۸}{\equiv} ۳$ $\xrightarrow{\times ۲} ۲\times۳^{۱۹} \overset{۸}{\equiv} ۶ \xrightarrow{-۴} \underbrace{۲\times۳^{۱۹}-۴}_{} \overset{۸}{\equiv} ۲$
۳) اگر سمت راست منفی باشد یا بزرگ‌تر از پیمانه باشد، آن‌قدر از پیمانه به آن اضافه یا کم می‌کنیم تا در محدودهٔ باقی‌مانده $(۰ \le r < m)$ قرار گیرد.	

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا بهتر است پایه‌ها را کوچک کنیم:

$$۲۱۶ \overset{۱۹}{\equiv} ۷ \quad , \quad ۲۶ \overset{۱۹}{\equiv} ۷$$

پس کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم $۷^{۱۴۰۵} + ۷^{۱۴۰۳}$ را بر ۱۹ به دست آوریم.

گام دوم: باید یک هم‌نهشتی اولیه بنویسیم:

$$۷^{۲} \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۳} \overset{۱۹}{\equiv} ۷۷ \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

گام سوم: باقی‌ماندهٔ ۱۴۰۳ بر ۳، برابر ۲ است؛ پس $۱۴۰۳ = ۳k + ۲$ شبیه همین، $۱۴۰۵ = ۳k' + ۱$، پس:

$$۷^{۳} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان } k} ۷^{۳k} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷^{۲}} ۷^{۳k+۲} \overset{۱۹}{\equiv} ۴۹ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱$$

$$۷^{۳} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان } k'} ۷^{۳k'} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷^{۱}} ۷^{۳k'+۱} \overset{۱۹}{\equiv} ۷$$

گام چهارم: با جمع طرفین دو رابطه، باقی‌ماندهٔ عدد داده‌شده بر ۱۹، برابر ۱۸ به دست می‌آید، پس $۷^{۱۴۰۵} + ۷^{۱۴۰۳} \in [۱۸]_{۱۹}$.

کنکور اگر m بزرگ‌ترین عدد طبیعی باشد که $(m-۱۰)! \overset{۳۶}{\equiv} ۳۶$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $m^{۱۲۳}$ بر ۱۵، کدام است؟

(سؤال ۱۳۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) ۶

۷ چند عدد ۳رقمی به صورت $\overline{aba}$ و مضرب ۶ وجود دارد؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۳

مشاوره کتاب درسی در قسمت قاعدهٔ بخش‌پذیری بر اعداد خاص، تمرین‌های خاصی ندارد، پس برای کنکور حتماً روی منابع مکمل، کار کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint a باید زوج باشد. حالا قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۳ را بنویسید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عدد داده‌شده بر ۶ بخش‌پذیر است، پس بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است.

گام دوم: عدد داده‌شده زوج است، پس a زوج است. طبق قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۳ داریم:

$$\overline{aba}\overset{3}{\equiv}0 \rightarrow a+b+a\overset{3}{\equiv}0 \rightarrow 2a+b\overset{3}{\equiv}0$$

گام سوم: اگر $a=0$ عدد دورقمی می‌شود، پس قابل قبول نیست اما چون a زوج است؛ داریم:

$$a=2 \rightarrow 4+b\overset{3}{\equiv}0 \rightarrow b\overset{3}{\equiv}-4\overset{3}{\equiv}2 \xrightarrow{0\le b\le 9} b=2,5,8$$

$$a=4 \rightarrow 8+b\overset{3}{\equiv}0 \rightarrow b\overset{3}{\equiv}-8\overset{3}{\equiv}1 \xrightarrow{0\le b\le 9} b=1,4,7$$

$$a=6 \rightarrow 12+b\overset{3}{\equiv}0 \rightarrow b\overset{3}{\equiv}0 \xrightarrow{0\le b\le 9} b=0,3,6,9$$

$$a=8 \rightarrow 16+b\overset{3}{\equiv}0 \rightarrow b\overset{3}{\equiv}-1\overset{3}{\equiv}2 \xrightarrow{0\le b\le 9} b=2,5,8$$

گام چهارم: در حالت اول اعداد ۲۲۲ و ۲۵۲ و ۲۸۲ به دست می‌آید و ... (شبیه همین برای سایر حالت‌ها)، پس در کل ۱۳ عدد وجود دارد.

کنکور

میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی به صورت $\overline{aba}$ که مضرب عدد ۱۲ باشند، کدام است؟

(سؤال ۱۳۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۳۴۸
۲) ۵۴۰
۳) ۵۷۰
۴) ۵۷۴

SanjeshCloud

۸ رقم یکان عدد a برابر ۴ است. رقم یکان جواب معادلهٔ $(a+3)x \overset{10}{\equiv} 1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

$a \overset{10}{\equiv} 4$

درس Box

ویژگی تقسیم دو طرف هم‌نهشتی و رقم یکان:

ویژگی تقسیم	ریاضی	توضیح
۱	$ca \overset{m}{\equiv} cb\ ,\ (c,m)=1 \rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$	اگر عدد c که قرار است از دو طرف ساده شود با پیمانه، عامل مشترک نداشته باشد، آن را ساده می‌کنیم.
۲	$ca \overset{m}{\equiv} cb\ ,\ (c,m)=d \rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$	اگر عدد c با پیمانه، ب‌م‌م d داشته باشد، c را از دو طرف ساده می‌کنیم، ولی پیمانه به d تقسیم می‌شود.

رقم یکان: رقم یکان هر عدد، همان باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۱۰ است، پس برای یافتن رقم یکان یک عدد کافی است ببینیم با چه عددی به پیمانهٔ ۱۰ هم‌نهشت است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: رقم یکان عدد a همان باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۰ است، پس $a \overset{10}{\equiv} 4$.

گام دوم: $a \overset{10}{\equiv} 4$، پس $a+3 \overset{10}{\equiv} 7$. با قراردادن آن در معادلهٔ داده‌شده داریم: $7x \overset{10}{\equiv} 1$

گام سوم: معادلهٔ هم‌نهشتی را حل می‌کنیم. اگر 2×10 به سمت راست اضافه کنیم دو طرف به ۷ ساده می‌شوند:

$$7x \overset{10}{\equiv} 1+2\times10=21 \xrightarrow[(7,10)=1]{\div 7} x \overset{10}{\equiv} 3$$

گام چهارم: باقی‌ماندهٔ x بر ۱۰، برابر ۳ است، پس رقم یکان x (جواب معادله) برابر ۳ است.

۹ ۳۱ خرداد در یک سال یکی از روزهای شنبه یا سه‌شنبه یا پنج‌شنبه است. ۳۰ آبان همان سال کدام روز هفته نمی‌تواند باشد؟

۱) دوشنبه
۲) چهارشنبه
۳) جمعه
۴) یکشنبه

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ببینید از ۳۱ خرداد چند روز باید جلو برویم تا به ۳۰ آبان برسیم.

درس Box

تقویم‌نگاری

فرض کنید تاریخی از سال در یک روز مشخص هفته باشد، می‌خواهیم بدانیم تاریخ دیگر چند شنبه است.

۱) اختلاف روزهای دو تاریخ را به دست می‌آوریم.

۲) باقی‌ماندهٔ عدد بالا را در تقسیم بر ۷ محاسبه می‌کنیم.

۳) اگر تاریخ جلوتر را بخواهیم به اندازهٔ باقی‌مانده از آن روز هفته، جلو می‌رویم و اگر تاریخ عقب‌تر را بخواهیم به اندازهٔ باقی‌مانده عقب می‌رویم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: خرداد تمام شده است، پس ۳۱−۳ روز در تابستان و ۳۰−۲ روز تا انتهای آبان اگر جلو برویم به ۳۰ آبان می‌رسیم.

گام دوم: باقی‌ماندهٔ این عدد را به ۷ به دست می‌آوریم:

$$۳۱-۳+۳۰-۲ \overset{۷}{\equiv} ۳(۳)+۲(۲) \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \equiv ۶$$

گام سوم: اگر از شنبه، ۶ روز جلو برویم به جمعه، اگر از سه‌شنبه ۶ روز جلو برویم به دوشنبه و اگر از پنج‌شنبه ۶ روز جلو برویم به چهارشنبه می‌رسیم، پس ۳۰ آبان دوشنبه، جمعه و چهارشنبه می‌تواند باشد؛ ولی یکشنبه نمی‌تواند باشد.

حواست باشه: اگر در روز nام ماه باشیم، برای این‌که ببینیم تا انتهای ماه چند روز باید جلو برویم، کافی است تعداد روزهای ماه را منهای n کنیم. مثلاً اگر در روز ۱۷ام ماه تیر باشیم، باید ۳۱−۱۷ روز جلو برویم تا ماه تیر تمام بشود.

۱۰ معادلهٔ سیالهٔ $11x+7y=389$، چند جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

مشاوره طراحان کنکور علاقهٔ زیادی به معادلهٔ سیاله دارند. مشابه این سؤال بارها و بارها در کنکور آمده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

دو طرف را به پیمانهٔ ۷ ببرید.

درس Box

معادلهٔ هم‌نهشتی و روش حل آن

تعریف: به معادلهٔ $ax\overset{m}{\equiv}b$ معادلهٔ هم‌نهشتی می‌گوییم. a و b ضرایب عددی و x مقدار مجهول است.

برای حل معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) اگر a و b اعداد بزرگی هستند، به جایشان یک عدد هم‌نهشت با آن‌ها به پیمانهٔ m را قرار می‌دهیم.

۲) با اضافه‌کردن مضارب پیمانه به b، کاری می‌کنیم تا دو طرف بر a بخش‌پذیر باشند.

۳) با استفاده از ویژگی تقسیم، دو طرف را به a ساده می‌کنیم تا x به دست آید.

شرط جواب داشتن معادلهٔ هم‌نهشتی: $ax\overset{m}{\equiv}b$ این است که $(a,m)\mid b$.

حل معادلهٔ سیالهٔ خطی

تعریف: به معادلهٔ $ax+by=c$ که همهٔ ضرایب و مجهولات عدد صحیح هستند، معادلهٔ سیالهٔ خطی می‌گوییم.

شرط جواب: شرط این‌که معادلهٔ $ax+by=c$ جواب داشته باشد، این است که $(a,b)\mid c$ (و برعکس).

روش حل معادلهٔ سیاله: معادلهٔ سیاله را به معادلهٔ هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم. برای این کار دو طرف معادله را به پیمانهٔ a می‌بریم. ax که مضرب a است، هم‌نهشت صفر می‌شود، پس داریم:

$$ax+by\overset{a}{\equiv}c \Rightarrow by\overset{a}{\equiv}c$$

دقت کنید که می‌توانستیم به پیمانهٔ b ببریم که در این صورت معادله به صورت $ax\overset{b}{\equiv}c$ درمی‌آید.

نکته

- این‌که به کدام‌یک از پیمانه‌های b یا a ببریم فرقی نمی‌کند، اما معمولاً به پیمانه‌ای که کوچک‌تر (از نظر قدرمطلق) است، ببریم بهتر است.
- بعد از این‌که معادلهٔ هم‌نهشتی را حل و آن متغیر را پیدا کردید، باید آن را در معادلهٔ سیاله قرار دهید تا مجهول دیگر هم به دست آید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دو طرف را به پیمانهٔ ۷ می‌بریم تا جملهٔ $7y$ حذف شود:

$$11x+7y\overset{7}{\equiv}389 \Rightarrow 11x\overset{7}{\equiv}389 \xrightarrow[389\equiv 4\ (7)]{11\equiv 4\ (7)} 4x\overset{7}{\equiv}4$$

$$\xrightarrow[(4,7)=1]{\div 4} x\overset{7}{\equiv}1 \to x=7k+1$$

گام دوم: x را در معادلهٔ اول جای‌گذاری می‌کنیم تا y هم به دست آید:

$$11(7k+1)+7y=389 \Rightarrow 77k+11+7y=389$$

$$\Rightarrow y=\frac{-77k+378}{7}=-11k+54$$

گام سوم: جواب‌های نامنفی را می‌خواهیم، پس $x\geq 0$ و $y\geq 0$.

$$\begin{cases}7k+1\geq 0\\ -11k+54\geq 0\end{cases} \to k=0,1,2,3,4$$

پس معادله، ۵ جواب دارد.

حواست باشه: در گام سوم به جای حل دو نامعادله بهتر است به k عدد صحیح بدهیم. از معادلهٔ اول k منفی نمی‌تواند باشد و در معادلهٔ دوم هم حداکثر k، برابر ۴ می‌تواند باشد.

کنکور

معادلهٔ سیالهٔ $17x+18y=987$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی، چند دسته جواب دارد؟ *(سؤال ۳۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۱ ـ نوبت اول)*

۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) ۳

خیلی سبز

آزمون ۳۰ آذر

گسسته

۱ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، عدد $2m-5n$ را می‌توانید به صورت $17k+r$ بنویسید، به طوری‌که $k\in\mathbb{Z}$ و $0\le r<47$. در این صورت مجموع ارقام r کدام نیست؟

۱) ۳

۲) ۷

۳) ۱۰

۴) ۱۱

نکته اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت: $a\overset{m}{\equiv}r$.

$$a=mq+r \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}r$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** باقی‌ماندهٔ تقسیم m و n بر ۱۷ به ترتیب برابر ۵ و ۳ است؛ بنابراین:

$$m\overset{17}{\equiv}5 \xrightarrow{\times 2} 2m\overset{17}{\equiv}10$$

$$n\overset{17}{\equiv}3 \xrightarrow{\times 5} 5n\overset{17}{\equiv}15$$

گام دوم: دنبال باقی‌ماندهٔ تقسیم $2m-5n$ بر ۱۷ هستیم:

$$2m-5n\overset{17}{\equiv}10-15\overset{17}{\equiv}-5+17\overset{17}{\equiv}12$$

گام سوم: rهای در محدودهٔ $0\le r<47$ را می‌خواهیم؛ پس داریم:

$$2m-5n\overset{17}{\equiv}12+17\overset{17}{\equiv}29+17\overset{17}{\equiv}46$$

گام چهارم: مجموع ارقام rها برابر است با:

$$r=12 \quad , \quad r=29 \quad , \quad r=46$$

مجموع ارقام: 3 (از 12) ، 11 (از 29) ، 10 (از 46)

۲ **p عددی اول است و می‌توانیم p را به شکل $p = ۶k + r$ نمایش دهیم که در آن $k \in \mathbb{Z}$؛ چند مقدار صحیح نامنفی برای r می‌تواند وجود داشته باشد؟**

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

نکته اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵$ نوشته می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مقدار r را برای اعداد اول ۲ و ۳ در تقسیم بر ۶ به دست می‌آوریم:

$$۲ = ۶ \times ۰ + ۲ \Rightarrow r = ۲$$

$$۳ = ۶ \times ۰ + ۳ \Rightarrow r = ۳$$

گام دوم: طبق نکتهٔ بالا، برای $p > ۳$ داریم $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵$ و این یعنی: $r = ۱$ یا $r = ۵$.

گام سوم: بنابراین برای r، ۴ مقدار مختلف ۱، ۲، ۳ و ۵ به دست می‌آید.

گول نخوری اگر به اشتباه p را اعداد اول بزرگ‌تر از ۳ در نظر بگیریم، آن‌گاه تنها مقادیر ممکن برای r، اعداد ۱ و ۵ است. در نتیجه به اشتباه گزینهٔ (۱) را انتخاب می‌کنیم.

SanjeshCloud

۳ اگر برای اعداد صحیح a، b و c و عدد طبیعی m داشته باشیم $a+c \overset{m}{\equiv} b-c$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a \overset{m}{\equiv} b-۲c$

۲) $b \overset{m}{\equiv} a+۲c$

۳) $(b-a)c \overset{m}{\equiv} ۲c^{۲}$

۴) $a-b \overset{m}{\equiv} ۲c$

درس Box

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \ , \ (c \in \mathbb{Z}) \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \ , \ (c \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc \ , \ (c \in \mathbb{Z})$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی، عدد صحیح c را کم می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $a+c \overset{m}{\equiv} b-c \xrightarrow{-c} a \overset{m}{\equiv} b-۲c$

گام دوم: به دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی، عدد صحیح c را اضافه می‌کنیم:

گزینهٔ (۲): $a+c \overset{m}{\equiv} b-c \xrightarrow{+c} a+۲c \overset{m}{\equiv} b$

یا این‌که برای گزینهٔ (۲) می‌توان گفت:

طبق گام اول: $a \overset{m}{\equiv} b-۲c \Rightarrow a+۲c \overset{m}{\equiv} b$

گام سوم: ابتدا از دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی، عدد صحیح a را کم و عدد صحیح c را اضافه می‌کنیم، سپس دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی را در عدد صحیح c ضرب می‌کنیم:

گزینهٔ (۳): $a+c \overset{m}{\equiv} b-c \xrightarrow[+c]{-a} ۲c \overset{m}{\equiv} b-a \xrightarrow{\times c} ۲c^{۲} \overset{m}{\equiv} (b-a)c$

گام چهارم: از دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی، b و c را کم می‌کنیم:

$a+c \overset{m}{\equiv} b-c \underset{-b}{\overset{-c}{\Rightarrow}} a-b \overset{m}{\equiv} -۲c$

بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

نکته دقت کنید که در حالت کلی $۲c$ و $-۲c$ به پیمانهٔ m هم‌نهشت نیستند مگر این‌که $m \mid c$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴ کدام هم‌نهشتی درست نیست؟

۱) $۲۷^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$

۲) $۱۰۰۰^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} -۱$

۳) $۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۱$

۴) $۲۹^{۱۹} \overset{۱۲}{\equiv} -۱$

Hint برو سراغ بررسی گزینه‌ها.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** بررسی گزینهٔ (۱): دنبال توانی از ۲۷ هستیم که در تقسیم بر ۱۳ باقی‌مانده‌ای برابر ± ۱ داشته باشد:

$$۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲۷^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \checkmark$$

گام دوم: بررسی گزینهٔ (۲):

$$۱۰۰۰^{۱۳} = (۱۰^{۳})^{۱۳} = ۱۰^{۳۹}$$

$$۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۱۰^{۳۹} \overset{۷}{\equiv} ۳^{۳۹} \quad (۱)$$

$$۳^{۳} \overset{۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به توان ۱۳}} ۳^{۳۹} \overset{۷}{\equiv} -۱ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۰^{۳۹} \overset{۷}{\equiv} -۱ \checkmark$$

گام سوم: بررسی گزینهٔ (۳):

$$۲^{۵} \overset{۲۳}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲^{۱۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۸۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{\times ۲} ۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۲۴ \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \checkmark$$

گام چهارم: بررسی گزینهٔ (۴):

$$۲۹ \overset{۱۲}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۲۹^{۱۹} \overset{۱۲}{\equiv} ۵^{۱۹}$$

$$۵^{۲} \overset{۱۲}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۹}} ۵^{۱۸} \overset{۱۲}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۱۹} \overset{۱۲}{\equiv} ۵ \times$$

۵ اگر در یک سال ۲۰ مرداد شنبه باشد، در این صورت ۳۰ آذر در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱) جمعه
۲) شنبه
۳) چهارشنبه
۴) پنجشنبه

Hint فاصلهٔ بین دو تاریخ مورد نظر را پیدا کن و باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم بر ۷ را به دست بیار.

نکته
- در بحث تقویم و روزهای هفته به نکات زیر دقت کنید.
- هر کدام از روزهای هفته، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود.
- شش ماه اولِ سال همگی ۳۱روزه و شش ماه دومِ سال غیر از اسفند (که به‌جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰روزه می‌باشند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فاصلهٔ تاریخ ۲۰ مرداد تا ۳۰ آذر را به دست می‌آوریم:

$$d = \text{۳۰ آذر} - \text{۲۰ مرداد} = \underbrace{۱۱}_{\text{مرداد}} + \underbrace{۳۱}_{\text{شهریور}} + \underbrace{۳\times۳۰}_{\text{مهر تا آذر}}$$

گام دوم: باقی‌ماندهٔ d را بر ۷ به دست می‌آوریم:

$$d \overset{۷}{\equiv} ۱۱+۳۱+۳\times۳۰ \overset{۷}{\equiv} \underbrace{۴+۳}_{۷} \overset{۷}{\equiv} ۶$$

گام سوم: حال از روز شنبه ۶ روز به جلو می‌رویم؛ بنابراین ۳۰ آذر همان سال، جمعه است.

۶ پاسخ عمومی معادله‌های هم‌نهشتی $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ و $۳y \overset{۷}{\equiv} ۱۳$ به صورت $x = ak + b$ و $y = ck' + d$ است که در آن‌ها $k, k' \in \mathbb{Z}$ و $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. کم‌ترین مقدار $a + b + c + d$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۳ ۳) ۹ ۴) ۵

درس Box

یک رابطهٔ هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم و منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی، پیداکردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_۰ \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax_۰ \overset{m}{\equiv} b$. $(a, b \in \mathbb{Z})$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول:

$$۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷ - ۵ \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow[\div ۴]{(۴,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۵k + ۳ \ , \ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a = ۵ \ , \ b = ۳$$

گام دوم:

$$۳y \overset{۷}{\equiv} ۱۳ - ۷ \overset{۷}{\equiv} ۶ \xrightarrow[\div ۳]{(۳,۷)=۱} y \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow y = ۷k' + ۲ \ , (k' \in \mathbb{Z}) \Rightarrow c = ۷ \ , \ d = ۲$$

گام سوم: کم‌ترین مقدار $a + b + c + d$ برابر است با:

$$a + b + c + d = ۵ + ۳ + ۷ + ۲ = ۱۷$$

۷ جواب‌های عمومی کدام معادلهٔ سیالهٔ خطی به صورت $(x,y)=(۶k+۱,۳-۵k)$ است؟

۱) $۱۲x-۱۰y+۱۸=۰$

۲) $۱۰x+۱۲y=۴۶$

۳) $۱۵x-۱۸y+۳۹=۰$

۴) $۱۵x+۱۸y=۶۳$

Hint مقدار (x,y) را در معادله‌های سیالهٔ داده‌شده جای‌گذاری کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ برای حذف k، x را در ۵ و y را در ۶ ضرب می‌کنیم:

$$۵x+۶y=۵(۶k+۱)+۶(۳-۵k)=۳۰k+۵+۱۸-۳۰k \Rightarrow ۵x+۶y=۲۳ \xrightarrow{\times ۲} ۱۰x+۱۲y=۴۶$$

یه‌جور دیگه عددگذاری؛ مقادیر x و y را به ازای $k=۰$ و $k=۱$ به دست می‌آوریم و در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$k=۰ \Rightarrow x=۱, y=۳ \Rightarrow$ حذف گزینهٔ (۴)

$k=۱ \Rightarrow x=۷, y=-۲ \Rightarrow$ حذف گزینه‌های (۱) و (۳)

هر دو مقدار y و x در گزینهٔ (۲) صدق می‌کنند.

تیزبازی جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+by=c$ با فرض $(a,b)=۱$ به یکی از دو صورت $\begin{cases}x=bk+x_۰\\y=-ak+y_۰\end{cases}$ یا $\begin{cases}x=-bk+x_۰\\y=ak+y_۰\end{cases}$ است، یعنی یکی از ضرایب a و b در جواب‌های معادله قرینه می‌شود، بنابراین با توجه به جواب‌های $\begin{cases}x=۶k+۱\\y=-۵k+۳\end{cases}$ قطعاً هر دو ضریب a و b در معادلهٔ سیاله مثبت هستند و گزینه‌های (۱) و (۳) نیازی به بررسی نداشته و نادرست هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸ چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که مضرب ۷ بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۸ و ۱۱ به ترتیب ۳ و ۸ باشد؟

۱) ۶

۲) ۴

۳) ۲

۴) صفر

نکته

۱) $ac \overset{m}{\equiv} bc\ ,\ (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

۲) $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:**

$$a=7k \Rightarrow 100 \le 7k \le 999 \Rightarrow 15 \le k \le 142$$

گام دوم:

$$\left.\begin{matrix} 7k \overset{8}{\equiv} 3+4\times 8 \overset{8}{\equiv} 35 \xrightarrow[\div 7]{(7,8)=1} k \overset{8}{\equiv} 5+8\times 6 \overset{8}{\equiv} 53 \\ 7k \overset{11}{\equiv} 8+5\times 11 \overset{11}{\equiv} 63 \xrightarrow[\div 7]{(7,11)=1} k \overset{11}{\equiv} 9+4\times 11 \overset{11}{\equiv} 53 \end{matrix}\right\} \Rightarrow k \overset{88}{\equiv} 53$$

گام سوم:

$$k \overset{88}{\equiv} 53 \Rightarrow k=88q+53\ ,\ (q \in \mathbb{Z})$$

گام چهارم: از گام اول می‌دانیم $15 \le k \le 142$؛ بنابراین داریم:

$$15 \le 88q+53 \le 142 \Rightarrow q=0\ ,\ 1$$

SanjeshCloud

۹ اگر عدد $۲x^۲ - x - ۶$ مضرب ۵۳ باشد، اختلاف دو عدد سه‌رقمی مثبت برای x، حداکثر چه‌قدر است؟

۱) ۸۲۵

۲) ۸۴۸

۳) ۸۶۲

۴) ۸۷۱

نکته

- اگر عدد b مضرب عدد a باشد یعنی a، b را می‌شمارد یا $a \mid b$.
- جواب‌های معادلهٔ $(x-a)(x-b) \overset{m}{\equiv} ۰$ در صورتی‌که m عددی اول باشد، به صورت $\begin{cases} x \overset{m}{\equiv} a \\ x \overset{m}{\equiv} b \end{cases}$ است، ولی اگر m عدد اول نباشد، این نتیجه‌گیری در حالت کلی درست نیست.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:**

$$۵۳ \mid ۲x^۲ - x - ۶ = (۲x+۳)(x-۲)$$

گام دوم: ۵۳ عددی اول است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} ۲x + ۳ \overset{۵۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲x \overset{۵۳}{\equiv} -۳ + ۵۳ \overset{۵۳}{\equiv} ۵۰ \xrightarrow[\div ۲]{(۲,۵۳)=۱} x \overset{۵۳}{\equiv} ۲۵ \Rightarrow x = ۵۳k + ۲۵ \\ \text{یا} \\ x - ۲ \overset{۵۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x \overset{۵۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow x = ۵۳k' + ۲ \end{cases}$$

گام سوم: کم‌ترین مقدار برای x و بیشترین مقدار برای x را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} x_{max} = ۵۳ \times ۱۸ + ۲۵ = ۹۷۹ \\ x_{min} = ۵۳ \times ۲ + ۲ = ۱۰۸ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{max} - x_{min} = ۸۷۱$$

۱۰ اگر $(a,b)=d$ و $[a,b]=c$، آن‌گاه چند مورد از معادله‌های زیر قطعاً جواب دارد؟

الف) $ax+by=c$

ب) $ax+by=d$

پ) $ax+dy=2b-3a$

ت) $cx+by=c-2b$

ث) $dx+cy=a-b$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

نکته شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $(a,b)\mid c$.

درس Box ویژگی‌های عادکردن:

۱) $d\mid a, d\mid b \Rightarrow d\mid ma\pm nb$

۲) $(a,b)=d \Rightarrow d\mid a, d\mid b$

۳) $[a,b]=c \Rightarrow a\mid c, b\mid c$

۴) $(a,b)\mid[a,b]$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ شرط جواب را در هر کدام از معادله‌های سیاله چک می‌کنیم:

الف) $(a,b)\mid c$ ✓ (۴) نکتهٔ

ب) $(a,b)\mid d$ ✓

پ) $(a,b)=d \Rightarrow d\mid a, d\mid b \Rightarrow d\mid 2b-3a$

$(a,d)=d \Rightarrow (a,d)\mid 2b-3a$ ✓

ت) $[a,b]=c \Rightarrow b\mid c, b\mid b \Rightarrow b\mid c-2b$ (۱)

$(c,b)=([a,b],b)=b \overset{(1)}{\Rightarrow} (c,b)\mid c-2b$ ✓

ث) $(a,b)=d \Rightarrow d\mid a, d\mid b \Rightarrow d\mid a-b$ (۲)

$(d,c)=((a,b),[a,b])=(a,b)=d \overset{(2)}{\Rightarrow} (d,c)\mid a-b$ ✓

بنابراین همهٔ معادله‌ها جواب دارند.

گزینه دو

آزمون ۲۵ مهر ۱۴۰۴

گسسته

۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- (مثال نقض): مثالی برای رد کردن یک حکم کلی را مثال نقض می‌گویند.
- (اثبات مستقیم): استدلال براساس نتیجه‌گیری منطقی از مفروضات و واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

جوابش اینه

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ ۱: درست؛ با فرض $n \in \mathbb{N}$، داریم:

$$n+n+1+n+2 = 3n+3 = 3\underbrace{(n+1)}_{k} = 3k \quad \text{مجموع سه‌عدد طبیعی متوالی}$$

گزینهٔ ۲: درست؛ طبق ویژگی‌های جزء صحیح رابطهٔ $[x-y]=[x]-y$ برای $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{Z}$ برقرار است.

گزینهٔ ۳: درست؛ با فرض $a \in \mathbb{Z}$، داریم:

$$k = 3a(3a-2) = 9a^2-6a$$
$$\Rightarrow k+1 = 9a^2-6a+1 = (3a-1)^2$$

گزینهٔ ۴: نادرست؛ مثال نقض زیر را ببینید.

$$B=\{1,2,3,4\}\ ,\ C=\{2,3,4,5\}\ ,\ A=\{1,5,7\}$$
$$\begin{cases} B-A=\{2,3,4\} \\ C-A=\{2,3,4\} \end{cases} \Rightarrow B-A=C-A\ ,\ B\neq C$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- (اثبات بازگشتی): در اثبات برخی نامساوی‌های ریاضی، ابتدا عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم. آنگاه با بازگشت از مسیر طی‌شده به نامساوی اولیه می‌رسیم و ازآنجایی‌که همهٔ عملیات مسیر رفت، بازگشت‌پذیرند به این نوع اثبات، «اثبات بازگشتی» می‌گوییم.

جوابش اینه

با استفاده از اثبات بازگشتی، رابطهٔ داده‌شده را با تشکیل مربع کامل به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2-6x+9-9+4y^2+4y+1-1+4m \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(2y+1)^2+4m-10 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(2y+1)^2 \geq 10-4m$$

برای آنکه نامساوی بالا، همواره برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$10-4m \leq 0 \Rightarrow 4m \geq 10 \Rightarrow m \geq \frac{10}{4}$$
$$\Rightarrow m \geq 2/5 \Rightarrow \text{کمترین مقدار صحیح} = 3$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)**

جوابش اینه

توجه کنید که مخرج نباید صفر باشد، پس $x \neq ۰$ و $y \neq ۰$، حال با ضرب طرفین رابطهٔ داده‌شده در xy، داریم:

$$۱+\frac{۲}{xy}=\frac{۲}{y}+\frac{۱}{x} \xrightarrow{\times xy} xy+۲=۲x+y \Rightarrow xy-y+۲-۲x=۰$$

$$\Rightarrow y(x-۱)-۲(x-۱)=۰ \Rightarrow (x-۱)(y-۲)=۰ \Rightarrow x=۱ \quad \text{یا} \quad y=۲$$

با توجه به شرایط گفته‌شده، تعداد زوج‌مرتب‌های (x,y) که در آن‌ها $x=۱$ و $۰<y\leq ۱۲$ است، برابر است با:

$$(۱,y) \ , \ y=۱,۲,\ldots,۱۲ \Rightarrow \text{تعداد}=۱۲$$

همچنین تعداد زوج‌مرتب‌های (x,y) که $y=۲$ و $۰<x<۱۰$ است، برابر است با:

$$(x,۲) \ , \ x=۱,۲,\ldots,۹ \Rightarrow \text{تعداد}=۹$$

توجه کنید که زوج‌مرتب $(۱,۲)$ دو بار محاسبه شده است، پس تعداد کل زوج‌مرتب‌ها برابر است با: $۱۲+۹-۱=۲۰$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)**

جوابش اینه

با جای‌گذاری $n=۲k-۱$ در $A=n^۳-۵n+۹$ داریم:

$$A=(۲k-۱)^۳-۵(۲k-۱)+۹=۸k^۳-۱۲k^۲+۶k-۱-۱۰k+۵+۹=۸k^۳-۱۲k^۲-۴k+۱۳$$

$$\Rightarrow A=۸k^۳-۱۲k^۲-۴k+۱۴-۱=۲(\underbrace{۴k^۳-۶k^۲-۲k+۷}_{q})-۱=۲q-۱$$

بنابراین: $q=۴k^۳-۶k^۲-۲k+۷$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)**

خوبه اینو بدونی

- (مثال نقض): مثالی برای رد کردن یک حکم کلی را «مثال نقض» می‌گویند.
- (اثبات به روش برهان خلف): در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجهٔ غیرممکن یا نتیجهٔ متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی‌بودن همهٔ مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

جوابش اینه

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: نادرست؛ مثال نقض زیر را در نظر بگیرید.

$$\alpha=\sqrt{۲} \ , \ \beta=۲\sqrt{۲}+۳ \Rightarrow ۲\alpha-\beta=۲\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}-۳=-۳\in \mathbb{Q}$$

$$\alpha^۲+\beta^۲=۲+(۲\sqrt{۲}+۳)^۲=۲+۸+۹+۱۲\sqrt{۲}=۱۹+۱۲\sqrt{۲}\notin \mathbb{Q}$$

گزینهٔ ۲: نادرست؛ با استفاده از روش برهان خلف اثبات می‌شود که $\alpha+\beta$ گنگ است.

برهان خلف: فرض می‌کنیم $\alpha+\beta$ گویا است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=\text{گویا}\\ ۲\alpha-\beta=\text{گویا}\end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۳\alpha=\text{گویا} \Rightarrow \alpha=\text{گویا}$$

نتیجهٔ بالا، خلاف فرض است، چون α گنگ است، پس فرض خلف باطل و $\alpha+\beta$ الزاماً گنگ است.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ مثال نقض زیر را در نظر بگیرید.

$$\alpha=\sqrt{۲} \ , \ \beta=۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲\alpha-\beta=۲\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}=۰\in \mathbb{Q}$$

$$\alpha\cdot\beta=\sqrt{۲}\times ۲\sqrt{۲}=۴\in \mathbb{Q}$$

گزینهٔ ۴: درست؛ درستی این گزینه به روش برهان خلف اثبات می‌شود.

برهان خلف: فرض می‌کنیم $\alpha+۲\beta$ گویا باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+۲\beta=\text{گویا}\\ ۲\alpha-\beta=\text{گویا}\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha+۲\beta)+۲(۲\alpha-\beta)=\text{گویا} \Rightarrow \alpha+۲\beta+۴\alpha-۲\beta=\text{گویا} \Rightarrow ۵\alpha=\text{گویا} \Rightarrow \alpha=\text{گویا}$$

نتیجهٔ بالا خلاف فرض است، زیرا α گنگ است، پس فرض خلف باطل و $\alpha+۲\beta$ الزاماً گنگ است.

آزمون ۱۶ آبان ۱۴۰۴
گسسته

۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- اگر $a^۲$ زوج و $a \in \mathbb{Z}$، آنگاه a زوج است.

جوابش اینه

چون $\frac{(n+۱)^۲(n+۲)^۲}{۴} = (\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲})^۲$ زوج است، پس طبق نکته، عدد $\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$ نیز زوج است و داریم:

$$\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲} = ۲k \Rightarrow (n+۱)(n+۲) = ۴k$$

چون $n+۱$ و $n+۲$ دو عدد طبیعی متوالی هستند، طبق رابطهٔ بالا یا $n+۱$ مضرب ۴ است یا $n+۲$ مضرب ۴ است، پس دو حالت داریم:

حالت : $n+۱ = ۴k \Rightarrow n = ۴k-۱ \;,\; ۱ \le n < ۵۰ \Rightarrow ۱ \le ۴k-۱ < ۵۰ \Rightarrow ۲ \le ۴k < ۵۱$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \le k < \frac{۵۱}{۴} \Rightarrow k = ۱,۲,\ldots,۱۲ \Rightarrow \text{تعداد} = ۱۲$$

حالت : $n+۲ = ۴k \Rightarrow n = ۴k-۲ \;,\; ۱ \le n < ۵۰ \Rightarrow ۱ \le ۴k-۲ < ۵۰ \Rightarrow ۳ \le ۴k < ۵۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴} \le k < \frac{۵۲}{۴}$

$$\Rightarrow k = ۱,۲,\ldots,۱۲ \Rightarrow \text{تعداد} = ۱۲$$

بنابراین تعداد کل برابر است با:

$$۱۲+۱۲ = ۲۴$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

$$a \mid b \Leftrightarrow a^n \mid b^n \;,\; (n \in \mathbb{N})$$

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}; a \mid b \Rightarrow \begin{cases} (a,b) = |a| \\ [a,b] = |b| \end{cases}$$

جوابش اینه

با استفاده از فرض سؤال و نکات بالا، داریم:

$$a^۵ \mid b^۳ \Rightarrow a^۵ \mid b^۳ \times b^۲ \Rightarrow a^۵ \mid b^۵ \Rightarrow a \mid b \Rightarrow a^۴ \mid b^۴ \Rightarrow (a^۴, b^۴) = |a^۴| = a^۴$$

همچنین:

$$a^۵ \mid b^۳ \Rightarrow a^۵ \mid b^۳ \times b^۴ \Rightarrow a^۵ \mid b^۷ \Rightarrow (a^۵, b^۷) = |a^۵|$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$[(a^۵,b^۷),(a^۴,b^۴)] = [|a^۵|, a^۴] \;,\; a^۴ \mid |a^۵| \Rightarrow [|a^۵|, a^۴] = |a^۵|$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- به $mb+nc$ وقتی m و n اعداد دلخواهی هستند، ترکیب خطی b و c می‌گویند. اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آنگاه a هر ترکیب خطی b و c را هم عاد می‌کند.

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid mb+nc$$

جوابش اینه

در رابطهٔ $y=\frac{3x^2+1}{x+2}$، x و y اعداد صحیح هستند، پس باید $3x^2+1$ بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{matrix} x+2\mid 3x^2+1 \\ \text{از طرفی}: x+2\mid x+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+2\mid 3x(x+2)-(3x^2+1) \Rightarrow x+2\mid 3x^2+6x-3x^2-1 \Rightarrow x+2\mid 6x-1$$

$$\left.\begin{matrix} x+2\mid 6x-1 \\ x+2\mid x+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+2\mid 6(x+2)-(6x-1) \Rightarrow x+2\mid 13$$

$x+2$ مقسوم‌علیه‌های ۱۳ است، پس:

$$x+2=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \Rightarrow y=-28 \\ x=-1 \Rightarrow y=4 \end{cases}$$

$$x+2=\pm 13 \Rightarrow \begin{cases} x=11 \Rightarrow y=28 \\ x=-15 \Rightarrow y=-52 \end{cases}$$

بنابراین چهار نقطه با مختصات صحیح وجود دارد. ولی فقط دوتا از آن‌ها یعنی نقاط $(-28,-3)$ و $(-52,-15)$ در ناحیهٔ سوم قرار دارند.

۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- $a\mid b \Leftrightarrow a^n\mid b^n \;,(n\in\mathbb{N})$
- $a\mid b \Rightarrow na\mid nb$
- هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a\mid b\wedge a\mid c \Rightarrow a\mid b\pm c}$$

جوابش اینه

ابتدا طبق خواص عاد کردن، طرفین $11\mid 7k+3$ را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$11^2\mid (7k+3)^2 \Rightarrow 121\mid 49k^2+42k+9$$

از طرفی:

$$11\mid 7k+3 \xrightarrow{\times 11} 11^2\mid 11(7k+3) \Rightarrow 121\mid 77k+33$$

حال داریم:

$$\left.\begin{matrix} 121\mid 49k^2+42k+9 \\ 121\mid 77k+33 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 121\mid 49k^2+42k+9+77k+33$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 121\mid 49k^2+119k+42 \\ \text{از طرفی}: 121\mid 49k^2+119k+29+\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow 121\mid 49k^2+119k+29+\alpha-(49k^2+119k+42)$$

$$\Rightarrow 121\mid 29+\alpha-42 \Rightarrow 121\mid \alpha-13 \Rightarrow \alpha-13=121k \Rightarrow \alpha=121k+13$$

$$k=1 \Rightarrow \alpha=121+13=134$$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- به $mb+nc$ وقتی m و n اعداد دلخواهی هستند، ترکیب خطی b و c می‌گویند. اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آنگاه a هر ترکیب خطی b و c را هم عاد می‌کند.

$$\left.\begin{matrix} a\mid b \\ a\mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\mid mb+nc$$

- عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

الف) $d\mid a, d\mid b$

ب) $\forall m>0; m\mid a, m\mid b \Rightarrow m\le d$

SanjeshCloud

جوابش اینه

فرض می‌کنیم ب.م.م دو عدد $n-4$ و $3n+17$ برابر d باشد، داریم:

$$(3n+17, n-4) = d$$

$$\left.\begin{matrix} d \mid n-4 \\ d \mid 3n+17 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid 3n+17-3(n-4) \Rightarrow d \mid 29$$

با توجه به اینکه ۲۹ عددی اول است، داریم: $d=1$ یا $d=29$. اگر $d=29$ باشد، داریم:

$$29 \mid n-4 \Rightarrow n-4=29k \Rightarrow n=29k+4, 30 \le n \le 180$$

$$\Rightarrow 30 \le 29k+4 \le 180 \Rightarrow 26 \le 29k \le 176 \Rightarrow \frac{26}{29} \le k \le \frac{176}{29} \Rightarrow k=1,2,3,\ldots,6 \Rightarrow \text{تعداد} = 6$$

به ازای ۶ عدد طبیعی n از $30 \le n \le 180$، دو عدد $n-4$ و $3n+17$ نسبت به هم اول نیستند. تعداد اعداد طبیعی $30 \le n \le 180$ برابر است با:

$$\text{تعداد} = 180-30+1 = 151$$

$$\text{جواب} = 151-6 = 145$$

گزینه دو

آزمون ۷ آذر ۱۴۰۴

گسسته

۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

– مسائل تقویمی: اگر یک روز از تقویم در یک سال معلوم باشد و بخواهیم چندشنبه بودن روز دیگری که از نظر تاریخ، بعد از روز داده‌شده قرار گرفته (آینده) مشخص کنیم. باید اختلاف روزها را به دست آوریم و سپس اختلاف را در پیمانهٔ ۷ کوچک کنیم، یعنی باقی‌ماندهٔ آن را بر ۷ بیابیم و در انتها به‌اندازهٔ باقی‌مانده با شروع از روز معلوم پیش می‌رویم تا به جواب برسیم.

جوابش اینه

تعداد روزها از ۱۵ اردیبهشت تا ۲۰ آذر را محاسبه می‌کنیم.

$$۱۶+۴\times۳۱+۲\times۳۰+۲۰=۱۶+۱۲۴+۶۰+۲۰=۲۲۰$$

حال باقی‌ماندهٔ ۲۲۰ بر ۷ را می‌یابیم.

$$۲۲۰ \overset{۷}{\equiv} ۲۲۰-۳۰\times۷ \overset{۷}{\equiv} ۲۲۰-۲۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow ۲۲۰ \overset{۷}{\equiv} ۱۰-۷ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

اگر از دوشنبه ۳ روز جلو برویم به پنج‌شنبه می‌رسیم.

۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

– عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

الف) $d\mid a, d\mid b$

ب) $\forall m>۰; m\mid a, m\mid b \Rightarrow m\le d$

جوابش اینه

با توجه به تعریف ب.م.م، داریم: $(۵n,۸۱)=n \Rightarrow n\mid ۸۱ \Rightarrow n\mid ۳^۴$

چون ب.م.م برابر n است، پس n عدد طبیعی است و طبق رابطهٔ بالا، n مقسوم‌علیه‌های طبیعی $۳^۴$ است و داریم:

$$n=۱,۳,۳^۲,۳^۳,۳^۴$$

$$n=۱ \Rightarrow (۵\times۱,۸۱)=۱$$

$$n=۳ \Rightarrow (۵\times۳,۸۱)=۳$$

$$n=۳^۲ \Rightarrow (۵\times۳^۲,۸۱)=۳^۲$$

$$n=۳^۳ \Rightarrow (۵\times۳^۳,۸۱)=۳^۳$$

$$n=۳^۴ \Rightarrow (۵\times۳^۴,۸۱)=۳^۴$$

بنابراین برای n، پنج مقدار وجود دارد.

۳ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- اگر عدد a، عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$\boxed{a|b \Rightarrow a|mb}$$

- $\forall a,b,c\in\mathbb{Z};ab|c \Rightarrow a|c\wedge b|c$
- $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n \ ,(n\in\mathbb{N})$
- $a|b \Rightarrow na|nb$

جوابش اینه

با استفاده از خواص عاد کردن داریم:

$$۳a^۳|b^۲ \Rightarrow a^۳|b^۲ \Rightarrow a^۳|b^۲\times b \Rightarrow a^۳|b^۳ \Rightarrow a|b$$

حال از رابطهٔ بالا می‌توان نتایج زیر را به‌دست آورد.

گزینهٔ ۱: $a|b \Rightarrow a|۴b$

گزینهٔ ۲: $a|b \Rightarrow a^۲|b^۲ \Rightarrow a^۲|b^۲\times b \Rightarrow a^۲|b^۳$

برای اثبات درستی گزینهٔ ۴ داریم:

$$۳a^۳|b^۲ \Rightarrow a^۲(۳a)|b^۲ \Rightarrow ۳a|b^۲ \xrightarrow{\times ۲b} ۲b\times ۳a|۲b\times b^۲ \Rightarrow ۶ab|۲b^۳$$

برای رد کردن گزینهٔ ۳ مثال نقض زیر را در نظر بگیرید.

$$a=۲^۲,b=۳\times ۲^۳ \Rightarrow ۳a^۳|b^۲ \Rightarrow ۳\times ۲^۶|۳^۲\times ۲^۶$$
$$a^۵=۲^{۱۰},b^۳=۳^۳\times ۲^۹ \Rightarrow ۲^{۱۰}\not|\ ۳^۳\times ۲^۹ \Rightarrow a^۵\not|\ b^۳$$

۴ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$\boxed{a|b \Rightarrow a|mb}$$

- هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a|b\wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c}$$

- به $mb+nc$ وقتی m و n اعداد دلخواهی هستند، ترکیب خطی b و c می‌گویند. اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آنگاه a هر ترکیب خطی b و c را هم عاد می‌کند.

$$\left.\begin{matrix}a|b\\a|c\end{matrix}\right\} \Rightarrow a|mb+nc$$

جوابش اینه

با استفاده از خواص عاد کردن، در سمت راست، متغیر n را حذف می‌کنیم.

$$a|n-۳ \Rightarrow a|(n-۳)(n+۳) \Rightarrow a|n^۲-۹$$
$$\left.\begin{matrix}a|n^۲-۹\\a|n^۲+۴n\end{matrix}\right\} \Rightarrow a|n^۲+۴n-(n^۲-۹) \Rightarrow a|n^۲+۴n-n^۲+۹ \Rightarrow a|۴n+۹$$

حال با استفاده از روابط $a|۴n+۹$ و $a|n-۳$ داریم:

$$\left.\begin{matrix}a|۴n+۹\\a|n-۳\end{matrix}\right\} \Rightarrow a|(۴n+۹)-۴(n-۳) \Rightarrow a|۴n+۹-۴n+۱۲ \Rightarrow a|۲۱$$

بنابراین a، مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۲۱ است، پس:

$$a=۱,۳,۷,۲۱$$

برای a، ۴ مقدار متمایز طبیعی وجود دارد.

اینجوری هم میشه

ریشهٔ $n-3=0$ را یافته و در رابطهٔ $a \mid n^2+4n$ قرار می‌دهیم.

$$n-3=0 \Rightarrow n=3 \Rightarrow a \mid 9+4\times 3 \Rightarrow a \mid 21$$

ادامهٔ حل مانند روش قبل است.

۵ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- قضیهٔ تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a=bq+r$ و $0 \le r < b$.

جوابش اینه

طبق نکتهٔ فوق و فرض سؤال، داریم:

$$\left.\begin{matrix} a=bq+13, 13<b \\ 5a=bq'+27, 27<b \end{matrix}\right\} \Rightarrow 27<b$$

طرفین رابطهٔ $a=bq+13$ را در ۵ ضرب کرده و داریم:

$$\left.\begin{matrix} 5a=5bq+65 \\ 5a=bq'+27 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ازهم کم می‌کنیم}} 5bq+65-bq'-27=0 \Rightarrow bq'-5bq=65-27 \Rightarrow b(q'-5q)=38 \Rightarrow b \mid 38$$

b مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۳۸ است، پس:

$$b=1,2,19,38$$

چون $b>27$، پس $b=38$ است و مجموع ارقام آن برابر است با: $3+8=11$

۶ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

- می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

- دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. $(n \in \mathbb{N})$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

جوابش اینه

با استفاده از خواص هم‌نهشتی، داریم:

$$27 \overset{13}{\equiv} 27 \Rightarrow 27 \overset{13}{\equiv} 27-2\times 13 \Rightarrow 27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (27)^{34} \overset{13}{\equiv} 1$$

$$12 \overset{13}{\equiv} 12 \Rightarrow 12 \overset{13}{\equiv} 12-13 \overset{13}{\equiv} -1 \Rightarrow (12)^{13} \overset{13}{\equiv} (-1)^{13} \Rightarrow (12)^{13} \overset{13}{\equiv} -1$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$A=(27)^{34}-(12)^{13}-7 \overset{13}{\equiv} 1-(-1)-7 \overset{13}{\equiv} -5 \overset{13}{\equiv} -5+13 \overset{13}{\equiv} 8$$

۷ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

- می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc, (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

- مجموعهٔ اعدادی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد m، مساوی عدد r باشد، با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم و به آن کلاس هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌گوییم.

$$[r]_m = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x \overset{m}{\equiv} r \right\} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r \}$$

جوابش اینه

می‌دانیم هر مضربی از پیمانه با عدد صفر هم‌نهشت است، پس داریم:

$$۱۷a + \underbrace{۲۰b}_{\text{مضرب ۵}} \overset{۵}{\equiv} ۳۱ \Rightarrow ۱۷a + ۰ \overset{۵}{\equiv} ۳۱ \Rightarrow ۱۷a \overset{۵}{\equiv} ۳۱$$

حال با استفاده از خواص هم‌نهشتی، داریم:

$$۱۷a - ۳a \times ۵ \overset{۵}{\equiv} ۳۱ - ۵ \times ۶ \Rightarrow ۲a \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲a \overset{۵}{\equiv} ۱ + ۵ \Rightarrow ۲a \overset{۵}{\equiv} ۶ \xrightarrow[(۲,۵)=۱]{\div ۲} a \overset{۵}{\equiv} ۳$$

پس باقی‌ماندهٔ a بر ۵ برابر ۳ است و $a \in [۳]_۵$

۸ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس‌های ۲ و ۳)**

خوبه اینو بدونی

- مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸k+۱$ است، یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ برابر یک است.

$$a \text{ فرد} \Rightarrow a^۲ = ۸k + ۱$$

- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b برابر r باشد، داریم: $۰ \le r < b \ , \ a \overset{b}{\equiv} r$

- دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. $(n \in \mathbb{N})$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

- می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \overset{m}{\equiv} b + mk \\ a - mt \overset{m}{\equiv} b - mk \end{cases}$$

جوابش اینه

عدد $!۱۳$ عددی زوج است؛ زیرا حداقل یک عامل ۲ دارد. a عددی فرد است، پس $!۱۳ + a$ عددی فرد است. از طرفی عدد فرد $!۱۳ + a$ بر b بخش‌پذیر است، $(b \mid !۱۳ + a)$ پس b نیز فرد است. حال طبق نکات بالا، داریم:

$$a \text{ فرد است} \Rightarrow a^۲ = ۸q + ۱ \Rightarrow a^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان ۷}} (a^۲)^۷ \overset{۸}{\equiv} ۱^۷ \Rightarrow a^{۱۴} \overset{۸}{\equiv} ۱$$

$$b \text{ فرد است} \Rightarrow b^۲ = ۸q' + ۱ \Rightarrow b^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان ۱۱}} (b^۲)^{۱۱} \overset{۸}{\equiv} ۱^{۱۱} \Rightarrow b^{۲۲} \overset{۸}{\equiv} ۱$$

خواستهٔ سؤال برابر است با: $۲a^{۱۴} - b^{۲۲} - ۴ \overset{۸}{\equiv} ۲ \times ۱ - ۱ - ۴ \overset{۸}{\equiv} -۳ \overset{۸}{\equiv} -۳ + ۸ \overset{۸}{\equiv} ۵$

باقی‌مانده برابر ۵ است.

۹ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آن‌ها برابر با قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد است و برعکس.

$$(a,b) = ۱ \Leftrightarrow [a,b] = |ab|$$

SanjeshCloud

جوابش اینه

از فرض سؤال، داریم:

$$[۱۳, n-۳] = ۱۳n - ۳۹ = ۱۳(n-۳)$$

چون ک.م.م ۱۳ و $n-۳$ برابر با حاصل‌ضرب آن‌ها است؛ پس نسبت به هم اول هستند؛ یعنی: $(n-۳, ۱۳) = ۱$ در نتیجه $n-۳$ عامل ۱۳ ندارد.

حال از روش متمم استفاده می‌کنیم، اگر $n-۳$ عامل ۱۳ داشته باشد، یعنی بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، داریم:

$$n-۳ = ۱۳k \Rightarrow n = ۱۳k+۳$$

اعداد دورقمی n را به‌دست آوریم.

$$۱۰ \le ۱۳k+۳ \le ۹۹ \Rightarrow ۷ \le ۱۳k \le ۹۶ \Rightarrow \frac{۷}{۱۳} \le k \le \frac{۹۶}{۱۳} \Rightarrow k = ۱,۲,\dots,۷ \Rightarrow \text{تعداد} = ۷$$

تعداد اعداد دورقمی n که به‌ازای آن‌ها ۱۳ و $n-۳$ نسبت به هم اول هستند برابر است با: $۹۰ - ۷ = ۸۳$

۱۰ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)**

خوبه اینو بدونی

- باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۳ یا ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یا ۹؛ یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-۱} \cdots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۳\text{ یا }۹}{\equiv} a_n + a_{n-۱} + \cdots + a_۲ + a_۱ + a_۰$$

- برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۱ کافی است ارقام آن عدد را از سمت راست یکی‌درمیان مثبت و منفی بنویسیم و با هم جمع کنیم، سپس باقی‌ماندهٔ عدد به‌دست‌آمده را در پیمانهٔ ۱۱ محاسبه کنیم.

$$\overline{a_n a_{n-۱} \cdots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۱۱}{\equiv} a_۰ - a_۱ + a_۲ - \cdots + (-۱)^n a_n$$

- باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۴ برابر با باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد دورقمی حاصل از دو رقم سمت راست آن عدد است، یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-۱} \cdots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۴}{\equiv} \overline{a_۱ a_۰}$$

جوابش اینه

چون عدد ۵ رقمی $N = \overline{a۳۷b۶}$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، پس بر ۴ و ۳ نیز بخش‌پذیر است و طبق نکات فوق داریم:

$$\overline{a۳۷b۶} \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow \overline{b۶} \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۰b+۶ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۰b \overset{۴}{\equiv} -۶ \Rightarrow (۱۰-۲\times۴)b \overset{۴}{\equiv} -۶+۲\times۴ \Rightarrow ۲b \overset{۴}{\equiv} ۲$$

$$\xrightarrow[(۲,۴)=۲]{\div ۲} b \overset{۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow b = ۲k+۱ \xrightarrow{b\text{ رقم است}} b = ۱,۳,۵,۷,۹$$

$$\overline{a۳۷b۶} \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+۳+۷+b+۶ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+b \overset{۳}{\equiv} -۱۶ \Rightarrow a+b \overset{۳}{\equiv} -۱۶+۳\times۶ \Rightarrow a+b \overset{۳}{\equiv} ۲$$

برحسب مقادیر مختلف b، داریم:

$$b=۱ \Rightarrow a+۱ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow a = ۳q+۱ \Rightarrow a = ۱,۴,۷$$

$$b=۳ \Rightarrow a+۳ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a = ۳q+۲ \Rightarrow a = ۲,۵,۸$$

$$b=۵ \Rightarrow a+۵ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} -۳ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a = ۳q \Rightarrow a = ۰,۳,۶,۹$$

$$b=۷ \Rightarrow a+۷ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} -۵+۲\times۳ \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow a = ۳q+۱ \Rightarrow a = ۱,۴,۷$$

$$b=۹ \Rightarrow a+۹ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a = ۳q+۲ \Rightarrow a = ۲,۵,۸$$

بزرگ‌ترین عدد $\overline{۵ab۹}$ به‌ازای $a=۹$ و $b=۵$ به‌دست می‌آید و خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$۵۹۵۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۹-۵+۹-۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۸$$

آزمون ۳۰ آذر

گسسته

۱ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

نکته: برای محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ داده‌شده، ابتدا روزهای هفته را از روز داده‌شده به‌ترتیب زیر کدگذاری می‌کنیم:

روز داده‌شده	یک روز بعد	دو روز بعد	سه روز بعد	چهار روز بعد	پنج روز بعد	شش روز بعد
صفر	۱	۲	۳	۴	۵	۶

سپس فاصلهٔ روز داده‌شده را تا روز خواسته‌شده محاسبه می‌کنیم و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن را بر تعداد روزهای هفته (۷) به‌دست می‌آوریم. روز متناظر با باقی‌ماندهٔ به‌دست آمده طبق جدول جواب است.

ابتدا روزهای هفته را به‌صورت زیر کدگذاری می‌کنیم:

دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یک‌شنبه
صفر	۱	۲	۳	۴	۵	۶

اکنون فاصلهٔ ۲ مهرماه تا ۱۷ اسفندماه را محاسبه می‌کنیم:

آبان، آذر، دی و بهمن

$$n = \underset{\text{مهرماه}}{۲۸} + ۴\times۳۰ + \underset{\text{اسفند}}{۱۷} = ۱۶۵ \Rightarrow ۱۶۵ \overset{۷}{\equiv} ۱۶۵-۲۳\times۷ \overset{۷}{\equiv} ۱۶۵-۱۶۱ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

چون $۴ \overset{۷}{\equiv} ۱۶۵$ ، پس روز متناظر با عدد ۴ در جدول، یعنی جمعه جواب است. پس ۱۷ اسفند روز جمعه است.

۲ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

نکتهٔ ۱: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

نکتهٔ ۲: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc, (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$۷x \overset{۱۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۷x \overset{۱۱}{\equiv} ۹+(۱۱\times۳) \Rightarrow ۷x \overset{۱۱}{\equiv} ۴۲ \xrightarrow[(۷,۱۱)=۱]{\div ۷} x \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \Rightarrow x = ۱۱k+۶$$

SanjeshCloud

۳ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

نکتهٔ ۱: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b برابر r باشد، داریم:

$$0 \le r < b \ , \ a \overset{b}{\equiv} r$$

نکتهٔ ۲: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$، آنگاه $a^k \overset{m}{\equiv} b^k$ و $ka \overset{m}{\equiv} kb$

طبق نکات فوق از فرض داده شده، داریم:

$$a = 9k + 5 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} 5$$

$$\Rightarrow a^2 + 3a + 1 \overset{9}{\equiv} 5^2 + 3(5) + 1 \overset{9}{\equiv} 25 + 15 + 1 \overset{9}{\equiv} 41 - 4 \times 9 \overset{9}{\equiv} 5$$

۴ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

نکته (الگوریتم تقسیم): اگر a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی باشد، آنگاه اعداد یکتای $r, q \in \mathbb{Z}$ وجود دارند به‌طوری که:

$$(0 \le r < b) \ a = bq + r$$

طبق فرض داریم:

$$a = 15q + \frac{2}{3}q$$

با توجه به الگوریتم تقسیم، باید باقی‌مانده از مقسوم‌علیه کوچک‌تر باشد، پس:

$$\frac{2}{3}q < 15 \Rightarrow q < \frac{45}{2} \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} q \le 22$$

برای اینکه $\frac{2}{3}q$ عددی صحیح باشد، باید q مضرب ۳ باشد. بنابراین حداکثر مقدار q برابر ۲۱ است. در نتیجه بزرگ‌ترین مقدار a برابر است با:

$$a = 15 \times 21 + \frac{2}{3} \times 21 = 315 + 14 = 329$$

مجموع ارقام این عدد برابر ۱۴ است.

۵ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

نکتهٔ ۱: برای به‌دست آوردن رقم یکان یک عدد کافیست باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۱۰ را به کمک هم‌نهشتی به‌دست آوریم.

نکتهٔ ۲:

$$a \overset{m}{\equiv} b \wedge c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow \begin{cases} a + c \overset{m}{\equiv} b + d \\ ac \overset{m}{\equiv} bd \end{cases}$$

توجه کنید که از $6!$ به بعد همگی مضرب ۱۰ هستند، زیرا هرکدام حداقل یک عامل ۲ و یک عامل ۵ دارند، پس طبق نکات فوق داریم:

$$2! + 4! + \underbrace{6! + 8! + \cdots + 50!}_{\text{مضرب ۱۰}} \overset{10}{\equiv} 2 + 24 + 0 \overset{10}{\equiv} 26 \overset{10}{\equiv} 26 - 2 \times 10 \overset{10}{\equiv} 6$$

۶ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

نکته: اگر a عددی فرد باشد، آنگاه:

$$a^2 = 8q + 1$$

طبق نکتهٔ فوق، داریم:

$$a \text{ فرد است} \Rightarrow a^2 = 8q + 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 3 = 8q + 4 \\ 3a^2 + 5 = 24q + 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^2 + 3)(3a^2 + 5) = (8q + 4)(24q + 8) = 4\underbrace{(2q + 1)}_{q'} \times 8\underbrace{(3q + 1)}_{q''} = 4q' \times 8q'' = 32t = 2^5 t$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار k، برابر ۵ است.

۷ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

نکته (قضیهٔ تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a = bq + r$ و $0 \le r < b$.

طبق نکتهٔ فوق داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a = bq + 19 \ , \ 19 < b \Rightarrow 2a = 2bq + 38 \\ 2a = bq' + 12 \ , \ 12 < b \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 0 = b(2q - q') + 26$$

$$\Rightarrow b(q' - 2q) = 26 \Rightarrow b \mid 26 \Rightarrow b = 1, 2, 13, 26$$

با توجه به شرط باقی‌ماندهٔ تقسیم $(19 < b)$، تنها مقدار قابل‌قبول $b = 26$ است.

۸ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

نکتهٔ ۱: اگر بخواهیم طرفین یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \ , \ (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

نکتهٔ ۲: معادلهٔ سیالهٔ $ax + by = c$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a,b) \mid c$.

نکتهٔ ۳: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \overset{m}{\equiv} b + mk \\ a - mt \overset{m}{\equiv} b - mk \end{cases}$$

برای اینکه معادلهٔ سیالهٔ $15x + 40y = 7n - 1$ دارای جواب باشد، باید داشته باشیم:

$$(15,40) \mid 7n - 1 \xrightarrow{(15,40)=5} 5 \mid 7n - 1 \Rightarrow 7n - 1 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow 7n \overset{5}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 7n \overset{5}{\equiv} \overbrace{1 + 20}^{21} \xrightarrow[(7,5)=1]{\div 7} n \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow n = 5k + 3$$

اکنون تعداد اعداد سه‌رقمی n را به‌دست می‌آوریم.

$$100 \le n \le 999 \Rightarrow 100 \le 5k + 3 \le 999 \Rightarrow \frac{97}{5} \le k \le \frac{996}{5} \Rightarrow 20 \le k \le 199 \Rightarrow k = 20, 21, \ldots, 199$$

بنابراین تعداد اعداد موردنظر برابر است با:

$$199 - 20 + 1 = 180$$

۹ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

نکتهٔ ۱: باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۳ یا ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یا ۹؛ یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \overset{\text{۳ یا ۹}}{\equiv} a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

نکتهٔ ۲: برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۱ کافی است ارقام آن عدد را از سمت راست یکی‌درمیان مثبت و منفی بنویسیم و با هم جمع کنیم، سپس باقی‌ماندهٔ عدد به‌دست‌آمده را در پیمانهٔ ۱۱ محاسبه کنیم.

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$$

عدد مورد نظر بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر است، بنابراین، طبق نکات، داریم:

$$\begin{cases} \overline{6a73b8} \overset{9}{\equiv} 6 + a + 7 + 3 + b + 8 \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow a + b \overset{9}{\equiv} -24 + 3 \times 9 \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow a + b = 9k + 3 \\ \xrightarrow{a,b \text{ رقم هستند}} a + b = 3 \text{ یا } 12 \\ \overline{6a73b8} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 8 - b + 3 - 7 + a - 6 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a - b \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow a - b = 11k + 2 \Rightarrow a - b = -9, 2 \end{cases}$$

حالت $a - b = -9$ فقط برای $a = 0$ و $b = 9$ ممکن است که در این صورت: $a + b = 12$ یا $a + b = 3$ نمی‌باشد.

پس، $a - b = 2$ است و دو حالت زیر را داریم:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{2} \ , \ b = \frac{1}{2} \quad \text{غیرقابل‌قبول}$$

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 7 \ , \ b = 5$$

SanjeshCloud

۱۰ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

نکتهٔ ۱: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b برابر r باشد، داریم:

$$0 \le r < b \ , \ a \overset{b}{\equiv} r$$

نکتهٔ ۲: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n \quad (n \in \mathbb{N})$

نکتهٔ ۳: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc \quad (c \in \mathbb{Z})$

نکتهٔ ۴: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c \quad (c \in \mathbb{Z})$

$$3^5 = 243 \overset{11}{\equiv} 243 - 22 \times 11 \overset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{13} = (3^5)^2 \times 3^3 \overset{11}{\equiv} (1)^2 \times 27 \overset{11}{\equiv} 27 - 2 \times 11 \overset{11}{\equiv} 5$$

$$\Rightarrow 3^{13} + 19 \overset{11}{\equiv} 5 + 19 \overset{11}{\equiv} 24 - 2 \times 11 \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow (3^{13} + 19)^3 \times 7 \overset{11}{\equiv} 2^3 \times 7 \overset{11}{\equiv} 56 \overset{11}{\equiv} 56 - 5 \times 11 \overset{11}{\equiv} 1$$

۱۱ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

نکته: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n \quad (n \in \mathbb{N})$

باید داشته باشیم: $2^n + 1 \overset{65}{\equiv} 0 \Rightarrow 2^n \overset{65}{\equiv} -1 \ (*)$

ازطرفی داریم:

$$2^6 \overset{65}{\equiv} 64 - 65 \overset{65}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{به توان عدد فرد}} (2^6)^{2k+1} \overset{65}{\equiv} -1 \Rightarrow 2^{12k+6} \overset{65}{\equiv} -1 \ (**)$$

از (*) و از (**) نتیجه می‌گیریم:

$$n = 12k + 6 \xrightarrow{1 \le n \le 49} 1 \le 12k + 6 \le 49 \Rightarrow 0 \le k \le 3 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3$$

$$n = 12k + 6 \xrightarrow{k = 0, 1, 2, 3} n = 6, 18, 30, 42$$

بنابراین ۴ عدد طبیعی n با ویژگی موردنظر وجود دارد.

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال | ۱۷ مهرماه ۱۴۰۴

1. به ازای کدام مقادیر n، عدد $n^۳ - n$ مضرب ۲۴ است؟

۱) هر n طبیعی ۲) n های زوج ۳) n های فرد ۴) هیچ مقدار n

پاسخ: گزینه ۳

درسنامه:

مربع هر عدد صحیح و فرد به صورت $۸q + ۱$ است. یعنی باقی‌مانده‌ی تقسیم مربع هر عدد صحیح و فرد بر ۸ برابر ۱ است. حتماً اثبات این نکته را هم یاد بگیرید.

اثبات: می‌دانیم در ریاضیات گسسته هر عدد فرد به فُرم $۲k + ۱$ یا $۲k - ۱$ نوشته می‌شود.

فرض کنیم عدد فرد دلخواهی همچون $۲k + ۱$ داریم. مربع آن را می‌نویسیم:

$$(۲k+۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۴\underbrace{k(k+۱)}_{\text{حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی}} + ۱ = ۴ \times ۲q + ۱ = ۸q + ۱$$

تذکر حاصل‌ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است. چون حتماً یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد است.

در حالت کلی می‌توان گفت حاصل‌ضرب n عدد متوالی همواره مضرب !n است.

مثلًا حاصل‌ضرب سه عدد متوالی همواره مضرب ۶ است.

رفقای عزیزم اثبات گزاره‌ی بالا حتماً در امتحان نهایی خواهد آمد!

حال به سراغ حل تست برویم.

روش اول:

$$n^۳ - n = n(n^۲ - ۱) = n(n-۱)(n+۱) = ۳k$$

از طرفی اگر n فرد باشد، $n^۲$ به صورت $۸q + ۱$ است و داریم:

$$n^۳ - n = n(n^۲ - ۱) = n(۸q + ۱ - ۱) = ۸k'$$

پس در نهایت خواهیم داشت:

$$n \in \text{فرد}: n^۳ - n = ۲۴k''$$

روش بهتر که قابل استفاده برای همه‌ی شماست، روش دوم است.

روش دوم: عددگذاری!

$n = ۲$ را در نظر می‌گیریم. $n^۳ - n$ برابر ۶ می‌شود که مضرب ۲۴ نیست. پس گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند.

$n = ۳$ را در نظر می‌گیریم. $n^۳ - n$ برابر ۲۴ می‌شود که مضرب ۲۴ است. پس گزینه‌ی (۴) رد می‌شود. بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

2. در اثبات نامساوی $(x^۲ + ۱)(y^۲ + ۱) \geq (xy+۱)^۲$ به روش برهان خلف، تناقض پیش آمده مربوط به کدام‌یک از نامساوی‌های زیر است؟ (x و y دو عدد حقیقی غیرصفر هستند.)

۱) $(x+y)^۲ < ۰$ ۲) $(x-y)^۲ < ۰$ ۳) $(xy-۱)^۲ < ۰$ ۴) $(xy+۱)^۲ < ۰$

پاسخ: گزینه ۲

برای اثبات به روش برهان خلف، نقیض حکم داده شده را بررسی کرده تا به تناقض برسیم:

$$(x^۲+۱)(y^۲+۱)<(xy+۱)^۲ \rightarrow x^۲y^۲+x^۲+y^۲+۱<x^۲y^۲+۲xy+۱$$
$$\rightarrow x^۲+y^۲<۲xy \rightarrow x^۲-۲xy+y^۲<۰ \rightarrow (x-y)^۲<۰ \quad \times$$

به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

3. چه تعداد از گزاره‌های زیر به کمک مثال نقض رد می‌شود؟

آ) عدد $۲^{۲^n}+۱$ به ازای nهای طبیعی همواره عددی اول است.

ب) عدد $۲^n+۱$ فقط به ازای یک مقدار طبیعی n، اول نیست.

پ) $[x+y]=[x]+[y]$

ت) $|[x]|=[|x|]$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

مثال نقض: اگر استدلالی به صورت $p \Rightarrow q$ در نظر بگیریم، برای نقض کردن آن باید مثالی بزنیم که $p \equiv T$ و $q \equiv F$ باشد، یعنی مثال نقضی که می‌زنیم باید شرایط فرض مسئله را برقرار کند ولی حکم در آن صادق نشود.

در کتاب ما تنها روش برای رد کردن یک گزاره مثال نقض است. ولی روش‌های اثبات زیاد است. پس هرگاه با گزاره‌ای نادرست مواجه شدیم، حتماً باید با مثال نقض آن را رد کنیم.

حالا به سراغ حل تست برویم:

الف) مثال نقض: $n=۵$

ب) مثال نقض: $n=۳,۵,...$ مقدار بیش از یک

پ) مثال نقض: $x=y=۱/۵$

ت) مثال نقض: $x=-۰/۲$

همه‌ی موارد مثال نقض دارند. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

4. در اثبات گزاره‌ی $a^۲+ab+b^۲\geq ۰$ به روش بازگشتی، به عبارت بدیهی زیر رسیده‌ایم. حاصل $m+n$ کدام است؟

$(a+mb)^۲+nb^۲\geq ۰$

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۷۵

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

اثبات بازگشتی: اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، آن‌گاه داریم:

p هم‌ارز q است $\Leftrightarrow$ گزاره‌ی q $\Leftrightarrow$ p ارزش درست داشته باشد.

در این روش با توجه به سواد ریاضی خودمان، عبارت موردنظر را تا حدی ساده می‌کنیم که به عبارتی بدیهی (همواره درست) برسیم. دقت کنید که در این نوع استدلال باید از $\Leftrightarrow$ استفاده شود.

حل تست:

$$a^۲+ab+b^۲\geq ۰ \Leftrightarrow \underbrace{(a+\frac{۱}{۲}b)^۲}_{\text{همواره}+}+\underbrace{\frac{۳}{۴}b^۲}_{\text{همواره}+}\geq ۰ \quad \text{بدیهی}$$

با مقایسه رابطه اخیر و صورت تست، مشخص می‌شود:

$$\begin{cases} m=\frac{۱}{۲} \\ n=\frac{۳}{۴} \end{cases} \rightarrow m+n=۱/۲۵$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

5. تعداد اعداد پنج رقمی مضرب ۱۲ که مکعب کامل باشند، کدام است؟ ($\sqrt[۳]{۱۰}\simeq ۲/۱۵$)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۱

عدد مکعب کاملی که مضرب ۱۲ باشد، حداقل دارای سه عامل ۲ و سه عامل ۳ خواهد بود.

یعنی حداقل دارای سه عامل ۶ است. در نتیجه مضرب $۲۱۶=۶^۳$ است و به صورت $۲۱۶k^۳$ نوشته می‌شود. از طرف دیگر عدد موردنظر پنج رقمی است. بنابراین:

$$۱۰۰۰۰\leq ۲۱۶k^۳<۱۰۰۰۰۰ \xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }} ۱۰\sqrt[۳]{۱۰}\leq ۶k<۱۰\sqrt[۳]{۱۰۰} \rightarrow ۱۰\times ۲/۱۵\leq ۶k<۱۰\times(۲/۱۵)^۲ \rightarrow ۲۱/۵\leq ۶k<۴۶/۲$$

$$\xrightarrow{\div ۶} ۳/۵۸\leq k<۷/۷ \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} ۴\leq k\leq ۷ \rightarrow k=۴,۵,۶,۷$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

6. نامساوی $n!>۲^n$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند مثال نقض دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

nهای طبیعی را بررسی می‌کنیم:

$n=۱ : ۱!>۲^۱$ ✗

$n=۲ : ۲!>۲^۲$ ✗

$n=۳ : ۳!>۲^۳$ ✗

$n=۴ : ۴!>۲^۴$ ✓

$n=۵ : ۵!>۲^۵$ ✓

⋮

این نامساوی به ازای nهای بزرگ‌تر یا مساوی ۴ همواره برقرار است. پس به ازای $n=۱,۲,۳$ نقض می‌شود. بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

7. در اثبات حکم «اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $۳n$ مضرب ۲ است یا $n+۱$ زوج است.» به روش برهان خلف، فرض خلف کدام است؟

۱) n عددی طبیعی نباشد.
۲) $۳n$ مضرب ۲ است و $n+۱$ زوج است.
۳) $۳n$ مضرب ۲ نیست یا $n+۱$ فرد است.
۴) $۳n$ فرد است و $n+۱$ زوج نیست.

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

نقیض یک گزاره: نقیض گزاره‌ی p با $\sim p$ نمایش داده می‌شود و ارزش آن مخالف p است. یعنی اگر p درست باشد، $\sim p$ گزاره‌ای با ارزش نادرست و بالعکس اگر p نادرست باشد، $\sim p$ گزاره‌ای با ارزش درست است.

P	$\sim P$
د	ن
ن	د

ترکیب فصلی دو گزاره: هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب «p یا q» را ترکیب فصلی آن‌ها نامیده و با $(p \vee q)$ نمایش می‌دهیم.

ترکیب عطفی دو گزاره: هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب «p و q» را ترکیب عطفی آن‌ها نامیده و با «$p \wedge q$» نمایش می‌دهیم.

نقیض کردن گزاره‌های مرکب بالا به شکل زیر انجام می‌شود. (به این روابط، قوانین دمورگان می‌گویند.)

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

مثال: گزاره‌های زیر را نقیض کنید.

الف) کوکب به مدرسه رفت و رادیو را روشن کرد.

نقیض: کوکب به مدرسه نرفت یا رادیو را روشن نکرد.

ب) بتول برای امسال گسسته را مردود می‌شود یا از معلمش تقاضای بخشش می‌کند.

نقیض: بتول برای امسال گسسته را مردود نمی‌شود و از معلمش تقاضای بخشش نمی‌کند.

تمام مطالب این درسنامه مرور سال قبل فصل اول بود.

برهان خلف:

در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آن‌جا معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد. به فرض اول مسئله، فرض خلف گویند.

مثال‌های زیر رو هم خوب بررسی کنید:

مثال: ثابت کنید که حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل: فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است. اگر (فرض خلف) $r+x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل $r+x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r+x-r \in Q$ و از آن‌جا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

مثال: حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل: فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین $(\frac{1}{r})(rx) \in Q$ و از آن‌جا $x \in Q$ که با فرض در تناقض است.

و اما پاسخ تست: برای فرض خلف، حکم مسئله را نقیض کرده و می‌نویسیم. حواستان باشد در گزاره‌های شرطی، حکم مسئله دقیقاً گزاره‌ایست که بعد از کلمه‌ی «آن‌گاه» می‌آید.

در این تست خود گزاره‌ی حکم، گزاره‌ای فصلی است؛ پس طبق قاعده‌ی دمورگان آن را نقیض می‌کنیم.

«$3n$ مضرب ۲ نیست و $n+3$ زوج نیست.»

با دقت در گزینه‌ها، گزینه‌ی (۴) هم‌ارز نتیجه‌گیری ماست.

8. برای اثبات گزاره‌ی «میانگین حسابی دو عدد نامنفی x و y، از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.»

۱) اثبات بازگشتی - $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^۲ \geq ۰$

۲) اثبات در نظر گرفتن همه‌ی حالات - $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^۲ \geq ۰$

۳) اثبات مستقیم - $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^۲ \geq ۰$

۴) اثبات بازگشتی - $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^۲ \geq ۰$

پاسخ: گزینه ۴

این تست دقیقاً مثالی از اثبات بازگشتی در کتاب درسی است. به دلیل اهمیت زیاد آن، یک بار دیگر اثبات آن را مشاهده بفرمایید:

$$\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy} \rightarrow x+y \geq ۲\sqrt{xy} \rightarrow x-۲\sqrt{xy}+y \geq ۰ \rightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^۲ \geq ۰ \quad \text{بدیهی}$$

تمام روابط بالا برگشت‌پذیر هستند.

درسنامه:

به عنوان یک نکته کوچک برای میانگین حسابی و هندسی دو عدد a و b بدانید:

میانگین هندسی: $\sqrt{ab}$ میانگین حسابی: $\frac{a+b}{۲}$

9. اگر x و y و z اعدادی صحیح باشند، معادله‌ی $(x-y)(y-z)(z-x)=۱۴۰۳$ چند جواب متمایز دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

اثبات با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها:

در برخی مسائل، گزاره‌ها حالت‌های مختلفی پیدا می‌کنند. برای اثبات این گزاره‌ها در حالت کلی باید تمامی حالات را بررسی کنیم. به زبان ریاضی:

قضیه: $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

و می‌توان این قضیه را به n گزاره نیز تعمیم داد:

$$(p_۱ \vee p_۲ \vee \ldots \vee p_n) \Rightarrow r \equiv (p_۱ \Rightarrow r) \wedge (p_۲ \Rightarrow r) \wedge \ldots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

نکته اگر a و b اعدادی صحیح باشند، ثابت می‌کنیم $ab(a \pm b)$ همواره عددی زوج است.

برای اثبات در حالت کلی باید سه حالت زیر را در نظر گرفته و گزاره‌ی موردنظر را در هر سه حالت اثبات کنیم:

۱) a و b هر دو زوج باشند:

$$\text{زوج} \times \text{زوج} \times (\text{زوج} \pm \text{زوج}) = \text{زوج} \quad \checkmark$$

۲) a و b هر دو فرد باشند:

$$\text{فرد} \times \text{فرد} \times \underbrace{(\text{فرد} \pm \text{فرد})}_{\text{زوج}} = \text{زوج} \quad \checkmark$$

۳) یکی از a و b فرد و دیگری زوج باشد:

$$\text{فرد} \times \text{زوج} \times (\text{فرد} \pm \text{زوج}) = \text{زوج} \quad \checkmark$$

بنابراین گزاره‌ی بالا را برای همیشه پذیرفته و گوشه‌ی ذهن خود نگه می‌داریم.

حال برای حل این تست داریم:

$$\begin{cases} x-y=a \\ y-z=b \end{cases} \xrightarrow{(+)} x-z=a+b$$

بنابراین سوال تعداد جواب‌های معادله‌ی $ab(a+b)=۱۴۰۳$ را از ما خواسته است. از طرفی می‌دانیم عبارت $ab(a+b)$ همواره زوج است و نمی‌تواند با عددی فرد برابر شود. پس این معادله هیچ جوابی ندارد.

$$\underbrace{ab(a+b)}_{\text{زوج}}=\underbrace{۱۴۰۳}_{\text{فرد}} \quad \times$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

10. اگر $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $n\in S$ و حاصل $۱^۲+۲^۲+...+n^۲$ همواره فرد باشد، مجموع مقادیر قابل‌قبول برای n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۷

پاسخ: گزینه ۳

نکته

$$۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+...+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

حال با استفاده از این نکته داریم:

$$\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}=\text{فرد}$$

اعضای مجموعه را امتحان می‌کنیم:

$n=۱:\ \frac{۱\times۲\times۳}{۶}=۱$ فرد ✓

$n=۲:\ \frac{۲\times۳\times۵}{۶}=۵$ فرد ✓

$n=۳:\ \frac{۳\times۴\times۷}{۶}=۱۴$ زوج ×

$n=۴:\ \frac{۴\times۵\times۹}{۶}=۳۰$ زوج ×

$n=۵:\ \frac{۵\times۶\times۱۱}{۶}=۵۵$ فرد ✓

$n=۶:\ \frac{۶\times۷\times۱۳}{۶}=۹۱$ فرد ✓

بنابراین به ازای $n=۱,۲,۵,۶$ شرط مسئله برآورده شده است.

مجموع این مقادیر قابل‌قبول برابر ۱۴ است.

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

11. اگر ارزش گزاره‌ی $p\vee(\sim q\vee r)$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره‌ی زیر درست است؟

۱) $(p\vee r)\vee(q\wedge p)$ ۲) $(p\wedge q)\vee r$

۳) $(p\wedge\sim r)\vee(\sim p\wedge q)$ ۴) $(\sim p\wedge\sim q\wedge\sim r)\vee p$

پاسخ: گزینه ۳

ارزش یک ترکیب فصلی هنگامی نادرست است که هر دو طرف نادرست باشند.

$$p\vee(\sim q\vee r)\equiv F\rightarrow\begin{cases}p\equiv F\\ \sim q\vee r\equiv F\rightarrow\begin{cases}\sim q\equiv F\rightarrow q\equiv T\\ r\equiv F\end{cases}\end{cases}$$

با توجه به ارزش گزاره‌های r,q,p تمامی گزینه‌ها به جز گزینه‌ی (۳) نادرست‌اند. برای این گزینه داریم:

$$(p\wedge\sim r)\vee(\sim p\wedge q)\equiv(F\wedge T)\vee(T\wedge T)\equiv F\vee T\equiv T$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

12. برای برقراری هم‌ارزی $x,[p\wedge(x\vee\sim p)]\vee[\sim x\wedge(x\vee p)]\equiv\sim p$ کدام گزاره می‌تواند باشد؟

۱) به ازای هر گزاره x ۲) $p\wedge\sim q$ ۳) $\sim p\vee\sim q$ ۴) هرگز برقرار نیست.

پاسخ: گزینه ۴

$$[(p\wedge x)\vee\underbrace{(p\wedge\sim p)}_{F}]\vee[\underbrace{(\sim x\wedge x)}_{F}\vee(\sim x\wedge p)]\equiv(p\wedge x)\vee(p\wedge\sim x)\equiv p\wedge\underbrace{(x\vee\sim x)}_{T}\equiv p$$

پس هم‌ارزی صورت تست همیشه نادرست است و هرگز برقرار نمی‌شود.

13. هم‌ارز منطقی گزاره‌ی $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\sim p\Leftrightarrow T)$ کدام است؟

۱) p ۲) q ۳) $p\Rightarrow q$ ۴) $q\Rightarrow\sim p$

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

ترکیب شرطی دو گزاره: هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب «اگر p، آن‌گاه q» که به صورت «$p\Rightarrow q$» نوشته می‌شود را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

جدول ارزش گزاره‌ای $p\Rightarrow q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p\Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نکته **نکات:**

۱) هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش $p\Rightarrow q$ همواره درست است و به ارزش q (تالی) ربطی ندارد. به این حالت انتفای مقدم می‌گویند.

۲) ارزش گزاره‌ی $p\Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

۳) هم‌ارزی مهمی داریم: $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$

ترکیب دو شرطی دو گزاره: هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ را به صورت $(p\Leftrightarrow q)$ نوشته و آن را ترکیب دو شرطی دو گزاره‌ی p و q می‌نامیم. گزاره‌ی $(p\Leftrightarrow q)$ به صورت‌های زیر خوانده می‌شود:

«p اگر و تنها اگر q» - «اگر p آن‌گاه q و بالعکس» - «p شرط لازم و کافی است برای q».

نکته ارزش گزاره‌ی «$p\Leftrightarrow q$» هنگامی درست است که p و q هم‌ارزش باشند. یعنی یا هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند. در نتیجه هنگامی که p و q هم‌ارزش نباشند، گزاره‌ی $p\Leftrightarrow q$ نادرست است.

نکته به عنوان آخرین نکته بدانید که:

$p \Leftrightarrow T \equiv p$

$p \Leftrightarrow F \equiv p$

این تست را با دو روش حل خواهیم کرد:

روش اول: جبر گزاره‌ها:

$$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow T) \equiv (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \equiv ((\sim p \vee q) \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow (\sim p \vee q)) \equiv$$

$$(\sim (\sim p \vee q) \vee \sim p) \wedge (\sim (\sim p) \vee (\sim p \vee q)) \equiv \underbrace{((p \wedge \sim q) \vee \sim p)}_{\text{توزیع‌پذیری}} \wedge \underbrace{(p \vee (\sim p \vee q))}_{\text{شرکت‌پذیری}} \equiv$$

$$\underbrace{((p \vee \sim p)}_{T} \wedge (\sim q \vee \sim p)) \wedge \underbrace{((p \vee \sim p)}_{T} \vee q) \equiv (\sim q \vee \sim p) \wedge T \equiv \sim q \vee \sim p \equiv q \Rightarrow \sim p$$

روش دوم: ارزش‌گذاری: به گزاره‌های p و q ارزش دلخواه می‌دهیم و صورت سوال را بررسی می‌کنیم. سپس گزینه‌هایی که با ارزش صورت مسئله یکسان نیستند حذف می‌کنیم تا به جواب برسیم. شاید نیاز باشد این عمل را چند بار تکرار کنیم!

$p, q \equiv T \rightarrow$ صورت تست: $(T \Rightarrow T) \Leftrightarrow (F \Leftrightarrow T) \equiv$

$T \Leftrightarrow F \equiv F$

گزینه‌هایی که ارزش آن‌ها F نمی‌شود رد می‌شوند:

۱) T ۲) T ۳) T ۴) F

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

14. اگر p و q گزاره‌هایی دلخواه باشند، با کدام احتمال ارزش گزاره‌ی مرکب $((\sim q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p)$ درست است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

صورت سوال	$\sim q \wedge (p \Rightarrow q)$	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	q	p
د	ن	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	د	ن	د	ن
ن	د	د	د	ن	ن

همان‌طور که مشخص است گزاره‌ی موردنظر در سه حالت از چهار حالت ارزش درست دارد. بنابراین احتمال مطلوب برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

15. عکس نقیض گزاره‌ی شرطی $(p \vee q) \Rightarrow r$ کدام است؟

۱) $\sim r \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ۲) $r \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ۳) $\sim r \vee (\sim p \vee \sim q)$ ۴) $r \vee (\sim p \vee \sim q)$

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

گزاره‌ی « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » و گزاره‌ی « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

نکته هر گزاره‌ی شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

روش اول:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \xrightarrow{\text{عکس نقیض}} \sim r \Rightarrow \sim (p \vee q) \equiv \sim r \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim (\sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

روش دوم: چون می‌دانیم که عکس نقیض هر گزاره با خود آن هم‌ارزش است، می‌توانیم با ارزش‌گذاری نیز به جواب برسیم.

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال | ۱ آبان ماه ۱۴۰۴

۱. کدام گزینه مثال نقضی برای گزاره‌ی «اگر P عددی اول باشد، آنگاه عدد $۲^P - ۱$ اول است.» می‌باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۴

توجه داشته باشید برای یافتن مثال نقض، باید P عددی اول باشد. یعنی با این‌که $۲^۶ - ۱$ اول نیست اما نمی‌توانیم $P = ۶$ را در نظر بگیریم. چون در فرض مسئله صدق نمی‌کند، برای اعداد اول مختلف P خواهیم داشت:

$P = ۲ \rightarrow ۲^۲ - ۱ = ۳$ اول است

$P = ۳ \rightarrow ۲^۳ - ۱ = ۷$ اول است

$P = ۵ \rightarrow ۲^۵ - ۱ = ۳۱$ اول است

$P = ۷ \rightarrow ۲^۷ - ۱ = ۱۲۷$ اول است

$P = ۱۱ \rightarrow ۲^{۱۱} - ۱ = ۲۰۴۷$ اول نیست

دقت داشته باشید که $۲۰۴۷ = ۲۳ \times ۸۹$ و عددی مرکب است.

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۲. اگر α و β دو عدد گنگ و $\alpha+\beta$ گویا باشد، اعداد $\beta - ۳\alpha$ و $\beta - \alpha$ به ترتیب از راست به چپ چگونه‌اند؟

۱) گویا - گویا ۲) گویا - گنگ ۳) گنگ - گویا ۴) گنگ - گنگ

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

برای مسائل مربوط به گویا و گنگ بودن اعداد بهتر است از برهان خلف استفاده کنیم. به این صورت که حکم مسئله را نقیض کرده و آن را فرض خلف می‌گوییم. حال با رسیدن به تناقض با فرضیات مسئله متوجه می‌شویم که فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

فرض خلف: $\beta - ۳\alpha$ گویاست. در این صورت داریم:

$$\begin{matrix} ۳\alpha - \beta = \text{گویا} \\ \alpha + \beta = \text{گویا} \end{matrix} \xrightarrow{(+)} ۴\alpha = \text{گویا} \rightarrow \alpha = \text{گویا}$$ ×

اما می‌دانیم که α عددی گنگ است. پس فرض خلف باطل است و $\beta - ۳\alpha$ گویا نیست؛ پس $\beta - ۳\alpha$ گنگ است.

همچنین برای $\beta - \alpha$ هم داریم:

فرض خلف: $\beta - \alpha$ گویاست.

$$\begin{matrix} \beta - \alpha = \text{گویا} \\ \alpha + \beta = \text{گویا} \end{matrix} \xrightarrow{(+)} ۲\beta = \text{گویا} \rightarrow \beta = \text{گویا}$$ ×

بنابراین $\beta - \alpha$ نیز گنگ است.

۳. فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ اعداد صحیح و $b_۱, b_۲, \ldots, b_n$ همان اعداد با ترتیبی دیگر باشند. به ازای چند عضو از مجموعه‌ی $\{۳, ۴, \ldots, ۹۰\}$ برای n، با اطمینان می‌توان گفت که عدد $(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)\ldots(a_n - b_n)$ عددی زوج است؟

۱) ۴۳ ۲) ۴۴ ۳) ۴۵ ۴) ۴۶

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

به این مثال مهم از صفحه‌ی (۶) کتاب درسی در مبحث برهان خلف توجه کنید:

مثال: a_1, a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1, b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

حل: برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. a_1, a_2 و a_3 را به ترتیب، ۵، ۸ و ۱ در نظر می‌گیریم و b_1, b_2 و b_3 را ۸، ۱ و ۵ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)=(5-8)(8-1)(1-5)=(-3)(7)(-4)=84$$

اگر $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل a_1-b_1 , a_2-b_2 و a_3-b_3 هم باید فرد باشند (چرا؟) و در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$ باید عددی فرد باشد. اما مجموع این سه عبارت صفر است!

در حالت کلی‌تر ثابت می‌کنیم که اگر n فرد باشد، $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_n-b_n)$ عددی زوج است.

فرض خلف: فرض کنیم $A=(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_n-b_n)$ عددی زوج نیست، پس فرد است. پس هر n عامل $(a_1-b_1), (a_2-b_2)$ ... و (a_n-b_n) باید عددی فرد باشد، اما مجموع این n عبارت برابر صفر است! پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

nهای فرد در مجموعه‌ی $\{3,4,\ldots,90\}$ تعداد موردنظر ما هستند که ۴۴ تا هستند.

توجه کنید برای nهای زوج می‌توان با یک مثال نقض نشان داد که A عددی فرد است.

۴. اگر عدد طبیعی $a>3$ اعداد $4m+2$ و $13m+5$ را عاد کند، کدام گزینه نمی‌تواند عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد؟

۱) $ak+2$ ۲) $ak+1$ ۳) $ak-1$ ۴) $ak+5$

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

از دیدگاه ما رابطه‌ی عاد کردن همانند یک ترازوی دوکفه‌ای است. سمت چپ ضعیف و سمت راست قوی است. هر عملی که این توازن را بهم نزند، قابل‌قبول است!

بنابراین قوی را می‌توانیم در هر عدد صحیح دلخواهی ضرب کنیم. مثال:

$$\begin{cases} a \mid 3x+5 \xrightarrow{\times 5} a \mid 15x+25 \\ a \mid 5x+2 \xrightarrow{\times 3} a \mid 15x+6 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a \mid 19 \rightarrow a=\pm 1, \pm 19$$

برای حل این‌گونه سوالات از روش دترمینان می‌توان استفاده کرد:

$$\begin{cases} a \mid bn+c \\ a \mid dn+e \end{cases} \rightarrow a \mid be-cd$$

درسنامه:

اعداد اول بزرگ‌تر از ۳ به فرم $6k+1$ یا $6k+5$ هستند.

اثبات: می‌دانیم هر عدد صحیح به ۶ حالت زیر است. در هر حالت بررسی می‌کنیم که این عدد می‌تواند اول باشد یا خیر!

- ✗ $a=6k$ مضرب ۶ است
- ✓ $a=6k+1$ می‌تواند اول باشد.
- ✗ $a=6k+2$ زوج است
- ✗ $a=6k+3$ مضرب ۳ است
- ✗ $a=6k+4$ زوج است
- ✓ $a=6k+5$ می‌تواند اول باشد.

حال به حل تست می‌پردازیم:

$$\begin{matrix} a \mid ۱۳m+۵ \\ a \mid ۴m+۲ \end{matrix} \xrightarrow{\text{دترمینان}} a \mid ۲۶-۲۰ \rightarrow a \mid ۶ \rightarrow a=\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۶$$

اما از آن‌جا که $a>۳$ است، مقدار $a=۶$ قابل‌قبول است. پس گزینه‌ها به شکل زیر درمی‌آیند:

۱) $۶k+۲$ ۲) $۶k+۱$ ۳) $۶k-۱$ ۴) $۶k+۵$

با توجه به درسنامه‌ی بالا گزینه‌ی (۱) زوج است و نمی‌تواند یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد. توجه داشته باشید که $۶k-۱$ همان $۶k+۵$ است! بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۵ . چند نقطه با مختصات طبیعی روی منحنی $۲x^۳-xy+۲y=۱$ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

نکته گاهی ممکن اســـت مسائل عاد کردن را در قالب معادله‌ی یک منحنی مطرح کنند و بپرسند منحنی از چند نقطه با مختصات صحیح یا طبیعی عبور می‌کند. در این موارد معادله‌ی منحنی را مرتب و y را تنها می‌کنیم. سپس از این نکته استفاده می‌کنیم که: «مخرج ضعیفه است!»

در رابطه‌ی عاد کردن، هرگاه ضعیف عبارتی درجه‌ی اول باشد، می‌توان ریشه آن را در عبارت قوی قرار داد.

حال به حل تست بپردازیم:

$$۲x^۳-xy+۲y=۱ \rightarrow -xy+۲y=۱-۲x^۳ \rightarrow y(-x+۲)=۱-۲x^۳$$

$$\rightarrow y=\frac{۱-۲x^۳}{-x+۲} \rightarrow y=\frac{۲x^۳-۱}{x-۲} \xrightarrow[\text{است}]{\text{مخرج ضعیف}} x-۲ \mid ۲x^۳-۱$$

$$\xrightarrow[\text{داخل قوی}]{\text{ریشه‌ی ضعیف}} x-۲ \mid ۲(۲)^۳-۱ \rightarrow x-۲ \mid ۱۵ \rightarrow$$

$$x-۲=\pm ۱ \rightarrow \begin{cases} x=۱ \rightarrow y=-۱ & (۱,-۱) \text{ غ ق ق} \times \\ x=۳ \rightarrow y=۵۳ & (۳,۵۳) \checkmark \end{cases}$$

$$x-۲=\pm ۳ \rightarrow \begin{cases} x=-۱ \text{ غ ق ق} \times \\ x=۵ \rightarrow y=۸۳ & (۵,۸۳) \checkmark \end{cases}$$

$$x-۲=\pm ۵ \rightarrow \begin{cases} x=-۳ \text{ غ ق ق} \times \\ x=۷ \rightarrow y=۱۳۷ & (۷,۱۳۷) \checkmark \end{cases}$$

$$x-۲=\pm ۱۵ \rightarrow \begin{cases} x=-۱۳ \text{ غ ق ق} \times \\ x=۱۷ \rightarrow y=۱۹۶۵ & (۱۷,۱۹۶۵) \checkmark \end{cases}$$

پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۱۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۳^{۳۹}+۴^{۳۹}$ بر ۹۱ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۹۰

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

اتحادهای زیر را بلد هستیم:

$$n \text{ طبیعی}: a^n-b^n=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱}) \quad \text{همه جملات} +$$

$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - b^{n-1})$ یک در میان + و − زوج n

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - b^{n-1})$ یک در میان + و − فرد n

از طرفی $a^n + b^n$ هیچ‌گاه بر $a-b$ بخش‌پذیر نمی‌باشد.

با توجه به کادر بالا می‌توان نوشت:

$$۴^{۳۹} + ۳^{۳۹} = (۴^۳)^{۱۳} + (۳^۳)^{۱۳} = ۶۴^{۱۳} + ۲۷^{۱۳}$$

$$\xrightarrow{\text{توان فرد}} ۶۴^{۱۳} + ۲۷^{۱۳} = (۶۴+۲۷)(۶۴^{۱۲} - ۶۴^{۱۱} \times ۲۷ + \cdots - ۲۷^{۱۲})$$

پس می‌توان گفت:

$$۶۴+۲۷ \mid ۶۴^{۱۳} + ۲۷^{۱۳} \to ۹۱ \mid ۶۴^{۱۳} + ۲۷^{۱۳} \to ۹۱ \mid ۴^{۳۹} + ۳^{۳۹}$$

یعنی عدد $۴^{۳۹} + ۳^{۳۹}$ بر عدد ۹۱ بخش‌پذیر است.

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۱۲. به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n، دو عدد $۴n+۷$ و $۶n+۱۱$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) صفر ۲) ۴۵ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنیم $d = (۶n+۱۱, ۴n+۷)$ آن‌گاه داریم:

$$d \mid ۴n+۷ \xrightarrow{\times ۶} d \mid ۲۴n+۴۲ \xrightarrow{(-)} d \mid ۲ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } d = ۲$$

$$d \mid ۶n+۱۱ \xrightarrow{\times ۴} d \mid ۲۴n+۴۴$$

می‌دانیم اعداد $۴n+۷$ و $۶n+۱۱$ فرد هستند، بنابراین ب.م.م آن‌ها نمی‌تواند ۲ باشد. پس $d = ۲$ غیرقابل‌قبول است. بنابراین همواره داریم $d = ۱$، در نتیجه این دو عدد همواره نسبت به هم اول‌اند و تمامی اعداد دورقمی n جواب مسئله است، بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

درسنامه:

اگر a و b دو عدد صحیح ناصفر باشند؛ در این صورت $d \geq ۱$ را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) a و b گوییم هرگاه:

۱) $d \mid a \, , \, d \mid b$

۲) $\forall m > ۰ \, ; \, m \mid a \, , m \mid b \Rightarrow m \leq d$

یعنی d باید هر دو عدد a و b را عاد کند و در عین حال بزرگ‌ترین عدد ممکن باشد.

ب.م.م دو عدد a و b را به صورت (a,b) نشان می‌دهیم. پرانتز به معنای ب.م.م است.

نکته ب.م.م ضعیفه است!

نکته علامت تأثیری در ب.م.م ندارد.

هرگاه ب.م.م دو عدد یک باشد، آن دو عدد نسبت به هم اول (متباین)اند.

مثلاً دو عدد ۲۵ و ۸ نسبت به هم اول‌اند.

هر دو عدد صحیح متوالی، نسبت به هم اول‌اند پس ب.م.م آن‌ها یک است. یعنی: $(n, n+۱) = ۱$

همچنین هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نیز نسبت به هم اول‌اند. یعنی: $(۲k+۱, ۲k+۳) = ۱$

۱۳. m و n اعدادی صحیح هستند به گونه‌ای که $(m,n) = ۱$، حاصل $(۴m^۲, ۴n^۲) - ۳(۲m^۳, ۲n^۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینه ۲

فرض می‌کنیم $(m,n)=d$ داریم:

$$(۴m^۲,۴n^۲)=۴(m^۲,n^۲)=۴d^۲ \Rightarrow ۴d^۲-۳d-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} d=۱ \\ d=-\frac{۱}{۴} \text{ غ ق ق} \times \end{cases}$$

$$(۲n^۳,۲m^۳)=۲(n^۳,m^۳)=۲d^۳=۲$$

توجه داشته باشید ب.م.م دو عدد نمی‌تواند غیرصحیح باشد.

۱۴. اگر $(a,b)=d$ و $d \mid a^۳-۲b+۱۱$، آن‌گاه $a+b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (a و b نسبت به هم غیراول‌اند.)

۱) ۱۳۱ ۲) ۱۳۲ ۳) ۱۳۳ ۴) ۱۳۴

پاسخ: گزینه ۲

$$(a,b)=d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \Rightarrow d \mid a^۳ \\ d \mid b \Rightarrow d \mid -۲b \end{cases} \xrightarrow{(+)} d \mid a^۳-۲b$$

$$\left.\begin{matrix} d \mid a^۳-۲b+۱۱ \\ d \mid a^۳-۲b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} d \mid ۱۱ \xrightarrow{d>۱} d=۱۱$$

ب.م.م دو عدد a و b برابر با ۱۱ است، یعنی هر دو عدد مضرب ۱۱ هستند؛ بنابراین مجموع آن‌ها نیز باید مضرب ۱۱ باشد؛ پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۱۵. اگر $[a,۱۰۰]=۲۴۰۰$، آن‌گاه حاصل $[a,۳۵۰۰]$ برابر کدام است؟

۱) ۱۰۵۰۰ ۲) ۳۱۵۰۰ ۳) ۸۴۰۰۰ ۴) ۹۶۰۰۰

پاسخ: گزینه ۳

درسنامه:

عدد طبیعی c را کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و با $[a,b]=c$ نشان می‌دهیم؛ هرگاه:

۱) $a \mid c, b \mid c$

۲) $\forall m>۰, a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \le m$

ک.م.م قوی است.

نکته رابطه‌ی مقابل را به خاطر بسپارید: $(a,b)[a,b]=|ab|$

علامت تأثیری در ک.م.م ندارد.

نکته اگر دو عدد که یکی بر دیگری بخش‌پذیر است داشته باشیم؛ ب.م.م آن‌ها برابر عدد کوچک‌تر و ک.م.م آن‌ها برابر عدد بزرگ‌تر است. مثلاً $(۱۸,۶)=۶, [۱۸,۶]=۱۸$.

نکته اگر ب.م.م و ک.م.م دو عدد باهم برابر باشند، اندازه‌ی آن دو عدد یکسان است.

ک.م.م یعنی عوامل مشترک با توان بیشتر ضرب‌در عوامل غیرمشترک!

$$[a,۲^۲\times۵^۲]=۲^۵\times۳^۱\times۵^۲ \rightarrow a=۲^۵\times۳^۱\times۵^x \quad , \quad x \in \{۰,۱,۲\}$$

$$[a,۳۵۰۰]=[۲^۵\times۳^۱\times۵^x, ۲^۲\times۵^۳\times۷^۱]=۲^۵\times۵^۳\times۳^۱\times۷^۱=۸۴۰۰۰$$

دقت کنید توان ۵ در عدد $a(x)$ کوچک‌تر از ۳ است، پس در ک.م.م توان بزرگ‌تر (۳) انتخاب می‌شود.

۱۶. با توجه به گزاره‌های زیر، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

آ) اگر معدل کوکب بالای ۱۹ شود، از پدرش جایزه می‌گیرد.

ب) برای این‌که معدل کوکب بالای ۱۹ شود، باید ریاضی ۲۰ بگیرد.

پ) اگر معلم ریاضی کوکب به او ارفاق کند، ریاضی ۲۰ می‌شود.

ت) کوکب از پدرش جایزه نگرفت.

۱) معدل کوکب بالای ۱۹ شده است.
۲) نمره ریاضی کوکب ۲۰ شده است.
۳) نمره ریاضی کوکب بالای ۱۹ شده است.
۴) معلم ریاضی کوکب به او ارفاق نکرده است.

پاسخ: گزینه ۴

چون کوکب جایزه نگرفته است پس معدلش بالای ۱۹ نشده است. چون معدل کوکب بالای ۱۹ نشده است، ریاضی ۲۰ نگرفته است. چون ریاضی ۲۰ نگرفته است، پس معلم ریاضی او به وی ارفاق نکرده است.

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۱۷. نقیض گزاره $(p\vee\sim q)\Rightarrow(\sim p\vee\sim q)$ با کدام گزینه هم‌ارز است؟

۱) $p\vee q$
۲) $p\wedge q$
۳) $p\Rightarrow q$
۴) $q\Rightarrow p$

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

نقیض گزاره‌ی شرطی:

نقیض ترکیب شرطی $p\Rightarrow q$ عبارت است از $p\wedge\sim q$. زیرا:

$$\sim(p\Rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge\sim q$$

$$\sim[(p\vee\sim q)\Rightarrow(\sim p\vee\sim q)]\equiv(p\vee\sim q)\wedge\sim(\sim p\vee\sim q)\equiv(p\vee\sim q)\wedge(p\wedge q)$$

حال جدول ارزش گزاره به دست آمده را رسم می‌کنیم:

عبارت	$p\wedge q$	$p\vee\sim q$	$\sim q$	q	p
د	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

چون ستون به دست آمده با ستون $p\wedge q$ یکسان است پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۱۸. ارزش گزاره‌ی $p\Leftrightarrow(q\wedge r)$ نادرست است. احتمال این که ارزش گزاره‌ی p درست باشد، کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۷۵
۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

جدول ارزش گزاره:

حالت‌هایی که ارزش گزاره صورت سوال نادرست هستند، مدنظر است. یعنی ۴ حالت داریم. در ۳ حالت از این ۴ حالت ارزش گزاره‌ی p درست است.

بنابراین احتمال موردنظر برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Leftrightarrow (q \wedge r)$	
د	د	د	د	د	✗
د	د	ن	ن	ن	✓
د	ن	د	ن	ن	✓
د	ن	ن	ن	ن	✓
ن	د	د	د	ن	✓
ن	د	ن	ن	د	✗
ن	ن	د	ن	د	✗
ن	ن	ن	ن	د	✗

۱۹. اگر $p \vee q \equiv T$ باشد، گزاره‌ی $(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim (\sim p \Rightarrow q)$ با کدام گزینه هم‌ارز است؟

۱) p ۲) $\sim q$ ۳) F ۴) T

پاسخ: گزینه ۳

اگر $p \vee q$ درست باشد، حداقل یکی از دو گزاره‌ی p و q درست هستند. اگر فقط یکی از آن‌ها درست و دیگری نادرست باشد، $p \Leftrightarrow q$ نادرست خواهد بود که در نتیجه گزاره‌ی کلی نادرست خواهد بود (تا همین‌جا گزینه‌ی «۴» حذف می‌شود.) اما اگر $p \equiv T$ و $q \equiv T$ آن‌گاه $p \Leftrightarrow q \equiv T$ ولی برای $\sim (\sim p \Rightarrow q)$ داریم:

$$\sim (\sim T \Rightarrow T) \equiv \sim T \equiv F$$

و باز هم گزاره‌ی کلی نادرست است. بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۲۰. نقیض گزاره‌ی سوری $(\forall x; x^۲ = ۹) \Rightarrow (\exists x; x = ۳)$ $(x \in \mathbb{R})$ کدام است؟

۱) $(\forall x; x \neq ۳) \Rightarrow (\exists x; x^۲ \neq ۹)$ ۲) $(\forall x; x^۲ = ۹) \wedge (\forall x; x \neq ۳)$

۳) $(\exists x; x^۲ \neq ۹) \wedge (\exists x; x = ۳)$ ۴) $(\exists x; x^۲ \neq ۹) \Rightarrow (\forall x; x \neq ۳)$

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

نقیض گزاره‌های سوری: برای نقیض کردن گزاره‌های سوری، ابتدا سور را عوض می‌کنیم. یعنی اگر سور عمومی داشتیم $(\forall)$، آن را به سور وجودی $(\exists)$ تبدیل می‌کنیم و بالعکس اگر سور وجودی داشتیم به جای آن سور عمومی قرار می‌دهیم، سپس گزاره را نقیض می‌کنیم. خلاصه:

$$\begin{cases} \sim (\forall x; p) = \exists x; \sim p \\ \sim (\exists x; p) = \forall x; \sim p \end{cases}$$

گزاره این تست یک گزاره شرطی است. می‌دانیم $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$. پس مقدم را بدون تغییر گذاشته و تالی را نقیض می‌کنیم. بین آن‌ها هم باید عطف قرار گیرد.

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

آزمون‌های ماراتون

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال | ۱۵ آبان ماه ۱۴۰۴

۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر دو عدد ۷۴ و ۵۳ به ترتیب برابر ۴۸ و ۶ است و خارج‌قسمت‌های این دو تقسیم با هم برابرند. باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این صورت اعداد صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شود به طوری که:

$$a=bq+r \ , \ 0\le r<b$$

همان‌طور که از دوره‌ی ابتدایی به خاطر دارید، در تقسیم عدد a بر b، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

مثلاً اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم، داریم:

$$a=25, b=7, q=3, r=4$$

یا به عبارتی دیگر:

$$25=7\times3+4$$

حال اگر -25 را بر ۷ تقسیم کنیم و $q=-3$ را در نظر بگیریم، در این صورت تساوی $-25=7\times(-3)-4$ حاصل می‌شود که نمی‌توان (-4) را به عنوان باقی‌مانده معرفی نمود.

زیرا طبق قضیه‌ی تقسیم باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد. پس با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسوم‌علیه، شرایط قضیه تقسیم را برقرار می‌کنیم.

$$-25=7\times(-3)-4=7\times(-3)-4-7+7=7\times(-3)-7+3=7[(-3)-1]+3=7q+3\rightarrow r=3$$

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$7 \ \big| \ 0 \qquad 3 \ \big| \ 8 \qquad -1402 \ \big| \ 5$$

مثالی هم از قضیه‌ی تقسیم مشاهده کنید تا بهتر آن را درک کنید:

* اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۱ و ۷ به ترتیب برابر ۸ و ۵ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $4a$ بر ۷۷ را بیابید.

$$\begin{matrix} a=11q+8 \xrightarrow{\times7} 7a=77q+56 \\ a=7q'+5 \xrightarrow{\times11} 11a=77q'+55 \end{matrix} \xrightarrow{(-)} 4a=77(q'-q)-1$$

$$\rightarrow 4a=77q''-1 \xrightarrow{(*)} 4a=77q''-77+77-1 \rightarrow 4a=77(q''-1)+76$$

$$\rightarrow 4a=77k+76 \rightarrow r=76$$

توجه کنید که در رابطه‌ی (*) نمی‌توان $r=-1$ را به عنوان باقی‌مانده معرفی کرد.

زیرا طبق شرط تقسیم $(0\le r<b)$، باقی‌مانده هرگز منفی نمی‌شود.

و اما حل تست:

$$\left.\begin{matrix} a=74q+48 \\ a=53q+6 \end{matrix}\right\} \rightarrow 74q+48=53q+6 \rightarrow 21q=-42 \rightarrow q=-2$$

دقت کنید که چون خارج‌قسمت دو تقسیم برابر بود، در هر دو رابطه‌ی بالا از q استفاده کردیم.

حال برای یافتن مقدار a، $q=-۲$ را در یکی از رابطه‌های تقسیم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a=۵۳q+۶ \xrightarrow{q=-۲} a=-۱۰۶+۶ \rightarrow a=-۱۰۰$$

اکنون باقی‌مانده‌ی -۱۰۰ را بر ۱۱ می‌خواهیم. طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$$-۱۰۰=۱۱(-۱۰)+۱۰ \rightarrow r=۱۰$$

تذکر اگر رابطه‌ی تقسیم را به صورت ۱ - (۹-) ۱۱ = ۱۰۰- بنویسیم، دچار اشتباه شده‌ایم. چون باقی‌مانده هرگز منفی نمی‌شود!

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۲ . عدد صحیح a را بر عدد صحیح و ناصفر b تقسیم کرده‌ایم و باقی‌مانده برابر ۲۸۶ شده است. همچنین عدد b را بر ۲۸۶ تقسیم کرده‌ایم و باقی‌مانده ۵۲ شده است. حاصل (a,b) کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۲۲ ۴) ۲۶

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

در قضیه‌ی تقسیم نکته مقابل را به خاطر داشته باشید:

$$a=bq+r \rightarrow (a,b)=(b,r)$$

یعنی ب.م.م مقسوم و مقسوم‌علیه باید با ب.م.م مقسوم‌علیه و باقی‌مانده برابر باشد.

الگوریتم تقسیم را برای هر دو تقسیم انجام شده می‌نویسیم:

$$a=bq+۲۸۶ \Rightarrow (a,b)=(b,۲۸۶)$$

$$b=۲۸۶q'+۵۲ \Rightarrow (b,۲۸۶)=(۲۸۶,۵۲)$$

از دو رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود که:

$$(a,b)=(۲۸۶,۵۲)$$

از طرفی برای $(۲۸۶,۵۲)$ داریم:

$$(۲۸۶,۵۲)=(۲\times۱۱\times۱۳,۲^{۲}\times۱۳)=۲۶$$

بنابراین $(a,b)=۲۶$ و گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۳ . در یک تقسیم مقسوم ۷ برابر باقی‌مانده و خارج‌قسمت بیشترین مقدار ممکن است. اگر مقسوم‌علیه این تقسیم کوچک‌تر از ۲۴ باشد، مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار مقسوم کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۱

$$a=bq+r \quad , \quad ۰\le r<b$$

$$۷r=bq+r \rightarrow ۶r=bq \quad (*)$$

از طرفی می‌دانیم $r<b$ پس $۶r<۶b$ و در مقایسه با رابطه‌ی $(*)$ خواهیم داشت:

$$bq<۶b \rightarrow q<۶ \rightarrow q_{max}=۵$$

حالا در رابطه‌ی $(*)$ مقدار q را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۶r=bq \xrightarrow{q=۵} ۶r=۵b \rightarrow ۵b \overset{۶}{\equiv} ۰ \rightarrow b \overset{۶}{\equiv} ۰ \rightarrow b=۶k$$

از طرفی سوال مقسوم‌علیه را کوچک‌تر از ۲۴ معرفی کرده است. پس: $b<۲۴\rightarrow ۶k<۲۴\rightarrow k<۴\rightarrow k=۱,۲,۳$

پس ۳ مقدار برای مقسوم‌علیه و در نتیجه ۳ مقدار برای مقسوم خواهیم داشت.

حالا مقادیر a را حساب می‌کنیم:

$k=۱\rightarrow b=۶\ ,\ q=۵\ ,\ ۶r=۶\times ۵\rightarrow r=۵:a=۷\times ۵=۳۵$

$k=۲\rightarrow b=۱۲\ ,\ q=۵\ ,\ ۶r=۱۲\times ۵\rightarrow r=۱۰:a=۷\times ۱۰=۷۰$

$k=۳\rightarrow b=۱۸\ ,\ q=۵\ ,\ ۶r=۱۸\times ۵\rightarrow r=۱۵:a=۷\times ۱۵=۱۰۵$

بیشترین مقدار ممکن برای a برابر ۱۰۵ است که مجموع ارقام آن ۶ است. دقت کنید که نیاز به محاسبه‌ی همه‌ی مقادیر a نبود و کافی بود از ابتدا $k=۳$ را در نظر می‌گرفتیم، اما برای تمرین و درک بیشتر هر ۳ مقدار ممکن را پیدا کردیم. بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۴ . عدد صحیح a مضرب ۱۲ و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۳ برابر ۹ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $\frac{a}{۶}$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳

درسنامه:

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم دو عدد a و b بر m باهم برابر باشد، می‌گوییم که a و b به پیمانه m با یک‌دیگر همنهشت‌اند:

$a\overset{m}{\equiv} b$

همچنین اگر $a\overset{m}{\equiv} b$، نتیجه می‌شود که $m\mid a-b$. یعنی دو عدد صحیح a و b را به پیمانه‌ی m هم‌نهشت گوییم، هرگاه تفاضل آن‌ها بر m بخش‌پذیر باشد.

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

ویژگی ۱: اگر $a\overset{m}{\equiv} b$ و $b\overset{m}{\equiv} c$، آنگاه $a\overset{m}{\equiv} c$

ویژگی ۲:

$$a\overset{m}{\equiv} b\begin{cases}a+c\overset{m}{\equiv} b+c\\ a-c\overset{m}{\equiv} b-c\\ ac\overset{m}{\equiv} bc\\ a^{n}\overset{m}{\equiv} b^{n}\end{cases}$$

ویژگی ۳: میتونیم دوتا رابطهٔ هم‌نهشتی با پیمانه یکسان را با هم جمع یا تفریق کنیم. یا حتی ضرب کنیم. طرف‌های راست باهم و طرف‌های چپ با هم

$$a\overset{m}{\equiv} b, c\overset{m}{\equiv} d\Rightarrow\begin{cases}a+c\overset{m}{\equiv} b+d\\ a-c\overset{m}{\equiv} b-d\\ ac\overset{m}{\equiv} bd\end{cases}$$

ویژگی ۴: می‌تونیم مضارب صحیح پیمانه را به هر یک از دو طرف اضافه یا کم کنیم. یعنی هم می‌تونیم فقط به سمت راست اضافه کنیم، یا فقط به سمت چپ، یا به هر دو.

$a\overset{m}{\equiv} b\Rightarrow a\pm mt\overset{m}{\equiv} b\pm mk$

از این ویژگی در حل معادلات هم‌نهشتی استفاده زیادی خواهیم کرد.

ویژگی ۵:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc, (m,c)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

$$a=12k \quad (*)$$

$$a \overset{13}{\equiv} 9 \xrightarrow{(*)} 12k \overset{13}{\equiv} 9 \xrightarrow[(3,13)=1]{\div 3} 4k \overset{13}{\equiv} 3 \to 4k \overset{13}{\equiv} 16$$

$$\xrightarrow[(4,13)=1]{\div 4} k \overset{13}{\equiv} 4 \to k=13k'+4 \xrightarrow[\text{جای‌گذاری}]{(*)} a=12(13k')+48$$

$$\xrightarrow{\div 6} \frac{a}{6}=2(13k')+8 \to \frac{a}{6}=13k''+8 \to r=8$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $\frac{a}{6}$ بر ۱۳ برابر ۸ خواهد بود.

روش دوم: بهتر بود عددی مضرب ۱۲ حدس بزنیم که بر ۱۳ باقی‌مانده‌ی ۹ داشته باشد. $a=48$ را حدس زده و $\frac{a}{6}=8$ می‌شود. پس باقی‌مانده‌ی آن بر ۱۳ همان ۸ است.

۵ . چند عدد طبیعی و دو رقمی n در رابطه‌ی $7^{29}+n \overset{12}{\equiv} 0$ صدق می‌کند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

باقی‌مانده‌ی اعداد توان بزرگ

برای یافتن باقی‌مانده‌ی اعداد به فرم a^n بر عدد طبیعی m ابتدا توانی از عدد پایه می‌یابیم که به پیمانه داده شده با یک عدد کوچک (نظیر ± 1 و صفر) هم‌نهشت شود. حال دو طرف رابطه را به توان مناسب می‌رسانیم تا به خواسته‌ی سوال برسیم.

* باقی‌مانده‌ی تقسیم 3^{98} بر ۸۰؟

$$3^4 \overset{80}{\equiv} 81 \to 3^4 \overset{80}{\equiv} 81-80 \to 3^4 \overset{80}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{به توان } 24} 3^{96} \overset{80}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 3^2} 3^{98} \overset{80}{\equiv} 3^2 \to 3^{98} \overset{80}{\equiv} 9$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم 3^{98} بر عدد ۸۰ برابر ۹ است.

ابتدا باقی‌مانده‌ی 7^{29} بر ۱۲ را می‌یابیم:

$$7^2 \overset{12}{\equiv} 49 \to 7^2 \overset{12}{\equiv} 49-4\times 12 \to 7^2 \overset{12}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{به توان } 14} 7^{28} \overset{12}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 7} 7^{29} \overset{12}{\equiv} 7$$

حال داریم:

$$7^{29}+n \overset{12}{\equiv} 0 \to 7+n \overset{12}{\equiv} 0 \to n \overset{12}{\equiv} -7 \to n \overset{12}{\equiv} 5 \to n=12k+5 \xrightarrow{n \text{ دو رقمی}} 10 \le 12k+5 \le 99$$

$$\to 5 \le 12k \le 94 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 \le k \le 7 \to 7 \text{ مقدار صحیح}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۶ . اگر $m=5k+2$ باشد، رقم یکان عدد $(m-1)^{2022}$ کدام مقدار زیر ممکن است باشد؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۳

اگر $m=5k+2$ باشد حتماً $m \overset{10}{\equiv} 2$ یا $m \overset{10}{\equiv} 7$، (حواستان هست که رقم یکان یعنی پیمانه‌ی ۱۰) حالا داریم:

$$m \overset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow m-1 \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow (m-1)^{2022} \overset{10}{\equiv} 1$$

$$m \overset{10}{\equiv} 7 \Rightarrow m-1 \overset{10}{\equiv} 6 \Rightarrow (m-1)^{2022} \overset{10}{\equiv} 6$$

تذکر اگر رقم یکان عددی ۶ باشد، هر توانی از آن عدد نیز رقم یکان ۶ خواهد داشت!

درسنامه:

در مورد رقم یکان اعداد مختلف بهتر است بدانید که:

$$۱^n \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \ , \ ۵^n \overset{۱۰}{\equiv} ۵ \ , \ ۶^n \overset{۱۰}{\equiv} ۶$$

اما برای اعداد ۲، ۳ و ۷ از دوره‌ی تناوب ۴ تایی استفاده می‌کنیم. (حواستان باشد رقم‌های ۴ و ۸ توان‌های ۲ و رقم ۹ توان ۳ است.)

به زبان ساده یعنی توان موردنظر را بر ۴ تقسیم کرده و باقی‌مانده‌ی آن را r می‌نامیم.

رقم یکان موردنظر ما برابر r(پایه) خواهد بود. مثلاً برای یافتن رقم یکان عدد $۷^{۱۳۵}$، ابتدا باقی‌مانده ۱۳۵ بر ۴ را می‌یابیم که برابر ۳ است. پس $۷^{۱۳۵}$ دقیقاً همانند $۷^۳$ عمل خواهد کرد.

$$۷^{۱۳۵} \overset{۱۰}{\equiv} ۷^۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳۴۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

برای تمرین بیشتر خودتان رقم یکان عدد $۳^{۲۴۲}$ را بیابید.

۷ . اشتراک کلاس‌های همنهشتی $[۵]_{۱۶}$ و $[۱۳]_{۲۴}$ به کدام صورت است؟

۱) $[۱۱]_{۴۸}$ ۲) $[۳۷]_{۴۸}$ ۳) $[۱۷]_{۲۴}$ ۴) $[۱۳]_{۲۴}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} ۵ \overset{۱۶}{\equiv} -۱۱ \\ ۱۳ \overset{۲۴}{\equiv} -۱۱ \end{cases} \Rightarrow -۱۱ \overset{[۱۶,۲۴]}{\equiv} ۳۷ \Rightarrow [۳۷]_{۴۸}$$

درسنامه:

قضیه: باقی‌مانده چینی:

$$\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{matrix} \Leftrightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

مثال:

$$\begin{matrix} a \overset{۱۳}{\equiv} ۲ \\ a \overset{۳}{\equiv} ۲ \end{matrix} \rightarrow a \overset{[۱۳,۳]}{\equiv} ۲ \rightarrow a \overset{۳۹}{\equiv} ۲$$

* فرض کنید تعدادی دانش‌آموز در مدرسه را گروه‌بندی می‌کنیم. اگر تیم‌ها سه نفره باشد، دو نفر اضافه می‌مانند. اگر تیم‌ها ۵ نفره باشد، به سه نفر تیم نمی‌رسد و اگر تیم‌ها ۷ نفره باشد، به دو نفر تیم نمی‌رسد.

تعداد دانش‌آموزان چند نفر است؟

۸ . باقی‌مانده‌ی تقسیم دو عدد ۳^n و ۱۲^n بر ۱۵ با هم برابر است. مجموع ارقام کوچک‌ترین مقدار سه رقمی n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

تقسیم در رابطه‌ی هم‌نهشتی قاعده‌ی خاصی دارد!

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \ , \ (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه‌ی آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم. (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم.)

نتیجه‌ی مهم: اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c,m)=1$ در این صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ در واقع قاعده‌ی حذف در هم‌نهشتی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

مثال: واضح است که $4\times3 \overset{3}{\equiv} 4\times6$ و چون $(4,3)=1$ پس $3 \overset{3}{\equiv} 6$.

اما حل تست: سوال گفته است که اعداد 3^n و 12^n بر ۱۵ هم باقی‌مانده‌اند. یعنی:

$$12^n \overset{15}{\equiv} 3^n \xrightarrow[(3^n,15)=3]{\div 3^n} \frac{12^n}{3^n} \overset{\frac{15}{3}}{\equiv} \frac{3^n}{3^n} \to 4^n \overset{5}{\equiv} 1$$

از طرفی می‌دانیم $4^2 \overset{5}{\equiv} 1$. پس برای برقراری هم‌نهشتی بالا کافیست n به صورت $2k$ باشد. کوچک‌ترین عدد سه رقمی زوج برابر ۱۰۰ است که مجموع ارقام آن برابر یک است. بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۹ . به ازای چند مقدار طبیعی و دو رقمی x، عبارت $5x^2-1$ مضرب ۴ است؟

۱) ۷۵ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۵

پاسخ: گزینه ۴

$$5x^2-1 \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow x^2 \overset{4}{\equiv} 1$$

باید مقادیری از x که مجذور آن‌ها بر ۴ باقی‌مانده‌ی ۱ داشته باشد را بیابیم.

می‌دانیم مربع هر عدد صحیح و فرد به صورت $8q+1$ است، پس تقسیم مربع هر عدد فرد به ۴، باقی‌مانده‌ی ۱ دارد. بنابراین به ازای تمامی x های فرد، این مسئله جواب دارد. تعداد اعداد فرد دو رقمی را می‌یابیم، از ۱۰ تا ۹۹، ۹۰ عدد داریم که نصف آن‌ها فرد هستند. پس ۴۵ عدد با این خاصیت وجود دارد.

درسنامه:

در آزمون نخست، آموختیم که مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد.

حال کمی پیشرفته‌تر آن را ببینیم:

* ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $8t+1$ نوشته می‌شود (باقی‌مانده‌ی تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.)

حل: فرض کنیم $a\in\mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$a=4k$ (۱)

$a=4k+1$ (۲)

$a=4k+2$ (۳)

$a=4k+3$ (۴)

(چهار مجموعهٔ $A_1=\{a\in\mathbb{Z}\mid a=4k\}$ و $A_2=\{a\in\mathbb{Z}\mid a=4k+1\}$ و $A_3=\{a\in\mathbb{Z}\mid a=4k+2\}$ و $A_4=\{a\in\mathbb{Z}\mid a=4k+3\}$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کنند.)

حالت‌های (۱) و (۳) زوج بوده و لذا $a=4k+1$ یا $a=4k+3$

اگر $a=4k+1 \Rightarrow a^2=16k^2+8k+1=8(\underbrace{2k^2+k}_{k'})+1=8k'+1$

اگر $a=4k+3 \Rightarrow a^2=16k^2+24k+9=16k^2+24k+8+1$

$\Rightarrow a^2=8(\underbrace{2k^2+3k+1}_{t})+1=8t+1$

SanjeshCloud

۱۰ . اگر $۲۴ \overset{۱۴}{\equiv} ۳m$ و $x \overset{۷}{\equiv} ۴m^{۱۳} - ۱۰$، آن‌گاه x کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

خُرد کردن پیمانه:

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{k \mid m} a \overset{k}{\equiv} b$$

$$۳m \overset{۱۴}{\equiv} ۲۴ \xrightarrow[(۳,۱۴)=۱]{\div ۳} m \overset{۱۴}{\equiv} ۸ \xrightarrow{۷ \mid ۱۴} m \overset{۷}{\equiv} ۸ \to m \overset{۷}{\equiv} ۱$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } ۱۳} m^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۴m^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} ۴ \xrightarrow{-۱۰} ۴m^{۱۳} - ۱۰ \overset{۷}{\equiv} -۶$$

$$\to ۴m^{۱۳} - ۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۱۱ . کدام گزاره‌ی زیر هم‌ارز منطقی گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim q \Rightarrow p)$ است؟

۱) $p \vee \sim q$ ۲) $p \wedge \sim q$ ۳) $\sim p \vee q$ ۴) $\sim p \wedge q$

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: از گزاره هم‌ارز با گزارهٔ شرطی استفاده می‌کنیم:

$$(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim (\sim q) \vee p) \equiv (\sim p \vee q) \vee \sim (q \vee p) \equiv (\sim p \vee q) \vee (\sim q \wedge \sim p) \equiv \sim p \vee q$$

جدول ارزش رسم می‌کنیم:

عبارت	$\sim q \wedge \sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim q$	$\sim p$	q	p
د	ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	ن	د	ن	ن	د
د	ن	د	ن	د	د	ن
د	د	د	د	د	ن	ن

روش دوم: ارزش‌گذاری:

$$p \equiv T, q \equiv T \xrightarrow{\text{صورت تست}} (T \Rightarrow T) \vee \sim (F \Rightarrow T) \equiv T$$

پس گزینه‌های (۲) و (۴) چون F می‌شوند، رد خواهند شد.

$$p \equiv F, q \equiv T \xrightarrow{\text{صورت تست}} (F \Rightarrow T) \vee \sim (F \Rightarrow F) \equiv T$$

پس گزینه‌ی (۱) چون F می‌شود، رد خواهد شد.

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۱۲ . ارزش گزاره‌ی کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

۱) $\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$ ۲) $\sim p \Leftrightarrow q$

۳) $(p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$ ۴) $p \Leftrightarrow \sim q$

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

می‌دانیم $p \Leftrightarrow q$ همان $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ است. می‌توانیم به کمک هم‌ارزی مهم $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ عبارت خودمان را ساده‌تر کنیم:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

البته که نیاز به حفظ کردن این روابط نیست و به راحتی قابل اثبات هستند.

گزینه‌ی (۲) را به کمک جبر گزاره‌ها ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sim p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p) \equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$$

عبارت به دست آمده همان گزینه‌ی (۳) است. پس گزینه‌های (۲) و (۳) هم‌ارز هستند.

از طرفی مشخص است که عبارت گزینه‌ی (۴) دقیقاً هم‌ارز عبارت گزینه‌ی (۲) است.

(زیرا فقط اسم p و q جابه‌جا شده است.) اما آن را هم اثبات می‌کنیم:

$$p \Leftrightarrow \sim q \equiv (p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee p)$$

اما گزینه‌ی (۱) با سه گزینه‌ی دیگر متفاوت است.

۱۳. در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $A = \{2,3,6,8,14,16,17,18\}$، میانگین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو، مضرب ۵ است؟

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۹۰ ۴) ۹۲

پاسخ: گزینه ۲

اگر میانگین دو عدد بخواهد مضرب ۵ باشد، یعنی مجموع آن دو عدد مضرب ۱۰ است. حالت‌بندی‌های زیر را داریم. توجه کنید که هر کدام از اعداد بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ۲ حالت دارند. (می‌توانند در مجموعه باشند یا نباشند.)

$(2,18) \xrightarrow{\text{۶ عدد بین آن‌ها قرار دارد.}} 2^6 = 64$

$(3,17) \xrightarrow{\text{۴ عدد بین آن‌ها قرار دارد.}} 2^4 = 16$

$(6,14) \xrightarrow{\text{۱ عدد بین آن‌ها قرار دارد.}} 2^1 = 2$

$(2,8) \xrightarrow{\text{۲ عدد بین آن‌ها قرار دارد.}} 2^2 = 4$

$(14,16) \xrightarrow{\text{عددی بین آن‌ها قرار ندارد.}} 2^0 = 1$

در کل ۸۷ زیرمجموعه با این شرایط خواهیم داشت.

۱۴. دو مجموعه‌ی $\{x, x^2\}$ و $\{y, 16, y^2\}$ باهم مساوی‌اند. اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار ممکن برای $x + y$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

دو مجموعه‌ی مساوی: دو مجموعه‌ی A و B را مساوی گوییم هرگاه عضوهای یکسان داشته باشند.

$A = \{1,2,3\} = B$ $\quad B = \{1,1,2,2,3\}$ $\quad A = \{1,2,3,3\}$

نکته تکرار در مجموعه‌ها باعث افزایش تعداد اعضا نمی‌شود. تکرار بی‌تأثیر است. یعنی $A = \{1,1,1\}$ همان $A = \{1\}$ است و تنها یک عضو دارد.

تست‌درتست اگر $\{۷y-۲\}=\{۴x-۳,۲x+۱\}$، آنگاه xy کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

چون مجموعه $\{۷y-۲\}$ تک‌عضوی است پس مجموعه‌ی دیگر نیز فقط باید یک عضو داشته باشد. یعنی:

$$۴x-۳=۲x+۱\rightarrow x=۲$$

حالا $x=۲$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\{۵,۵\}=\{۷y-۲\}\rightarrow ۷y-۲=۵\rightarrow y=۱$$

در این تست حالت‌های تساوی دو مجموعه را می‌نویسیم، برای آن‌که مجموعه‌ی $\{y,۱۶,y^۲\}$ دو عضو داشته باشد سه حالت داریم:

۱) $y=۱۶\rightarrow\{۱۶,۲۵۶\}=\{x,x^۲\}\rightarrow x=۱۶$

۲) $y^۲=۱۶\rightarrow\begin{cases}y=۴\rightarrow\{۴,۱۶\}=\{x,x^۲\}\rightarrow x=۴\\y=-۴\rightarrow\{-۴,۱۶\}=\{x,x^۲\}\rightarrow x=-۴\end{cases}$

۳) $y=y^۲\rightarrow\begin{cases}y=۰\rightarrow\{۰,۱۶\}=\{x,x^۲\}\quad\text{غ ق ق}\times\\y=۱\rightarrow\{۱,۱۶\}=\{x,x^۲\}\quad\text{غ ق ق}\times\end{cases}$

بنابراین بیشترین مقدار $x+y$ برابر ۳۲ و کم‌ترین مقدار آن -۸ است.

۱۵. سه مجموعه‌ی A,B,C از مجموعه‌ی مرجع U مفروض‌اند. اگر گزاره‌ی p به صورت $(A\subseteq B)$ و گزاره‌ی q برابر $(B\cap C=B)$ باشد و همچنین ارزش گزاره‌ی $p\wedge q$ درست باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(A\cup B)\subseteq C$ ۲) $(A\cup C)=C$ ۳) $C-A=B$ ۴) $A\subseteq C$

پاسخ: گزینه ۳

درسنامه:

روش عضوگیری دلخواه: هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کنیم، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد.

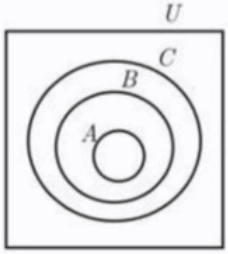
از آن‌جا که x دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است. بنابراین، با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A\subseteq B$.

در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.

ویژگی ۱: فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، به‌طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$؛ ثابت کنید $A\subseteq C$.

اثبات: برای اثبات $A\subseteq C$ باید ثابت کنیم که: $\forall x;(x\in A\Rightarrow x\in C)$

برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ استفاده می‌کنیم:



$$\forall x:x\in A\xrightarrow{A\subseteq B}x\in B\xrightarrow{B\subseteq C}x\in C$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x;(x\in A\Rightarrow x\in C)\Rightarrow A\subseteq C$$

اگر گزاره‌ی $p\wedge q$ بخواهد درست باشد باید هر دو گزاره p و q درست باشند. پس داریم:

$$A\subseteq B\ ,\ B\cap C=B$$

از رابطه‌ی $B\cap C=B$ نتیجه می‌شود که $B\subseteq C$. (چرا؟) پس داریم:

$$A\subseteq B,B\subseteq C$$

طبق ویژگی بالا خواهیم داشت $A\subseteq C$. بنابراین $A\cup B\subseteq C$ و $A\cup C=C$. اما رابطه‌ی گزینه‌ی (۳) برقرار نیست.

آزمون‌های ماراتون

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال | ۲۹ آبان ماه ۱۴۰۴

۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۴۰۵۲۰۲۵ بر ۳۶ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۱ ساده | محاسباتی- پیمانه‌گیری

درسنامه

بخش‌پذیری بر اعداد خاص

بخش‌پذیری بر ۲، ۴، ۸ و ... (توان‌های ۲)

برای این‌که عددی بر ۲ بخش‌پذیر باشد، باید رقم یکان آن بر ۲ بخش‌پذیر باشد. (رقم یکان زوج باشد.)

برای این‌که عددی بر ۴ بخش‌پذیر باشد، باید دو رقم سمت راست بر ۴ بخش‌پذیر باشد. (عدد دو رقمی سمت راست مضرب ۴ باشد.)

برای این‌که عددی بر ۸ بخش‌پذیر باشد، باید سه رقم راست بر ۸ بخش‌پذیر باشد. (عدد سه رقمی سمت راست مضرب ۸ باشد.)

پس می‌توان قاعده‌ای کلی برای توان‌های ۲ یافت.

بخش‌پذیری بر ۱۱

باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۱۱ برابر مجموع ارقام به صورت یکی در میان مثبت و منفی از سمت راست آن عدد است.

باقی‌مانده‌ی عدد موردنظر (آن را A می‌نامیم) را بر ۴ و ۹ می‌یابیم:

$$۱۴۰۵۲۰۲۵ \overset{۴}{\equiv} ۲۵ \overset{۴}{\equiv} ۱ \rightarrow A \overset{۴}{\equiv} ۱$$

$$۱۴۰۵۲۰۲۵ \overset{۹}{\equiv} ۵+۲+۰+۲+۵+۰+۴+۱ \overset{۹}{\equiv} ۱ \rightarrow A \overset{۹}{\equiv} ۱$$

حال باید دو طرف دو رابطه‌ی هم‌نهشتی را برابر کنیم:

$$\begin{matrix} A \overset{۴}{\equiv} ۱ \\ A \overset{۹}{\equiv} ۱ \end{matrix} \xrightarrow{[۴,۹]=۳۶} A \overset{۳۶}{\equiv} ۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲ . اگر در یک سال، ۱۱ دی شنبه باشد، ۲۹ تیرماه همان سال چه روزی از هفته بوده است؟

۱) یکشنبه ۲) دوشنبه ۳) چهارشنبه ۴) سه‌شنبه

پاسخ: گزینه ۴ ساده | محاسباتی- پیمانه‌گیری

درسنامه

کاربردهای هم‌نهشتی: در حل مسایل گردشی (دوره‌ای) مانند روزهای هفته، ساعت و ماه سال که با افزودن عدد ثابتی (۷ روز، ۲۴ ساعت و ۱۲ ماه) به شرایط قبل بازمی‌گردیم، هم‌نهشتی کاربرد دارد. فرض کنید امروز دوشنبه است. ۷ روز بعد چه روزی است؟ ۱۴ روز بعد چطور؟ ۱۵ روز بعد سه‌شنبه خواهد بود. زیرا بعد از ۱۴ روز دوباره به دوشنبه می‌رسیم و سپس روز پانزدهم سه‌شنبه خواهد بود. حال اگر به ما در تست‌ها تاریخ بدهند چه باید کرد؟ در قدم اول ابتدا فاصله‌ی بین دو تاریخ داده شده را می‌یابیم. سپس عدد را در پیمانه‌ی ۷ برده و هم‌نهشتی را تشکیل می‌دهیم. حال عدد بین ۰ تا ۶ داریم. (پیمانه‌ی ما ۷ است). اگر تاریخ دومی که از ما سوال پرسیده باشد جلوتر از تاریخی که به ما داده است، بود به تعداد عددی که به دست آوردیم، جلو می‌رویم. و برعکس اگر تاریخ دوم قبل تاریخ اول بود، به تعداد روزهای به دست آمده به عقب برمی‌گردیم.

از ۱۱ دی به عقب برگشته تا به تاریخ ۲۹ تیرماه برسیم:

$$\underbrace{۱۰}_{\text{۱۰ روز از دی گذشته}} + \underbrace{۳\times۳۰}_{\text{۳ ماه پاییز}} + \underbrace{۲\times۳۱}_{\text{مرداد و شهریور}} + ۳ \overset{۷}{\equiv} ۳+۳\times۲+۲\times۳+۳ \overset{۷}{\equiv} ۱۸ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

پس باید ۴ روز از شنبه، به عقب بازگردیم. به روز سه‌شنبه می‌رسیم.

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۳ . سه برابر عدد سه رقمی $\overline{aba}$ را روبه‌روی خودش (سمت راست $\overline{aba}$) قرار داده و آن را A می‌نامیم. A همنهشت کدام عدد زیر، به پیمانه‌ی ۵۹ است؟ (A عددی شش‌رقمی است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱۰ ۴) ۵۸

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی- پیمانه‌گیری

درسنامه

عددنویسی در مبنای ۱۰:

$$\overline{abcd} = d+۱۰c+۱۰۰b+۱۰۰۰a$$

در حالت کلی:

$$A = \overline{a_n \dots a_۱ a_۰} = a_۰ + ۱۰a_۱ + \dots + ۱۰^n a_n$$

در این تست داریم:

$$A = \overline{aba(۳\overline{aba})}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$A = ۱۰۰۰(\overline{aba}) + ۳\overline{aba} = ۱۰۰۳\overline{aba}$$

مشخص است که A بر ۱۰۰۳ بخش‌پذیر است:

$$A \overset{۱۰۰۳}{\equiv} ۰$$

از طرفی $۵۹\times۱۷ = ۱۰۰۳$، در نتیجه:

$$A \overset{۵۹}{\equiv} ۰$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۴ . در معادله‌ی زیر به جای x چند مقدار طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ می‌توان قرار داد؟

$$۳۴x-۱ \overset{۳۰}{\equiv} ۱!+۲!+۳!+\dots+۱۳۹۸!$$

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی- معادله همنهشتی

می‌دانیم عبارت $۵!$ بر ۳۰ بخش‌پذیر است. بنابراین تمام اعداد $۶!, ۷!, \dots$ بر عدد ۳۰ بخش‌پذیرند و در همنهشتی به پیمانه‌ی ۳۰ برابر صفر هستند، پس:

$$۳۴x-۱ \overset{۳۰}{\equiv} ۱!+۲!+۳!+۴!$$

$$\Rightarrow ۳۴x-۱ \overset{۳۰}{\equiv} ۱+۲+۶+۲۴ \Rightarrow ۳۴x-۱ \overset{۳۰}{\equiv} ۳۳ \Rightarrow ۳۴x \overset{۳۰}{\equiv} ۳۴$$

$$\xrightarrow[(۳۰,۳۴)=۲]{\div ۳۴} x \overset{\frac{۳۰}{۲}}{\equiv} ۱ \Rightarrow x \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow x = ۱۵k+۱ \Rightarrow ۱ \le ۱۵k+۱ \le ۹۹$$

$$\Rightarrow ۰ \le ۱۵k \le ۹۸ \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} ۰ \le k \le ۶ \Rightarrow \text{۷ مقدار}$$

درسنامه

معادله‌ی هم‌نهشتی: اگر در رابطه‌ی هم‌نهشتی مجهول وجود داشته باشد، به آن معادله‌ی هم‌نهشتی گوییم. برای حل معادله‌ی هم‌نهشتی از تمامی ابزارهایی که تا به حال آموخته‌ایم استفاده می‌کنیم. در حل معادله‌ی هم‌نهشتی به دنبال اعداد صحیحی هستیم که می‌توانیم به جای مجهول‌مان قرار دهیم تا معادله‌ی ما به یک رابطه‌ی هم‌نهشتی درست تبدیل شود. اما شرط آن‌که معادله‌ی هم‌نهشتی ما دارای جواب در $\mathbb{Z}$ باشد، به صورت زیر است:

معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره جواب دارد اگر و تنها اگر $(a,m) \mid b$.

اما برای حل معادله ابتدا باید معلومات را در یک طرف و مجهولات را در سمت دیگر رابطه‌ی هم‌نهشتی قرار دهیم. سپس باید به دنبال راهی برای ساده کردن ضریب x باشیم. به این‌گونه که مضربی از پیمانه را به طرف دیگر اضافه یا از آن کم کنیم تا بتوانیم با یک تقسیم، ضریب مجهول را ساده کنیم. در این مرحله حواستان به شرط تقسیم در هم‌نهشتی باشد!

در حالت کلی معادله‌های هم‌نهشتی هیچ کار خاصی ندارند!

۵ . معادله‌های هم‌نهشتی $ax \overset{۷}{\equiv} n^۲+۴n$ و $ax \overset{۷}{\equiv} n-۳$ دارای جواب هستند. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و ۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۱ یا ۷ ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی- ب.ب.م

شرط وجود جواب را برای هر دو معادله می‌نویسیم:

فرض کنیم:

$$(a,۷)=d$$

$$\begin{matrix} d \mid n^۲+۴n \to d \mid n^۲+۴n \\ d \mid n-۳ \xrightarrow{\times n} d \mid n^۲-۳n \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d \mid ۷n \to d \mid ۷ \xrightarrow{d>۰} d=۱ \text{ یا } d=۷$$

اما توجه کنید که اگر $d=۷$ باشد، رابطه‌ی $۷ \mid n^۲+۴n$ همواره برقرار نیست. مثلاً اگر $n=۲$ باشد، $۷ \nmid ۱۲$. پس $d=۱$ است.

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۶ . کوکب جشن روز تولدش که دقیقاً سه ماه پیش در تاریخ ۱۷ آبان برگزار شد را به خاطر نمی‌آورد، اما می‌داند که پنجشنبه یا جمعه نبوده است. با کدام احتمال امروز شنبه است؟ (هر کدام از ماههای پیش ۳۰ روز دارند.)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی- پیمانه‌گیری

ابتدا از تاریخ ۱۷ آبان، سه ماه (۹۰ روز) جلوتر می‌رویم:

$$۶ \overset{۷}{\equiv} ۹۰$$

حالا از پنجشنبه و جمعه ۶ روز جلو می‌رویم که می‌شود چهارشنبه و پنجشنبه. یعنی: اگر روز تولد کوکب پنجشنبه یا جمعه نبوده است، پس امروز چهارشنبه یا پنجشنبه نیست! از ۵ روز باقی‌مانده در هفته، احتمال شنبه بودن امروز برابر است با $\frac{۱}{۵}$.

* اگر نفهمیدید چرا ۲ روز چهارشنبه و پنجشنبه را در فضای نمونه کم کردیم، احتمال شرطی را دوباره بخوانید!

۷ . اگر عدد پنج‌رقمی $\overline{a۲b۰c}$ مضرب ۳۶ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $\overline{b۰a}$ بر ۱۱ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی- پیمانه‌گیری

عددی مضرب ۳۶ است که مضرب ۴ و مضرب ۹ باشد:

$\overline{a۲b۰c} \overset{۹}{\equiv} ۰ \rightarrow a+۲+b+۰+c \overset{۹}{\equiv} ۰ \rightarrow a+b+c \overset{۹}{\equiv} -۲$

چون a و b و c رقم‌اند، پس:

$$\begin{cases} a+b+c=۷ \\ a+b+c=۱۶ \\ a+b+c=۲۵ \end{cases} \quad (I)$$

از طرفی برای این‌که عدد مضرب ۴ باشد، داریم:

$\overline{a۲b۰c} \overset{۴}{\equiv} ۰ \rightarrow \overline{۰c} \overset{۴}{\equiv} ۰$

$$\begin{cases} c=۰ \\ c=۴ \\ c=۸ \end{cases} \xrightarrow{(I)} \begin{cases} a+b=۷ \checkmark \text{ یا } a+b=۱۶ \checkmark \text{ یا } a+b=۲۵ \times \\ a+b=۳ \checkmark \text{ یا } a+b=۱۲ \checkmark \text{ یا } a+b=۲۱ \times \\ a+b=-۱ \times \text{ یا } a+b=۸ \checkmark \text{ یا } a+b=۱۷ \checkmark \end{cases}$$

در نتیجه:

$\overline{b۰a} \overset{۱۱}{\equiv} a-۰+b \overset{۱۱}{\equiv} a+b$

$a+b \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \text{ یا } ۳ \text{ یا } ۵ \text{ یا } ۶ \text{ یا } ۷ \text{ یا } ۸$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۸ . رقم یکان دو عدد $۷a+۳$ و $۴a-۱۳$ برابر هستند. رقم یکان عدد $(a^۲+۱)^{۷۱}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۲ آسان | محاسباتی- پیمانه‌گیری

می‌دانیم رقم یکان یعنی پیمانه‌ی ۱۰:

$۷a+۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۴a-۱۳ \rightarrow ۳a \overset{۱۰}{\equiv} -۱۶ \rightarrow ۳a \overset{۱۰}{\equiv} -۱۶+۴\times۱۰ \rightarrow ۳a \overset{۱۰}{\equiv} ۲۴$

$\xrightarrow[(۳,۱۰)=۱]{\div ۳} a \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۶۴ \rightarrow a^۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \rightarrow a^۲+۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۵$

از طرفی هر عدد که رقم یکانش ۵ باشد، به هر توانی هم برسد باز هم رقم یکان ۵ خواهد داشت. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۹ . اگر عدد $\overline{۲abb۴}$ مضرب ۹۹ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۴ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ سخت | محاسباتی- پیمانه‌گیری

عددی بر ۹۹ بخش‌پذیر است که مضرب ۹ و ۱۱ باشد. بنابراین:

$\overline{۲abb۴} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \rightarrow ۴-b+b-a+۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \xrightarrow{a \text{ رقم است}} a=۶$

از طرفی:

$\overline{۲۶bb۴} \overset{۹}{\equiv} ۰ \rightarrow ۴+b+b+۶+۲ \overset{۹}{\equiv} ۰ \rightarrow ۲b \overset{۹}{\equiv} -۱۲$

$\xrightarrow[(۲,۹)=۱]{\div ۲} b \overset{۹}{\equiv} -۶ \rightarrow b \overset{۹}{\equiv} ۳ \xrightarrow{b \text{ رقم است}} b=۳$

بنابراین عدد ما برابر ۲۶۳۳۴ است. باقی‌مانده‌ی آن در تقسیم بر ۴ را بیابیم:

$۲۶۳۳۴ \overset{۴}{\equiv} ۳۴ \overset{۴}{\equiv} ۲$

البته به عنوان یک نکته بدانید؛ از ابتدای امر مشخص بود که این عدد زوج است.

هر عدد زوج بر ۴ باقی‌مانده‌ی صفر یا ۲ خواهد داشت. پس گزینه‌ی (۱) یا (۳) صحیح خواهد بود. می‌توانستید شانس خود را بین این دو گزینه بدون حل تست امتحان کنید.

۱۰. اگر x عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد و داشته باشیم: $۳x-۳ \overset{x-۲}{\equiv} x^۲-۲x+۱$، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳x^۲+۷$ بر ۱۱ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۱ سخت | محاسباتی- همنهشتی و رابطه بخش‌پذیری

$$(x-۱)^۲ \overset{x-۲}{\equiv} ۳(x-۱) \xrightarrow[(x-۱,x-۲)=۱]{\div(x-۱)} x-۱ \overset{x-۲}{\equiv} ۳ \to x-۴ \overset{x-۲}{\equiv} ۰$$

$$x-۲ \mid x-۴ \to x-۲ \mid ۲ \to x-۲=\pm۱,\pm۲ \to \begin{cases} x=۱ & \text{غ ق ق} \times \\ x=۳ & \text{غ ق ق} \times \\ x=۰ & \text{غ ق ق} \times \\ x=۴ & \checkmark \end{cases}$$

توجه کنید که اگر $x=۳$ باشد، پیمانه‌ی $x-۲$ برابر ۱ می‌شود که قابل‌قبول نیست. بنابراین عدد $۳x^۲+۷$ برابر ۵۵ می‌شود که بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۱۱. اگر برای سه مجموعه‌ی A, B, C از مجموعه‌ی مرجع U داشته باشیم: $A \subseteq B \subseteq C$، آن‌گاه مجموعه‌ی $(A \cap B)' \cup (B' \cap C')$ برابر کدام گزینه است؟

۱) A ۲) A' ۳) B ۴) B'

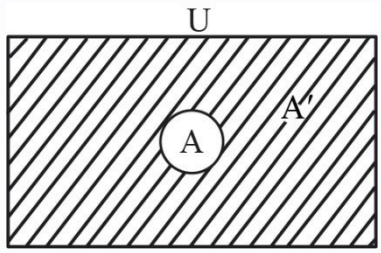
پاسخ: گزینه ۴ متوسط | تحلیلی- زیر مجموعه

درسنامه

فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \subseteq B$. ثابت کنید $B' \subseteq A'$. (A' و B' به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند).

قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعه‌ی A برابر با مجموعه‌ی اعضایی از U است که متعلق به مجموعه‌ی A نباشند و آن را با A' نمایش می‌دهند.

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x \in A$ آن‌گاه $x \notin A'$ یا اگر $x \in A'$ آن‌گاه $x \notin A$.

اثبات: برای این‌که ثابت کنیم $B' \subseteq A'$ باید نشان دهیم که: $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$ بنابراین داریم:

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A')$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$$

اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه به B مجموعه قوی و به A مجموعه ضعیف می‌گوییم.

* اجتماع قویه رو می‌خواد و اشتراک ضعیفه رو می‌خواد!

$A\cup B=B$
$A\cap B=A$

در این تست چون $B\subseteq C$ می‌توان نتیجه گرفت $C'\subseteq B'$ و $B'\cap C'=C'$ از طرفی چون $B\subseteq A$ پس $A\cap B=B$.

در نتیجه: $(B'\cap C')\cup(A\cap B)'=C'\cup B'=B'$

۱۲. مجموعه‌ی $(A-B)-(C-B)$، با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، برابر است؟

۱) $(B-C)-A$ ۲) $A-(B\cup C')$ ۳) $B-(A\cup C)$ ۴) $(A-B)-C$

پاسخ: گزینه ۴ آسان| محاسباتی- جبر مجموعه

راه‌حل اول:

نکته $A-B=A\cap B'$

$(A-B)-(C-B)=(A\cap B')-(C\cap B')$

$(A\cap B')\cap(C\cap B')'=(A\cap B')\cap(C'\cup B)$

$(A\cap B'\cap C')\cup(A\cap \underbrace{B'\cap B}_{\varnothing})=A\cap B'\cap C'$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\varnothing}$

$(A-B)\cap C'=(A-B)-C$

درسنامه

اشتراک پریم = تفاضل

نکته $A\cap B'=A-B$ همیشـــه یادتان باشد به جای اشتراک پریم می‌توانیم منها بگذاریم و بالعکس به جای منها می‌توانیم اشتراک پریم قرار دهیم.

نکته برای هر سه مجموعه‌ی A,B,C داریم:

۱) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

۲) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

به این قوانین توزیع‌پذیری یا پخشی گفته می‌شود.

۱۳. مجموعه‌ی $\{1,3,5,6,7,9\}$ چند زیرمجموعه دارد که مجموع تمام اعضای آن دو رقمی باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۹ ۳) ۴۴ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۱ سخت| محاسباتی- تعداد زیر مجموعه

روش اول: حالت‌هایی که مجموع اعضای دو رقمی شوند را به صورت مستقیم می‌نویسیم:

۱) عضو ۹ باشد و بقیه 2^5 حالت. (البته به جز حالتی که هیچ‌کدام نباشند.): ۳۱ حالت

۲) ۶ و ۷ باشند و بقیه 2^3 حالت: ۸ حالت

۳) ۶ و ۵ باشند و بقیه 2^2 حالت: ۴ حالت

۴) ۳ و ۷ باشند و بقیه 2^1 حالت: ۲ حالت

۵) ۵ و ۷ باشند و بقیه 2^2 حالت: ۴ حالت

۶) $\{1,3,6\}$: ۱ حالت

$\xleftarrow{(+)}$ ۵۰ زیرمجموعه

روش دوم: از اصل متمم استفاده کنیم. یعنی حالاتی را بنویسیم که مجموع اعضا دو رقمی نشود.

۱) همه زیرمجموعه‌های تک‌عضوی: ۶ حالت

۲) $\{1,3\},\{1,5\},\{1,6\},\{1,7\}$ ← ۴ حالت

۳) $\{3,5\},\{3,6\}$ ← ۲ حالت

۴) $\{1,3,5\}$ ← ۱ حالت

۵) $\{\}$ ← ۱ حالت

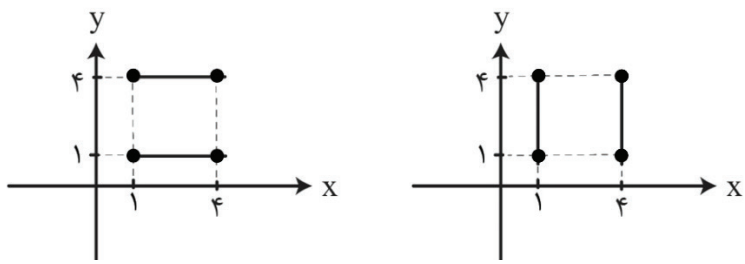
جواب: $2^6-14=50$

۱۴. اگر $A=[1,4]$ و $B=\{1,4\}$، آن‌گاه نمودار مختصاتی مجموعهٔ $A\times B-B\times A$ چگونه است؟

۱) مربع ۲) ۴ نقطه ۳) دو پاره خط موازی افقی ۴) دو پاره خط موازی عمودی

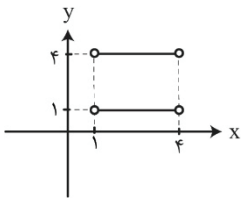
پاسخ: گزینه ۳ آسان| مفهومی- ضرب دکارتی

ابتدا نمودارهای مختصاتی $A\times B$ و $B\times A$ را به صورت جداگانه رسم می‌کنیم:



$A\times B$ $B\times A$

اشتراک مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$، چهار نقطهٔ $(1,1)$، $(1,4)$، $(4,1)$ و $(4,4)$ هستند که باید از مجموعهٔ $A\times B$ حذف بشوند تا به $A\times B-B\times A$ برسیم. نمودار حاصل به صورت مقابل است:



بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

درسنامه:

نمودار مختصاتی ضرب دکارتی دو مجموعه

دو مجموعهٔ A و B از مرجع U را در نظر می‌گیریم. به کمک تعریف ضرب دکارتی، مجموعهٔ $(A\times B)$ را تشکیل می‌دهیم.

الف) در صورتی که عضوهای مجموعهٔ $(A\times B)$ به صورت زوج مرتب باشند، هر عضو را همانند مختصات یک نقطه در دستگاه مختصات نمایش می‌دهیم. (توجه کنید که برای انجام این کار، عضوهای مجموعهٔ اول، در این‌جا مجموعهٔ A، روی محور افقی و عضوهای مجموعهٔ دوم، در اینجا مجموعهٔ B، روی محور عمودی مشخص می‌شود.)

ب) در صورتی که عضوهای مجموعهٔ $(A\times B)$ به کمک بازه‌های حقیقی نمایش داده شوند، بازهٔ متعلق به مجموعهٔ A را روی محور افقی و بازهٔ متعلق به مجموعهٔ B را روی محور عمودی در نظر می‌گیریم. به این ترتیب معمولاً یک سطح حاصل می‌شود.

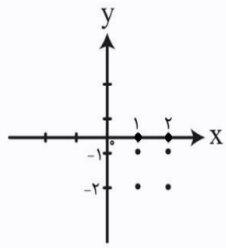
مثال: اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{-1,-2,0\}$، آن‌گاه مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را مشخص نمایید و سپس نمودار مختصاتی هر کدام را رسم کنید.

پاسخ: به کمک تعریف ضرب دکارتی دو مجموعه داریم:

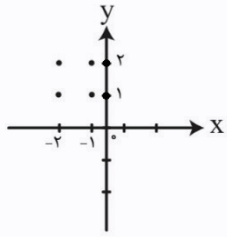
$$A\times B=\{(1,-1),(1,-2),(1,0),(2,-1),(2,-2),(2,0)\}$$

$$B\times A=\{(-1,1),(-1,2),(-2,1),(-2,2),(0,1),(0,2)\}$$

برای رسم نمودار مختصاتی مجموعهٔ $(A\times B)$، عضوهای A را روی محور افقی و عضوهای B را روی محور عمودی مشخص می‌کنیم و سپس زوج‌های مرتب متعلق به $(A\times B)$ را به صورت نقطه نمایش می‌دهیم.



برای رسم نمودار مختصاتی مجموعهٔ $(B\times A)$، عضوهای B را روی محور افقی و عضوهای A را روی محور عمودی مشخص می‌کنیم.



مثال: اگر $A=\{۲^x \mid x\in\mathbb{Z}, |x|\le ۱\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^۲+x-۲۰=۰\}$، آن‌گاه نمودار مختصاتی مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های A و B را با نوشتن عضوها مشخص می‌کنیم:

$$A=\{۲^{-۱},۲^{۰},۲^{۱}\}=\{\frac{۱}{۲},۱,۲\}$$

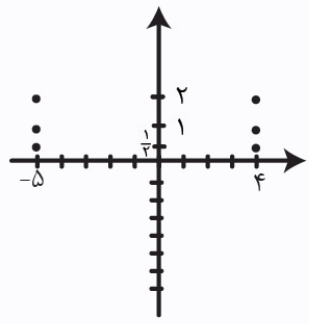
$$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid (x+۵)(x-۴)=۰\}=\{-۵,۴\}$$

بنابراین با توجه به تعریف ضرب دکارتی داریم:

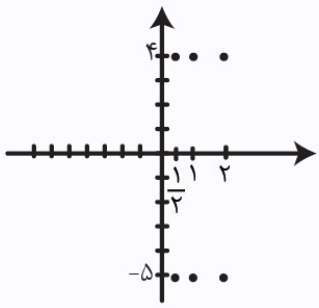
$$A\times B=\{(\frac{۱}{۲},-۵),(\frac{۱}{۲},۴),(۱,-۵),(۱,۴),(۲,-۵),(۲,۴)\}$$

$$B\times A=\{(-۵,\frac{۱}{۲}),(-۵,۱),(-۵,۲),(۴,\frac{۱}{۲}),(۴,۱),(۴,۲)\}$$

اکنون همانند سوال قبل داریم:



نمودار مختصاتی $(B\times A)$



نمودار مختصاتی $(A\times B)$

۱۵. اگر مجموعهٔ A دارای ۶ عضو و مجموعهٔ B دارای ۴ عضو و مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۳ عضو باشند، مجموعهٔ $(A\cup B')'\times(A\cap B')$ چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی، محاسباتی- تعداد اعضای مجموعه و ضرب دکارتی

$|A|=۶\ ,\ |B|=۴\ ,\ |A\cap B|=۳$

$|(A\cup B')'\times(A\cap B')|=|(A'\cap B)\times(A-B)|$

$=|(B\cap A')\times(A-B)|=|(B-A)\times(A-B)|$

$=|B-(A\cap B)|\times|A-(A\cap B)|$

$=(|B|-|A\cap B|)\times(|A|-|A\cap B|)=(۴-۳)\times(۶-۳)=۳$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

نکته **یادآوری قوانین مهم از جبر مجموعه‌ها:**

$(A\cup B)'=A'\cap B'\ ,\ (A\cap B)'=A'\cup B'$

الف) دمورگان

$A\cap B'=A-B$

ب) اشتراک پریم = تفاضل

آزمون‌های ماراتون

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال | ۱۳ آذرماه ۱۴۰۴

۱ . به ازای چند عدد اول P، عدد $P+8$ برابر حاصل‌ضرب دو عدد فرد متوالی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱ آسان | مفهومی، محاسباتی- اعداد اول

عدد فرد به صورت $2k-1$ است و عدد فرد بعدی ما $2k+1$ خواهد بود. داریم:

$$P+8=(2k-1)(2k+1)\rightarrow P+8=4k^2-1$$

$$\rightarrow P=4k^2-9\rightarrow P=(2k-3)(2k+3)$$

چون P عددی اول است، داریم:

$$2k-3=1\rightarrow k=2\rightarrow P=7$$

تنها یک مقدار به دست آوردیم. پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲ . به ازای چند عدد طبیعی n، رابطه‌ی $\binom{n}{3} \mid n^3-n$ برقرار است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲ آسان | محاسباتی- بخش‌پذیری

توجه کنید که:

$$\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\ ,\ n^3-n=n(n-1)(n+1)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\Big| n(n-1)(n+1)\xrightarrow[n\geq 3]{\div n(n-1)}\frac{n-2}{6}\Big| n+1$$

$$\xrightarrow{\times 6} n-2\Big| 6n+6\xrightarrow{n=2} n-2\Big| 18$$

$$\rightarrow n-2=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18\xrightarrow[n\text{ برای}]{\text{مقادیر قابل قبول}}3,4,5,8,11,20$$

برای n، ۶ مقدار طبیعی یافت می‌شود.

۳ . بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $2n+1$ و $10n-3$ چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی- ب م م

$$\begin{matrix} d\Big| 2n+1\xrightarrow{\times 5} d\Big| 10n+5 \\ d\Big| 10n-3\rightarrow d\Big| 10n-3 \end{matrix}\xrightarrow{(-)} d\Big| 8\rightarrow d=1,2,4,8$$

توجه داشته باشید که هر دو عدد $2n+1$ و $10n-3$ اعدادی فرد هستند. پس ب.م.م آن‌ها نمی‌تواند عددی زوج باشد و مقادیر ۸، ۴ و ۲ برای d غیرقابل‌قبول است. بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۴ . اگر x^3-x بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد، مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار دورقمی x کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | مفهومی، محاسباتی- بخش‌پذیری

$x^{۳}-x=۱۷q \rightarrow x(x^{۲}-۱)=۱۷q \rightarrow (x-۱)\times x\times(x+۱)=۱۷q$

چون ۱۷ عددی اول است، پس یکی از عوامل $x-۱$ یا x یا $x+۱$ حتماً مضرب ۱۷ است. بنابراین:

$x-۱=۱۷k \rightarrow x=۱۷k+۱ \xrightarrow{x_{max}\text{دورقمی}} x=۸۶$

$x=۱۷k \xrightarrow{x_{max}\text{دورقمی}} x=۸۵$

$x+۱=۱۷k \rightarrow x=۱۷k-۱ \xrightarrow{x_{max}\text{دورقمی}} x=۸۴$

بیشترین حالت $x=۸۶$ است که مجموع ارقام آن برابر ۱۴ است.

۵ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۳\times۵^{۵۲}-۲۱$ بر ۴۴ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی- پیمانه‌گیری

می‌دانیم که اگر $b \overset{m}{\equiv} a$ و $a \overset{n}{\equiv} b$، آن‌گاه $b \overset{[m,n]}{\equiv} a$. از آن‌جایی که $۱۱\times۴=۴۴$، پس باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد داده شده را بر ۴ و ۱۱ می‌یابیم:

$A=۳\times۵^{۵۲}-۲۱ \overset{۴}{\equiv} ۳\times(۱)^{۵۲}-۱ \overset{۴}{\equiv} ۳-۱ \overset{۴}{\equiv} ۲$

$۳\times۵^{۵۲}-۲۱ \overset{۱۱}{\equiv} ?$

می‌دانیم $۵^{۲} \overset{۱۱}{\equiv} ۳$. از این رابطه آغاز می‌کنیم:

$۵^{۲} \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\text{به توان }۵} ۵^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۳^{۵} \rightarrow ۵^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۲۴۳ \rightarrow ۵^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱$

$\xrightarrow{\text{به توان }۵} ۵^{۵۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times۵^{۲}} ۵^{۵۲} \overset{۱۱}{\equiv} ۲۵ \rightarrow ۵^{۵۲} \overset{۱۱}{\equiv} ۳$

حالا داریم: $۳\times۵^{۵۲}-۲۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۳\times۳-۲۱ \overset{۱۱}{\equiv} -۱۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$

بنابراین:

$A \overset{۴}{\equiv} ۲ \rightarrow A \overset{۴}{\equiv} ۱۰$

$A \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰ \rightarrow A \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$ $\rightarrow A \overset{۴۴}{\equiv} ۱۰$

در نتیجه گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۶ . چند عدد صحیح پنج رقمی به صورت $\overline{bacba}$ وجود دارد که مضرب ۵۵ باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی- پیمانه‌گیری

عددی مضرب ۵۵ است که بر ۵ و ۱۱ بخش‌پذیر باشد:

$\overline{bacba} \overset{۵}{\equiv} ۰ \rightarrow a \overset{۵}{\equiv} ۰ \xrightarrow{a\text{رقم است}} \begin{cases} a=۰ \\ a=۵ \end{cases}$

$\overline{bacba} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \rightarrow a-b+c-a+b \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \rightarrow c \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \xrightarrow{c\text{رقم است}} c=۰$

پس برای رقم a، دو حالت، برای رقم b نُه حالت (نمی‌تواند صفر شود!) و برای رقم c تنها یک حالت داریم. طبق اصل ضرب $۲\times۹\times۱=۱۸$ عدد با شرایط مذکور خواهیم داشت.

۷ . مجموع خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۱ برابر ۱۶ است. احتمال این‌که باقی‌مانده‌ی تقسیم a+۴ بر ۲۴ برابر ۱۰ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

پاسخ: گزینه ۱ سخت | مفهومی، محاسباتی- قضیه تقسیم

$a=bq+r \quad , \quad ۰\le r<b$

$a=۱۱q+r \quad , \quad ۰\le r<۱۱$

از طرفی می‌دانیم $r+q=۱۶$، در نتیجه $q=۱۶-r$ و با جای‌گذاری در معادله داریم:

$a=۱۱(۱۶-r)+r \to a=۱۷۶-۱۰r \ (*) \quad , \quad ۰\le r\le ۱۰$

$a+۴ \overset{۲۴}{\equiv} ۱۰ \to a \overset{۲۴}{\equiv} ۶ \xrightarrow{(*)} ۱۷۶-۱۰r \overset{۲۴}{\equiv} ۶$

$\to ۱۰r \overset{۲۴}{\equiv} ۱۷۰ \xrightarrow[(۱۰,۲۴)=۲]{\div ۱۰} r \overset{۱۲}{\equiv} ۱۷ \to r \overset{۱۲}{\equiv} ۵ \xrightarrow{۰\le r\le ۱۰} r=۵$

در کل ۱۱ مقدار برای r داشتیم که فقط $r=۵$ قابل‌قبول است. پس احتمال موردنظر برابر $\frac{۱}{۱۱}$ است.

۸ . به ازای کدام مقدار زیر برای a، معادله‌ی سیاله $۷۸x+۱۴۳y=۵a+۲$ دارای جواب است؟

۱) ۱۱ ۲) ۲۳ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۲ آسان | محاسباتی- معادله سیاله

شرط وجود جواب برای معادله‌ی سیاله را می‌نویسیم:

$۷۸x+۱۴۳y=۵a+۲ \to (۷۸,۱۴۳) \mid ۵a+۲$

$\to (۱۳\times ۶, ۱۳\times ۱۱) \Big| ۵a+۲ \to ۱۳ \Big| ۵a+۲ \to ۵a+۲ \overset{۱۳}{\equiv} ۰$

$\to ۵a \overset{۱۳}{\equiv} -۲ \to ۵a \overset{۱۳}{\equiv} -۱۵ \xrightarrow[(۵,۱۳)=۱]{\div ۵} a \overset{۱۳}{\equiv} -۳ \to a=۱۳k-۳$

$(۲۳=۱۳\times ۲-۳)$

هیچ‌کدام از گزینه‌ها به فرم $۱۳k-۳$ نیستند به جز گزینه‌ی (۲).

درسنامه

معادله‌ی سیاله خطی

برای معادله‌ی $۳x+۵y=۱۰$ یک جواب حدس بزنید.

پاسخ: این معادله بی‌شمار جواب دارد که یکی از آنها $(۰,۲)$ است.

به معادلات به فرم $ax+by=c$ در ریاضیات معادلات خطی (درجه‌ی یک) گفته می‌شود. در گسسته تمام مسایل در اعداد صحیح بررسی می‌شوند. یعنی در معادله‌ی بالا $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

اگر تمامی اعداد صحیح باشند می‌توانیم مجموعه جواب‌های معادله‌ی $ax+by=c$ را بیابیم. به چنین معادلاتی، معادله‌ی سیاله خطی گفته می‌شود.

شرط وجود جواب معادله‌ی سیاله خطی

معادله‌ی $۴x+۸y=۱۰$ چند جواب در مجموعه‌ی اعداد صحیح دارد؟

پاسخ: جواب ندارد چون $۱۰ \nmid (۴,۸)$.

معادله‌ی سیاله $ax+by=c$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,b) \mid c$. به عنوان مثال معادله‌های $۳x+۷y=۹$، $۴x+۶y=۱۰$، $۵x+۱۰y=۱۵$ دارای جواب هستند. ولی معادلات $۲x+۴y=۷$، $۳x+۶y=۱۰$، $۴۰x+۲۰y=۷۰$ جواب ندارند.

۹ . معادله‌ی سیاله‌ی $36x+48y=[360,480]$ چند دسته جواب طبیعی دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی- معادله سیاله

$[360,480]=120[3,4]=120\times12$

$36x+48y=120\times12 \xrightarrow{\div12} 3x+4y=120$

$3x \overset{4}{\equiv} 120 \Rightarrow x \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow x=4k \Rightarrow 4y=120-12k$

$y=30-3k \xrightarrow{y\in\mathbb{N}} 30-3k>0 \Rightarrow k\leq9$

$x=4k \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} 4k>0 \Rightarrow k\geq1$

$\Rightarrow 1\leq k\leq9$

بنابراین ۹ دسته جواب طبیعی داریم.

درسنامه

برای حل کردن معادله‌ی سیاله اولین قدم، ساده کردن ضرایب در صورت امکان است. سپس:

$ax+by=c \rightarrow ax \overset{b}{\equiv} c \ , \ by \overset{a}{\equiv} c$

نکته گاهی اوقات می‌توانیم یک جواب معادله‌ی سیاله را حدس بزنیم. در این صورت تمام جواب‌های آن را خواهیم یافت! مثلاً اگر جواب (x_0,y_0) را حدس زده‌ایم، سایر جواب‌های $ax+by=c$ به صورت مقابل خواهند بود:

$$\begin{cases} x=bk+x_0 \\ y=-ak+y_0 \end{cases}$$

۱۰. کوکب تعدادی دفتر و خودکار از فروشگاه خرید و بابت آن‌ها ۸۵ دلار پرداخت. اگر قیمت هر خودکار ۲ دلار و قیمت هر دفتر ۳ دلار باشد، بیشترین تعداد اجناسی که کوکب از این فروشگاه خریده است، کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۸ ۳) ۴۲ ۴) ۴۳

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی- معادله سیاله

درسنامه

برای حدس زدن جواب در معادله‌ی $ax+by=c$، از نکته‌ی زیر کمک بگیرید:

نکته

۱) اگر c مضرب a یا b باشد، کافی است مجهول دیگر را صفر قرار دهیم تا یک دسته جواب پیدا شود. $13x+25y=390 \rightarrow (30,0)$

۲) اگر c مضرب $a+b$ باشد، کافی است $x=y$ قرار دهیم. $11x+23y=3400 \rightarrow (100,100)$

۳) اگر c مضرب $a-b$ باشد، کافی است $x=-y$ قرار دهیم. $39x+14y=175 \rightarrow (7,-7)$

تعداد دفترها را x و خودکارها را y در نظر می‌گیریم. داریم: $3x+2y=85$

طبق نکته‌ی بالا چون $2+3$ مضرب ۸۵ است، کافی است $x=y$ قرار داده و به عدد ۱۷ برسیم. یعنی $(17,17)$ یک جواب حدسی برای معادله است.

حالا:

$$\begin{cases} x=2k+17 \\ y=-3k+17 \end{cases}$$

اما در نظر داشته باشید که تعداد خودکارها و دفترهای خریداری شده توسط کوکب عددی طبیعی است. یعنی:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2k+17 \geq 1 \rightarrow 2k \geq -16 \rightarrow k \geq -8 \\ -3k+17 \geq 1 \rightarrow 3k \leq 16 \rightarrow k \leq \frac{16}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \leq 5 \end{cases}$$

بیشترین تعداد اجناس به ازای $k=-8$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=41 \end{cases} \rightarrow x+y=42$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۱۱. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهر شدهٔ حداقل یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آن‌ها حداکثر ۸ است؟

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{7}{18}$ ۴) $\frac{11}{18}$

پاسخ: گزینه ۲ آسان | محاسباتی- احتمال ساده

$$n(s)=6^2=36$$

$$A=\{(1,2),(1,3),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,2),(4,3)$$

$$(5,1),(5,2),(5,3),(6,2)\}$$

$$n(A)=20$$

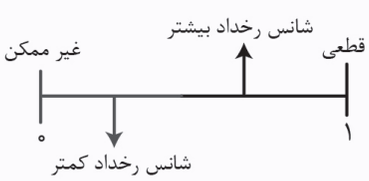
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

درسنامه

فضای نمونه: مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن برای به وقوع پیوستن یک پدیده یا آزمایش تصادفی را فضای نمونهٔ آن پدیده یا آزمایش تصادفی می‌نامیم. مثلا اگر تاسی را پرتاب کنیم یکی از اعداد ۱ تا ۶ رو می‌شود. بنابراین فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس $\{1,2,3,4,5,6\}$ است. به هر عضو فضای نمونه یک برآمد می‌گویند.

پیشامد تصادفی: به هر زیرمجموعه از فضای نمونه یک پیشامد تصادفی گویند. مثلاً در پرتاب یک تاس، پیشامد ظاهر شدن عددی زوج به صورت $A=\{2,4,6\}$ خواهد بود.

احتمال رخداد یک پیشامد: اگر A پیشامدی تصادفی در فضای نمونهٔ S باشد، احتمال رخداد پیشامد A را به صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌کنیم. $P(A)$ عددی حقیقی بین صفر و یک است. به این صورت که هر چقدر به ۱ نزدیک‌تر باشد، شانس وقوع آن بیشتر و بالعکس هر قدر به صفر نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A کم‌تر است. ببینید:



اگر احتمال وقوع پیشامدی برابر صفر باشد، به آن پیشامد نشدنی (غیرممکن) و اگر برابر یک باشد به آن پیشامد قطعی گفته می‌شود.

$$P(\varnothing)=0 \qquad P(S)=1$$

۱۲. در آزمایشگاهی ۶ میمون سالم و ۳ میمون هپاتیتی وجود دارد. اگر ۲ میمون از این آزمایشگاه فرار کنند، با کدام احتمال درصد میمون‌های بیمار باقی‌مانده در آزمایشگاه کم‌تر خواهد شد؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی- احتمال ساده، حالت‌بندی

برای آن‌که درصد میمون‌های بیمار کم‌تر شود، باید حداقل یکی از آن‌ها، جزو میمون‌های فراری باشد. یعنی ما باید احتمال آن‌که حداقل یک میمون هپاتیتی فرار کرده باشد را محاسبه کنیم. فضای نمونهٔ ما برای میمون‌های فراری $\binom{۹}{۲}$ است. احتمال آن‌که یک میمون سالم و یک میمون بیمار فرار کنند:

$$P(A_۱)=\frac{\binom{۶}{۱}\times\binom{۳}{۱}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۶\times۳}{۳۶}=\frac{۱}{۲}$$

احتمال آن‌که دو میمون بیمار از آزمایشگاه فرار کنند:

$$P(A_۲)=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=P(A_۱)+P(A_۲)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

۱۳. اگر $P(A-B')=۰/۲$ و $P(A\cup B)=۰/۸$، آن‌گاه احتمال پیشامد $(B\cap A')\cup(A-B)$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۱

پاسخ: گزینه ۳ آسان | محاسباتی- احتمال جبر مجموعه‌ها

نکته $A-B=A\cap B'$

$$P(A-B')=۰/۲\rightarrow P(A\cap B)=۰/۲$$

$$P(A\cup B)=۰/۸\rightarrow P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{۰/۲}=۰/۸\rightarrow P(A)+P(B)=۱$$

$$P[(B\cap A')\cup(A-B)]=P[(B-A)\cup(A-B)]=P(B-A)+P(A-B)$$

$$P(B)-P(A\cap B)+P(A)-P(A-B)=\underbrace{P(A)+P(B)}_{۱}-۲\underbrace{P(A\cap B)}_{۰/۲}$$

$$=۱-۰/۴=۰/۶$$

۱۴. از مجموعهٔ $\{۵۱,۵۲,\ldots,۲۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌شود. با چه احتمالی عدد انتخابی مضرب ۵ است ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیست؟

۱) $\frac{۸}{۷۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۱}{۷۵}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی- احتمال و جبر مجموعه‌ها

اگر مضرب ۵ بودن $=A$ و مضرب ۳ بودن $=B$ تعریف شود، سوال از ما $A-B$ را خواسته است؛ یعنی:

$$A-B=A-(A\cap B)$$

$A\cap B$ یعنی اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش پذیرند. بهتر بگوییم همان مضارب عدد ۱۵.

$$\begin{cases}A=[\frac{۲۰۰}{۵}]-[\frac{۵۰}{۵}]=۴۰-۱۰=۳۰\\ A\cap B=[\frac{۲۰۰}{۱۵}]-[\frac{۵۰}{۱۵}]=۱۳-۳=۱۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow A-(A\cap B)=۳۰-۱۰=۲۰$$

کل اعداد مجموعهٔ داده شده برابر با ۱۵۰ است، بنابراین احتمال موردنظر برابر $\frac{۲۰}{۱۵۰}$ یعنی $\frac{۲}{۱۵}$ می‌باشد.

۱۵. اگر تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ $A=\{1,2,4,6,9\}$ را بنویسیم و یکی از آن‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال حاصل‌ضرب اعضای آن بر ۶ بخش‌پذیر است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۹ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | حالت‌بندی و محاسباتی- احتمال متمم

ابتدا تعداد تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی A را می‌یابیم:

$$\binom{5}{3}=10$$

حال زیرمجموعه‌هایی که حاصل‌ضرب اعضای آن بر ۶ بخش‌پذیر است را می‌نویسیم:

حالت اول: اگر عضو ۶ در زیرمجموعهٔ موردنظر وجود داشته باشد، حاصل‌ضرب تمام اعضا حتماً مضرب ۶ خواهد بود. پس عضو ۶ را انتخاب کرده و از بین ۴ عدد دیگر (۹، ۴، ۲، ۱) فقط دوتای آن‌ها را به تصادف برمی‌گزینیم.

تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$\underbrace{1}_{\text{انتخاب عضو ۶}}\times\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{انتخاب ۲ عضو دیگر}}=6$$

حالت دوم:

در حالت بعدی عضو ۶ را در نظر نمی‌گیریم. از بین اعداد ۹، ۴، ۲ و ۱ باید سه عضو انتخاب کنیم. چون عدد ۹ مضرب ۳ است و اعداد ۲ و ۴ نیز زوج هستند، حاصل‌ضرب آن‌ها حتماً عامل ۶ خواهد ساخت. تنها حالتی که این اتفاق نمی‌افتد زیرمجموعهٔ $\{1,2,4\}$ است. پس تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب در این حالت نیز برابر است با:

$$\binom{4}{3}-1=4-1=3$$

بنابراین در مجموع $3+6=9$ حالت مطلوب داریم. احتمال موردنظر برابر است با:

$$P_{\text{مطلوب}}=\frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}}=\frac{9}{10}=0/9$$

روش دوم: بهتر است زیرمجموعه‌هایی را بیابیم که حاصل‌ضرب اعضایشان بر ۶ بخش‌پذیر نباشد. تنها حالت یافت شده $\{1,2,4\}$ است. بنابراین تنها یک حالت نامطلوب داریم. با استفاده از اصل متمم داریم:

$$P_{\text{نامطلوب}}=\frac{\text{نامطلوب}}{\text{کل}}=\frac{1}{10}$$

$$P_{\text{مطلوب}}=1-P_{\text{نامطلوب}}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

۱۷ مهرماه

گسسته

۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اگر α و β گنگ و $\alpha+\beta$ گویا باشد، $3\alpha-\beta$ گنگ است.

ب) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است.

ج) اگر α و β اعدادی گنگ و مثبت باشند، $\alpha+\beta$ گنگ است.

د) عدد $2^{2^n}+1$ به‌ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ گسسته صفحهٔ ۶)

بررسی موارد:

الف) درست است. برای اثبات آن از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $3\alpha-\beta$ عددی گویا باشد (فرض خلف)، با توجه به این‌که $\alpha+\beta$ طبق فرض اولیه عددی گویاست، بنابراین مجموع این دو عدد گویا باید عددی گویا باشد، پس $(3\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)$ یعنی 4α گویاست؛ که نتیجه می‌دهد α عددی گویاست که با فرض سؤال تناقض دارد. پس $3\alpha-\beta$ عددی گنگ است. پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

ب) نادرست است.

زیرا اگر $n=4$ باشد، 2^4-1 برابر ۱۵ و بر ۳ بخش‌پذیر است.

ج) نادرست است.

زیرا اگر $\alpha=\sqrt{2}$ و $\beta=3-\sqrt{2}$ باشد، $\alpha+\beta=3$ و گویا است.

د) نادرست است.

زیرا به‌ازای $n=5$ یک مثال نقض داریم.

بنابراین فقط ۱ مورد الف) درست است.

دربارهٔ اعداد گویا و گنگ

۱) جمع، تفریق و ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

عدد گویا $\square$ عدد گویا = عدد گویا

($\square$: $+$ یا $-$ یا $\times$)

همچنین تقسیم هر عدد گویا بر عددی گویا و ناصفر، عددی گویاست.

$$\frac{\text{عدد گویا}}{\text{عدد گویای ناصفر}} = \text{عدد گویا}$$

۲) جمع، تفریق، ضرب و تقسیم هر دو عدد گنگ، عددی گنگ یا گویا است.

عدد گنگ $\square$ عدد گنگ = عدد گویا یا عدد گنگ

($\square$: $+$ یا $-$ یا $\times$ یا $\div$)

۳) جمع یا تفریق یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

عدد گویا $\square$ عدد گنگ = عدد گنگ

($\square$: $+$ یا $-$)

۴) ضرب یا تقسیم یک عدد گویا و یک عدد گنگ، یا گویاست و یا گنگ.

عدد گویا $\square$ عدد گنگ = عدد گویا یا عدد گنگ $\Rightarrow$

- $0 \square$ عدد گنگ $= 0$ ($\square$: $\times$ یا $\div$)
- عدد گنگ $\square$ عدد گویای ناصفر = عدد گنگ ($\square$: $\times$ یا $\div$)

۵) معکوس هر عدد گویای غیرصفر، عددی گویاست و معکوس هر عدد گنگ نیز، عددی گنگ است.

تاز

۲- به‌ازای چند مقدار n از مجموعهٔ $\{8,9,10,...,80\}$ عبارت $\frac{n^3(n+1)^3}{8}$ همواره زوج است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۳۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۵)

می‌دانیم اگر $\frac{n^3(n+1)^3}{8}$ زوج باشد، $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج و در نتیجه $n = 4k$ یا $n = 4k-1$ است.

$8 \le 4k \le 80 \Rightarrow 2 \le k \le 20 \Rightarrow$ تعداد: $20-2+1=19$

$8 \le 4k-1 \le 80 \Rightarrow 9 \le 4k \le 81 \Rightarrow 3 \le k \le 20 \Rightarrow$ تعداد: $20-3+1=18$

تعداد $n = 19+18 = 37$

هرگز نکن فراموش...

اگر a عددی صحیح و n عددی طبیعی باشد، می‌توان گفت:

۱) اگر a عددی زوج باشد a^n نیز عددی زوج است و برعکس.

۲) اگر a عددی فرد باشد a^n نیز عددی فرد است و برعکس.

اگر $a\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$:

a^n عددی زوج است $\Leftrightarrow$ a عددی زوج است.

a^n عددی فرد است $\Leftrightarrow$ a عددی فرد است.

۳- اگر به‌ازای مقدار گویای m، کسر $\frac{m\sqrt{۳}-۲}{۲\sqrt{۳}+m-۵}$ گویا شود، مجموع مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۵)

روش اول

به‌ازای عدد گویای k خواهیم داشت:

$$\frac{m\sqrt{۳}-۲}{۲\sqrt{۳}+m-۵}=k \Rightarrow m\sqrt{۳}-۲=۲k\sqrt{۳}+mk-۵k \Rightarrow (m-۲k)\sqrt{۳}=\underbrace{mk-۵k+۲}_{\text{گویا}} \quad (۱)$$

این رابطه زمانی برقرار است که $m-۲k=۰$ باشد و در نتیجه $k=\frac{m}{۲}$ شود. اکنون این مقدار را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$m(\frac{m}{۲})-۵(\frac{m}{۲})+۲=۰ \xrightarrow{\times ۲} m^۲-۵m+۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} m_۱=۱ \\ m_۲=۴ \end{cases} \Rightarrow m_۱+m_۲=۵$$

روش دوم

حاصل $\frac{m\sqrt{۳}-۲}{۲\sqrt{۳}+m-۵}$ زمانی گویا می‌شود که:

$$\frac{m}{۲}=\frac{-۲}{m-۵} \Rightarrow m^۲-۵m=-۴ \Rightarrow m^۲-۵m+۴=۰ \Rightarrow (m-۱)(m-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۱ \\ m=۴ \end{cases}$$

مجموع مقادیر قابل قبول برای m $=۱+۴=۵$

قِلقِشو یاد بگیر!

اگر a، b، c و d اعدادی گویا و غیرصفر و $\sqrt{m}$ عددی گنگ باشد، حاصل $\frac{a\sqrt{m}+b}{c\sqrt{m}+d}$ زمانی گویا می‌شود که $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد.

۴- معادلهٔ $(x-y)(y-z)(z-x)=۸۰۵$ به‌ازای مقادیر صحیح x، y و z چند جواب به‌صورت (x,y,z) دارد؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۲۷ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۴)

با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های فرد و زوج بودن x، y و z، ثابت می‌شود که عبارت داده شده همواره زوج است، زیرا:

حالت اول

اگر هر سه فرد یا هر سه زوج باشند، همهٔ پرانتزها زوج است.

حالت دوم

اگر یکی فرد و دو تا زوج باشد، پرانتزی که دو تا زوج در آن است زوج می‌شود.

حالت سوم

اگر یکی زوج و دو تا فرد باشد، پرانتزی که دو تا فرد در آن است، زوج می‌شود.

در نتیجه عبارت داده شده همواره زوج بوده و هیچ‌گاه با عدد فرد برابر نیست. بنابراین معادلهٔ فوق در مجموعهٔ اعداد صحیح نمی‌تواند جواب داشته باشد.

ماز

۵- برای ..... گزارهٔ «حاصل‌ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است» از ..... استفاده می‌کنیم.

۱) رد- مثال نقض
۲) اثبات- برهان خلف
۳) اثبات- روش مستقیم
۴) رد- در نظر گرفتن همه حالت‌ها

پاسخ: گزینهٔ ۱ **(آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۳)**

حواستان باشد حاصل‌ضرب هر عدد گویای **ناصفر** در عدد گنگ، عدد گنگ است؛ که با برهان خلف اثبات می‌شود. در نتیجه گزارهٔ داده شده نادرست است، برای رد آن از مثال نقض استفاده می‌کنیم. مثال نقض آن حاصل‌ضرب صفر (عدد گویا) و هر عدد گنگی می‌تواند باشد. مثلا:

$$\underset{\text{گویا}}{0} \times \underbrace{\sqrt{3}}_{\text{گنگ}} = \underset{\text{گویا}}{0}$$

آزمون ماز

۱ آبان‌ماه

گسسته

۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با مثال نقض رد کرد؟

الف) اگر n عددی طبیعی و n^2 بر a بخش‌پذیر باشد، n نیز بر a بخش‌پذیر است.

ب) اگر a و b اعدادی صحیح باشند و $a|b$، آن‌گاه $|b| \leq |a|$ است.

ج) اگر x و y اعدادی گنگ و مثبت باشند، $x+y$ عددی گنگ است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به خط / ترکیبی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

هر سه گزاره نادرست است و با مثال نقض رد می‌شوند.

بررسی موارد نادرست:

الف) مثال نقض: عدد ۶^2 بر ۴ بخش‌پذیر است، ولی ۶ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

ب) مثال نقض: $|۰| ۵$ ولی $۰ > ۵$ است.

باید شرط $b \neq ۰$ در صورت گزاره ذکر شود.

ج) مثال نقض: اعداد $x = ۳ - \sqrt{۲}$ و $y = \sqrt{۲}$ گنگ و مثبت هستند ولی $x + y = ۳$ گویا است.

تعریف رابطهٔ عاد کردن

اگر a عددی صحیح و ناصفر و b عددی صحیح باشد، b بر a بخش‌پذیر است، اگر عددی صحیح مثل q وجود داشته باشد، که $b = aq$. در این صورت گوییم «**a شمارندهٔ b است**» یا «**a، b را عاد می‌کند**» و می‌نویسیم:

$$a \mid b$$

مثال نقض

مثالی است که برای رد درستی یک گزاره به کار می‌رود.

چند نکته!

فرض کنید a و b اعدادی صحیح و $a \neq 0$ باشد:

۱) اگر b بر a بخش‌پذیر باشد هر توان طبیعی از b نیز بر a بخش‌پذیر است.

$$a \mid b \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} a \mid b^n$$

اما عکس مطلب فوق صحیح نیست.

۲) اگر b بر a بخش‌پذیر و $b \neq 0$ باشد، آن‌گاه $|b| \geq |a|$ است.

$$a \mid b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$$

۳) در حالت کلی جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم دو عدد گنگ می‌تواند عددی گویا یا گنگ باشد.

مثال

۲- اگر a، b و c اعدادی طبیعی باشند، به‌طوری که $a \mid b^2$ و $b^3 \mid c^2$، کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $a \mid bc^2$ ۲) $ab \mid c^2$ ۳) $a^4b^2 \mid c^4$ ۴) $a^2 \mid bc^2$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط‌به‌خط / مفهومی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

بررسی گزینه‌ها:

۱)

$$\begin{cases} a \mid b^2 & (1) \\ b^3 \mid c^2 \xrightarrow[q \text{ وجود دارد}]{\text{طبق تعریف}} b^3q = c^2 \Rightarrow b^2\underbrace{(bq)}_{q'} = c^2 \xrightarrow{\text{طبق تعریف}} b^2 \mid c^2 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2) \text{ و تعدی}} a \mid c^2 \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} a \mid bc^2$$

۲)

$$a \mid b^2 \xrightarrow{\times b} ab \mid b^3 \quad (1)$$

$$b^3 \mid c^2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2) \text{ و تعدی}} ab \mid c^2$$

۴) $a|b^{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^{۲}|b^{۴}$

$b^{۳}|c^{۲} \xrightarrow{\times b} b^{۴}|bc^{۲}$ $\Rightarrow a^{۲}|bc^{۲}$

۳) مثال نقض:

$a=۴, b=۲, c=۱۲$

$a|b^{۲} \Rightarrow ۴|۲^{۲}$ ✓

$b^{۳}|c^{۲} \Rightarrow ۲^{۳}|۱۲^{۲}$ ✓

$۴^{۴}\times ۲^{۲}|۱۲^{۴} \Rightarrow ۲^{۱۰}|۲^{۸}\times ۳^{۴}$ ✗ $\Rightarrow$ گزینهٔ ۳ نادرست است.

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

فرض کنید a، b و c هر سه عدد صحیح باشند:

۱) اگر a، b را عاد کند، آن‌گاه هر مضرب صحیح b را نیز عاد می‌کند:

$$a|b \Rightarrow a|mb$$

۲) خاصیت تعدی

اگر a، b را عاد کند و b، c را عاد کند، آن‌گاه a نیز c را عاد می‌کند:

$$a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$$

۳) اگر a، اعداد b و c را عاد کند، آن‌گاه مجموع و تفاضلشان را نیز عاد می‌کند:

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

مثال

۳- چند نقطه با مختصات طبیعی روی منحنی $xy-۷x+۲y+۳=۰$ صدق می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا یک متغیر را تنها می‌کنیم و آن را برحسب دیگری می‌نویسیم، مثلا این‌جا y را برحسب x می‌نویسیم:

$$xy+۲y=۷x-۳ \Rightarrow y(x+۲)=۷x-۳ \Rightarrow y=\frac{۷x-۳}{x+۲}$$

اگر بخواهیم مختصات نقاطی که روی منحنی هستند صحیح باشند باید صورت کسر بالا بر مخرج آن بخش‌پذیر باشد تا y عدد صحیح شود، یعنی:

$x+۲|۷x-۳$

از طرفی می‌دانیم هر عدد صحیح خودش را عاد می‌کند، پس:

$x+۲|x+۲ \xrightarrow{\text{سمت راست را در ۷ ضرب می‌کنیم}} x+۲|۷x+۱۴$

$\begin{cases} x+۲|۷x+۱۴ \\ x+۲|۷x-۳ \end{cases} \xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{سمت راست دو رابطه را}} x+۲|(۷x+۱۴)-(۷x-۳) \Rightarrow x+۲|۱۷$

می‌دانیم که اعداد $\pm 1, \pm 17$ عدد ۱۷ را عاد می‌کنند، پس $x+2$ فقط یکی از این ۴ عدد می‌تواند باشد:

$$x+2=-1 \Rightarrow x=-3 \notin \mathbb{N}$$

$$x+2=1 \Rightarrow x=-1 \notin \mathbb{N}$$

$$x+2=-17 \Rightarrow x=-19 \notin \mathbb{N}$$

$$x+2=17 \Rightarrow x=15 \in \mathbb{N} \Rightarrow y=\frac{7(15)-3}{15+2}=6 \checkmark$$

پس فقط یک نقطه، یعنی نقطهٔ $(15,6)$ با مختصات طبیعی روی منحنی قرار دارد.

نقاط صحیح روی یک منحنی

در سوالاتی که به دنبال نقاط با مختصات صحیح یا طبیعی روی منحنی $y=\frac{p(x)}{ax+b}$ هستیم که در آن $p(x)$ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح و معمولاً از درجه ۱ یا ۲ و یا عدد ثابت است، باید صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد، یعنی: $ax+b \mid p(x)$. سپس باید با اعمال مناسب به فرم $ax+b \mid k$ (k عدد صحیح) برسیم و $ax+b$ را با شمارنده‌های (مقسوم‌علیه‌های) عدد k برابر قرار دهیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $y=\frac{2x+1}{x-1}$ قرار دارد؟

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \mid 2x+1 \\ x-1 \mid 2(x-1) \end{array}\right. \Rightarrow x-1 \mid (2x+1)-(2x-2) \Rightarrow x-1 \mid 3$$

$$x-1=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=5$$

$$x-1=-1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=-1$$

$$x-1=3 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=3$$

$$x-1=-3 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=1$$

بنابراین ۴ نقطه با مختصات صحیح $(-2,1), (4,3), (0,-1), (2,5)$ روی منحنی قرار دارد.

جرقهٔ ذهنی!

دیدید که در ابتدای سؤال گفتیم «یک متغیر را تنها می‌کنیم و آن را برحسب دیگری می‌نویسیم»، این یعنی فرقی ندارد کدام متغیر را برحسب دیگری می‌نویسیم و در هر دو حالت به یک جواب می‌رسیم. (حالا خودت x رو برحسب y بنویس و راه حل رو تا آخر برو تا ببینی که فرقی نداره! 😉)

مثال

۴- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد چهار رقمی x، که در رابطهٔ $41 \mid x^2+4x-21$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

$$41 \mid x^2+4x-21 \Rightarrow 41 \mid (x+7)(x-3)$$

وقتی ۴۱ حاصل‌ضرب دو عدد را عاد می‌کند، یا اولی را عاد می‌کند یا دومی را:

$$\Rightarrow 41 \mid x+7 \Rightarrow x+7=41t \Rightarrow x=41t-7 \xrightarrow{t=25} x=1018$$

یا

$$\Rightarrow 41 \mid x-3 \Rightarrow x-3=41t \Rightarrow x=41t+3 \xrightarrow{t=25} x=1028$$

کوچک‌ترین مقدار طبیعی چهار رقمی x برابر ۱۰۱۸ است و مجموع ارقام آن $8+1+0+1$ یعنی ۱۰ است.

یه نکتهٔ طلایی!

اگر p عددی اول باشد و حاصل‌ضرب b و c را عاد کند، یا b را عاد می‌کند یا c را عاد می‌کند:

$$p \mid bc \xrightarrow[\text{عددی اول است.}\ p]{\text{اعداد طبیعی و } p,b,c} p \mid b \vee p \mid c$$

ماز

۵- تعداد اعداد دو رقمی مانند n که در رابطهٔ $56 \mid n^3$ صدق می‌کنند، چند برابر تعداد اعداد سه رقمی مانند m است که در رابطهٔ $5m^3 \mid 5^m$ صدق می‌کنند؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۵/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ گسسته صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا کم‌ترین n طبیعی را پیدا می‌کنیم که در رابطهٔ $56 \mid n^3$ صدق می‌کند:

$$7 \times 2^3 \mid n^3 \Rightarrow n_{min} = 2 \times 7$$

پس n مضربی از ۱۴ است:

$$\Rightarrow n = 14t$$

برای این‌که دو رقمی باشد باید عددی بین ۱۰ تا ۹۹ باشد:

$$\Rightarrow 10 \le 14t \le 99 \Rightarrow 1 \le t \le 7 \Rightarrow n \text{ تعداد اعداد دو رقمی} = 7$$

حال از رابطهٔ دوم داریم:

$$5m^3 \mid 5^m \xrightarrow{\div 5} m^3 \mid 5^{m-1} \Rightarrow m = 5^k,\ (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 5^3 = 125 \Rightarrow 5^9 \mid 5^{124} \checkmark \\ m = 5^4 = 625 \Rightarrow 5^{12} \mid 5^{624} \checkmark \end{cases}$$

پس تعداد اعداد ۳ رقمی m برابر ۲ است. (توجه داریم که تنها توان‌های ۵ که ۳ رقمی هستند، توان سوم و چهارم آن است.)

بنابراین:

$$\frac{\text{تعداد اعداد دو رقمی } n}{\text{تعداد اعداد سه رقمی } m} = \frac{7}{2} = 3/5$$

۱۵ آبان‌ماه

گسسته

۱- به‌ازای چند عدد دو رقمی a دو عبارت $a+3$ و a^2-2a+2 نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۸۴ ۴) ۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

فرض می‌کنیم $d=(a+3,a^2-2a+2)$ باشد، حال سعی می‌کنیم با استفاده از ترکیب خطی یا روش‌های میان‌بر پارامتر a را در طرف دوم (طرف چاق) از بین ببریم:

$$\begin{cases} d\mid a+3 \\ d\mid a^2-2a+2 \end{cases} \xrightarrow[\text{میان‌بر}]{a=-3} d\mid (-3)^2-2(-3)+2 \Rightarrow d\mid 17 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 17$$

برای این‌که $d=1$ باشد، باید دست‌کم یکی از عبارت‌ها مضرب ۱۷ نباشد:

$$a+3=17k \Rightarrow a=17k-3$$

حال تعداد اعداد دو رقمی به شکل $17k-3$ برابر است با:

$$10\le 17k-3\le 99 \Rightarrow 13\le 17k\le 102 \Rightarrow k=1,2,3,4,5,6$$

بنابراین به‌ازای ۶ عدد دو رقمی این دو عبارت مضرب ۱۷ هستند و $d=17$ می‌باشد. اما به‌ازای سایر اعداد دو رقمی نسبت به هم اولند که تعداد آن‌ها برابر است با:

$$90-6=84$$

چه اعدادی نسبت به‌هم اول‌اند؟!

دو عدد a و b را نسبت به هم اول می‌نامند هرگاه:

$$(a,b)=1$$

یعنی دو عدد وقتی نسبت به هم اول‌اند که شمارندهٔ مشترکی نداشته باشند.

یه نکتهٔ طلایی!

اگر $n\mid x-a$ و $n\mid f(x)$ در این صورت:

$$n\mid f(a)$$

راهنمای زرنگ‌بازی!

اگر قرار باشد، مقادیری از n را پیدا کنیم که دو عبارت $f(n)$ و $g(n)$ نسبت به هم اول باشند، ابتدا مقادیری از n که دو عبارت نسبت به هم غیراول هستند را پیدا می‌کنیم و سپس با کنار گذاشتن این حالت به مقادیری می‌رسیم که دو عبارت نسبت به هم اول‌اند.

۲- چه تعداد از نتیجه‌گیری‌های زیر درست است؟

الف) $[a,b]\mid c \Rightarrow ab\mid c$ ب) $ab\mid c \Rightarrow (a,b)\mid c$

ج) $(a,b)\mid c \Rightarrow a\mid c$ د) $a\mid (b,c) \Rightarrow a\mid [b,c]$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم $(a,b)\mid a$، $a\mid [a,b]$ و $[a,b]\mid ab$ یعنی داریم:

$$\begin{matrix}(a,b)\mid a \\ (a,b)\mid b\end{matrix} \xrightarrow{\text{یعنی}} \text{هر کدام از اعداد چاق‌تر از ب.م.م هستند.}$$

$a \mid [a,b]$
$b \mid [a,b]$ $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ ک.م.م چاق‌تر از هر کدام از اعداد است.

$[a,b] \mid ab$ $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ ضرب دو عدد چاق‌تر از ک.م.م است.

حال به بررسی موارد می‌پردازیم:

بررسی موارد:

الف) $[a,b] \mid c \not\Rightarrow ab \mid c$ ✗ (لاغر، چاق شده)

ب) $ab \mid c \xrightarrow[\text{لاغر، لاغرتر شده}]{(a,b) \mid ab} (a,b) \mid c$ ✓

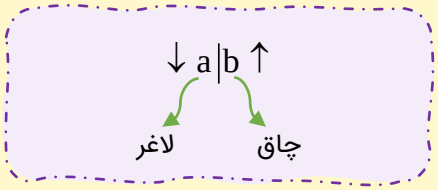
ج) $(a,b) \mid c \not\Rightarrow a \mid c$ ✗ (لاغر، چاق شده)

د) $a \mid (b,c) \xrightarrow[\text{چاق، چاق‌تر شده}]{(b,c) \mid [b,c]} a \mid [b,c]$ ✓

بنابراین تنها دو نتیجه‌گیری درست هستند.

کلاس درس بخش‌پذیری!

در هر بخش‌پذیری همواره می‌توان طرف چاق را چاق‌تر و طرف لاغر را لاغرتر کرد.



عواملی که موجب چاقی می‌شوند، افزایش توان، ضریب گرفتن و ک.م.م گرفتن است، یعنی:

$$a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid b^n \\ a \mid mb \\ a \mid [b,c] \end{cases}$$

و عواملی که باعث لاغری می‌شوند، کم شدن توان، از دست دادن ضریب و ب.م.م است:

$$a^n \mid b \Rightarrow a \mid b \qquad ma \mid b \Rightarrow a \mid b \qquad a \mid b \Rightarrow (a,c) \mid b$$

ب.م.م چیست؟

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) دو عدد بزرگ‌ترین عددی است که هر دو عدد بر آن بخش‌پذیراند و آن را با (a,b) نشان می‌دهیم.

روش محاسبهٔ ب.م.م دو عدد

برای محاسبهٔ (a,b) هر کدام از اعداد a و b را به عوامل اولشان تجزیه کرده و عوامل مشترک با توان کم‌تر را به عنوان عوامل ب.م.م انتخاب می‌کنیم. حاصل ضربِ آن عوامل، همان ب.م.م خواهد بود.

یه نمونهٔ باحال ببین!

محاسبهٔ $(۲۰۰,۷۲۰)$:

$۲۰۰=۲^{۳}\times۵^{۲}$ $\qquad$ $۷۲۰=۲^{۴}\times۳^{۲}\times۵^{۱}$ $\xrightarrow[\text{با توان کمتر}]{\text{عوامل مشترک}}$ $۲^{۳}\ ,\ ۵^{۱}$

$\Rightarrow$ ب.م.م $=۲^{۳}\times۵^{۱}=۴۰$

ک.م.م چیست؟

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عدد کوچک‌ترین عددی است که بر هر دو عدد بخش‌پذیر است و آن را با $[a,b]$ نشان می‌دهیم.

روش محاسبهٔ ک.م.م دو عدد

برای محاسبهٔ $[a,b]$ هر کدام از اعداد a و b را به عوامل اولشان تجزیه کرده و عوامل مشترک با توان بزرگ‌تر، و عوامل غیرمشترک را به عنوان عوامل ک.م.م انتخاب می‌کنیم. حاصل‌ضرب آن عوامل، همان ک.م.م خواهد بود.

یه نمونهٔ باحال ببین!

محاسبهٔ $[۱۰۰۸,۶۰۰]$:

$۶۰۰=۲^{۳}\times۳^{۱}\times۵^{۲}$ $\qquad$ $۱۰۰۸=۲^{۴}\times۳^{۲}\times۷^{۱}$

$\xrightarrow[\text{با توان بزرگ‌تر}]{\text{عوامل مشترک}}$ $۲^{۴}\times۳^{۲}$ $\qquad$ $\xrightarrow{\text{عوامل غیرمشترک}}$ $۵^{۲}\times۷^{۱}$

$\Rightarrow$ ک.م.م $=۲^{۴}\times۳^{۲}\times۵^{۲}\times۷^{۱}=۲۵۲۰۰$

رفع ابهام!

اگر مفهوم ب.م.م و ک.م.م رو خوب گرفته باشی حالا حتما می‌دونی که اون سه تا عبارتی که ابتدای حل سؤال گفتیم از کجا میان! 😉

ماز

۳- در تقسیم عدد دو رقمی $\overline{ab}$ بر عدد طبیعی b، خارج‌قسمت برابر مقسوم‌علیه و باقی‌مانده برابر دهگان عدد است، باقی‌مانده $\overline{b۰a}$ بر عدد ۱۷ کدام است؟

۱) ۶ $\qquad$ ۲) ۷ $\qquad$ ۳) ۸ $\qquad$ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۲ $\qquad$ **(متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۴ ـ ۱۲۰۱)**

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$\overline{ab}=\underbrace{b\times b}_{\text{مقسوم‌علیه}}+\underbrace{a}_{\text{باقی‌مانده}}\Rightarrow b+۱۰a=b^{۲}+a\Rightarrow b^{۲}-b=۹a\Rightarrow \underbrace{b(b-۱)}_{\text{متوالی}}=۹a\xrightarrow{a=۹\text{ و }\text{متوالی}}a=۸\Rightarrow b=۹$

بنابراین $\overline{b۰a}=۹۰۸$، حال باید باقی‌مانده ۹۰۸ را بر ۱۷ به‌دست آوریم:

$$\begin{array}{r|l}۹۰۸ & ۱۷\\ -۸۵ & ۵۳\\ \hline ۵۸ & \\ -\ ۵۱ & \\ \hline ۷ & \end{array}$$

$\Rightarrow ۹۰۸=۱۷\times۵۳+۷\Rightarrow ۹۰۸\overset{۱۷}{\equiv}۷$

قضیهٔ تقسیم

اگر a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی باشد؛ آن‌گاه طبق قضیهٔ تقسیم اعداد صحیح و منحصر به فرد r و q یافت می‌شوند، به گونه‌ای که:

$$a = bq + r \quad ; 0 \le r < b$$

(a: مقسوم، b: مقسوم‌علیه، q: خارج‌قسمت، r: باقی‌مانده)

نامساوی $0 \le r < b$ شرط تقسیم نامیده می‌شود.

مفهوم هم‌نهشتی و ویژگی‌های آن

هم‌نهشتی:

اگر دو عدد a و b در تقسیم بر m که عددی طبیعی است باقی‌ماندهٔ یکسانی داشته باشند، می‌گوییم a و b با یکدیگر به پیمانهٔ m هم‌نهشت هستند و می‌نویسیم:

$$a \overset{m}{\equiv} b$$

رابطهٔ هم‌نهشتی را به‌صورت زیر هم می‌توانیم بنویسیم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b \text{ یا } a = mk + b$$

برگردیم به دبستان!

عدد n رقمی $\overline{a_n \ldots a_3 a_2 a_1}$ را با توجه به عدد نویسی دهدهی که از ابتدایی به یاد داریم می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\overline{a_n \ldots a_3 a_2 a_1} = a_1 + a_2 \times 10 + a_3 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^{(n-1)}$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$\overline{abc} = c + b \times 10 + a \times 10^2$$

مثال

۴- در تقسیم عدد سه رقمی a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ۱۳ و خارج‌قسمت ۲۹ است. اگر عدد a مضرب ۹ باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار a کدام است؟

۱) ۵۳ ۲) ۵۰۸ ۳) ۵۱۲ ۴) ۵۲۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ گسسته صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۲۰۱)

این تست ترکیبی از قضیهٔ تقسیم و هم‌نهشتی است، اطلاعات سؤال را به زبان ریاضی برمی‌گردانیم:

$$a = b \times 29 + 13$$

$$a \overset{9}{\equiv} 0$$

حال عبارت $a = b \times 29 + 13$ را به پیمانهٔ ۹ می‌گیریم:

$$a = b \times \cancel{29}^{2} + \cancel{13}^{4} \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 2b + 4 \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 2b \overset{9}{\equiv} -4 \xrightarrow[(2,9)=1]{\div 2} b \overset{9}{\equiv} -2 \Rightarrow b = 9k - 2$$

از طرفی در صورت مسئله دو شرط مهم نهفته است:

۱) شرط تقسیم $\xrightarrow{0\le r<b}$ $b>13$

۲) شرط سه رقمی بودن a $\xrightarrow{100\le a\le 999}$ $100\le 29b+13\le 999\Rightarrow 87\le 29b\le 986\Rightarrow 3\le b\le 34$

بنابراین اشتراک دو شرط بالا برابر با $13<b\le 34$ است، در نتیجه داریم:

$13<9k-2\le 34\Rightarrow 14\le 9k-2\le 34\Rightarrow 16\le 9k\le 36\Rightarrow 2\le k\le 4$

حال چون $b=9k-2$ است، بنابراین به‌ازای $k=2$ کم‌ترین مقدار b برابر ۱۶ و بیش‌ترین مقدار b به‌ازای $k=4$ برابر ۳۴ به‌دست می‌آید و در نتیجه داریم:

$$\begin{matrix}\min(a)=29b+13=29\times 16+13\\ \max(a)=29b+13=29\times 34+13\end{matrix}\Rightarrow \max(a)-\min(a)=29(34-16)=29\times 18=522$$

کلاس درس ویژگی‌های هم‌نهشتی!

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

۱) هر عدد با خودش هم نهشت است.

$$a\overset{m}{\equiv}a$$

۲) هم‌نهشتی دارای خاصیت تعدی است.

$$\begin{cases}a\overset{m}{\equiv}b\\ b\overset{m}{\equiv}c\end{cases}\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$$

۳) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم با هر عددی جمع یا تفریق کنیم.

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm c$$

۴) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم در هر عددی ضرب کنیم.

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

۵) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان عدد طبیعی n برسانیم.

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

۶) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم مضارب مختلف پیمانه را به دو طرف اضافه و یا از آن‌ها کم کنیم. هدف از این کار بزرگ کردن و یا کوچک‌کردن اعداد دو طرف است.

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a\pm mq\overset{m}{\equiv}b\pm mk$$

۷) طرفین دو هم‌نهشتی با پیمانه‌های یکسان را می‌توانیم با هم جمع و تفریق و یا در هم ضرب کنیم.

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \quad \text{یا} \quad ac \overset{m}{\equiv} bd$$

۸) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم به جای پیمانه، یکی از مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n \mid m} a \overset{n}{\equiv} b$$

۹) اگر دو طرف هم‌نهشتی بر a بخش‌پذیر باشند، دو طرف را می‌توانیم بر a تقسیم کنیم، با این شرط که پیمانه را نیز باید بر $d=(a,m)$ که همان ب.م.م a و m است تقسیم کنیم:

$$ax \overset{m}{\equiv} ay \xrightarrow[(a,m)=d]{\div a} x \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} y$$

۱۰) اگر دو هم‌نهشتی دارای طرفین یکسان و پیمانه‌های متفاوت باشند به‌صورت زیر می‌توانیم آن‌ها را به یک هم‌نهشتی تبدیل کنیم:

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

مثال

۵- از رابطهٔ هم‌نهشتی $96a \overset{84}{\equiv} 216$ چه تعداد از نتیجه‌گیری‌های زیر در پیمانهٔ ۷ نادرست هستند؟

الف) $a^2 \overset{7}{\equiv} 4$ ب) $2a \overset{7}{\equiv} 1$

ج) $5a \overset{7}{\equiv} -1$ د) $a^3 \overset{7}{\equiv} -1$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

طرفین هم‌نهشتی را بر ۱۲ تقسیم می‌کنیم:

$$96a \overset{84}{\equiv} 216 \xrightarrow[(12,84)=12]{\div 12} 8a \overset{\frac{84}{12}}{\equiv} 18 \Rightarrow 8a \overset{7}{\equiv} 18$$

در ادامه $7a-$ به طرف اول و $14-$ واحد به طرف دوم اضافه می‌کنیم:

$$8a - 7a \overset{7}{\equiv} 18 - 2 \times 7 \Rightarrow a \overset{7}{\equiv} 4$$

حال به بررسی موارد می‌پردازیم.

بررسی موارد:

الف) $a \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow a^۲ \overset{۷}{\equiv} ۱۶ \overset{۷}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\text{در نتیجه}} a^۲ \overset{۷}{\equiv} ۴$ ✗

ب) $a \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۲a \overset{۷}{\equiv} ۸ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲a \overset{۷}{\equiv} ۱$ ✓

ج) $a \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۵a \overset{۷}{\equiv} ۲۰ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۵a \overset{۷}{\equiv} -۱$ ✓

د) $a \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow a^۳ \overset{۷}{\equiv} ۶۴ \overset{۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{در نتیجه}} a^۳ \overset{۷}{\equiv} -۱$ ✗

پس در مجموع ۲ نتیجه‌گیری درست است.

با هم‌نهشتی بیش‌تر دوست بشید!

قوانین هم‌نهشتی تقریباً شبیه قوانین مساوی است. مثلاً می‌توان طرفین هم‌نهشتی را در عددی ضرب کرد یا به توان رساند یا طرفین دو هم‌نهشتی با پیمانهٔ یکسان را با هم جمع و تفریق یا ضرب کرد؛ اما در **تقسیم** باید به قانون زیر دقت کنید:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow[(c,m)=d]{\div c} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

آزمون ماز

۲۹ آبان‌ماه

گسسته

۱- اگر عدد $\overline{۵a۰bb۹}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد، رقم یکان $a+b^{۱۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

عددی بر ۹۹ بخش‌پذیر است که هم بر ۹ و هم بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

پیمانهٔ ۹: $۵+a+۰+b+b+۹\overset{۹}{\equiv}۰ \Rightarrow ۲b+a\overset{۹}{\equiv}۴$ (۱)

پیمانهٔ ۱۱: $۹-b+b-۰+a-۵\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow a\overset{۱۱}{\equiv}-۴ \Rightarrow a\overset{۱۱}{\equiv}۷$ (۲)

از رابطهٔ (۲) و این‌که ارقام یک عدد می‌توانند تنها صفر تا ۹ باشند، داریم:

$\Rightarrow a=۷$

حال $a=۷$ را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲b+۷\overset{۹}{\equiv}۴ \Rightarrow ۲b\overset{۹}{\equiv}-۳ \Rightarrow ۲b\overset{۹}{\equiv}-۳+۹\overset{۹}{\equiv}۶ \xrightarrow[(۲,۹)=۱]{\div ۲} b\overset{۹}{\equiv}۳$$

با توجه به این‌که ارقام یک عدد بین صفر تا ۹ هستند، داریم:

$\Rightarrow b=۳$

$۳^{۱۱}+۷\overset{۱۰}{\equiv}\ ?$

نقطهٔ شروع: $\underbrace{۳^{۳}\times\left(۳^{۴}\right)^{۲}}_{۳^{۱۱}} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^{۳}\times(۱)^{۲} \Rightarrow ۳^{۱۱}\overset{۱۰}{\equiv}۲۷\overset{۱۰}{\equiv}۷ \Rightarrow ۳^{۱۱}+۷\overset{۱۰}{\equiv}۷+۷ \Rightarrow ۳^{۱۱}+۷\overset{۱۰}{\equiv}۴$

کلاس درس بخش‌پذیری‌ها

اگر $A=\overline{a_n a_{n-1}...a_0}$، آن‌گاه:

۱) شرط بخش‌پذیری بر ۳: عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که جمع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد:

$$A \overset{3}{\equiv} a_n + a_{n-1} + ... + a_0$$

۲) شرط بخش‌پذیری بر ۴: عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم آخر سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد:

$$A \overset{4}{\equiv} \overline{a_1 a_0}$$

۳) شرط بخش‌پذیری بر ۹: عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که جمع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد:

$$A \overset{9}{\equiv} a_n + a_{n-1} + ... + a_0$$

۴) شرط بخش‌پذیری بر ۱۱: عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اگر از راست به چپ، ارقام آن را یکی در میان مثبت و منفی (با شروع از مثبت) جمع بزنیم، حاصلش بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد:

$$A \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - ...$$

ویژگی‌های هم‌نهشتی!

۱) هر عدد با خودش هم نهشت است.

$$a \overset{m}{\equiv} a$$

۲) هم‌نهشتی دارای خاصیت تعدی است.

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{cases} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$$

۳) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم با هر عددی جمع یا تفریق کنیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$$

۴) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم در هر عددی ضرب کنیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

۵) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان عدد طبیعی n برسانیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

۶) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم مضارب مختلف پیمانه را به دو طرف اضافه و یا از آن‌ها کم کنیم. هدف از این کار بزرگ کردن و یا کوچک‌کردن اعداد دو طرف است.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mq \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

۷) طرفین دو هم‌نهشتی با پیمانه‌های یکسان را می‌توانیم با هم جمع و تفریق و یا در هم ضرب کنیم.

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \text{ یا } ac \overset{m}{\equiv} bd$$

۸) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم به جای پیمانه، یکی از مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن را قرار دهیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n|m} a \overset{n}{\equiv} b$$

۹) اگر دو طرف هم‌نهشتی بر a بخش‌پذیر باشند، دو طرف را می‌توانیم بر a تقسیم کنیم، با این شرط که پیمانه را نیز باید بر $d=(a,m)$ که همان ب.م.م a و m است تقسیم کنیم:

$$ax \overset{m}{\equiv} ay \xrightarrow[(a,m)=d]{\div a} x \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} y$$

۱۰) اگر دو هم‌نهشتی دارای طرفین یکسان و پیمانه‌های متفاوت باشند به‌صورت زیر می‌توانیم آن‌ها را به یک هم‌نهشتی تبدیل کنیم:

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

مثال

۲- اگر رابطهٔ $۳۰a-۱۱۷ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۰a-۹۷$ همواره برقرار باشد، رقم یکان $(a^۲-۳a)^۳$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

از ساده کردن رابطهٔ داده شده خواهیم داشت:

$$۳۰a-۱۱۷ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۰a-۹۷ \Rightarrow ۱۰a \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۰ \xrightarrow[(۱۰,۱۰۰)=۱۰]{\div ۱۰} a \overset{۱۰}{\equiv} ۲$$

$$(a^۲-۳a)^۳ \overset{۱۰}{\equiv} \left(۲^۲-۳(۲)\right)^۳ \overset{۱۰}{\equiv} -۸ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$$

رقم یکان، همان باقی‌ماندهٔ عدد بر ۱۰

باقی‌ماندهٔ هر عدد بر ۱۰ برابر است با رقم یکان آن عدد.

$$\overline{a_n \ldots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۱۰}{\equiv} a_۰$$

مثال

۳- اگر آخرین سه‌شنبهٔ اردیبهشت ماه سالی ۳۰ام باشد، دومین یکشنبهٔ دی ماه همان سال چندم ماه است؟

۱) سیزدهم ۲) چهاردهم ۳) هفتم ۴) هشتم

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

برای رسیدن به دومین یکشنبهٔ دی‌ماه ابتدا، به‌دست می‌آوریم که روز اول دی‌ماه چند شنبه است. برای به‌دست آوردن تعداد روزهای سال از ۳۱ اردیبهشت تا ۱ دی ماه داریم:

اردیبهشت (۳۱ روزه) ← ۱ روز — مهر (۳۰ روزه) ← ۳۰ روز

خرداد (۳۱ روزه) ← ۳۱ روز — آبان (۳۰ روزه) ← ۳۰ روز

تیر (۳۱ روزه) ← ۳۱ روز — آذر (۳۰ روزه) ← ۳۰ روز

مرداد (۳۱ روزه) ← ۳۱ روز — دی (۳۰ روزه) ← ۱ روز

شهریور (۳۱ روزه) ← ۳۱ روز

$$۱+۴\times ۳۱+۳\times ۳۰+۱ \overset{۷}{\equiv} ۶ \Leftarrow$$

سه‌شنبه را به عنوان اولین روز در نظر می‌گیریم:

سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

پس عدد ۶ متناظر روز دوشنبه است. یعنی اول دی روز دوشنبه است.

حال می‌یابیم که اولین یکشنبهٔ دی چندم است:

۱ دی	دوشنبه
۲ دی	سه‌شنبه
۳ دی	چهارشنبه
۴ دی	پنج‌شنبه
۵ دی	جمعه
۶ دی	شنبه
۷ دی (اولین)	یک‌شنبه

پس برای رسیدن به دومین یکشنبهٔ دی کافی‌ست که ۷ روز پیش برویم:

دومین یک‌شنبه $۷+۷=۱۴$ دی

تقویم نگاری

فرض کنید بدانیم یکی از روزهای سال، چه روزی از هفته است. به کمک هم‌نهشتی می‌توانیم تعیین کنیم که هر تاریخ دیگری، چه روزی از هفته است. دلیل این موضوع آن است که هر روز هفته بعد از ۷روز دوباره تکرار می‌شود. بنابراین کافی است فاصلهٔ دو روز را از هم به‌دست آوریم و سپس عدد حاصل را بر ۷ تقسیم کنیم. باقی‌ماندهٔ این تقسیم نشان می‌دهد که روز مورد نظر چند روز در هفته جلوتر از روز اولیه است.

۴- معادلهٔ $۴a^۲x\overset{۳}{\equiv}۱۰-۸x$ به‌ازای جمیع مقادیر صحیح a، چند جواب طبیعی سه رقمی برای x دارد؟

۱) ۲۹۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۴۲۰ ۴) ۴۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ۴ ـ گسسته صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$۴a^۲x+۸x\overset{۳}{\equiv}۱۰\Rightarrow ۴a^۲x-۳a^۲x+۸x-۶x\overset{۳}{\equiv}۱۰-۳\times۳\Rightarrow (a^۲+۲)x\overset{۳}{\equiv}۱$$

حال با توجه به این‌که شرط وجود جواب این است که $(a^۲+۲,۳)\mid ۱$، یعنی عدد $a^۲+۲$ نباید مضرب ۳ باشد. پس داریم:

$$a\in\mathbb{Z}\Rightarrow\begin{cases}a=۳k\Rightarrow a^۲+۲=۳k'+۲ \checkmark\\ a=۳k+۱\Rightarrow a^۲+۲=۳k'+۱+۲=۳k'' \times\\ a=۳k+۲\Rightarrow a^۲+۲=۳k'+۱+۲=۳k'' \times\end{cases}$$

$$\Rightarrow (۳k'+۲)x\overset{۳}{\equiv}۱\Rightarrow ۲x\overset{۳}{\equiv}۱+۳=۴\xrightarrow[(۲,۳)=۱]{\div ۲} x\overset{۳}{\equiv}۲\Rightarrow x=۳k+۲$$

حال برای این‌که جواب سه‌رقمی باشد باید بین ۱۰۰ تا ۹۹۹ باشد:

$$۱۰۰\le ۳k+۲\le ۹۹۹\Rightarrow ۳۳\le k\le ۳۳۲$$

تعداد جواب: $۳۳۲-۳۲=۳۰۰$

شرط وجود جواب برای معادلهٔ هم‌نهشتی

شرط لازم و کافی برای این‌که معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{c}{\equiv}b$ جواب داشته باشد این است که: $(a,c)\mid b$

۵- اگر معادلهٔ هم‌نهشتی $\overline{۲a۷۴} \overset{۴۴}{\equiv} ۳۳x$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب داشته باشد، آن‌گاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه رقمی y که در رابطهٔ $(a+a^۲+a^۳)y \overset{۶}{\equiv} ۲a$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا شرط وجود جواب را بررسی می‌کنیم:

شرط وجود جواب: $(۳۳,۴۴) \mid \overline{۲a۷۴} \Rightarrow ۱۱ \mid \overline{۲a۷۴}$

حال برای این‌که $\overline{۲a۷۴}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد داریم:

$$۴-۷+a-۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \Rightarrow a=۵$$

توجه داریم که چون a یک رقم است برابر ۵ می‌باشد. پس با جای‌گذاری a در رابطهٔ دوم داریم:

$$(۵+۵^۲+۵^۳)y \overset{۶}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow (-۱+۱-۱)y \overset{۶}{\equiv} ۴ \Rightarrow y \overset{۶}{\equiv} -۴$$

$$y=۶k-۴ \xrightarrow{k=۱۸} ۱۰۸-۴=۱۰۴$$

$$۱+۰+۴=۵$$

SanjeshCloud

آزمون ماز

۱۳ آذرماه

گسسته

۱- اگر p عددی اول، $(p,6)=1$ و $a+p$ زوج باشد، باقی‌ماندهٔ $p^3+p^2-p+a^2+1$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۴۰۱)

طبق اطلاعات سؤال از $(p,6)=1$ و اول بودن p متوجه می‌شویم که p عدد اولی غیر از ۲ و ۳ است. از آن‌جایی که تنها عدد زوج اول ۲ است، پس یعنی **p فرد** است. حال به بررسی تک‌تک جملات عبارت $p^3+p^2-p+a^2+1$ می‌پردازیم. ابتدا آن را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\underbrace{p^2}_{(1)}+\underbrace{p^3-p}_{(2)}+\underbrace{a^2}_{(3)}+1$$

(۱): مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به‌صورت $24k+1$ است. $\Leftarrow p^2=24k+1$

(۲): اگر n عددی فرد باشد، n^3-n همواره بر ۲۴ بخش‌پذیر است، زیرا:

$$n^3-n=n(\underset{\downarrow\ 8k+1}{n^2}-1)\Rightarrow$$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

از طرفی: $n^3-n=(n-1)n(n+1)\Rightarrow$ از هر سه عدد متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است. $\Rightarrow$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

(۳): چون $a+p$ زوج و p فرد است پس a فرد است و می‌دانیم مربع هر عدد فرد همواره برابر $8k+1$ است.

بنابراین:

$$p^2+p^3-p+a^2+1\Rightarrow 24k+1+24k'+8k''+1+1=8q+3$$

یادآوری!

۱) مربع هر عدد فرد همواره برابر $8k+1$ است. (چرا؟)

می‌دانیم که یک عدد فرد به صورت $2k+1$ است. پس:

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4\underbrace{k(k+1)}_{2k'}+1=8k'+1$$

توجه کنید که از هر دو عدد متوالی مثل k و $k+1$، یکی از آن‌ها زوج است.

۲) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به‌صورت $24k+1$ است. (چرا؟)

$$p=2k+1\Rightarrow p^2=8k+1\xrightarrow{\times 3}3p^2=24k+3\Rightarrow 24\mid 3p^2-3\xrightarrow{\text{طرفین}\times 5}24\mid 15p^2-15\quad (I)$$

از طرفی برای هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باقی ماندهٔ تقسیم آن به ۳ یا ۱ است یا ۲:

$$p=3k\pm 1\Rightarrow p^2=3k'+1\xrightarrow{\times 8}8p^2=24k'+8\Rightarrow 24\mid 8p^2-8\xrightarrow{\text{طرفین}\times 2}24\mid 16p^2-16\quad (II)$$

از تفاضل طرف دوم (I) و (II) داریم:

$$24\mid p^2-1\Rightarrow p^2=24k+1$$

ماز

۲- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد صحیحی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر عدد ۴۲، همواره $\frac{6}{5}$ برابر خارج‌قسمت شود، کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

بررسی سریع:

$$\begin{cases} a = ۴۲q + \frac{۶}{۵}q \\ \frac{۶}{۵}q < ۴۲ \Rightarrow q < ۳۵ \end{cases} \Rightarrow q_{max} = ۳۰$$

$$a = ۴۲ \times ۳۰ + \frac{۶}{۵} \times ۳۰ = ۱۲۹۶ \Rightarrow ۱+۲+۹+۶ = ۱۸$$

ترجمهٔ سؤال

باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر عدد ۴۲، همواره $\frac{۶}{۵}$ برابر خارج‌قسمت شود، یعنی: $a = ۴۲q + \frac{۶}{۵}q$

با توجه به ترجمهٔ سؤال و این‌که در تقسیم همیشه باقی‌مانده، کوچک‌تر از مقسوم‌علیه است داریم:

$$\begin{cases} a = ۴۲q + \frac{۶}{۵}q \\ \frac{۶}{۵}q < ۴۲ \Rightarrow q < ۳۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{بزرگ‌ترین مضرب ۵ که از ۳۵ کوچک‌تر است.}} q_{max} = ۳۰$$

توجه داریم که چون باقی‌مانده باید عددی حسابی باشد، پس $\frac{۶}{۵}q$ باید حسابی باشد که یعنی q باید مضرب ۵ باشد. پس عدد مورد نظر برابر است با:

$$a = ۴۲ \times ۳۰ + \frac{۶}{۵} \times ۳۰ = ۱۲۹۶ \Rightarrow ۱+۲+۹+۶ = ۱۸$$

قضیهٔ تقسیم

اگر عدد صحیح a را بر عدد طبیعی b تقسیم کنیم، خارج قسمت q و باقی‌مانده r باشد، خواهیم داشت:

مقسوم (عدد صحیح) / مقسوم‌علیه (عدد طبیعی) / خارج‌قسمت (عدد صحیح) / باقی‌مانده (عدد حسابی)

$$\Rightarrow \quad a = b \times q + r \quad (۰ \le r < b)$$

مثال

۳- در همنهشتی به پیمانهٔ m، سه عدد a، ۱۲۳ و ۵۸ در یک کلاس همنهشتی قرار دارند. اگر $(m,۵) = ۱$ و $m \neq ۱$ باشد، مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد چهار رقمی a کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۲۰۱)

بررسی سریع:

$$m \mid ۱۲۳-۵۸ \Rightarrow m \mid ۶۵ \Rightarrow m=۱,۵,۱۳,۶۵ \xrightarrow[(m,۵)=۱]{m\neq ۱} m=۱۳$$

$$\overset{۱۳}{a} \equiv \overset{۱۳}{۵۸} \equiv ۶ \Rightarrow a=۱۳k+۶ \xrightarrow{k=۷۷} ۱۰۰۱+۶=۱۰۰۷$$

$$\Rightarrow ۱+۰+۰+۷=۸$$

چون a، ۱۲۳ و ۵۸ در یک کلاس همنهشتی قرار دارند، پس به پیمانهٔ m همنهشت‌اند:

$$a \overset{m}{\equiv} \underbrace{۱۲۳ \overset{m}{\equiv} ۵۸}$$

$$m \mid ۱۲۳-۵۸ \Rightarrow m \mid ۶۵ \Rightarrow m=۱,۵,۱۳,۶۵ \xrightarrow[(m,۵)=۱]{m\neq ۱} m=۱۳$$

اکنون که پیمانه مشخص شده است، برای یافتن کوچک‌ترین عدد چهاررقمی با مشخصات خواسته شده داریم:

$$\overset{۱۳}{a} \equiv \overset{۱۳}{۵۸} \equiv ۶ \Rightarrow a=۱۳k+۶ \xrightarrow{k=۷۷} ۱۰۰۱+۶=۱۰۰۷$$

مجموع ارقام $a=۸$

مفهوم هم‌نهشتی!

اگر دو عدد a و b در تقسیم بر m که عددی طبیعی است باقی‌ماندهٔ یکسانی داشته باشند، می‌گوییم a و b با یکدیگر به پیمانهٔ m هم‌نهشت هستند و می‌نویسیم:

$$a \overset{m}{\equiv} b$$

رابطهٔ هم‌نهشتی را به صورت زیر هم می‌توانیم بنویسیم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \text{ یا } a=mk+b \Leftrightarrow m \mid a-b$$

ویژگی‌های هم‌نهشتی!

۱) هر عدد با خودش همنهشت است.

$$a \overset{m}{\equiv} a$$

۲) هم‌نهشتی دارای خاصیت تعدی است.

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{cases} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$$

۳) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم با هر عددی جمع یا تفریق کنیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$$

۴) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم در هر عددی ضرب کنیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

۵) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان عدد طبیعی n برسانیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

۶) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم مضارب مختلف پیمانه را به دو طرف اضافه و یا از آن‌ها کم کنیم. هدف از این کار بزرگ کردن و یا کوچک‌کردن اعداد دو طرف است.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mq \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

۷) طرفین دو هم‌نهشتی با پیمانه‌های یکسان را می‌توانیم با هم جمع و تفریق و یا در هم ضرب کنیم.

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \text{ یا } ac \overset{m}{\equiv} bd$$

۸) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم به جای پیمانه، یکی از مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن را قرار دهیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n \mid m} a \overset{n}{\equiv} b$$

۹) اگر دو طرف هم‌نهشتی بر a بخش‌پذیر باشند، دو طرف را می‌توانیم بر a تقسیم کنیم، با این شرط که پیمانه را نیز باید بر $d = (a, m)$ که همان ب.م.م a و m است تقسیم کنیم:

$$ax \overset{m}{\equiv} ay \xrightarrow[(a,m)=d]{\div a} x \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} y$$

۱۰) اگر دو هم‌نهشتی دارای طرفین یکسان و پیمانه‌های متفاوت باشند به‌صورت زیر می‌توانیم آن‌ها را به یک هم‌نهشتی تبدیل کنیم:

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

۴- معادلهٔ همنهشتی $(n^۲+۳n)x \overset{۲n+۱}{\equiv} ۱۳$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است. n چند عدد طبیعی دورقمی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۶۷ ۴) ۷۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

شرط وجود جواب برای معادلهٔ همنهشتی این است که:

$$(n^۲+۳n, ۲n+۱) \mid ۱۳$$

اگر $(n^۲+۳n, ۲n+۱)$ را برابر با d فرض کنیم، با استفاده از خواص رابطهٔ عاد کردن داریم:

$$d \mid n^۲+۳n \xrightarrow{\times ۲} ۲n^۲+۶n$$

$$d \mid ۲n+۱ \xrightarrow{\times n} ۲n^۲+n$$

$$\Rightarrow d \mid ۵n$$

مجددا با استفاده از رابطهٔ به‌دست آمده به همراه رابطهٔ $d \mid ۲n+۱$ داریم:

$$d \mid ۵n \xrightarrow{\times ۲} ۱۰n$$

$$d \mid ۲n+۱ \xrightarrow{\times ۵} ۱۰n+۵$$

$$\Rightarrow d \mid ۵ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۵$$

حال چون $d \mid ۱۳$ پس d نمی‌تواند ۵ باشد. پس تعداد nهایی که به‌ازای $d=۵$ به‌دست می‌آیند را محاسبه کرده و از تعداد کل کم می‌کنیم:

$$d=۵ \Rightarrow ۲n+۱ \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲n \overset{۵}{\equiv} -۱+۵=۴ \xrightarrow[(۲,۵)=۱]{\div ۲} n \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow n=۵t+۲$$

$$۱۰ \le ۵t+۲ \le ۹۹ \Rightarrow ۸ \le ۵t \le ۹۷ \Rightarrow ۲ \le t \le ۱۹ \Rightarrow \text{تعداد} = ۱۸$$

$$\Rightarrow ۹۰-۱۸=۷۲$$

شرط وجود جواب برای معادلهٔ همنهشتی

شرط لازم و کافی برای این‌که معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{c}{\equiv} b$ جواب داشته باشد این است که:

$$(a,c) \mid b$$

یادآوری تعریف رابطهٔ عاد کردن

اگر a عددی صحیح و ناصفر و b عددی صحیح باشد، b بر a بخش‌پذیر است، اگر عددی صحیح مثل q وجود داشته باشد، که $b=aq$. در این صورت گوییم «**a شمارندهٔ b است**» یا «**a، b را عاد می‌کند**» و می‌نویسیم:

$$a \mid b$$

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

فرض کنید a، b و c هر سه عدد صحیح باشند:

۱) اگر a، b را عاد کند، آن‌گاه هر مضرب صحیح b را نیز عاد می‌کند:

$$a\mid b \Rightarrow a\mid mb$$

۲) خاصیت تعدی

اگر a، b را عاد کند و b، c را عاد کند، آن‌گاه a نیز c را عاد می‌کند:

$$a\mid b \wedge b\mid c \Rightarrow a\mid c$$

۳) اگر a، اعداد b و c را عاد کند، آن‌گاه مجموع و تفاضلشان را نیز عاد می‌کند:

$$a\mid b \wedge a\mid c \Rightarrow a\mid b\pm c$$

نتیجهٔ ۱ و ۳)

$$\begin{matrix} a\mid b \\ a\mid c \end{matrix} \Rightarrow a\mid mb\pm nc$$

۴) اگر b بر a بخش‌پذیر و $b\neq 0$ باشد، آن‌گاه $|b|\geq|a|$ است.

$$a\mid b \xrightarrow{b\neq 0} |a|\leq|b|$$

مثال

۵- اگر معادلهٔ $\overline{aab5b}=693x+1089y$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب داشته باشد، رقم یکان a^{b^a} کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ گسسته صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم معادلهٔ $ax+by=c$ در مجموعه اعداد صحیح، در صورتی دارای جواب است که $(a,b)\mid c$، درنتیجه:

$$\underbrace{(693,1089)}_{99}\mid\overline{aab5b}$$

$$2b+2a+5\overset{9}{\equiv}0 \Rightarrow 2a+2b\overset{9}{\equiv}4 \Rightarrow a+b\overset{9}{\equiv}2 \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a+b=11 \end{cases}\ (1)$$

$$+b-5+b-a+a\overset{11}{\equiv}0 \Rightarrow 2b\overset{11}{\equiv}5-11=-6 \xrightarrow[(2,11)=1]{\div 2} b\overset{11}{\equiv}-3 \Rightarrow b=8 \xrightarrow{(1)} \begin{cases} a=-6 & \text{غ ق ق} \\ a=3 & \checkmark \end{cases}$$

می‌دانیم که $3^4\overset{10}{\equiv}1$. حال توان (همان b^a) را به پیمانهٔ ۴ حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow 8^3\overset{4}{\equiv}0 \Rightarrow 8^3=4k$$

بنابراین:

$$3^{8^3}\overset{10}{\equiv}\ ? \xrightarrow{8^3=4k} 3^{4k}\overset{10}{\equiv}(3^4)^k\overset{10}{\equiv}1$$

شرط وجود جواب برای معادلهٔ سیالهٔ خطی

شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که:

$$(a,b)\mid c$$

استراتژی حل معادلهٔ سیالهٔ خطی

۱) ابتدا معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ را به یکی از دو صورت زیر به یک معادلهٔ هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم:

$$ax\equiv c \quad (|a|) \qquad \text{یا} \qquad by\equiv c \quad (|b|)$$

۲) با حل معادلهٔ هم‌نهشتی و به‌دست آوردن جواب‌های عمومی آن، جواب‌های عمومی یکی از متغیرها را به‌دست می‌آوریم.

۳) حال جواب عمومی به‌دست آمده را در معادلهٔ اولیه $(ax+by=c)$ قرار می‌دهیم و جواب‌های عمومی متغیر دیگر را نیز به‌دست می‌آوریم.

۴) اگر شرطی روی x یا y داشتیم جواب‌های عمومی را در شرط قرار داده و از مقادیر قابل قبول برای هر یک، اشتراک می‌گیریم.

کلاس درس بخش‌پذیری‌ها

اگر $A=\overline{a_n a_{n-1}\dots a_0}$، آن‌گاه:

۱) شرط بخش‌پذیری بر ۳: عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که جمع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد:

$$A\overset{3}{\equiv} a_n+a_{n-1}+\dots+a_0$$

۲) شرط بخش‌پذیری بر ۴: عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم آخر سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد:

$$A\overset{4}{\equiv}\overline{a_1 a_0}$$

۳) شرط بخش‌پذیری بر ۹: عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که جمع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد:

$$A\overset{9}{\equiv} a_n+a_{n-1}+\dots+a_0$$

۴) شرط بخش‌پذیری بر ۱۱: عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اگر از راست به چپ، ارقام آن را یکی در میان مثبت و منفی (با شروع از مثبت) جمع بزنیم، حاصلش بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد:

$$A\overset{11}{\equiv} a_0-a_1+a_2-\dots$$

یافتن باقی‌ماندهٔ a^n بر m

برای پیدا کردن کوچک‌ترین توان a که باقی‌ماندهٔ آن بر m برابر با ۱ باشد، ابتدا کوچک‌ترین توان a را که در حوالی m باشد، پیدا می‌کنیم. اگر باقی‌مانده «۱» شد که به نتیجه رسیده‌ایم. اگر «-1» شد، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و اگر عددی غیر از ۱ یا -1 شد با ضرب طرفین هم‌نهشتی در a یا توان‌های a، سعی می‌کنیم طرف دوم را به m نزدیک و سپس ساده کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم توانی از ۳ را پیدا کنیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۱ برابر «۱» باشد.

۱) کوچک‌ترین توان ۳ را که در حوالی (کمی کم‌تر یا کمی بیش‌تر) ۱۱ است در پیمانهٔ ۱۱ کوچک می‌کنیم.	$۳^{۲} \overset{۱۱}{\equiv} -۲$
۲) چون باقی‌مانده ۱ یا -۱ نشد، طرفین را در توانی از ۳ ضرب می‌کنیم تا طرف دوم به حوالی ۱۱ برسد.	$۳^{۲} \overset{۱۱}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\times ۳} ۳^{۳} \overset{۱۱}{\equiv} -۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$
۳) مجدداً این کار را ادامه می‌دهیم تا اولین توان از ۳ که در پیمانهٔ ۱۱ برابر ۱ شود، به‌دست آید.	$۳^{۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\times ۳} ۳^{۴} \overset{۱۱}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\times ۳} ۳^{۵} \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۱$

میانبر رقم یکان

برای تعیین رقم یکان یک عدد توان‌دار در حالت کلی، عدد را به پیمانهٔ ۱۰ می‌بریم. به عبارتی از پایه، رقم یکان را نگه می‌داریم و البته توان را نیز به پیمانهٔ ۴ می‌بریم و به جای توان، باقی‌ماندهٔ آن را بر عدد ۴ قرار می‌دهیم. اگر باقی‌مانده صفر شد، به جای توان عدد ۴ را می‌گذاریم.

رفع ابهام!

می‌دونی چرا برای پیدا کردن رقم یکان توان رو به پیمانهٔ ۴ می‌بریم؟ چون هر کدوم از ارقام $۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹$ رو که به‌طور متوالی به توان برسونی و رقم یکان رو حساب کنی حداکثر با یک دورهٔ ۴ تایی به توان رسوندن دوباره رقم یکانشون تکرار می‌شه. مثلاً:

$۲^{۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۲$ $\quad$ $۲^{۵} \overset{۱۰}{\equiv} ۲$

$۲^{۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۴$ $\quad$ $۲^{۶} \overset{۱۰}{\equiv} ۴$

$۲^{۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۸$ $\quad$ $۲^{۷} \overset{۱۰}{\equiv} ۸$

$۲^{۴} \overset{۱۰}{\equiv} ۶$ $\quad$ $۲^{۸} \overset{۱۰}{\equiv} ۶$

رقم یکان توان‌های ۲ با یک دورهٔ ۴ تایی تکرار می‌شن. حالا خودت برای بقیه حساب کن و ببین که بقیه هم با دوره‌های ۴ تایی یا ۲ تایی تکرار می‌شن یا ثابت می‌مونن.

توجه!

اعدادی که یکان $۶,۵,۱,۰$ دارند، به هر توانی که برسند، رقم یکان آن‌ها ثابت می‌ماند.

آزمون ماز

۹/۲۹

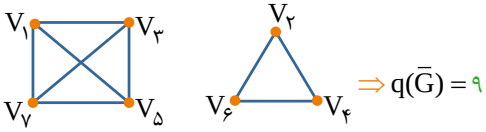
گسسته

۱- فرض کنید $V(G)=\{V_۱,V_۲,...,V_۷\}$ و $V_iV_j\in E(G)$ اگر و تنها اگر $i+j$ فرد باشد، گراف $\bar{G}$ چند یال دارد؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

در گراف G یال V_iV_j زمانی وجود دارد که $i+j$ فرد باشد، پس در مکمل آن، این یال زمانی رسم می‌شود که $i+j$ زوج باشد. پس یا i و j هر دو زوج و یا هر دو فرد هستند و گراف $\bar{G}$ به شکل زیر است که ۹ یال دارد.



$\Rightarrow q(\bar{G})=۹$

گروه آموزشی ماز

۲- در گراف G، ۴ رأس درجه ۳ و ۵ رأس درجه ۲ داریم. اگر $\Delta(G)=۳$ و $\delta(G)=۱$ و $q=p-۱$ باشد، مرتبه گراف G کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۵ ۳) ۱۹ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

$$۳,۳,۳,۳,۲,۲,۲,۲,۲,\underbrace{۱,...,۱}_{x\text{تا}} \Rightarrow p=۹+x \Rightarrow q=p-۱=۸+x$$

می‌دانیم مجموع درجات $2q$ می‌باشد.

$$\sum_{i=۱}^{p}\deg(V_i)=۲q \Rightarrow ۱۲+۱۰+x=۲q=۱۶+۲x \Rightarrow x=۶$$

پس $p=۹+x=۱۵$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۳- در گراف G از مرتبهٔ $p=۱۹$، $۲\Delta(G)=\delta(\bar{G})$ و $۵\delta(G)=\Delta(\bar{G})$ برقرار است. حاصل جمع مقادیر **max** و **min** اندازه این گراف کدام است؟

۱) ۸۶ ۲) ۸۴ ۳) ۸۷ ۴) ۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

می‌دانیم $\Delta(\bar{G})+\delta(G)=p-۱$ و $\Delta(G)+\delta(\bar{G})=p-۱$، پس داریم:

$$۲\Delta(G)=\delta(\bar{G})=۱۸-\Delta(G) \Rightarrow \Delta(G)=۶$$

$$۵\delta(G)=\Delta(\bar{G})=۱۸-\delta(G) \Rightarrow \delta(G)=۳$$

برای محاسبه q_{max} داریم:

$$\text{دنباله درجات: } \underbrace{۶,۶,\ldots,۶}_{\text{۱۷ تا}},۵,۳ \Rightarrow q_{max}=\frac{۶\times ۱۷+۸}{۲}=۵۵$$

برای محاسبه q_{min} داریم:

$$\text{دنباله درجات: } ۶,\underbrace{۳,۳,\ldots,۳}_{\text{۱۸ تا}} \Rightarrow q_{min}=\frac{۱۸\times ۳+۶}{۲}=۳۰$$

که جمع آن‌ها ۸۵ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۴- در یک گراف $r-$منتظم، رابطهٔ $r^۲=p+q$ برقرار است. مرتبه گراف کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

می‌دانیم $۲q=rp$ و $۰\le r\le p-۱$ است.

$$r^۲=p+q \Rightarrow ۲r^۲=۲p+۲q \Rightarrow ۲r^۲=۲p+rp \Rightarrow p=\frac{۲r^۲}{r+۲}$$

$$p=\frac{۲r^۲-۸+۸}{r+۲} \Rightarrow p=۲(r-۲)+\frac{۸}{r+۲}$$

چون مقادیر p و r صحیح هستند، پس $r+۲$ مقسوم‌علیه ۸ است.

$$r+۲=۴ \text{ یا } r+۲=۸ \Rightarrow r=۲ \text{ یا } ۶$$

اگر $r=۲$ باشد، $p=۲$ می‌شود که قابل قبول نیست.

$$r=۶ \Rightarrow p=\frac{۲r^۲}{r+۲}=\frac{۲\times ۳۶}{۸} \Rightarrow p=۹$$

گروه آموزشی ماز

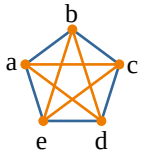
۵- در گرافی از مرتبه ۵ با رئوس $\{a,b,c,d,e\}$، $\sum_{i=۱}^{۵}\left|N[v_i]\right|=۲۳$ است. این گراف چند دور به طول ۴ دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

می‌دانیم $\sum_{i=۱}^{p}\left|N[v_i]\right|$ معادل با $۲q+p$ است، بنابراین $۲q+۵=۲۳$ و $q=۹$ است. این گراف یک یال از گراف کامل مرتبهٔ ۵ کم دارد. بنابراین کافی است تعداد دورهای به طول ۴ گراف کامل مرتبه ۵ را حساب کنیم و در نهایت دورهایی که یال مشخص در آن بوده‌اند را حذف کنیم.

$$\binom{۵}{۴}\frac{(۴-۱)!}{۲}-۶=۱۵-۶=۹$$



مثلاً دورهایی که یال ab در آن حضور دارند.

abcda – abdca – abcea – abeca – abdea – abeda

گروه آموزشی ماز

۶- در گراف G، حاصل‌ضرب درجات برابر ۱۰۰۰ و گراف حداقل مرتبه ممکن را دارد. چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا هر دو رأس گراف، مجاور شوند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

با توجه به اینکه $۲^۳\times ۵^۳=۱۰۰۰$ و اینکه باید درجات را به گونه‌ای قرار دهیم که تشکیل گراف بدهند، حداقل تعداد رئوس زمانی اتفاق می‌افتد که دنباله درجات به صورت ۵ ۵ ۵ ۲ ۲ ۲ ۱ ۱ ۱ باشد، در نتیجه $p_{min}=۹$ و $۲q=۲۴$ و $q=۱۲$ است. بنابراین:

$$q_{max}=\binom{۹}{۲}=۳۶$$

جواب: $۳۶-۱۲=۲۴$

بنابراین با اضافه شدن این ۲۴ یال، گراف فوق کامل می‌شود.

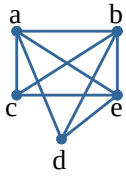
گروه آموزشی ماز

۷- در گراف G با رئوس $V=\{a,b,c,d,e\}$ همواره $N[a]=N[b]$ و $N(c)=N(d)$ برقرار است و G بیشترین یال ممکن را دارد. این گراف چند زیرگراف از مرتبه ۳ و اندازه ۲ دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

اگر گراف را رسم کنیم، بین a و b حتماً یالی وجود دارد و بین رئوس c و d یالی نباید باشد. با توجه به اینکه مطلوب ما بیشترین یال ممکن است، خواهیم داشت:



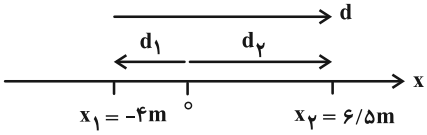
زیرگراف از مرتبه ۳ و اندازه ۲ به صورت  است، پس کافی است از هر رأس، ۲ یال از یال‌های وارده را انتخاب کنیم:

$$\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{4}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}=3+6+6+6+3=24$$

رأس c رأس a رأس b رأس e رأس d

۱- **گزینهٔ «۲»** *(متین خرمی)*

اگر متحرک از مبدأ مکان عبور کند، بردار مکان تغییر جهت و علامت می‌دهد.



بررسی گزینه‌ها:

ابتدا بردار مکان منفی است و سپس مثبت می‌شود، پس گزارهٔ (ب) نادرست است.

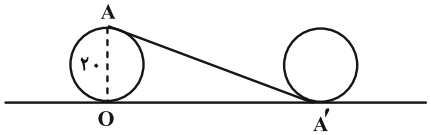
در ابتدا $(d_1 < 0)$ و سپس $(d_2 > 0)$ اما جابه‌جایی همواره در جهت مثبت است، پس جابه‌جایی و مکان هم‌جهت نیستند. (گزارهٔ الف نادرست)

اما از آنجایی که تغییر جهت در حرکت نداریم، مسافت طی شده و جابه‌جایی برابرند. پس گزارهٔ پ درست است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۵)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(ویدا حیدری)*

مطابق شکل زیر، چرخ دوچرخه نیم‌دور می‌چرخد و جابه‌جایی نقطه روی چرخ، بردار $\overline{AA'}$ می‌باشد.



مطابق شکل رسم شده، چرخ فاصلهٔ $\overline{OA'}$ روی سطح را به اندازهٔ نصف محیط خود طی می‌کند.

$$\overline{OA'} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times \pi \times R = ۳ \times ۱۰ = ۳۰ cm$$

حال یک مثلث قائم‌الزاویه داریم که اندازهٔ وتر آن را محاسبه می‌کنیم تا جابه‌جایی نقطهٔ A به دست آید.

$$\Delta x = \overline{AA'} = \sqrt{۲۰^۲ + ۳۰^۲} = ۱۰\sqrt{۲^۲ + ۳^۲} = ۱۰\sqrt{۱۳}$$

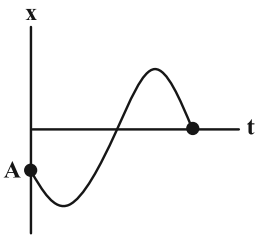
در انتها نیز بزرگی سرعت متوسط را از طریق رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ محاسبه می‌کنیم.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۰\sqrt{۱۳}}{۱۰} = \sqrt{۱۳}\ \frac{cm}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۴ تا ۶)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(نگار صفری)*

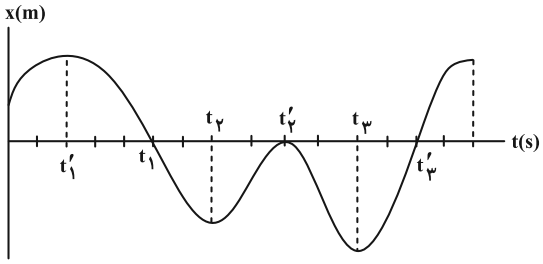
- متحرک در نقطهٔ A که در مکان منفی است شروع به حرکت می‌کند.
- متحرک ابتدا در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و سپس تغییر جهت می‌دهد.
- متحرک بار دیگر در مکان‌های مثبت تغییر جهت می‌دهد و سرانجام در $x = ۰$ متوقف می‌شود.



(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۹)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

جهت بردار مکان زمانی تغییر می‌کند که نمودار محور زمان را قطع کند و ادامهٔ نمودار در سمت دیگر محور زمان ادامه پیدا کند. پس در دو نقطهٔ t_1 و t'_3 جهت بردار مکان تغییر پیدا کرده است. برای قسمت دوم باید توجه کنیم زمانی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می کند که نمودار به صورت نزولی باشد در این صورت سرعت منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت خواهد کرد. همان‌طور که در شکل پیداست از t'_1 تا t_1 و t_1 تا t_2 و t'_2 تا t_3 نمودار نزولی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.



(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۹)

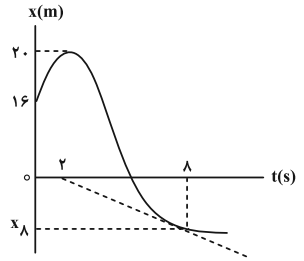
۵- **گزینهٔ «۱»** *(حسین الهی)*

سرعت متوسط زمانی در خلاف جهت محور x خواهد شد که جابه‌جایی آن در خلاف جهت محور باشد (رد گزینهٔ «۴») و همچنین سرعت اولیه همان شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان در لحظه $t = ۰s$ می‌باشد که تنها در گزینهٔ «۱» شیب این خط مثبت یعنی سرعت اولیه در جهت محور x می‌باشد.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

می‌دانیم که در نمودار مکان- زمان، شیب خط مماس بر نمودار، برابر سرعت لحظه‌ای متحرک است. با استفاده از شیب خط مماس بر نمودار که در لحظهٔ $t = ۸s$ رسم شده است، مکان متحرک را در لحظهٔ $t = ۸s$ محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که چون در لحظهٔ $۸s$ شیب خط مماس بر نمودار منفی است، سرعت نیز منفی است.



$$v=\frac{x_۸-۰}{۸-۲}\xrightarrow{v=-۲\frac{m}{s}}x=-۱۲m$$

مسافت طی شده توسط متحرک برابر حاصل جمع بزرگی جابه‌جایی‌های آن است. بنابراین داریم:

$$\ell=|۲۰-۱۶|+|-۱۲-۲۰|=۴+۳۲=۳۶m$$

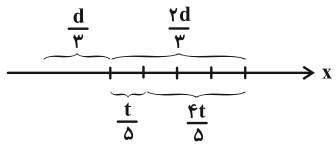
پس تندی متوسط متحرک در بازهٔ صفر تا $t=۸s$ برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۳۶}{۸}=۴/۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدعلی موسوی)*

در ابتدا باید سرعت متوسط متحرک را در $\frac{۲d}{۳}$ پایانی حرکت محاسبه کنیم:



$$(v_{av})_{\frac{۲d}{۳}}=\frac{۱۰(\frac{t}{۵})+۱۵(\frac{۴t}{۵})}{\frac{t}{۵}+\frac{۴t}{۵}}=\frac{۱۴t}{t}=۱۴\frac{m}{s}$$

اکنون سرعت متوسط را برای کل مسیر محاسبه می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\frac{d}{۳}+\frac{۲d}{۳}}{\frac{\frac{d}{۳}}{۷}+\frac{\frac{۲d}{۳}}{۱۴}}=\frac{d}{\frac{d}{۲۱}+\frac{d}{۲۱}}=\frac{۱}{\frac{۲}{۲۱}}=\frac{۲۱}{۲}=۱۰/۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۳ تا ۶)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*

مطابق با شکل زیر و با توجه به رابطهٔ تندی متوسط $(s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t})$ داریم:

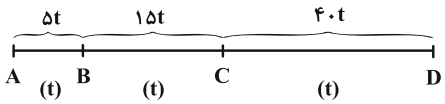
$$s_{av_{CD}}=\frac{\overline{CD}}{t}=۴۰\Rightarrow\overline{CD}=۴۰t$$

$$s_{av_{BC}}-s_{av_{AB}}=۱۰\Rightarrow\frac{\overline{BC}}{t}-\frac{\overline{AB}}{t}=۱۰$$

$$\xrightarrow{\overrightarrow{BC}=۳\overrightarrow{AB}}\frac{۲\overrightarrow{AB}}{t}=۱۰\Rightarrow\overline{AB}=۵t$$

$$s_{av_T}=\frac{\ell_T}{\Delta t_T}=\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}}{\Delta t_{AB}+\Delta t_{BC}+\Delta t_{CD}}$$

$$\Rightarrow s_{av_T}=\frac{۵t+۱۵t+۴۰t}{۳t}=۲۰\frac{m}{s}$$



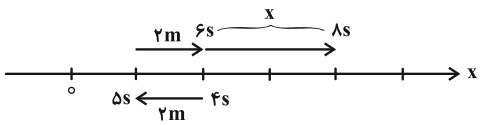
(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۳ تا ۶)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی شریفی)*

در ابتدا مسافت طی شده توسط متحرک در ۴s دوم را پیدا می‌کنیم:

$$\text{تندی متوسط}=\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}\Rightarrow۳=\frac{\text{مسافت}}{۴}\Rightarrow\text{مسافت}=۱۲m$$

مسیر حرکت مطابق شکل زیر است:



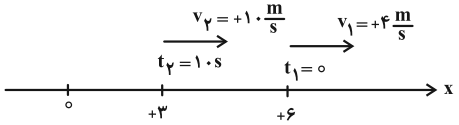
$$۱۲=۲+۲+x\Rightarrow x=۸m$$

$$\text{سرعت متوسط}:v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۸}{۴}=۲\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۳ تا ۸)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیراحمد میرسعید)*

متحرک در ابتدا در لحظهٔ $t_۱=۰$ در نقطهٔ $x_۱=۶m$ بوده و با سرعت اولیه $+۴\frac{m}{s}$ به طرف راست رفته پس می‌توان نوشت:



الف) درست است، زیرا در $t_۱=۰$، سرعت مثبت و به سمت راست است و قطعاً یک بار تغییر جهت داده و به سمت نقطهٔ $+۳m$ می‌رود و چون سرعت نهایی نیز $+۱۰$ می‌باشد مجدداً یک بار دیگر تغییر جهت می‌دهد.

ب) نادرست است؛ در گام اول با توجه به مقدار تندی متوسط، مسافت پیموده شده را محاسبه کنید.

$$s_{av}=\frac{\ell}{۱۰}\Rightarrow\ell=۰/۹\times۱۰=۹m$$

با توجه به این‌که مسافت کل $۹m$ است و فاصلهٔ متحرک در لحظهٔ $t_۱=۰$ برابر $۶+$ متر تا مبدأ مکان است متحرک نمی‌تواند از مبدأ مکان عبور کرده و در $t_۲=۱۰s$، به نقطهٔ $x=+۳$ برسد.

پ) نادرست است، متحرک در لحظهٔ $t=۱۰s$ سرعتش مثبت و بردار مکانی نیز مثبت است، لذا در حال دور شدن از مبدأ مکان و نزدیک شدن به مبدأ حرکت است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۳ تا ۸)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی حاجی‌زاده)*

به بررسی عبارات می‌پردازیم:

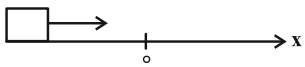
الف) نادرست؛ در حرکت بر خط راست، در صورتی مسافت طی شده و اندازهٔ جابه‌جایی برابرند که متحرک بدون تغییر جهت حرکت کند.

ب) درست؛ طبق رابطهٔ $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ و چون همواره $\Delta t>0$ است، دو بردار سرعت متوسط و جابه‌جایی هم‌جهت هستند.

پ) نادرست؛ از آنجا که اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط یک جسم لزوماً برابر نیستند، بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط نیز الزاماً برابر نیستند.

ت) نادرست؛ مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است.

ث) نادرست؛ در مثال شکل زیر، با این‌که سرعت مثبت است اما جسم در حال نزدیک شدن به مبدأ محور است.



(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

از آنجا که جسم بر محیط یک دایره حرکت می‌کند و تندی آن ثابت است، تندی متوسط جسم در تمام بازه‌های زمانی برابر با تندی لحظه‌ای آن است.

حال می‌توان نوشت:

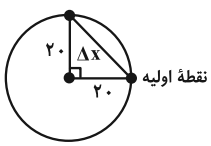
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=1/5\,min=90\,s]{s_{av}=3\frac{m}{s}}3=\frac{\ell}{90}\Rightarrow\ell=270\,m$$

حال محیط دایره را به دست می‌آوریم تا بتوانیم جابه‌جایی متحرک را حساب کنیم:

$$P=2\pi r\xrightarrow{2r=40\,m}P=3\times40=120\,m$$

$$\frac{\ell}{P}=\frac{270}{120}=\frac{240}{120}+\frac{30}{120}=2+\frac{1}{4}$$

بنابراین جسم، دو دور کامل طی می‌کند و به مکان اولیهٔ خود بازمی‌گردد و در نهایت $\frac{1}{4}$ از محیط دایره را می‌پیماید، پس:



$$\Delta x=\sqrt{20^2+20^2}=20\sqrt{2}\,m\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta x=20\sqrt{2}\,m]{\Delta t=90\,s}$$

$$v_{av}=\frac{20\sqrt{2}}{90}=\frac{2\sqrt{2}}{9}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۳)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

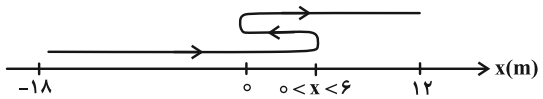
با توجه به رابطهٔ تندی متوسط $(s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t})$ و سرعت متوسط $(\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t})$ می‌توان نوشت:

$$s_{av}=\frac{140}{100}v_{av}\Rightarrow\ell=\frac{7}{5}d\xrightarrow{d=\Delta x=12-(-18)=30\,m}\ell=42\,m$$

بررسی گزینه‌ها:

الف) درست؛ متحرک ابتدا در مکان‌های مثبت تغییر جهت داده است، بنابراین ابتدا در جهت محور x حرکت کرده است. سپس در مکان‌های مثبت تغییر جهت می‌دهد و در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. در نهایت، یک بار دیگر تغییر جهت می‌دهد و در جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین متحرک هنگامی به مکان $x_2=12\,m$ می‌رسد که در جهت محور x حرکت می‌کند و از مبدأ محور دور می‌شود.

ب) نادرست؛ اگر متحرک در مکان‌های کمتر از $6\,m$ برای اولین بار تغییر جهت دهد، جهت بردار مکان سه بار تغییر می‌کند.



پ) درست؛ با توجه به این‌که اختلاف مسافت و جابه‌جایی، $12\,m$ است، در همهٔ حالات، فاصلهٔ دو نقطه‌ای که متحرک در آن‌ها تغییر جهت می‌دهد، $6\,m$ است.

ت) درست؛ با توجه به این‌که اولین تغییر جهت در مکان‌های مثبت اتفاق می‌افتد و اختلاف مسافت و جابه‌جایی، ۱۲ متر است، در دومین تغییر جهت، فاصلهٔ متحرک از مکان x_2، قطعاً کمتر از ۱۸ متر است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(متین فرخی)*

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[s_{av}=5\frac{m}{s}]{\Delta t=6\,s}5=\frac{\ell}{6}\Rightarrow\ell=30\,m$$

اگر مکان جسم در $t=0$ را x_0 در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\ell=|9-x_0|+|0-(9)|\Rightarrow30=|9-x_0|+9$$

$$\Rightarrow21=|9-x_0|\xrightarrow{x_0<0}x_0=9-21=-12\,m$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{6s}-x_0}{6-0}=\frac{0-(-12)}{6}=2\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ تا ۵)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(ویدا حیدری)*

مطابق نمودار، همواره سرعت متوسط متحرک با تندی متوسط آن برابر است. از این‌رو جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط متحرک همواره برابرند و این اتفاق تنها زمانی رخ می‌دهد که متحرک بر خط راست حرکت کرده و تغییر جهت نداشته باشد. لذا جهت بردار سرعت آن ثابت است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۴)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(مهران اسماعیلی)*

نمودار متحرک در لحظات t_1 و t_3 محور زمان را قطع کرده است. بنابراین متحرک در لحظات t_1 و t_3 از مبدأ مکان عبور می‌کند (الف: درست). می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان جسم، برابر سرعت لحظه‌ای آن است. در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 شیب نمودار مثبت است، یعنی متحرک در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4، شیب نمودار منفی است و متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند. پس متحرک فقط در لحظهٔ t_2 تغییر جهت داشته است (ب: درست). شیب پاره‌خط واصل میان دو نقطه در نمودار مکان زمان، بیانگر سرعت متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی است. شیب پاره‌خط واصل دو نقطه از نمودار در لحظات t_4 و صفر، مثبت است. در نتیجه سرعت متوسط مثبت و در جهت محور x است (نادرستی پ). در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 بردار مکان، منفی، در بازهٔ t_1 تا t_3 بردار مکان، مثبت و در بازهٔ t_3 تا t_4 نیز بردار مکان، منفی است. بنابراین از صفر تا t_4 بردار مکان جسم، دو بار تغییر جهت می‌دهد (نادرستی ت). در مبدأ زمان، شیب خط مماس بر نمودار مثبت است، از این‌رو سرعت اولیه متحرک مثبت و در جهت محور x بوده است (نادرستی ث).

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(نگار صفری)*

طبق رابطهٔ $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$، چون $\Delta t > 0$ و $s_{av} = 0$ است، نتیجه می‌شود $\ell = 0$. بنابراین متحرک در این بازهٔ زمانی ساکن بوده است و مکان آن در محور مکان تغییری نداشته است. در نتیجه، بردار مکان تغییری نمی‌کند. (درستی گزینهٔ «۴»)

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) تندی متحرک زمانی کاهش می‌یابد که بردار شتاب و سرعت آن در دو جهت مخالف باشند یا به عبارت دیگر $av < 0$. لذا علاوه بر علامت شتاب، باید علامت سرعت نیز معلوم باشد تا بتوان نوع حرکت متحرک را تشخیص داد.

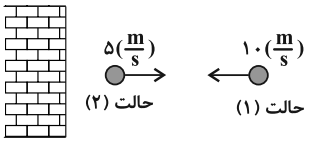
۲) اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان بیانگر تندی در آن لحظه است. دقت کنید تندی متحرک نمی‌تواند منفی باشد.

۳) اگر بردار مکان و بردار سرعت متحرک در یک جهت باشند، متحرک در حال دور شدن از مبدأ و اگر در خلاف جهت هم باشند، متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است. بنابراین علاوه بر علامت سرعت، باید علامت بردار مکان متحرک نیز معلوم باشد. دقت کنید شتاب متحرک در بررسی این موضوع بی‌تأثیر است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(مسعود غدانی)*

با توجه به شکل سؤال، جهت مثبت محور x به طرف راست است. بنابراین سرعت اولیهٔ متحرک منفی و سرعت ثانویهٔ آن مثبت است. حال با توجه به رابطهٔ شتاب متوسط داریم:



$$\begin{cases}\vec{v}_1 = (-10\frac{m}{s})\vec{i} \\ \vec{v}_2 = (+5\frac{m}{s})\vec{i}\end{cases} \Rightarrow \vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{5\vec{i} - (-10\vec{i})}{0/5} = (30\frac{m}{s^2})\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = (30\frac{m}{s^2})\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(مهری شریفی)*

شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان در هر لحظه، برابر با سرعت متحرک در همان لحظه است. با استفاده از خط مماس بر نمودار در $t = 8s$، v_{8s} را به دست می‌آوریم:

$$v_{8s} = \text{شیب خط مماس} = \frac{0-6}{10-8} = -3\frac{m}{s}$$

همچنین خط مماس بر نمودار در $t = 3s$، افقی است. بنابراین شیب آن صفر و به دنبال آن $v_{3s} = 0$. حال با توجه به تعریف شتاب متوسط داریم:

$$(8s \text{ تا } 3s \text{ از}) \quad a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{v_{8s} - v_{3s}}{8-3} \xrightarrow[v_{3s}=0]{v_{8s}=-3\frac{m}{s}} a_{av} = \frac{-3-0}{5} = -\frac{3}{5}\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow a_{av} = -0/6\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۹ تا ۱۳)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(سیرمحمدعلی موسوی)*

هنگامی بردار مکان و بردار سرعت جسم هم‌جهت هستند که جسم در حال دور شدن از مبدأ باشد. بنابراین در بازه‌های زمانی که نمودار در حال دور شدن از محور t است، بردار مکان و سرعت هم‌جهت‌اند. همچنین زمانی بردار شتاب و بردار سرعت متحرک در خلاف جهت یکدیگر هستند که تندی متحرک در حال کاهش یافتن باشد. به عبارت دیگر، چون شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان برابر با سرعت لحظه‌ای است، باید اندازهٔ شیب خط مماس کاهش یابد. با این توضیحات، در بازه‌های

SanjeshCloud

(۳s , ۴s)، (۵s , ۶s)، (۷s , ۸s) و (۹s , ۱۵s) شرایط مسئله برقرار است:

$$t=(۴-۳)+(۶-۵)+(۸-۷)+(۱۵-۹)=۹s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۵ تا ۱۰)

۱۱- **گزینهٔ «۱»** (امیراحمد میرسعید)

متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است، بنابراین در $t=۰$، $\vec{v}_۰=۰$ است. حال روابط شتاب متوسط را برای $t=۰$ تا $t=۱۰s$ و $t=۵s$ تا $t=۱۰s$ می‌نویسیم:

$$\vec{a}_{av(۱۰s\ \text{تا}\ ۰)}=\frac{\vec{v}_{۱۰}-\vec{v}_۰}{۱۰-۰}\xrightarrow[\vec{a}_{av}=(-۲\frac{m}{s^۲})\vec{i}]{\vec{v}_۰=۰}-۲=\frac{\vec{v}_{۱۰}}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{۱۰}=(-۲۰\frac{m}{s})\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av(۱۰s\ \text{تا}\ ۵s)}=\frac{\vec{v}_{۱۰}-\vec{v}_۵}{۱۰-۵}\xrightarrow[\vec{a}_{av}=(۸\frac{m}{s^۲})\vec{i}]{\vec{v}_{۱۰}=(-۲۰\frac{m}{s})\vec{i}}۸=\frac{-۲۰-\vec{v}_۵}{۵}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_۵=(-۶۰\frac{m}{s})\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۱۲- **گزینهٔ «۲»** (زهره آقامحمدی)

بررسی تمام گزینه‌ها:

الف) نادرست؛ جهت حرکت در لحظهٔ $t_۲$ عوض می‌شود، زیرا در این لحظه سرعت متحرک برابر صفر شده و علامت آن نیز عوض می‌شود. دقت کنید شیب خط مماس بر نمودار سرعت- زمان معرف شتاب متحرک است. بنابراین در لحظهٔ $t_۱$، چون خط مماس بر نمودار افقی است، شتاب متحرک صفر است و جهت شتاب آن عوض می‌شود.

ب) نادرست؛ در بازهٔ صفر تا $t_۱$ شیب خط مماس بر نمودار منفی است، پس شتاب در این بازهٔ زمانی در خلاف جهت محور x است. همچنین در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$، شیب خط مماس بر نمودار مثبت و به دنبال آن شتاب متحرک در جهت محور x است.

پ) درست؛ مطابق نمودار، در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ اندازهٔ سرعت متحرک در حال کاهش است. در نتیجه تندی متحرک که برابر با اندازهٔ سرعت متحرک در هر لحظه است، نیز کاهش می‌یابد.

ت) درست؛ در بازهٔ صفر تا $t_۲$، همواره سرعت متحرک منفی است و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین متحرک تغییر جهت نداشته است. لذا مسافت پیموده شده و اندازهٔ جابه‌جایی متحرک با یکدیگر برابر هستند و به دنبال آن تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط نیز برابرند.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ تا ۱۳)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** (مصطفی کیانی)

با توجه به نمودار سرعت – زمان داده شده، سرعت متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱=۶s$ تا $t_۲=۸s$، منفی است. بنابراین، شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$a_{av}=\frac{v_{۸s}-v_{۶s}}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۸-۶=۲s]{v_{۶s}=۰\ ,\ v_{۸s}=-۱۰\frac{m}{s}}$$

$$a_{av}=\frac{-۱۰-۰}{۲}=-۵\frac{m}{s^۲}$$

از طرف دیگر، شتاب در لحظهٔ $t=۴s$ برابر شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ در این لحظه است. در این حالت داریم:

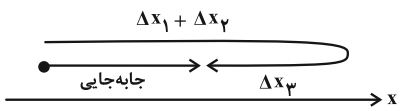
$$a_{t=۴s}=\text{شیب خط مماس}=\frac{۰-۸}{۸-۴}=-۲\frac{m}{s^۲}$$

در آخر داریم:

$$\frac{a_{av}}{a_{t=۴s}}=\frac{-۵}{-۲}=۲/۵$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** (محمدکاظم منشاری)



همان‌گونه که از مسیر حرکت متحرک پیداست:

$$\begin{cases}\ell=\Delta x_۱+\Delta x_۲+\Delta x_۳ & (۱)\\ \Delta x_{کل}=\Delta x_۱+\Delta x_۲-\Delta x_۳ & (۲)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Delta x_۱=v_۱\Delta t_۱\xrightarrow{v_۱=۱۵\frac{m}{s}\ ,\ \Delta t=۸s}\Delta x_۱=۱۵\times۸=۱۲۰m\\ \Delta x_۲=v_۲\Delta t_۲\xrightarrow{v_۲=۷\frac{m}{s}\ ,\ \Delta t=۲۰s}\Delta x_۲=۷\times۲۰=۱۴۰m\\ \Delta x_۳=v_۲\Delta t_۳\xrightarrow{v_۲=۵\frac{m}{s}\ ,\ \Delta t=۱۲s}\Delta x_۳=۱۲\times۵=۶۰m\end{cases}$$

$$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t}}=\frac{\ell}{\Delta x_{کل}}\xrightarrow{(۱)\ ,\ (۲)}$$

$$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲+\Delta x_۳}{\Delta x_۱+\Delta x_۲-\Delta x_۳}=\frac{۱۲۰+۱۴۰+۶۰}{۱۲۰+۱۴۰-۶۰}=\frac{۳۲۰}{۲۰۰}=۱/۶$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

ابتدا سرعت دو متحرک را می‌یابیم. دقت کنید، چون نمودار مکان- زمان هر دو متحرک به صورت خط راست می‌باشد، سرعت آن‌ها ثابت و برابر شیب هر یک از خط‌ها است.

$$v_A=\frac{\Delta x_A}{\Delta t_A}\xrightarrow[\Delta t_A=۳-۰=۳s]{\Delta x_A=۰-(-۳۰)=۳۰m} v_A=\frac{۳۰}{۳}=۱۰\frac{m}{s}$$

$$v_B=\frac{\Delta x_B}{\Delta t_B}\xrightarrow[\Delta t_B=۴-۰=۴s]{\Delta x_B=-۳۰-(-۱۰)=-۲۰m} v_B=-\frac{۲۰}{۴}=-۵\frac{m}{s}$$

اکنون معادلهٔ مکان- زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x=vt+x_۰\begin{cases}\xrightarrow[v_A=۱۰\frac{m}{s}]{x_{۰A}=-۳۰m} x_A=۱۰t-۳۰\\ \xrightarrow[v_B=-۵\frac{m}{s}]{x_{۰B}=-۱۰m} x_B=-۵t-۱۰\end{cases}$$

در این مرحله، لحظه‌ای را که دو متحرک از کنار یکدیگر عبور می‌کنند، می‌یابیم. چون در این لحظه مکان آن‌ها یکسان است. داریم:

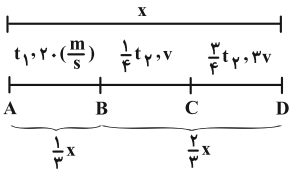
$$x_A=x_B\Rightarrow ۱۰t-۳۰=-۵t-۱۰\Rightarrow ۱۵t=۲۰\Rightarrow t=\frac{۴}{۳}s$$

در آخر، مکان لحظهٔ $t=\frac{۴}{۳}s$ را که دو متحرک از کنار هم می‌گذرند، پیدا می‌کنیم:

$$x_A=۱۰t-۳۰\xrightarrow{t=\frac{۴}{۳}s} x_A=۱۰\times\frac{۴}{۳}-۳۰=-\frac{۵۰}{۳}m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*



ابتدا تندی متوسط متحرک از B تا D را به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=t_۲]{\ell=st} s_{av}=\frac{\frac{۱}{۴}t_۲\times v+\frac{۳}{۴}t_۲\times ۳v}{t_۲}$$

$$=\frac{t_۲(\frac{v}{۴}+\frac{۹}{۴}v)}{t_۲}=\frac{۵}{۲}v$$

حال تندی متوسط در کل مسیر را به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=t_۱+t_۲]{\ell=AB+BD} s_{av}=\frac{AB+BD}{t_۱+t_۲}$$

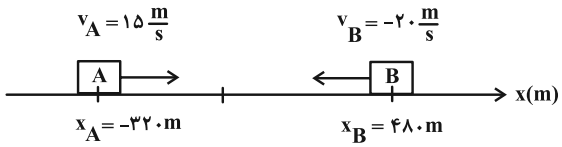
$$\xrightarrow[t=\frac{\ell}{s}]{AB=\frac{۱}{۳}x\ ,\ BD=\frac{۲}{۳}x}۳۰=\frac{\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}x}{\frac{\frac{۱}{۳}x}{۲۰}+\frac{\frac{۲}{۳}x}{\frac{۵}{۲}v}}\Rightarrow ۳۰=\frac{x}{\frac{x}{۶۰}+\frac{۴x}{۱۵v}}$$

$$\Rightarrow ۳۰=\frac{۱}{\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱۶}{۶۰v}}\Rightarrow \frac{۱}{۶۰}+\frac{۱۶}{۶۰v}=\frac{۱}{۳۰}\Rightarrow v=۱۶\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۵)

۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

در لحظهٔ $t=۰$، محور مکان را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، دو جسم دو بار در فاصلهٔ $۵۲/۵m$ از یکدیگر قرار می‌گیرند. به گونه‌ای که بار اول $x_B-x_A=۵۲/۵m$ و بار دوم $x_A-x_B=۵۲/۵m$ می‌شود.



حال برای محاسبهٔ زمان می‌توان نوشت:

$$x_B-x_A=۵۲/۵m\xrightarrow[x_A=۱۵t-۳۲۰]{x_B=-۲۰t+۴۸۰}$$

$$-۲۰t_۱+۴۸۰-(۱۵t_۱-۳۲۰)=۵۲/۵$$

$$\Rightarrow -۳۵t_۱+۸۰۰=۵۲/۵\Rightarrow t_۱=\frac{۸۰۰-۵۲/۵}{۳۵}s$$

$$x_A-x_B=۵/۲۵m\xrightarrow[x_A=۱۵t-۳۲۰]{x_B=-۲۰t+۴۸۰}$$

$$۱۵t_۲-۳۲۰-(-۲۰t_۲+۴۸۰)=۵۲/۵$$

$$\Rightarrow ۳۵t_۲-۸۰۰=۵۲/۵\Rightarrow t_۲=\frac{۸۰۰+۵۲/۵}{۳۵}s$$

حال اختلاف این دو زمان ($t_۱$ و $t_۲$) را به دست می‌آوریم:

$$t_۲-t_۱=\frac{۸۰۰+۵۲/۵}{۳۵}-\frac{۸۰۰-۵۲/۵}{۳۵}=\frac{۱۰۵}{۳۵}=۳s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

هر دو قسمت از نمودار به صورت خط راست هستند. بنابراین متحرک در این دو بازه با سرعت ثابت حرکت می‌کند. معادلهٔ مکان- زمان متحرک را در هر قسمت می‌نویسیم:

$$t=۵s\text{ از صفر تا }:|v|=\frac{۳}{۲}\frac{m}{s}\xrightarrow{\text{شیب منفی است}}v=-\frac{۳}{۲}\frac{m}{s}$$

$$v=\frac{x_{۳s}-x_{۰}}{۳-۰}\xrightarrow[v=-\frac{۳\,m}{۲\,s}]{x_{۳s}=۰}-\frac{۳}{۲}=-\frac{x_{۰}}{۳}\Rightarrow x_{۰}=\frac{۹}{۲}m$$

$$\Rightarrow x=vt+x_{۰}\xrightarrow[x_{۰}=\frac{۹}{۲}m]{v=-\frac{۳\,m}{۲\,s}}x=-\frac{۳}{۲}t+\frac{۹}{۲}$$

برای نوشتن معادلهٔ قسمت دوم نمودار، به دو نقطه از آن نیاز داریم و چون در $t=۵s$ با خط قبل تقاطع دارد، داریم:

$$t=۵s\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}(۵)+\frac{۹}{۲}=-۳m$$

$$\Rightarrow v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{۱۰s}-x_{۵s}}{۱۰-۵}=\frac{۰-(-۳)}{۵}=\frac{۳}{۵}\frac{m}{s}$$

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{x_{۱۰s}-x_{۰}}{۱۰-۰}\xrightarrow[x_{۱۰s}=۰]{v=\frac{۳\,m}{۵\,s}}\frac{۳}{۵}=\frac{۰-x_{۰}}{۱۰}$$

$$\Rightarrow x_{۰}=-۶m\Rightarrow x=\frac{۳}{۵}t-۶$$

می‌دانیم سرعت متوسط در فاصلهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، برابر با شیب پاره‌خط واصل نقاط نظیر این دو لحظه در نمودار مکان- زمان است، در نتیجه:

$$\begin{cases}t_۱=۱s\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}(۱)+\frac{۹}{۲}=۳m\\ t_۲=۶s\Rightarrow x=\frac{۳}{۵}(۶)-۶=۰=-۲/۴m\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-۲/۴-۳}{۶-۱}=\frac{-۵/۴}{۵}=-۱/۰۸\frac{m}{s}$$

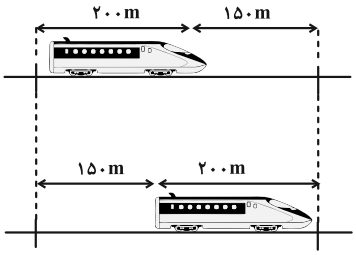
$$\Rightarrow \vec{v}_{av}=-(۱/۰۸\frac{m}{s})\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(محسن سلماسی‌ونر)*

مطابق دو شکل زیر، قطار در بازهٔ زمانی که انتهای قطار به اول پل و ابتدای آن به آخر پل می‌رسد، به‌طور کامل بر روی پل قرار دارد. همان‌گونه که از شکل پیدا است، انتهای قطار در این مدت مسافت $۱۵۰m$ را پیموده است.

حال می‌توان نوشت:



$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۵s]{\Delta x=۱۵۰m}v=\frac{۱۵۰}{۵}=۳۰\frac{m}{s}$$

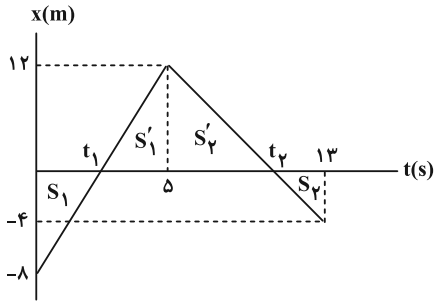
(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

لحظات برخورد نمودار با محور t را به ترتیب $t_۱$ و $t_۲$ در نظر می‌گیریم.

با توجه به تشابه مثلث‌های $S_۱$ و $S'_۱$ داریم:

$$\frac{۱۲}{۸}=\frac{۵-t_۱}{t_۱}\Rightarrow ۱۲t_۱=۴۰-۸t_۱\Rightarrow t_۱=۲s$$



همچنین در تشابه مثلث‌های $S_۲$ و $S'_۲$ می‌توان نوشت:

$$\frac{۱۲}{۴}=\frac{t_۲-۵}{۱۳-t_۲}\Rightarrow ۱۲(۱۳)-۱۲t_۲=۴t_۲-۵(۴)$$

$$\Rightarrow ۱۶t_۲=۴۴(۴)\Rightarrow t_۲=۱۱s$$

بردار مکان جسم در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ که از مبدأ مکان می‌گذرد، تغییر جهت می‌دهد. بنابراین خواستهٔ سؤال $t_۲-t_۱$ است که برابر است با:

فاصلهٔ زمانی $=t_۲-t_۱=۹s$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(پوریا علاقه‌مند)*

با استفاده از معادلهٔ داده شده و مقایسهٔ آن با معادلهٔ مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\begin{cases} x = ۲t^۲ + ۴t + ۱۶ \\ x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_۰ = ۴\frac{m}{s} \\ \frac{a}{۲} = ۲ \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲} \\ x_۰ = ۱۶\,m \end{cases}$$

با داشتن سرعت اولیه و ثانویه و نیز شتاب متحرک، با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی، جابه‌جایی متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a\Delta x \xrightarrow[a=۴\frac{m}{s^۲}]{v_۲=۳۲\frac{m}{s},\ v_۱=v_۰=۴\frac{m}{s}} ۳۲^۲ - ۴^۲ = ۲\times۴\times\Delta x$$

$$\Rightarrow ۸\Delta x = (۳۲+۴)(۳۲-۴) \Rightarrow \Delta x = ۱۲۶\,m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(زهره آقامحمدی)*

با توجه به این‌که معادلهٔ داده شده یک معادلهٔ درجهٔ ۲ است، حرکت با شتاب ثابت صورت می‌گیرد. ابتدا با مقایسهٔ معادله با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت، شتاب، سرعت اولیه و مکان اولیهٔ متحرک را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ x = -۲t^۲ + ۸t + ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}a = -۲ \Rightarrow a = -۴\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = ۸\frac{m}{s} \\ x_۰ = ۱۲m \end{cases}$$

چون سرعت اولیه در خلاف جهت شتاب است، پس حرکت متحرک در ابتدا کندشونده است و در نتیجه متحرک تغییر جهت می‌دهد. بنابراین لحظهٔ تغییر جهت حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[v_۰=۸\frac{m}{s}]{a=-۴\frac{m}{s^۲}} v = -۴t + ۸$$

$$\xrightarrow{v=۰} t = ۲s \quad \text{لحظهٔ تغییر جهت حرکت}$$

پس برای محاسبهٔ مسافت طی شده در بازهٔ ۱s تا ۵s، جابه‌جایی‌ها را در بازهٔ ۱s تا ۲s و ۲s تا ۵s محاسبه کرده و اندازهٔ آن‌ها را جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_{۱s} = -۲\times۱ + ۸\times۱ + ۱۲ = ۱۸m \\ x_{۲s} = -۲\times۴ + ۸\times۲ + ۱۲ = ۲۰\,m \\ x_{۵s} = -۲\times۲۵ + ۸\times۵ + ۱۲ = ۲m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x_۱ = x_{۲s} - x_{۱s} = ۲۰ - ۱۸ = ۲m \\ \Delta x_۲ = x_{۵s} - x_{۲s} = ۲ - ۲۰ = -۱۸m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell_{(۵s\ \text{تا}\ ۱s)} = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = ۲ + ۱۸ = ۲۰m \\ \ell_{(۱s\ \text{تا صفر})} = |x_۱ - x_۰| = |۱۸ - ۱۲| = ۶m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell_{(۵s\ \text{تا}\ ۱s)}}{\ell_{(۱s\ \text{تا صفر})}} = \frac{۲۰}{۶} = \frac{۱۰}{۳}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(علی برزگر)*

شتاب حرکت با توجه به نمودار همواره مقداری ثابت و منفی است. با توجه به این موضوع، حالات زیر ممکن است رخ دهد:

الف) اگر متحرک با سرعت اولیه مثبت شروع به حرکت کند، آن‌گاه حرکت آن ابتدا کندشونده و پس از توقف و تغییر جهت تندشونده خواهد بود.

ب) اگر متحرک بدون سرعت اولیه شروع به حرکت کند، حرکت آن تندشونده خواهد بود.

پ) اگر متحرک با سرعت اولیه منفی شروع به حرکت کند، در این صورت حرکت آن تندشونده خواهد بود.

لذا نوع حرکت متحرک به سرعت اولیهٔ آن بستگی دارد.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیراحمد میرسعید)*

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط از رابطهٔ $v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$ به دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_{av(۴s\ \text{تا}\ ۰)} = v_{av(۰/۵s\ \text{تا}\ ۰)} + ۱۴\frac{m}{s} \Rightarrow \frac{v_۴ + v_۰}{۲} = \frac{v_{۰/۵} + v_۰}{۲} + ۱۴$$

$$\xrightarrow{v_0=10\frac{m}{s}} \frac{v_4+10}{2}-\frac{v_{0/5}+10}{2}=14$$

$$\Rightarrow v_4+10-v_{0/5}-10=28 \Rightarrow v_4-v_{0/5}=28\frac{m}{s}$$

در گام بعدی از رابطهٔ شتاب متوسط استفاده می‌کنیم، دقت کنید چون شتاب ثابت است، شتاب متوسط برابر با شتاب متحرک در هر لحظه است:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_4-v_{0/5}}{4-0/5}=\frac{28}{3/5}=8\frac{m}{s^2}$$

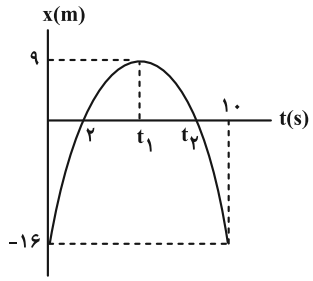
(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(حسین الهی)*

ابتدا با توجه به تقارن سهمی، لحظات t_1 و t_2 را می‌یابیم، دقت کنید چون نمودار مکان- زمان به صورت سهمی است، حرکت جسم با شتاب ثابت است.

$$t_1=\frac{0+10}{2}=5s$$

$$t_1=\frac{2+t_2}{2}\xrightarrow{t_1=5s} 5=\frac{2+t_2}{2}\Rightarrow t_2=8s$$



اکنون با استفاده از بازهٔ زمانی $t=0s$ تا $t=5s$ و جابه‌جایی متحرک در آن، سرعت اولیهٔ متحرک را می‌یابیم:

$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t \xrightarrow[\Delta t=5s\ ,\ v_2=0\ ,\ v_1=v_0]{\Delta x=x_2-x_1=9-(-16)=25m} 25=\frac{v_0+0}{2}\times 5$$

$$\Rightarrow v_0=10\frac{m}{s}$$

در این قسمت، شتاب حرکت و به دنبال آن معادلهٔ سرعت- زمان متحرک را پیدا می‌کنیم:

$$v=at+v_0 \xrightarrow[v_0=10\frac{m}{s}]{t=5s\ ,\ v=0} 0=5\times a+10\Rightarrow a=-2\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow v=-2t+10$$

در آخر با استفاده از معادلهٔ به دست آمده داریم:

$$\begin{cases} t_1=0s\Rightarrow v_1=10\frac{m}{s} \\ t_2=8s\Rightarrow v_2=-2\times 8+10=-6\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{10+(-6)}{2}=2\frac{m}{s}$$

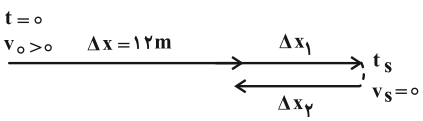
(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

ابتدا جابه‌جایی متحرک در ۶ ثانیهٔ اول حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=6s]{v_{av}=2\frac{m}{s}} 2=\frac{\Delta x}{6}\Rightarrow \Delta x=12m$$

در حرکت بر روی خط راست، وقتی در یک بازهٔ زمانی معین، مسافت طی شده (ℓ) و جابه‌جایی متحرک (Δx) با هم برابر نیستند، یعنی متحرک در یک لحظه مانند t_s متوقف شده و جهت حرکت آن تغییر کرده است. با توجه به این‌که در لحظهٔ $t=0$ جهت حرکت در سوی مثبت محور x بوده است، داریم:



$$\Delta x_1=\frac{\ell-\Delta x}{2}=\frac{13-12}{2}=0/5m$$

$$\Delta x_2=-\Delta x_1=-0/5m$$

با استفاده از رابطهٔ مستقل از سرعت اولیه می‌توان نوشت:

$$\Delta x+\Delta x_1=-\frac{1}{2}at_s^2+v_s t \xrightarrow[v_s=0]{\Delta x=12m\ ,\ \Delta x_1=0/5m}$$

$$12/5=-\frac{1}{2}at_s^2 \qquad (A)$$

همچنین با توجه به معادلهٔ جابه‌جایی داریم:

$$\Delta x_2=\frac{1}{2}a(t-t_s)^2+v_s(t-t_s)\xrightarrow[t=6s\ ,\ v_s=0]{\Delta x_2=-0/5m}$$

$$-0/5=\frac{1}{2}a(6-t_s)^2 \qquad (B)$$

روابط A و B را بر هم تقسیم می‌کنیم تا لحظهٔ توقف را به دست آوریم:

$$\frac{۱۲/۵}{-۰/۵}=\frac{-\frac{۱}{۲}at_s^۲}{\frac{۱}{۲}a(۶-t_s)^۲}\Rightarrow ۲۵=\frac{t_s^۲}{(۶-t_s)^۲}$$

$$\Rightarrow ۵=\frac{t_s}{۶-t_s}\Rightarrow t_s=۵\,s$$

اکنون می‌توانیم شتاب حرکت را حساب کنیم:

$$۱۲/۵=-\frac{۱}{۲}at_s^۲\xrightarrow{t_s=۵s}۱۲/۵=-\frac{۱}{۲}a(۵^۲)\Rightarrow a=-۱\frac{m}{s^۲}$$

همچنین سرعت اولیه متحرک را نیز پیدا می‌کنیم:

$$v_s=at_s+v_۰\xrightarrow[t_s=۵s]{v_s=۰\ ,\ a=-۱\frac{m}{s^۲}}۰=-۱\times۵+v_۰$$

$$\Rightarrow v_۰=۵\frac{m}{s}$$

در پایان تندی متحرک را در لحظهٔ $t=۳\,s$ حساب می‌کنیم:

$$v=at+v_۰\xrightarrow[v_۰=۵\frac{m}{s}]{a=-۱\frac{m}{s^۲}\ ,\ t=۳s}v=-۱\times۳+۵=۲\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow s=|v|=۲\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷- **گزینهٔ «۲»** (علیرضا جباری)

ابتدا شتاب هر یک از دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$a_A=\frac{\Delta v_A}{\Delta t}=\frac{۴-(-۱۲)}{۴-۰}=\frac{۱۶}{۴}=۴\frac{m}{s^۲}$$

$$a_B=\frac{\Delta v_B}{\Delta t}=\frac{۴-۰}{۴-۰}=۱\frac{m}{s^۲}$$

از آنجا که نمودار سرعت- زمان هر دو متحرک به صورت خط راست است، حرکت هر دو با شتاب ثابت است. معادلهٔ مکان- زمان هر یک از آن دو را می‌نویسیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\begin{cases}\xrightarrow{v_{۰A}=-۱۲\frac{m}{s}}x_A=\frac{۱}{۲}\times۴t^۲+(-۱۲)t+۳\\ \Rightarrow x_A=۲t^۲-۱۲t+۳\\ \xrightarrow{v_{۰B}=۰}x_B=\frac{۱}{۲}(۱)t^۲+۰+۳\\ \Rightarrow x_B=\frac{۱}{۲}t^۲+۳\end{cases}$$

اکنون می‌توانیم فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر را در لحظهٔ $t=۶\,s$ پیدا کنیم:

$$|x_B-x_A|=|\frac{۱}{۲}t^۲+۳-(۲t^۲-۱۲t+۳)|=|-\frac{۳}{۲}t^۲+۱۲t|$$

$$\xrightarrow{t=۶s}|x_B-x_A|=|-\frac{۳}{۲}(۶)^۲+۱۲\times۶|$$

$$=|-۵۴+۷۲|=۱۸\,m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۸- **گزینهٔ «۳»** (محمدکاظم منشاری)

مسافتی را که متحرک از لحظهٔ ترمز گرفتن تا توقف کامل می‌پیماید، با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی می‌یابیم:

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\xrightarrow[v_۲=۰\ ,\ a=-۱۰\frac{m}{s^۲}]{v_۱=۱۰۸\frac{km}{h}=۳۰\frac{m}{s}}۰-(۳۰)^۲=۲(-۱۰)\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x=۴۵\,m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۹- **گزینهٔ «۴»** (زهره آقامحمدی)

ابتدا معادلهٔ مکان- زمان دو متحرک را می‌یابیم. توجه کنید که حرکت متحرک A با سرعت ثابت و حرکت متحرک B با شتاب ثابت است؛ (زیرا نمودار سرعت- زمان B به صورت خط راست شیبدار و نمودار A به صورت خط افقی است.)

$$\begin{cases}a_B=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۰-(-۲۰)}{۵}=۸\frac{m}{s^۲}\\ v_{۰B}=-۲۰\frac{m}{s}\\ x_{۰B}=۰\end{cases}\Rightarrow x_B=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x_B=۴t^۲-۲۰t$$

$$\begin{cases}v_A=۲۰\frac{m}{s}\Rightarrow x_A=vt+x_۰\Rightarrow x_A=۲۰t\\ x_{۰A}=۰\end{cases}$$

در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، $x_A = x_B$ است:

$$x_A = x_B \Rightarrow ۲۰t = ۴t^۲ - ۲۰t \Rightarrow ۴۰t = ۴t^۲ \Rightarrow t = ۱۰s$$

توجه کنید چون متحرک B تغییر جهت داده است، مسافت طی شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر نیست، بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی آن را تا لحظهٔ تغییر جهت و پس از آن محاسبه می‌کنیم. ابتدا لحظهٔ تغییر جهت حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_B = at + v_۰ = ۸t - ۲۰ \xrightarrow{v=۰} ۸t - ۲۰ = ۰ \Rightarrow t = ۲/۵s$$

$$۰ \le t \le ۲/۵s \Rightarrow \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۸ \times (۲/۵)^۲ - ۲۰ \times ۲/۵ = -۲۵m$$

$$۲/۵s < t \le ۱۰s \Rightarrow \Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}at^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times (۱۰ - ۲/۵)^۲ = ۲۲۵m$$

توجه کنید که سرعت اولیهٔ بازهٔ $۲/۵s$ تا $۱۰s$ برابر صفر است. (چون سرعت در لحظهٔ $۲/۵s$ برابر صفر است.) بنابراین مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = ۲۵۰m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۲۵۰}{۱۰} = ۲۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(مهران اسماعیلی)*

۳ ثانیهٔ دوم حرکت شتابدار متحرک مربوط به بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳s$ تا $t_۲ = ۶s$ است. چون جابه‌جایی متحرک در این بازه برابر صفر است، می‌توان نتیجه گرفت مکان- زمان متحرک در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ یکسان است. با توجه به معادلهٔ مکان- زمان متحرک داریم: $x_۱ = x_۲$

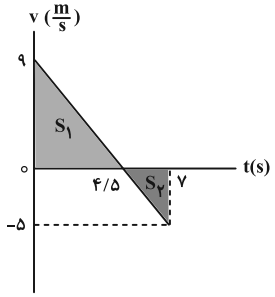
$$\frac{۱}{۲}at_۱^۲ + v_۰t_۱ + x_۰ = \frac{۱}{۲}at_۲^۲ + v_۰t_۲ + x_۰ \xrightarrow[v_۰ = ۹\frac{m}{s}]{t_۱ = ۳s \,,\, t_۲ = ۶s}$$

$$\frac{۱}{۲}a \times ۳^۲ + ۹ \times ۳ + x_۰ = \frac{۱}{۲}a \times ۶^۲ + ۹ \times ۶ + x_۰$$

$$\frac{۹}{۲}a + ۲۷ = ۱۸a + ۵۴ \Rightarrow \frac{۲۷}{۲}a = -۲۷ \Rightarrow a = -۲\frac{m}{s^۲}$$

برای محاسبهٔ مسافتی که متحرک در مدت ۷ ثانیه طی می‌کند، کافی است نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم کرده و اندازهٔ سطح زیر نمودار را در مدت ۷ ثانیه محاسبه کنیم که برای این منظور ابتدا باید معادلهٔ سرعت- زمان متحرک را بنویسیم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[v_۰ = ۹\frac{m}{s}]{a = -۲\frac{m}{s^۲}} v = -۲t + ۹$$



$$v = ۰ \Rightarrow ۰ = -۲t + ۹ \Rightarrow t = ۴/۵s$$

$$t = ۷s \Rightarrow v = -۲ \times ۷ + ۹ = -۵\frac{m}{s}$$

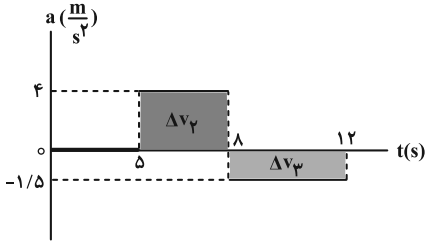
$$\ell = |S_۱| + |S_۲| = \frac{۹ \times ۴/۵}{۲} + \frac{۲/۵ \times ۵}{۲} = \frac{۸۱}{۴} + \frac{۲۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \ell = ۲۶/۵m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۱- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

در نمودار شتاب- زمان، مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان در هر بازهٔ زمانی، برابر با تغییر سرعت (Δv) در آن بازهٔ زمانی است. برای سطحی که بالای محور زمان است، $\Delta v > ۰$ و برای سطحی که زیر محور زمان است، $\Delta v < ۰$ در نظر گرفته می‌شود.

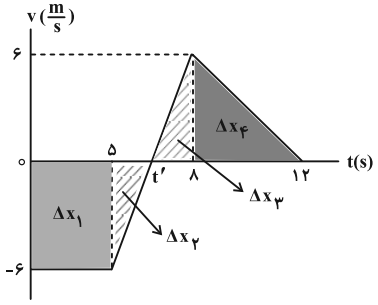


$$\Delta v_۱ = ۰$$

$$\Delta v_۲ = ۴(۸ - ۵) = ۱۲\frac{m}{s}$$

$$\Delta v_{۳} = -۱/۵(۱۲-۸) = -۶\frac{m}{s}$$

بر این اساس و با توجه به این‌که $v_{۰} = -۶\frac{m}{s}$ است، نمودار سرعت- زمان متحرک را در ۱۲ ثانیهٔ اول حرکت رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار داریم:



$$t' = \frac{۵+۸}{۲} = ۶/۵s$$

مساحت سطح بین نمودار سرعت- زمان و محور زمان در هر بازهٔ زمانی، برابر با جابه‌جایی متحرک در آن بازه است.

$$\Delta x_{۱} = -۶(۵-۰) = -۳۰m$$

$$\Delta x_{۲} = \frac{(۶/۵-۵)(-۶)}{۲} = -۴/۵m$$

$$\Delta x_{۳} = \frac{(۸-۶/۵)۶}{۲} = ۴/۵m$$

$$\Delta x_{۴} = \frac{(۱۲-۸)۶}{۲} = ۱۲m$$

در پایان، جابه‌جایی متحرک در ۱۲ ثانیهٔ اول و سرعت متوسط آن را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x = \Delta x_{۱} + \Delta x_{۲} + \Delta x_{۳} + \Delta x_{۴}$$

$$= -۳۰ - ۴/۵ + ۴/۵ + ۱۲ = -۱۸m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۱۸}{۱۲-۰} = -۱/۵\frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = (-۱/۵\frac{m}{s})\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

ابتدا با استفاده از رابطهٔ سرعت- جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متحرک را در مکان $x = ۶m$ به دست می‌آوریم:

$$v_{۱}^{۲} - v_{۰}^{۲} = ۲a_{۱}\Delta x_{۱} \xrightarrow[\Delta x_{۱}=۶m\ ,\ v_{۰}=۴\frac{m}{s}]{a_{۱}=۲\frac{m}{s^{۲}}}$$

$$v_{۱}^{۲} - ۱۶ = ۲(۲)(۶) \xrightarrow{v_{۱}>۰} v_{۱} = \sqrt{۴۰}\frac{m}{s}$$

سپس سرعت متحرک را در مکان $x = ۱۰m$ به دست می‌آوریم:

$$v_{۲}^{۲} - v_{۱}^{۲} = ۲a_{۲}\Delta x_{۲} \xrightarrow[a_{۲}=-۴\frac{m}{s^{۲}}\ ,\ \Delta x_{۲}=۴m]{v_{۱}=\sqrt{۴۰}\frac{m}{s}}$$

$$v_{۲}^{۲} - ۴۰ = ۲(-۴)(۴) \xrightarrow{v_{۲}>۰} v_{۲} = \sqrt{۸}\frac{m}{s}$$

و در نهایت، مکان تغییر جهت حرکت متحرک (x) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_{۳}^{۲} - v_{۲}^{۲} = ۲a_{۳}\Delta x_{۳} \xrightarrow[a_{۳}=-۱\frac{m}{s^{۲}}\ ,\ v_{۲}=\sqrt{۸}\frac{m}{s}]{v_{۳}=۰}$$

$$۰ - ۸ = ۲(-۱)(x-۱۰) \Rightarrow x = ۱۴m$$

دقت کنید در مکان‌های $x = ۶m$ و $x = ۱۰m$، با توجه به نمودار، متحرک در حال حرکت در جهت محور x است. به همین دلیل فقط مقادیر مثبت سرعت را پذیرفتیم.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(مسعود خدرانی)*

در سقوط آزاد که نوعی حرکت شتابدار با شتاب ثابت g است، شتاب متوسط همواره برابر با g است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۴- **گزینهٔ «۱»** *(حسین الهی)*

ابتدا لحظه‌ای را که سنگ با سطح آب رودخانه برخورد می‌کند، مشخص می‌کنیم:

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} \Rightarrow -۱۰ = -۵t^{۲} \Rightarrow t^{۲} = ۲ \Rightarrow t = \sqrt{۲} \simeq ۱/۴ = \frac{۷}{۵}s$$

برای محاسبهٔ زمان رسیدن صدای برخورد تا شخص داریم:

$$\Delta y = v \times \Delta t \Rightarrow ۱۰ = ۳۰۰ \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{۱۰}{۳۰۰} = \frac{۱}{۳۰}s$$

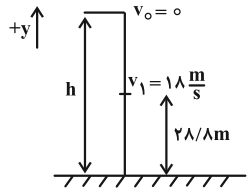
بنابراین زمان خواسته شده برابر است با:

$$\Rightarrow \Delta t_{\text{کل}} = \frac{۷}{۵} + \frac{۱}{۳۰} = \frac{۴۲+۱}{۳۰} \Rightarrow \frac{۴۳}{۳۰}s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیراحمد میرسعید)*

با توجه به چشم‌پوشی از مقاومت هوا، حرکت متحرک از نوع سقوط آزاد است و اندازهٔ شتاب آن برابر با g است. رابطهٔ سرعت- جابه‌جایی را نوشته و سرعت سنگ هنگام برخورد به زمین را محاسبه می‌کنیم:



$$v_2^2-v_1^2=-2g\Delta y$$

$$v_2^2-324=-2\times(+10)\times(-28/8)\Rightarrow v_2=-30\frac{m}{s}$$

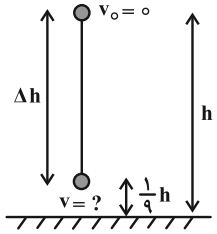
در گام بعدی برای محاسبهٔ زمان کل حرکت، از رابطهٔ $v=-gt$ استفاده می‌کنیم:

$$v_2=-10\times t\Rightarrow -30=-10t\Rightarrow t=3s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(سیاوش فارسی)*

با صرف‌نظر از مقاومت هوا، می‌توان حرکت جسم را به صورت سقوط آزاد در نظر گرفت. با فرض این‌که جهت مثبت محور رو به بالا باشد، داریم:



$v^2-v_0^2=-2g\Delta y$: معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی در سقوط آزاد

$$\xrightarrow{v_0=0\ ,\ \Delta y=-\frac{8}{9}h} v^2=-2g\times-\frac{8}{9}h\Rightarrow v^2=\frac{16}{9}gh$$

چون جهت محور را بالا در نظر گرفتیم و جسم رو به پایین حرکت می‌کند، $v<0$ است:

$$v=-\frac{4}{3}\sqrt{gh}\Rightarrow s=|v|=\frac{4}{3}\sqrt{gh}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۷- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

فرض می‌کنیم جهت مثبت محور رو به بالا باشد، از آنجا که در سقوط آزاد تغییر جهت نداریم، در هر بازهٔ زمانی تندی متوسط با اندازهٔ سرعت متوسط برابر است. چون جسم رو به پایین حرکت می‌کند، داریم:

$$|v_{av}|=25\frac{m}{s}\Rightarrow v_{av}=-25\frac{m}{s}$$

اگر سرعت جسم در لحظهٔ برخورد را v و در ۳ ثانیهٔ قبل از آن را v_0 در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta v=v-v_0\ ,\ \Delta t=3-0=3s]{a=-g=-10\frac{m}{s^2}}-10=\frac{v-v_0}{3}$$

$$\Rightarrow v_0=v+30\frac{m}{s}$$

در آخر داریم:

$$s_{av}=25\frac{m}{s}\xrightarrow[v_{av}<0]{\text{تغییر جهت ندارید}}v_{av}=-25\frac{m}{s}$$

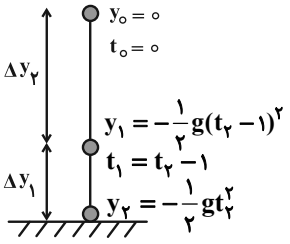
$$v_{av}=\frac{v+v_0}{2}\xrightarrow[v_{av}=-25\frac{m}{s}]{v_0=v+30}-25=\frac{v+v+30}{2}$$

$$\Rightarrow v=-40\frac{m}{s}\Rightarrow s=|v|=40\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(بهزاد آزادخو)*

جهت مثبت محور را رو به بالا و محل رها شدن گلوله را مبدأ مکان در نظر می‌گیریم. با توجه به این نکات، معادلهٔ مکان- زمان گلوله را نوشته و جابه‌جایی آن را در بازه‌های زمانی خواسته شده به دست می‌آوریم:



$$y=-\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t_1=t_2-1}y_1=-\frac{1}{2}g(t_2-1)^2\\ \xrightarrow{t=t_2}y_2=-\frac{1}{2}gt_2^2\end{cases}$$

$$\begin{cases} t_۲-۱ \text{ تا } ۰ : \Delta y_۱ = y_۱ - y_۰ = -\frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲ - ۰ \\ = -\frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲ \qquad (۱) \\ t_۲ \text{ تا } t_۲-۱ : \Delta y_۲ = y_۲ - y_۱ = -\frac{۱}{۲}gt_۲^۲ - (-\frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲) \\ = -\frac{۱}{۲}gt_۲^۲ + \frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲ \qquad (۲) \end{cases}$$

$$\frac{\Delta y_۲}{\Delta y_۱} = \frac{۹}{۱۶} \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{-\frac{۱}{۲}gt_۲^۲ + \frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲}{-\frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow ۱۶t_۲^۲ - ۱۶(t_۲-۱)^۲ = ۹(t_۲-۱)^۲ \Rightarrow ۱۶t_۲^۲ = ۲۵(t_۲-۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۴t_۲ = ۵t_۲ - ۵ \Rightarrow t_۲ = ۵s$$

در آخر، با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان، سرعت متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v = -gt \xrightarrow[t=۵s]{g=۹/۸\frac{N}{kg}} v = -۴۹\frac{m}{s} \Rightarrow s = |v| = ۴۹\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

اگر زمان سقوط گلولهٔ A در این سوال را با t نشان دهیم، زمان سقوط گلولهٔ B برابر با $t-۱/۵s$ خواهد بود. بر این اساس، نقطهٔ رها شدن گلوله‌ها را به عنوان مبدأ مکان در نظر گرفته و معادلهٔ مکان هر یک از آن‌ها را می‌نویسیم: $(y_۰ = ۰)$

$$y_A = -\frac{۱}{۲}gt_A^۲ \xrightarrow[g=۱۰\frac{m}{s^۲}]{t_A=t} y_A = -۵t^۲$$

$$y_B = -\frac{۱}{۲}gt_B^۲ \xrightarrow[g=۱۰\frac{m}{s^۲}]{t_B=t-۱/۵s} y_B = -۵(t-۱/۵)^۲$$

اکنون فاصلهٔ دو گلوله از یکدیگر را برابر با $۴۱/۲۵m$ قرار می‌دهیم و t را به دست می‌آوریم:

$$y_B - y_A = ۴۱/۲۵m$$

$$\Rightarrow -۵(t-۱/۵)^۲ - (-۵t^۲) = ۴۱/۲۵$$

$$\Rightarrow -۵(t^۲ - ۳t + ۲/۲۵) + ۵t^۲ = ۴۱/۲۵$$

$$\Rightarrow +۱۵t - ۱۱/۲۵ = ۴۱/۲۵$$

$$\Rightarrow ۱۵t = ۵۲/۵ \Rightarrow t = \frac{۵۲/۵}{۱۵} = ۳/۵s$$

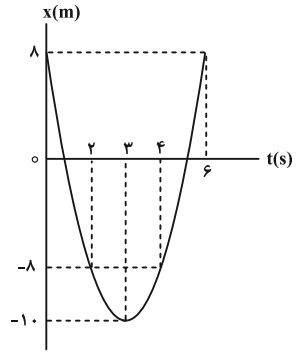
بنابراین داریم:

$$\Rightarrow t_A = ۳/۵s \ , \ t_B = t_A - ۱/۵ = ۳/۵ - ۱/۵ = ۲s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(سراسری ریاضی- اردیبهشت ۱۴۰۳)*

با استفاده از معادلهٔ مکان- زمان، معادلهٔ سرعت- زمان را به دست می‌آوریم و لحظهٔ تغییر جهت را می‌یابیم:



$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ x = ۲t^۲ - ۱۲t + ۸ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[v_۰=-۱۲\frac{m}{s}]{a=۴\frac{m}{s^۲}} v = ۴t - ۱۲ \xrightarrow{v=۰} t = ۳s \quad \text{(لحظهٔ تغییر جهت)}$$

$$\Rightarrow x = ۲\times۹ - ۱۲\times۳ + ۸ = -۱۰m$$

$$x = -۸ \Rightarrow ۲t^۲ - ۱۲t + ۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲s \\ t = ۴s \end{cases}$$

طبق نمودار مکان- زمان، در بازهٔ زمانی صفر تا $۲s$ و $۴s$ تا $۶s$ فاصلهٔ متحرک از مبدأ محور کمتر یا مساوی ۸ متر می‌باشد.

$$\Delta t_{\text{کل}} = ۲s + (۶-۴)s = ۴s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ برای مثال اگر خودرویی روی خط راست در حال حرکت باشد و رانندهٔ آن ترمز بگیرد، نیروی خالص وارد بر خودرو در خلاف جهت حرکت آن است.

ب) نادرست؛ نیروهای کنش و واکنش به دو جسم متفاوت وارد می‌شوند و نمی‌توان از آن‌ها برایند گرفت.

پ) درست؛ برای مثال هنگام ترمز خودرو بر مسیر مستقیم، هر چه شتاب ترمز بیشتر باشد، تغییر سرعت آن ناگهانی‌تر بوده و سرنشینان خودرو با شدت بیشتری به جلو پرتاب می‌شوند.

ت) نادرست؛ اگر نیروی خالص وارد بر جسمی صفر باشد، طبق قانون اول نیوتون یا جسم ساکن است و یا با سرعت ثابت در حال حرکت است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(بهزاد آزادفر)*

بررسی موارد:

الف) درست؛ در شکل (۱)، جرم ثابت و نیروی خالص وارد بر جسم افزایش یافته است. با این افزایش نیروی خالص، شتاب نیز افزایش یافته است. بنابراین شتاب جسم با نیروی خالص وارد بر آن رابطهٔ مستقیم دارد و این بیانی از قانون دوم نیوتون است. در شکل (۲)، با ثابت ماندن نیرو و افزایش جرم، شتاب جسم کاهش یافته است. پس از این شکل نتیجه می‌شود که شتاب با جرم نسبت وارون دارد که این عبارت نیز بیانی از قانون دوم نیوتون است.

ب) درست؛ در شکل (۱)، با ثابت ماندن جرم و افزایش نیروی خالص، شتاب افزایش یافته است. در نتیجه شتاب جسم با نیروی خالص وارد بر آن رابطهٔ مستقیم دارد.

پ) نادرست؛ در شکل (۲)، نیرو ثابت و جرم تغییر یافته است، بنابراین از این شکل، رابطه‌ای میان نیروی خالص و جرم جسم نتیجه نمی‌شود.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(پوریا علاقه‌مند)*

قانون دوم نیوتون را در حالت اول می‌نویسیم:

$$\vec{F}_{net1} = m_1\vec{a}_1 \xrightarrow[m_1=4m\ ,\ \vec{a}_1=\vec{a}]{\vec{F}_{net1}=2\vec{F}} 2\vec{F} = 4m(\vec{a})$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 2m\vec{a} \qquad (*)$$

در حالت دوم، جرم جسم $m_2 = 0/4\,kg + m_1$ می‌شود. بار دیگر قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

$$\vec{F}_{net2} = m_2\vec{a}_2 \xrightarrow[m_2=0/4kg+m_1=0/4kg+4m]{\vec{F}_{net2}=\vec{F}\ ,\ \vec{a}_2=\frac{1}{8}\vec{a}}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{8}\vec{a}(0/4+4m) \xrightarrow{(*)} 2m\vec{a} = \frac{\vec{a}}{8}(0/4+4m)$$

$$\Rightarrow 16m = 0/4+4m \Rightarrow 12m = 0/4$$

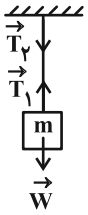
$$\Rightarrow m = \frac{0/4}{12}kg = \frac{1}{30}kg \Rightarrow m = \frac{100}{3}g$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(ادریس محمدی)*

چون جسم ساکن است، طبق قانون اول نیوتون باید برایند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد. بنابراین:

$$\vec{T}_1 + \vec{W} = 0 \Rightarrow \vec{T}_1 = -\vec{W} \qquad (1)$$



همچنین با توجه به ناچیز بودن جرم نخ، اندازهٔ نیروی نخ ثابت است. چون $\vec{T}_1$ و $\vec{T}_2$ هم‌راستا اما در خلاف جهت یکدیگرند، داریم:

$$\vec{T}_2 = -\vec{T}_1 \overset{(1)}{=} \vec{W} \qquad (2)$$

$\vec{T}_2$ عکس‌العمل نیروی وارد بر سقف از طرف نخ، همان عکس‌العمل نیروی

$$\vec{T}_2' = -\vec{T}_2 \overset{(2)}{=} -\vec{W}$$

است که با توجه به قانون سوم نیوتون داریم:

همچنین عکس‌العمل نیروی وارد بر جسم از طرف نخ، همان عکس‌العمل نیروی $\vec{T}_1$ است که با توجه به قانون سوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$\vec{T}_1' = -\vec{T}_1 \overset{(1)}{=} \vec{W}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۴، ۳۵ و ۴۴ تا ۴۶)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

جرم یک جسم در مکان‌های مختلف ثابت است، اما وزن آن علاوه بر جرم، بستگی به مقدار $\vec{g}$ (شتاب گرانشی) دارد. در این سؤال داریم:

$$W_{ماه} = mg_{ماه} = 60\times 1/6 = 96\,N$$

$$W_{زمین} = mg_{زمین} = 60\times 9/8 = 588\,N$$

$$\text{درصد اختلاف وزن} = \frac{W_{ماه} - W_{زمین}}{W_{زمین}} \times 100$$

$$= \frac{96-588}{588}\times 100 \simeq -84\%$$

وزن شخص روی ماه تقریباً ۸۴ درصد کمتر از وزن همان شخص روی زمین است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ مشابه تمرین ۱-۲ صفحهٔ ۳۶)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی شریفی)*

بررسی گزینه‌ها:

می‌دانیم با افزایش تندی یک جسم، اندازهٔ نیروی مقاومت هوا در مقابل حرکت آن افزایش می‌یابد. در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، با توجه به افزایش پیوسته مقاومت هوا، می‌توان نتیجه گرفت که تندی چترباز نیز پیوسته افزایش می‌یابد و به دنبال آن نوع حرکت آن تندشونده است. (درستی گزینهٔ «۱»)

افزایش ناگهانی نیروی مقاومت هوا در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3، به معنای باز شدن چتر توسط چترباز است. بنابراین از صفر تا t_2 چترباز بدون چتر و از t_2 به بعد با چتر به حرکت خود ادامه می‌دهد. با توجه به ثابت شدن نیرو در بازه‌های زمانی t_1 تا t_2 و t_4 تا t_5، چترباز به تندی حدی می‌رسد (درستی گزینهٔ «۳»). اما دقت کنید تندی حدی چترباز در دو حالت با یکدیگر متفاوت است. زیرا با افزایش مساحت چترباز به خاطر باز شدن چتر، در تندی کمتر نسبت به حالت قبل، نیروی مقاومت هوا با وزن چترباز برابر می‌شود (نادرستی گزینهٔ «۲»).

تندی حدی چترباز در حالت بدون چتر، بیشینهٔ تندی او در طول حرکت است (درستی گزینهٔ «۴»).

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(حسین الهی)*

قانون دوم نیوتون را نوشته و شتاب هر دو گلوله را به دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma \xrightarrow{F_{net}=W-f_D} W-f_D=ma$$

$$\Rightarrow ma=W-f_D \xrightarrow{W=mg} a=g-\frac{f_D}{m}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{m_1=5kg} a_1=10-\frac{10}{5}=8\frac{m}{s^2} \\ \xrightarrow{m_2=10kg} a_2=10-\frac{10}{10}=9\frac{m}{s^2} \end{cases}$$



شتاب حرکت هر دو متحرک ثابت و مکان و سرعت اولیهٔ آن‌ها یکسان است. بنابراین فاصلهٔ دو گلوله زمانی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که گلولهٔ با شتاب بیشتر به زمین برسد:

$$a_2>a_1 \Rightarrow \Delta y_2=\frac{1}{2}a_2t^2 \xrightarrow[a_2=9\frac{m}{s^2}]{\Delta y=18m} 18=\frac{1}{2}(9)t^2 \Rightarrow t=2s$$

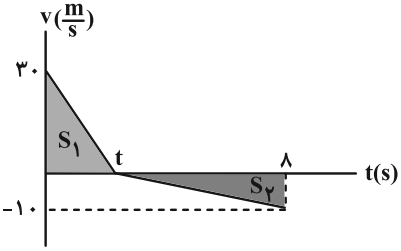
$$t=2s \Rightarrow \Delta y_1=\frac{1}{2}a_1t^2 \xrightarrow[a_1=8\frac{m}{s^2}]{t=2s} \Delta y_1=\frac{1}{2}(8)(2)(2)=16m$$

$$\text{بیشترین فاصلهٔ دو گلوله}=\Delta y_2-\Delta y_1=18m-16m=2m$$

(فیزیک ۳- ترکیبی؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴ و ۳۵ تا ۳۷)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(مجتبی نکوئیان)*

اندازهٔ جابه‌جایی جسم در مسیر رفت و برگشت با هم برابر است. با توجه به این‌که جابه‌جایی برابر با سطح زیر نمودار $v-t$ است، داریم:



$$S_1=S_2 \Rightarrow \frac{1}{2}t(30)=\frac{1}{2}(8-t)(10) \Rightarrow t=2s$$

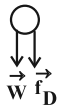
چون نمودار به صورت خط راست است، شتاب حرکت برابر با شیب خط است، پس:

مسیر رفت: $a_1=\frac{-30}{2}=-15\frac{m}{s^2}$

مسیر برگشت: $a_2=\frac{-10}{8-2}=-\frac{5}{3}\frac{m}{s^2}$

با استفاده از قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{net}=m\vec{a})$ برای مسیر رفت و برگشت داریم:

مسیر رفت:



$$-mg-f_D=ma_1$$
$$\Rightarrow -(0/3)(10)-f_D=0/3(-15)$$
$$\Rightarrow f_D=1/5N$$

مسیر برگشت:



$$-mg+f'_D=ma_2$$
$$\Rightarrow -(0/3)(10)+f'_D=\frac{3}{10}(-\frac{5}{3})$$
$$\Rightarrow f'_D=2/5N$$

در آخر داریم:

$$\frac{f'_D}{f_D}=\frac{2/5}{1/5}=\frac{5}{3}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(محمدکاظم منشادی)*

از آنجا که جسم در هر سه حالت ساکن و در تعادل است، می‌توان نوشت:

$$F_{N_1}=F+mg \quad , \quad F_{N_2}=2F-mg \quad , \quad F_{N_3}=3F$$

$$3F_{N_1}=F_{N_2}+F_{N_3} \Rightarrow 3F+3mg=5F-mg$$

$$\Rightarrow F=2mg \qquad (*)$$

$$\frac{F_{N_2}}{F_{N_1}} \overset{(*)}{=} \frac{2F-mg}{F+mg}=\frac{3mg}{3mg}=1$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(پوریا علاقه‌مند)*

در بازه‌های زمانی صفر تا ۳s و ۹s تا ۱۰s، نمودار تندی متحرک به صورت خط راست است. از این‌رو شتاب متحرک ثابت و برابر با شتاب متوسط است. با توجه به این نکته شتاب آسانسور در دو بازهٔ زمانی مذکور را به دست می‌آوریم. دقت کنید چون تندی متحرک داده شده است، تنها می‌توانیم بزرگی شتاب متحرک را به دست آوریم.

SanjeshCloud

$$|a| = |a_{av}| = \frac{|v_2 - v_1|}{t_2 - t_1} = \frac{9}{3} = 3\frac{m}{s^2} \quad : \text{۰ تا } 3s$$

چون معلوم نیست آسانسور در $t = 1s$ رو به بالا یا رو به پایین حرکت کرده است، هر دو حالت را در نظر می‌گیریم، اگر آسانسور رو به بالا حرکت کند داریم: (دقت کنید در هر دو حالت حرکت تندشونده است.)

$$F_{net_1} = ma_1 \xrightarrow[a_1 = 3\frac{m}{s^2}]{F_{net_1} = F_{N_1} - mg} F_{N_1} - 10m = 3m \Rightarrow F_{N_1} = 13m$$

و اگر رو به پایین حرکت کند:

$$F_{net_2} = ma_2 \xrightarrow[a_1 = 3\frac{m}{s^2}]{F_{net_2} = mg - F_{N_2}} 10m - F_{N_2} = 3m \Rightarrow F_{N_2} = 7m$$

در هر دو حالت، در $t = 8s$ حرکت آسانسور با سرعت ثابت بوده است.

پس در هر دو حالت نیروی عمودی سطح برابر است با:

$$a = 0 \Rightarrow F_{net} = 0 \Rightarrow F_N = mg = 10m$$

در آخر داریم:

$$\text{نسبت خواسته شده} = \frac{F_{N_2}}{F_N} \text{ یا } \frac{F_{N_1}}{F_N} = \frac{7m}{10m} \text{ یا } \frac{13m}{10m} = 0/7 \text{ یا } 1/3$$

دقت کنید عددی که ترازو نشان می‌دهد، در واقع عکس‌العمل نیروی عمودی سطح است که اندازهٔ هر دو یکسان است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

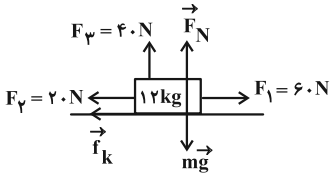
۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(کامران ابراهیمی)*

جسم در راستای عمودی حرکتی ندارد، لذا $a_y = 0$ و می‌توان نوشت:

$$a_y = 0 \Rightarrow F_{net(y)} = 0 \Rightarrow mg = F_3 + F_N$$

$$\xrightarrow[F_3 = 40N]{m = 12kg} 120 = 40 + F_N \Rightarrow F_N = 80N$$

در راستای افقی، قانون دوم نیوتون را برای جسم می‌نویسیم:



$$F_{net(x)} = F_1 - F_2 - f_k \xrightarrow[F_{net} = ma]{f_k = \mu_k F_N}$$

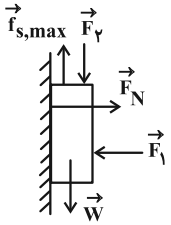
$$ma = F_1 - F_2 - \mu_k F_N \xrightarrow[\mu_k = 0/4\ ,\ F_N = 80N]{m = 12kg\ ,\ F_1 = 60N\ ,\ F_2 = 20N}$$

$$12a = 60 - 20 - 80(0/4) \Rightarrow a = \frac{2}{3}\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۳ تا ۴۳)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(سیاوش خادمی)*

چون نیروی $\vec{F}_2$ رو به پایین است، پس از وارد شدن آن به جسم، جسم در آستانهٔ لغزش رو به پایین قرار می‌گیرد. با توجه به این‌که جسم در آستانهٔ لغزش است، برایند نیروهای وارد بر جسم در راستای قائم برابر با صفر می‌شود.



$$W = mg = 0/15 \times 10 = 1/5N$$

$$F_{net\,y} = 0 \Rightarrow f_{s,max} = F_2 + W \Rightarrow f_{s,max} = 1/5 + 1/5 = 3N$$

نیرویی که از طرف دیوار به چوب وارد می‌شود، برابر با برایند نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است، بنابراین:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_{s,max}^2} \Rightarrow 5 = \sqrt{(F_N)^2 + 3^2}$$

$$\Rightarrow 25 = (F_N)^2 + 9 \Rightarrow (F_N)^2 = 16 \Rightarrow F_N = 4N$$

در آخر داریم:

$$\mu_s = \frac{f_{s,max}}{F_N} = \frac{3}{4} = 0/75$$

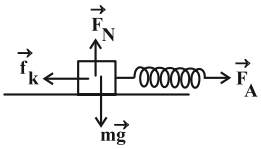
(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۳ تا ۴۳)

۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی شریفی)*

طبق قانون هوک، شیب نمودار $F - x$ برابر با ثابت فنر است:

$$\frac{k_A}{k_B} = \frac{\text{شیب } A}{\text{شیب } B} = \frac{\frac{F}{1}}{\frac{F}{4}} = 4$$

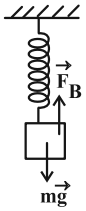
حالت اول: در حرکت با سرعت ثابت، برایند نیروها صفر است.



$$\begin{cases} F_A = f_k = \mu_k F_N \\ F_N = mg \end{cases} \xrightarrow{F_A = k_A x_A} k_A x_A = 0/1mg$$

$$\Rightarrow x_A = \frac{mg}{10k_A}$$

حالت دوم: جسم در حال تعادل است، یعنی برایند نیروهای وارد بر آن صفر است.



$$F_B = mg \Rightarrow k_B x_B = mg$$

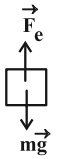
$$\Rightarrow x_B = \frac{mg}{k_B}$$

$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{\frac{mg}{10k_A}}{\frac{mg}{k_B}} = \frac{k_B}{10k_A} \overset{(*)}{=} \frac{1}{40}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمد مقدم)*

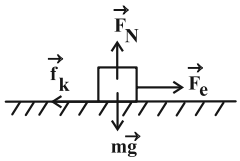
ابتدا در حالت قائم نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:



$$F_{net}=0\Rightarrow F_e-mg=0$$

$$\Rightarrow k\times 0/08=mg\Rightarrow k=\frac{mg}{0/08} \qquad (1)$$

حال نیروهای وارد بر جسم در راستای حرکت افقی را رسم کرده و قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:



$$F_{net(y)}=0\Rightarrow F_N-mg=0\Rightarrow F_N=mg \qquad (2)$$

$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{(2)} f_k=0/5\times mg=\frac{mg}{2}$$

$$F_{net(x)}=ma\Rightarrow F_e-f_k=ma\Rightarrow k\Delta x-\frac{mg}{2}=m\times 0/2g$$

$$\xrightarrow{(1)}\frac{mg}{0/08}\Delta x-\frac{mg}{2}=0/2mg$$

$$\Rightarrow \Delta x=0/056\,m=5/6\,cm$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

ابتدا اندازهٔ نیروی کشسانی فنر را با استفاده از قانون هوک به دست می‌آوریم:

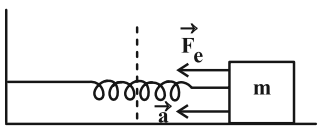
$$F_e=kx\xrightarrow[x=25\times10^{-2}m]{k=3/6\frac{N}{cm}=360\frac{N}{m}}F_e=(360)(25\times10^{-2})=90\,N$$

با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\xrightarrow[m=5kg]{F_{net}=F_e=90N}90=5a\Rightarrow a=18\frac{m}{s^2}$$

با توجه به این‌که فنر نیرویی به طرف نقطهٔ تعادل به جسم وارد می‌کند، می‌توان گفت که نیروی فنر و در نتیجه شتاب حرکت جسم در لحظهٔ رها شدن آن، خلاف جهت محور x است. پس:

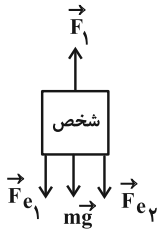
$$\vec{a}=(-18\frac{m}{s^2})\vec{i}$$



(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمدکاظم منشاری)*

با توجه به تعادل شخص می‌توان نوشت:



$$F_{net}=0\Rightarrow F_1-F_{e_1}-F_{e_2}-mg=0$$

$$F_1-kx_1-kx_2-mg=0$$

$$\Rightarrow F_1-500\times0/6-500\times0/4-500=0\Rightarrow F_1=1000\,N$$

$\vec{F}_1$ نیرویی است که از طرف ترازو به شخص وارد می‌شود. در نتیجه طبق قانون سوم نیوتون نیروی رو به پایین $F_1'=F_1=1000\,N$ به ترازو وارد می‌شود.

با توجه به تعادل فنر داریم:



$$F_{net}=0\Rightarrow F_2=F_{e_1}=kx_1$$

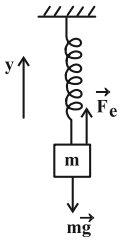
$$\Rightarrow F_2=500\times0/6=300\,N$$

$\vec{F}_2$ نیرویی است که ترازو به فنر وارد می‌کند، در نتیجه نیروی رو به بالای $F_2'=F_2=300\,N$ از طرف فنر به ترازو وارد می‌شود. به‌طور مشابه نیروی رو به بالای $F_3'=F_3=200\,N$ از طرف فنر ۲ به ترازو وارد می‌شود. از آنجایی که ترازو برایند نیروی عمودی وارد بر خودش را اندازه می‌گیرد، داریم: $F_1'-F_2'-F_3'=1000-200-300=500\,N$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

در لحظهٔ مورد نظر نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را برای آن می‌نویسیم:



$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma\xrightarrow{F_e=k\Delta L}$$

$$k\Delta L=mg+ma\xrightarrow[m=600g=0/6kg\ ,\ a=1\frac{m}{s^2}]{k=132\frac{N}{m}\ ,\ g=10\frac{N}{kg}}$$

$$132\Delta L=0/6\times10+0/6\times1\Rightarrow 132\Delta L=6/6$$

$$\Rightarrow \Delta L=\frac{6/6}{132}=0/05\,m=5\,cm$$

اکنون می‌توانیم طول فنر را در حالت جدید به دست آوریم:

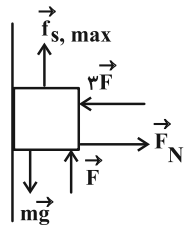
$$\Delta L=L_2-L_1\xrightarrow[\Delta L=5cm]{L_1=40cm}5=L_2-40\Rightarrow L_2=45\,cm$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(ادریس محمدی)*

مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: جسم در آستانهٔ لغزش به سمت پایین باشد.



$$F_{net(x)} = 0 \Rightarrow F_N - 3F = 0 \Rightarrow F_N = 3F$$

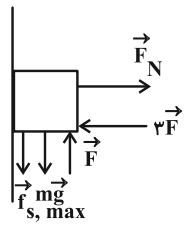
$$F_{net(y)} = ma \Rightarrow f_{s,max} + F - mg = ma$$

$$\xrightarrow[f_{s,max}=\mu_s F_N \,,\, F_N=3F]{m=5kg \,,\, a=-1\frac{m}{s^2} \,,\, g=10\frac{N}{kg}} 3\mu_s F + F = 50 + (-5)$$

$$\Rightarrow 3\mu_s F + F = 45 \qquad (1)$$

توجه: دقت شود که چون آسانسور به سمت بالا حرکت می‌کند و حرکت کندشونده است، پس باید شتاب به سمت پایین $(a < 0)$ باشد. (جهت مثبت محور y را به بالا درنظر می‌گیریم).

حالت دوم: جسم در آستانهٔ حرکت به سمت بالا باشد.



$$F_{net(x)} = 0 \Rightarrow F_N - 3F = 0 \Rightarrow F_N = 3F$$

$$F_{net(y)} = ma \Rightarrow F - f_{s,max} - mg = ma$$

$$\xrightarrow[a=-4\frac{m}{s^2} \,,\, f_{s,max}=\mu_s F_N \,,\, F_N=3F]{m=5kg \,,\, g=10\frac{N}{kg}}$$

$$F - 3\mu_s F - 50 = -20 \Rightarrow F - 3\mu_s F = 30 \qquad (2)$$

توجه: دقت شود که چون آسانسور به سمت پایین حرکت می‌کند و حرکت تندشونده است، پس باید شتاب هم به سمت پایین باشد. $(a < 0)$

حال طبق روابط (۱) و (۲)، F و μ_s را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F + 3\mu_s F = 45 \\ F - 3\mu_s F = 30 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع روابط}} 2F = 75 \Rightarrow F = \frac{75}{2}N$$

در آخر F را در یکی از روابط جای‌گذاری می‌کنیم و μ_s را به دست می‌آوریم:

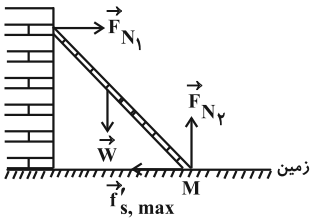
$$F + 3\mu_s F = 45 \xrightarrow{F=\frac{75}{2}N} \frac{75}{2} + 3\mu_s \times \frac{75}{2} = 45$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } 2} 75 + 225\mu_s = 90 \Rightarrow \mu_s = \frac{15}{225} = \frac{1}{15}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۳)

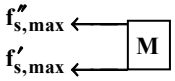
۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(آراس محمدی)*

در ابتدا بدون در نظر گرفتن جعبه، نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم:



$$F_{N_2} = W \xrightarrow{W=mg} F_{N_2} = 24 \times 10 = 240N$$

دقت کنید که اصطکاک ناشی از جعبه نیز در مسئله تأثیرگذار است:



$$f_{s,max} = f'_{s,max} + f''_{s,max} \qquad (*)$$

اکنون داریم:

$$F_{N_1} = f_{s,max} \xrightarrow[f'_{s,max}=\mu_s F_{N_2} \,,\, \mu_s=0/4 \,,\, F_{N_2}=240N]{(*)}$$

$$F_{N_1} = 96 + f''_{s,max} \xrightarrow[\text{جرم جعبه}=m']{f''_{s,max}=(\text{جرم جعبه}) \times g \times \mu_s}$$

$$F_{N_1} = 96 + 4m'$$

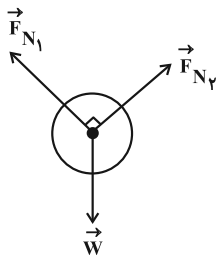
و در نهایت از دادهٔ سؤال $(F_{N_1} = 260N)$ می‌توان نوشت:

$$260 = 96 + 4m' \Rightarrow 164 = 4m' \Rightarrow m' = 41kg$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۳)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(مسعود خندانی)*

نیروهای وارد بر کره به صورت زیر است:



چون کره در حال تعادل است، برایند نیروهای وارد بر آن صفر است. بنابراین داریم:

$$\vec{F}_{net} = \vec{W} + \vec{F}_{N_1} + \vec{F}_{N_2} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{N_1} + \vec{F}_{N_2} = -\vec{W}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_{N_1} + \vec{F}_{N_2}| = |-\vec{W}| = mg = 500N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۳ تا ۳۹)

۱- **گزینهٔ «۳»** *(محسن سلماسی‌ونر)*

در نمودار $x-t$ شیب خط مماس بر نمودار بیانگر سرعت متحرک است، بنابراین در بازه‌های زمانی ($t=0$ تا $t=1s$) و ($t=4s$ تا $t=6s$) که شیب خط مماس بر نمودار مقداری مثبت است، سرعت نیز مثبت خواهد بود.

در نمودار $x-t$ تا زمانی که نمودار بالای محور t است، بردار مکان در جهت مثبت خواهد بود. بنابراین در بازهٔ زمانی ($t=0$ تا $t=2s$) بردار مکان متحرک مثبت خواهد بود.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود خندانی)*

چون فاصلهٔ زمانی عکس‌ها یکسان است و مسافت پیموده شده بین دو لحظه ابتدا کاهش (کاهش تندی) و سپس افزایش (افزایش تندی) می‌یابد؛ پس حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۰ و ۱۶)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

اگر متحرکی مسافت ℓ_1 را با تندی ثابت v_1 و پس از آن مسافت ℓ_2 را با تندی ثابت v_2 بپیماید، تندی متوسط آن در کل مسیر برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell_1+\ell_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{\ell_1+\ell_2}{\frac{\ell_1}{v_1}+\frac{\ell_2}{v_2}}$$

$$\xrightarrow[v_1=72\frac{km}{h}=72+3/6=20\frac{m}{s},\ \ell=\ell_1+\ell_2]{P=\frac{m}{n},\ v_2=30\frac{m}{s},\ s_{av}=25\frac{m}{s}}$$

برای ساده‌تر شدن محاسبات $\frac{m}{n}$ را برابر P فرض می‌کنیم:

$$25=\frac{P\ell+(1-P)\ell}{\frac{P\ell}{20}+\frac{(1-P)\ell}{30}}=\frac{1}{\frac{P}{20}+\frac{(1-P)}{30}}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}P+\frac{5}{6}(1-P)=1\Rightarrow \frac{5}{4}P+\frac{5}{6}-\frac{5}{6}P=1$$

$$\Rightarrow \frac{15P-10P}{12}=\frac{1}{6}\Rightarrow \frac{5P}{12}=\frac{1}{6}\Rightarrow P=\frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{P=\frac{m}{n}} \frac{m}{n}=\frac{2}{5}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(بهزاد آزادفر)*

طبق نمودار مکان- زمان متحرک‌ها که خط راست است، حرکت یکنواخت است، پس:

$$x_A=v_At+x_{0A}\Rightarrow x_A=v_At-2$$

$$x_B=v_Bt+x_{0B}\Rightarrow x_B=v_Bt+4$$

در لحظهٔ $t=5s$ دو متحرک به هم می‌رسند.

$$x_A=x_B\xrightarrow{t=5s}5v_A-2=5v_B+4\Rightarrow v_A-v_B=1/2$$

برای فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t=8s$ داریم:

$$|x_A-x_B|=|(v_At+x_{0A})-(v_Bt+x_{0B})|$$

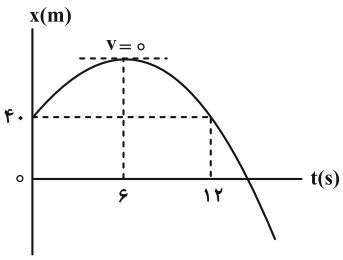
$$=|8v_A-2-8v_B-4|=|8(v_A-v_B)-6|$$

$$=|8(1/2)-6|=|9/6-6|=3/6m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

با توجه به تقارن موجود در نمودار سهمی، در لحظهٔ $t=6s$ که در رأس سهمی قرار دارد، سرعت متحرک صفر است.



$$v=at+v_0\xrightarrow[t=6s]{v=0\ ,\ a=-0/5\frac{m}{s^2}}$$

(توجه داشته باشید که گودی سهمی نمودار مکان- زمان، رو به پایین است بنابراین شتاب حرکت منفی است.)

$$0=-0/5\times6+v_0\Rightarrow v_0=3\frac{m}{s}$$

لحظه‌ای که جهت بردار مکان عوض می‌شود، همان لحظه‌ای است که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد. با استفاده از رابطهٔ سرعت- جابه‌جایی می‌توان نوشت:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\xrightarrow[\Delta x=0-40=-40m]{v_0=3\frac{m}{s}\ ,\ a=-0/5\frac{m}{s^2}}$$

$$v^2 - 9 = 2(-0/5)(-40) \Rightarrow v^2 = 49 \Rightarrow v = \pm 7\frac{m}{s}$$

با توجه به نمودار $v = -7\frac{m}{s}$ است، اما تندی متحرک برابر با $|v| = 7\frac{m}{s}$ می‌باشد.

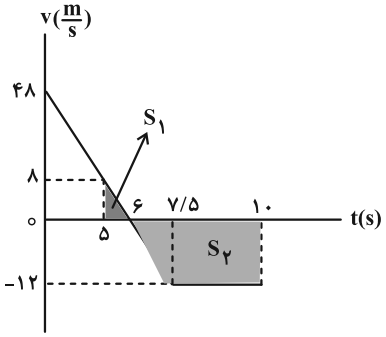
(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به این‌که حرکت متحرک با شتاب ثابت است، معادلهٔ سرعت- زمان آن را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ v = at + v_0 \end{cases} \xrightarrow[v_0 = 48\frac{m}{s}]{a = -8\frac{m}{s^2}} v = -8t + 48$$

از آنجا که در لحظهٔ $t = 7/5\,s$، نیروی خالص F قطع می‌شود، می‌توان گفت که از این لحظه به بعد حرکت متحرک، حرکت با سرعت ثابت می‌شود. پس نمودار سرعت- زمان این متحرک را می‌توان به صورت زیر رسم کرد:



مساحت محصور بین نمودار سرعت- زمان با محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است، بنابراین:

$$\Delta x_1 = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}(1)(8) - \frac{1}{2}(\frac{13}{2})(12) = -35\,m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست و دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱، ۲۹ تا ۳۳)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(علی برزگر)*

با استفاده از معادلهٔ مکان- زمان در سقوط آزاد داریم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -245 = -\frac{1}{2}\times 10\times t^2 \Rightarrow t^2 = 49 \Rightarrow t = 7\,s$$

حال از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی داریم:

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2}]{v_0=0} v^2 = -2\times 10\times(-245) = 4900$$

$$\Rightarrow |v| = 70\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمدکاظم منشادی)*

$$\Delta y_1, t: \quad |\Delta y_1| = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Delta y_2, t: \quad |\Delta y_2| = (|\Delta y_1| + |\Delta y_2|) - |\Delta y_1| = \frac{1}{2}g(2t)^2 - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{3}{2}gt^2$$

$$\Delta y_3, t: \quad |\Delta y_3| = (|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + |\Delta y_3|) - (|\Delta y_1| + |\Delta y_2|) = \frac{1}{2}g(3t)^2 - \frac{1}{2}g(2t)^2 = \frac{5gt^2}{2}$$

$$\Delta y_4, t: \quad |\Delta y_4| = (|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + |\Delta y_3| + |\Delta y_4|) - (|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + |\Delta y_3|) = \frac{1}{2}g(4t)^2 - \frac{1}{2}g(3t)^2 = \frac{7gt^2}{2}$$

$$\Rightarrow |\Delta y_1| + |\Delta y_2| + |\Delta y_3| + |\Delta y_4| = 8gt^2 = 640\,m$$

$$\Rightarrow gt^2 = 80 \Rightarrow \begin{cases} |\Delta y_1| = 40 \\ |\Delta y_2| = 120 \\ |\Delta y_3| = 200 \\ |\Delta y_4| = 280 \end{cases}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(سعید شرق)*

قانون دوم نیوتون را برای هر دو نیرو می‌نویسیم:

نیروی F_1: $F_1 = 2ma$

نیروی F_2: $F_2 = (2m)\times\frac{a}{3} = \frac{2}{3}ma$

حداکثر شتاب زمانی اتفاق می‌افتد که دو نیروی F_1 و F_2 هم‌جهت و در یک راستا وارد شوند:

$$F_1 + F_2 = 2ma + \frac{2}{3}ma = \frac{8}{3}ma$$

$$F_{net1} = ma_{max} \Rightarrow \frac{8}{3}ma = (\frac{m}{2})\times a_{max} \Rightarrow a_{max} = \frac{16a}{3}$$

حداقل شتاب زمانی اتفاق می‌افتد که دو نیروی F_1 و F_2 خلاف جهت و در یک راستا وارد شوند:

$$F_1 - F_2 = 2ma - \frac{2ma}{3} = \frac{4ma}{3}$$

$$F_{net\,2}=ma_{min}\Rightarrow\frac{4ma}{3}=(\frac{m}{2})\times a_{min}\Rightarrow a_{min}=\frac{8a}{3}$$

گزینهٔ «۴» یعنی $\frac{a}{2}$ میان حداقل و حداکثر شتاب قرار ندارد.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(محمود منصوری)*

با توجه به قانون هوک داریم: $F_e=kx\Rightarrow k=\frac{F_e}{x}$

حال با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

$$\frac{k_A}{k_B}=\frac{\frac{F_{eA}}{x_A}}{\frac{F_{eB}}{x_B}}=\frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(محمود منصوری)*

تکانه در حالت اول:

$$p_1=mv_1\xrightarrow{m=0/2kg\ ,\ v_1=30\frac{m}{s}}p_1=0/2\times30=6kg.\frac{m}{s}$$

برای محاسبه سرعت ثانویه داریم:

$$K=\frac{p^2}{2m}\Rightarrow\frac{p_2}{p_1}=\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\xrightarrow{K_2=K_1-0/19K_1=0/81K_1}$$

$$\frac{p_2}{6}=\sqrt{\frac{0/81K_1}{K_1}}\Rightarrow\frac{p_2}{6}=0/9\Rightarrow p_2=5/4kg\frac{m}{s}$$

تغییرات تکانه $\Delta p=p_2-p_1=5/4-6=-0/6kg\frac{m}{s}$

بنابراین تکانهٔ گلوله $0/6kg\frac{m}{s}$ کاهش یافته است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمدکاظم منشاری)*

مساحت سطح زیر نمودار نیرو- زمان با محور زمان برابر با تغییر تکانه است، از طرفی:

$$\Delta p=F_{av}\Delta t\Rightarrow$$

$$\text{مساحت سطح زیر نمودار نیرو- زمان}=F_{av}\Delta t$$

$$\Rightarrow S_1+S_2=10\times4=40\Rightarrow 4S_1=40\Rightarrow S_1=10\Rightarrow S_2=3S_1=30$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(حسام نادری)*

موارد (الف) و (پ) درست‌اند. در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بردار سرعت همواره مماس بر مسیر حرکت جسم است و توجه کنید که جهت بردار سرعت تغییر می‌کند اما اندازهٔ آن ثابت است، یعنی در حرکت دایره‌ای یکنواخت بردار سرعت جسم تغییر جهت می‌دهد اما تندی جسم ثابت است (علت نادرستی (ب)). همچنین توجه کنید که نیروی مرکزگرای وارد بر جسم همواره به سمت مرکز دایره و در نتیجه عمود بر مسیر و جابه‌جایی جسم است. پس کار انجام شده توسط آن برابر با صفر است:

$$(W=Fd\cos90^\circ=0)$$

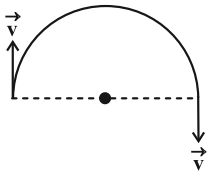
(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۹ و ۵۲)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیراحمد میرسعید)*

با توجه به رابطهٔ تندی جسم در حرکت دایره‌ای، می‌توان نوشت:

$$v=\frac{2\pi r}{T}\Rightarrow20\pi=\frac{2\pi(0/1)}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{100}s$$

دورهٔ تناوب $\frac{1}{100}$ ثانیه است و زمان $\frac{1}{200}$ ثانیه معادل $\frac{T}{2}$ است، در نتیجه متحرک روی دایره، نیم‌دور می‌چرخد. می‌توان شتاب متوسط را به روش زیر به دست آورد.



$$|a_{av}|=|\frac{v-(-v)}{\Delta t}|\Rightarrow|a_{av}|=\frac{20\pi+20\pi}{\frac{1}{200}}=\frac{40\pi}{\frac{1}{200}}=8000\pi\frac{m}{s^2}$$

$$a_c=\frac{v^2}{r}\Rightarrow a_c=\frac{(20\pi)^2}{0/1}=4000\pi^2(\frac{m}{s^2})$$

$$\frac{|a_{av}|}{a_c}=\frac{8000\pi}{4000\pi^2}=\frac{2}{\pi}=\frac{2}{3}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(سیده‌ملیحه میرصالحی)*

از رابطهٔ $a_c=\frac{v^2}{r}$ داریم:

$$\frac{a_A}{a_B}=(\frac{v_A}{v_B})^2\times(\frac{R_B}{R_A})\Rightarrow12=4\times\frac{R_B}{R_A}\Rightarrow\frac{R_B}{R_A}=3$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(علی برزگر)*

نیروی فنر نقش نیروی مرکزگرا را ایفا می‌کند و چون فنر در نهایت با طول ۸۰cm می‌چرخد، پس شعاع مسیر دایره‌ای برابر ۸۰cm می‌شود. لذا می‌توان نوشت:

$$F_{\text{فنر}} = F_{\text{مرکزگرا}} \Rightarrow k\Delta L = \frac{mv^2}{r}$$

طبق رابطهٔ $T = \frac{t}{n}$ می‌توان نوشت: $T = \frac{t}{n} = \frac{60}{30} = 2s$

از طرفی در رابطهٔ $v = \frac{2\pi r}{T}$ داریم:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow[T=2s]{r=0/8m} v = \frac{2\pi \times 0/8}{2} = 0/8\pi \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow v^2 = 0/64\pi^2 (\frac{m}{s})^2$$

با جای‌گذاری در رابطهٔ اول خواهیم داشت:

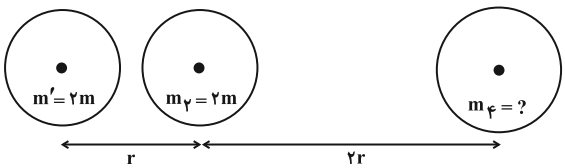
$$k\Delta x = \frac{mv^2}{r} \xrightarrow[r=0/8m\ ,\ m=\frac{1}{2}kg]{x=0/2m\ ,\ v^2=0/64\pi^2(\frac{m}{s})^2} k(0/2) = \frac{(\frac{1}{2})(0/64\pi^2)}{0/8}$$

$$\Rightarrow k = 2\pi^2 \xrightarrow{\pi^2=10} k = 20\frac{N}{m}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمدکاظم منشاری)*

با توجه به برابر بودن فاصلهٔ بین مراکز کره‌های (۱) و (۳) با مرکز کرهٔ (۲) و $m_1 = 3m_3$، طبق رابطهٔ $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ نتیجه می‌شود $F_{12} = 3F_{32}$ است، پس می‌توان به جای کره‌های (۱) و (۳)، کره‌ای فرضی به جرم $m' = 2m$ در جای کرهٔ (۱) گذاشت:



اکنون نیروهای وارد برمرکز کرهٔ (۲) از طرف دو کرهٔ دیگر برابرند:

$$\frac{Gm'm_2}{r^2} = \frac{Gm_4m_2}{(2r)^2} \Rightarrow \frac{2m}{r^2} = \frac{m_4}{4r^2}$$

$$\Rightarrow m_4 = 8m \Rightarrow \frac{m_4}{m_2} = 4$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(کامران ابراهیمی)*

با توجه به رابطهٔ شتاب گرانشی داریم:

$$g' = \frac{1}{9}g \Rightarrow \frac{GM_e}{(R_e+h)^2} = \frac{1}{9}\frac{GM_e}{R_e^2}$$

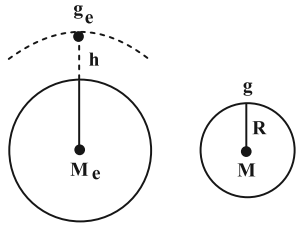
$$\Rightarrow (R_e+h)^2 = 9R_e^2 \Rightarrow R_e + h = 3R_e \Rightarrow h = 2R_e$$

$$\Rightarrow n = \frac{h}{R_e} = 2$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

شتاب گرانش در سطح سیاره‌ای به شعاع R را با g و شتاب گرانش زمین در فاصلهٔ h از سطح زمین را با g_e نشان می‌دهیم:



$$g_e = g \Rightarrow \frac{GM_e}{(R_e+h)^2} = \frac{GM}{R^2}$$

$$\xrightarrow[M=\rho V=\rho\times\frac{4}{3}\pi R^3]{M_e=\rho_e V_e=\rho_e\times\frac{4}{3}\pi R_e^3} \frac{\rho_e\times\frac{4}{3}\pi R_e^3}{(R_e+h)^2} = \frac{\rho\times\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2}$$

$$\xrightarrow{\rho=2\rho_e} \frac{\rho_e R_e^3}{(R_e+h)^2} = 2\rho_e R \xrightarrow{R_e=4/5R}$$

$$\frac{R_e^3}{(R_e+h)^2} = \frac{2R_e}{4/5} \Rightarrow \frac{R_e^2}{(R_e+h)^2} = \frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \frac{R_e}{R_e+h} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3R_e = 2R_e + 2h$$

$$\Rightarrow R_e = 2h \Rightarrow \frac{R_e}{h} = 2$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(علی برزگر)*

نیروی مرکزگرا برابر با نیروی گرانش وارد به ماهواره از طرف زمین خواهد بود.

$$F_e = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{mM_e}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{G.M_e}{v^2}$$

از طرفی:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{r=\frac{GM_e}{v^2}} T = \frac{2\pi GM_e}{v^3}$$

$$\Rightarrow T \propto \frac{1}{v^3}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیراحمد میرسعید)*

به دنبال گزاره‌هایی می‌گردیم که نادرست باشند.

بررسی تمام موارد:

الف) درست؛ دورهٔ تناوب عقربهٔ دقیقه شمار، برابر یک ساعت یا ۳۶۰۰ ثانیه است. پس بسامد آن $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ هرتز است.

ب) درست؛ دورهٔ تناوب عقربه ساعت شمار، ۱۲×۳۶۰۰ ثانیه و دورهٔ تناوب عقربهٔ ثانیه شمار ۶۰ ثانیه است. پس بسامد حرکت عقربهٔ ساعت شمار، $\frac{۱}{۷۲۰}$ بسامد حرکت عقربهٔ ثانیه شمار است.

پ) نادرست؛ دورهٔ تناوب عقربه دقیقه شمار، ۳۶۰۰ ثانیه و دورهٔ تناوب عقربهٔ ثانیه شمار، ۶۰ ثانیه است. بنابراین نسبت خواسته شده برابر با ۶۰ است.

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۶۲)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(حسین الهی)*

حرکت دوره‌ای، یک الگوی تکرارشونده دارد. به همین دلیل فاصلهٔ دو قلهٔ بلند را می‌توان دورهٔ حرکت در نظر گرفت که با توجه به شکل، دورهٔ تناوب ضربان قلب شخص $T = ۰/۶\,s$ است. حال با توجه به تعریف دورهٔ تناوب داریم:

$$\text{ضربان}\quad n = \frac{t}{T} \xrightarrow{t=۱۰min=۶۰۰s} n = \frac{۶۰۰}{۰/۶} = ۱۰۰۰$$

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۶۲)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

طبق متن کتاب درسی، عبارت‌های (الف) و (ب) درست و (پ) نادرست است.

اکنون به بررسی مورد (ت) می‌پردازیم:

$$f_A = f_B + ۰/۲۵f_B = ۱/۲۵f_B = \frac{۵}{۴}f_B \Rightarrow \frac{f_A}{f_B} = \frac{۵}{۴}$$

$$T = \frac{۱}{f} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{f_B}{f_A} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow T_A = ۰/۸T_B$$

$$\Rightarrow T_A = T_B - ۰/۲T_B \Rightarrow T_A - T_B = -۰/۲T_B$$

یعنی دورهٔ نوسانگر A، ۲۰ درصد کمتر است.

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۶۲)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی شریفی)*

نوسانگر در بازهٔ زمانی ۰ تا $\frac{T}{۴}$ و $\frac{۳T}{۴}$ تا T در مکان‌های مثبت قرار دارد همچنین در بازهٔ زمانی ۰ تا $\frac{T}{۴}$ به سمت مرکز نوسان در حال حرکت است و حرکت تندشونده می‌باشد. بنابراین پاسخ مورد نظر بازهٔ زمانی ۰ تا $\frac{T}{۴}$ است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۳ و ۶۴)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(محمد مقدم)*

از نقطهٔ A تا B، $\frac{۱}{۲}$ دوره و از نقطهٔ B تا C، $\frac{۱}{۴}$ دوره می‌شود.

بنابراین $n = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$ می‌شود و با استفاده از رابطهٔ بسامد داریم:

$$f = \frac{n}{t} \Rightarrow f = \frac{\frac{۳}{۴}}{۴-۲} \Rightarrow f = \frac{۳}{۸}\,Hz$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

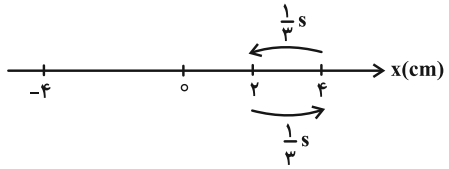
۶- **گزینهٔ «۴»** *(مهران اسماعیلی)*

ابتدا زمان لازم برای اولین بار رسیدن نوسانگر به نقطهٔ $x = ۲\,cm$ را به دست می‌آوریم:

$$x = ۰/۰۴\cos\pi t \xrightarrow{x=۲cm=۰/۰۲m} ۰/۰۲ = ۰/۰۴\cos\pi t$$

$$\Rightarrow \cos\pi t = \frac{۰/۰۲}{۰/۰۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \pi t = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow t = \frac{۱}{۳}\,s$$

با توجه به نمودار مسیر حرکت نوسانگر در امتداد محور x، ملاحظه می‌شود، نوسانگر در مدت $\frac{۱}{۳}s$ از نقطهٔ $x = ۴\,cm$ به نقطهٔ $x = ۲\,cm$ می‌رسد که بنابراین در مدت $\frac{۱}{۳}s$ از نقطهٔ $x = ۲\,cm$ به نقطهٔ $x = ۴\,cm$ نیز خواهد رسید.



پس حداقل زمان لازم برای دو عبور متوالی از نقطهٔ $x = ۲\,cm$ برابر $\frac{۲}{۳}s$ است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(مهران اسماعیلی)*

نوسانگر در لحظهٔ t_1 به نقطهٔ $x_1=-1cm$ و در لحظهٔ t_2 به نقطهٔ $x_2=\sqrt{3}cm$ رسیده است. با استفاده از معادلهٔ مکان- زمان حرکت هماهنگ ساده، می‌توان لحظات t_1 و t_2 را به دست آورد.

$$x_1=A\cos\frac{2\pi}{T}t_1 \xrightarrow{x_1=-1cm} -1=2\cos\frac{2\pi}{T}t_1$$

$$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}t_1=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}t_1=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})$$

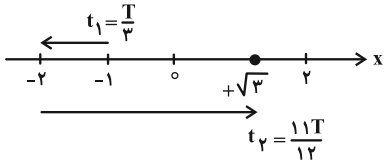
$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow t_1=\frac{T}{3}$$

$$x_2=A\cos\frac{2\pi}{T}t_2 \xrightarrow{x_2=\sqrt{3}\,cm} \sqrt{3}=2\cos\frac{2\pi}{T}t_2$$

$$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}t_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}t_2=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2=\frac{11\pi}{6}\Rightarrow t_2=\frac{11T}{12}$$

توجه شود که نوسانگر ابتدا به صورت کندشونده از نقطهٔ $x_1=-1cm$ عبور می‌کند. پس در حال دور شدن از مرکز نوسان است، یعنی فاز آن در ناحیهٔ دوم دایره مثلثاتی واقع است و وقتی برای اولین بار به نقطهٔ $x_2=+\sqrt{3}cm$ می‌رسد، دوباره در حال دور شدن از مرکز است که این بار فاز آن در ناحیهٔ چهارم دایره مثلثاتی واقع خواهد بود.



$$t_2-t_1=1/4s \xrightarrow[t_2=\frac{11T}{12}]{t_1=\frac{T}{3}} \frac{11T}{12}-\frac{T}{3}=1/4$$

$$\Rightarrow \frac{7T}{12}=1/4\Rightarrow T=2/4s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا با توجه به رابطهٔ تندی متوسط، مسافت طی شده توسط متحرک را در بازهٔ زمانی صفر تا $t=0/5s$ به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=0/5s]{s_{av}=32\frac{cm}{s}} \ell=32\times 0/5=16cm$$

با مقایسهٔ مسافت طی شده با دامنهٔ نوسان، داریم:

$$\begin{cases} x=0/02\cos\omega t \\ x=A\cos\omega t \end{cases}\Rightarrow A=0/02m=2cm$$

$$\frac{\ell}{A}=\frac{16}{2}\Rightarrow \ell=8A$$

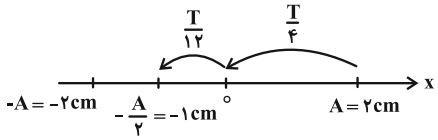
می‌دانیم که نوسانگر در مدت یک دورهٔ T، مسافت $4A$ را طی می‌کند. چون نوسانگر در بازهٔ زمانی $\Delta t=0/5s$ مسافت $8A$ را طی کرده است،

پس $\Delta t=2T$ است: $$T=\frac{\Delta t}{2}=\frac{0/5}{2}=0/25s$$

اکنون حساب می‌کنیم که بازهٔ زمانی صفر تا $t=\frac{1}{12}s$ چند برابر دورهٔ تناوب است:

$$\frac{\Delta t'}{T}=\frac{\frac{1}{12}}{0/25}=\frac{1}{3}\Rightarrow \Delta t'=\frac{T}{3}=\frac{T}{4}+\frac{T}{12}$$

با توجه به معادلهٔ حرکت نوسانگر، در لحظهٔ $t=0$ نوسانگر در مکان A قرار دارد و در لحظهٔ $\frac{1}{12}s$ به مکان $x=-1cm$ می‌رسد، در نتیجه سرعت متوسط نوسانگر برابر است با:

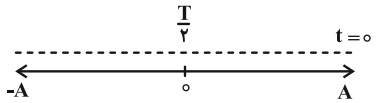


$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-1-2}{\frac{1}{12}}=\frac{-3}{\frac{1}{12}}=-36\frac{cm}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

در دو انتهای مسیر نوسانی (نقاط بازگشت)، اندازهٔ شتاب نوسانگر، بیشینه می‌شود.



$$\frac{T}{2}=\frac{1}{12}s\Rightarrow T=\frac{1}{6}s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{1}{6}}=12\pi\frac{rad}{s}$$

مسافتی که نوسانگر در مدت نصف دوره می‌پیماید، دو برابر دامنهٔ $(2A)$ است.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=\frac{1}{12}s\ ,\ \ell=2A]{s_{av}=60\frac{cm}{s}} 60=\frac{2A}{\frac{1}{12}}\Rightarrow 2A=5$$

$$\Rightarrow A=2/5cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir
df-xchang

معادلهٔ مکان- زمان نوسانگر را می‌نویسیم و مکان آن را در لحظه‌های $t_1 = 0$ و $t_2 = \frac{1}{9}s$ به دست می‌آوریم:

$$x = A\cos\omega t \xrightarrow[\omega = 12\pi \frac{rad}{s}]{A = 2/5\,cm} x = 2/5\cos(12\pi)t$$

$$t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2/5\cos 0 = 2/5\,cm$$

$$t_2 = \frac{1}{9}s \Rightarrow x_2 = 2/5\cos(12\pi \times \frac{1}{9}) = 2/5\cos\frac{4\pi}{3}$$

$$= 2/5 \times (-\frac{1}{2}) = -1/25\,cm$$

اکنون می‌توانیم اندازهٔ جابه‌جایی نوسانگر را حساب کنیم:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -1/25 - 2/5 = -3/75\,cm$$

$$\Rightarrow |\Delta x| = 3/75\,cm$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (مجتبی نکوئیان)

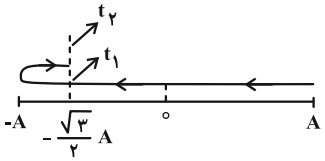
ابتدا از روی نمودار مکان- زمان، دورهٔ تناوب نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t) \xrightarrow[t = \frac{1}{2}s]{x = -\frac{\sqrt{2}}{2}A} -\frac{\sqrt{2}}{2}A = A\cos(\frac{2\pi}{T}(\frac{1}{2}))$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{T} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{4}{5}s$$

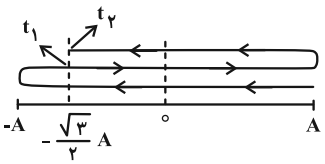
با توجه به این‌که نوسانگر در یک دورهٔ تناوب، دو بار متوالی از مکان $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌گذرد، می‌توان دو حالت زیر را در نظر گرفت:

حالت (۱):



$$-\frac{\sqrt{3}}{2}A = A\cos(\frac{2\pi}{T}t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{5}{12}T \\ \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{7}{12}T \\ \frac{t_2}{t_1} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

حالت (۲):



$$-\frac{\sqrt{3}}{2}A = A\cos(\frac{2\pi}{T}t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{7}{12}T \\ \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{11}{12}T \\ \frac{t_2}{t_1} = \frac{11}{7} \end{cases}$$

که حالت (۲) قابل قبول است، بنابراین:

$$t_2 = \frac{11}{12}T \xrightarrow{T = \frac{4}{5}s} t_2 = \frac{11}{15}s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۱۱- **گزینهٔ «۳»** (امیراحمد میرسعید)

در گام اول چون در صورت سؤال گفته شده $(K = 3U)$ پس می‌توان نوشت:

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow E = K_1 + \frac{K_1}{3} = \frac{4K_1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$v_{max}^2 = \frac{4}{3}v_1^2 \Rightarrow v_{max}^2 = \frac{4}{3} \times 3 = 4 \Rightarrow v_{max} = 2\frac{m}{s}$$

در گام دوم با توجه به این‌که $U_2 = 8K_2$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$E = K_2 + U_2 \Rightarrow E = K_2 + 8K_2 = 9K_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 = 9 \times \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_{max}^2 = 9v_2^2$$

$$\Rightarrow 4 = 9v_2^2 \Rightarrow v_2 = \frac{2}{3}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۷۲- **گزینهٔ «۳»** (محسن سلماسی‌ونر)

طول پاره‌خط $4\,cm$ است، پس $A = 2\,cm$. در هر ثانیه یک بار طول پاره‌خط را می‌رود، پس یک دور کامل یا یک رفت و برگشت، ۲ ثانیه طول خواهد کشید. $(T = 2s)$

$$v_{max} = A\omega = A.\frac{2\pi}{T} \Rightarrow v_{max} = 2 \times \frac{2\pi}{2} = 2\pi\frac{cm}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۷۳- **گزینهٔ «۴»** (علیرضا جباری)

اولین بار بعد از لحظهٔ $t = 0$ که انرژی جنبشی نوسانگر به صفر می‌رسد، نصف دورهٔ تناوب طی شده است.

$$\frac{T}{2} = 0/2 \Rightarrow T = 0/4\,s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\xrightarrow{T=0/4s}\omega=\frac{2\pi}{0/4}=5\pi\frac{rad}{s}$$

مسافت طی شده در دو نوسان کامل معادل ۸ برابر دامنه است، زیرا مسافت طی شده در هر نوسان کامل ۴ برابر دامنه است.

$$n=2\Rightarrow \ell=2(4A)=8A\xrightarrow{\ell=64cm}64=8A\Rightarrow A=8cm$$

اکنون انرژی مکانیکی نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\xrightarrow[A=8cm=8\times10^{-2}m\ ,\ \pi^2=10]{m=400g=0/4kg\ ,\ \omega=5\pi\frac{rad}{s}}$$

$$E=\frac{1}{2}\times0/4\times(8\times10^{-2})^2\times(5\pi)^2$$

$$\Rightarrow E=0/2\times64\times10^{-4}\times250=320\times10^{-3}J=320mJ$$

وقتی انرژی جنبشی صفر است، انرژی پتانسیل بیشینه بوده و با انرژی مکانیکی، برابر است. $U_{max}=E=320mJ$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به این‌که انرژی مکانیکی برابر با مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل کشسانی نوسانگر است، از روی شکل می‌توان گفت که انرژی جنبشی نوسانگر برابر با $90mJ$ است. پس:

$$K=E-U=U_{max}-U=90mJ$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow90\times10^{-3}=\frac{1}{2}m(9\times10^{-2})\Rightarrow m=2kg$$

با توجه به رابطهٔ تندی بیشینه و بسامد زاویه‌ای سامانه جرم- فنر می‌توان نوشت:

$$v_{max}=A\omega\xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}v_{max}=A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\xrightarrow[k=8\frac{N}{cm}=800\frac{N}{m},\ m=2kg]{v_{max}=4\times10^{-1}\frac{m}{s}}4\times10^{-1}=A\sqrt{\frac{8\times10^2}{2}}$$

$$\Rightarrow A=2\times10^{-2}m=2cm$$

نوسانگر در هر دورهٔ تناوب، مسافتی به اندازهٔ چهار برابر دامنه نوسان را طی می‌کند. بنابراین در دو دورهٔ تناوب داریم: $L=8A=8(2)=16cm$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمد مقدم)*

ابتدا با استفاده از نمودار، دورهٔ حرکت نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow-1=\sqrt{2}\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow t=\frac{T}{2}+\frac{T}{8}=\frac{5T}{8}=\frac{5}{12}\Rightarrow T=\frac{2}{3}s$$

حال با استفاده از رابطهٔ انرژی مکانیکی داریم:

$$\left.\begin{matrix}E=K+U\\U=\frac{80}{100}K\end{matrix}\right\}\Rightarrow E=K+0/8K\Rightarrow E=1/8K$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}mv^2\times1/8$$

$$\Rightarrow(\sqrt{2}\times10^{-2})^2\times(\frac{2\pi}{\frac{2}{3}})^2=1/8v^2$$

$$\Rightarrow v^2=\frac{2\times10^{-4}\times9\pi^2}{1/8}=10^{-2}\Rightarrow v=0/1\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

انرژی جنبشی نوسانگر هنگام گذر از حالت تعادل، بیشینه و برابر انرژی مکانیکی آن است.

$$\begin{cases}E=K_{max}=6J\Rightarrow E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\\\Rightarrow6=\frac{1}{2}\times0/3\times A^2\times400\pi^2\\\omega=2\pi f=20\pi\frac{rad}{s}\end{cases}$$

$$\Rightarrow40=A^2\times400\pi^2\Rightarrow A^2=\frac{0/1}{\pi^2}$$

$$\pi^2\simeq10\quad A^2=\frac{1}{100}\Rightarrow A=\frac{1}{10}m$$

بنابراین معادلهٔ حرکت را می‌توانیم بنویسیم:

$$x=A\cos\omega t=0/1\cos20\pi t$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(مهران اسماعیلی)*

در دو انتهای مسیر (نقاط برگشت)، انرژی جنبشی نوسانگر برابر صفر و نوسانگر در مکان بیشینهٔ خود، یعنی $x=\pm A$ است.

$$K=0/25-400x^2\xrightarrow[x=\pm A]{K=0}0=0/25-400A^2$$

$$\Rightarrow A^2=\frac{0/25}{400}\Rightarrow A=\frac{0/5}{20}=\frac{1}{40}m=2/5cm$$

اما در مرکز نوسان انرژی جنبشی نوسانگر بیشینه $(K=K_{max})$ و مکان نوسانگر برابر صفر است. $(x=0)$

$$K = ۰/۲۵ - ۴۰۰x^۲ \xrightarrow[x=۰]{K=K_{max}} K_{max} = ۰/۲۵ - ۴۰۰\times ۰$$

$$\Rightarrow K_{max} = ۰/۲۵J$$

$$K_{max} = \frac{۱}{۲}mv_{max}^۲ \xrightarrow[m=۲۰g=\frac{۲۰}{۱۰۰۰}kg]{K_{max}=۰/۲۵J}$$

$$۰/۲۵ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۲۰}{۱۰۰۰}v_{max}^۲ \Rightarrow v_{max}^۲ = ۲۵$$

$$\Rightarrow v_{max} = ۵\frac{m}{s} = ۵۰۰\frac{cm}{s}$$

$$v_{max} = A\omega \xrightarrow[v_{max}=۵۰۰\frac{cm}{s}]{A=۲/۵cm} ۵۰۰ = ۲/۵\omega$$

$$\Rightarrow \omega = ۲۰۰\frac{rad}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(مهران اسماعیلی)*

با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ ساده و رابطهٔ تعداد نوسان‌های کامل با دورهٔ نوسان‌ها داریم:

$$\begin{cases} T = ۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}} \\ n = \frac{t}{T} \Rightarrow \frac{n_۱}{n_۲} = \frac{T_۲}{T_۱} \end{cases}$$

از دو رابطهٔ بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\xrightarrow[n_۲=۴۰]{n_۱=۲۰} \frac{۲۰}{۴۰} = \sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{\ell_۲}{\ell_۱} \Rightarrow \ell_۲ = \frac{۱}{۴}\ell_۱$$

$$\text{درصد تغییر طول} = \frac{\Delta\ell}{\ell_۱}\times ۱۰۰ = \frac{\ell_۲ - \ell_۱}{\ell_۱}\times ۱۰۰$$

$$= \frac{\frac{۱}{۴}\ell_۱ - \ell_۱}{\ell_۱}\times ۱۰۰ = -\frac{۳}{۴}\times ۱۰۰ = -۷۵٪$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

ابتدا گرانش را در سطح سیاره با گرانش در سطح زمین مقایسه می‌کنیم:

$$\rho'_{\text{چگالی سیاره}} = ۳۲\rho \Rightarrow \frac{M'}{V'} = ۳۲\frac{M_e}{V_e}$$

$$M' = ۴M_e \Rightarrow V_e = ۸V' \ , \quad V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

$$\Rightarrow R_e = ۲R'$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{\frac{GM'}{R'^۲}}{\frac{GM_e}{R_e^۲}} = \frac{M'}{M_e}\times\frac{R_e^۲}{R'^۲} = ۴\times ۴ = ۱۶$$

با توجه به رابطهٔ $T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ که مربوط به دوره آونگ است، داریم:

$$\frac{T'}{T_e} = \frac{۲\pi\sqrt{\frac{L}{g'}}}{۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{g'}} \Rightarrow \frac{T}{۲} = \sqrt{\frac{۱}{۱۶}} \Rightarrow T' = \frac{۱}{۲}s$$

$$n = \frac{t}{T} = ۲۴\times\frac{۳۶۰۰}{۲} = ۴۳۲۰۰$$

$$n' = \frac{t}{T'} = ۲۴\times\frac{۳۶۰۰}{۰/۵} = ۱۷۲۸۰۰$$

$$n' - n = ۱۷۲۸۰۰ - ۴۳۲۰۰ = ۱۲۹۶۰۰$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

با توجه به گسترهٔ داده شده برای بسامد زاویه‌ای نوسان‌های میلهٔ افقی داریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \xrightarrow[g=۱۰\frac{N}{kg}]{\omega_۱=۴\frac{rad}{s}} ۴ = \sqrt{\frac{۱۰}{L_۱}}$$

$$\Rightarrow ۱۶ = \frac{۱۰}{L_۱} \Rightarrow L_۱ = ۰/۶۲۵m = ۶۲/۵cm$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \xrightarrow[g=۱۰\frac{N}{kg}]{\omega_۲=۵\frac{rad}{s}} ۵ = \sqrt{\frac{۱۰}{L_۲}} \Rightarrow ۲۵ = \frac{۱۰}{L_۲}$$

$$\Rightarrow L_۲ = ۰/۴m = ۴۰cm$$

در نتیجه می‌توان گفت در آونگ‌هایی که طول آن‌ها بین $۴۰cm$ و $۶۲/۵cm$ است، تشدید رخ می‌دهد و این آونگ‌ها با دامنهٔ بیشتری نوسان می‌کنند. در آونگ‌هایی که طول آن‌ها کوچک‌تر از $۴۰cm$ یا بزرگ‌تر از $۶۲/۵cm$ باشد، دامنهٔ نوسان کوچک‌تر است یعنی فقط در آونگ B تشدید رخ نمی‌دهد.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

فیزیک ۳

۱- **گزینهٔ «۴»** *(ریحانه آزادیان)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند بردار مکان نامیده می‌شود.

۲) این عبارت تعریف سرعت متوسط متحرک است نه تندی متوسط.

۳) اگر متحرک روی خط راست حرکت کند و تغییر جهت ندهد تندی و اندازهٔ سرعت متوسط برابر می‌شود.

۴) تندی لحظه‌ای همواره با اندازهٔ سرعت لحظه‌ای برابر است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲ تا ۹)

(مشابه نهایی خرداد ۱۴۰۳)

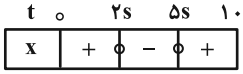
۲- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

هرگاه متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ عبور کند، جهت بردار مکان آن عوض می‌شود. ریشه‌های معادلهٔ مکان را به‌دست می‌آوریم:

$$x=0 \Rightarrow t^2-7t+10=0 \Rightarrow (t-2)(t-5)=0$$

$$\Rightarrow t_1=2s \ , \ t_2=5s$$

متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 از مبدأ مکان می‌گذرد. مکان متحرک را در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت تعیین علامت می‌کنیم:



بنابراین بین $t_1=2s$ تا $t_2=5s$ بردار مکان متحرک در سوی منفی است زیرا $x<0$ است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۴ تا ۸)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیراحمد میرسعید)*

بررسی موارد:

الف) نادرست است. از $t_1=6s$ تا $t_2=8s$ به مدت ۲ ثانیه ساکن بوده و از صفر تا ۵ ثانیه و نیز از $9s$ تا $13s$ متحرک به مدت ۹ ثانیه در قسمت منفی محور x بوده است.

ب) درست است. متحرک از $3s$ تا $5s$ و از $8s$ تا $9s$ به مبدأ نزدیک می‌شده و در لحظات $t=5s$ و $t=9s$ از مبدأ مکان عبور کرده و بردار مکان تغییر جهت داده است.

پ) نادرست است. بیشترین فاصله از مبدأ مکان یا همان مبدأ مختصات، $12m$ می‌باشد، ولی بیشترین فاصله از مبدأ حرکت $10+4=14m$ می‌باشد.

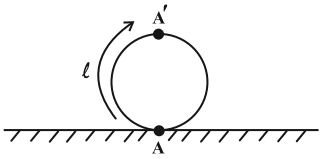
(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی شریفی)*

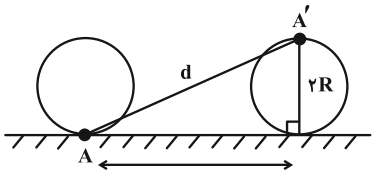
هنگامی که تندی متوسط از اندازهٔ سرعت متوسط بزرگ‌تر باشد به این معنی است که مسافت طی شده از اندازهٔ جابه‌جایی بزرگ‌تر است (نادرستی الف) و به همین دلیل متحرک تغییر جهت داده است پس برای تغییر جهت لازم است متحرک متوقف شده باشد (درستی پ)، اما الزاماً در مورد حرکت و عبور متحرک از مبدأ مکان $x=0$ صحبتی نشده است (نادرستی ب).

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمدکاظم منشادی)*



$$\ell=\pi R=3R$$



$$\ell=\pi R=3R$$

$$d=\sqrt{(2R)^2+(3R)^2}=\sqrt{13}R$$

$$\frac{d}{2R}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۳)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمد احمدی)*

اندازهٔ سرعت متوسط در ۳ ثانیهٔ چهارم $(9s \le t \le 12s)$ برابر است با:

$$|\vec{v}_{av}|=\frac{|\Delta \vec{x}|}{\Delta t}=\frac{4-2}{3}=\frac{2}{3}\frac{m}{s}$$

تندی متوسط در ۶ ثانیهٔ دوم $(6s \le t \le 12s)$ برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\text{مسافت پیموده شده}}{\text{زمان}}=\frac{14+2}{6}=\frac{8}{3}\frac{m}{s}$$

و داریم:

$$\frac{|\vec{v}_{av}|}{s_{av}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(سیده‌ملیحه میرصالحی)*

در لحظهٔ عبور از مبدأ مکان، $x=0$ می‌شود:

$$x=0 \Rightarrow t^2-9t+20=0 \Rightarrow (t-4)(t-5)=0$$

$$\Rightarrow t_1=4s \ , \ t_2=5s$$

بنابراین متحرک در لحظهٔ $t_1=4s$ برای اولین بار از مبدأ مکان عبور می‌کند.

$$t=0 \Rightarrow x=20m \qquad t=4s \Rightarrow x=0$$

سرعت متوسط متحرک در بازهٔ صفر تا $4s$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-20}{4}=-5\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ تا ۷)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_3-x_1}{t_3-t_1}=\frac{10-(-5)}{8-2}=\frac{15}{6}=2/5\frac{m}{s}$$

بنابراین مورد «ب» درست است. اما مورد «ت» نادرست است. زیرا بزرگی سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی معین، یکتا است و ذکر کلمهٔ حداقل برای آن بی‌معنی است. تندی متوسط حداقل را در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 حساب می‌کنیم:

$$(s_{av})_{min}=\frac{\ell_{min}}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=t_3-t_1=8-2=6s]{\ell_{min}=|10-13|+(13-(-5))=21m}$$

$$(s_{av})_{min}=\frac{21}{6}=3/5\frac{m}{s}$$

بنابراین مورد «پ» درست اما مورد «الف» درست نیست. زیرا برای تندی متوسط مقدارهای دیگری هم می‌توان در نظر گرفت.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ و ۴)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

هر سه متحرک A، B و C در بازهٔ زمانی صفر تا T جابه‌جایی‌های یکسانی دارند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta x_A=\Delta x_B=\Delta x_C}(v_{av})_A=(v_{av})_B=(v_{av})_C$$

رد گزینهٔ «۱».

متحرک‌های A و B در بازهٔ زمانی صفر تا T علاوه بر جابه‌جایی یکسان، مسافت‌های یکسانی را نیز پیموده‌اند و داریم:

$$\ell_A=\ell_B=\Delta x_A=\Delta x_B$$

$$\xrightarrow{s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}}(s_{av})_A=(s_{av})_B=(v_{av})_B=(v_{av})_B$$

رد گزینهٔ «۲».

برای مقایسهٔ تندی متوسط متحرک C با دو متحرک دیگر می‌توان نوشت:

$$\ell_C>\ell_B\xrightarrow{s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}}\left.\begin{matrix}(s_{av})_C>(s_{av})_B\\(v_{av})_B=(s_{av})_B\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow(s_{av})_C>(v_{av})_B$$

رد گزینهٔ «۳».

با توجه به روابط به‌دست آمده داریم:

$$\left.\begin{matrix}(v_{av})_A=(s_{av})_B\\(s_{av})_B<(s_{av})_C\end{matrix}\right\}\Rightarrow(v_{av})_A=(s_{av})_B<(s_{av})_C$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ و ۴)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(ریحانه آزادیان)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱ و ۴) چون زمان مشخص نیست نمی‌توان نظر قطعی داد.

گزینهٔ ۲) جابه‌جایی‌ها برابرند اما چون زمان‌ها برابر نیستند سرعت‌ها برابر نمی‌شوند.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲ تا ۹)

۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(رحمت‌اله خیراله‌زاده‌سماکوش)*

با توجه به شکل، جابه‌جایی متحرک از لحظهٔ $t_1=2s$ تا $t_2=4s$ برابر است با:

$$\begin{cases}t_1=2s\Rightarrow x_1=-4m\\t_2=4s\Rightarrow x_2=8m\end{cases}$$

سرعت متوسط: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{8-(-4)}{4-2}=\frac{12}{2}=6\frac{m}{s}$

مسافت طی شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1=2s$ تا $t_2=4s$ برابر است با:

$$4+8=12m$$

تندی متوسط: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{12}{2}=6\frac{m}{s}$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ تا ۸)

(مشابه تمرین ۱- ۲ صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

۱۲- **گزینهٔ «۴»** *(رحمت‌اله خیراله‌زاده‌سماکوش)*

ابتدا جابه‌جایی در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow-5\vec{i}=\frac{\Delta x}{8}\Rightarrow\Delta x_{t_2\text{ تا }0}=-40\vec{i}$$

سپس جابه‌جایی در بازهٔ زمانی صفر تا t_3 را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\frac{2}{3}\vec{i}=\frac{\Delta x}{12}\Rightarrow\Delta x_{t_3\text{ تا }0}=8\vec{i}$$

در نهایت جابه‌جایی و سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 برابر است با:

$$\Delta x_{t_3\text{ تا }0}=\Delta x_{t_2\text{ تا }0}+\Delta x_{t_3\text{ تا }t_2}$$

$$\Rightarrow8\vec{i}=-40\vec{i}+\Delta x_{t_3\text{ تا }t_2}\Rightarrow\Delta x_{t_3\text{ تا }t_2}=48\vec{i}$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{t_3\text{ تا }t_2}}{\Delta t}=\frac{48\vec{i}}{12-8}=\frac{48\vec{i}}{4}=12\vec{i}\,(\frac{m}{s})$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ و ۴)

۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(رحمت‌اله خیراله‌زاده‌سماکوش)*

در ابتدا سرعت لحظه‌ای در $t=10s$ را به‌دست می‌آوریم. سرعت لحظه‌ای در $t=10s$ برابر شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه است که به صورت خط‌چین در شکل رسم شده است.

$$v=\text{شیب خط مماس}=\frac{12-0}{10-6}=\frac{12}{4}=3\frac{m}{s}$$

چون سرعت لحظه‌ای در $t=10s$ برابر سرعت متوسط بین $t_1=4s$ تا $t_2=13s$ است پس:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow3=\frac{x_2-7}{13-4}\Rightarrow3=\frac{x_2-7}{9}\Rightarrow x_2-7=27$$

$$\Rightarrow x_2=34m\Rightarrow t=13s\text{ فاصلهٔ متحرک از مبدأ در لحظهٔ }=34m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۷ تا ۱۰)

(مکمل تمرین ۱-۳ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمد احمدی)*

در $t_1=2s$ متحرک در مکان $x_1=8cm$ و در $t_2=6s$ متحرک در مکان $x_2=16cm$ قرار دارد.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{16-8}{6-2}=2\frac{cm}{s}$$

و با توجه به نمودار جهت حرکت متحرک ۴ بار تغییر کرده است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

(مکمل پرسش ۱- ۳ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

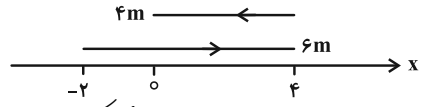
۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا نصیری)*

الف) نادرست؛ در لحظهٔ $t = ۱s$ متحرک از مبدأ مکان $(x = ۰)$ عبور کرده است.

ب) نادرست؛ در ثانیهٔ ششم (۵ تا ۶ ثانیه)، تندی حرکت ثابت است زیرا شیب خط مماس بر نمودار ثابت است. (در این بازه نمودار مکان- زمان به شکل خط راست است)

ج) درست؛ متحرک از مکان $x = -۲m$ در نهایت به مکان $x = ۰m$ رسیده یعنی جابه‌جایی $۲m$ است.

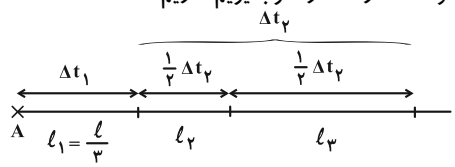
د) نادرست؛ مسیر حرکت مطابق شکل زیر است و متحرک مسافت $۱۰m$ را طی نموده است.



(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا خادمی)*

هنگامی که مسیر حرکت بخش‌بندی شده باشد، برای به‌دست آوردن تندی متوسط ابتدا باید زمان طی شده را در هر قسمت محاسبه کنیم. اگر کل مسافت پیموده شده را ℓ در نظر بگیریم، داریم:



$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_۱ = \frac{\ell_۱}{۳\Delta t_۱} = ۱۰ \Rightarrow \Delta t_۱ = \frac{\ell}{۳۰}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_۲ = \dfrac{\ell_۲}{\frac{۱}{۲}\Delta t_۲} = ۲ \Rightarrow \Delta t_۲ = \ell_۲ \\ s_۳ = \dfrac{\ell_۳}{\frac{۱}{۲}\Delta t_۲} = ۸ \Rightarrow \Delta t_۲ = \dfrac{\ell_۳}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow \ell_۲ = \frac{\ell_۳}{۴} \Rightarrow \ell_۳ = ۴\ell_۲$$

$$\Rightarrow \ell_۲ + \ell_۳ = \frac{۲}{۳}\ell \Rightarrow \ell_۲ = \frac{۲\ell}{۱۵}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t_{کل}} = \frac{\ell}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲} = \frac{\ell}{\frac{\ell}{۳۰} + \frac{۲\ell}{۱۵}} = \frac{\ell}{\frac{۵\ell}{۳۰}} = ۶\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ تا ۹)

۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(مهدی شریفی)*

در نمودار مکان- زمان سرعت متوسط برابر شیب خط واصل بین دو نقطه و سرعت لحظه‌ای برابر شیب خط مماس بر نمودار است. برابری سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به معنی هم‌شیب بودن و موازی بودن خطوط واصل و مماس است که مطابق شکل زیر سه بار رخ می‌دهد.



(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

(مکمل مثال ۱- ۷ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی شریفی)*

جابه‌جایی فقط به مکان اولیه و نهایی بستگی دارد:

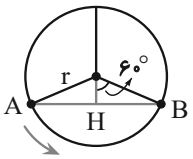
$$|\Delta x| = |x_۲ - x_۱| = ۶m$$

متحرک ابتدا در جهت مثبت محور x در حال حرکت بوده و برای آن‌که به مکان $۱۴m$ برسد قطعاً باید تغییر جهت داده باشد و به همین دلیل اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط برابر نیستند.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

ابتدا شکل مدار زمین را با فرض این‌که مسیر حرکت آن به دور خورشید پادساعتگرد است، رسم می‌کنیم و شعاع مدار را r می‌گیریم.



حال می‌خواهیم نسبت مسافت طی شدهٔ زمین را به جابه‌جایی آن در مدت ۴ ماه حساب کنیم. زمین در مدت ۴ ماه معادل $\frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$ دایرهٔ کامل مدارش را طی می‌کند، بنابراین مسافت طی شده یعنی طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره خواهد بود و داریم:

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{۲\pi r}{۳}$$

اما بزرگی جابه‌جایی برابر طول وتر AB است و مطابق شکل خواهیم داشت:

$$AB = ۲HB \xrightarrow{HB = r\sin ۶۰^\circ} AB = ۲r \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}r$$

در نهایت داریم:

$$\frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{بزرگی جابه‌جایی}} = \frac{\frac{۲\pi r}{۳}}{\sqrt{۳}r} = \frac{۲\pi}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲ و ۳)

۲۰- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب اول)*

شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان، سرعت را نشان می‌دهد که باید در شروع حرکت این شیب صفر باشد (گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴»). از طرفی چون در لحظهٔ t بایستی متحرک متوقف شود، شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه صفر است. در شروع حرکت متحرک در جهت مثبت محور حرکت می‌کند پس باید شیب خط مماس بر نمودار در بازهٔ زمانی صفر تا t مثبت باشد، بنابراین گزینهٔ «۴» صحیح است.

بررسی گزینهٔ «۲»: در شروع حرکت، شیب خط مماس بر نمودار، منفی است و متحرک در خلاف جهت مثبت محور حرکت می‌کند.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲ تا ۹)

(مشابه پرسش ۸ آخر فصل صفحهٔ ۲۶)

فیزیک ۳

۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا نصیری)*

هنگامی که سرعت منفی است، متحرک در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده است. (درستی گزینهٔ «۴»)

بررسی علت نادرستی سایر گزینه‌ها:

۱) در این بازهٔ اندازهٔ سرعت به صفر کاهش می‌یابد، پس حرکت کندشونده است.

۲) در این لحظات اندازهٔ سرعت به بیشینه مقدار خود رسیده است.

۳) در این بازه، تغییرات سرعت مخالف صفر است، پس شتاب متوسط صفر نیست.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۳)

(مکمل پرسش ۱۳ آفر فصل صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(علی برزگر)*

بردار مکان جسم، بعد از عبور از نقطهٔ $x=0$ تغییر جهت می‌دهد. برای تعیین علامت x، کافی است ریشه‌های معادله را تعیین کنیم:

$$x=t^3-8t^2+15t=t(t-3)(t-5)\Rightarrow\begin{cases}t_1=3\,s\\t_2=5\,s\\t_3=0\end{cases}$$

با تعیین علامت تابع می‌توان دید مکان متحرک در بازهٔ زمانی $t_1=3$ تا $t_2=5$ منفی است. پس متحرک تنها ۲ ثانیه در قسمت منفی محور x حرکت کرده و باقی مدت زمان ۱۰ ثانیه یعنی ۸ ثانیه دارای مکان مثبت بوده است. از طرفی چون معادلهٔ حرکت جسم دارای ۳ ریشهٔ قابل قبول است پس به راحتی می‌توان فهمید که متحرک حداقل ۲ بار تغییر جهت حرکت داشته است.

t	$-\infty$		0		3		5		$+\infty$
x		−	0	+	0	−	0	+	

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ تا ۸)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(مهران اسماعیلی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 سرعت مثبت است. یعنی متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند. اما چون مکان اولیهٔ متحرک مشخص نیست نمی‌توان در مورد دور یا نزدیک شدن متحرک به مبدأ مکان اظهارنظر قطعی کرد.

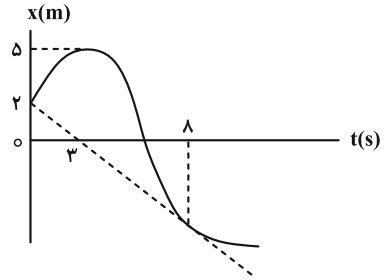
۲) نادرست؛ در لحظهٔ t_2 سرعت مثبت است و علامت سرعت تغییر نمی‌کند که متحرک تغییر جهت دهد.

۳) درست؛ در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 سرعت مثبت است. اما شیب نمودار سرعت- زمان که معرف شتاب متحرک است منفی می‌باشد. بنابراین بردار سرعت و شتاب در خلاف جهت یکدیگر هستند.

۴) نادرست؛ در بازهٔ زمانی t_3 تا t_4 سرعت متحرک منفی است. اما چون مکان اولیهٔ متحرک مشخص نیست نمی‌توان در مورد جهت بردار مکان اظهارنظر قطعی کرد.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۸ تا ۱۲)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(محمدکاظم منشاری)*



سرعت در لحظهٔ $t=8\,s$ برابر با شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در این لحظه می‌باشد. خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=8\,s$ دارای شیب منفی است و اندازهٔ شیب را به کمک مثلث تشکیل شده از ۰ تا ۳s می‌یابیم:

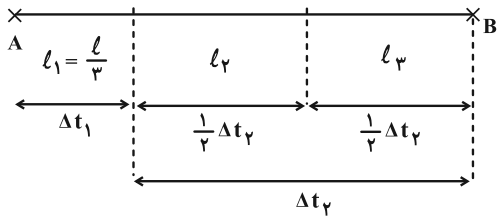
$$v_8=\frac{0-2}{3-0}=-\frac{2}{3}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۴ تا ۹)

(مشابه تمرین ۱- ۳ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا خادمی)*

هنگامی که مسیر حرکت بخش‌بندی شده باشد، جهت به دست آوردن تندی متوسط ابتدا باید زمان طی شده را در هر قسمت محاسبه کنیم. اگر کل مسافت پیموده شده را ℓ در نظر بگیریم، داریم:



$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av_1}=\frac{\ell_1}{\Delta t_1}\Rightarrow 10=\frac{\frac{1}{3}\ell}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{\ell}{30}$$

$$\left.\begin{aligned}s_{av_2}&=\frac{\ell_2}{\frac{1}{2}\Delta t_2}=2\Rightarrow \Delta t_2=\ell_2\\ s_{av_3}&=\frac{\ell_3}{\frac{1}{2}\Delta t_2}=8\Rightarrow \Delta t_2=\frac{\ell_3}{4}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \ell_2=\frac{\ell_3}{4}\Rightarrow \ell_3=4\ell_2$$

$$\Rightarrow \ell_2+\ell_3=\frac{2}{3}\ell\Rightarrow \ell_2=\frac{2\ell}{15}$$

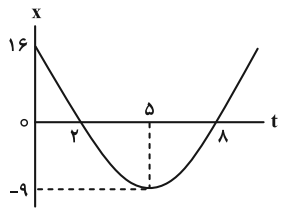
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_{کل}}=\frac{\ell}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{\ell}{\frac{\ell}{30}+\frac{2\ell}{15}}=\frac{\ell}{\frac{5\ell}{30}}=6\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ تا ۹)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی شریفی)*

ابتدا نمودار مکان- زمان متحرک را که یک سهمی است، رسم می‌کنیم.

در ۸s اول، از ۰ تا ۲s بردار مکان متحرک در جهت محور x و از ۲s تا ۸s بردار مکان متحرک خلاف جهت محور x است.



$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}=\frac{6s}{2s}=3$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا خادمی)*

از تعریف شتاب متوسط در بازهٔ (۶s ، ۱۸s) داریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{18}-v_6}{18-6}=\frac{12-15}{12}=-\frac{1}{4}\frac{m}{s^2}$$

در بازهٔ (۸s ، ۱۲s) داریم:

$$a_{av}=\frac{v_{12}-v_8}{12-8}=\frac{21-15}{4}=\frac{6}{4}=1/5\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

(مشابه تمرین ۱- ۵ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

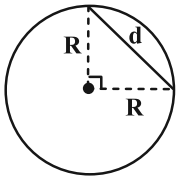
۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمدکاظم منشادی)*

مسافت طی شده در مدت ۹ ثانیه برابر است با:

$$\ell=s_{av}\times\Delta t=5\times9=45m$$

تعداد دورهایی که متحرک محیط دایره را می‌پیماید برابر است با:

$$N=\frac{\ell}{2\pi R}=\frac{45}{2\times3\times30}=\frac{1}{4}$$



$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{\sqrt{2}R}{\Delta t}=\frac{\sqrt{2}\times30}{9}=\frac{10\sqrt{2}}{3}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ تا ۵)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

رابطه‌های سرعت متوسط و تندی متوسط در این ۶ ثانیه را می‌نویسیم و اختلاف آن‌ها را برابر با $2\frac{m}{s}$ قرار می‌دهیم.

$$s_{av}-|v_{av}|=2\Rightarrow\frac{\ell}{\Delta t}-\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=2\xrightarrow[\Delta t=6s]{\ell=3|\Delta x|}$$

$$\frac{3|\Delta x|-|\Delta x|}{6}=2\Rightarrow2|\Delta x|=12\Rightarrow|\Delta x|=6m$$

اکنون می‌توانیم مسافت طی شده و تندی متوسط را به‌دست آوریم:

$$\ell=3|\Delta x|\xrightarrow{|\Delta x|=6m}\ell=3\times6=18m$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{18}{6}=3\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ و ۵)

(مکمل پرسش ۱- ۲ کتاب درسی)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(رحمت‌اله خیراله‌زاده‌سماکوش)*

بررسی موارد:

الف) هرگز نمی‌تواند رخ دهد؛ ثابت بودن بردار سرعت متحرک به این معنی است که اندازه و جهت سرعت ثابت است. بنابراین تندی متحرک نیز همواره ثابت و برابر با اندازهٔ سرعت خواهد بود.

ب) درست؛ اگر تندی حرکت ثابت باشد اندازهٔ سرعت متحرک ثابت است ولی جهت بردار سرعت می‌تواند تغییر کند و در نتیجه بردار سرعت تغییر خواهد کرد.

ج) درست؛ مطابق توضیح قسمت (ب) در حرکت با تندی ثابت، جهت سرعت می‌تواند تغییر کند و در نتیجه با تغییر بردار سرعت، حرکت شتابدار خواهد بود.

د) هرگز نمی‌تواند رخ دهد؛ در حرکت با سرعت ثابت، اندازه و جهت بردار سرعت همواره ثابت است، بنابراین بردار سرعت تغییری نخواهد کرد و در نتیجه حرکت شتابدار نخواهد بود.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۵ تا ۱۳)

۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی شریفی)*

سرعت در مرحلهٔ اول $4v$ و در مرحلهٔ دوم $4v+10$ است و چون جابه‌جایی‌ها برابر است:

$$\Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow4v\times10=(4v+10)\times8$$

$$\Rightarrow40v=32v+80\Rightarrow8v=80\Rightarrow v=10\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

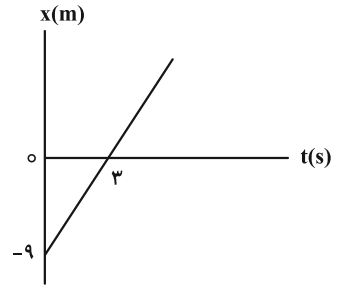
۱۲- **گزینهٔ «۴»** *(رحمت‌اله فیرالله‌زاده‌سماکوش)*

با توجه به این‌که حرکت با سرعت ثابت (حرکت یکنواخت) است، سرعت متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک است.

پس: $v_{av} = v = ۳\frac{m}{s}$

با توجه به این‌که متحرک در لحظهٔ $t = ۰$ در $x_۰ = -۹m$ قرار دارد، معادلهٔ حرکت متحرک به صورت مقابل است: $x = ۳t - ۹$

با توجه به این معادله می‌فهمیم که در $t = ۳s$، x مساوی صفر می‌شود. از طرفی شیب نمودار (ضریب t) نیز مثبت می‌باشد. بنابراین نمودار $x - t$ به صورت زیر می‌شود:



(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

(مشابه پرسش ۱۴ آخری فصل صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی)

۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(حسین الهی)*

در لحظهٔ $t = ۱۰s$ دو متحرک به هم می‌رسند:

$$\left.\begin{matrix} x_A = v_A t + ۱۰ \\ x_B = v_B t - ۱۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} t = ۱۰s \\ x_A = x_B \end{cases} \Rightarrow ۱۰v_A + ۱۰ = ۱۰v_B - ۱۵$$

$$\Rightarrow ۱۰(v_B - v_A) = ۲۵ \Rightarrow v_B - v_A = ۲/۵\frac{m}{s} \qquad (I)$$

در لحظهٔ t فاصلهٔ دو متحرک برابر ۵۰ است.

$$d = |x_A| + x_B \Rightarrow ۵۰ = |-۱۵| + x_B \Rightarrow x_B = ۳۵m$$

$$\begin{cases} ۳۵ = v_B t - ۱۵ \Rightarrow v_B t = ۵۰ \\ -۱۵ = v_A t + ۱۰ \Rightarrow v_A t = -۲۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین معادله بر هم}} \frac{v_B}{v_A} = -۲ \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{(II),(I)} -۳v_A = ۲/۵ \Rightarrow v_A = -\frac{۲۵}{۳۰} = -\frac{۵}{۶}\frac{m}{s} \Rightarrow v_B = \frac{۵}{۳}\frac{m}{s}$$

برای به‌دست آوردن لحظه‌ای که متحرک A از مبدأ مکان $(x = ۰)$ می‌گذرد، داریم:

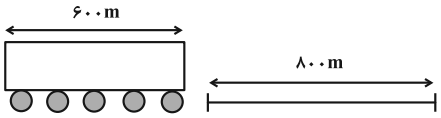
$$x_A = -\frac{۵}{۶}t + ۱۰ \xrightarrow{x=۰} -۱۰ = -\frac{۵}{۶}t \Rightarrow t = ۱۲s$$

در این لحظه مکان متحرک B برابر است با:

$$x_B = \frac{۵}{۳}t - ۱۵ \Rightarrow x_B = \frac{۵}{۳}(۱۲) - ۱۵ = ۲۰ - ۱۵ = ۵m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا خادمی)*



مدت زمان $t_۱$ مدت زمانی است که کل قطار از روی پل عبور خواهد کرد، یعنی جابه‌جایی آن $\Delta x = ۱۴۰۰m$ خواهد بود و مدت زمان $t_۲$، مدت زمانی است که تمام قطار روی پل خواهد بود، یعنی جابه‌جایی آن $\Delta x' = ۲۰۰m$ است.

$$\Delta x = vt_۱ \Rightarrow ۱۴۰۰ = ۴۰ \times t_۱ \Rightarrow t_۱ = ۳۵s$$

$$\Delta x' = vt_۲ \Rightarrow ۲۰۰ = ۴۰ \times t_۲ \Rightarrow t_۲ = ۵s$$

$$\Rightarrow t_۱ - t_۲ = ۳۰s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

نمودار مکان- زمان هر یک از دو متحرک A و B به صورت خط راست است، بنابراین سرعت هر یک از آن‌ها ثابت بوده و می‌توان نوشت:

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad x = vt + x_۰$$

$$v_A = \frac{۱۸ - ۱۰}{۶ - ۰} = \frac{۴}{۳}\frac{m}{s} \Rightarrow x_A = \frac{۴}{۳}t + ۱۰$$

$$v_B = \frac{۱۰ - ۰}{۶ - ۰} = \frac{۵}{۳}\frac{m}{s} \Rightarrow x_B = \frac{۵}{۳}t$$

اکنون معادلهٔ مکان دو متحرک را با هم برابر قرار می‌دهیم تا لحظه‌ای که آن دو به هم می‌رسند به‌دست آید:

$$x_A = x_B \Rightarrow \frac{۴}{۳}t + ۱۰ = \frac{۵}{۳}t \Rightarrow ۱۰ = \frac{۱}{۳}t \Rightarrow t = ۳۰s$$

مکان دو متحرک را در این لحظه پیدا می‌کنیم:

$$t = ۳۰s \Rightarrow x_A = x_B = \frac{۵}{۳} \times ۳۰ = ۵۰m$$

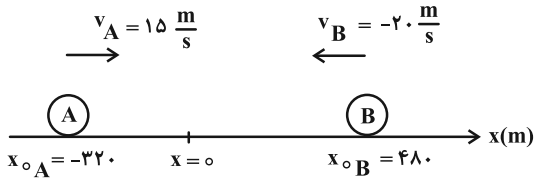
$$\Delta x_A = x_A - x_{۰A} = ۵۰ - ۱۰ = ۴۰m \Rightarrow \Delta \vec{x}_A = (۴۰m)\,\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

(مشابه پرسش ۱۶ آخر فصل صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی)

۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به شکل زیر، برای این‌که دو متحرک در فاصلهٔ ۵۲/۵ متری از یکدیگر قرار گیرند، می‌توان نوشت:



$$x_B - x_A = 52/5\,m \Rightarrow -20t_1 + 480 - 15t_1 + 320 = 52/5$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{800 - 52/5}{35}$$

$$x_A - x_B = 52/5\,m \Rightarrow 15t_2 - 320 + 20t_2 - 480 = 52/5$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{800 + 52/5}{35}$$

در نهایت اختلاف دو زمان t_1 و t_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$t_2 - t_1 = \frac{52/5}{35} + \frac{52/5}{35} = \frac{105}{35} = 3s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(حسین الهی)*

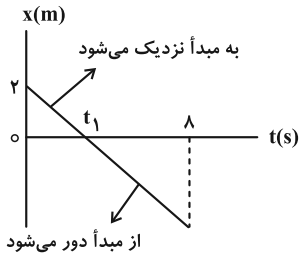
ساده‌ترین نوع حرکت، حرکت با سرعت ثابت است. در این نوع حرکت، اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۵)

۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(رحمت‌اله خیراله‌زاده‌سماکوش)*

مطابق شکل، از لحظهٔ $t = 0$ تا t_1، متحرک به مبدأ مکان نزدیک می‌شود و از لحظه t_1 تا $t = 8s$، از مبدأ مکان دور می‌شود. طبق صورت سؤال این متحرک ۶ ثانیه از حرکت را در حال دور شدن از مبدأ مکان بوده است.

بنابراین: $8 - t_1 = 6s \Rightarrow t_1 = 2s$



بنابراین متحرک در مدت زمان ۲s از مکان $x_0 = 2m$ به مبدأ مکان رسیده است:

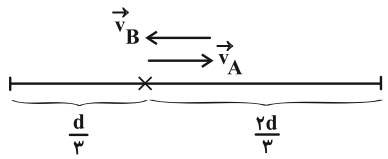
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0-2}{2-0} = -1\frac{m}{s} \quad , \quad x = vt + x_0$$

$$\xrightarrow{v=v_{av}} x = -t + 2 \xrightarrow{t=7s} x = -7 + 2 = -5m$$

$$\Rightarrow \vec{d}_1 = -5(m)\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱۹- **گزینهٔ «۲»** *(مهران اسماعیلی)*



اندازهٔ جابه‌جایی‌ها قبل از رسیدن دو اتومبیل به یکدیگر:

$$\begin{cases} \text{A اتومبیل}: \frac{d}{3} = v_A t \\ \text{B اتومبیل}: \frac{2d}{3} = v_B t \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{2d}{3}}{\frac{d}{3}} = \frac{v_B t}{v_A t} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = 2$$

اندازهٔ جابه‌جایی‌ها بعد از رسیدن دو اتومبیل به یکدیگر:

$$\begin{cases} \text{A اتومبیل}: \frac{2d}{3} = v_A t_A \\ \text{B اتومبیل}: \frac{d}{3} = v_B t_B \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{2d}{3}}{\frac{d}{3}} = \frac{v_A}{v_B} \times \frac{t_A}{t_B}$$

$$\xrightarrow[t_A = 60s]{\frac{v_A}{v_B} = \frac{1}{2}} 2 = \frac{1}{2} \times \frac{60}{t_B} \Rightarrow t_B = 15s$$

حال با نوشتن معادلهٔ $\Delta x = vt$ برای اتومبیل B، قبل از رسیدن به هم و بعد از رسیدن به هم داریم:

$$\text{B اتومبیل}: \begin{cases} \frac{2d}{3} = v_B t \\ \frac{d}{3} = v_B t_B \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{2d}{3}}{\frac{d}{3}} = \frac{t}{t_B}$$

$$\xrightarrow{t_B = 15s} 2 = \frac{t}{15} \Rightarrow t = 30s$$

$$\text{کل زمان حرکت اتومبیل B} = 15 + 30 = 45s$$

روش دوم: با استفاده از تناسب کافی است برای هر اتومبیل به‌طور مجزا تناسب تشکیل دهیم:

$$\text{A اتومبیل}: \begin{array}{c|c} \frac{2d}{3} & 60s \\ \hline \frac{d}{3} & t \end{array} \Rightarrow t = 30s$$

$$\text{B اتومبیل}: \begin{array}{c|c} \frac{2d}{3} & 30s \\ \hline \frac{d}{3} & t_B \end{array} \Rightarrow t_B = 15s$$

$$\text{کل زمان حرکت اتومبیل B} = 30 + 15 = 45s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود خندانی)*

چون تندی متحرک به $v = 0$ (محور زمان) نزدیک می‌شود، پس حرکت کندشونده است. از طرفی چون سرعت متحرک منفی است در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار سرعت- زمان (که برابر اندازهٔ شتاب است) در حال کاهش است.

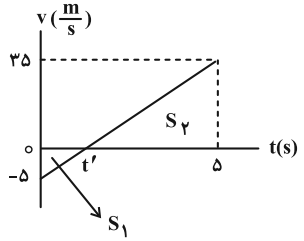
(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

فیزیک ۳

۱- **گزینهٔ «۳»** (محمدکاظم منشادی)

$$\begin{cases} x = 4t^2 - 5t + 8 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8\frac{m}{s^2} \\ v_0 = -5\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v = at + v_0$$

$$\Rightarrow v = 8t - 5 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow t' = \frac{5}{8}s$$

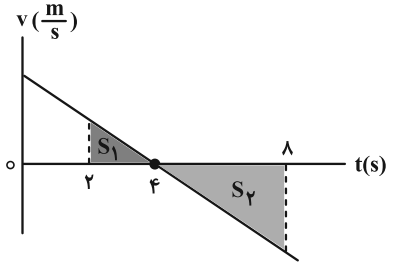


$$d = |S_1| + |S_2| = \frac{5 \times \frac{5}{8}}{2} + \frac{35 \times \frac{35}{8}}{2} = \frac{625}{8}m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۲- **گزینهٔ «۲»** (مسعود خندانی)

کافی است نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم کنیم.



با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{S_1}{S_2} = (\frac{2}{4})^2 = \frac{1}{4}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۳- **گزینهٔ «۲»** (علیرضا جباری)

اگر سرعت متحرک در ابتدا و انتهای مسیر را به ترتیب با v_0 و v نشان دهیم و سرعت آن در پایان مرحلهٔ اول v_1 باشد، رابطهٔ سرعت متوسط در دو مرحلهٔ حرکت به صورت زیر است:

$$\begin{cases} v_{av,1} = \frac{v_0 + v_1}{2} = 10 \Rightarrow v_0 + v_1 = 20\frac{m}{s} \\ v_{av,2} = \frac{v + v_1}{2} = 25 \Rightarrow v + v_1 = 50\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v - v_0 = 50 - 20 \Rightarrow v - v_0 = 30\frac{m}{s} \quad (I)$$

رابطهٔ سرعت متوسط را برای کل مسیر حرکت نیز می‌نویسیم و از آنجا رابطهٔ دیگری را بین v و v_0 پیدا می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\frac{\Delta x_1}{v_{av,1}} + \frac{\Delta x_2}{v_{av,2}}} \Rightarrow \frac{v_0 + v}{2} = \frac{\frac{1}{6}\Delta x + \frac{5}{6}\Delta x}{\frac{\frac{1}{6}\Delta x}{10} + \frac{\frac{5}{6}\Delta x}{25}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_0 + v}{2} = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{5}{150}} = \frac{1}{\frac{3}{60}} = 20\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow v_0 + v = 40\frac{m}{s} \quad (II)$$

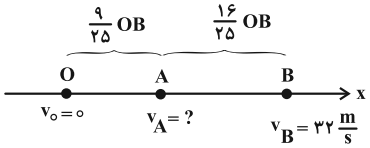
از تفریق دو رابطهٔ (I) و (II) داریم:

$$v_0 + v - (v - v_0) = 40 - 30 \Rightarrow v_0 = 5\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴- **گزینهٔ «۳»** (ابوالفضل نکومنشی‌نژاد)

روش اول: از رابطهٔ سرعت – جابه‌جایی برای حل این سوال کمک می‌گیریم:

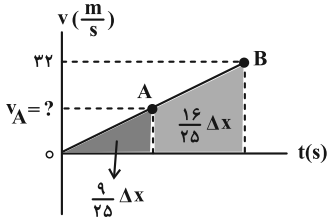


$$\begin{cases} OA: v_A^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \\ OB: v_B^2 - v_0^2 = 2a\Delta x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA: v_A^2 = 2a(\frac{9}{25}OB) \\ OB: 32^2 = 2a(OB) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div} \frac{v_A^2}{32^2} = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{v_A}{32} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow v_A = 19/2\frac{m}{s}$$

روش دوم: از نمودار $v-t$ برای حل مسئله کمک می‌گیریم (ثابت a، $v_0 = 0$) مسافت OB روی محور x برابر سطح زیر نمودار $v-t$ از O تا B است که آن را Δx درنظر می‌گیریم.



در دو مثلث متشابه داریم که مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{۹}{۲۵}$ مساحت مثلث بزرگ است.

$$\frac{S_{\text{بزرگ}}}{S_{\text{کوچک}}}=(\frac{۳۲}{v_A})^۲ \Rightarrow \frac{\Delta x}{\frac{۹}{۲۵}\Delta x}=(\frac{۳۲}{v_A})^۲$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \frac{۵}{۳}=\frac{۳۲}{v_A} \Rightarrow v_A=۱۹/۲\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌دست می‌آوریم. با توجه به نمودار، ریشه‌های معادله، $t=۴s$ و $t=۶s$ است. بنابراین داریم:

$$x=A(t-۴)(t-۶)=A(t^۲-۱۰t+۲۴)$$

$$\xrightarrow[x=۱۲m]{t=۰} ۱۲=A\times ۲۴ \Rightarrow A=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی برابر است با:

$$x=\frac{۱}{۲}(t^۲-۱۰t+۲۴) \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}t^۲-۵t+۱۲$$

۳ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از $۳s$ تا $۶s$، بنابراین مکان متحرک را در لحظهٔ $t=۳s$ محاسبه می‌کنیم:

$$x_۳=\frac{۱}{۲}\times ۹-۱۵+۱۲=۱/۵m$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک از $۳s$ تا $۶s$ برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۶-x_۳}{۶-۳}=\frac{۰-۱/۵}{۳}=-۰/۵\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow |v_{av}|=۰/۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(افشین مینو)*

از $x_۰=-۸m$ تا $x=۴۲m$ با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان داریم:

$$\Delta x=\frac{v_۱^۲-v_۰^۲}{۲a} \Rightarrow ۵۰=\frac{۱۵^۲-۵^۲}{۲a} \Rightarrow ۱۰۰a=۲۰۰ \Rightarrow a=۲\frac{m}{s^۲}$$

و با همان رابطه از $x_۰=-۸m$ تا $x=۲۹۲m$ داریم:

$$۳۰۰=\frac{v^۲-۵^۲}{۲a} \Rightarrow ۳۰۰=\frac{v^۲-۲۵}{۴} \Rightarrow v^۲=۱۲۲۵ \Rightarrow v=۳۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

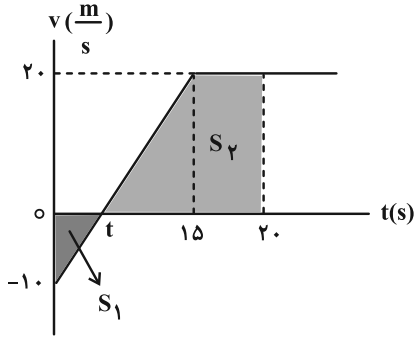
(مشابه پرسش ۲۰ آخر فصل صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

می‌دانیم که جابه‌جایی متحرک در یک بازهٔ زمانی برابر مساحت زیر نمودار سرعت- زمان در آن بازهٔ زمانی است. بنابراین ابتدا نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم می‌کنیم. در بازهٔ زمانی صفر تا $۱۵s$، حرکت با شتاب ثابت $a=۲\frac{m}{s^۲}$ صورت می‌گیرد، بنابراین داریم:

$$v=at+v_۰ \xrightarrow[v_۰=-۱۰\frac{m}{s}]{a=۲\frac{m}{s^۲},\ t=۱۵s} v_{۱۵}=۲\times ۱۵-۱۰=۲۰\frac{m}{s}$$

از لحظهٔ $۱۵s$ به بعد، شتاب برابر صفر است و حرکت با همان سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ ادامه می‌یابد:



با توجه به تعریف شتاب، لحظهٔ t را محاسبه می‌کنیم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۲=\frac{۰-(-۱۰)}{t} \Rightarrow t=۵s$$

اکنون جابه‌جایی متحرک را از لحظهٔ صفر تا $۲۰s$ محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x=-S_۱+S_۲=-(\frac{۱۰\times ۵}{۲})+\frac{(۵+۱۵)\times ۲۰}{۲}=-۲۵+۲۰۰=۱۷۵m$$

$$\Delta x=x_{۲۰}-x_۰ \xrightarrow{x_۰=-۱۲۰m} ۱۷۵=x_{۲۰}-(-۱۲۰)$$

$$\Rightarrow x_{۲۰}=۵۵m \Rightarrow \vec{x}_{۲۰}=۵۵(m)\vec{i}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(مهران اسماعیلی)*

ابتدا زمان به هم رسیدن دو اتومبیل را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور کافی است معادلهٔ مکان را برای اتومبیل اول بنویسیم. مبدأ و مکان را محل شروع حرکت اتومبیل اول یعنی نقطهٔ A فرض می‌کنیم.

$$x_۱=\frac{۱}{۲}a_۱t^۲+v_{۰۱}t+x_{۰۱} \xrightarrow[a_۱=۳\frac{m}{s^۲},\ x_۱=۶۰۰m]{x_{۰۱}=۰,\ v_{۰۱}=۰}$$

$$۶۰۰=\frac{۱}{۲}(۳)t^۲+۰+۰ \Rightarrow t^۲=۴۰۰ \Rightarrow t=۲۰s$$

حال با نوشتن معادلهٔ مکان برای اتومبیل دوم می‌توانیم فاصلهٔ AB را به‌دست آوریم:

$$x_۲ = \frac{۱}{۲}a_۲t^۲ + v_{۰۲}t + x_{۰۲} \xrightarrow[a_۲=۲\frac{m}{s^۲},\ x_۲=۶۰۰m]{x_{۰۲}=AB,\ v_{۰۲}=۰,\ t=۲۰s}$$

$$۶۰۰ = \frac{۱}{۲}(۲)(۲۰)^۲ + ۰ + AB \Rightarrow AB = ۲۰۰m$$

چون فاصلهٔ $۲۵۰m$ بیشتر از $AB = ۲۰۰m$ است، وقتی فاصلهٔ دو اتومبیل به $۲۵۰m$ می‌رسد که اتومبیل اول از اتومبیل دوم عبور کرده باشد یعنی $x_۱ > x_۲$، بنابراین:

$$x_۱ - x_۲ = ۲۵۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_۱t^۲ - (\frac{۱}{۲}a_۲t^۲ + AB) = ۲۵۰$$

$$\xrightarrow[AB=۲۰۰m]{a_۱=۳\frac{m}{s^۲},\ a_۲=۲\frac{m}{s^۲}} \frac{۱}{۲}(۳)t^۲ - (\frac{۱}{۲}(۲)t^۲ + ۲۰۰) = ۲۵۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}t^۲ - ۲۰۰ = ۲۵۰ \Rightarrow t^۲ = ۹۰۰ \Rightarrow t = ۳۰s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

حرکت هر دو متحرک را در جهت محور x در نظر می‌گیریم. حرکت هر دو متحرک با شتاب ثابت است. بنابراین ابتدا به کمک معادلات حرکت با شتاب ثابت، مکان و سرعت متحرک اول را پس از $۵s$ به‌دست می‌آوریم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \xrightarrow[v_۰=۰,\ x_۰=۰]{a=۲\frac{m}{s^۲},\ t=۵s}$$

$$x = \frac{۱}{۲}\times ۲ \times ۲۵ = ۲۵m$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۲\times ۵ + ۰ = ۱۰\frac{m}{s}$$

یعنی وقتی متحرک دوم شروع به حرکت می‌کند، متحرک اول در مکان $x_۰ = ۲۵m$ است و سرعت آن برابر $v_۰ = ۱۰\frac{m}{s}$ است. بنابراین معادلات مکان- زمان و سرعت- زمان این دو متحرک در لحظهٔ شروع حرکت متحرک دوم برابر است با:

$$\begin{cases} x_۱ = t^۲ + ۱۰t + ۲۵ \\ v_۱ = ۲t + ۱۰ \end{cases} , \quad \begin{cases} x_۲ = \frac{۱}{۲}\times ۴/۵t^۲ = \frac{۹}{۴}t^۲ \\ v_۲ = \frac{۹}{۲}t \end{cases}$$

در لحظه‌ای که سرعت دو متحرک برابر شود، $v_۱ = v_۲$ و در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، $x_۱ = x_۲$ است:

$$v_۱ = v_۲ \Rightarrow ۲t + ۱۰ = \frac{۹}{۲}t \Rightarrow t = ۴s$$

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow t'^۲ + ۱۰t' + ۲۵ = \frac{۹}{۴}t'^۲$$

$$\Rightarrow t'^۲ - ۸t' - ۲۰ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t' = ۱۰s & \text{ق ق} \\ t' = -۲s & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین اختلاف زمانی t و t' برابر است با: $t' - t = ۱۰ - ۴ = ۶s$

دقت کنید که زمان‌های t و t' بعد از ۵ ثانیهٔ اول محاسبه شده‌اند و اختلاف آن‌ها مدنظر است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(رحمت‌اله خیراله‌زاده‌سماکوش)*

در لحظهٔ $t = ۳s$ شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان صفر است. یعنی در این لحظه سرعت متحرک هم صفر است. پس برای بازهٔ زمانی $۳s$ تا $۷s$ داریم:

$$\Delta x_{۳-۷} = \frac{۱}{۲}a\Delta t^۲ + v_۳\Delta t$$

$$(۰ - ۴۸) = \frac{۱}{۲}\times a \times (۷-۳)^۲ + ۰ \times \Delta t \Rightarrow a = -\frac{۴۸}{۸} = -۶\frac{m}{s^۲}$$

از رابطهٔ $v = at + v_۰$ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم. برای $۳s$ اول حرکت می‌توان نوشت:

$$v_۳ = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۶\times ۳ + v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۱۸\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۰)

(مشابه مثال ۱- ۱۲ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

معادلهٔ جابه‌جایی قطار را برای ۴۴ متر اول حرکت و ۴ متر آخر حرکت می‌نویسیم تا زمان هر مرحله (t) و شتاب حرکت (a) را به‌دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} (\text{۴۴ متر اول حرکت})\ \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow ۴۴ = \frac{۱}{۲}at^۲ + ۲۴t \\ (\text{۴ متر آخر حرکت})\ \Delta x_۲ = -\frac{۱}{۲}at^۲ + vt \Rightarrow ۴ = -\frac{۱}{۲}at^۲ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۴۴ = -۴ + ۲۴t \Rightarrow t = ۲s$$

$$۴ = -\frac{۱}{۲}at^۲ \xrightarrow{t=۲s} ۴ = -\frac{۱}{۲}a(۲)^۲ \Rightarrow a = -۲\frac{m}{s^۲}$$

رابطهٔ سرعت – جابه‌جایی را برای کل مسیر حرکت تا توقف کامل $(v = ۰)$ می‌نویسیم و جابه‌جایی قطار را حساب می‌کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[a=-2\frac{m}{s^2}]{v=0\ ,\ v_0=24\frac{m}{s}} 0-(24)^2 = 2(-2)\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{24\times 24}{4} = 144\,m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا نصیری)

در مدت زمان واکنش: $\Delta x_{\text{واکنش}} = vt = \frac{72}{3/6}\times 0/5 = 10\,m$

پس فاصلهٔ اتومبیل با مانع به ۴۸ متر رسیده و ترمز عمل کرده و تندی اتومبیل شروع به کاهش می‌کند. فرض کنیم تصادف رخ نمی‌دهد یعنی $v = 0$ خواهد بود: $\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow \Delta x = \frac{0-20^2}{2\times(-4)} = 50\,m$

پس قبل از مانع نمی‌تواند متوقف شود و تصادف رخ می‌دهد. برای تعیین سرعت برخورد این بار می‌دانیم که $\Delta x = 48\,m$ است:

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow 48 = \frac{v^2 - 20^2}{2\times(-4)} = -384 = v^2 - 400$$

$$\Rightarrow v^2 = 16 \Rightarrow v = 4\frac{m}{s}$$ (تندی برخورد)

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۳- **گزینهٔ «۱»** (مهری شریفی)

تندی گلوله هنگام برخورد به زمین را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av} = |v_{av}| = 10\frac{m}{s} \Rightarrow v_{av} = -10\frac{m}{s} \Rightarrow -10 = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow{\Delta t = 1s} \Delta y = -10\,m$$

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \Rightarrow -10 = -\frac{1}{2}\times 10\times 1^2 + v_0\times 1 \Rightarrow v_0 = -5\frac{m}{s}$$

سرعت یک ثانیه قبل از برخورد به زمین برابر $-5\frac{m}{s}$ است. از طریق رابطهٔ $v = -gt + v_0$، سرعت هنگام برخورد به زمین برابر است با:

$$v = -10\times 1 - 5 = -15\frac{m}{s}$$

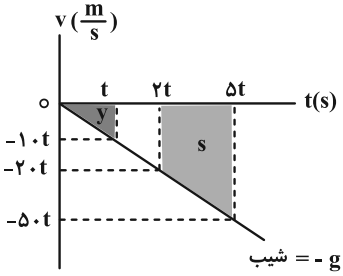
با استفاده از معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی، داریم: $v_2^2 - v_1^2 = -2g\Delta y$

$$(-15)^2 - 0 = -2\times 10\times \Delta y \Rightarrow 225 = -20\Delta y \Rightarrow \Delta y = -11/25\,m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۴- **گزینهٔ «۴»** (مهری شریفی)

با توجه به اطلاعات مسئله نمودار سرعت- زمان گلوله را رسم می‌کنیم:



با استفاده از سطح زیر نمودار، داریم: $y = \frac{t\times 10t}{2} = 5t^2$

$$\frac{s}{y} = \frac{\frac{(20t+50t)\times 3t}{2}}{5t^2} = 21$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

(مشابه مثال ۱- ۱۶ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** (مهران اسماعیلی)

ابتدا کل زمان حرکت گلوله تا رسیدن به زمین را محاسبه می‌کنیم:

$$v = -gt \xrightarrow[v=-50\frac{m}{s}]{g=10\frac{m}{s^2}} -50 = -10t \Rightarrow t = 5\,s$$

اگر کل زمان حرکت گلوله ۵ s باشد، ۳ ثانیهٔ آخر حرکت بین دو لحظهٔ $t_1 = 2s$ و $t_2 = 5s$ خواهد بود. کافی است مکان گلوله را در لحظات $t_1 = 2s$ و $t_2 = 5s$ محاسبه کنیم:

$$y_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 \xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2}]{t_1=2s} y_1 = -\frac{1}{2}\times 10\times 2^2 = -20\,m$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 \xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2}]{t_2=5s} y_1 = -\frac{1}{2}\times 10\times 5^2 = -125\,m$$

حال می‌توان جابه‌جایی گلوله را بین دو لحظهٔ $t_1 = 2s$ و $t_2 = 5s$ محاسبه کرد:

$$\Delta y = y_2 - y_1 \xrightarrow[y_2=-125\,m]{y_1=-20\,m} \Delta y = -125-(-20) = -105\,m$$

سرعت متوسط گلوله در ۳ ثانیهٔ آخر حرکتش برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{105}{3} = -35\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow s_{av} = 35\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

SanjeshCloud

۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

حرکت گلوله با شتاب ثابت صورت می‌گیرد. در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط، میانگین سرعت ابتدا و انتهای یک بازهٔ زمانی است. چون گلوله تغییر جهت نمی‌دهد، پس بزرگی سرعت متوسط با تندی متوسط برابر است. با انتخاب جهت مثبت به طرف پایین، سرعت برخورد گلوله با زمین را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{v_0+v}{2}\Rightarrow 12=\frac{0+v}{2}\Rightarrow v=24\frac{m}{s}$$

اگر فرض کنیم که گلوله با تندی $24\frac{m}{s}$ از سطح زمین به طرف بالا پرتاب شود، جابه‌جایی گلوله در یک ثانیهٔ اول حرکت با استفاده از معادلهٔ مکان-زمان در حرکت با شتاب ثابت، برابر است با:

$$\Delta y=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[v_0=-24\frac{m}{s}\ ,\ t=1s]{a=g=10\frac{m}{s^2}}$$

$$\Delta y=\frac{1}{2}\times 10\times 1-24=-19m$$

بنابراین مسافت طی شده در یک ثانیه برابر $\ell=19m$ است. توجه کنید که چون جهت مثبت را به طرف پایین گرفتیم، شتاب حرکت را که همان شتاب گرانشی است، مثبت و سرعت اولیهٔ پرتاب به طرف بالا را منفی قرار دادیم.

به عنوان روش دوم، توجه کنید که تندی گلوله ۱ ثانیه قبل از برخورد به زمین برابر $24-10=14\frac{m}{s}$ است و داریم:

$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{14+24}{2}=19\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow|\Delta x|=v_{av}\Delta t=19\times 1=19m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیراحمد میرسعید)*

گلولهٔ A پس از $5s$ مسافت Δy_1 را طی می‌کند:

$$\Delta y_1=\frac{1}{2}gt_1^2+v_0t_1=-5\times 25+0=-125m$$

یعنی، گلولهٔ A به زمین برخورد کرده است: $125m>80m$

چون گلولهٔ B، ۲ ثانیه بعد رها شده یعنی ۳ ثانیه در مسیر بوده است:

$$\Delta y_2=\frac{1}{2}gt_2^2+v_0t_2=-5\times 9+0=-45m$$

و گلولهٔ B، ۴۵ متر را در مدت ۳ ثانیه می‌پیماید و فاصلهٔ ۲ گلوله از هم ۳۵ متر می‌شود: $80-45=35m$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

(مکمل پرسش ۲۴ آخر فصل صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(سیده‌ملیحه میرصالحی)*

ابتدا از معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی سرعت سنگ را در لحظهٔ رسیدن به زمین به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=-2g\Delta y\xrightarrow[\Delta y=-16/2m]{v_0=0}v^2=-2(10)\times(-16/2)=324$$

$$\Rightarrow|v|=18\frac{m}{s}$$

از معادلهٔ جابه‌جایی- زمان با سرعت نهایی داریم:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2+vt\Rightarrow\Delta y=\frac{1}{2}(10)\times(0/5)^2-18(0/5)$$

$$\Rightarrow\Delta y=-7/75m$$

روش دوم: ابتدا کل مدت زمان سقوط را می‌یابیم:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow -16/2=-\frac{1}{2}\times 10\times^2\Rightarrow t=1/8s$$

جابه‌جایی گلوله تا ۰/۵ ثانیه قبل از رسیدن به زمین یعنی لحظهٔ $t'=1/3s$ را می‌یابیم:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}\times 10\times(1/3)^2=-8/45m$$

بنابراین ارتفاع گلوله از سطح زمین در این لحظه برابر است با:

$$h=16/2-8/45=7/75m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۹- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

با استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی- زمان در حرکت سقوط آزاد، خواهیم داشت:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2\xrightarrow[g=9/8\frac{m}{s^2}]{\Delta y=-0/441m}-0/441=-\frac{1}{2}\times 9/8t^2$$

$$\Rightarrow t^2=0/09\Rightarrow t=0/3s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحهٔ ۲۴)

(مشابه سوال ۴ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۲ و مشابه تمرین ۱- ۱۲ صفحهٔ ۲۴ کتاب درسی)

۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(حسام نادری)*

نمودار $v-t$ داده شده یک خط راست با شیب ثابت و منفی است، بنابراین بیانگر یک حرکت با شتاب ثابت و منفی است که نمودار $x-t$ آن یک سهمی با تقعر (گودی) به سمت پایین می‌باشد. از طرفی در لحظهٔ t_1 سرعت متحرک صفر شده است، پس در نمودار $x-t$ باید در لحظهٔ t_1 شیب خط مماس بر نمودار صفر باشد. در نمودار گزینهٔ «۱» این شرایط برقرار است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحهٔ ۲۰)

(مشابه سوال ۲ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)

فیزیک ۳

۱- **گزینهٔ «۲»** *(علی برزگر)*

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ نیروی پیشران قایق، از طرف آب به قایق وارد می‌شود، لذا نیروی عکس‌العمل آن به آب وارد می‌شود.

ب) نادرست؛ اگر نیروی مقاومت آب برابر صفر بود، نیروی برایند وارد به قایق برابر نیروی پیشران بوده و لذا $F_{net} \neq 0$ می‌شود. در نتیجه $a \neq 0$ بوده و سرعت ثابت نمی‌شود.

پ) درست

ت) نادرست؛ نیروی مقاومت شاره از آب به قایق و عکس‌العمل آن از قایق به آب وارد می‌شود.

ث) نادرست؛ نیروی شناوری از طرف آب به قایق وارد می‌شود، لذا عکس‌العمل آن نیز بین آب و قایق بوده و از قایق به آب وارد می‌شود، در حالی که نیروی وزن از طرف زمین به قایق وارد می‌شود.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی شریفی)*

جسم ساکن است، پس برایند نیروهای وارد بر آن صفر می‌شود:

$$F_{net} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2\vec{i} + 3\vec{i} + F_{3,x}\vec{i} \\ 0 = -3\vec{j} + 4\vec{j} + F_{3,y}\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_3 = -5\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -5\vec{i} - \vec{j} = 2\times\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -2/5\,\vec{i} - 0/5\,\vec{j}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(ریحانه آزادیان)*

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$

$$\vec{F}_{net} = 3\vec{F}_1 + 3\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -3\vec{F}_3 + \vec{F}_3 = -2\vec{F}_3$$

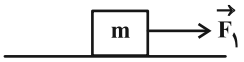
$$|\vec{F}_{net}| = 2\times 12 = 24\,N$$

$$a = \frac{|\vec{F}_{net}|}{m} = \frac{24}{4} = 6\,\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

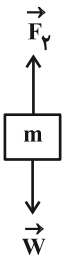
۴- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

وقتی جسم تحت تاثیر نیروی افقی $\vec{F}_1$ روی سطح افقی بدون اصطکاک به حرکت درمی‌آید، داریم:



$$F_1 = ma$$

وقتی جسم تحت تاثیر نیروی قائم $\vec{F}_2$ و رو به بالا به حرکت درمی‌آید، داریم:



$$F_2 - W = ma$$
$$\Rightarrow F_2 = W + ma$$

بنابراین اختلاف اندازهٔ دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به اندازهٔ وزن جسم است.

$$F_2 - F_1 = W + ma - ma = W \Rightarrow F_2 - F_1 = mg = 0/6\times 10 = 6N$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۳ تا ۳۵)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا نصیری)*

تا قبل از باز کردن چتر، نیروی وزن $(m\vec{g})$ از نیروی مقاومت هوا بیشتر است. پس نیروی خالص و در نتیجه شتاب هم‌جهت با سرعت رو به پایین است که باعث می‌شود حرکت تندشونده باشد. با افزایش تندی، نیروی مقاومت هوا (f_D) افزایش یافته و در نتیجه باعث می‌شود اختلاف نیروهای وزن و مقاومت هوا کمتر شده و با کاهش نیروی خالص، شتاب نیز کاهش یابد.



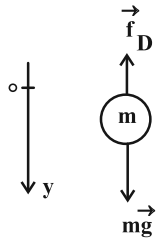
(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

(مشابه پرسش ۷ آخر فصل صفحهٔ ۵۷)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

اگر جهت مثبت محور y را رو به پایین انتخاب کنیم، می‌توان قانون دوم نیوتون را برای هر گوی نوشت و شتاب حرکت آن را به‌دست آورد:

SanjeshCloud



$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - f_D = ma \Rightarrow a = \frac{mg - f_D}{m}$$

$$a_A = \frac{m_A g - f_D}{m_A} \xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2},\ f_D=1/2N]{m_A=600g=0/6kg} a_A = \frac{0/6\times10 - 1/2}{0/6} = 8\frac{m}{s^2}$$

$$a_B = \frac{m_B g - f_D}{m_B} \xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2},\ f_D=1/2N]{m_B=1200g=1/2kg} a_B = \frac{1/2\times10 - 1/2}{1/2} = 9\frac{m}{s^2}$$

طبق رابطهٔ سرعت- جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، می‌توانیم بنویسیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y \xrightarrow{v_0=0} v^2 = 2a\Delta y \Rightarrow v = \sqrt{2a\Delta y}$$

اکنون می‌توانیم نسبت تندی گوی A به تندی گوی B در لحظهٔ رسیدن به زمین را حساب کنیم:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{2a_A\Delta y_A}}{\sqrt{2a_B\Delta y_B}} \xrightarrow{\Delta y_A = \Delta y_B} \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۳۷)

(مشابه مثال ۲- ۵ صفحهٔ ۳۷ کتاب درسی)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیراحمد میرسعید)*

چون $360N$ از $600N$ کمتر است، می توان نوشت:

$$F_N = m(g-a) \Rightarrow 360 = 60(10-a) \Rightarrow a = 4\frac{m}{s^2}$$

جهت حرکت آسانسور می تواند هم رو به بالا باشد هم رو به پایین ولی جهت شتاب قطعاً رو به پایین است و از قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_{net} = 60\times4 = 240N$$

پس موارد ب، پ و ت درست است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۹)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(رحمت‌اله خیراله‌زاده‌سماکوش)*

زمانی جسم شروع به حرکت می‌کند که نیروی پیشران $\vec{F}$ به مقدار خیلی خیلی کمی بیشتر از نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه شود، پس در این لحظه $F = f_{s,max}$ است:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{F_N=W} f_{s,max} = 0/9\times(5\times10) = 45N$$

پس:

$$F = f_{s,max} = 45 \Rightarrow 0/6t = 45 \Rightarrow t = 75s$$

وقتی F بیشتر از $f_{s,max}$ شد و جسم شروع به حرکت کرد، نیروی اصطکاک از نوع نیروی اصطکاک جنبشی می‌شود و برای لحظه‌ای بعد از شروع حرکت داریم:

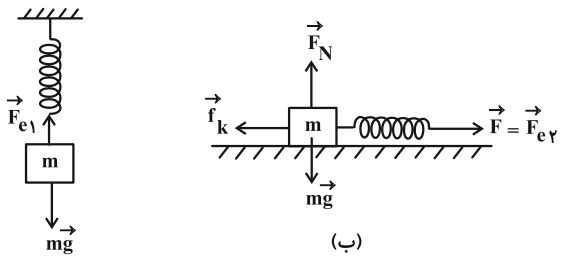
$$F_{net} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow F - \mu_k F_N = ma$$

$$\xrightarrow{F_N=W} 45 - 0/6\times50 = 5\times a \Rightarrow 15 = 5\times a \Rightarrow a = 3\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(رحمت‌اله خیراله‌زاده‌سماکوش)*

در شکل‌های زیر، نیروهای وارد بر جسم را در دو حالت مشخص کرده‌ایم. در حالت (الف) نیروی کشسانی فنر، نیروی وزن را خنثی می‌کند و در حالت (ب) هم چون سرعت جسم ثابت است، نیروی خالص صفر می‌شود. بنابراین نیروی کشسانی فنر با نیروی اصطکاک جنبشی به توازن می‌رسد. پس داریم:



(الف) (ب)

حالت (الف):

$$F_{e1} = mg$$

حالت (ب):

$$F_{e2} = f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} F_{e1} = kx_1 = k(L_1 - L_0) \\ F_{e2} = kx_2 = k(L_2 - L_0) \end{cases} \Rightarrow \Delta F = k\Delta L$$

$$\Rightarrow F_{e1} - F_{e2} = k(L_1 - L_2) \Rightarrow mg - \mu_k mg = k(L_1 - L_2)$$

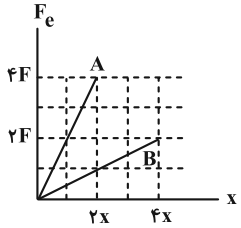
$$mg(1-\mu_k)=k(L_1-L_2)\Rightarrow 200\times10^{-3}\times10\times(1-\mu_k)$$

$$=25\times(32-30)\times10^{-2}\Rightarrow\mu_k=\frac{3}{4}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** (مسعود غدانی)

براساس شکل زیر داریم:



$$\begin{cases} A\ \text{شیب}=k_A=\dfrac{4F}{2x}=\dfrac{2F}{x} \\ B\ \text{شیب}=k_B=\dfrac{2F}{4x}=\dfrac{F}{2x} \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{k_A}{k_B}=\frac{\frac{2F}{x}}{\frac{F}{2x}}=4$$

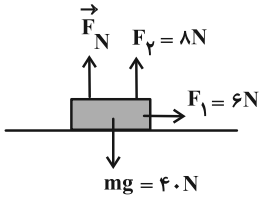
(فیزیک ۳- صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

(مکمل فعالیت ۲- ۴ صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی و مرتبط با شکل ۲- ۱۶ صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی)

۱۱- **گزینهٔ «۴»** (محمد احمدی)

$$F_N=mg-F_2=40-8=32\,N$$

$$f_{s,max}=\mu_s F_N=0/6\times32=19/2\,N$$

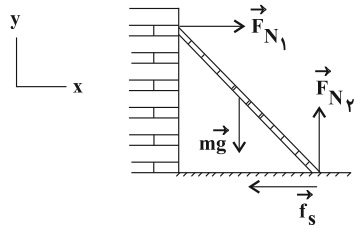


$F_1<f_{s,max}$، پس جسم در این حالت بدون حرکت باقی می‌ماند و شتاب حرکت صفر است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۹ تا ۴۶)

۱۲- **گزینهٔ «۴»** (زهره آقامحمدی)

ابتدا همهٔ نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم. چون نردبان ساکن است، نیروی خالص وارد بر آن صفر است و طبق قانون دوم نیوتون داریم:



$$F_{net}=0\Rightarrow\begin{cases} x: F_{N_1}=f_s \\ y: F_{N_2}=mg=45\times10=450\,N \end{cases}$$

نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، برایند دو نیروی عمود بر هم F_{N_2} و f_s است:

$$R=\sqrt{f_s^2+F_{N_2}^2}\xrightarrow[F_{N_2}=450N]{R=90\sqrt{34}N}$$

$$f_s=\sqrt{(90^2\times34)-(450)^2}$$

$$\Rightarrow f_s=90\sqrt{34-25}=90\times3=270\,N$$

در نتیجه نیرویی که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند برابر $F_{N_1}=270\,N$ است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

(مشابه مثال ۲- ۱۰ صفحهٔ ۴۵ کتاب درسی)

۱۳- **گزینهٔ «۴»** (علیرضا جباری)

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ با افزایش تندی جسم درون شاره، نیروی مقاومت شارهٔ وارد بر آن افزایش می‌یابد.

ب) درست؛ حتی یک زمین به ظاهر سفت و سخت نیز وقتی جسمی روی آن قرار می‌گیرد، تغییر شکل می‌دهد. این تغییر شکل مربوط به نیروهای بین مولکولی است.

پ) نادرست؛ مطابق جدول ۲- ۱ در صفحهٔ ۴۲ کتاب درسی فیزیک ۳ ضریب اصطکاک ایستایی بین مس و چدن ۱/۰۵ است. بنابراین ضریب اصطکاک ایستایی می‌تواند بیشتر از یک باشد.

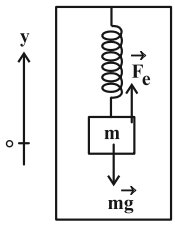
ت) درست، شتاب حرکت جسم الزاماً در جهت نیروی خالص وارد بر آن است. نیروی خالص وارد بر جسم نیز ممکن است در راستای حرکت یا عمود بر آن نباشد.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۴، ۳۶، ۳۷ و ۴۲)

۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

جهت مثبت را رو به بالا انتخاب می‌کنیم. قانون دوم نیوتون را در دو حالت سکون و حرکت با شتاب ثابت آسانسور می‌نویسیم:

$$F_{net} = ma$$



حالت اول: $F_e - mg = ma = 0 \Rightarrow kx - mg = 0$

$$\xrightarrow[x=15-11=4cm]{m=2/5kg\ ,\ g=10\frac{N}{kg}} 4k = 25 \Rightarrow k = \frac{25}{4}\frac{N}{cm}$$

حالت دوم: $F_e - mg = ma \xrightarrow[a=1\frac{m}{s^2}\ ,\ k=\frac{25}{4}]{m=2/5kg\ ,\ g=10\frac{N}{kg}}$

$$\frac{25}{4}x' - 25 = 2/5 \Rightarrow \frac{1}{4}x' - 1 = 0/1 \Rightarrow x' = 4/4cm$$

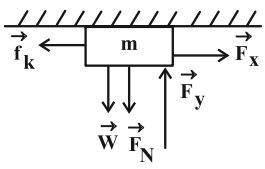
و طول نهایی فنر برابر است با:

$$L_2 = L_1 + x' = 11 + 4/4 = 15/4cm$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نشان می‌دهیم. $\vec{F}_x$ و $\vec{F}_y$ مولفه‌های افقی و قائم نیروی $\vec{F}$ هستند. نیروی عمودی سطح $(\vec{F}_N)$ و نیروی وزن $(\vec{W})$ رو به پایین بر جسم اثر می‌کنند و چون حرکت به طرف راست است، نیروی اصطکاک $(\vec{f}_k)$ به طرف چپ است. نیروی خالص وارد بر جسم در راستای قائم صفر است. بنابراین می‌توان نوشت:



$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_y - F_N - W = 0 \xrightarrow[F_y=24N]{W=mg=2\times10=20N}$$

$$24 - F_N - 20 = 0 \Rightarrow F_N = 4N$$

اکنون می‌توانیم نیروی اصطکاک جنبشی را حساب کنیم:

$$F_k = \mu_k \times F_N \xrightarrow[F_N=4N]{\mu_k=0/5} f_k = 0/5\times4 = 2N$$

قانون دوم نیوتون را در راستای افقی می‌نویسیم و شتاب حرکت را پیدا می‌کنیم:

$$F_{net,x} = ma \Rightarrow F_x - f_k = ma \xrightarrow[F_x=8N\ ,\ f_k=2N]{m=2kg}$$

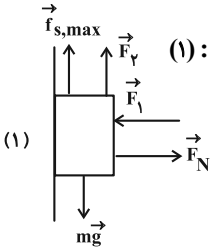
$$8 - 2 = 2a \Rightarrow a = 3\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۳ تا ۴۲)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمدکاظم منشاری)*

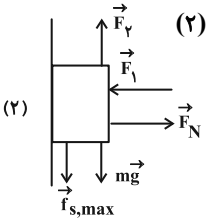
کمترین مقدار F_2 زمانی است که نیروی اصطکاک رو به بالا باشد و بیشترین مقدار آن زمانی است که نیروی اصطکاک رو به پایین باشد. زیرا:

(۱)



$$(1): F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_{2_{min}} = mg - f_{s,max}$$

(۲)



$$(2): F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_{2_{max}} = mg + f_{s,max}$$

$$\begin{cases} mg = 100N \\ f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s F_1 \end{cases} \xrightarrow{\mu=0/4\ ,\ F_1=60N} f_{s,max} = 24N$$

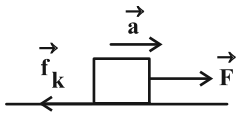
$$F_{2_{min}} = mg - f_{s,max} = 76N$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۷ و ۴۱)

۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(مهران اسماعیلی)*

با توجه به معادلهٔ سرعت، جسم با سرعت اولیهٔ $۴\frac{m}{s}$ و شتاب $۳\frac{m}{s^۲}$ حرکت می‌کند و چون پس از قطع نیروی F متوقف می‌شود، سطح دارای اصطکاک است. پس ابتدا قبل از قطع نیروی F، نیروی اصطکاک بین جسم و سطح را محاسبه می‌کنیم:

$$F_{net} = ma$$



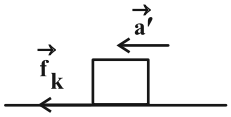
$$F - f_k = ma \xrightarrow[m=۲kg\ ,\ a=۳\frac{m}{s}]{F=۱۰N} ۱۰ - f_k = ۲\times۳ \Rightarrow f_k = ۴N$$

سرعت جسم در لحظهٔ قطع نیروی F:

$$v = ۳t + ۴ \xrightarrow{t=۴s} v = ۳\times۴ + ۴ = ۱۶\frac{m}{s}$$

پس از قطع نیروی F، تنها نیروی وارد بر جسم در امتداد سطح، نیروی اصطکاک است. پس می‌توان شتاب جسم را پس از قطع نیروی F به‌دست آورد:

$$F'_{net} = ma'$$



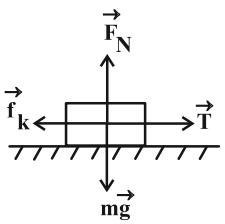
$$-f_k = ma' \xrightarrow[m=۲kg]{f_k=۴N} -۴ = ۲a' \Rightarrow a' = -۲\frac{m}{s^۲}$$

با نوشتن معادلهٔ سرعت جسم پس از قطع نیروی F می‌توان زمان توقف را محاسبه کرد:

$$v' = a't' + v \xrightarrow[v=۱۶\frac{m}{s}]{v'=۰\ ,\ a'=-۲\frac{m}{s^۲}} ۰ = -۲t' + ۱۶ \Rightarrow t' = ۸s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۲ تا ۴۳)

۱۸- **گزینهٔ «۴»** *(محمدکاظم منشاری)*



جسم با تندی ثابت در حرکت است $\Rightarrow T = f_k$

$$T = f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg = \frac{۴}{۱۰}\times۵\times۱۰ = ۲۰N$$

$$R = \sqrt{F_N^۲ + f_k^۲} = \sqrt{(mg)^۲ + f_k^۲} = \sqrt{(۵۰)^۲ + (۲۰)^۲} = ۱۰\sqrt{۲۹}N$$

$$\frac{T}{R} = \frac{۲۰}{۱۰\sqrt{۲۹}} = \frac{۲\sqrt{۲۹}}{۲۹}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

مطابق قانون اول نیوتون، با از کار افتادن موتور سفینه، نیروی خالصی به آن وارد نمی‌شود و در نتیجه با سرعت ثابت به حرکت خود بر خط راست ادامه می‌دهد.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

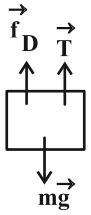
(مشابه سوال ۶ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲)

۲۰- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

با توجه به جهت حرکت جسم که رو به پایین است، نیروی مقاومت هوا $(\vec{f}_D)$ رو به بالا به جسم وارد می‌شود و با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - T - f_D = ma \xrightarrow[f_D=۶۰N\ ,\ a=۱/۵\frac{m}{s^۲}]{m=۲۰kg\ ,\ g=۱۰\frac{m}{s^۲}}$$

$$۲۰۰ - T - ۶۰ = ۲۰\times۱/۵ = ۳۰ \Rightarrow T = ۱۱۰N$$



(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۳ تا ۳۷ و ۴۴)

(مشابه سوال ۸ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲)

فیزیک ۳

۱- **گزینهٔ «۲»** *(مهران اسماعیلی)*

بررسی موارد:

الف) نادرست، در بازهٔ زمانی ۰ تا ۷s نمودار بالای محور زمان رسم شده پس سرعت دائماً مثبت است. یعنی متحرک تغییر جهت نداده است.

ب) نادرست؛ همان‌طور که می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار سرعت- زمان بیانگر شتاب است. با توجه به نمودار در بازهٔ زمانی ۰ تا ۸s همواره شیب خط مماس بر نمودار در تمام لحظات نامثبت است. به عبارت دیگر شتاب متحرک در بازهٔ زمانی ۰ تا ۸s دائماً منفی است (به جز در $t = ۴s$ که صفر است).

ج) نادرست؛ همان‌طور که می‌دانیم سطح زیر نمودار سرعت- زمان بیانگر جابه‌جایی است. با توجه به نمودار، سطح زیر نمودار در ۴ ثانیهٔ دوم حرکت کمتر از ۴ ثانیهٔ اول حرکت است. بنابه تعریف سرعت متوسط $(v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$ می‌توان نتیجه گرفت بزرگی سرعت متوسط در ۴ ثانیهٔ دوم حرکت کمتر از ۴ ثانیهٔ اول حرکت است.

د) درست؛ با توجه به نمودار در بازهٔ زمانی ۴s تا ۷s نمودار بالای محور زمان است، یعنی سرعت مثبت است. از طرفی شیب خط مماس بر نمودار منفی است، یعنی شتاب منفی است، بنابراین بردارهای سرعت و شتاب خلاف جهت یکدیگرند.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۳)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کیانی)*

با توجه به داده‌های روی نمودار مکان- زمان و با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} \xrightarrow[t_۲=۶s\ ,\ x_۲=-۶m]{t_۱=۲s\ ,\ x_۱=۶m}$$

$$v_{av} = \frac{-۶-۶}{۶-۲} = -۳\frac{m}{s}$$

$$v'_{av} = \frac{x_۲ - x'_۱}{t_۲ - t'_۱} \xrightarrow[t_۲=۶s\ ,\ x_۲=-۶m]{t'_۱=۰\ ,\ x'_۱=۳m} v'_{av} = \frac{-۶-۳}{۶-۰} = -۱/۵\frac{m}{s}$$

بنابراین:

$$\frac{|v_{av}|}{|v'_{av}|} = \frac{۳}{۱/۵} = ۲$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۳ تا ۸)

(مشابه مثال ۱-۴ و ۱-۵ صفحهٔ ۷ کتاب درسی)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(حسین الهی)*

اگر فاصلهٔ بین دو نقطه را Δx فرض کنیم، داریم:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x = v_{رفت} \times t_{رفت} \Rightarrow t_{رفت} = \frac{\Delta x}{v_{رفت}} \\ \Delta x = v_{برگشت} \times t_{برگشت} \Rightarrow t_{برگشت} = \frac{\Delta x}{v_{برگشت}} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow t_{کل} = \Delta x(\frac{۱}{v_{رفت}} + \frac{۱}{v_{برگشت}})$$

حال باید ببینیم $t_{کل}$ در کدام گزینه کمتر است:

(۱) $$t_۱ = \Delta x(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۷}) = \frac{۱۱}{۲۸}\Delta x$$

(۲) $$t_۲ = \Delta x(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۲}\Delta x$$

(۳) $$t_۳ = \Delta x(\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۲}\Delta x$$

$$\Rightarrow t_۱ < t_۲ = t_۳$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

(مشابه پرسش آخر فصل صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی شریفی)*

نمودار داده شده مربوط به دو متحرکی است که با سرعت ثابت در حال حرکت‌اند، ابتدا معادلهٔ حرکت آن‌ها را می‌نویسیم:

$$A \text{ شیب} > B \text{ شیب} \Rightarrow v_A - v_B = ۲\frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = v_A t - ۱۶ \\ x_B = v_B t + ۱۰ \end{cases}$$

اگر متحرک A، ۱۰m از B جلو بیفتد، داریم:

$$x_A - x_B = ۱۰ \Rightarrow (v_A - v_B)t - ۲۶ = ۱۰$$

$$۲t = ۳۶ \Rightarrow t = ۱۸s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

(مکمل پرسش ۱۶ آخر فصل صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی شریفی)*

رابطهٔ $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ را یک بار برای $\frac{1}{4}$ ابتدای مسیر و یک بار برای کل مسیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \\ v_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \\ \Delta x_{کل} = \frac{1}{2}at_{کل}^2 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_{کل}} = \frac{\frac{1}{2}at_1^2}{\frac{1}{2}at_{کل}^2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}x}{x} = (\frac{t_1}{t_{کل}})^2 \Rightarrow \frac{t_1}{t_{کل}} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{matrix} t_{کل} = 2t_1 \\ t_{کل} = t_1 + t_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t_2 = t_1 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = 1$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(رحمت‌اله خیراله‌زاده‌سماکوش)*

شتاب حرکت متحرک A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8-0}{4-0} = 2\frac{m}{s^2}$$

فرض می‌کنیم در لحظهٔ $t=0$ متحرک B در مبدأ مکان باشد، بنابراین متحرک A، از $16m$ جلوتر، یعنی $x_{0A} = 16m$ حرکت خود را آغاز می‌کند و معادلهٔ مکان- زمان دو متحرک به صورت زیر خواهد بود:

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A}t + x_{0A} \Rightarrow x_A = t^2 + 16$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \Rightarrow x_B = 8t$$

هنگامی که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند، $x_A = x_B$ است و داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow t^2 + 16 = 8t \Rightarrow t^2 - 8t + 16 = 0 \Rightarrow (t-4)^4 = 0$$

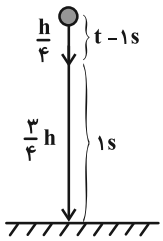
$$\Rightarrow t = 4s$$

بنابراین با توجه به این که معادلهٔ فوق فقط یک جواب دارد، دو متحرک در حین حرکتشان فقط یک بار در کنار هم قرار می‌گیرند و گزینهٔ «۱» درست است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

با توجه به شکل زیر، اگر ارتفاع ساختمان را h فرض کنیم، گلوله در ثانیهٔ آخر حرکت خود $\frac{3}{4}h$ را طی می‌کند و اگر کل زمان سقوط را t در نظر بگیریم، ابتدایی مسیر را در بازهٔ زمانی $t-1s$ می‌پیماید.



به کمک معادلهٔ جابه‌جایی، ابتدا کل زمان سقوط (t) را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} h = \frac{1}{2}gt^2 \\ \frac{h}{4} = \frac{1}{2}g(t-1)^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4 = \frac{t^2}{(t-1)^2} \Rightarrow 2 = \frac{t}{(t-1)} \Rightarrow t = 2s$$

اکنون مقدار h را حساب می‌کنیم:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow[t=2s]{g=10\frac{m}{s^2}} h = \frac{1}{2}\times 10 \times 2^2 = 20m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(علی برزگر)*

$$v^2 - v_0^2 = 2g\Delta y \Rightarrow v^2 - 15^2 = 2\times 10 \times 50$$

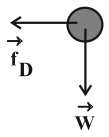
$$\Rightarrow v^2 = 225 + 1000 \Rightarrow v = 35\frac{m}{s}$$

$$v = gt \Rightarrow 35 = 10 \times t \Rightarrow t = 3/5s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

توجه کنید دو نیروی وزن $(\vec{W})$ و مقاومت هوا نیروهای وارد بر توپ در نقطهٔ اوج هستند که در این نقطه دو نیرو بر هم عمودند.



با توجه به قانون دوم نیوتون داریم: $F_{net} = ma = ۰/۵ \times ۲۶ = ۱۳N$

از طرفی:

$$F_{net} = |\vec{W} + \vec{f}_D| = \sqrt{W^۲ + f_D^۲} = ۱۳ \Rightarrow \sqrt{۵^۲ + f_D^۲} = ۱۳$$

$$۲۵ + f_D^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow f_D = ۱۲N \Rightarrow \vec{f}_D = -۱۲(N)\vec{i}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

(مشابه مثال ۲-۲ صفحهٔ ۳۴ کتاب درسی)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(ریحانه آزادیان)*

بیشترین نیرو زمانی رخ می‌دهد که $mg < F$ باشد:

$$F_{max} = mg + f_{s,max} \Rightarrow F_{max} = mg + ۰/۵F_{max}$$

$$\Rightarrow F_{max} = ۲mg$$

کمترین نیرو زمانی رخ می دهد که $F < mg$ باشد:

$$F_{min} = mg - f_{s,max} \Rightarrow F_{min} = mg - \frac{۵}{۱۰}F_{min}$$

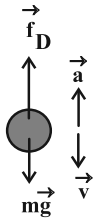
$$\Rightarrow F_{min} = \frac{۲}{۳}mg$$

$$\frac{F_{max}}{F_{min}} = \frac{۲mg}{\frac{۲}{۳}mg} = ۳$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۳)

۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(غلامرضا محبی)*

در حالتی که چترباز، چتر خود را باز کرده و به تندی حدی خود نرسیده است، به دلیل بزرگ‌تر بودن اندازهٔ نیروی مقاومت هوا نسبت به وزن چترباز، جهت بردار شتاب رو به بالا و نوع حرکت کندشونده است.



بررسی موارد:

الف) درست

ب) درست

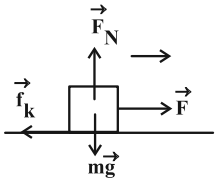
پ) درست $f_D = m(g+a) = ۵۰(۱۰+۰/۴) = ۵۲۰N$

ت) نادرست؛ به دلیل حرکت کندشونده رو به پایین، نیروی مقاومت هوا در حال کاهش است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۱۲- **گزینهٔ «۱»** *(مهران اسماعیلی)*

ابتدا با رسم نیروهای وارد بر جسم و نوشتن قانون دوم نیوتون، نیروی $\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم: $F_{net} = ma$

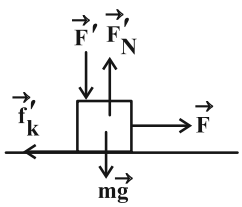


$$\Rightarrow F - f_k = ma \xrightarrow[a=۲\frac{m}{s^۲}]{m=۴kg\ ,\ f_k=\mu_k F_N}$$

$$F - \mu_k F_N = ۴ \times ۲ \xrightarrow[\mu_k = ۰/۴]{F_N = mg = ۴ \times ۱۰N}$$

$$F - ۰/۴ \times ۴ \times ۱۰ = ۸ \Rightarrow F = ۲۴N$$

وقتی نیروی قائم $\vec{F}'$ بر جسم وارد می‌شود، جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. به عبارت دیگر شتاب جسم در این حالت برابر صفر است.



$$F_{net} = ma' \xrightarrow{a'=0} F_{net} = 0 \Rightarrow F - f_k' = 0 \Rightarrow F = f_k'$$

$$\xrightarrow{f_k' = \mu_k F_N'} F = \mu_k F_N' \xrightarrow[\mu_k = 0/4]{F = 24N} 24 = 0/4 F_N' \Rightarrow F_N' = 60N$$

با توجه به نیروهای وارد بر جسم در راستای قائم می‌توان نوشت:

$$F_N' = F' + mg \xrightarrow[m=4kg\ ,\ g=10\frac{N}{kg}]{F_N'=60N} 60 = F' + 4\times 10$$

$$\Rightarrow F' = 20N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۳)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** (رحمت‌اله فیراله‌زاده‌سماکوش)

طبق رابطهٔ $\vec{p} = m\vec{v}$، بردارهای سرعت و تکانه همواره هم‌جهت هستند و طبق رابطهٔ $\vec{F}_{av} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{m\Delta \vec{v}}{\Delta t}$، نیروی خالص متوسط وارد شده به جسم، تغییرات تکانه و تغییرات سرعت همواره هم‌جهت هستند و گزینهٔ «۳» درست است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ و ۴۷)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** (مهران اسماعیلی)

ابتدا رابطهٔ بین انرژی جنبشی و تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{v=\frac{p}{m}} K = \frac{1}{2}m(\frac{p}{m})^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$$

حال می‌توان رابطهٔ مقایسه‌ای انرژی جنبشی را با جرم و تکانه نوشت:

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{m_1}{m_2}\times(\frac{p_2}{p_1})^2 \xrightarrow[p_2 = p_1 + \frac{50}{100}p_1 = 1/5p_1]{m_2 = 3m_1}$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_1}{3m_1}\times(\frac{1/5p_1}{p_1})^2 = \frac{1}{3}\times 2/25 = 0/75$$

$$\Rightarrow K_2 = 0/75K_1$$

پس انرژی جنبشی کاهش می‌یابد.

درصد تغییر انرژی جنبشی $= \frac{\Delta K}{K_1}\times 100$

$$= \frac{K_2 - K_1}{K_1}\times 100 = \frac{0/75K_1 - K_1}{K_1}\times 100 = -\%25$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

(مکمل تمرین ۲-۷ صفحهٔ ۴۷ کتاب درسی)

۱۵- **گزینهٔ «۴»** (امیراحمد میرسعید)

چون نیروی $\vec{F}$ در خلاف جهت سرعت به جسم وارد شده، پس حتماً انرژی جنبشی ۳۶ درصد کم شده است و می‌توان نوشت:

$$K_2 = \frac{64}{100}K_1 \Rightarrow \frac{p_2^2}{2m} = \frac{64}{100}\frac{p_1^2}{2m} \Rightarrow p_2 = \frac{8}{10}p_1$$

$$p_1 = mv_1 = 20\times 5 = 100kg.\frac{m}{s}$$

$$p_2 = \frac{8}{10}\times 100 = 80kg.\frac{m}{s}$$

$$\Delta p = F\Delta t \Rightarrow p_2 - p_1 = F\Delta t \Rightarrow 80 - 100 = -4\times \Delta t$$

$$\Rightarrow -20 = -4\Delta t \Rightarrow \Delta t = 5s$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۱۶- **گزینهٔ «۳»** (علیرضا جباری)

ابتدا دورهٔ چرخش صفحه را به‌دست می‌آوریم:

$$T = \frac{t}{N} \xrightarrow[N=15]{t=1min=60s} T = \frac{60}{15} = 4s$$

شعاع چرخش این جسم برابر با $80cm$ است. بر این اساس تندی چرخش جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow[T=4s]{r=80cm=0/8m} v = \frac{2\pi\times 0/8}{4} = 0/4\pi\frac{m}{s}$$

نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت نقش نیروی مرکزگرا را دارد، بنابراین برای حداقل ضریب اصطکاک ایستایی خواهیم داشت:

$$f_{s,max} = m\frac{v^2}{r} \xrightarrow{F_N = mg} \mu_s\times mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$\xrightarrow[r=0/8m]{g=\pi^2\frac{m}{s^2}\ ,\ v=0/4\pi\frac{m}{s}} \mu_s\times\pi^2 = \frac{0/16\pi^2}{0/8} \Rightarrow \mu_s = 0/2$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی شریفی)*

نیروی کشیدگی فنر از رابطهٔ $F_e = k\Delta x$ به‌دست می‌آید:

$$F_e = ۴۰۰(L - ۰/۸)$$

شعاع دوران برابر طول نهایی فنر است و نیروی مرکزگرا نیز نیروی کشسانی فنر است:

$$F_e = \frac{mv^۲}{r} \Rightarrow F_e = \frac{۴\times ۳^۲}{L} = \frac{۳۶}{L}$$

$$۴۰۰(L - ۰/۸) = \frac{۳۶}{L} \Rightarrow ۴۰۰L^۲ - ۳۲۰L = ۳۶$$

$$\Rightarrow ۴۰۰L^۲ - ۳۲۰L - ۳۶ = ۰ \Rightarrow ۱۰۰L^۲ - ۸۰L - ۹ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{جواب قابل قبول}} L = ۰/۹\,m$$

طول نهایی فنر یعنی $۰/۹\,m$ برابر شعاع دوران می‌باشد:

$$T = \frac{۲\pi r}{v} = \frac{۲\times ۳\times ۰/۹}{۳} = ۱/۸\,s$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا خادمی)*

به کمک دو رابطهٔ انرژی جنبشی و نیروی مرکزگرا می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \\ F_{net,c} = \frac{mv^۲}{r} \end{cases} \xrightarrow{mv^۲ = F_{net,c}\times r} K = \frac{F_{net,c}\times r}{۲}$$

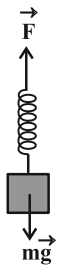
$$\Rightarrow ۲۰\times ۱۰^۳ = \frac{F_{net,c}\times ۴}{۲} \Rightarrow F_{net,c} = ۱۰^۴\,N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

(مشابه پرسش ۱۸ آخر فصل صفحهٔ ۵۹ کتاب درسی)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(سعید شرق)*

در سیارهٔ زمین:



$$F - mg = ma \Rightarrow k\Delta x - mg = ma$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۱۰}k = ۱۲m \Rightarrow k = ۶۰m$$

در سطح سیارهٔ فرضی:

$$\frac{g'}{g} = \frac{M'}{M}\times(\frac{R}{R'})^۲ = \frac{۸}{۱}\times(\frac{۱}{۲})^۲ = ۲ \Rightarrow g' = ۲g$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{۲}{۱۰}k - mg = ma \\ k\Delta x - ۲mg = ma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{۲}{۱۰}k - mg = k\Delta x - ۲mg$$

$$۱۲m - ۱۰m = ۶۰m\Delta x - ۲۰m \Rightarrow ۲۲m = ۶۰m\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{۲۲}{۶۰} = \frac{۱۱}{۳۰}m = \frac{۱۱۰}{۳}cm$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(رحمت‌اله خیراله‌زاده‌سماکوش)*

به کمک نسبت شتاب گرانش دو سیاره، نسبت شعاع آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$g = \frac{GM}{R^۲} \Rightarrow \frac{g_B}{g_A} = \frac{M_B}{M_A}\times(\frac{R_A}{R_B})^۲ \xrightarrow[M_B = ۴M_A]{g_B = ۹g_A}$$

$$۹ = ۴\times(\frac{R_A}{R_B})^۲ \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{۳}{۲}$$

به کمک نسبت شعاع دو سیاره، نسبت حجم دو سیاره را به‌دست می‌آوریم:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = (\frac{R_A}{R_B})^۳ = (\frac{۳}{۲})^۳ = \frac{۲۷}{۸}$$

حال به کمک رابطهٔ $\rho = \frac{M}{V}$، نسبت چگالی دو سیاره به‌دست می‌آید:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{M_A}{M_B}\times\frac{V_B}{V_A} \xrightarrow[\frac{V_A}{V_B} = \frac{۲۷}{۸}]{M_B = ۴M_A}$$

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{۱}{۴}\times\frac{۸}{۲۷} = \frac{۲}{۲۷}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۱ متحرکی با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند و در لحظه‌های $t_1 = 3\ s$ و $t_2 = 12\ s$ به ترتیب از مکان‌های $x_1 = 15\ m$ و $x_2 = -12\ m$ عبور می‌کند. بردار مکان اولیهٔ متحرک برحسب متر کدام است؟

۱) $21\vec{i}$ ۲) $-21\vec{i}$

۳) $24\vec{i}$ ۴) $-24\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت سرعت ثابت و تشکیل دستگاه معادلاتی، بردار مکان اولیه را به دست آورید.

درس Box برای متحرکی که با سرعت ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، معادلهٔ مکان ـ زمان به صورت زیر است:

$$x = vt + x_0$$

در رابطهٔ بالا، v سرعت جسم و x_0 مکان اولیهٔ جسم است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** اطلاعات عددی مسئله را در معادلهٔ مکان ـ زمان قرار می‌دهیم:

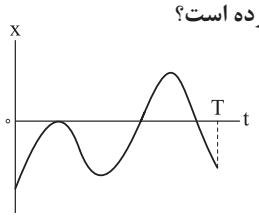
$$3v + x_0 = 15 \quad (I)$$

$$12v + x_0 = -12 \quad (II)$$

گام دوم: با استفاده از معادلات به‌دست‌آمده و تشکیل دستگاه معادلاتی، مجهول مسئله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 3v + x_0 = 15 \\ 12v + x_0 = -12 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 24\ m \Rightarrow \vec{x}_0 = (24\ m)\vec{i}$$

۲ **نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازهٔ زمانی صفر تا T، جهت حرکت متحرک و جهت بردار مکان آن، به ترتیب از راست به چپ، چند مرتبه تغییر کرده است؟**



۱) ۲، ۳

۲) ۳، ۳

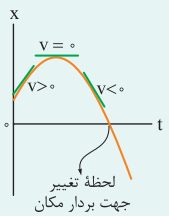
۳) ۲، ۲

۴) ۳، ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

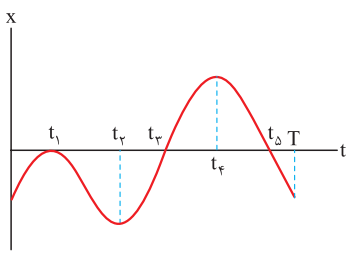
شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان بیانگر سرعت متحرک است. شرط تغییر جهت متحرک، صفرشدن سرعت $(v=0)$ و تغییر علامت آن است که در قله‌ها و دره‌های نمودار x ـ t رخ می‌دهد. از طرفی در نمودار x ـ t، بردار مکان متحرک هنگام عبور نمودار از محور زمان تغییر جهت می‌دهد.



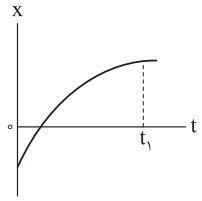
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در قله‌ها و دره‌های نمودار x ـ t، سرعت متحرک صفر می‌شود و سپس تغییر جهت می‌دهد. نمودار، دو قله و یک دره دارد! پس متحرک سه بار (در لحظه‌های t_1، t_2 و t_3 در شکل زیر) تغییر جهت داده است.

گام دوم: با عبور نمودار از محور زمان، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد. دو مرتبه در لحظه‌های t_3 و t_5 نمودار از محور زمان عبور کرده است، پس بردار مکان، دو بار تغییر جهت داده است.



۳ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ این متحرک درست است؟



الف) اندازهٔ بردار مکان متحرک، به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

ب) تندی متحرک به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

پ) شتاب متحرک، پیوسته در جهت محور x است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔

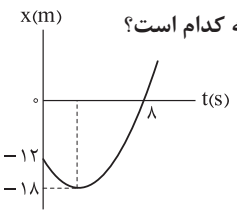
بررسی موارد:

الف) طبق نمودار، متحرک ابتدا به مبدأ مکان می‌رود و سپس از آن فاصله می‌گیرد؛ پس اندازهٔ بردار مکان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. ✖

ب) اندازهٔ شیب مماس بر نمودار x ـ t برابر تندی متحرک است. با توجه به نمودار، اندازهٔ شیب و بنابراین تندی در حال کاهش است. ✓

پ) جهت تقعر نمودار به طرف پایین است؛ بنابراین شتاب متحرک در خلاف جهت محور x است. ✖

۴ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازهٔ زمانی‌ای که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است، سرعت متوسط متحرک برحسب متر بر ثانیه کدام است؟



۱) $۱/۵\vec{i}$

۲) $-۱/۵\vec{i}$

۳) $۳\vec{i}$

۴) $-۳\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint بازهٔ زمانی‌ای که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است را به دست آورید؛ سپس از رابطهٔ $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$، بردار سرعت متوسط را محاسبه کنید.

درس Box بردار سرعت متوسط متحرک از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}=\frac{\vec{x}_۲-\vec{x}_۱}{t_۲-t_۱}$$

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔

گام اول: در بازهٔ زمانی‌ای که نمودار مکان ـ زمان متحرک زیر محور زمان است، بردار مکان متحرک خلاف جهت محور x است، یعنی بازهٔ زمانی ۰ تا ۸ ثانیه.

گام دوم: با محاسبهٔ جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی و جای‌گذاری در رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}=\frac{[۰-(-۱۲)]\vec{i}}{۸-۰}=(۱/۵\ m/s)\vec{i}$$

۵ معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = t^۲ - ۴t + ۵$ است. شتاب متوسط این متحرک از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که سرعت آن به $\vec{v} = (۱\ m/s)\vec{i}$ می‌رسد، برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

۱) $۴\vec{i}$ ۲) $-۴\vec{i}$

۳) $۲\vec{i}$ ۴) $-۲\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

سرعت در مبدأ زمان ($v_۰$) و لحظهٔ $t_۱$ که بردار سرعت در آن لحظه برابر $\vec{v}_۱ = (۱\ m/s)\vec{i}$ است را به دست آورید و سپس از رابطهٔ $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ خواستهٔ سؤال را حساب کنید.

درس Box

بردار شتاب متوسط متحرک از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱}$$

$(\vec{v})$: بردار سرعت متحرک (m/s)

t: زمان (s)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سرعت متحرک در مبدأ زمان را به دست می‌آوریم:

$$v_۰ = (۰)^۲ - ۴(۰) + ۵ = ۵\ m/s$$

گام دوم: اکنون لحظه‌ای را که سرعت متحرک $۱\ m/s$ است، محاسبه می‌کنیم:

$$v = t^۲ - ۴t + ۵ = ۱ \Rightarrow t^۲ - ۴t + ۴ = ۰ \Rightarrow (t-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow t = ۲s$$

گام سوم: بردار شتاب متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی ۰ تا ۲ ثانیه به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_{۲s} - v_۰}{۲-۰} = \frac{(۱-۵)\vec{i}}{۲} = (-۲\ m/s^۲)\vec{i}$$

۶ شتاب متوسط متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در ۲ ثانیهٔ چهارم برابر $(-۵\ m/s^۲)\vec{i}$ و در ۶ ثانیهٔ دوم برابر $(۳\ m/s^۲)\vec{i}$ است. شتاب متوسط این متحرک در ۴ ثانیهٔ سوم برابر چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) $۲\vec{i}$ ۲) $-۲\vec{i}$

۳) $۷\vec{i}$ ۴) $-۷\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

با استفاده از تعریف شتاب متوسط در ۲ بازهٔ زمانی داده‌شده، خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

درس Box

درس‌باکس تست ۴۵ را بخوانید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ۲ ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ زمانی ۶ تا ۸ ثانیه؛ بنابراین داریم:

$$a_{av(۶-۸)} = \frac{v_{۸s} - v_{۶s}}{۸-۶} = -۵ \Rightarrow v_{۸s} - v_{۶s} = -۱۰ \quad (I)$$

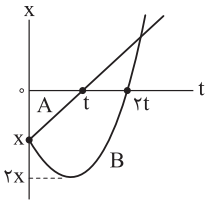
گام دوم: به همین ترتیب با داشتن شتاب متوسط در ۶ ثانیهٔ دوم (۶ تا ۱۲ ثانیه) داریم:

$$a_{av(۶-۱۲)} = \frac{v_{۱۲s} - v_{۶s}}{۱۲-۶} = ۳ \Rightarrow v_{۱۲s} - v_{۶s} = ۱۸ \quad (II)$$

گام سوم: با ترکیب معادلات (I) و (II) مقدار $v_{۱۲s} - v_{۸s}$ و خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_{۶s} - v_{۸s} = ۱۰ \\ v_{۱۲s} - v_{۶s} = ۱۸ \end{cases} \Rightarrow v_{۱۲s} - v_{۸s} = ۲۸ \Rightarrow \vec{a}_{av_{(۸-۱۲)}} = \frac{\vec{v}_{۱۲s} - \vec{v}_{۸s}}{۱۲-۸} = \frac{۲۸\vec{i}}{۴} = (۷\ m/s^۲)\vec{i}$$

۷ نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. کدام مقایسه دربارهٔ تندی متوسط (s_{av}) و اندازهٔ سرعت متوسط (v_{av}) این دو متحرک در بازهٔ زمانی که هر متحرک از مکان اولیه‌اش به مبدأ مکان می‌رسد، درست است؟



۱) $v_{av_A} > v_{av_B}$ ، $s_{av_A} > s_{av_B}$

۲) $v_{av_A} < v_{av_B}$ ، $s_{av_A} > s_{av_B}$

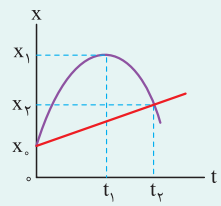
۳) $v_{av_A} > v_{av_B}$ ، $s_{av_A} < s_{av_B}$

۴) $v_{av_A} < v_{av_B}$ ، $s_{av_A} < s_{av_B}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint s_{av} و v_{av} را برای دو متحرک A و B با استفاده از نمودار به دست آورید و سپس اندازهٔ آن‌ها را مقایسه کنید.

درس Box شیب خط قاطع در نمودار x ـ t برابر با سرعت متوسط است:



$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{x}_۲ - \vec{x}_۰}{t_۲ - ۰}$$

برای محاسبهٔ تندی متوسط باید اندازهٔ جابه‌جایی در دو طرف لحظهٔ تغییر جهت ($t_۱$) را بر زمان تقسیم کنیم:

$$s_{av} = \frac{|x_۱ - x_۰| + |x_۲ - x_۱|}{t_۲ - ۰}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** برای مقایسهٔ تندی متوسط دو متحرک، ابتدا مسافت طی‌شدهٔ متحرک‌ها را در بازهٔ زمانی‌ای که به مبدأ مکان می‌رسند، به دست می‌آوریم و سپس تندی‌های متوسط دو متحرک را مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} s_{av_A} = \frac{x}{t} \\ s_{av_B} = \frac{۳x}{۲t} \end{cases} \Rightarrow s_{av_B} > s_{av_A}$$

گام دوم: ابتدا اندازهٔ جابه‌جایی‌ها و سپس اندازهٔ سرعت متوسط‌های دو متحرک را محاسبه و آن‌ها را مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_{av_A} = \frac{x}{t} \\ v_{av_B} = \frac{x}{۲t} \end{cases} \Rightarrow v_{av_A} > v_{av_B}$$

۸ معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -۳t^۲ + ۱۲t + ۱۰$ است. در لحظهٔ $t_۱$ جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند. در لحظهٔ $t_۲$ متحرک از مکان اولیهٔ خود عبور می‌کند. تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

لحظات $t_۱$ (تغییر جهت متحرک) و $t_۲$ (بازگشت به مکان اولیه) را به دست آورید و سپس تندی متوسط متحرک را محاسبه کنید.

درس Box

معادلهٔ حرکت شتاب ثابت به فرم زیر می‌باشد:

$$x = \frac{۱}{۲}a t^۲ + v_۰ t + x_۰$$

($x_۰$: مکان اولیه (m)، $v_۰$: سرعت اولیه (m/s)، a: شتاب ثابت ($m/s^۲$))

لحظهٔ تغییر جهت متحرک $t = -\frac{v_۰}{a}$ و جابه‌جایی متحرک تا لحظهٔ توقف $\Delta x = \frac{-v_۰^۲}{۲a}$ می‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در لحظهٔ تغییر جهت متحرک $(t_۱)$ سرعت لحظه‌ای صفر می‌شود:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ = -۳t^۲ + ۱۲t + ۱۰ \\ v = at + v_۰ = -۶t + ۱۲ \end{cases} \xrightarrow{v_{t_۱} = ۰} -۶t_۱ + ۱۲ = ۰ \Rightarrow t_۱ = ۲\,s$$

گام دوم: با توجه به این‌که متحرک در لحظهٔ $t_۲$ به مکان اولیهٔ $x_۰ = ۱۰\,m$ برمی‌گردد، داریم:

$$۱۰ = -۳t^۲ + ۱۲t + ۱۰ \Rightarrow ۳t^۲ - ۱۲t = ۰ \Rightarrow ۳t(t-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \text{ غ ق ق} \\ t_۲ = ۴\,s \end{cases}$$

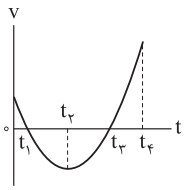
گام سوم: برای محاسبهٔ تندی متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، با توجه به این‌که اندازهٔ جابه‌جایی با مسافت طی‌شده بعد از لحظهٔ تغییر جهت برابر است، داریم:

$$\begin{cases} t_۱ = ۲\,s \Rightarrow x_۱ = -۳(۲)^۲ + ۱۲(۲) + ۱۰ = ۲۲\,m \\ t_۲ = ۴\,s \Rightarrow x_۲ = ۱۰\,m \end{cases}$$

$$s_{av} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|۱۰ - ۲۲|}{۴ - ۲} = ۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ **نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر، قسمتی از یک سهمی است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این متحرک درست است؟**



الف) بزرگی شتاب متحرک در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۳$ برابر است.

ب) در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۲$، شتاب متحرک پیوسته در جهت حرکت آن است.

پ) در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۴$، جهت حرکت متحرک دو مرتبه تغییر کرده است.

ت) در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۴$ تندی متحرک به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

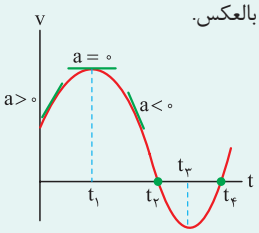
۱) الف ـ ب ۲) پ ـ ت

۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

در نمودار سرعت ـ زمان:



- در لحظاتی که نمودار در بالای محور زمان است، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و بالعکس.
- شیب خط مماس بر نمودار برابر شتاب متحرک است.
- متحرک هنگام عبور نمودار از محور زمان، تغییر جهت می‌دهد ($t_۲$ و $t_۴$).
- هنگام نزدیک‌شدن نمودار به محور زمان، حرکت کندشونده و هنگام فاصله‌گرفتن نمودار از محور زمان، حرکت تندشونده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی تک‌به‌تک موارد:

الف) در نمودار سرعت ـ زمان، شیب خط مماس برابر با شتاب متحرک است. از طرفی، چون نمودار، بخشی از یک سهمی است و $t_۱$ و $t_۳$ نسبت به مرکز نمودار ($t_۲$) تقارن دارند، پس اندازهٔ شیب مماس‌ها (شتاب‌ها) با هم برابر هستند. ✓

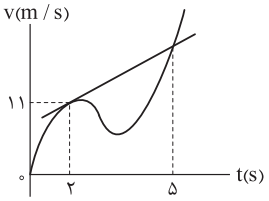
ب) متحرک در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$ در جهت محور x حرکت می‌کند، ولی شتاب در خلاف جهت محور x است. ✗

پ) در نمودار سرعت ـ زمان، متحرک هنگام عبور از محور زمان، تغییر جهت می‌دهد؛ پس در لحظات $t_۱$ و $t_۳$ (۲ مرتبه) متحرک تغییر جهت می‌دهد.

ت) تندی متحرک ابتدا کاهش ($t_۲$ تا $t_۳$) و سپس افزایش ($t_۳$ تا $t_۴$) می‌یابد. ✗

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر اندازهٔ شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۲\ s$ برابر با $۳\ m/s^۲$ باشد، اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ اول چند متر بر مربع ثانیه است؟ (خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = ۲\ s$ رسم شده است.)



۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

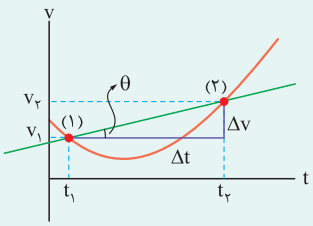
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

با توجه به مفهوم هندسی شیب خط قاطع و مماس در نمودار سرعت ـ زمان خواستهٔ مسئله را به دست آورید.

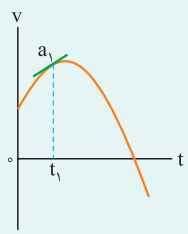
درس Box

در نمودار سرعت ـ زمان، شیب خط قاطع بین دو نقطه از نمودار، بیانگر شتاب متوسط است:



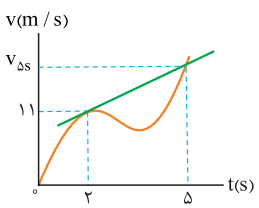
$$a_{av_{(t_۱ - t_۲)}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}$$

هم‌چنین در هر لحظه شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان بیانگر شتاب لحظه‌ای است.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان برابر با شتاب متحرک است:

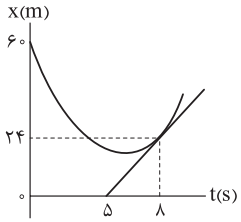


$$a_{۲s} = \frac{v_{۵s} - v_{۲s}}{۵ - ۲} = ۳ \Rightarrow \frac{v_{۵s} - ۱۱}{۳} = ۳ \Rightarrow v_{۵s} = ۲۰\ m/s$$

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$a_{av_{(۰-۵)}} = \frac{v_{۵s} - v_۰}{۵ - ۰} = \frac{۲۰ - ۰}{۵} = ۴\ m/s^۲$$

۱۱ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اول، ۲۵ درصد کم‌تر از تندی متحرک در لحظهٔ $t = 8\ s$ باشد، کم‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان چند متر است؟ (خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = 8\ s$ رسم شده است.)



۱) ۱۲

۲) ۱۶

۳) ۱۸

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

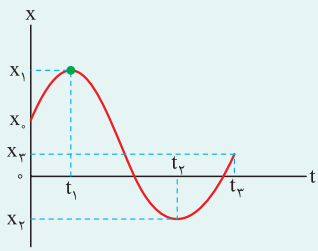
Hint

با استفاده از نمودار، $s_{av_{(0-8)}}$ و s_{8s} را محاسبه و با توجه به رابطهٔ داده‌شده بین آن‌ها، کم‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان را به دست آورید.

درس Box

در نمودار مکان ـ زمان:

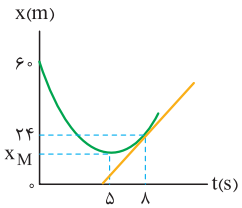
- تندی لحظه‌ای برابر اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار است.
- تندی متوسط برابر نسبت مسافت طی‌شده به زمان است و باید دقت کنیم که مجموع اندازهٔ جابه‌جایی در بازه‌های زمانی حول لحظهٔ توقف (تقعر و تحدب نمودار) همان مسافت طی‌شده است.



$$s_{av_{(0-t_3)}} = \frac{|\Delta x_{(0-t_1)}| + |\Delta x_{(t_1-t_2)}| + |\Delta x_{(t_2-t_3)}|}{t_3 - 0}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اول برابر با نسبت مسافت طی‌شده به مدت‌زمان است. با توجه به نمودار داریم:



$$s_{av_{(0-8)}} = \frac{(60 - x_M) + (24 - x_M)}{8} = \frac{84 - 2x_M}{8}$$

گام دوم: شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = 8s$ برابر با سرعت و تندی متحرک در این لحظه است:

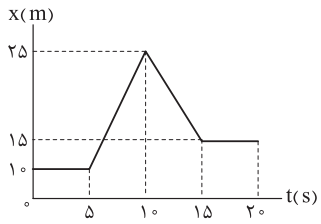
$$v_{8s} = s_{8s} = \frac{24}{8-5} = 8\ m/s$$

گام سوم: با توجه به رابطهٔ بین $s_{av_{(0-8)}}$ و s_{8s}، کم‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ (x_M) را به دست می‌آوریم:

$$s_{av_{(0-8s)}} = s_{8s} - \frac{25}{100}s_{8s} = \frac{75}{100}s_{8s} \Rightarrow s_{av_{(0-8)}} = \frac{3}{4}s_{8s} \Rightarrow \frac{84 - 2x_M}{8} = \frac{3}{4}(8)$$

$$\Rightarrow 84 - 2x_M = 48 \Rightarrow 2x_M = 36 \Rightarrow x_M = 18\ m$$

۱۲ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک در بازهٔ $t_1 = 7\,s$ تا $t_2 = 12\,s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) $0/2\vec{i}$

۲) $-0/2\vec{i}$

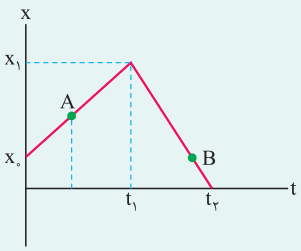
۳) $\vec{i}$

۴) $-\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint با توجه به نمودار، v_{7s} و v_{12s} را محاسبه و سپس $\vec{a}_{av}$ در بازهٔ زمانی (7s ـ 12s) را به دست آورید.

درس Box نمودار مکان ـ زمان حرکت سرعت ثابت به صورت خطی با شیب ثابت است. بنابراین سرعت در همهٔ لحظات این نوع حرکت همان شیب خط است:



$$v_A = \frac{x_1 - x_0}{t_1}$$

$$v_B = \frac{0 - x_1}{t_2 - t_1}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان برابر با سرعت متحرک است. برای به دست آوردن v_{7s} و v_{12s}، با توجه به این‌که شیب و سرعت در بازه‌های زمانی (5s ـ 10s) ثانیه و (10s ـ 15s) ثانیه ثابت است، داریم:

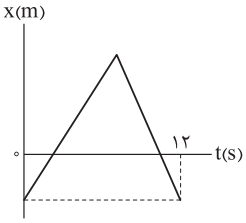
$$v_{7s} = \frac{x_{10} - x_5}{10 - 5} = \frac{15}{5} = 3\ m/s$$

$$v_{12s} = \frac{x_{15} - x_{10}}{15 - 10} = \frac{-10}{5} = -2\ m/s$$

گام دوم: اکنون بردار شتاب متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی خواسته‌شده به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av(7-12)} = \frac{\vec{v}_{12} - \vec{v}_7}{12 - 7} = \frac{(-2-3)\vec{i}}{5} = (-1\,m/s^2)\vec{i}$$

۱۳ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در بازه‌ای که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، تندی متوسط متحرک برابر ۶ m / s باشد، بیشینهٔ فاصلهٔ متحرک از مکان اولیه‌اش چند متر است؟



۱) ۲۴

۲) ۳۶

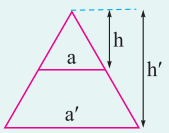
۳) ۴۸

۴) ۷۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

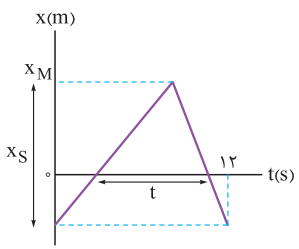
در بسیاری از سؤالات مربوط به نمودارهای حرکت‌شناسی و به‌ویژه حرکت سرعت ثابت، می‌توان از قضیهٔ تالس استفاده کرد:



$$\frac{a}{a'}=\frac{h}{h'}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل بردار مکان در بازهٔ زمانی t در جهت محور x است:



$$s_{av}=\frac{۲x_M}{t}=۶ \Rightarrow \frac{x_M}{t}=۳$$

گام دوم: بیشترین فاصلهٔ متحرک از مکان اولیه‌اش برابر x_S است. با نوشتن قضیهٔ تالس بین دو مثلث، مقدار x_S را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x_S}{۱۲}=\frac{x_M}{t}=۳ \Rightarrow x_S=۳۶\ m$$

۱۴ **خودرویی با تندی ثابت v بدون تغییر جهت، در مسیری مستقیم حرکت می‌کند و فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B را در مدت ۴۰ min طی می‌کند. اگر خودرو در همین مسیر با تندی ثابت $v+10\ km/h$ حرکت کند، فاصلهٔ بین این دو نقطه را در مدت ۳۰ min طی خواهد کرد. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B چند کیلومتر است؟**

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint با نوشتن روابط حرکت سرعت ثابت، دو معادله به دست می‌آید؛ با ترکیب آن‌ها مسئله را حل کنید.

درس Box معادلات حرکت سرعت ثابت به صورت مقابل است:

$$\begin{cases} x = vt + x_0 \rightarrow \text{مکان اولیه (m)} \\ \Delta x = v\Delta t \end{cases}$$

↓ جابه‌جایی (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** در حرکت با تندی ثابت از رابطهٔ $\Delta x = v\Delta t$ استفاده می‌کنیم. توجه کنیم که اگر تندی برحسب km/h باشد، Δt و Δx به ترتیب باید برحسب h و km باشند.

$$\Delta x_{AB} = vt_1 \xrightarrow{t_1 = 40\ min = \frac{2}{3}h} \Delta x_{AB} = v(\frac{2}{3}) \quad (1)$$

$$\Delta x_{AB} = (v+10)t_2 \xrightarrow{t_2 = 30\ min = \frac{1}{2}h} \Delta x_{AB} = \frac{(v+10)}{2} \quad (2)$$

گام دوم: از برابری روابط (۱) و (۲) ابتدا v و سپس Δx_{AB} را به دست می‌آوریم:

$$v(\frac{2}{3}) = \frac{(v+10)}{2} \Rightarrow 4v = 3v + 30 \Rightarrow v = 30\ km/h \xrightarrow{\Delta x_{AB} = v(\frac{2}{3})} \Delta x_{AB} = 30(\frac{2}{3}) = 20\ km$$

۱۵ دو متحرک A و B روی محور x در فاصلهٔ معینی از هم قرار دارند. اگر دو متحرک به ترتیب با تندی‌های ثابت v_A و v_B در یک جهت حرکت کنند، پس از ۱۲ s، و اگر با همان تندی‌ها به سمت یکدیگر حرکت کنند، پس از ۸ s به هم می‌رسند. v_A چند برابر v_B است؟ $(v_A > v_B)$

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت سرعت ثابت در دو حالت داده‌شده در سؤال، دو معادله به دست آورید و با حل دستگاه معادله‌ها، $\frac{v_A}{v_B}$ را حساب کنید.

درس Box

در سؤالات حرکت سرعت ثابت می‌توان از روش سرعت نسبی به صورت زیر استفاده کرد. اگر دو متحرک در یک جهت حرکت کنند:

$$v_{\text{نسبی}} = v_A - v_B$$

و اگر به طرف هم حرکت کنند:

$$v_{\text{نسبی}} = v_A + v_B$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مکان متحرک A را مبدأ مکان فرض می‌کنیم و فاصلهٔ دو متحرک را d در نظر می‌گیریم. معادلات مکان ـ زمان دو متحرک را در حالتی که در یک جهت حرکت می‌کنند، می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t \\ x_B = v_B t + d \end{cases} \xrightarrow[t=12s]{x_A = x_B} 12v_A = 12v_B + d \Rightarrow d = 12(v_A - v_B) \qquad (1)$$

گام دوم: معادله‌های مکان ـ زمان دو متحرک را برای حالتی که به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند، می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t \\ x_B = -v_B t + d \end{cases} \xrightarrow[t=8\,s]{x_A = x_B} 8v_A = -8v_B + d \Rightarrow 8(v_A + v_B) = d \qquad (2)$$

گام سوم: با برابر قرار دادن معادلات (۱) و (۲) خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$12(v_A - v_B) = 8(v_A + v_B) \Rightarrow 3v_A - 3v_B = 2v_A + 2v_B \Rightarrow v_A = 5v_B \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 5$$

یه‌جور دیگه

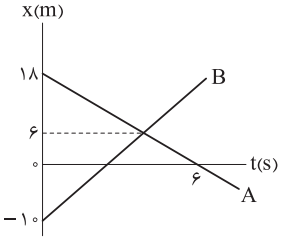
گام اول: سرعت نسبی دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (v_A - v_B)(12) = d \\ (v_A + v_B)(8) = d \end{cases}$$

گام دوم: با برابر قرار دادن دو معادلهٔ بالا داریم:

$$(v_A - v_B)(12) = (v_A + v_B)(8) \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 5$$

۱۶ **نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در این حرکت، چند ثانیه، فاصلهٔ دو متحرک کم‌تر از ۷ m یا مساوی آن است؟**



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint با توجه به نمودار، معادلات حرکت دو متحرک را به دست آورده و خواستهٔ مسئله را محاسبه کنید.

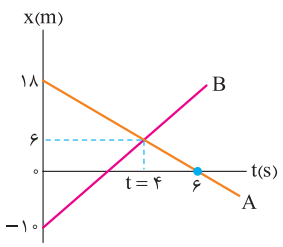
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** چون نمودار مکان ـ زمان هر دو متحرک، به صورت خط راست است، نوع حرکت آن‌ها سرعت ثابت است. معادلات مکان ـ زمان متحرک A را می‌نویسیم:

$$v_A = \frac{۰-۱۸}{۶-۰} = -۳\ m/s \quad و \quad x_{۰(A)} = ۱۸\ m \Rightarrow x_A = -۳t+۱۸ \quad (I)$$

لحظه‌ای که نمودارها یکدیگر را قطع می‌کنند، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_A = ۶\ m \xrightarrow{(I)} ۶ = -۳t+۱۸ \Rightarrow -۳t = -۱۲ \Rightarrow t = ۴\ s$$

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B به صورت زیر به دست می‌آید:



$$v_B = \frac{۶-(-۱۰)}{۴} = ۴\ m/s \quad و \quad x_{۰(B)} = -۱۰\ m \Rightarrow x_B = ۴t-۱۰$$

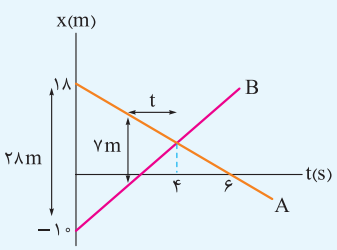
گام دوم: فاصلهٔ دو متحرک، باید کم‌تر یا مساوی ۷ متر باشد:

$$|x_A - x_B| \le ۷ \Rightarrow |-۳t+۱۸-(۴t-۱۰)| \le ۷ \Rightarrow |۷t-۲۸| \le ۷ \Rightarrow -۷ \le ۷t-۲۸ \le ۷$$

$$\Rightarrow -۱ \le t-۴ \le ۱ \Rightarrow ۳\ s \le t \le ۵\ s$$

بنابراین فاصلهٔ دو متحرک، مجموعاً به مدت $۵-۳ = ۲\ s$ کم‌تر یا مساوی ۷ متر است.

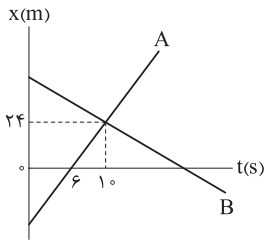
یه‌جور دیگه با توجه به درس‌باکس تست ۵۳، از قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{۲۸}{۴} = \frac{۷}{t} \Rightarrow t = ۱\ s$$

$$\text{کل زمان} = ۲t = ۲\ s$$

۱۷ **نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر فاصلهٔ دو متحرک در مبدأ زمان برابر ۱۰۰ m باشد، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، جهت بردار مکان متحرک B تغییر می‌کند؟**



۱) ۱۵

۲) ۱۶

۳) ۱۸

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint با توجه به نمودار، ابتدا v_A و بعد v_B را محاسبه کنید و در آخر با استفاده از رابطهٔ $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک B را به دست آورید.

درس Box ۳ پارامتر مشابه که اغلب دانش‌آموزان را به اشتباه می‌اندازد:

مکان اولیه (x_0): مکان جسم در لحظهٔ $t=0$.

مکان تغییر جهت: مکان جسم در لحظه‌ای که سرعت صفر است.

تغییر جهت بردار مکان: مبدأ یا $x=0$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به اطلاعات نمودار، معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک A را به دست می‌آوریم:

$$v_A=\frac{۲۴-۰}{۱۰-۶}=۶\ m/s \Rightarrow x_A=۶t+x_{0A} \xrightarrow[x_A=۲۴\ m]{t=۱۰\ s} ۶۰+x_{0A}=۲۴ \Rightarrow x_{0A}=-۳۶\ m$$

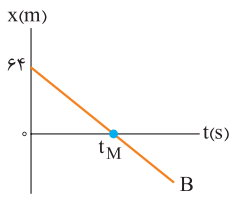
$$\Rightarrow x_A=۶t-۳۶$$

گام دوم: فاصلهٔ دو متحرک در مبدأ، همان $x_{0B}-x_{0A}=۱۰۰$ است؛ بنابراین x_{0B} و v_B را به دست می‌آوریم:

$$x_{0B}+۳۶=۱۰۰ \Rightarrow x_{0B}=۶۴\ m$$

$$v_B=\frac{۲۴-۶۴}{۱۰}=-۴\ m/s$$

گام سوم: با داشتن سرعت B، لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان B را به دست می‌آوریم:



$$v_B=\frac{-۶۴}{t_M}=-۴ \Rightarrow t_M=۱۶\ s$$

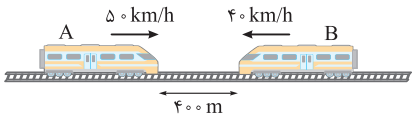
۱۸ روی دو ریل مستقیم و موازی، دو قطار A و B به ترتیب با تندی‌های ثابت ۵۰ km / h و ۴۰ km / h به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند. طول دو قطار به ترتیب ۲۰۰ m و ۳۰۰ m و فاصلهٔ جلوی آن‌ها در مبدأ زمان برابر با ۴۰۰ m است. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، دو قطار به طور کامل از کنار یکدیگر عبور می‌کنند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: یک شکل مناسب از وضعیت دو قطار رسم می‌کنیم.



گام دوم: اگر Δx_A و Δx_B جابه‌جایی دو قطار تا لحظهٔ عبور کامل از کنار هم باشد:

$$\begin{cases}\Delta x_A = ۵۰t \\ \Delta x_B = -۴۰t\end{cases}$$

گام سوم: مجموع اندازهٔ جابه‌جایی A و B همان طول قطارها و فاصلهٔ آن‌هاست.

$$|\Delta x_A| + |\Delta x_B| = ۵۰t + ۴۰t = ۰/۴ + ۰/۳ + ۰/۲$$

$$\Rightarrow ۹۰t = ۰/۹ \Rightarrow t = \frac{۱}{۱۰۰}\,h = ۳۶\,s$$

یه‌جور دیگه

گام اول: سرعت نسبی دو متحرک که به سمت هم حرکت می‌کنند را به دست می‌آوریم:

$$v_{\text{نسبی}} = ۵۰ + ۴۰ = ۹۰\ km/h$$

گام دوم: مسافت پیموده شده برابر طول قطارها و فاصلهٔ بین آن‌هاست.

$$\Delta x = ۴۰۰ + ۲۰۰ + ۳۰۰ = ۹۰۰\ m = ۰/۹\ km$$

$$\Delta x = v(\Delta t) \Rightarrow ۰/۹\ km = ۹۰\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{۱}{۱۰۰}\,h = ۳۶\,s$$

۱۹ **خودرویی از شهر A به شهر B رفته و بلافاصله از همان مسیر به شهر A برمی‌گردد. اگر تندی متوسط خودرو در مسیر رفت برابر ۶۰ km / h و در مسیر برگشت برابر ۴۰ km / h باشد، تندی متوسط خودرو در کل مسیر رفت و برگشت چند کیلومتر بر ساعت است؟**

۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۵۰ ۴) ۵۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

مقادیر t_1 و t_2 (زمان‌های رفت و برگشت) را برحسب طول مسیر، محاسبه کرده و تندی متوسط رفت و برگشت را از رابطهٔ $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$ به دست آورید.

درس Box

اگر متحرکی مسافت‌های d_1، d_2 و d_3 را با تندی متوسط‌های s_1، s_2 و s_3 طی کند، تندی متوسط کل حرکت برابر است با:

$$s_{av} = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{\frac{d_1}{s_1} + \frac{d_2}{s_2} + \frac{d_3}{s_3}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای مسیرهای رفت و برگشت، به ترتیب از اندیس‌های (۱) و (۲) استفاده می‌کنیم. اگر طول مسیر را d در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} \Delta x = v(\Delta t) \\ d = v_1 t_1 = 60 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{60} \\ d = v_2 t_2 = 40 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{d}{40} \end{cases}$$

گام دوم: از رابطهٔ تندی متوسط $(s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t})$ برای کل مسیر رفت و برگشت داریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{t_1 + t_2} = \frac{d + d}{\frac{d}{60} + \frac{d}{40}} = \frac{2d}{\frac{2d + 3d}{120}} = \frac{240 \cancel{d}}{5 \cancel{d}} = 48 \text{ km / h}$$

۲۰ **متحرکی روی محیط دایره‌ای به شعاع $12\ m$ در حال حرکت است. اگر در یک بازهٔ زمانی ۴ ثانیه‌ای، اندازهٔ سرعت متوسط متحرک برابر $6\ m/s$ باشد، در این بازهٔ زمانی، تندی متوسط متحرک برحسب متر بر ثانیه کدام می‌تواند باشد؟**

۱) $\frac{3\pi}{2}$

۲) 6π

۳) 12π

۴) 15π

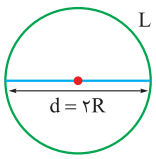
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا از رابطهٔ $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}$، جابه‌جایی را برحسب شعاع به دست بیاورید و از آن برای نتیجه‌گیری مسافت طی‌شده برحسب محیط استفاده کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا جابه‌جایی d را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow\frac{d}{4}=6\Rightarrow d=24\ m=2(12\ m)=2\ R$$

گام دوم: با توجه به شکل زیر چون $d=2R$ است، مسافت طی‌شدهٔ L، مضرب فردی از نصف محیط دایره است:

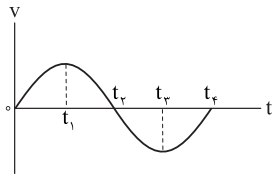


$$L=(2k+1)(\pi R)=(2k+1)(12\pi)$$

گام سوم: اکنون تندی متوسط را بر حسب k محاسبه کرده و با دادن مقادیر متوالی داریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{(2k+1)(12\pi)}{4}=(2k+1)(3\pi)=\begin{cases}k=0\Rightarrow s_{av}=3\pi\ (m/s)\\ k=1\Rightarrow s_{av}=9\pi\ (m/s)\\ k=2\Rightarrow s_{av}=15\pi\ (m/s)\end{cases}$$

۱ **نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این متحرک درست است؟**



۱) در بازهٔ زمانی صفر تا t_2، سرعت متوسط متحرک برابر صفر است.

۲) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، اندازهٔ شتاب متحرک کاهش یافته است.

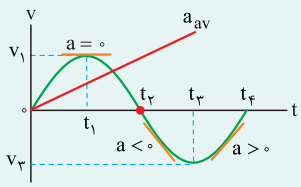
۳) در بازهٔ زمانی t_3 تا t_4، شتاب متحرک پیوسته در خلاف جهت محور x است.

۴) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3، حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

برخی نکات مهم در نمودار سرعت ـ زمان:



- محور قائم بیانگر سرعت متحرک است و با رسم خطی افقی از هر نقطهٔ نمودار و برخورد با محور قائم، سرعت متحرک به دست می‌آید.
- شیب خط مماس بر نمودار در هر نقطه، بیانگر شتاب لحظه‌ای است.
- شیب خط قاطع بین هر دو نقطه، بیانگر شتاب متوسط است.
- در بازه‌ای که نمودار به محور زمان نزدیک می‌شود، حرکت کندشونده و در بازه‌ای که نمودار از محور زمان فاصله می‌گیرد، حرکت تندشونده است.
- سطح زیر نمودار بیانگر جابه‌جایی متحرک است. اگر سطح بالای محور t باشد، جابه‌جایی مثبت و اگر زیر محور t باشد، جابه‌جایی منفی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به توضیحات درس باکس:

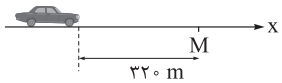
گزینهٔ (۱): در بازهٔ زمانی صفر تا t_2، جابه‌جایی (سطح زیر نمودار) مخالف صفر است. ✖

گزینهٔ (۲): در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 اندازهٔ شیب خط مماس در حال افزایش است و بنابراین اندازهٔ شتاب افزایش یافته است. ✖

گزینهٔ (۳): در بازهٔ زمانی t_3 تا t_4 شیب خط مماس، مثبت و بنابراین شتاب در جهت محور x است. ✖

گزینهٔ (۴): در بازهٔ t_1 تا t_2، نمودار به محور زمان نزدیک می‌شود (کندشونده) و سپس در بازهٔ t_2 تا t_3 از محور زمان فاصله می‌گیرد (تندشونده). ✔

۲ در شکل زیر، خودرویی در مسیر مستقیم با سرعت ثابت $30\ km/h$ در حال حرکت است. مدت چند دقیقه فاصلهٔ خودرو از نقطهٔ M کم‌تر یا مساوی $150\ m$ است؟



۱) ۰/۳ ۲) ۰/۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint با استفاده از روابط حرکت سرعت ثابت و مفهوم ریاضی فاصله از یک نقطه، خواستهٔ مسئله را به دست آورید.

درس Box در حرکت با سرعت ثابت، اگر بخواهیم فاصلهٔ متحرک از یک نقطه، کم‌تر یا مساوی d باشد:

$$\Delta x \le 2d \Rightarrow v(\Delta t) \le 2d$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** نقطهٔ M را مبدأ مختصات فرض می‌کنیم:

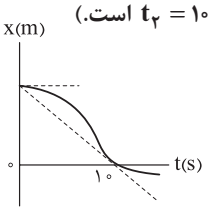


$$\Delta x = v\Delta t \xrightarrow{\Delta x = 150\ m = 0/15\ km} v(\Delta t) \le 0/15 \Rightarrow \Delta t \le \frac{0/15}{30} = 0/005\ h = 0/3\ min$$

گام دوم: منظور از فاصله، در دو طرف نقطهٔ M است؛ بنابراین در ۲ بازهٔ زمانی ۰/۳ دقیقه‌ای، فاصله کم‌تر یا مساوی ۱۵۰ m است:

$$\Delta t_{کل} = 2(0/3) = 0/6\ min$$

۳ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در ۱۰ ثانیهٔ اول اندازهٔ سرعت متوسط متحرک برابر $۴\,m/s$ باشد، شتاب متوسط متحرک در همین مدت در SI کدام است؟ (در شکل خط‌چین افقی مماس بر نمودار در لحظهٔ $t_۱ = ۰$ و خط‌چین مایل، مماس بر نمودار در لحظهٔ $t_۲ = ۱۰\,s$ است.)



۱) $۰/۲\vec{i}$
۲) $-۰/۲\vec{i}$
۳) $۰/۴\vec{i}$
۴) $-۰/۴\vec{i}$

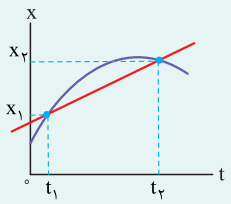
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ابتدا با توجه به داشتن اندازهٔ سرعت متوسط، مکان اولیه را به دست آورید و سپس با توجه به داشتن شیب خط قاطع، شتاب متوسط را در بازهٔ خواسته‌شده محاسبه کنید.

درس Box

در نمودار مکان ـ زمان، شیب خط قاطع بیانگر سرعت متوسط است:



$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_۲ - \vec{x}_۱}{t_۲ - t_۱}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با استفاده از تعریف سرعت متوسط، مکان اولیه را به دست می‌آوریم:

$$|v_{av}| = ۴\,m/s \xrightarrow{v_{av}<۰} \frac{x_{۱۰s} - x_۰}{۱۰ - ۰} = -۴ \Rightarrow \frac{۰ - x_۰}{۱۰} = -۴ \Rightarrow x_۰ = ۴۰\,m \Rightarrow \vec{x}_۰ = (۴۰\,m)\vec{i}$$

گام دوم: شیب خط مماس بر نمودار در مبدأ، افقی و بنابراین $v_۰ = ۰$ است.

گام سوم: شیب خط مماس بر نمودار در $t = ۱۰\,s$ همان $v_{۱۰s}$ است:

$$\vec{v}_{۱۰s} = \frac{(۰ - ۴۰)\vec{i}}{۱۰} = (-۴\,m/s)\vec{i}$$

گام چهارم: با استفاده از تعریف شتاب متوسط داریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_{۱۰} - \vec{v}_۰}{۱۰} = \frac{(-۴ - ۰)\vec{i}}{۱۰} = (-۰/۴\,m/s^۲)\vec{i}$$

نکته

به جای گام‌های اول تا سوم می‌توانستیم بگوییم که مطابق شکل، خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = ۱۰\,s$ همان خط قاطع بین دو لحظهٔ $t = ۰$ و $t = ۱۰s$ است و در نتیجه:

$$\vec{v}_{۱۰s} = \vec{v}_{av} = (-۴\,m/s)\vec{i}$$

۴ متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند. اگر تندی متحرک در مکان‌های $x_1 = 3\ m$ و $x_2 = -9\ m$ به ترتیب برابر $16\ m/s$ و $20\ m/s$ باشد، شتاب متحرک در SI کدام است؟

۱) $6\vec{i}$ ۲) $-6\vec{i}$

۳) $12\vec{i}$ ۴) $-12\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

از رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت شتاب ثابت، خواستهٔ مسئله را به دست آورید.

درس Box

در حرکت شتاب ثابت، اغلب می‌توان مسائل را از چند روش حل کرد. با تسلط بر روابط زیر، می‌توانیم کوتاه‌ترین راه‌حل‌ها را استفاده کنیم:

معادلهٔ مکان ـ زمان:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

معادلهٔ سرعت ـ زمان:

$$v = at + v_0$$

معادلهٔ مستقل از زمان:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

معادلهٔ سرعت متوسط:

$$v_{av} = \frac{v + v_0}{2}$$

معادلهٔ مستقل از شتاب:

$$\Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\Delta t$$

معادلهٔ مستقل از سرعت اولیه:

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + vt + x_0$$

x = مکان متحرک در لحظهٔ t (m)

x_0 = مکان اولیه یا مکان متحرک در لحظهٔ $t = 0$ (m)

a = شتاب (m/s^2)

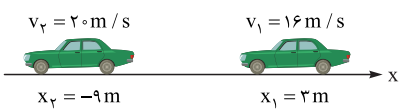
v_0 = سرعت اولیه یا سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 0$ (m/s)

v = سرعت متحرک در لحظهٔ t (m/s)

t = زمان (s)

$\Delta x = x - x_0$ = جابه‌جایی (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔



با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب را به دست می‌آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow (-20)^2 - (-16)^2 = 2a(-9-3) \Rightarrow a = \frac{(20^2 - 16^2)}{2(-12)} = \frac{144}{-24} = -6\ m/s^2$$

شکل برداری شتاب حرکت، برحسب بردار یکه به صورت $(-6\ m/s^2)\vec{i}$ است.

۵ معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = 4t - 6$ است. سرعت متوسط متحرک در ۰/۵ ثانیهٔ پنجم چند متر بر ثانیه است؟

۱) $3\vec{i}$ ۲) $-3\vec{i}$

۳) $4\vec{i}$ ۴) $-4\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint با استفاده از روابط سرعت متوسط در حرکت شتاب ثابت، مسئله را حل کنید.

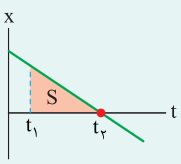
درس Box در حرکت شتاب ثابت، سرعت متوسط، از روش‌های مختلفی به دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$v_{av} = \frac{\pm S}{\Delta t}$$

(بالای محور زمان / پایین محور زمان)



پاسخ خیلی تشریحی ✔ با استفاده از روابط حرکت شتاب ثابت تندی متوسط متحرک را به دست می‌آوریم:

۰/۵ ثانیهٔ پنجم

$$\begin{cases} t_1 = 2\,s \Rightarrow \vec{v}_1 = (4(2) - 6)\vec{i} = (2\,m/s)\vec{i} \\ t_2 = 2/5\,s \Rightarrow \vec{v}_2 = (4(2/5) - 6)\vec{i} = (4\,m/s)\vec{i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} = \frac{(2+4)\vec{i}}{2} = (3\,m/s)\vec{i}$$

۶ **تندی خودرویی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در هر دو لحظهٔ $t_1 = ۴\ s$ و $t_2 = ۸\ s$ برابر $۶\ m/s$ است. اگر شتاب متحرک در جهت محور x باشد، سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر چند متر بر ثانیه است؟**

۱) $۳۶\vec{i}$ ۲) $-۳۶\vec{i}$

۳) $۱۸\vec{i}$ ۴) $-۱۸\vec{i}$

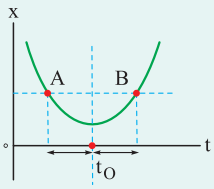
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

با استفاده از تقارن سهمی در حرکت شتاب ثابت، مسئله را حل کنید.

درس Box

نمودار x ـ t حرکت شتاب ثابت به صورت سهمی است و همهٔ ویژگی‌های تقارن در سهمی برای آن برقرار است:

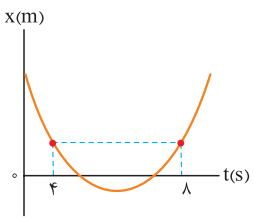


در نمودار بالا، دو نقطهٔ A و B که در فاصلهٔ زمانی برابری از مرکز تقارن قرار دارند، دارای مکان برابر و سرعت‌های هم‌اندازه و قرینه هستند:

$$\begin{cases} t_O = \dfrac{t_A + t_B}{۲} \\ x_A = x_B \\ \vec{v}_A = -\vec{v}_B \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با استفاده از داده‌های مسئله، نمودار مکان ـ زمان متحرک را به طور کیفی رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} v_{۴s} = -۶\ m/s \\ v_{۸s} = ۶\ m/s \end{cases}$$

گام دوم: در حرکت شتاب ثابت، شتاب متوسط در تمام بازه‌های زمانی ثابت است:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۶-(-۶)}{۸-۴} = \frac{۱۲}{۴} = ۳\ m/s^۲$$

گام سوم: از معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت شتاب ثابت داریم:

$$v = at + v_\circ \xrightarrow[a=۳\ m/s^۲]{v_{۸s}=۶\ m/s} ۶ = ۳(۸) + v_\circ \Rightarrow v_\circ = -۱۸\ m/s \Rightarrow \vec{v}_\circ = (-۱۸\ m/s)\vec{i}$$

۷ معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -2t^2 + 6t + 11$ است. در بازه‌ای که سرعت متحرک از $(2\ m/s)\vec{i}$ به $(-6\ m/s)\vec{i}$ می‌رسد، جابه‌جایی متحرک برحسب متر کدام است؟

۱) $-4\vec{i}$ ۲) $-8\vec{i}$ ۳) $4\vec{i}$ ۴) $8\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان، شتاب حرکت را حساب کنید. سپس با توجه به این‌که شتاب متوسط در تمام بازه‌ها همان شتاب ثابت متحرک است، بازهٔ زمانی جابه‌جایی را به دست بیاورید و در انتها خواستهٔ مسئله را محاسبه کنید.

درس Box

در حرکت با شتاب ثابت، مقدار شتاب متوسط در تمام بازه‌های زمانی ثابت و برابر همان شتاب جسم است:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$a_{av} = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به این‌که معادلهٔ مکان ـ زمان، درجه‌دوم است، شتاب ثابت جسم را به دست می‌آوریم:

$$x = -2t^2 + 6t + 11 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0} a = -4\ m/s^2$$

گام دوم: با توجه به درس‌باکس، شتاب متوسط در همهٔ بازه‌های زمانی $-4\ m/s^2$ است:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -4 = \frac{-6-2}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 2\ s$$

گام سوم: از رابطهٔ مستقل از شتاب، جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:

$$\Delta\vec{x} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}(\Delta t) = \frac{(-6+2)\vec{i}}{2}(2) = (-4\ m)\vec{i}$$

۸ خودرویی در مسیر مستقیم با تندی $90\ km/h$ در حال حرکت است. در لحظه‌ای، رانندهٔ خودرو ترمز می‌گیرد و تندی خودرو با شتاب ثابت کاهش می‌یابد و خودرو پس از طی مسافت $75\ m$ متوقف می‌شود. اندازهٔ جابه‌جایی خودرو در ۲ ثانیهٔ آخر حرکت آن چند متر است؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) $\frac{50}{3}$ ۴) $\frac{25}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ابتدا شتاب توقف را به دست آورید و سپس از معادلهٔ سرعت، پاسخ را به دست آورید.

درس Box

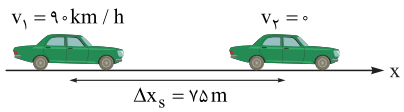
هنگامی‌که خودرویی با تندی ثابت v ، با شتاب ثابت a ترمز می‌گیرد؛ مسافت طی‌شده از لحظهٔ شروع ترمز تا لحظهٔ توقف (Δx_s) و زمان توقف (t_s) از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x_s = \left|\frac{-v^2}{2a}\right|$$

$$t_s = \left|\frac{-v}{a}\right|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

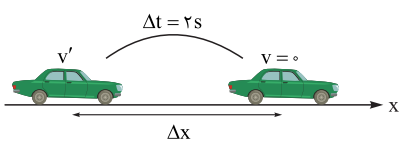
گام اول: ابتدا یک شکل از وضعیت مسئله رسم می‌کنیم:



گام دوم: از رابطهٔ مستقل از زمان، شتاب توقف را به دست می‌آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{v_1 = 90\ km/h = 25\ m/s} a = \frac{0 - (25)^2}{2(75)} = -\frac{25}{6}\ m/s^2$$

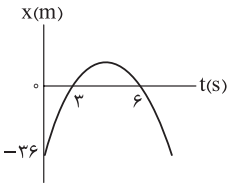
گام سوم: سرعت متحرک در ۲ ثانیه قبل از توقف را محاسبه و سپس اندازهٔ جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:



$$v = at + v' \Rightarrow 0 = -\frac{25}{6}(2) + v' \Rightarrow v' = \frac{25}{3}\ m/s$$

$$\Delta x = \frac{v + v'}{2}(\Delta t) = \frac{0 + \frac{25}{3}}{2}(2) = \frac{25}{3}\ m$$

۹ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط این متحرک در ۴ ثانیهٔ دوم چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۳

۲) ۳/۱۲۵

۳) ۶

۴) ۶/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

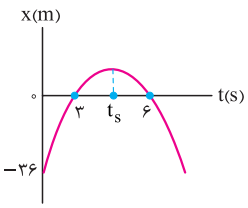
Hint

ابتدا با استفاده از تقارن سهمی، زمان توقف متحرک را به دست آورید. سپس با نوشتن معادلهٔ جابه‌جایی، شتاب و سرعت اولیه را محاسبه و با رسم نمودار v ـ t خواستهٔ مسئله را حساب کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از تقارن نمودار داریم:

$$t_s = \frac{۳+۶}{۲} = ۴/۵\ s$$



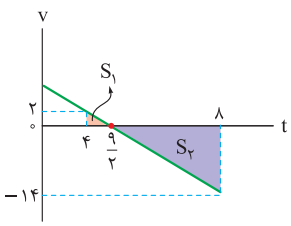
$$v_s = ۰ \Rightarrow a(۴/۵) + v_۰ = ۰ \Rightarrow v_۰ = -\frac{۹}{۲}a \qquad (۱)$$

گام دوم: با داشتن معادلهٔ (۱) و جابه‌جایی در بازهٔ ۰ تا ۳ ثانیه، داریم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \xrightarrow[v_۰=-\frac{۹}{۲}a]{\Delta x=۳۶\ m\ ,\ t=۳\ s} ۳۶ = \frac{۱}{۲}a(۳)^۲ + (-\frac{۹}{۲}a)(۳) \Rightarrow \begin{cases} a = -۴\ m/s^۲ \\ v_۰ = ۱۸\ m/s \end{cases}$$

گام سوم: با به دست آوردن معادلهٔ سرعت ـ زمان و رسم نمودار آن خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = -۴t + ۱۸$$



$$s_{av} = \frac{۱}{\Delta t} = \frac{S_۱ + S_۲}{۴} = \frac{۰/۵ + ۲۴/۵}{۴} = ۶/۲۵\ m/s$$

۱۰ **جهت حرکت متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t = ۴\ s$ تغییر می‌کند. اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیهٔ اوّل، چند برابر مسافت طی‌شده توسط آن در ۳ ثانیهٔ دوم است؟**

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) $\frac{۱۷}{۳}$ ۴) $\frac{۱۷}{۵}$

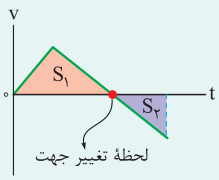
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم و سپس با استفاده از سطح زیر نمودار، نسبت خواسته‌شده را به دست آورید.

درس Box

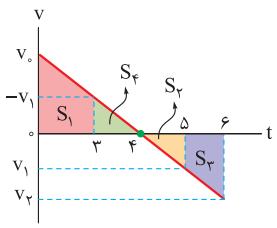
رسم نمودار سرعت ـ زمان در اغلب مسائل به ساده‌ترشدن حل سؤال منجر می‌شود (به ویژه در مسائلی که جابه‌جایی و مسافت متحرک خواسته می‌شود.).



$$\Delta x = S_۱ - S_۲$$
$$l = S_۱ + S_۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم:



گام دوم: اگر سرعت اولیه را $v_۰$ فرض کنیم، با توجه به شتاب متحرک، سرعت در لحظات خواسته‌شدهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow{v_{۴\,s}} ۰ = ۴a + v_۰ \Rightarrow a = -\frac{v_۰}{۴} \Rightarrow v = -\frac{v_۰}{۴}t + v_۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۵\ s \Rightarrow v_۱ = -\frac{v_۰}{۴} \\ t_۲ = ۶\ s \Rightarrow v_۲ = -\frac{v_۰}{۲} \end{cases}$$

گام سوم: با استفاده از سطح زیر نمودار، جابه‌جایی و مسافت در بازهٔ زمانی خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

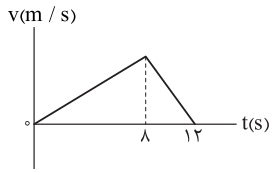
$$|\Delta x_{(۰-۵\,s)}| = |S_۱ + S_۴ - S_۲| = |(\frac{۱}{۲}v_۰(۴)) - (\frac{۱}{۲}(\frac{v_۰}{۴})(۱))| = \frac{۱۵v_۰}{۸}$$

$$l_{(۳s-۶s)} = S_۲ + S_۳ + S_۴ = \frac{۱}{۲}(\frac{v_۰}{۴})(۱) + \frac{۱}{۲}(\frac{v_۰}{۲})(۲) = \frac{۵v_۰}{۸}$$

گام چهارم: نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{|\Delta x_{(۰-۵\,s)}|}{l_{(۳\,s-۶\,s)}} = \frac{\frac{۱۵v_۰}{۸}}{\frac{۵v_۰}{۸}} = ۳$$

۱۱ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۳\ s$ تا $t_2 = ۹\ s$ برابر $۰/۲۵\ m/s^2$ باشد، بیشینهٔ تندی متحرک چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲

۲) ۴

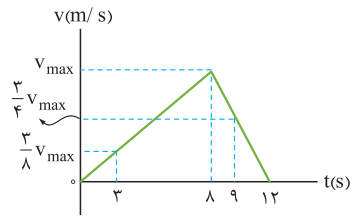
۳) ۶

۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint سرعت در لحظات داده‌شده را برحسب تندی بیشینه به دست آورید و با داشتن اندازهٔ شتاب متوسط، تندی بیشینه را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** سرعت در لحظات $t_1 = ۳\ s$ و $t_2 = ۹\ s$ را برحسب تندی بیشینه (با استفاده از تناسب) می‌نویسیم:

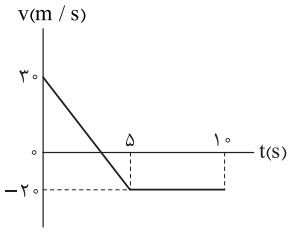


$$\begin{cases} \frac{v_{۳s}}{۳} = \frac{v_{max}}{۸} \Rightarrow v_{۳s} = \frac{۳}{۸}v_{max} \\ \frac{v_{max}}{۴} = \frac{v_{۹s}}{۳} \Rightarrow v_{۹s} = \frac{۳}{۴}v_{max} \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به داشتن اندازهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی ۳ تا ۹ ثانیه، v_{max} را حساب می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\frac{۳}{۴}v_{max} - \frac{۳}{۸}v_{max}}{۹-۳} \Rightarrow ۰/۲۵ = \frac{\frac{۳}{۸}v_{max}}{۶} \Rightarrow v_{max} = ۴\ m/s$$

۱۲ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اوّل چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۷ / ۵

۲) ۱۶

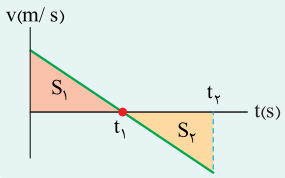
۳) ۱۶ / ۵

۴) ۲۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

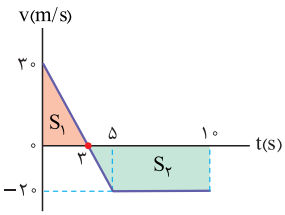
سطح زیر نمودار v ـ t برابر با جابه‌جایی است. در سؤالاتی که تندی از ما خواسته می‌شود:



$$s_{av} = \frac{S_1 + S_2}{\Delta t}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: سطح زیر نمودار را در ۱۰ ثانیهٔ اول به دست می‌آوریم:



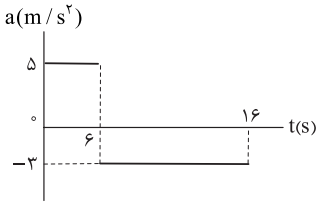
$$S_1 = \frac{1}{2}(30)(3) = 45$$

$$S_2 = \frac{7+5}{2}(20) = 120$$

گام دوم: با داشتن مسافت طی‌شده $(S_1 + S_2)$ تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{S_1 + S_2}{\Delta t} = \frac{45+120}{10} = \frac{165}{10} = 16/5 \text{ m/s}$$

۱۳ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در امتداد محور x و از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، به شکل زیر است. مسافت طی‌شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۶\ s$ تا $t_2 = ۱۶\ s$ برابر چند متر است؟



۱) ۱۵۰

۲) ۲۴۰

۳) ۳۰۰

۴) ۴۸۰

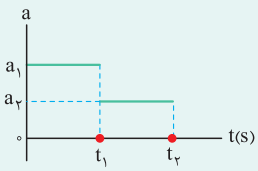
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم کنید و با توجه به سطح زیر نمودار، خواستهٔ مسئله را به دست آورید.

درس Box

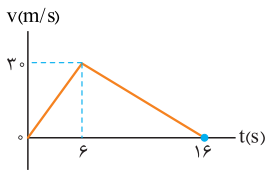
در نمودارهای شتاب ـ زمان چند مرحله‌ای:



- سطح زیر نمودار، برابر تغییرات سرعت (Δv) است.
- سرعت در انتهای هر مرحله برابر سرعت در ابتدای مرحلهٔ بعدی است.
- به‌ویژه در مسائلی که جابه‌جایی و مسافت خواسته می‌شود، رسم نمودار سرعت ـ زمان را در نظر داشته باشید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت شتاب ثابت و به دست آوردن سرعت نقاط ابتدا و انتهای بازه، نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم:



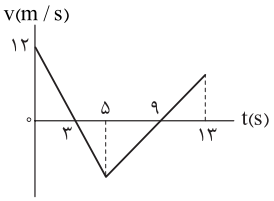
$$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} \Rightarrow ۵ = \frac{\Delta v_1}{۶} \Rightarrow \Delta v_1 = ۳۰\ m/s$$

$$a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \Rightarrow -۳ = \frac{\Delta v_2}{۱۰} \Rightarrow \Delta v_2 = -۳۰\ m/s$$

گام دوم: با محاسبهٔ سطح زیر نمودار در بازهٔ ۶ تا ۱۶ ثانیه، مسافت طی‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\ell = \frac{۱}{۲}(۳۰)(۱۰) = ۱۵۰\ m$$

۱۴ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازهٔ زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 12\ s$ مسافت طی شده توسط متحرک، چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است؟



۱) ۵ / ۸

۲) ۶ / ۸

۳) ۱۶

۴) ۱۷

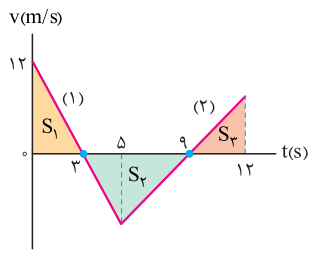
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

با استفاده از سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان، مسافت طی‌شده و جابه‌جایی متحرک در بازهٔ مورد نظر را محاسبه و خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جهت محاسبهٔ مساحت زیر نمودار، ابتدا سرعت در لحظات ۵s و ۱۲s را به دست می‌آوریم:



$$a_1 = -\frac{۱۲}{۳} = -۴\ m/s^2 \Rightarrow v = -۴t + ۱۲ \xrightarrow{t=۵\ s} v_{۵s} = -۸\ m/s$$

$$a_2 = \frac{۸}{۴} = ۲\ m/s^2 \Rightarrow v = ۲t - ۸ \xrightarrow[\Delta t = ۷\ s]{t=۱۲\ s} v_{۱۲} = ۶\ m/s$$

گام دوم: جابه‌جایی و مسافت طی‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$|\Delta x| = S_1 + S_3 - S_2 = (۱۸ + ۹ - ۲۴) = ۳\ m$$

$$\ell = S_1 + S_2 + S_3 = (۱۸ + ۲۴ + ۹) = ۵۱\ m$$

گام سوم: نسبت خواسته‌شده در سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\ell}{|\Delta x|} = \frac{۵۱}{۳} = ۱۷$$

۱۵ متحرکی روی محور x در مبدأ زمان در خلاف جهت محور x از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و به مدت ۲۰ s با شتاب ثابت a_1 به حرکت خود ادامه می‌دهد. در ۱۰ ثانیهٔ بعدی با شتاب ثابت a_2 تندی خود را کاهش می‌دهد تا متوقف شود. اگر مسافت طی‌شده توسط متحرک در این ۳۰ s برابر ۳۶۰ m باشد، شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 5\ s$ تا $t_2 = 25\ s$ در SI کدام است؟

۱) $0/3\vec{i}$ ۲) $0/6\vec{i}$

۳) $-0/3\vec{i}$ ۴) $-0/6\vec{i}$

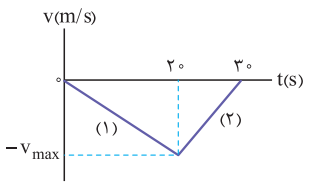
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

با رسم نمودار سرعت ـ زمان متحرک و محاسبهٔ سطح زیر نمودار که مسافت طی‌شده است، شتاب‌های دو مرحلهٔ حرکت و سپس سرعت در لحظات خواسته‌شده را محاسبه و در نهایت شتاب متوسط را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا یک نمودار v ـ t از حرکت متحرک به طور کلی رسم می‌کنیم:



گام دوم: سطح زیر نمودار همان مسافت طی‌شده است؛ بنابراین:

$$S = \frac{1}{2} v_{max}(30) = 360 \Rightarrow v_{max} = 24\ m/s$$

گام سوم: شتاب دو مرحلهٔ حرکت و سرعت در لحظات خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

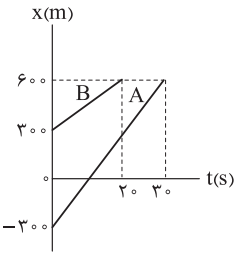
$$\begin{cases} 20\,a_1 = -v_{max} \Rightarrow 20a_1 = -24 \Rightarrow a_1 = -1/2\ m/s^2 \\ a_2 = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0-(-24)}{10} = 2/4\ m/s^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{5\,s} = -1/2(5) = -6\ m/s\ ,\ v_{25\,s} = 2/4(5) - 24 = -12\ m/s$$

گام چهارم: شتاب متوسط در بازهٔ زمانی مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{(-12-(-6))\vec{i}}{25-5} = \frac{-6\vec{i}}{20} = (-0/3\ m/s^2)\vec{i}$$

۱۶ شکل زیر بخشی از نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B را نشان می‌دهد که در راستای محور x حرکت می‌کنند. فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t = ۱۵\ s$ چند برابر فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t = ۱۰\ s$ است؟



۱) $\frac{۵}{۶}$

۲) $\frac{۶}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

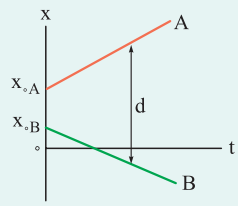
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

با استفاده از داده‌های نمودار، معادلهٔ حرکت دو متحرک را بنویسید و سپس فاصلهٔ آن‌ها را در زمان‌های خواسته‌شده به دست آورید.

درس Box

در نمودارهای مکان ـ زمان دومتحرکه:



- فاصلهٔ دو متحرک، همان طول خط قائم بین نمودارها است (طول d).
- فاصلهٔ دو متحرک را به صورت $|x_A - x_B|$ هم می‌توان نوشت که معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت سرعت ثابت را باید جایگزین کنیم:

$$x = vt + x_۰$$

- فاصلهٔ اولیهٔ دو متحرک $|x_{۰A} - x_{۰B}|$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ حرکت A و B را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} v_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{۹۰۰}{۳۰} = ۳۰\ m/s \ ,\ x_{۰A} = -۳۰۰\ m \Rightarrow x_A = ۳۰t - ۳۰۰ \\ v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{۳۰۰}{۲۰} = ۱۵\ m/s \ ,\ x_{۰B} = ۳۰۰\ m \Rightarrow x_B = ۱۵t + ۳۰۰ \end{cases}$$

گام دوم: مکان و فاصلهٔ دو متحرک در لحظات ۱۵s و ۱۰s را به دست می‌آوریم:

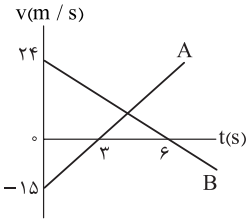
$$t_۱ = ۱۵\ s \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۳۰(۱۵) - ۳۰۰ = ۱۵۰\ m \\ x_B = ۱۵(۱۵) + ۳۰۰ = ۵۲۵\ m \end{cases} \Rightarrow d_۱ = ۵۲۵ - ۱۵۰ = ۳۷۵\ m$$

$$t_۲ = ۱۰\ s \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۳۰(۱۰) - ۳۰۰ = ۰ \\ x_B = ۱۵(۱۰) + ۳۰۰ = ۴۵۰\ m \end{cases} \Rightarrow d_۲ = ۴۵۰\ m$$

گام سوم: نسبت خواسته‌شدهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{d_۱}{d_۲} = \frac{۳۷۵}{۴۵۰} = \frac{۵}{۶}$$

۱۷ نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند به شکل زیر است. اگر جهت حرکت دو متحرک A و B به ترتیب در مکان‌های $x_1 = -۲۰\ m$ و $x_2 = ۲۰\ m$ تغییر کند، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t = ۵\ s$ چند متر است؟



۱) ۲۸

۲) ۳۲

۳) ۴۸

۴) ۵۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

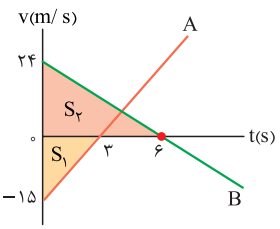
با داشتن جابه‌جایی (سطح زیر نمودار) و مکان نهایی متحرک، مکان اولیهٔ آن‌ها و سپس معادلهٔ حرکت متحرک را به دست آورید و در نهایت فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ مورد نظر را حساب کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در لحظه‌ای که نمودار، محور زمان را قطع می‌کند، جهت حرکت تغییر می‌کند:

$$x_{۳s_A} = -۲۰\ m \ , \ x_{۶s_B} = ۲۰\ m$$

گام دوم: با استفاده از سطح زیر نمودار، جابه‌جایی و سپس مکان اولیهٔ A و B را به دست می‌آوریم:



$$\Delta x_A = -S_1 = -۲۲/۵\ m \Rightarrow x_{۳s} - x_{۰A} = -۲۲/۵\ m \Rightarrow x_{۰A} = ۲/۵\ m$$

$$\Delta x_B = S_2 = ۷۲\ m \Rightarrow x_{۶s_B} - x_{۰B} = ۷۲\ m \Rightarrow x_{۰B} = -۵۲\ m$$

گام سوم: شتاب، سرعت اولیه و معادلهٔ حرکت دو متحرک را با استفاده از نمودار به دست می‌آوریم:

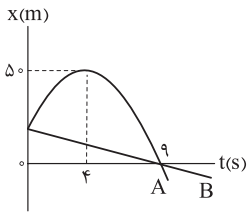
$$\begin{cases} v_{۰A} = -۱۵\ m/s \\ a_A = \frac{۱۵}{۳} = ۵\ m/s^۲ \Rightarrow x_A = \frac{۵}{۲}t^۲ - ۱۵t + \frac{۵}{۲} \Rightarrow x_{۵s_A} = -۱۰\ m \\ x_{۰A} = ۲/۵\ m \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{۰B} = ۲۴\ m/s \\ a_B = -\frac{۲۴}{۶} = -۴\ m/s^۲ \Rightarrow x_B = -۲t^۲ + ۲۴t - ۵۲ \Rightarrow x_{۵s_B} = ۱۸\ m \\ x_{۰B} = -۵۲\ m \end{cases}$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$|x_B - x_A| = ۱۸ - (-۱۰) = ۲۸\ m$$

۱۸ **نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر شتاب متحرک A، ثابت باشد، در لحظه‌ای که سرعت دو متحرک برابر است، فاصلهٔ متحرک A از مبدأ مکان چند برابر فاصلهٔ متحرک B از مبدأ مکان است؟**



۱) ۵

۲) ۵/۵

۳) ۱۰

۴) ۱۱

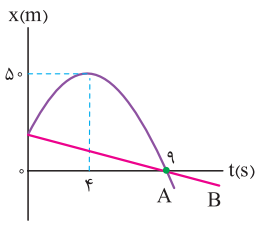
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

با توجه به نوع حرکت دو متحرک A و B، معادلات مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان آن‌ها را با توجه به نمودار به دست آورید و لحظهٔ برابری سرعت را به دست آورید و در نهایت مکان دو متحرک را با قراردادن لحظهٔ برابری سرعت در معادلات حرکت محاسبه و فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ مکان را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به رابطهٔ لحظهٔ توقف $(-\frac{v_0}{a})$ و نوشتن معادلهٔ جابه‌جایی بین لحظات ۴ تا ۹ ثانیه و سپس ۰ تا ۴ ثانیه، معادلات سرعت و حرکت A و B را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} -\frac{v_{0A}}{a_A} = 4 \Rightarrow v_{0A} = -4a_A \ (1) \\ \Delta x_{(4-9)\,s} = -50 = \frac{1}{2}a_A(5)^2 \Rightarrow \begin{cases} a_A = -4\ m/s^2 \\ v_0 = 16\ m/s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -2t^2 + 16t + 18 \\ v_A = -4t + 16 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Delta x_{(0-4)\,s} = \frac{v_0 + 0}{2}(4) = 32\ m \Rightarrow x_{0A} = 18\ m$$

$$\begin{cases} v_B = \frac{0-18}{9-0} = -2\ m/s \\ x_B = -2t + 18 \end{cases}$$

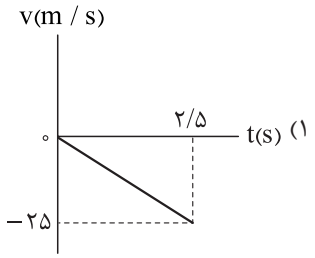
گام دوم: با برابر قراردادن معادلات سرعت، لحظهٔ مورد نظر را به دست می‌آوریم:

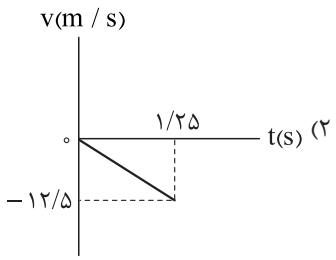
$$\xrightarrow{v_A = v_B} -4t + 16 = -2 \Rightarrow t = 4/5\ s$$

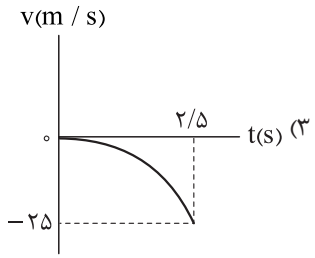
اکنون مکان دو متحرک را در لحظهٔ $t = 4/5\ s$ حساب کرده و فاصلهٔ دو متحرک از مبدأ مکان را نسبت به یکدیگر پیدا می‌کنیم:

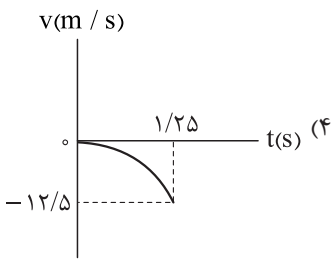
$$x_A = -2(4/5)^2 + 16(4/5) + 18 = 49/5\ m$$
$$x_B = -2(4/5) + 18 = 9\ m$$
$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{49/5}{9} = 5/5$$

۱۹ در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع ۳۱/۲۵ متری سطح زمین رها می‌شود. نمودار سرعت ـ زمان گلوله از لحظهٔ رهاشدن آن تا لحظهٔ برخورد به سطح زمین، کدام است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

حرکت سقوط آزاد، نوعی حرکت با شتاب ثابت $(a = g)$ است؛ بنابراین نمودارها و معادلات حرکت آن مشابه حرکت شتاب ثابت است:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به درس‌باکس، نمودار سرعت ـ زمان به صورت خطی خواهد بود.

گام دوم: با استفاده از روابط سقوط آزاد، زمان سقوط و سرعت برخورد را به دست می‌آوریم:

$$v^۲ - (۰)^۲ = -۲(۱۰)(۳۱/۲۵) \Rightarrow v = -۲۵\ m/s \xrightarrow{v=-gt+v_۰} -۲۵ = -۱۰t + ۰ \Rightarrow t = ۲/۵\ s$$

۲۰ در شرایط خلأ، گلوله‌ای از یک بلندی رها شده و ۴ s بعد به زمین برخورد می‌کند. تندی گلوله در نیمهٔ راه چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) $۱۰\sqrt{۲}$ ۲) ۲۰ ۳) $۲۰\sqrt{۲}$ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

از روابط حرکت سقوط آزاد، ابتدا ارتفاع سقوط را به دست بیاورید و سپس از رابطهٔ مستقل از زمان، تندی گلوله را در نیمهٔ مسیر، محاسبه کنید.

درس Box

جهت به دست آوردن روابط سقوط آزاد، کافی است در روابط شتاب ثابت به جای شتاب، g و به جای y ، x را قرار دهیم. (جهت رو به پایین را مثبت فرض می‌کنیم.)

معادلهٔ مکان ـ زمان:

$$y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰$$

معادلهٔ سرعت ـ زمان:

$$v = gt + v_۰$$

معادلهٔ مستقل از زمان:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲g\Delta y$$

معادلهٔ سرعت متوسط:

$$v_{av} = \frac{v + v_۰}{۲}$$

معادلهٔ مستقل از شتاب:

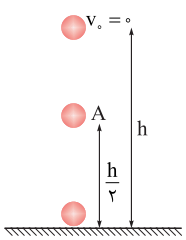
$$\Delta y = (\frac{v + v_۰}{۲})\Delta t$$

معادلهٔ مستقل از سرعت اولیه:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + vt + y_۰$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با رسم یک شکل مناسب و استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان سقوط آزاد، ارتفاع سقوط را به دست می‌آوریم:



$$\Delta y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t = \frac{۱}{۲}(۱۰)(۴)^۲ + ۰ = ۸۰\ m \Rightarrow \frac{h}{۲} = ۴۰\ m$$

گام دوم: با نوشتن رابطهٔ مستقل از زمان، از لحظهٔ سقوط تا نیمهٔ مسیر داریم:

$$v_A^۲ - v_۰^۲ = ۲g\Delta y \Rightarrow v_A^۲ - ۰ = ۲(۱۰)(۴۰) \Rightarrow v_A^۲ = ۸۰۰ \Rightarrow v_A = \sqrt{۸۰۰} = ۲۰\sqrt{۲}\ m/s$$

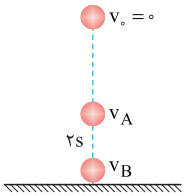
۲۱ گلوله‌ای از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌شود. تندی متوسط گلوله در ۲ ثانیهٔ آخر حرکت خود قبل از رسیدن به سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰\ m/s^۲$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدای تندی گلوله هنگام برخورد و ۲ ثانیه قبل از آن را، از روابط سقوط آزاد به دست می‌آوریم و سپس تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** تندی گلوله در لحظهٔ برخورد و ۲ ثانیه قبل از آن را به دست می‌آوریم:

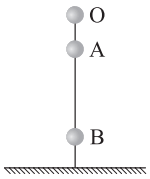


$$\begin{cases} v_B^۲ - v_۰^۲ = ۲g\Delta y \Rightarrow v_B^۲ - ۰ = ۲(۱۰)(۸۰) \Rightarrow v_B = ۴۰\ m/s \\ v_B = v_A + g(۲) \Rightarrow ۴۰ = v_A + ۲۰ \Rightarrow v_A = ۲۰\ m/s \end{cases}$$

گام دوم: با داشتن تندی‌های A و B به راحتی تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{v_A + v_B}{۲} = \frac{۲۰ + ۴۰}{۲} = ۳۰\ m/s$$

۲۲ در شکل زیر، گلوله‌ای از نقطهٔ O رها می‌شود و در مدت $2/4\ s$ از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رسد. اگر فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر $60\ m$ باشد، فاصلهٔ دو نقطهٔ O و A برابر چند متر است؟ ($g = 10\ m/s^2$ و مقاومت هوا ناچیز است.)



۱) $8/45$

۲) 13

۳) $16/9$

۴) 26

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

از روابط سقوط آزاد، تندی نقطهٔ A را محاسبه کنید و سپس فاصلهٔ OA را به دست آورید.

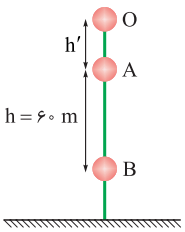
درس Box

در حرکت سقوط آزاد، با مثبت فرض‌کردن جهت رو به پایین، علامت و اندازهٔ جابه‌جایی و سرعت متوسط با مسافت طی‌شده و تندی متوسط برابر می‌شود:

$$|\Delta y| = \ell \ ,\ s_{av} = \frac{|\Delta y|}{\Delta t}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تندی گلوله در نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:



$$v_B = v_A + g(2/4) \Rightarrow v_B = v_A + 24 \ (1)$$

$$\Delta y = \frac{v_1 + v_2}{2}\Delta t \Rightarrow h = \frac{v_A + v_B}{2}(2/4) \xrightarrow{(1)} 60 = \frac{2v_A + 24}{2}(2/4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_A = 13\ m/s \\ v_B = 37\ m/s \end{cases}$$

گام دوم: فاصلهٔ O تا A را حساب می‌کنیم:

$$v_A^2 - v_0^2 = 2g\Delta y \Rightarrow (13)^2 - (0)^2 = 2(10)h' \Rightarrow h' = \frac{(13)^2}{20} = 8/45\ m$$

آزمون ۷ آذر ۱۴۰۴

فیزیک ۳

۱ متحرکی با شتاب ثابت $\vec{a} = (-۳\ m/s^۲)\vec{i}$ در راستای محور x در حال حرکت است. اگر سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ اول برابر $(۲/۵ m/s)\vec{i}$ باشد، سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ سوم برابر چند متر بر ثانیه است؟

۱) $۲۷/۵\vec{i}$ ۲) $۱۷/۵\vec{i}$

۳) $-۱۷/۵\vec{i}$ ۴) $-۲۷/۵\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

شتاب متوسط $(\vec{a}_{av})$

- در هر بازهٔ زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازهٔ زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱}$$

$\vec{a}_{av}$: شتاب متوسط $(m/s^۲)$

$\vec{v}_۱$: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱$ (m/s)

$\vec{v}_۲$: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲$ (m/s)

- شتاب متوسط، کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ است، زیرا Δt همواره مثبت است.
- در حرکت روی خط راست برای سادگی، رابطهٔ شتاب متوسط را می‌توان به صورت زیر به کار برد:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}$$

- در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$ برابر است با سرعت آن در وسط همین بازهٔ زمانی، یعنی سرعت در لحظهٔ $t' = \frac{t_۱ + t_۲}{۲}$.
- در حرکت با شتاب ثابت، شتاب لحظه‌ای و شتاب متوسط برابر هستند:

$$a = a_{av}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: لحظهٔ وسط در ۵ ثانیهٔ اول حرکت را با $t_۱$ نشان می‌دهیم:

$$t_۱ = \frac{۰ + ۵}{۲} = ۲/۵\ s$$

لحظهٔ وسط در ۵ ثانیهٔ سوم حرکت را با $t_۲$ نشان می‌دهیم:

$$t_۲ = \frac{۱۰ + ۱۵}{۲} = ۱۲/۵\ s$$

گام دوم: سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ اول حرکت، با سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱ = ۲/۵\ s$ برابر است. یعنی:

$$v_۱ = ۲/۵\ m/s$$

سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ سوم حرکت که آن را با $v_۲$ نمایش می‌دهیم، با سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲ = ۱۲/۵\ s$ برابر است.

گام سوم: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲$ را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow -۳ = \frac{v_۲ - ۲/۵}{۱۲/۵ - ۲/۵} \Rightarrow -۳۰ = v_۲ - ۲/۵ \Rightarrow v_۲ = -۲۷/۵\ m/s$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ سوم حرکت نیز $-۲۷/۵\ m/s$ است که برحسب بردار یکه به صورت $(-۲۷/۵\ m/s)\vec{i}$ نوشته می‌شود.

۲ متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند. در بازه‌ای که سرعت متحرک از $\vec{v}_1 = (-5\ m/s)\vec{i}$ به $\vec{v}_2 = (15\ m/s)\vec{i}$ می‌رسد، تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۶/۲۵ ۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

نمودار سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت

۱) با توجه به این‌که معادلهٔ سرعت در این نوع حرکت، از درجهٔ اول می‌باشد، نمودار آن به صورت یک خط شیبدار است و شیب آن، شتاب متحرک را نشان می‌دهد.

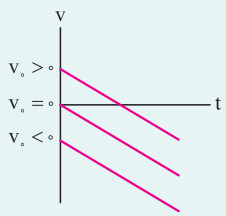
۲) نقطهٔ شروع این نمودار روی محور v، سرعت اولیه (v_0) را نشان می‌دهد.

۳) مساحت سطح بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، در هر بازهٔ زمانی، برابر با جابه‌جایی متحرک در آن بازه است. (مساحت بخشی از سطح را که زیر محور زمان است، منفی در نظر می‌گیریم؛ زیرا سرعت و جابه‌جایی در این بخش، منفی هستند.)

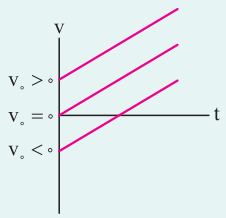
۴) قدرمطلق مساحت سطح بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، مسافت پیموده‌شده در بازهٔ زمانی مورد نظر را نشان می‌دهد.

۵) اگر مکان اولیه معلوم باشد، می‌توان نمودار مکان ـ زمان را براساس نمودار سرعت ـ زمان رسم نمود:

(شیب خط منفی)



(شیب خط مثبت)



تندی متوسط و سرعت متوسط

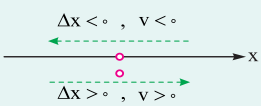
تندی متوسط، کمیتی نرده‌ای است اما سرعت متوسط کمیتی برداری محسوب می‌شود که با بردار جابه‌جایی هم‌جهت است. تعریف این دو کمیت، به صورت زیر است:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

s_{av}: تندی متوسط (m/s)

l: مسافت (m)

Δx: مدت‌زمان (s)



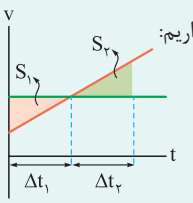
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

x_1: مکان متحرک در لحظهٔ t_1 (m)

x_2: مکان متحرک در لحظهٔ t_2 (m)

Δt: اندازهٔ جابه‌جایی (m)

- علامت‌های جبری Δx و v_{av} جهت جابه‌جایی و سرعت متوسط را نشان می‌دهند. اگر علامت آن‌ها مثبت باشد، یعنی متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و اگر منفی باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.
- اگر نسبت تشابه دو مثلث برابر k باشد، نسبت مساحت این دو مثلث k^2 است. مثلاً در شکل مقابل داریم:



$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = k \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = k^2$$

- وقتی در یک بازهٔ زمانی، علامت سرعت عوض می‌شود یعنی متحرک تغییر جهت داده و مسافت با جابه‌جایی برابر نیست. در نتیجه، تندی متوسط نیز با سرعت متوسط برابر نیست.

رابطهٔ سرعت متوسط متحرک در حرکت با شتاب ثابت:

$v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$

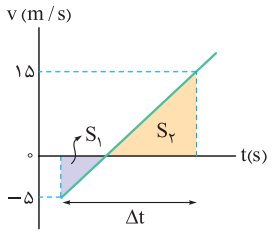
$v_۱$: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱$ (m/s)

$v_۲$: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲$ (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا سرعت متوسط متحرک را به دست می‌آوریم و نمودار سرعت ـ زمان آن را رسم می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} = \frac{-۵ + ۱۵}{۲} = ۵\ m/s$$

نسبت مساحت‌های دو مثلث $S_۱$ و $S_۲$ را حساب می‌کنیم:



$$\frac{S_۲}{S_۱} = k^۲ \xrightarrow{k=\frac{۱۵}{۵}=۳} \frac{S_۲}{S_۱} = ۳^۲ = ۹$$

گام دوم: به کمک مساحت سطح بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، جابه‌جایی متحرک را برحسب $S_۱$ و $S_۲$ می‌نویسیم و در رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ به کار می‌بریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-S_۱ + S_۲}{\Delta t} \xrightarrow[v_{av}=۵\ m/s]{S_۲=۹S_۱} ۵ = \frac{۸S_۱}{\Delta t} \Rightarrow \frac{S_۱}{\Delta t} = \frac{۵}{۸}$$

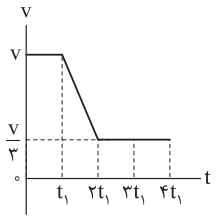
گام سوم: تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{S_۱ + ۹S_۱}{\Delta t} = \frac{۱۰S_۱}{\Delta t} = ۱۰ \times \frac{۵}{۸} = \frac{۵۰}{۸} = ۶/۲۵\ m/s$$

گول نخوری ✘ حواستون باشه که در متن سؤال، تندی متوسط را خواسته، نه سرعت متوسط را؛ بنابراین مراقب باشید که در دام گزینهٔ (۱) نیفتید.

SanjeshCloud

۳ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در کدام بازهٔ زمانی کم‌تر است؟



۱) t_1 تا $t=0$

۲) $2t_1$ تا $t=0$

۳) $3t_1$ تا $t=0$

۴) $4t_1$ تا $t=0$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: می‌دانیم مساحت سطح بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، جابه‌جایی متحرک را نشان می‌دهد. از طرفی چون سرعت متحرک تغییر علامت نداده است، سرعت متوسط و تندی متوسط در همهٔ بازه‌های زمانی یکسان هستند. بر این اساس تندی متوسط متحرک را در بازه‌های زمانی خواسته‌شده به دست می‌آوریم و با هم مقایسه می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$$

۱) بازهٔ زمانی ۰ تا t_1:

$$s_{av_1}=\frac{l_1}{\Delta t_1}=\frac{vt_1}{t_1-0}=v$$

۲) بازهٔ زمانی ۰ تا $2t_1$:

$$s_{av_2}=\frac{l_2}{\Delta t_2}=\frac{vt_1+\frac{v}{3}(2t_1-t_1)}{2t_1-0}=\frac{(v+\frac{2}{3}v)t_1}{2t_1}=\frac{\frac{5}{3}vt_1}{2t_1}=\frac{5}{6}v$$

۳) بازهٔ زمانی ۰ تا $3t_1$:

$$s_{av_3}=\frac{l_3}{\Delta t_3}=\frac{\frac{5}{3}vt_1+\frac{v}{3}(3t_1-2t_1)}{3t_1-0}=\frac{\frac{6}{3}vt_1}{3t_1}=\frac{2}{3}v$$

۴) بازهٔ زمانی ۰ تا $4t_1$:

$$s_{av_4}=\frac{l_4}{\Delta t_4}=\frac{2vt_1+\frac{v}{3}(4t_1-3t_1)}{4t_1-0}=\frac{\frac{7}{3}vt_1}{4t_1}=\frac{7}{12}v$$

گام دوم: با مقایسهٔ تندی‌های متوسط به‌دست‌آمده داریم:

$$s_{av_4}<s_{av_3}<s_{av_2}<s_{av_1}$$

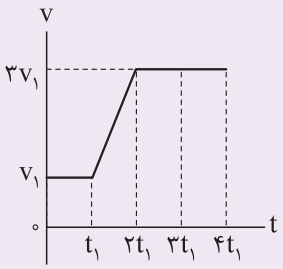
بنابراین، در بازهٔ زمانی $t=0$ تا $4t_1$، تندی متوسط متحرک کم‌ترین مقدار را دارد.

تیزبازی

با گذشت زمان، تندی متحرک کاهش یافته و سپس ثابت مانده است؛ بنابراین از لحظهٔ شروع $(t=0)$، کم‌ترین تندی متوسط مربوط به کل بازهٔ زمانی حرکت است.

کنکور

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی مسیری مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. سرعت متوسط در کدام بازهٔ زمانی بیشتر است؟ *(سؤال ۴۵ ـ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))*



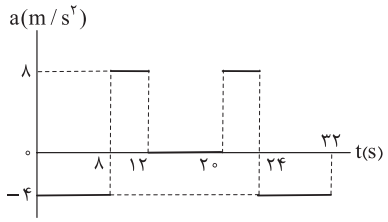
۱) t_1 تا $t=0$

۲) $2t_1$ تا $t=0$

۳) $3t_1$ تا $t=0$

۴) $4t_1$ تا $t=0$

۴ **نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر $\vec{v}_{0} = (16\ m/s)\vec{i}$ باشد، در بازهٔ زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 32\ s$ کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این متحرک درست است؟**



۱) متحرک ۸ s در خلاف جهت محور x حرکت کرده است.

۲) متحرک ۳ مرتبه تغییر جهت داده است.

۳) حرکت متحرک ۱۲ s به صورت تندشونده است.

۴) اندازهٔ جابه‌جایی متحرک ۵۱۲ m است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نمودار شتاب ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت

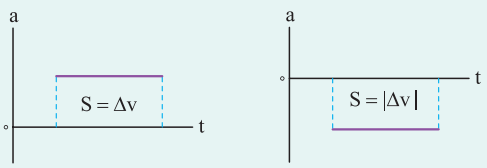
۱) این نمودار به صورت یک خط افقی موازی محور زمان است.

۲) مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان، در هر بازهٔ زمانی برابر با تغییر سرعت (Δv) در آن بازه است $(S = \Delta v)$، به نحوی که مساحت سطحی را که بالای محور زمان است، مثبت و مساحت سطحی را که زیر محور زمان است منفی در نظر می‌گیریم.

۳) اگر نمودار شتاب ـ زمان، شامل دو یا چند مرحلهٔ مختلف باشد که هر کدام شتاب ثابت خود را دارند، می‌توان نوشت:

$$\Delta v_{\text{کل}} = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \dots$$

۴) اگر سرعت اولیه معلوم باشد، می‌توان نمودار سرعت ـ زمان را براساس نمودار شتاب ـ زمان رسم نمود.

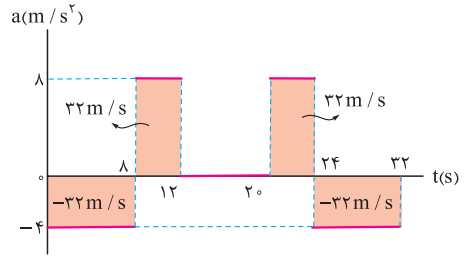


- اگر متحرک در جهت محور x حرکت کند، $v > 0$ و اگر خلاف جهت محور x حرکت کند، $v < 0$ است. هم‌چنین در لحظه‌ای که متحرک روی محور x تغییر جهت می‌دهد $v = 0$ است.
- اگر نمودار $v - t$ از محور t دور شود یعنی حرکت تندشونده است. در این صورت سرعت (v) و شتاب (a) هم‌علامت هستند. $av > 0$

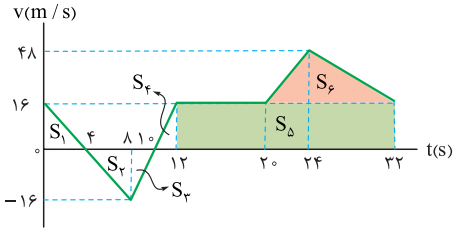
اما اگر نمودار $v - t$ به محور t نزدیک شود یعنی حرکت کندشونده است. در این صورت سرعت (v) و شتاب (a) غیرهم‌علامت هستند. $av < 0$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک مساحت سطح محدود بین نمودار شتاب ـ زمان و محور زمان، تغییر سرعت در هر مرحله را به دست می‌آوریم:



گام دوم: با معلوم‌بودن سرعت اولیه (v_0)، نمودار سرعت ـ زمان متحرک را در مدت ۳۲ s رسم می‌کنیم. مثلث‌های S_1 و S_2 با یکدیگر هم‌نهشت هستند. مثلث‌های S_3 و S_4 نیز با یکدیگر هم‌نهشت هستند.



گام سوم: اکنون به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ (۱): در بازهٔ زمانی ۴ S تا ۱۰ S سرعت متحرک منفی است، یعنی مدت ۶ S در خلاف جهت محور x حرکت کرده و گزینهٔ (۱) نادرست است.

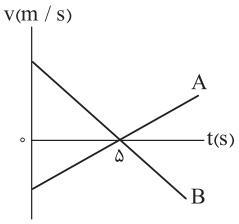
گزینهٔ (۲): سرعت متحرک، دو بار (در لحظه‌های ۴ S و ۱۰ S) تغییر علامت و تغییر جهت داده است؛ بنابراین گزینهٔ (۲) نیز نادرست است.

گزینهٔ (۳): بازه‌هایی که حرکت متحرک تندشونده است. عبارت‌اند از: ۴ S تا ۸ S، ۱۰ S تا ۱۲ S و ۲۰ S تا ۲۴ S که مجموعاً ۱۰ S می‌شود؛ بنابراین گزینهٔ (۳) نیز نادرست است.

گزینهٔ (۴): به کمک مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، جابه‌جایی متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \overbrace{S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴}^{\text{مثلث}} + S_۵ + S_۶ = (۲۰\times۱۶) + \frac{۱۲\times۳۲}{۲} = ۳۲۰ + ۱۹۲ = ۵۱۲\ \text{m}$$

۵ نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر و فاصلهٔ آن‌ها در مبدأ زمان برابر ۷۵ m است. اگر در لحظه‌ای که جهت حرکت دو متحرک تغییر می‌کند، دو متحرک در یک مکان باشند، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t = ۸\ s$ برابر چند متر است؟



۱) ۲۷

۲) ۳۰

۳) ۴۵

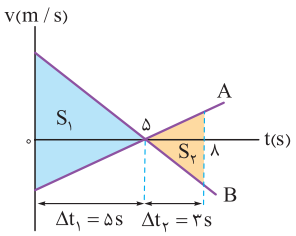
۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به نمودار داده‌شده، در لحظهٔ $t = ۵\ s$ که علامت سرعت هر دو متحرک تغییر می‌کند، جهت حرکت آن دو نیز عوض می‌شود. در همین لحظه، مکان دو متحرک نیز یکسان شده است؛ بنابراین دو متحرک از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = ۵\ s$ به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند و به هم می‌رسند، سپس از لحظهٔ $t = ۵\ s$ تا $t = ۸\ s$ در خلاف جهت یکدیگر از هم دور می‌شوند.

گام دوم: اندازهٔ مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، مسافت طی‌شده توسط متحرک را نشان می‌دهد. با توجه به تشابه دو مثلث $S_۱$ و $S_۲$ داریم:



$$\frac{S_۲}{S_۱} = (\frac{\Delta t_۲}{\Delta t_۱})^۲ \Rightarrow \frac{S_۲}{۷۵} = (\frac{۳}{۵})^۲ \Rightarrow S_۲ = \frac{۷۵ \times ۹}{۲۵} = ۲۷\ m$$

۶ در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع H رها می‌شود. اگر تندی گلوله $۰/۸\ s$ قبل از برخورد به زمین برابر $۴۰\ m/s$ باشد، H برابر چند متر است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) $۸۳/۲$ ۲) $۹۳/۲$ ۳) $۱۱۵/۲$ ۴) $۱۲۵/۲$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

وقتی جسمی بدون سرعت اولیه از ارتفاعی رها شده و سقوط آزاد انجام می‌دهد، بعد از گذشت زمان t، تندی آن (v) و مسافت طی‌شده توسط آن یا ارتفاع سقوط (H) از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$v = gt$$

$$H = \frac{۱}{۲}gt^۲$$

v: تندی (m/s)

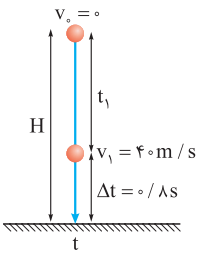
g: شتاب گرانش در نزدیکی سطح زمین $\simeq ۱۰\ m/s^۲$

t: زمان سقوط (s)

H: مسافت طی‌شده یا ارتفاع سقوط (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: زمانی را که طول می‌کشد تا تندی گلوله به $۴۰\ m/s$ برسد $(t_۱)$، به دست می‌آوریم:



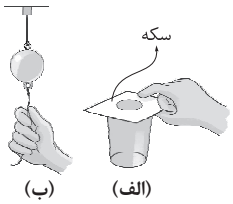
$$v_۱ = gt_۱ \Rightarrow ۴۰ = ۱۰t_۱ \Rightarrow t_۱ = ۴\ s$$

گام دوم: کل زمان سقوط (t) و از آن‌جا ارتفاع سقوط را حساب می‌کنیم:

$$t = t_۱ + \Delta t = ۴ + ۰/۸ = ۴/۸\ s$$

$$H = \frac{۱}{۲}gt^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times (۴/۸)^۲ = ۱۱۵/۲\ m$$

۷ **در شکل (الف)، مقوای روی لیوان و در شکل (ب)، نخ متصل به پایین گوی سنگین را به صورت ناگهانی می‌کشیم. به ترتیب در هر شکل کدام اتفاق رخ می‌دهد؟**



۱) سکهٔ روی مقوا همراه با مقوا حرکت می‌کند. ـ نخ متصل به بالای گوی، پاره می‌شود.

۲) سکهٔ روی مقوا همراه با مقوا حرکت می‌کند. ـ نخ متصل به پایین گوی پاره می‌شود.

۳) سکه در لیوانِ زیرِ مقوا می‌افتد. ـ نخ متصل به بالای گوی، پاره می‌شود.

۴) سکه در لیوانِ زیرِ مقوا می‌افتد. ـ نخ متصل به پایین گوی، پاره می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

قانون اول نیوتون:

یک جسم، حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را حفظ می‌کند، مگر آن‌که نیروی خالص غیرصفری به آن وارد شود. یعنی وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند، اگر جسم ساکن باشد، هم‌چنان ساکن می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد، سرعتش تغییر نمی‌کند.

لَختی:

با توجه به قانون اول نیوتون، وقتی نیروی خالص وارد بر اجسام صفر است، تمایل دارند که وضعیت حرکت خود را حفظ کنند. به این تمایل اجسام به حفظ حالت قبلی خود، لَختی گفته می‌شود. هر چه تغییر سرعت، ناگهانی‌تر باشد، لختی قابل ملاحظه‌تر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به قانون اول نیوتون و با فرض کم‌بودن اصطکاک بین سکه و مقوا، سکه می‌خواهد در جای خود بماند، پس وقتی زیر آن خالی می‌شود، درون لیوان می‌افتد. (رد گزینه‌های (۱) و (۲))

گام دوم: اگر نیروی ناگهانی واردشده بر نخ پایینی بیشتر از تحمل نخ باشد، لختی گلوله و مقاومت آن در مقابل حرکت، سبب می‌شود که نخ پایینی پاره شود. (رد گزینهٔ (۳))

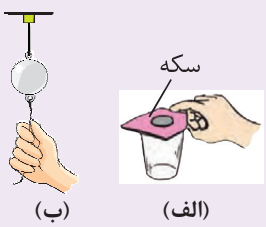
نکته

نخ بالایی در صورتی پاره می‌شود که به آرامی نیروی وارد بر گوی سنگین را توسط نخ پایینی افزایش دهیم.

کتاب درسی

الف) در شکل (الف) مقوا را به سرعت می‌کشیم، برای سکه چه اتفاقی می‌افتد؟ چرا؟

ب) در شکل (ب)، اگر به آرامی نیروی وارد بر گوی سنگین را زیاد کنیم کدام نخ پاره می‌شود؟ اگر ناگهان نخ را بکشیم، کدام نخ پاره می‌شود؟ علت را توضیح دهید. *(فیزیک (۳) ـ پرسش ۲ ـ ۳ صفحهٔ ۳۲ کتاب درسی رشتهٔ ریاضی)*



۸ **شخصی روی یک ترازوی فنری در آسانسور ایستاده و آسانسور در حال حرکت است. در کدام‌یک از حالت‌های زیر، مقداری که ترازو نشان می‌دهد، الزاماً کم‌تر از وزن جسم است؟**

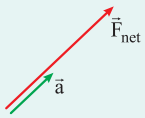
۱) حرکت آسانسور تندشونده باشد.
۲) حرکت آسانسور کندشونده باشد.
۳) سرعت آسانسور به سمت پایین باشد.
۴) شتاب آسانسور به سمت پایین باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

قانون دوم نیوتون

هرگاه نیروهای وارد بر جسمی متوازن نباشند، یعنی بر جسم نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو، شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم دارد و در همان جهت نیروی خالص است، اما با جرم جسم نسبت وارون دارد.



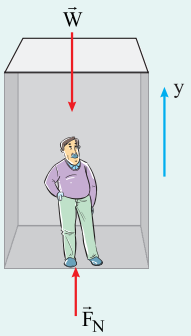
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m} \Rightarrow \vec{F}_{net} = m\vec{a}$$

$\vec{F}_{net}$: نیروی خالص (N)

$\vec{a}$: شتاب (m/s^2)

m : جرم (kg)

اگر شخصی به وزن mg درون آسانسوری ایستاده باشد و آسانسور با شتاب ثابت a در راستای قائم حرکت نماید، نیروی F_N از کف آسانسور بر پای شخص وارد می‌شود:



$\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ { تندشونده ↓ ، کندشونده ↑ }

$F_N - mg = ma$ { یکنواخت ↓ ، یکنواخت ↑ }

$F_N = m(g+a)$ { کندشونده ↓ ، تندشونده ↑ }

وقتی می‌گوییم شتاب آسانسور رو به بالا است، یعنی $a > 0$.

وقتی می‌گوییم شتاب آسانسور رو به پایین است، یعنی $a < 0$.

وقتی می‌گوییم آسانسور با تندی ثابت حرکت می‌کند یعنی $a = 0$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ علامت شتاب حرکت آسانسور را تعیین می‌کنیم. مقداری که ترازوی فنری نشان می‌دهد همان مقدار نیروی F_N است:

$$F_N - mg = ma \xrightarrow{F_N < mg} ma < 0 \xrightarrow{m > 0} a < 0$$

بنابراین شتاب آسانسور رو به پایین است.

نکته باید توجه داشت که منفی‌بودن شتاب، به تنهایی تعیین‌کنندهٔ تندشونده یا کندشونده بودن حرکت نیست.

۹ **می‌خواهیم به جسمی که جرم آن $2\ kg$ است، شتابی به بزرگی $3\ m/s^2$ بدهیم تا در راستای قائم رو به پایین شروع به حرکت کند. نیرویی که باید به جسم وارد کنیم، چند نیوتون و در چه جهتی است؟ ($g = 10\ N/kg$ و مقاومت هوا ناچیز است.)**

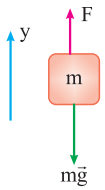
۱) ۱۴، به سمت بالا
۲) ۱۴، به سمت پایین
۳) ۲۶، به سمت بالا
۴) ۲۶، به سمت پایین

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از آن‌جا که شتاب جسم رو به پایین است، علامت شتاب منفی و $a = -3\ m/s^2$ است.

گام دوم: با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



$$F_{net} = ma$$

$$\Rightarrow F - mg = ma \Rightarrow F = m(g+a) \xrightarrow[g=10\ m/s^2,\ a=-3\ m/s^2]{m=2\ kg} F = 2(10-3) = 14N$$

گام سوم: از آن‌جا که $F > 0$ است، جهت این نیرو به سمت بالا است و گزینهٔ (۱) درست است.

امتحان نهایی

می‌خواهیم به جسمی که جرم آن $2\ kg$ است، شتاب $3\ m/s^2$ بدهیم. اگر جسم در راستای قائم با شتاب رو به پایین شروع به حرکت کند و از مقاومت هوا صرف نظر کنیم: *(سؤال ۵ ـ امتحان نهایی تجربی خرداد ۱۴۰۴)*

الف) نیروهای وارد بر جسم را رسم کنید.

ب) اندازهٔ نیرویی که باید به جسم وارد کنیم چند نیوتون است؟ ($g = 10\ m/s^2$)

۱۰ **جرم دو ذرهٔ باردار A و B به ترتیب ۰/۲ kg و ۰/۳ kg است. اگر نیروی الکتریکی که ذرهٔ A به ذرهٔ B وارد می‌کند، در SI به صورت $\vec{F}=۶\vec{i}-۱۲\vec{j}$ باشد، شتاب ذرهٔ A برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (از سایر نیروهای وارد بر دو ذره چشم‌پوشی کنید.)**

۱) $۲۰\vec{i}-۴۰\vec{j}$

۲) $-۲۰\vec{i}+۴۰\vec{j}$

۳) $۳۰\vec{i}-۶۰\vec{j}$

۴) $-۳۰\vec{i}+۶۰\vec{j}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

قانون سوم نیوتون

هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم هم به جسم اول نیرویی هم‌اندازه، هم‌راستا ولی در خلاف جهت وارد می‌کند.

علاوه بر این‌ها، نیروهای کنش و واکنش همواره:

۱) به صورت جفت وجود دارند، یعنی به دو جسم وارد می‌شوند و برایند ندارند.

۲) ممکن است منجر به اثرات متفاوتی شوند.

۳) هم‌نوع‌اند، مثلاً هر دو گرانشی یا هر دو الکتریکی یا هر دو مغناطیسی‌اند.

$\vec{F}_{۱۲}=-\vec{F}_{۲۱}$

$F_{۱۲}$: نیرویی که جسم اول به دوم وارد می‌کند (کنش یا عمل)

$F_{۲۱}$: نیرویی که جسم دوم به اول وارد می‌کند (واکنش یا عکس‌العمل)

$F_{۱۲}=F_{۲۱}$

$m_۱a_۱=m_۲a_۲$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نیرویی که ذرهٔ A به ذرهٔ B وارد می‌کند را با $\vec{F}_{AB}$ نشان می‌دهیم:

$$\vec{F}_{AB}=۶\vec{i}-۱۲\vec{j}\ (N)$$

بنا به قانون سوم نیوتون، نیرویی که ذرهٔ B به ذرهٔ A وارد می‌کند را با $\vec{F}_{BA}$ نشان می‌دهیم:

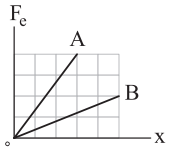
$$\vec{F}_{BA}=-\vec{F}_{AB}=-۶\vec{i}+۱۲\vec{j}\ (N)$$

گام دوم: به کمک قانون دوم نیوتون، شتابی که ذرهٔ A پیدا می‌کند را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_A=\frac{\vec{F}_{BA}}{m_A}=\frac{-۶\vec{i}+۱۲\vec{j}}{۰/۲}=-۳۰\vec{i}+۶۰\vec{j}\ (m/s^۲)$$

SanjeshCloud

۱۱ نمودار نیروی کشسانی دو فنر A و B برحسب تغییر طول آن‌ها به شکل زیر است. ثابت فنر A چند برابر ثابت فنر B است؟



۱) $\frac{۸}{۱۵}$

۲) $\frac{۱۵}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۱۰}$

۴) $\frac{۱۰}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نیروی کشسانی فنر

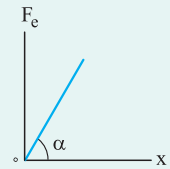
اگر فنری را نسبت به نقطهٔ تعادل خود به اندازهٔ x بکشیم یا فشرده کنیم، نیروی بازگرداننده‌ای در فنر ایجاد می‌شود که به طرف نقطهٔ تعادل است و نیروی کشسانی فنر نام دارد.

قانون هوک: نیروی کشسانی فنر با ثابت فنر و تغییر طول فنر، متناسب است. $F_e = kx$

F_e : اندازهٔ نیروی کشسانی فنر (N)

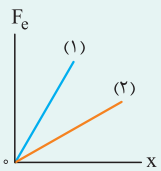
k : ثابت فنر (N/m)

$x = \Delta L$: تغییر طول فنر (m)



$k =$ شیب خط

هر چه ثابت فنر بیشتر باشد، شیب نمودار $F_e - x$ بیشتر و فنر، سخت‌تر است. مثلاً در نمودار زیر، $k_۱ > k_۲$ است.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به رابطهٔ قانون هوک داریم:

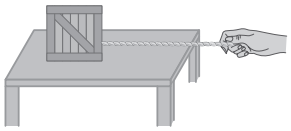
$$F_e = kx \Rightarrow k = \frac{F_e}{x}$$

گام دوم: بر این اساس، نسبت ثابت فنر A به ثابت فنر B را به دست می‌آوریم:

$$\frac{k_A}{k_B} = \frac{F_{e,A}}{F_{e,B}} \times \frac{x_B}{x_A} = \frac{۴}{۲} \times \frac{۵}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

SanjeshCloud

۱۲ در شکل زیر، توسط یک نخ افقی با جرم ناچیز، جعبهٔ ساکنی به جرم $5\ kg$ را روی سطح افقی یک میز به ضریب اصطکاک جنبشی $0/4$ به حرکت درمی‌آوریم. اگر تندی جعبه پس از $80\ cm$ جابه‌جایی به $0/8\ m/s$ برسد، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟ $(g = 10\ m/s^2)$



الف) اندازهٔ نیروی کشش نخ $18\ N$ است.

ب) اندازهٔ نیروی کشش نخ $22\ N$ است.

پ) نیرویی که نخ به دست شخص وارد می‌کند، به سمت چپ است.

ت) اندازهٔ نیرویی که طناب به جعبه وارد می‌کند، بزرگ‌تر از اندازهٔ نیرویی است که جعبه به طناب وارد می‌کند.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

v_0: سرعت متحرک در مکان x_0 (m/s)

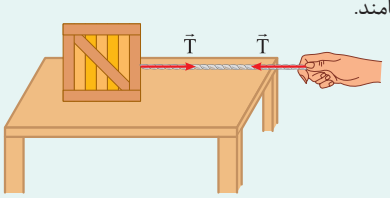
v: سرعت متحرک در مکان x (m/s)

$\Delta x = x - x_0$: جابه‌جایی (m)

a: شتاب (m/s^2)

۲) نیروی کشش طناب:

وقتی طناب متصل به جسمی تحت کشش قرار دارد، طناب جسم را با نیرویی می‌کشد که جهت آن از جسم به سمت بیرون و در راستای طناب است. این نیرو را با $\vec{T}$ نشان می‌دهند و نیروی کشش طناب می‌نامند.



۳) نیروی اصطکاک جنبشی (لغزشی) (f_k):

نیروی اصطکاکی است که هنگام لغزش جسم، موازی با سطح و در خلاف جهت لغزش بر جسم اثر می‌کند.

$$f_k = \mu_k F_N$$

μ_k: ضریب اصطکاک جنبشی

F_N: اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

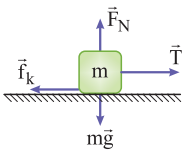
گام اول: به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow (0/8)^2 - 0 = 2a(0/8) \Rightarrow a = 0/4\ m/s^2$$

گام دوم: نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جسم را حساب می‌کنیم:

$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow[\mu_k = 0/4]{F_N = mg = 5\times 10 = 50\ N} f_k = 0/4 \times 50 = 20\ N$$

گام سوم: نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون، اندازهٔ نیروی کشش (T) را پیدا می‌کنیم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow T - f_k = ma \Rightarrow T - 20 = 5\times 0/4 \Rightarrow T = 22\ N$$

بنابراین عبارت «ب» درست و عبارت «الف» نادرست است.

گام چهارم: طبق قانون سوم نیوتون، عبارت «ت» نادرست است، اما عبارت «پ» درست است؛ زیرا وقتی دست شخص طناب را به طرف راست می‌کشد، عکس‌العمل این نیرو، دست شخص را به طرف چپ می‌کشد.

۱۳ **دو گوی هم‌اندازهٔ A و B را که جرم گوی B بیشتر از جرم گوی A است، از بالای برجی به طور هم‌زمان رها می‌کنیم. با فرض این‌که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی ثابت و یکسان باشد، به ترتیب تندی برخورد کدام گوی با زمین بیشتر است و کدام گوی زودتر به زمین می‌رسد؟**

۱) B و B　　۲) A و A　　۳) A و B　　۴) B و A

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

نیروی مقاومت شاره ($\vec{f}_D$): وقتی جسمی درون یک شاره قرار دارد و نسبت به آن حرکت می‌کند، از طرف شاره، نیرویی در خلاف جهت حرکت جسم به آن وارد می‌شود که آن را با $\vec{f}_D$ نشان می‌دهیم و نیروی مقاومت شاره می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: بر این گوی‌ها، دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می‌شود. طبق قانون دوم نیوتون، نیروی خالص وارد بر هر گوی برابر با حاصل‌ضرب جرم در شتاب است. نیروی مقاومت هوا را با f_D و وزن را با $m\vec{g}$ نشان می‌دهیم و برای بررسی ساده‌تر حرکت گوی‌ها، جهت مثبت محور y را به طرف پایین انتخاب می‌کنیم:

$$mg - f_D = ma \Rightarrow a = \frac{mg - f_D}{m} = g - \frac{f_D}{m} \Rightarrow \uparrow a = g - \frac{f_D}{\uparrow m}$$

پس با در نظر گرفتن مقاومت هوا، هر چه m بیشتر باشد، شتاب حرکت بیشتر است:

$$m_B > m_A \Rightarrow a_B > a_A$$

گام دوم: طبق رابطهٔ سرعت ـ جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت، می‌توان نوشت:

$$v^2 - v_\circ^2 = 2a\Delta y \xrightarrow[\Delta y = h]{v_\circ = \circ} v^2 = 2ah \xrightarrow{a_B > a_A} v_B > v_A$$

بنابراین تندی برخورد گوی B بیشتر است.

گام سوم: با استفاده از معادلهٔ جابه‌جایی داریم:

$$\Delta y_A = \Delta y_B \Rightarrow \frac{1}{2}a_A t_A^2 = \frac{1}{2}a_B t_B^2 \xrightarrow{a_B > a_A} t_B < t_A \Rightarrow$$ گوی B زودتر می‌رسد.

امتحان نهایی

دو گوی هم‌اندازه را که جرم یکی سه برابر دیگری است ($m_2 = 3m_1$) از بالای برجی به ارتفاع h به طور هم‌زمان رها می‌کنیم. با فرض این‌که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی، ثابت و یکسان باشد، با نوشتن روابط لازم، شتاب حرکت گوی‌ها را با هم مقایسه کنید. *(سؤال ۸ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ ـ رشتهٔ تجربی)*

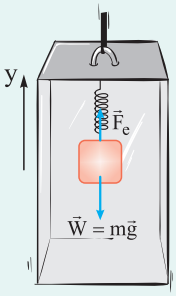
۱۴ جسمی به جرم $4\ kg$ را به انتهای فنری به طول $30\ cm$ و ثابت $600\ N/m$ می‌بندیم. انتهای دیگر فنر را به سقف آسانسوری متصل می‌کنیم. با حرکت آسانسور، طول فنر به $35\ cm$ می‌رسد. در این حالت، شتاب آسانسور چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) $2/5$، رو به بالا
۲) $2/5$، رو به پایین
۳) $7/5$، رو به بالا
۴) $7/5$، رو به پایین

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر وزنهٔ آویخته به فنر قائم، باعث افزایش طول آن شود، در حال تعادل $F_e = mg$ خواهد بود.



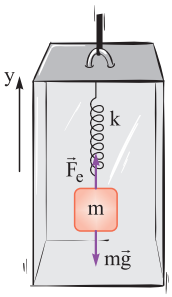
برای وزنهٔ آویخته به فنر قائم درون آسانسور می‌توان نوشت:

$$F_e = m(g+a)$$

- اگر شتاب آسانسور رو به بالا باشد $a > 0$ است.
- اگر شتاب آسانسور رو به پایین باشد $a < 0$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اگر ثابت فنر را با k و تغییر طول فنر را با x نشان دهیم، داریم:



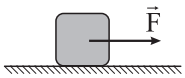
$$\begin{cases} F_e = m(g+a) \\ F_e = kx \end{cases} \Rightarrow kx = m(g+a)$$

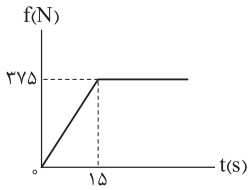
$$\xrightarrow[x=35-30=5\ cm=\frac{5}{100}m]{k=600\ N/m\ ,\ m=4kg\ ,\ g=10\ N/kg} 600\times\frac{5}{100} = 4(10+a)$$

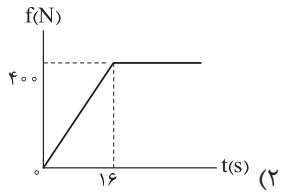
$$\Rightarrow 30 = 40+4a \Rightarrow a = -\frac{10}{4} = -2/5\ m/s^2$$

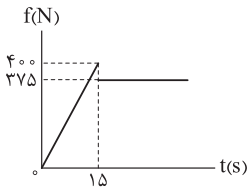
از آن‌جا که شتاب به‌دست‌آمده علامت منفی دارد، جهت این شتاب رو به پایین است.

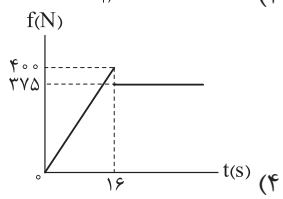
۱۵ در شکل زیر، جسمی به جرم $50\ kg$ روی سطح افقی به ضریب اصطکاک ایستایی $0/8$ و ضریب اصطکاک جنبشی $0/75$ ساکن است. به این جسم نیروی افقی $\vec{F}$ وارد می‌شود. اگر اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ برحسب زمان در SI به صورت $F = 25t$ تغییر کند، نمودار اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم برحسب زمان (t) کدام است؟ $(g = 10\ m/s^2)$



۱)


۲)


۳)


۴)


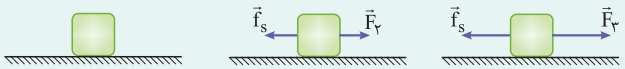
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نیروی اصطکاک ایستایی یا در حال سکون (f_s)

وقتی نیرویی بخواهد جسمی را روی سطحی به حرکت درآورد ولی قادر به تکان‌دادن آن نباشد، معلوم می‌شود نیروی دیگری هم‌اندازهٔ آن و در جهت مخالف، بر جسم اثر می‌کند که مانع حرکت می‌شود. این نیروی مخالف، همان f_s است و مقدارهای متفاوتی بین صفر تا یک مقدار بیشینه دارد.

نیروی f_s را می‌توان با توجه به توازن نیروها و قانون دوم نیوتون تعیین کرد. مثلاً در شکل‌های زیر، برای جسم ساکن داریم:



$f_s = F_1 = 0$ $\qquad$ $f_s = F_2$ $\qquad$ $f_s = F_3$

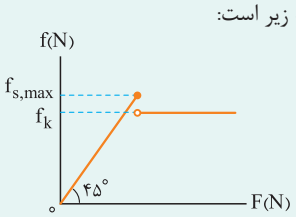
بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی که جسم برای شروع حرکت با آن روبه‌رو می‌شود، نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت $(f_{s,max})$ نامیده می‌شود و در واقع به اندازهٔ کم‌ترین نیروی محرکی است که می‌تواند حرکت جسم را آغاز کند:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N$$

μ_s: ضریب اصطکاک ایستایی

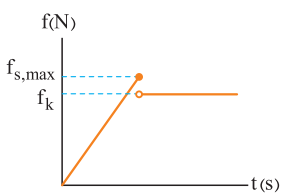
F_N: اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

نمودار اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر یک جسم برحسب اندازهٔ نیروی محرک (F) به صورت زیر است:

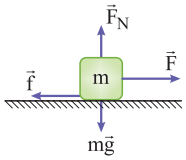


پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در این سؤال، نیروی محرک (F) با زمان (t) متناسب است $(F = 25t)$؛ بنابراین نمودار نیروی اصطکاک برحسب زمان نیز به صورت مقابل است. (ردّ گزینه‌های (۱) و (۲))



گام دوم: اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) و اندازهٔ نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت $(f_{s,max})$ را به دست می‌آوریم:

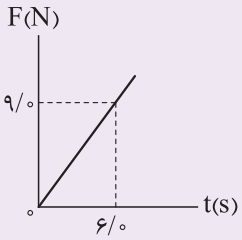


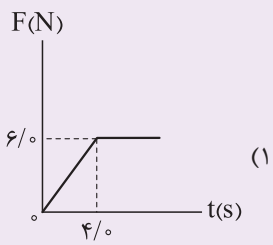
$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow[\mu_k = ۰/۷۵]{F_N = mg = ۵۰ \times ۱۰ = ۵۰۰\ N} f_k = ۰/۷۵ \times ۵۰۰ = ۳۷۵\ N$$

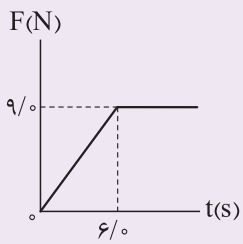
$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[\mu_s = ۰/۸]{F_N = ۵۰۰\ N} f_{s,max} = ۰/۸ \times ۵۰۰ = ۴۰۰\ N \Rightarrow f_{s,max} = F = ۴۰۰\ N$$

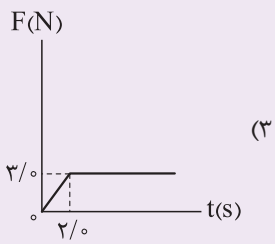
$$F = ۲۵t \Rightarrow ۴۰۰ = ۲۵t \Rightarrow t = ۱۶\ s$$

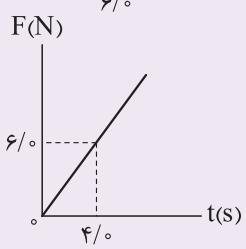
جسمی به جرم ۳ kg بر روی یک سطح افقی قرار دارد. ضریب اصطکاک بین جسم و سطح برابر با ۰/۲ است. یک نیروی افقی متغیر با زمان، مطابق نمودار مقابل، به جسم وارد می‌شود. نمودار نیروی اصطکاک برحسب زمان کدام است؟ (ضریب اصطکاک جنبشی و ضریب اصطکاک ایستایی، یکسان فرض شوند و $g = ۱۰\ m/s^۲$) *(تست ۵۵ـ کنکور تجربی تیر ۱۴۰۴)*



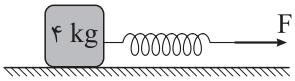
۱)


۲)


۳)


۴)


۱۶ **در شکل زیر، جسمی به جرم ۴ kg روی سطح افقی توسط فنری افقی با ثابت ۵۰۰ N / m و با سرعت ثابت کشیده می‌شود. اگر بزرگی نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می‌کند ۵۰ N باشد، طول فنر نسبت به طول عادی آن چند سانتی‌متر افزایش پیدا می‌کند؟ ($g = ۱۰ \frac{N}{kg}$ و مقاومت هوا ناچیز است.)**



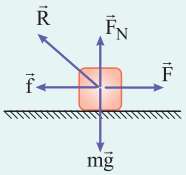
۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

نیروی سطح

از طرف سطح تماس، دو نیروی $\vec{F}_N$ (نیروی عمودی سطح) و $\vec{f}$ (نیروی اصطکاک) بر جسم اثر می‌کنند. این دو نیرو بر هم عمود بوده و برایند آن‌ها، نیروی سطح بر جسم نام دارد که آن را با $\vec{R}$ نشان می‌دهیم:



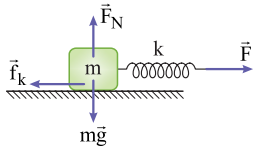
$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با معلوم‌بودن اندازهٔ نیروی سطح (R)، نیروی اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \xrightarrow[R=۵۰\ N]{F_N = mg = ۴ \times ۱۰ = ۴۰\ N} ۵۰ = \sqrt{۴۰^2 + f_k^2} \Rightarrow f_k = ۳۰\ N$$

گام دوم: چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، شتاب آن صفر بوده و به کمک قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

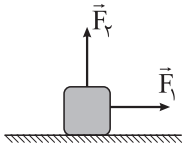


$$F_{net} = ma \xrightarrow{a=۰} F_{net} = ۰ \Rightarrow F - f_k = ۰ \xrightarrow{F=kx} kx = f_k$$

$$\xrightarrow[f_k = ۳۰\ N]{k = ۵۰۰\ N/m} ۵۰۰x = ۳۰ \Rightarrow x = ۰/۰۶m = ۶\ cm$$

SanjeshCloud

۱۷ در شکل زیر، به جسمی به جرم $8\ kg$ نیروی افقی و ثابت $\vec{F}_1$ و نیروی قائم $\vec{F}_2$ وارد می‌شود و جسم روی سطح افقی به صورت تندشونده در حال حرکت است. اگر اندازهٔ نیروی $\vec{F}_2$، $20\ N$ افزایش یابد، اندازهٔ شتاب جسم $1/5\ m/s^2$ تغییر می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی سطح افقی برابر کدام است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

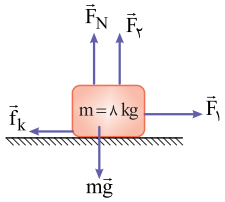


۱) $\frac{10}{3}$ ۲) $\frac{3}{10}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از آن‌جا که جسم به صورت تندشونده حرکت می‌کند، اندازهٔ نیروی $\vec{F}_1$ از اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی $(\vec{f}_k)$ بیشتر است. از طرفی چون افزایش نیروی $\vec{F}_2$ سبب کاهش نیروی اصطکاک می‌شود، اندازهٔ شتاب جسم نسبت به حالت اول افزایش می‌یابد:



گام دوم: قانون دوم نیوتون را در هر دو حالت و در راستای افقی برای جسم می‌نویسیم:

حالت اول:

$$F_{net} = ma_1 \Rightarrow F_1 - f_k = ma_1 = 8a_1 \quad (I)$$
$$\Rightarrow F_1 - 8a_1 = f_k$$

حالت دوم:

$$F'_{net} = ma'_1 \Rightarrow F_1 - f'_k = m(a_1 + 1/5) \Rightarrow F_1 - f'_k = 8a_1 + 12 \Rightarrow F_1 - 8a_1 = f'_k + 12 \quad (II)$$

از ترکیب روابط (I) و (II) داریم:

$$f_k = f'_k + 12$$

گام سوم: نیروی عمودی سطح را در هر دو حالت پیدا می‌کنیم:

حالت اول:

$$F_N + F_2 - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg - F_2 = 80 - F_2$$

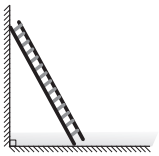
حالت دوم:

$$F'_N + (F_2 + 20) - mg = 0 \Rightarrow F'_N + F_2 + 20 - 80 = 0 \Rightarrow F'_N = 60 - F_2$$

گام چهارم: نتایج به‌دست‌آمده در گام‌های دوم و سوم را با هم ترکیب می‌کنیم و ضریب اصطکاک جنبشی سطح افقی را حساب می‌کنیم:

$$f_k = f'_k + 12 \Rightarrow \mu_k F_N = \mu_k F'_N + 12 \Rightarrow \mu_k(80 - F_2) = \mu_k(60 - F_2) + 12$$
$$\Rightarrow 80\mu_k - \cancel{\mu_k F_2} = 60\mu_k - \cancel{\mu_k F_2} + 12 \Rightarrow 20\mu_k = 12 \Rightarrow \mu_k = \frac{3}{5}$$

۱۸ در شکل زیر، نردبانی همگن به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه داده شده است. ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح افقی و پای نردبان ۰/۷۵ است. در آستانهٔ سرخوردن نردبان، نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، چند برابر نیرویی است که دیوار به نردبان وارد می‌کند؟

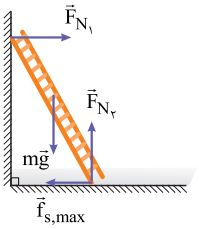


۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** نیروهای وارد بر نردبان را در هر دو راستای افقی و قائم روی شکل نشان می‌دهیم. نیروی خالص وارد بر نردبان صفر است و می‌توان نوشت:



$$F_{N_2} - mg = ۰ \Rightarrow F_{N_2} = mg$$

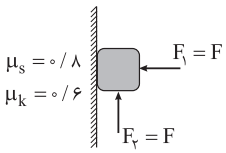
$$F_{N_1} - f_{s,max} = ۰ \Rightarrow F_{N_1} = f_{s,max} \Rightarrow F_{N_1} = \mu_s F_{N_2}$$

$$\xrightarrow{\mu_s = ۰/۷۵} F_{N_1} = ۰/۷۵ F_{N_2} \Rightarrow F_{N_2} = \frac{۴}{۳} F_{N_1}$$

گام دوم: نسبت بزرگی نیروی سطح افقی بر نردبان (R) به بزرگی نیروی دیوار بر نردبان (F_{N_1}) را به دست می‌آوریم:

$$R = \sqrt{f_{s,max}^۲ + F_{N_2}^۲} \xrightarrow[F_{N_2} = \frac{۴}{۳}F_{N_1}]{f_{s,max} = F_{N_1}} R = \sqrt{F_{N_1}^۲ + \frac{۱۶}{۹}F_{N_1}^۲} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{۲۵}{۹}F_{N_1}^۲} = \frac{۵}{۳}F_{N_1} \Rightarrow \frac{R}{F_{N_1}} = \frac{۵}{۳}$$

۱۹ در شکل زیر، جسمی به جرم ۹ kg با نیروی افقی $\vec{F}_1$ به دیوار قائمی تکیه داده شده است و با وجود نیروی قائم $\vec{F}_2$ در آستانهٔ حرکت به سمت پایین قرار دارد. اگر اندازهٔ هر یک از دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$، ۲ برابر شود، اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم چند برابر می‌شود؟ $(g = ۱۰\ m/s^2)$

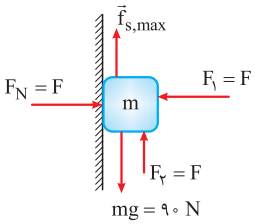


۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نیروهای وارد بر جسم را در هر دو راستای افقی و قائم رسم می‌کنیم. از آن‌جا که جسم در آستانهٔ حرکت رو به پایین قرار دارد، $f_{s,max}$ رو به بالا بر جسم اثر می‌کند و جسم در حال تعادل است.



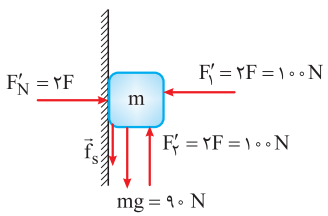
$$F_{net,x} = ۰ \Rightarrow F_N - F_1 = ۰ \Rightarrow F_N = F_1 \Rightarrow F_N = F$$

$$F_{net,y} = ۰ \Rightarrow f_{s,max} - mg - F_2 = ۰ \Rightarrow f_{s,max} - ۹۰ + F = ۰ \Rightarrow \mu_s F_N + F = ۹۰$$

$$\xrightarrow[F_N = F]{\mu_s = ۰/۸} ۰/۸F + F = ۹۰ \Rightarrow ۱/۸F = ۹۰ \Rightarrow F = ۵۰\ N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s F = ۰/۸ \times ۵۰ = ۴۰\ N$$

گام دوم: نیروهای وارد بر جسم را در حالت دوم نیز رسم می‌کنیم؛ این‌دفعه نیروی اصطکاک کاهش می‌یابد و جهت آن نیز برعکس می‌شود:



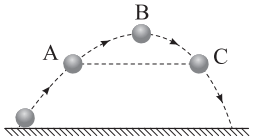
$$F'_2 - mg - f_s = ۰ \Rightarrow ۱۰۰ - ۹۰ - f_s = ۰ \Rightarrow f_s = ۱۰\ N$$

گام سوم: نسبت نیروی اصطکاک در دو حالت را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{f_s}{f_{s,max}} = \frac{۱۰}{۴۰} = \frac{۱}{۴}$$

SanjeshCloud

۲۰ **شکل زیر توپی را نشان می‌دهد که از سطح افقی زمین به صورت مایل و رو به بالا پرتاب شده است. اگر اندازهٔ شتاب توپ در سه نقطهٔ A ، B و C به ترتیب a_A ، a_B و a_C باشد، با در نظر گرفتن مقاومت هوا کدام مقایسه الزاماً درست است؟ (A و C در یک ارتفاع از سطح زمین قرار دارند.)**



۱) $a_A > a_C > a_B$

۲) $a_B > a_A > a_C$

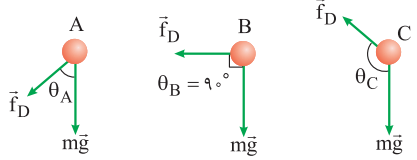
۳) $a_A > a_B$ و $a_A > a_C$

۴) $a_A > a_B$ و $a_C > a_B$

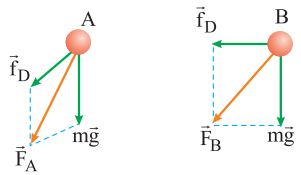
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در طول مسیر حرکت، نیروی وزن $(m\vec{g})$ که رو به پایین است و نیروی مقاومت هوا $(\vec{f}_D)$ که در خلاف جهت حرکت است، بر توپ وارد می‌شوند. زاویهٔ بین این دو نیرو (θ) در نقطهٔ A تند است، اما در نقطهٔ B قائمه و در نقطهٔ C باز است:

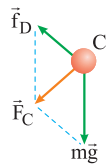


گام دوم: با فرض ثابت‌بودن نیروی مقاومت هوا در طول مسیر، نیروی خالص (برایند) وارد بر توپ در نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B بیشتر است:



$$F_A > F_B \Rightarrow ma_A > ma_B \Rightarrow a_A > a_B$$

گام سوم: نیروی خالص (برایند) وارد بر توپ در نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ C نیز بیشتر است:



$$F_A > F_C \Rightarrow ma_A > ma_C \Rightarrow a_A > a_C$$

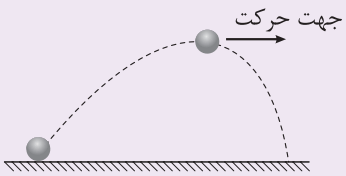
حتی اگر به علت اتلاف انرژی در طول مسیر، تندی گلوله و نیروی مقاومت هوای وارد بر آن کاهش یابد $(f_{D,A} > f_{D,B} > f_{D,C})$ باز هم می‌توان گفت نیروی خالص وارد بر گلوله در نقاط A، B و C و شتاب حاصل از آن به ترتیب زیر است:

$$F_A > F_B > F_C$$

$$a_A > a_B > a_C$$

کنکور

شکل زیر، توپی را نشان می‌دهد که از سطح افقی زمین به صورت مایل و رو به بالا پرتاب شده است. اگر اندازهٔ شتاب توپ را در نقطهٔ اوج با «$a_{اوج}$» و اندازهٔ شتاب توپ، کمی قبل از رسیدن به نقطهٔ اوج را با «a» نشان دهیم و «g» اندازهٔ شتاب گرانشی باشد، کدام مورد درست است؟ *(تست ۵۴ کنکور تجربی اردیبهشت ۱۴۰۴)*



۱) $a > a_{اوج} > g$

۲) $a_{اوج} > g > a$

۳) $a_{اوج} > a > g$

۴) $a > g > a_{اوج}$

آزمون ۳۰ آذر

فیزیک ۳

۱ چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند، جسم با شتاب ثابت $(a \neq 0)$ حرکت می‌کند.

ب) در تصادفات، کیسهٔ هوا با افزایش مدت‌زمان برخورد، نیروی متوسط وارد بر سرنشین را کاهش می‌دهد.

پ) نیروی اصطکاک جنبشی به مساحت سطح تماس دو جسم بستگی ندارد.

ت) در حالتی که یک جسم با تندی حدی خود در حال سقوط است، نیروی مقاومت هوای وارد بر آن برابر صفر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره این تست به صورت ترکیبی از سؤال‌های امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ و خرداد ۱۴۰۳ طرح شده است.

درس Box

۱) رابطهٔ قانون دوم نیوتون:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$\vec{F}_{net}$ = نیروی خالص وارد بر جسم (N)

m = جرم جسم (kg)

$\vec{a}$ = شتاب حرکت (m/s^2)

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ = تغییر سرعت (m/s)

$\Delta t = t_2 - t_1$ = بازهٔ زمانی (s)

۲) رابطهٔ نیروی اصطکاک جنبشی:

$$f_k = \mu_k F_N$$

f_k = اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی (N)

μ_k = ضریب اصطکاک جنبشی

F_N = اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

۳) تندی حدی: وقتی جسمی درون شاره‌ای سقوط می‌کند، در صورتی که نیروهای وارد بر آن متوازن شوند، با تندی ثابتی به نام تندی حدی به طرف پایین حرکت می‌کند. در این‌حالت می‌توان نوشت:



$$F_{net} = 0 \Rightarrow f_D - W = 0 \Rightarrow f_D = W$$

f_D = اندازهٔ نیروی مقاومت شاره (N)

W = اندازهٔ نیروی وزن جسم (N)

پاسخ خیلی تشریحی

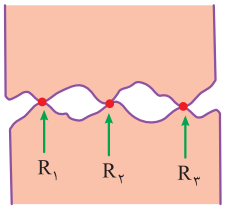
درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های داده‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند، نیروی خالص وارد بر جسم، صفر بوده و شتاب نیز صفر می‌شود؛ پس شتاب نمی‌تواند هر عدد ثابتی مثل ۲ یا ۳ یا ... باشد؛ بنابراین عبارت «الف» نادرست است.

$$a = \frac{F_{net}}{m} \xrightarrow{F_{net}=0} a = 0$$

ب) طبق رابطهٔ قانون دوم نیوتون، نیروی متوسط وارد بر سرنشینان خودرو با مدت‌زمان برخورد نسبت وارون دارد. پس با افزایش Δt، نیروی متوسط F_{av} کاهش می‌یابد و عبارت «ب» درست است.

$$\downarrow F_{av} = m\frac{\Delta v}{\uparrow \Delta t}$$



پ) برای یک جسم معین، نیروی اصطکاک f_k به این‌که جسم از چه وجهی روی سطح قرار بگیرد بستگی ندارد. گرچه اندازهٔ سطح ظاهری تماس در دو حالت مختلف فرق دارد ولی تعداد نقاط درگیر تماس در هر دو حالت یکسان است. تعداد این نقاط به F_N بستگی دارد. در رابطهٔ $f_k = \mu_k F_N$ نیز اندازهٔ ظاهری مساحت تماس نقشی ندارد؛ بنابراین عبارت «پ» درست است.

ت) وقتی جسمی با تندی حدی خود در حال سقوط است، نیروی مقاومت هوای وارد بر آن با نیروی وزن جسم برابر می‌شود:

$$f_D = mg \neq 0$$

یعنی آن‌چه صفر می‌شود، شتاب حرکت و نیروی خالص وارد بر جسم است نه آن‌که f_D برابر صفر شود؛ بنابراین عبارت «ت» نادرست است.

SanjeshCloud

۲ جسمی به جرم $2\ kg$ از ارتفاع ۷۲متری سطح زمین رها شده و $4\ s$ بعد به سطح زمین می‌رسد. اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم، با فرض ثابت‌بودن، چند نیوتون است؟ $(g = 9/8\ N/kg)$

۱) ۰/۸ ۲) ۱

۳) ۱/۶ ۴) ۲

مشاوره در مسائلی که به صورت ترکیبی بین حرکت‌شناسی و دینامیک مطرح می‌شوند، حلقهٔ رابط بین این دو مبحث، کمیت شتاب است؛ بنابراین در حل این نوع تست‌ها، بدون تردید، ابتدا باید شتاب حرکت را پیدا کنید.

Hint ابتدا شتاب حرکت را پیدا کنید، سپس به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی مقاومت هوا را به دست آورید.

درس Box

معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت به صورت زیر است:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$\Delta x =$ جابه‌جایی (m)

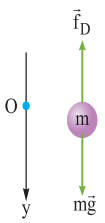
$a =$ شتاب (m/s^2)

$t =$ زمان (s)

$v_0 =$ سرعت اولیه (m/s)

نکته این رابطه در راستای قائم (روی محور y) نیز می‌تواند به کار رود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** به کمک معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان، شتاب حرکت جسم را به دست می‌آوریم و برای سهولت در محاسبات، جهت مثبت محور y را رو به پایین در نظر می‌گیریم:



$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow[t=4s]{\Delta y=72m\ ,\ v_0=0} 72 = \frac{1}{2}a(4)^2$$

$$\Rightarrow 72 = 8a \Rightarrow a = 9\ m/s^2$$

نکته این حرکت، سقوط آزاد محسوب نمی‌شود؛ زیرا نیروی مقاومت هوا در این‌جا دخالت دارد.

گام دوم: قانون دوم نیوتون را برای این جسم می‌نویسیم و از آن‌جا نیروی مقاومت هوا را به دست می‌آوریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - f_D = ma \xrightarrow[a=9\ m/s^2]{m=2\ kg\ ,\ g=9/8\ m/s^2} 2\times 9/8 - f_D = 2\times 9 \Rightarrow 19/6 - f_D = 18$$

$$\Rightarrow f_D = 1/6N$$

SanjeshCloud

۳ فنری به جرم ناچیز و طول $40\ cm$ و ثابت $800\ N/m$ از سقف آسانسوری آویزان است. اگر وزنه‌ای به جرم $4\ kg$ را از فنر آویزان کنیم و آسانسور با شتاب رو به پایین $2\ m/s^2$ حرکت کند، طول فنر به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ $(g = 10 m/s^2)$

۱) ۳۴ ۲) ۳۶

۳) ۴۴ ۴) ۴۶

مشاوره این تست کاملاً مشابه یکی از سؤال‌های کنکور تجربی ۱۴۰۳ در نوبت اول است. مشابه این سؤال در تمرین‌های کتاب درسی نیز وجود دارد.

Hint

دو نیروی کشسانی فنر و وزن را روی جسم مشخص کنید. سپس با نوشتن قانون دوم نیوتون، طول فنر را در این حالت حساب کنید.

درس Box

اگر فنری نسبت به حالت عادی خود، به اندازهٔ x کشیده یا فشرده شود، فنر به جسم متصل به خود نیروی کشسانی وارد می‌کند. اندازهٔ این نیرو طبق قانون هوک، با ثابت فنر و تغییر طول فنر متناسب است:

$$F_e = kx$$

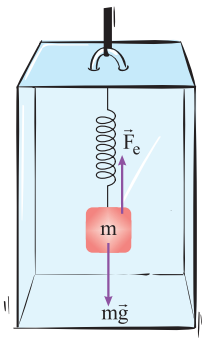
F_e = نیروی کشسانی فنر (N)

k = ثابت فنر (N/m)

x = تغییر طول فنر (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

براساس شکل زیر، وقتی آسانسور با شتاب رو به پایین در حرکت است، طول فنر را به دست می‌آوریم. برای این کار از قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنیم و برای سادگی محاسبات، جهت مثبت را رو به پایین در نظر می‌گیریم:

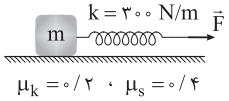


$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - F_e = ma \xrightarrow{F_e = kx} mg - kx = ma \Rightarrow mg - k(L - L_\circ) = ma$$

$$\xrightarrow[L=40\,cm=0/4\,m,\ g=10\,m/s^2]{m=4\,kg,\ k=800\,N/m,\ a=2\,m/s^2} 4\times10 - 800(L - 0/4) = 4\times2 \Rightarrow 32 = 800(L - 0/4)$$

$$\Rightarrow L - 0/4 = 0/04 \Rightarrow L = 0/44\,m \Rightarrow L = 44\,cm$$

۴ در شکل زیر، جسمی به جرم $12kg$ روی یک سطح افقی توسط فنری افقی با ثابت $300\ N/m$ کشیده می‌شود. در حالتی‌که جسم در آستانهٔ حرکت قرار دارد، طول فنر به L_1 و در حالتی که جسم با شتاب $1\ m/s^2$ به حرکت درمی‌آید، طول فنر به L_2 می‌رسد. $L_2 - L_1$ برابر چند سانتی‌متر است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۲

۲) ۴

۳) -2

۴) -4

Hint با فرض آن‌که طول آزاد فنر L_0 باشد، در حالت اول که جسم در آستانهٔ حرکت قرار دارد، با استفاده از توازن نیروها، حاصل $L_1 - L_0$ را به دست آورید. سپس در حالت دوم و به کمک قانون دوم نیوتون، حاصل $L_2 - L_0$ را پیدا کنید. در نهایت نیز $L_2 - L_1$ را حساب کنید.

درس Box بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی که جسم برای شروع حرکت با آن روبه‌رو می‌شود، نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت $(f_{s,max})$ نامیده می‌شود:

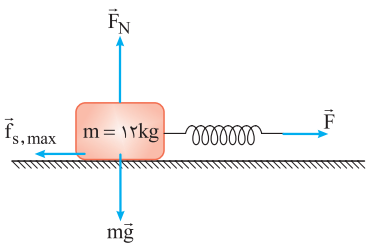
$$f_{s,max} = \mu_s F_N$$

$f_{s,max}$ = نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت (N)

μ_s = ضریب اصطکاک ایستایی

F_N = نیروی عمودی سطح (N)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** نیروهای وارد بر جسم در حالت اول را روی شکل مشخص کرده و اندازهٔ هر یک از آن‌ها را به دست می‌آوریم:



$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg \xrightarrow[g=10\ N/kg]{m=12\ kg} F_N = 12\times 10 = 120\ N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N=120\ N]{\mu_s=0/4} f_{s,max} = 0/4\times 120 = 48\ N$$

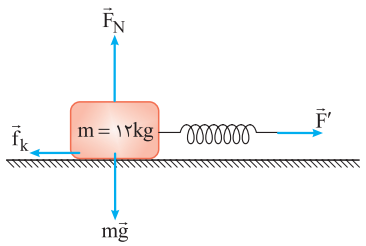
گام دوم: قانون دوم نیوتون در حالت اول که جسم ساکن است، به صورت زیر به کار می‌رود:

$$(F_{net})_x = ma \xrightarrow{a=0} F - f_{s,max} = 0 \Rightarrow F = f_{s,max} = 48\ N$$

اکنون رابطه‌ای بین L_1 و طول آزاد فنر (L_0) به دست می‌آوریم:

$$F = k(L_1 - L_0) \xrightarrow[k=300\ N/m]{F=48\ N} 48 = 300(L_1 - L_0) \Rightarrow L_1 - L_0 = 0/16\ m = 16cm$$

گام سوم: در حالت دوم که جسم در حال حرکت است نیز نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نشان داده و اندازهٔ هر یک از آن‌ها را تعیین می‌کنیم:



$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow[F_N=120\ N]{\mu_k=0/2} f_k = 0/2\times 120 = 24\ N$$

قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم و $L_2 - L_0$ را حساب می‌کنیم:

$$(F'_{net})_x = ma' \Rightarrow F' - f_k = ma' \Rightarrow F' - 24 = 12\times 1 \Rightarrow F' = 36\ N$$

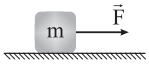
گام چهارم: رابطهٔ بین $L_۲$ و $L_۰$ را در این حالت پیدا می‌کنیم:

$$F' = k\Delta L' \xrightarrow[k=۳۰۰\,N/m]{F'=۳۶\,N} ۳۶ = ۳۰۰(L_۲ - L_۰) \Rightarrow L_۲ - L_۰ = ۰/۱۲\,m \Rightarrow L_۲ - L_۰ = ۱۲\,cm$$

گام پنجم: در پایان نیز $L_۲ - L_۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(L_۲ - L_۰) - (L_۱ - L_۰) = L_۲ - L_۱ \Rightarrow ۱۲ - ۱۶ = L_۲ - L_۱ \Rightarrow L_۲ - L_۱ = -۴\,cm$$

۵ در شکل زیر، به جسم نیروی افقی $\vec{F}$ وارد شده و جسم روی سطح افقی با تندی ثابت $15\ m/s$ در حال حرکت است. در این حالت، نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می‌کند، با راستای افقی زاویهٔ 53° می‌سازد. اگر در لحظه‌ای نیروی $\vec{F}$ حذف شود، چند ثانیه پس از این لحظه، جسم متوقف می‌شود؟ $(\sin 53^\circ = 0/8 \text{ و } g = 10\ N/kg)$

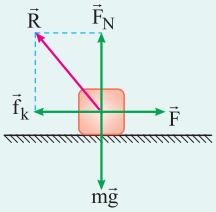


۱) ۱/۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

مشاوره یک بار دیگر با تستی روبه‌رو هستیم که به صورت ترکیبی بین حرکت‌شناسی و دینامیک مطرح شده است. بدون تردید باید شتاب حرکت را پیدا کنیم.

Hint به کمک توازن نیروها، شتاب حرکت را حساب کنید. سپس از معادلهٔ سرعت ـ زمان استفاده کنید و زمان توقف را محاسبه کنید.

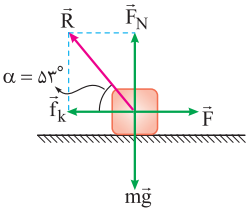
درس Box از طرف سطح تماس، دو نیروی $\vec{F}_N$ (نیروی عمودی سطح) و $\vec{f}$ (نیروی اصطکاک) بر جسم اثر می‌کنند. این دو نیرو بر هم عمود بوده و برایند آن‌ها، نیروی سطح بر جسم نام دارد که آن را با $\vec{R}$ نشان می‌دهیم:



$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

نکته نیروی f برحسب شرایط، ممکن است به صورت f_s، $f_{s,max}$ یا f_k باشد.

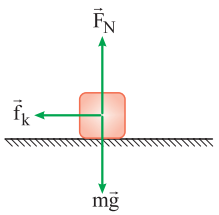
پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** با توجه به این‌که در حالت اول تندی جسم ثابت است، نیروی خالص وارد بر جسم صفر است.



$$\tan\alpha = \frac{F_N}{f_k} \xrightarrow{\alpha = 53^\circ} \frac{\sin 53^\circ}{\cos 53^\circ} = \frac{F_N}{f_k}$$

$$\xrightarrow[\cos 53^\circ = 0/6]{\sin 53^\circ = 0/8} \frac{0/8}{0/6} = \frac{F_N}{f_k} \Rightarrow f_k = \frac{3}{4}F_N \xrightarrow{F_N = mg} f_k = \frac{3}{4}mg$$

گام دوم: در حالت دوم که $\vec{F}$ حذف می‌شود، به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را پیدا می‌کنیم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow -f_k = ma \xrightarrow{f_k = \frac{3}{4}mg} -\frac{3}{4}mg = ma$$

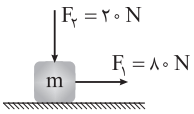
$$\xrightarrow{g = 10\ m/s^2} a = -\frac{3}{4} \times 10 = -7/5\ m/s^2$$

گام سوم: با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان، می‌توانیم زمان توقف را محاسبه کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[a = -7/5\ m/s^2]{v = 0,\ v_0 = 15\ m/s} 0 = -7/5\,t + 15 \Rightarrow t = 2\ s$$

SanjeshCloud

۶ در شکل زیر، جعبه‌ای تحت تأثیر نیروی افقی F_1 و نیروی قائم F_2، در مبدأ زمان از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. در لحظهٔ $t = 3s$ نیروی F_1 حذف شده و $2s$ پس از آن جعبه متوقف می‌شود. اگر جابه‌جایی جعبه از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ توقف آن، برابر $30m$ باشد، جرم جعبه چند کیلوگرم است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۶ ۲) ۴

۳) ۱۰ ۴) ۸

مشاوره این‌جا هم با یک تست ترکیبی بین حرکت‌شناسی و دینامیک روبه‌رو هستیم. کلید حل این نوع سؤال‌ها پیداکردن شتاب است.

Hint

حرکت را در دو مرحله در نظر بگیرید و به کمک معادله‌های حرکت‌شناسی، شتاب هر مرحله را به دست آورید. سپس این شتاب‌ها را در قانون دوم نیوتون به کار ببرید و جرم جعبه را به دست آورید.

درس Box

۱) رابطهٔ شتاب متوسط در حرکت روی خط راست:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

a_{av} = شتاب متوسط (m/s^2)

$\Delta v = v_2 - v_1$ = تغییر سرعت (m/s)

$\Delta t = t_2 - t_1$ = بازهٔ زمانی (s)

v_1 = سرعت در لحظهٔ t_1 (m/s)

v_2 = سرعت در لحظهٔ t_2 (m/s)

نکته اگر حرکت با شتاب ثابت باشد، می‌توان شتاب لحظه‌ای و شتاب متوسط را برابر در نظر گرفت $(a = a_{av})$.

۲) رابطهٔ جابه‌جایی ـ زمان به صورت مستقل از سرعت اولیه به شکل زیر است:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

Δx = جابه‌جایی (m)

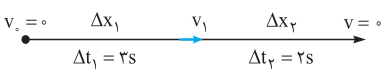
a = شتاب (m/s^2)

t = زمان (s)

v = سرعت در پایان بازهٔ زمانی (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: حرکت از دو بخش تشکیل شده است. ابتدا تندشونده و سپس کندشونده:



به کمک معادله‌های حرکت‌شناسی، دو رابطه بین شتاب‌های دو مرحلهٔ اول و دوم $(a_1$ و $a_2)$ تشکیل می‌دهیم و از آن‌جا a_1 و a_2 را پیدا می‌کنیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{v_1 - 0}{3} = \frac{v_1}{3} \\ a_2 = \frac{0 - v_1}{2} = -\frac{v_1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{v_1}{3}}{-\frac{v_1}{2}} = -\frac{2}{3}$$

از طرفی، مجموع جابه‌جایی‌های دو مرحله برابر ۳۰ متر است:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 30$$

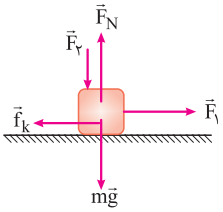
$$\Rightarrow \frac{1}{2}a_1(\Delta t_1)^2 + v_0(\Delta t_1) + (-\frac{1}{2}a_2(\Delta t_2)^2 + v(\Delta t_2)) = 30$$

$$\xrightarrow[\Delta t_1 = 3\,s,\ \Delta t_2 = 2\,s]{v_0 = 0,\ v = 0} \frac{1}{2}a_1(3)^2 - \frac{1}{2}a_2(2)^2 = 30$$

$$\Rightarrow 9a_1 - 4a_2 = 60 \xrightarrow{a_1 = -\frac{2}{3}a_2} 9(-\frac{2}{3}a_2) - 4a_2 = 60 \Rightarrow -10a_2 = 60 \Rightarrow a_2 = -6\ m/s^2$$

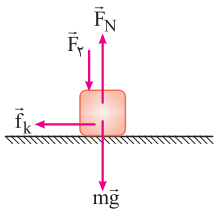
$$a_1 = -\frac{2}{3}a_2 = -\frac{2}{3} \times (-6) = 4\ m/s^2$$

گام دوم: رابطهٔ قانون دوم نیوتون را در حالت اول و در راستای افقی می‌نویسیم:



$$(F_{net})_۱ = ma_۱ \Rightarrow F_۱ - f_k = ma_۱$$

رابطهٔ قانون دوم نیوتون را در حالت دوم که نیروی $F_۱$ حذف شده است نیز می‌نویسیم:

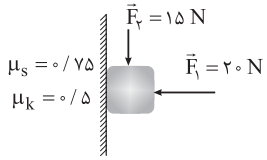


$$(F_{net})_۲ = ma_۲ \Rightarrow -f_k = ma_۲$$

گام سوم: نتایج به‌دست‌آمده در گام دوم را با هم ترکیب می‌کنیم و جرم جعبه را به دست می‌آوریم:

$$F_۱ + ma_۲ = ma_۱ \xrightarrow[a_۲ = -۶\ m/s^۲]{a_۱ = ۴\ m/s^۲\ ,\ F_۱ = ۸۰\ N} ۸۰ + m(-۶) = m \times ۴ \Rightarrow ۸۰ = ۱۰\,m \Rightarrow m = ۸\ kg$$

۷ در شکل زیر، به جسمی به جرم ۵۰۰g که به دیواری قائم تکیه داده شده است، نیروی افقی $\vec{F}_1$ و نیروی قائم $\vec{F}_2$ وارد می‌شود. اندازهٔ نیرویی که جسم به دیوار قائم وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = 10\ m/s^2)$



۱) $10\sqrt{5}$
۲) ۲۰
۳) $20\sqrt{2}$
۴) ۲۵

مشاوره ساختار این تست، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور تجربی در تیر ماه ۱۴۰۱ است.

Hint

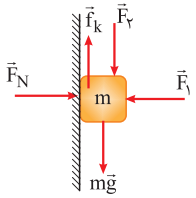
ابتدا با محاسبهٔ $f_{s,max}$ و مقایسهٔ آن با حاصل $F_2 + mg$ به این نتیجه برسید که جسم حرکت می‌کند. سپس نیروی f_k را حساب کنید. در پایان نیز اندازهٔ نیروی R را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم تا معلوم شود که جسم حرکت می‌کند یا خیر:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N = F_1 = 20\ N]{\mu_s = 0/75} f_{s,max} = 0/75 \times 20 = 15\ N$$

مجموع نیروهای رو به پایین F_2 و mg بیشتر از $f_{s,max}$ است؛ بنابراین جسم رو به پایین به حرکت درمی‌آید:



$$\xrightarrow[m = 500\ g = 0/5\ kg]{F_2 = 15\ N,\ g = 10\ m/s^2} F_2 + mg = 15 + 0/5 \times 10 = 20\ N$$

$20\ N > 15\ N \Rightarrow$ جسم رو به پایین به حرکت درمی‌آید.

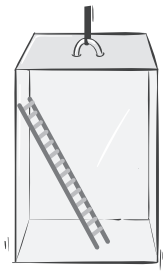
$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow[F_N = 20\ N]{\mu_k = 0/5} f_k = 0/5 \times 20 = 10\ N$$

گام دوم: طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که جسم به سطح دیوار وارد می‌کند با نیروی سطح دیوار بر جسم (R)، برابر است.

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \xrightarrow[f_k = 10\ N]{F_N = 20\ N} R = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} \Rightarrow R = 10\sqrt{5}\ N$$

SanjeshCloud

۸ در شکل زیر، نردبانی به جرم ۲۰ kg درون اتاقک یک آسانسور که با شتاب رو به پایینی به بزرگی $3\ m/s^2$ در حال حرکت است، قرار دارد. اصطکاک دیوارهٔ قائم اتاقک آسانسور ناچیز است. اگر در آستانهٔ لغزش نردبان، اندازهٔ نیرویی که نردبان به دیوارهٔ قائم وارد می‌کند، ۴۲N باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین نردبان و کف اتاقک آسانسور کدام است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۰/۲

۲) ۰/۳

۳) ۰/۴

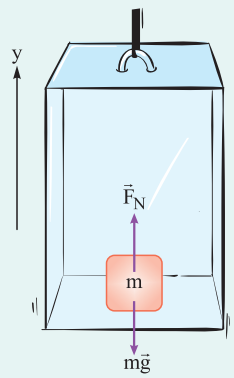
۴) ۰/۶

Hint

ابتدا نیروی عمودی سطح را که از کف آسانسور بر پای نردبان وارد می‌شود، پیدا کنید. سپس نیروی اصطکاک ایستایی را به دست آورید و به کمک آن، ضریب اصطکاک ایستایی را محاسبه کنید.

درس Box

اگر جسمی به جرم m درون آسانسوری قرار گیرد و آسانسور با شتاب ثابت a در راستای قائم حرکت کند، نیروی F_N (که به اندازهٔ وزن ظاهری جسم است) از طرف کف آسانسور، رو به بالا بر جسم وارد می‌شود.



$$F_N = m(g+a)$$

F_N = اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

m = جرم جسم (kg)

g = شتاب گرانش در سطح زمین (m/s^2)

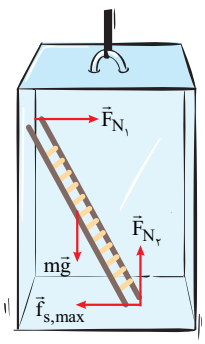
a = شتاب حرکت آسانسور (m/s^2)

نکته

شتاب رو به بالا را با علامت مثبت و شتاب رو به پایین را با علامت منفی در رابطهٔ فوق به کار می‌بریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نیروهای وارد بر نردبان را روی شکل نشان می‌دهیم:



نیروی $\vec{F}_{N_2}$ از کف آسانسور و رو به بالا بر پای نردبان اثر می‌کند:

$$F_{N_2} = m(g+a) \xrightarrow[a=-3\ m/s^2]{m=20\ kg,\ g=10\ m/s^2} F_{N_2} = 20(10-3) = 140\ N$$

گام دوم: در راستای افقی از توازن نیروها استفاده می‌کنیم و $f_{s,max}$ را به دست می‌آوریم:

$$(F_{net})_x = 0 \Rightarrow F_{N_1} - f_{s,max} = 0 \xrightarrow{F_{N_1}=42\ N} f_{s,max} = 42\ N$$

گام سوم: ضریب اصطکاک ایستایی (μ_s) را حساب می‌کنیم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_{N_2} \xrightarrow[F_{N_2}=140\ N]{f_{s,max}=42\ N} 42 = \mu_s \times 140 \Rightarrow \mu_s = \frac{42}{140} = 0/3$$

۹ جسم ساکنی به جرم $10\ kg$ روی سطح افقی قرار دارد و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح به ترتیب $0/5$ و $0/25$ است. اگر در مبدأ زمان به جسم نیروی افقی $45N$ وارد شود، اندازهٔ تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t = 2s$ در SI چند واحد است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۲۵ ۲) ۲۰

۳) ۵ ۴) صفر

مشاوره این تست یکی از سؤال‌های کنکور رشتهٔ ریاضی در نوبت اول ۱۴۰۳ است که با تغییراتی در این‌جا مطرح شده است.

Hint ابتدا نیروی $f_{s,max}$ بین جسم و سطح را به دست آورید. سپس آن را با نیروی افقی‌ای که می‌خواهد جسم را به حرکت در آورد، مقایسه کنید تا معلوم شود که جسم حرکت می‌کند یا خیر. اگر حرکت نکند، تکانهٔ آن صفر خواهد بود.

درس Box حاصل‌ضرب جرم یک جسم در سرعت آن را تکانهٔ جسم می‌نامیم:

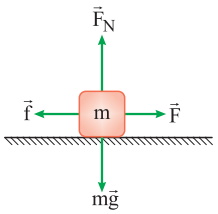
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$\vec{p}$ = تکانه $(\frac{kg.m}{s})$

m = جرم (kg)

$\vec{v}$ = سرعت (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نشان می‌دهیم و اندازهٔ $\vec{F}_N$ را تعیین می‌کنیم:



$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F_N - mg = 0 \xrightarrow[g=10\ N/kg]{m=10\ kg} F_N = mg = 10 \times 10 = 100\ N$$

گام دوم: نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N=100\ N]{\mu_s=0/5} f_{s,max} = 0/5 \times 100 = 50\ N$$

از آن‌جا که $F < f_{s,max}$ است، نیروی $45\ N$ نمی‌تواند جسم را به حرکت در آورد؛ بنابراین وقتی سرعت جسم صفر است، تکانهٔ آن نیز صفر است:

$$p = mv \xrightarrow{v=0} p = 0$$

۱۰ خودرویی به جرم $800\ kg$ که در مسیر مستقیم در حال حرکت است، با تندی $72\ km/h$ به مانعی برخورد کرده و با تندی $18\ km/h$ در همان راستا برمی‌گردد. اگر مدت برخورد $0/2\ s$ و جرم رانندهٔ خودرو $80\ kg$ باشد، اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر راننده، در مدت برخورد چند نیوتون است؟

مشاوره این تست مشابه یکی از سؤال‌های کنکور تجربی در نوبت اول ۱۴۰۳ است.

۱) 10^4

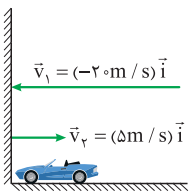
۲) 10^5

۳) 6×10^3

۴) 6×10^4

پاسخ خیلی تشریحی ✔ نیروی خالص متوسط وارد بر راننده به کمک قانون دوم نیوتون به دست می‌آید:

$$\vec{F}_{net}=m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$



$$v_1=72\ km/h\div3/6=20\ m/s$$

$$v_2=18\ km/h\div3/6=5\ m/s$$

$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1=5\,\vec{i}-(-20\,\vec{i})=(25\ m/s)\,\vec{i}$$

$$F_{net}=m\frac{\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=0/2\,s]{m=80\,kg\,,\,\Delta v=25\,m/s}F_{net}=80\times\frac{25}{0/2}\Rightarrow F_{net}=\frac{2000}{0/2}=10^4\,N$$

نکته چون اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر راننده خواسته شده، جرم خودرو اهمیتی ندارد.

گول نخوری مراقب باشید؛ چون اگر تندی‌های داده‌شده را به صورت نرده‌ای از هم کم کنید، در دام گزینهٔ (۳) می‌افتید.

۱۱ تندی جسمی به جرم $5\ kg$ در لحظه‌ای برابر v است. اگر با تغییر تندی جسم، اندازهٔ تکانهٔ آن $10\ \frac{kg.m}{s}$ و انرژی جنبشی آن $50\ J$ افزایش یابد، v برابر چند متر بر ثانیه است؟

۱) $1/5$ ۲) $3/5$ ۳) ۴ ۴) ۶

Hint رابطهٔ انرژی جنبشی جسم برحسب تکانه را در دو حالت بنویسید و اختلاف آن‌ها را برابر $50J$ قرار دهید. سپس تکانه در حالت اول (p_1) را پیدا کنید و به کمک آن $v_1 = v$ را حساب کنید.

درس Box رابطهٔ انرژی جنبشی یک جسم برحسب تکانهٔ آن:

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

$K =$ انرژی جنبشی (J)

$m =$ جرم (kg)

$p =$ اندازهٔ تکانه $(\frac{kg.m}{s})$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** اختلاف انرژی جنبشی جسم در دو حالت را برابر با $50J$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_2^2 - p_1^2) \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2m}(p_2 - p_1)(p_2 + p_1)$$

$$\xrightarrow[p_2 - p_1 = 10\ \frac{kg.m}{s}]{\Delta K = 50\ J,\ m = 5\ kg} 50 = \frac{1}{2 \times 5} \times 10\,(p_2 + p_1)$$

$$\Rightarrow p_2 + p_1 = 50\ \frac{kg.m}{s}$$

گام دوم: با داشتن دو معادله، مجهول‌های p_1 و p_2 را به دست می‌آوریم:

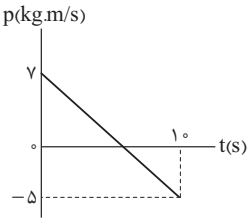
$$\begin{cases} p_2 - p_1 = 10 \\ p_2 + p_1 = 50 \end{cases} \Rightarrow 2p_2 = 60 \Rightarrow p_2 = 30\ \frac{kg.m}{s}$$

$$p_2 - p_1 = 10 \Rightarrow 30 - p_1 = 10 \Rightarrow p_1 = 20\ \frac{kg.m}{s}$$

گام سوم: رابطهٔ تکانهٔ جسم در حالت اول را می‌نویسیم و v_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$p_1 = mv_1 \xrightarrow[m = 5\ kg]{p_1 = 20\ \frac{kg.m}{s}} 20 = 5v_1 \Rightarrow v_1 = 4\ m/s \xrightarrow{v_1 = v} v = 4\ m/s$$

۱۲ نمودار تکانه ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در لحظه‌ای که جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند، نیروی خالص وارد بر آن برحسب نیوتون کدام است؟



۱) $۱/۲\,\vec{i}$

۲) $-۱/۲\,\vec{i}$

۳) $۰/۷\,\vec{i}$

۴) $-۰/۷\,\vec{i}$

مشاوره این تست شبیه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی در نوبت دوم ۱۴۰۳ است که با تغییراتی در این‌جا مطرح شده است.

درس Box

نیروی خالص وارد بر یک جسم، با آهنگ تغییر تکانهٔ جسم برابر است:

$$\vec{F}_{net}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\frac{\vec{p}_۲-\vec{p}_۱}{t_۲-t_۱}$$

$\vec{F}_{net}$ = نیروی خالص (N)

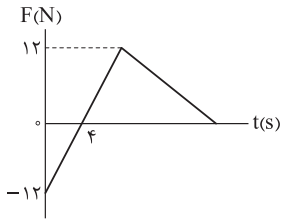
$\vec{p}_۱$ = تکانه در لحظهٔ $t_۱$ $(\frac{kg.m}{s})$

$\vec{p}_۲$ = تکانه در لحظهٔ $t_۲$ $(\frac{kg.m}{s})$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ نیروی خالص وارد بر این متحرک برابر است با $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ که همان شیب خط نمودار تکانه ـ زمان نیز محسوب می‌شود. از آن‌جا که شیب این خط ثابت است، نیروی خالص در مدت ۱۰s با نیروی خالص در هر لحظهٔ دیگری از این بازهٔ زمانی یکسان بوده و برابر است با:

$$\vec{F}_{net}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\frac{\vec{p}_۲-\vec{p}_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{-۵\vec{i}-۷\vec{i}}{۱۰-۰}=(\frac{-۱۲}{۱۰}N)\vec{i}\ \Rightarrow\ \vec{F}_{net}=(-۱/۲N)\vec{i}$$

۱۳ نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی برحسب زمان به شکل زیر است. جسم در مبدأ زمان ساکن است و نیروی خالص در راستای محور x بر جسم وارد می‌شود. به ترتیب از راست به چپ، در لحظهٔ $t = 4s$ تکانهٔ جسم چند کیلوگرم متر بر ثانیه و در بازهٔ زمانی‌ای که شتاب جسم در جهت محور x است، اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر آن چند نیوتون است؟



۱) $۳ ، ۲۴\vec{i}$

۲) $۶ ، ۲۴\vec{i}$

۳) $۳ ، -۲۴\vec{i}$

۴) $۶ ، -۲۴\vec{i}$

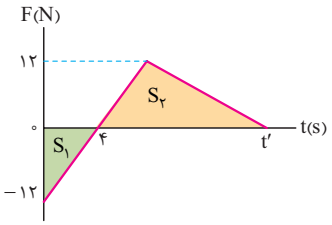
مشاوره این تست مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی در تیرماه ۱۴۰۱ است. شکل دیگری از این سؤال در پرسش‌های دوره‌ای کتاب درسی فیزیک ۳ نیز مطرح شده است.

درس Box

اندازهٔ تغییر تکانهٔ یک جسم (Δp) با مساحت سطح زیر نمودار نیروی خالص ـ زمان آن جسم برابر است. برای بخشی از نمودار که بالای محور t قرار می‌گیرد، $\Delta p > ۰$ و برای بخشی از نمودار که پایین محور t قرار می‌گیرد، $\Delta p < ۰$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در بازهٔ زمانی ۰ تا ۴s مساحت سطح زیر نمودار $(S_۱)$ را با اندازهٔ تغییر تکانهٔ جسم در این ۴ ثانیه برابر قرار می‌دهیم:



$$\Delta p_۱ = S_۱ = \frac{-۱۲ \times ۴}{۲} = -۲۴ \frac{kg.m}{s}$$

p = تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t = ۴s$:

$$\Delta p_۱ = p - p_۰$$

$$\xrightarrow[p_۰ = ۰]{\Delta p_۱ = -۲۴ \frac{kg.m}{s}} -۲۴ = p - ۰ \Rightarrow p = -۲۴ \frac{kg.m}{s} \Rightarrow \vec{p} = (-۲۴ \frac{kg.m}{s})\vec{i}$$

گام دوم: وقتی شتاب جسم در جهت محور x است، یعنی $a > ۰$ است. در این صورت نیروی خالص نیز مثبت است. این موضوع در بازهٔ زمانی ۴s تا لحظهٔ t' در نمودار دیده می‌شود:

$$F_{net} = \frac{\Delta p_۲}{\Delta t_۲} = \frac{S_۲}{\Delta t_۲} = \frac{\frac{(t' - ۴) \times ۱۲}{۲}}{(t' - ۴)} = ۶ \frac{kg.m}{s}$$

۱۴ ارتفاع یک ماهواره از سطح زمین ۵ برابر شعاع زمین است. وزن آن در این ارتفاع چند برابر وزنش در سطح زمین است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

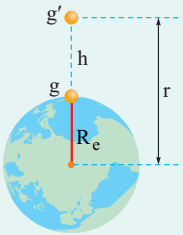
۳) $\frac{۱}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

مشاوره این تست یکی از سؤال‌های امتحان نهایی فیزیک (۳) در خرداد ۱۴۰۳ بوده است. این نوع سؤال چه در امتحان‌های نهایی و چه در تست‌های کنکور بارها تکرار شده است.

درس Box

شتاب گرانش در اطراف کرهٔ زمین، با مربع فاصله از مرکز زمین نسبت وارون دارد:

$$\frac{g'}{g}=(\frac{R_e}{r})^۲=(\frac{R_e}{R_e+h})^۲$$



$r=R_e+h$: فاصله از مرکز زمین

R_e : شعاع زمین

h : فاصله از سطح زمین

g : شتاب گرانش در سطح زمین

g' : شتاب گرانش در ارتفاع h از سطح زمین

پاسخ خیلی تشریحی ✔ هر چه از کرهٔ زمین دور شویم، جرم ماهواره (m) تغییری نمی‌کند، ولی به علت کاهش شتاب گرانش زمین، وزن آن (mg) کاهش می‌یابد:

$$\frac{g'}{g}=(\frac{R_e}{r})^۲ \xrightarrow{r=R_e+h=R_e+۵R_e=۶R_e} \frac{g'}{g}=(\frac{R_e}{۶R_e})^۲=(\frac{۱}{۶})^۲ \Rightarrow \frac{mg'}{mg}=\frac{g'}{g}=\frac{۱}{۳۶}$$

گول نخوری ✘ دقت کنید که فاصلهٔ ماهواره تا **سطح زمین** را با فاصلهٔ ماهواره تا **مرکز زمین** اشتباه نگیرید؛ چون در این صورت در دام گزینهٔ (۳) می‌افتید. اگر هم توان ۲ رابطه را فراموش کنید، گزینه‌های (۱) و (۲) در کمین هستند.

۱۵ شعاع سیاره‌ای کروی، ۲ برابر شعاع کرهٔ زمین و چگالی آن نصف چگالی کرهٔ زمین است. شتاب گرانش در سطح این سیاره، چند برابر شتاب گرانش در سطح زمین است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۴

مشاوره این نوع سؤال که شتاب گرانش یک سیاره با چگالی آن ترکیب شود، تا به حال در کنکور مطرح نشده است. اما منتظر چنین سؤالی در کنکورهای پیش رو باشید.

Hint ابتدا رابطه‌ای برای شتاب گرانش در سطح یک سیاره برحسب چگالی و شعاع آن به دست آورید. سپس نسبت شتاب‌های گرانش خواسته‌شده را محاسبه کنید.

درس Box شتاب گرانش در سطح هر سیارهٔ کروی به جرم M و شعاع R از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$g=\frac{GM}{R^۲}$$

یعنی شتاب گرانش در سطح سیاره با جرم آن نسبت مستقیم و با مربع شعاع آن نسبت وارون دارد. حال می‌خواهیم این رابطه را برحسب چگالی مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ سیاره (ρ) بنویسیم:

$$g=\frac{GM}{R^۲} \xrightarrow{M=\rho V=\rho\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳} g=\frac{G\rho\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{R^۲}=\frac{۴}{۳}\pi G(\rho R)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ شتاب گرانش در سطح زمین را با g_e، شعاع زمین را با R_e و چگالی زمین را با ρ_e نشان می‌دهیم:

$$\frac{g}{g_e}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi G(\rho R)}{\frac{۴}{۳}\pi G(\rho_e R_e)} \xrightarrow[R=۲R_e]{\rho=\frac{۱}{۲}\rho_e} \frac{g}{g_e}=\frac{\frac{۱}{۲}\rho_e}{\rho_e}\times\frac{۲R_e}{R_e}=۱$$

۱۶ سفینه‌ای بین کرهٔ ماه و کرهٔ زمین قرار دارد و نیروی خالص گرانشی که از طرف ماه و زمین بر آن وارد می‌شود، برابر صفر است. اگر فاصلهٔ مرکز کرهٔ زمین تا مرکز کرهٔ ماه $۴\times۱۰^{۵}\,km$ باشد، فاصلهٔ سفینه تا مرکز کرهٔ زمین چند کیلومتر است؟ (جرم کرهٔ زمین را ۸۱ برابر جرم کرهٔ ماه در نظر بگیرید.)

۱) ۴×۱۰^{۳} ۲) $۳/۶\times۱۰^{۴}$

۳) ۴×۱۰^{۴} ۴) $۳/۶\times۱۰^{۵}$

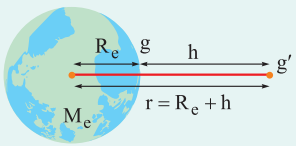
مشاوره این سؤال، یکی از پرسش‌های دوره‌ای آخر فصل ۲ از کتاب درسی فیزیک (۳) است. تمرین‌ها و پرسش‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

درس Box

اندازهٔ شتاب گرانش حاصل از یک سیاره به جرم M در نقطهٔ A به فاصلهٔ r از مرکز آن، به کمک رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

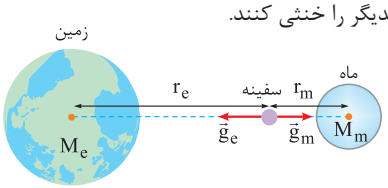
$$g_A=\frac{GM}{r^{۲}}$$

مثلاً در مورد کرهٔ زمین می‌توان نوشت: $g'=\frac{GM_e}{r^{۲}}$.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شرط آن‌که نیروی خالص گرانشی که از طرف ماه و زمین بر سیاره وارد می‌شوند، برابر صفر باشد، آن است که شتاب گرانشی ماه و زمین در محل سفینه، هم‌اندازه و در جهت مخالف هم باشند تا یکدیگر را خنثی کنند.



$$g_e=g_m \Rightarrow \frac{GM_e}{r_e^{۲}}=\frac{GM_m}{r_m^{۲}} \xrightarrow{M_e=۸۱M_m} \frac{۸۱M_m}{r_e^{۲}}=\frac{M_m}{r_m^{۲}} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم.}} \frac{۹}{r_e}=\frac{۱}{r_m}$$

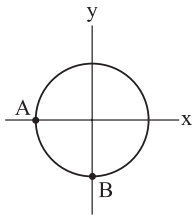
$$\Rightarrow r_e=۹r_m$$

گام دوم: فاصلهٔ مرکز کرهٔ زمین تا مرکز کرهٔ ماه برابر با r_e+r_m است:

$$\begin{cases} r_e+r_m=۴\times۱۰^{۵} \\ r_e=۹r_m \end{cases} \Rightarrow ۹r_m+r_m=۴\times۱۰^{۵} \Rightarrow ۱۰r_m=۴\times۱۰^{۵} \Rightarrow r_m=۴\times۱۰^{۴}\,km$$

$$r_e=۹r_m=۹\times۴\times۱۰^{۴}=۳۶\times۱۰^{۴}\,km=۳/۶\times۱۰^{۵}\,km$$

۱۷ در شکل زیر، جسمی با تندی ثابت $12\ m/s$ به طور ساعتگرد روی محیط دایره‌ای در حال حرکت است. اگر حداقل $5\ s$ طول بکشد تا جسم از نقطهٔ **A** به نقطهٔ **B** برسد، شتاب جسم در نقطهٔ **B** چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(\pi = 3)$



۱) $3/6\,\vec{j}$

۲) $-3/6\,\vec{i}$

۳) $10/8\,\vec{j}$

۴) $-10/8\,\vec{i}$

Hint ابتدا دورهٔ تناوب چرخش جسم روی مسیر دایره‌ای را به دست آورید. سپس شعاع چرخش و به کمک آن، شتاب جسم را حساب کنید.

درس Box

۱) دوره: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت‌زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره را دورهٔ تناوب (دوره) می‌نامیم و یکای آن ثانیه است.

۲) جسم در هر دور چرخش خود، مسافتی به اندازهٔ محیط دایره را می‌پیماید؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = T]{\ell = 2\pi r} v = \frac{2\pi r}{T}$$

v = تندی (m/s)

r = شعاع مسیر (m)

T = دوره (s)

۳) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، با آن‌که اندازهٔ سرعت (تندی) ثابت است، اما جهت آن که همواره بر مسیر دایره‌ای مماس است، تغییر می‌کند؛ بنابراین حرکت دایره‌ای یکنواخت، حرکتی شتابدار محسوب می‌شود. جهت این شتاب همواره به طرف مرکز دایره است و اندازهٔ آن در تمام نقاط مسیر ثابت بوده و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

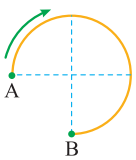
$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

a_c = شتاب مرکزگرا (m/s^2)

v = تندی (m/s)

r = شعاع مسیر (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا دورهٔ حرکت را به دست می‌آوریم. با توجه به جهت چرخش که ساعتگرد است، داریم:



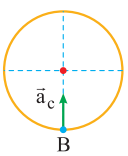
$$\frac{3}{4}T = 5 \Rightarrow T = \frac{20}{3}\,s$$

گام دوم: با معلوم‌بودن تندی حرکت، شعاع مسیر را حساب می‌کنیم:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow[T=\frac{20}{3}s]{v=12\,m/s,\ \pi=3} 12 = \frac{2\times 3\times r}{\frac{20}{3}} \Rightarrow 80 = 6r \Rightarrow r = \frac{40}{3}\,m$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} \xrightarrow[r=\frac{40}{3}m]{v=12m/s} a_c = \frac{12\times 12}{\frac{40}{3}} = \frac{12\times 9}{10} = 10/8\ m/s^2$$

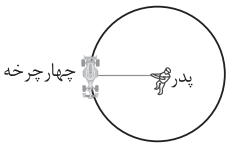
جهت این شتاب به طرف مرکز دایره است، پس در نقطهٔ B داریم:



$$(\vec{a}_c)_B = (10/8\ m/s^2)\,\vec{j}$$

۱۸ پدری فرزند ۲۰کیلوگرمی خود را در یک چهارچرخهٔ ایمن ۵کیلوگرمی قرار می‌دهد و با یک طناب ۲متری، چهارچرخه را روی سطح افقی زمین به گونه‌ای می‌کشد تا چهارچرخه روی مسیر دایره‌ای حرکت کند. با فرض یکنواخت‌بودن حرکت چهارچرخه و صرف نظر کردن از اصطکاک، اگر دورهٔ تناوب چهارچرخه ۴ s باشد، اندازهٔ نیروی کشش طناب چند نیوتون است؟ $(\pi^2 = 10)$

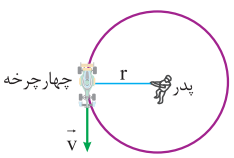
۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۵۰

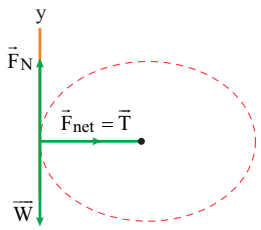


مشاوره این سؤال براساس یکی از مثال‌های کتاب درسی در فصل ۲ فیزیک (۳) و با تغییراتی جزئی در آن، طرح شده است. مثال‌های کتاب درسی را به دقت مطالعه کنید؛ چون هم در امتحان نهایی و هم در کنکور اهمیت دارند.

درس Box نیروی مرکزگرا به شکل‌های مختلفی می‌تواند تأمین شود. مانند نیروی کششی طناب، نیروی گرانشی، نیروی الکتریکی و ... . مثلاً وقتی جسمی را به یک طناب متصل کرده و روی مسیر دایره‌ای می‌چرخانیم، نیروی کشش طناب، همان نیروی مرکزگرا است. یا در چرخش یک ماهواره به دور زمین، نیروی وزن ماهواره، همان نیروی مرکزگرا است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** بچه و چهارچرخه را به صورت یک ذره فرض می‌کنیم که در یک مسیر دایره‌ای با دورهٔ ۴ s حرکت می‌کند:





بر این ذره سه نیروی وزن، نیروی عمودی سطح (در راستای عمودی) و نیروی کشش طناب (مرکزگرا) به طرف مرکز دایره وارد می‌شود. نیروی وزن و نیروی عمودی سطح همدیگر را خنثی می‌کنند و بنابراین فقط نیروی $\vec{T}$ به عنوان نیروی خالص در نظر گرفته می‌شود $(F_{net} = T)$.

گام دوم: رابطه‌های نیروی مرکزگرا و تندی حرکت را با هم ترکیب می‌کنیم. برای جلوگیری از تداخل نمادهای نیروی کشش نخ و دوره، در این‌جا دوره را با T' نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} F_{net} = m\dfrac{v^2}{r} \\ v = \dfrac{2\pi r}{T'} \end{cases} \xrightarrow{F_{net}=T} T = m\dfrac{\frac{4\pi^2 r^2}{T'^2}}{r} \Rightarrow T = \dfrac{m4\pi^2 r}{T'^2}$$

$$\xrightarrow[\pi^2=10\ ,\ r=2\,m\ ,\ T'=4\,s]{m=5+20=25\,kg} T = \dfrac{25\times 4\times 10\times 2}{4^2} = \dfrac{2000}{16} = 125N$$

SanjeshCloud

۱۹ یک دیسک افقی گردان حول محور قائم خود می‌چرخد و جسمی در فاصلهٔ ۴۰سانتی‌متری از مرکز دوران، روی دیسک قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیسک برابر ۰/۸ باشد، برای آن‌که جسم همراه با دیسک بچرخد، دورهٔ تناوب آن برحسب ثانیه برابر با کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ $(\sqrt{2}=1/41 , g=\pi^2=10\ m/s^2)$

الف) ۱/۲

ب) ۱/۴

پ) ۱/۶

ت) ۱/۸

۱) الف ۲) ت

۳) الف ـ ب ۴) پ ـ ت

مشاوره این نوع سؤال که جواب آن می‌تواند در یک بازهٔ عددی معین قرار بگیرد، در تمرین‌های کتاب درسی فیزیک (۳) وجود دارد و می‌تواند به عنوان تیپ جدیدی از تست‌ها در کنکور نیز مطرح شود.

Hint

نیروی مرکزگرای بیشینه را با نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت، برابر قرار دهید و از آن‌جا تندی بیشینه را به دست آورید. سپس به کمک آن، کم‌ترین مقدار دوره را حساب کنید و مقدار آن را با گزینه‌ها مقایسه نمایید.

درس Box

یکی از مواردی که می‌تواند نیروی مرکزگرای لازم در یک حرکت دایره‌ای را تأمین کند، نیروی اصطکاک ایستایی است. شرط آن‌که ذره‌ای بتواند روی یک صفحهٔ چرخندهٔ افقی در جای خود بماند و نلغزد و یا این‌که خودرویی بتواند یک پیچ افقی را بدون لغزش و انحراف بپیماید آن است که:

$$f_s = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow f_{s,max} = m\frac{v_{max}^2}{r}$$

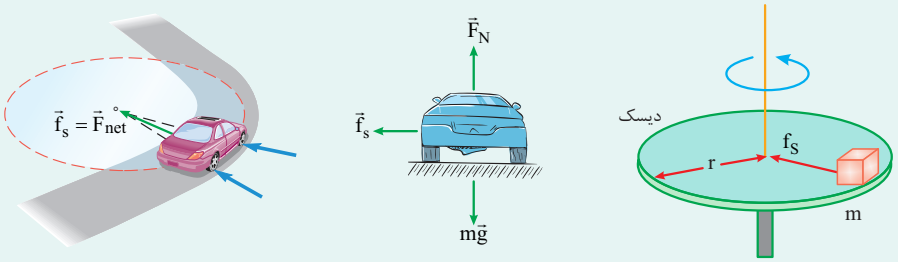
v_{max} = بیشینهٔ تندی مجاز (m/s)

m = جرم جسم (kg)

r = شعاع مسیر (m)

f_s = نیروی اصطکاک ایستایی (N)

$f_{s,max}$ = نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت (N)



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای آن‌که جسم همراه دیسک بچرخد باید نیروی مرکزگرا و نیروی اصطکاک ایستایی، برابر باشند. بیشترین تندی ممکن زمانی است که جسم در آستانهٔ حرکت باشد:

$$f_{s,max} = m\frac{v_{max}^2}{r} \xrightarrow[F_N=mg]{f_{s,max}=\mu_s F_N=\mu_s mg} \mu_s mg = m\frac{v_{max}^2}{r} \xrightarrow[r=40\,cm=0/4\,m]{\mu_s=0/8 , g=10\,m/s^2} 0/8\times 10=\frac{v_{max}^2}{0/4}$$

$$\Rightarrow v_{max}^2 = 3/2$$

گام دوم: روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع معین، هنگامی تندی بیشینه است که دوره، کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد:

$$v_{max}=\frac{2\pi r}{T_{min}} \Rightarrow v_{max}^2=\frac{4\pi^2 r^2}{T_{min}^2} \xrightarrow[r=40\,cm=0/4\,m]{v_{max}^2=3/2 , \pi^2=10} 3/2=\frac{4\times 10\times (0/4)^2}{T_{min}^2}$$

$$\Rightarrow T_{min}^2=\frac{6/4}{3/2}=2 \Rightarrow T_{min}=\sqrt{2}=1/41\,s$$

بنابراین، موارد «پ» و «ت» که در آن‌ها $T > T_{min}$ است، قابل قبول هستند.

SanjeshCloud

۲۰ دو ماهوارهٔ **A** و **B** به جرم‌های $m_A = m$ و $m_B = ۳m$ روی دو مدار دایره‌ای‌شکل، به دور زمین در حال حرکت هستند. اگر در بازهٔ زمانی معین، دو ماهواره به ترتیب ۸ و ۶۴ مرتبه به دور زمین بچرخند، انرژی جنبشی ماهوارهٔ **B**، چند برابر انرژی جنبشی ماهوارهٔ **A** است؟

۱) ۱۲ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$

۳) ۶ ۴) $\frac{۱}{۶}$

مشاوره نگران محاسبات عددی تست‌های مربوط به ماهواره نباشید. تست‌های این قسمت یا مانند این سؤال به صورت مقایسه‌ای و نسبتی مطرح می‌شوند و یا اعداد به گونه‌ای داده می‌شوند که نیازی به ماشین حساب نباشد.

Hint

ابتدا نسبت شعاع گردش دو ماهواره و سپس نسبت تندی حرکت آن‌ها را به دست آورید. در پایان نیز با استفاده از رابطهٔ $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ نسبت انرژی جنبشی دو ماهواره را حساب کنید.

درس Box

دورهٔ حرکت و تندی چرخش ماهواره‌ای که به دور زمین می‌چرخد، از روابط زیر به دست می‌آیند:

$T =$ دوره (s)

$v =$ تندی (m/s)

$r =$ فاصله از مرکز زمین یا شعاع چرخش (m)

$M_e =$ جرم کرهٔ زمین (kg)

$G =$ ثابت جهانی گرانش $(\frac{N.m^۲}{kg^۲})$

(۱) $T = ۲\pi\sqrt{\frac{r^۳}{GM_e}}$

(۲) $v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به رابطهٔ (۱) درس‌باکس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{(\frac{r_A}{r_B})^۳} \\ \Delta t = ۸T_A = ۶۴T_B \Rightarrow T_A = ۸T_B \end{cases} \Rightarrow \frac{۸T_B}{T_B} = \sqrt{(\frac{r_A}{r_B})^۳} \Rightarrow ۶۴ = (\frac{r_A}{r_B})^۳ \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = ۴$$

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ (۲) درس‌باکس داریم:

$$\frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{r_A}{r_B}} \xrightarrow{\frac{r_A}{r_B}=۴} \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{۴} = ۲$$

گام سوم: نسبت انرژی جنبشی ماهوارهٔ **B** به انرژی جنبشی ماهوارهٔ **A** را به دست می‌آوریم:

$$\frac{K_B}{K_A} = \frac{\frac{۱}{۲}m_Bv_B^۲}{\frac{۱}{۲}m_Av_A^۲} \xrightarrow[\frac{v_B}{v_A}=۲]{m_B=۳m\,,\,m_A=m} \frac{K_B}{K_A} = \frac{۳m}{m} \times ۲^۲ = ۳ \times ۴ = ۱۲$$

گزینه دو

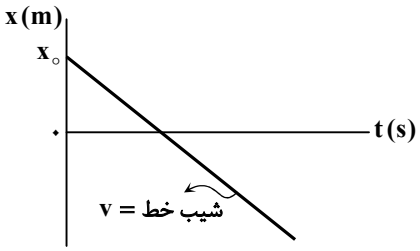
آزمون ۲۵ مهر ۱۴۰۴

فیزیک ۳

۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

وقتی نمودار مکان- زمان، خط مستقیم باشد، حرکت با سرعت ثابت است و معادلهٔ مکان- زمان آن به‌صورت $x = vt + x_{\circ}$ است. در اینجا $x_{\circ}$ (عرض از مبدأ خط) مثبت است و v (شیب خط) منفی است؛ بنابراین گزینهٔ ۳ می‌تواند معادلهٔ مکان- زمان این نمودار باشد.



۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

۱۰ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از لحظهٔ $t = ۱۰s$ تا لحظهٔ $t = ۲۰s$:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(۲۰) - x(۱۰)}{۲۰ - ۱۰} = \frac{-(۲۰^۳ - ۱۰^۳) + ۲۴(۲۰^۲ - ۱۰^۲) - ۶۰(۲۰ - ۱۰)}{۱۰}$$

$$= \frac{-۷۰۰۰ + ۷۲۰۰ - ۶۰۰}{۱۰} = -۴۰\frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}| = ۴۰\frac{m}{s}$$

SanjeshCloud

۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}۴=\dfrac{v(۱۰)-v(۰)}{۱۰}\Rightarrow v(۱۰)-v(۰)=۴۰ & \text{رابطهٔ (۱)}\\ ۳=\dfrac{v(۲۵)-v(۰)}{۲۵-۰}\Rightarrow v(۲۵)-v(۰)=۷۵ & \text{رابطهٔ (۲)}\end{cases}$$

اگر دو رابطهٔ فوق را از هم کم کنیم:

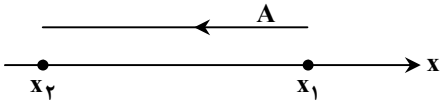
$$\xrightarrow{(۱)\text{ و }(۲)}\big[v(۲۵)-v(۰)\big]-\big[v(۱۰)-v(۰)\big]=۷۵-۴۰\Rightarrow v(۲۵)-v(۱۰)=۳۵$$

$t_۲=۲۵s$ تا $t_۱=۱۰s$ شتاب متوسط در بازهٔ : $a_{av}=\dfrac{v(۲۵)-v(۱۰)}{۲۵-۱۰}=\dfrac{۳۵}{۱۵}=\dfrac{۷}{۳}\dfrac{m}{s^۲}$

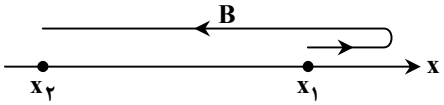
۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

متحرک A با سرعت ثابت در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (نمودار مکان- زمان متحرک A یک خط نزولی است.)؛ پس حرکت متحرک A در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ به‌صورت زیر است:



متحرک B ابتدا در جهت محور x حرکت می‌کند (نمودار مکان- زمان آن صعودی است) و سپس برمی‌گردد (نمودار مکان- زمان آن نزولی است)؛ پس در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ داریم:



مکان اولیه و نهایی هر دو متحرک برابر است، پس جابه‌جایی آن‌ها نیز برابر خواهد بود، اما مسافت طی‌شدهٔ متحرک B بیشتر است.

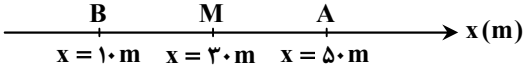
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\left|v_{av,A}\right|=\left|v_{av,B}\right|$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av,A}<s_{av,B}$$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

نقاط $x=۵۰m$ و $x=۱۰m$ نقاطی هستند که از نقطهٔ $x=۳۰m$، ۲۰ متر فاصله دارند و چون گفته شده که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند یعنی از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود.



$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۰-۵۰}{۱۵-۵}=\frac{-۴۰}{۱۰}=-۴\frac{m}{s}$$

$$x=vt+x_۰=-۴t+x_۰$$

$$x(t=۵s)=۵۰m\Rightarrow ۵۰=-۴\times ۵+x_۰$$

$$\Rightarrow x_۰=۷۰m\Rightarrow x=-۴t+۷۰$$

SanjeshCloud

۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

سرعت لحظه‌ای شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان است و شتاب متوسط از رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ حساب می‌شود.

در لحظات $t=0$، $t=t_1$ و $t=t_3$ خط مماس بر نمودار مکان- زمان افقی است و بنابراین سرعت لحظه‌ای صفر است.

در لحظهٔ $t=t_2$ شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان نزولی و بنابراین سرعت منفی است.

در لحظهٔ $t=t_4$ شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان صعودی و بنابراین سرعت مثبت است.

$$\begin{cases} v(0)=v(t_1)=v(t_3)=0 \\ v(t_2)<0 \\ v(t_4)>0 \end{cases}$$

الف) $a_{av(0\to t_2)}=\frac{v(t_2)-v(0)}{t_2-0}<0$

ب) $a_{av(t_1\to t_3)}=\frac{v(t_3)-v(t_1)}{t_3-t_1}=0$

پ) $a_{av(0\to t_4)}=\frac{v(t_4)-v(0)}{t_4-0}>0$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

سرعت متحرک را در لحظه‌های $t_1=1s$ و $t_2=3s$ با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان داده‌شده به‌دست می‌آوریم و سپس شتاب متوسط متحرک را در این بازهٔ زمانی محاسبه می‌کنیم:

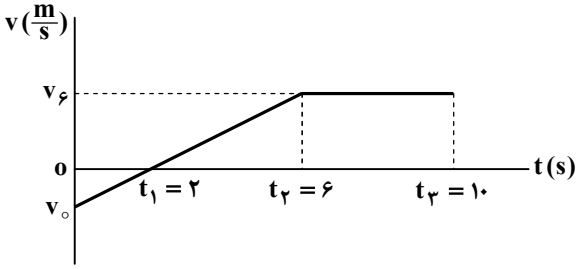
$$v=t^3-3t^2+4 \Rightarrow \begin{cases} t_1=1s \Rightarrow v_1=(1)^3-3(1)^2+4=1-3+4=2\frac{m}{s} \\ t_2=3s \Rightarrow v_2=(3)^3-3(3)^2+4=27-27+4=4\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{4-2}{3-1}=\frac{2}{2}=1\frac{m}{s^2}$$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

فرض می‌کنیم سرعت متحرک در لحظه‌های $t_0=0$ و $t_2=6s$ به‌ترتیب v_0 و v_6 باشد. با دقت در نمودار زیر، داریم:



$$\overset{\triangle}{v_0ot_1}\sim\overset{\triangle}{t_1t_2v_6} \Rightarrow \frac{0-v_0}{t_1-0}=\frac{v_6-0}{t_2-t_1}$$

$$\Rightarrow -\frac{v_0}{2}=\frac{v_6}{6-2} \Rightarrow v_6=-2v_0 \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

شتاب متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول برابر $3\frac{m}{s^2}$ است؛ بنابراین:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{10}-v_0}{10-0} \xrightarrow{(v_{10}=v_6)} 3=\frac{v_6-v_0}{10}$$

$$\Rightarrow v_6-v_0=30 \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} -2v_0-v_0=30 \Rightarrow -3v_0=30$$

$$\Rightarrow v_0=-10\frac{m}{s}$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

در حرکت با سرعت ثابت، مقدار $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ در تمام بازه‌های زمانی ثابت است و برابر سرعت لحظه‌ای است؛ یعنی Δx با Δt متناسب است. با جایگذاری موارد «الف» تا «پ» داریم:

الف) $v_{av}=\frac{۳۵-(-۵)}{۸-۳}\overset{?}{=}\frac{۶۷-۳۵}{۱۲-۸}\overset{?}{=}\frac{۹۱-۶۷}{۱۵-۱۲}\Rightarrow\frac{۴۰}{۵}\overset{?}{=}\frac{۳۲}{۴}\overset{?}{=}\frac{۲۴}{۳}$ ✓

ب) $\frac{۳۵-(-۵)}{۷-۳}\overset{?}{=}\frac{۸۵-۳۵}{۱۲-۷}\overset{?}{=}\frac{۱۲۵-۸۵}{۱۵-۱۲}\Rightarrow\frac{۴۰}{۴}\overset{?}{=}\frac{۵۰}{۵}\overset{?}{=}\frac{۴۰}{۳}$ ✗

البته تا اینجا جواب مشخص شده است، اما مورد «پ» را هم بررسی می‌کنیم:

پ) $\frac{۳۵-(-۵)}{۱۳-۳}\overset{?}{=}\frac{۳۵-۳۱}{۱۳-۱۲}\overset{?}{=}\frac{۴۳-۳۵}{۱۵-۱۳}\Rightarrow\frac{۴۰}{۱۰}\overset{?}{=}\frac{۴}{۱}\overset{?}{=}\frac{۸}{۲}$ ✓

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

خوبه اینو بدونی

- شتاب حرکت در هر لحظه با شیب خط مماس بر نمودار سرعت- زمان برابر است. هرگاه نمودار سرعت- زمان صعودی باشد، شتاب حرکت مثبت (هم‌سو با محور حرکت) است و هرگاه نزولی باشد، شتاب حرکت منفی (در خلاف جهت محور حرکت) است. در لحظه‌ای که خط مماس بر نمودار سرعت- زمان افقی باشد، شتاب صفر می‌شود.
- برای آنکه تندی متوسط با بزرگی سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی معین برابر شود، می‌بایست جهت حرکت (علامت سرعت) در بازهٔ زمانی موردنظر ثابت باشد و جهت حرکت از روی علامت سرعت معین می‌شود.

جوابش اینه

با توجه به موارد فوق، در مدت $t=۰$ تا $t=۵s$ شتاب منفی است و در لحظهٔ $t=۵s$ شتاب صفر می‌شود و از $t=۵s$ به بعد شتاب حرکت مثبت است.

در مدت $t=۰$ تا $t=۱۲s$ متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. در لحظهٔ $t=۱۲s$ توقف لحظه‌ای و تغییر جهت حرکت داریم و از $t=۱۲s$ به بعد، متحرک هم‌سو با محور x حرکت می‌کند.

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$\Delta x=v_{۰}\Delta t\Rightarrow x(۲۰)-x(۰)=۴\times۲۰\Rightarrow x(۲۰)-(-۱۰)=۸۰\Rightarrow x(۲۰)=۷۰m$$

از لحظهٔ $t=۲۰s$ به بعد یک حرکت با سرعت ثابت $-۲\frac{m}{s}$ شروع می‌شود. دقت کنید که در رابطهٔ $x=vt+x_{۰}$ به‌جای t باید بنویسیم $(t-۲۰)$ چون این حرکت جدید از $t=۲۰s$ آغاز می‌شود، مثلاً در $t=۲۱s$ فقط ۱ ثانیه از این حرکت گذشته است. ضمناً $x_{۰}$ نیز $x(t=۲۰s)$ است، پس معادله به‌صورت زیر است:

$$x=-۲(t-۲۰)+۷۰=-۲t+۱۱۰$$

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

اگر طول مسیر ℓ باشد، وقتی اتومبیل $\frac{۱}{۴}$ طول مسیر را طی کرده است، $\frac{۳}{۴}$ طول مسیر باقی مانده است؛ پس طول دو قسمت بعدی $(\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۴}\ell)$ و $(\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\ell)$ است.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{\ell}{\frac{\ell}{۴}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۴}\ell+\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\ell}{۱۲۰}{۶۰}{۹۰}=\frac{۱}{\frac{۱}{۴۸۰}+\frac{۱}{۲۴۰}+\frac{۱}{۱۸۰}}=\frac{۹\times۲۴\times۲۰}{۹+۱۸+۲۴}=\frac{۹\times۸\times۲۰}{۳+۶+۸}=\frac{۱۴۴۰}{۱۷}\frac{km}{h}$$

$$\ell=s_{av}\cdot\Delta t=\frac{۱۴۴۰}{۱۷}\times۸/۵=۷۲۰km$$

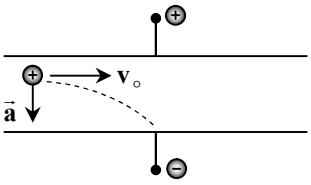
۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

گزارهٔ «الف» و «پ» درست است.

گزارهٔ «الف» در هر حرکت و در هر بازهٔ زمانی درست است. $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$

گزارهٔ «پ» درست است؛ برای مثال وقتی یک ذرهٔ باردار در یک میدان الکتریکی یکنواخت مطابق شکل پرتاب شود، نیروی خالص وارد بر آن ثابت است، پس شتاب آن ثابت است، اما مسیر حرکت منحنی است.



نباید سراغ اینا بری

گزارهٔ «ب» نادرست است؛ اگر مسیر حرکت مستقیم باشد، بردارهای جابه‌جایی، سرعت و سرعت متوسط، شتاب و شتاب متوسط هم‌راستا هستند.

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

برای حرکت از A تا B : $s_{av} = \frac{AB}{۶\,min} = \frac{۱۲۰۰\,m}{۶\,min}$

در کل مسیر : $v_{av} = \frac{AC}{۶\,min + ۴\,min} = \frac{۸۰۰\,m}{۱۰\,min}$

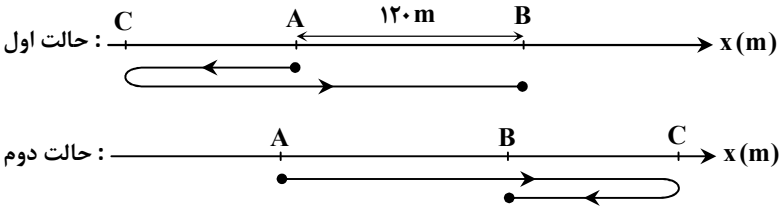
$$\frac{\text{تندی متوسط متحرک از A تا B}}{\text{بزرگی سرعت متوسط متحرک در کل مسیر}} = \frac{\frac{۱۲۰۰}{۶}}{\frac{۸۰۰}{۱۰}} = \frac{۲۰}{۸} = \frac{۵}{۲}$$

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$\ell = s_{av} \cdot \Delta t = ۱۰ \times ۳۰ = ۳۰۰\,m$

در این مدت ۳۰۰ متر مسافت توسط متحرک طی شده است اما فاصلهٔ A تا B برابر ۱۲۰ متر است، پس متحرک مقداری جلو رفته و سپس برگشته است. دو حالت زیر امکان‌پذیر است:



چون حداکثر فاصله از نقطهٔ B موردنظر است، حالت اول را بررسی می‌کنیم:

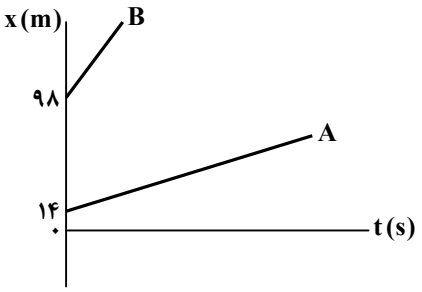
$۲AC + ۱۲۰ = ۳۰۰ \Rightarrow AC = ۹۰\,m$

$\Rightarrow CB = ۹۰ + ۱۲۰ = ۲۱۰\,m$

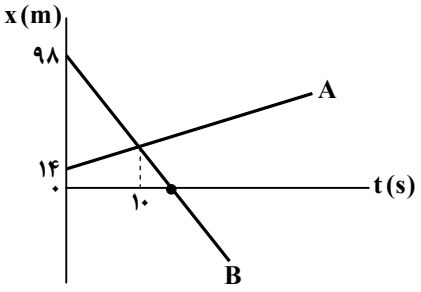
۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

دو متحرک A و B با سرعت ثابت حرکت می‌کنند و $x_{\circ_A} = ۱۴m$ و $x_{\circ_B} = ۹۸m$. ضمناً از روی نمودار مشخص است که سرعت A مثبت است اما در مورد مثبت یا منفی بودن سرعت B اطلاعی نداریم. اگر سرعت B را مثبت فرض کنیم، با توجه به اینکه تندی B دو برابر تندی A است، وضعیت مطابق شکل «الف خواهد بود و دو متحرک هیچ‌گاه به هم نمی‌رسند. بنابراین سرعت متحرک B منفی است، یعنی وضعیت مطابق شکل «ب» می‌شود.



(الف)



(ب)

$$\begin{cases} x_A = vt + ۱۴ \\ x_B = -۲vt + ۹۸ \end{cases} \xrightarrow{x_A(۱۰)=x_B(۱۰)} ۱۰v + ۱۴ = -۲۰v + ۹۸ \Rightarrow ۳۰v = ۸۴ \Rightarrow v = ۲/۸\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow x_B = -۵/۶t + ۹۸ \xrightarrow{x_B=۰} ۵/۶t = ۹۸ \Rightarrow t = \frac{۹۸}{۵/۶} = \frac{۱۴}{۰/۸} = ۱۷/۵s$$

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$AC = \ell = v_۱\Delta t_۱ + v_۲\Delta t_۲ = ۴v_۱ + ۳\times(۲v_۱) = ۱۰v_۱$$

برای آنکه متحرک بتواند این مسافت را در ۸ ساعت طی کند، باید با این تندی متوسط حرکت کند:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۱۰v_۱}{۸} = \frac{۵}{۴}v_۱$$

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

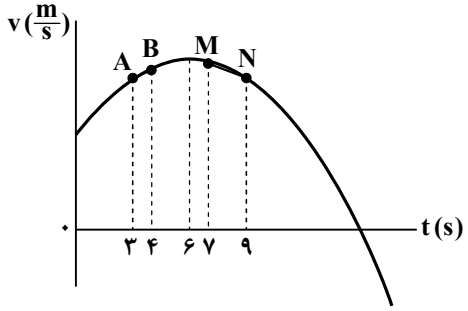
نمودار به شکل سهمی است. رأس سهمی در لحظهٔ $t = \frac{۰+۱۲}{۲} = ۶s$ قرار دارد.

شتاب لحظه‌ای شیب خط مماس بر نمودار سرعت- زمان است. از $t = ۰$ تا $t = ۶s$ شتاب مثبت است و از $t = ۶s$ به بعد شتاب منفی است.

در لحظهٔ $t = ۶s$ (رأس سهمی) شتاب لحظه‌ای صفر می‌شود و علامت آن تغییر می‌کند، پس جملهٔ «الف» درست است.

شتاب متوسط شیب پاره‌خط قاطع نمودار سرعت- زمان است. هرچه به رأس سهمی نزدیک می‌شویم، اندازهٔ این شیب کم می‌شود.

با توجه به شکل مقابل، شیب پاره‌خط AB از بزرگی شیب پاره‌خط MN بیشتر است؛ بنابراین جملهٔ «ب» نادرست است.



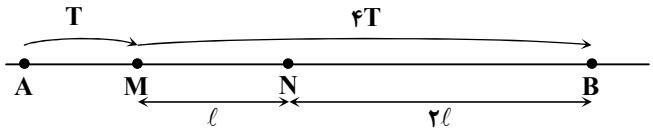
با توجه به شکل سهمی مشخص است که $v(۰) < v(۱۰)$؛ پس در بازهٔ $t = ۰$ تا $t = ۱۰s$ شتاب متوسط مثبت است؛ بنابراین جملهٔ «پ» درست است.

SanjeshCloud

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

شکل مقابل، خلاصهٔ صورت‌مسئله را نشان می‌دهد. ضمناً چون جهت حرکت تغییر نمی‌کند، s_{av} با اندازهٔ v_{av} برابر است.



$$v_{AM}=۳\frac{m}{s}\ ,\ v_{MN}=۶\frac{m}{s}\ ,\ v_{NB}=۱/۵\frac{m}{s}$$

ابتدا تندی متوسط متحرک در قسمت MB را حساب می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{MN+NB}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}\Rightarrow |v_{av}|=s_{av}=\frac{۳\ell}{\frac{\ell}{۶}+\frac{۲\ell}{۱/۵}}=\frac{۳}{\frac{۱}{۶}+\frac{۴}{۳}}=\frac{۳\times۶}{۱+۸}=۲\frac{m}{s}$$

حالا تندی متوسط متحرک در کل مسیر را حساب می‌کنیم:

$$|v_{av}|=s_{av}=\frac{AM+MB}{\Delta t_{AM}+\Delta t_{MB}}=\frac{(۳\times T)+(۲\times ۴T)}{T+۴T}=\frac{۱۱T}{۵T}=۲/۲\frac{m}{s}$$

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$\begin{cases}x_A=۶t\\ x_B=۱۲(t-۱۰)\end{cases}\xrightarrow{x_A=x_B}۱۲t-۱۲۰=۶t\Rightarrow ۶t=۱۲۰\Rightarrow t=۲۰s$$

دو متحرک در لحظهٔ $t_۱=۲۰s$ برای اولین بار از کنار هم می‌گذرند.

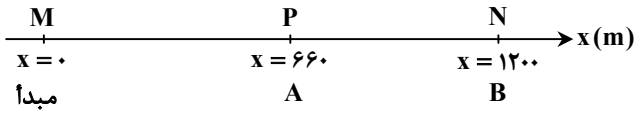
حالا زمان رسیدن متحرک B به نقطهٔ N را محاسبه می‌کنیم:

$$۱۲۰۰=۱۲(t'-۱۰)\Rightarrow t'=۱۱۰s$$

یعنی متحرک B، ۱۱۰ s پس از آغاز به نقطه N می‌رسد و در این مدت متحرک A به مکان x_A رسیده است:

$$x_A=۶t'=۶\times۱۱۰=۶۶۰m$$

در لحظهٔ $t'=۱۱۰s$ موقعیت متحرک A و B به شکل مقابل است:



از این زمان به بعد، متحرک A با تندی $۶\frac{m}{s}$ به‌طرف راست و متحرک B با تندی $۱۲\frac{m}{s}$ به‌طرف چپ می‌رود که معادله‌های حرکت هر دو را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x_A=۶t''+۶۶۰\\ x_B=-۱۲t''+۱۲۰۰\end{cases}\xrightarrow{x_A=x_B}۶t''+۶۶۰=-۱۲t''+۱۲۰۰$$

$$\Rightarrow ۱۸t''=۱۲۰۰-۶۶۰=۵۴۰\Rightarrow t''=۳۰s$$

$$\Rightarrow t_۲=۱۱۰+۳۰=۱۴۰s$$

در لحظهٔ $t_۲=۱۴۰s$ دو متحرک برای دومین بار از کنار هم می‌گذرند؛ بنابراین اختلاف زمانی خواسته‌شده برابر است با:

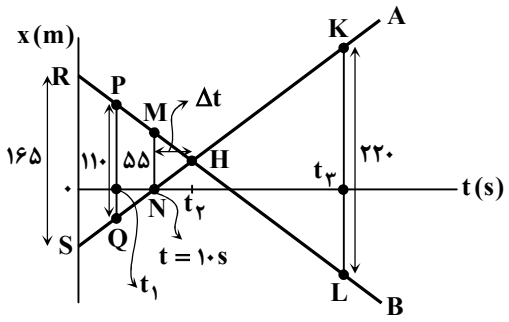
$$\Delta t=t_۲-t_۱=۱۴۰-۲۰=۱۲۰s$$

SanjeshCloud

۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

استفاده از تشابه مثلث‌ها در نمودارها خیلی مهم و مفید است.



زمان به هم رسیدن دو متحرک:

$$\xrightarrow{\overset{\triangle}{HMN}\ ,\ \overset{\triangle}{HRS}} \frac{\Delta t}{۵۵}=\frac{\Delta t+۱۰}{۱۶۵} \Rightarrow ۳\Delta t=۱۰+\Delta t \Rightarrow \Delta t=۵s \Rightarrow t_۲=۵+۱۰=۱۵s$$

در لحظهٔ $t_۱=۵s$ فاصلهٔ دو متحرک برای اولین بار $۱۱۰m$ می‌شود:

$$\xrightarrow{\overset{\triangle}{HPQ}\ ,\ \overset{\triangle}{HMN}} \frac{۱۱۰}{۵۵}=\frac{t_۲-t_۱}{۵} \Rightarrow t_۲-t_۱=۱۰s \quad (۱)\text{رابطهٔ} \Rightarrow t_۱=۵s$$

$$\xrightarrow[(۱)\text{رابطهٔ}]{\overset{\triangle}{HKL}\ ,\ \overset{\triangle}{HPQ}} \frac{۲۲۰}{۱۱۰}=\frac{t_۳-t_۲}{۱۰} \Rightarrow t_۳-t_۲=۲۰s$$

بنابراین فاصلهٔ زمانی بین $t_۱$ تا $t_۳$ برابر با $t_۳-t_۱=۳۰s$ می‌شود.

اینجوری هم میشه

$$x=vt+x_\circ \ ,\ v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} v_A=\dfrac{۰-(-۶۰)}{۱۰}=۶\dfrac{m}{s} \\ x_{\circ,A}=-۶۰m \end{cases} \Rightarrow x_A=۶t-۶۰$$

$$\begin{cases} v_B=\dfrac{۵۵-۱۰۵}{۱۰}=-۵\dfrac{m}{s} \\ x_{\circ,B}=۱۰۵m \end{cases} \Rightarrow x_B=-۵t+۱۰۵$$

برای اولین بار فاصلهٔ دو متحرک ۱۱۰ متر شود : $x_B-x_A=۱۱۰ \Rightarrow -۱۱t+۱۶۵=۱۱۰ \Rightarrow t=۵s$

فاصلهٔ دو متحرک ۲۲۰ متر شود : $x_A-x_B=۲۲۰ \Rightarrow ۱۱t-۱۶۵=۲۲۰ \Rightarrow t=۳۵s$

$\Delta t=۳۵-۵=۳۰s$

گزینه دو

آزمون ۱۶ آبان ۱۴۰۴

فیزیک ۳

۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)**



ابتدا شتاب متحرک را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_{\circ} = ۲۰\frac{m}{s} \\ v_{(t=۵s)} = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{۰-۲۰}{۵} = -۴\frac{m}{s^۲}$$

حالا مقدار $x_{\circ}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_{\circ} \rightarrow v_{\circ} = ۲۰\frac{m}{s} \\ x = ۱۳\,m \rightarrow v = -۲۰\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v^۲ - v_{\circ}^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow (-۲۰)^۲ - (۲۰)^۲ = ۲\times(-۴)\times(۱۳-x_{\circ}) \Rightarrow ۱۳ - x_{\circ} = ۰ \Rightarrow x_{\circ} = ۱۳\,m$$

معادلهٔ مکان- زمان متحرک برابر است با:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_{\circ}t + x_{\circ} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}(-۴)(t^۲) + ۲۰t + ۱۳ \Rightarrow x = -۲t^۲ + ۲۰t + ۱۳$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)**



فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ $x = ۱۲\,m$: $|x-۱۲| = |-۸t+۶۰-۱۲| = |۸t-۴۸| \Rightarrow |۸t-۴۸| \le ۲۴ \Rightarrow -۲۴ \le ۸t-۴۸ \le ۲۴$

$\Rightarrow ۲۴ \le ۸t \le ۷۲ \Rightarrow ۳s \le t \le ۹s$

یعنی به مدت ۶ ثانیه فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ $x = ۱۲\,m$، کوچک‌تر یا مساوی ۲۴ متر است.

۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}_1=\dfrac{\vec{v}(4)-\vec{v}(0)}{4-0}=\dfrac{(-16+40+5)-(5)}{4}\vec{i}=(6\dfrac{m}{s^2})\vec{i}\\ \vec{a}_2=\dfrac{\vec{v}(8)-\vec{v}(6)}{8-6}=\dfrac{(-64+80+5)-(-36+60+5)}{2}\vec{i}=(-4\dfrac{m}{s^2})\vec{i}\end{cases}\Rightarrow\vec{a}_2-\vec{a}_1=(-10\dfrac{m}{s^2})\vec{i}$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

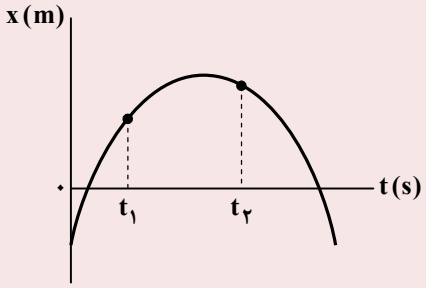
جوابش اینه

الف) درست؛ وقتی شتاب ثابت است، شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی با شتاب لحظه‌ای برابر می‌شود $(\vec{a}=\vec{a}_{av})$؛ بنابراین تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ در هر دو بازهٔ زمانی هم‌اندازه، مساوی می‌شود $(\Delta\vec{v}=\vec{a}_{av}\cdot\Delta t=\vec{a}\cdot\Delta t)$. دو بازهٔ زمانی معین‌شده هم‌اندازه هستند، پس $\Delta\vec{v}$ آن‌ها یکسان است.

نباید سراغ اینا بری

ب) نادرست؛ برای اینکه مسافت طی‌شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر شود، نباید جهت حرکت تغییر کند؛ اما در حرکت با شتاب ثابت، لزوماً جهت حرکت ثابت نیست.

پ) نادرست؛ در هر حرکت بر خط راست $\vec{a}_{av}$ و $\vec{v}_{av}$ هم‌راستا هستند اما لزوماً هم‌سو نیستند؛ مثلاً در نمودار مکان- زمان مقابل در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 شتاب متوسط منفی است؛ اما سرعت متوسط مثبت است.



۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

معادلهٔ مکان- زمان متحرک یک معادلهٔ درجهٔ ۲ است؛ یعنی حرکت متحرک با شتاب ثابت است.

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\\ x=3t^2-24t-60\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}a=3\Rightarrow a=6\frac{m}{s^2}\ ,\ v_0=-24\frac{m}{s}$$

معادلهٔ سرعت- زمان متحرک به شکل زیر است: $v=at+v_0\Rightarrow v=6t-24$

لحظهٔ تغییر جهت متحرک را محاسبه می‌کنیم: $v=0\Rightarrow 0=6t-24\Rightarrow t=4s$

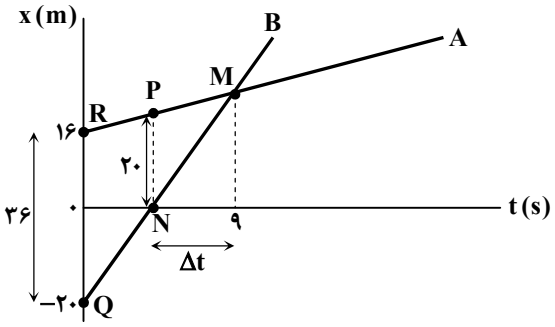
اکنون لحظه‌ای را که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ عبور می‌کند، به‌دست می‌آوریم:

$$x=0\Rightarrow 3t^2-24t-60=0\Rightarrow t^2-8t-20=0\Rightarrow(t+2)(t-10)=0\Rightarrow t=10s$$

بازهٔ زمانی مورد نظر برابر است با: $\Delta t=10-4=6s$

۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه



عوض شدن جهت بردار مکان برای متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، یعنی اینکه علامت x عوض شود.

$$\overset{\triangle}{MNP} \sim \overset{\triangle}{MQR} \Rightarrow \frac{۲۰}{۳۶}=\frac{\Delta t}{۹} \Rightarrow \Delta t = ۵s$$

یعنی در لحظهٔ $t = ۴s$ مکان متحرک B صفر می‌شود.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰-(-۲۰)}{۴}=۵\frac{m}{s}$$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\frac{\vec{d}_۱+\vec{d}_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{(AB+\frac{۱}{۲}AB)\vec{i}}{\frac{AB}{۸۰}+\frac{\frac{۱}{۲}AB}{۱۲۰}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۸۰}+\frac{۱}{۲۴۰}}\vec{i}=(۹۰\frac{km}{h})\vec{i}$$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

سرعت متحرک ثابت است؛ بنابراین معادلهٔ مکان- زمان آن به‌صورت زیر است: $x = vt + x_۰$

متحرک در لحظهٔ $t = ۹s$ از مکان $x = ۱۰m$ عبور می‌کند؛ بنابراین:

$x = vt + x_۰ \Rightarrow ۱۰ = ۹v + x_۰$ رابطهٔ (۱)

فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان در لحظه‌های $t = ۲s$ و $t = ۶s$ با یکدیگر برابر است؛ در نتیجه:

$$|x_۲| = |x_۶| \Rightarrow |۲v + x_۰| = |۶v + x_۰| \Rightarrow ۲v + x_۰ = \pm(۶v + x_۰)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲v + x_۰ = ۶v + x_۰ \Rightarrow ۴v = ۰ \Rightarrow v = ۰ \ \times \\ ۲v + x_۰ = -۶v - x_۰ \Rightarrow -۸v = ۲x_۰ \Rightarrow -۴v = x_۰ \end{cases}$$ رابطهٔ (۲)

$$\text{رابطهٔ (۱)}: ۱۰ = ۹v + x_۰ \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۲)}} ۱۰ = ۹v - ۴v \Rightarrow ۵v = ۱۰ \Rightarrow v = ۲\frac{m}{s}$$

$$\text{رابطهٔ (۲)}: x_۰ = -۴v \Rightarrow x_۰ = -۴ \times ۲ = -۸m$$

در پایان، خواستهٔ سؤال را می‌یابیم:

$x = vt + x_۰ \Rightarrow x = ۲t - ۸$

اینجوری هم میشه

با جایگذاری $t = ۹s$ و $x = ۱۰m$، فقط گزینه‌های ۲ و ۳ می‌توانند پاسخ سؤال باشند.

گزینهٔ ۱: $x = ۲t + ۶ \Rightarrow ۱۰ \overset{?}{=} ۲(۹) + ۶ \Rightarrow ۱۰ \overset{?}{=} ۲۴$ ✗

گزینهٔ ۲: $x = -۲t + ۲۸ \Rightarrow ۱۰ \overset{?}{=} -۲(۹) + ۲۸ \Rightarrow ۱۰ = ۱۰$ ✓

گزینهٔ ۳: $x = ۲t - ۸ \Rightarrow ۱۰ \overset{?}{=} ۲(۹) - ۸ \Rightarrow ۱۰ = ۱۰$ ✓

گزینهٔ ۴: $x = -۲t + ۲۰ \Rightarrow ۱۰ = -۲(۹) + ۲۰ \Rightarrow ۱۰ \overset{?}{=} ۲$ ✗

حالا فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان را در هر یک از لحظه‌های $t = ۲s$ و $t = ۶s$ برای هر یک از معادله‌های داده‌شده در گزینه‌های ۲ و ۳ به‌دست می‌آوریم:

گزینهٔ ۲: $x = -۲t + ۲۸ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۲s \Rightarrow x_۱ = ۲۴m \\ t_۲ = ۶s \Rightarrow x_۲ = ۱۶m \end{cases} \Rightarrow |x_۱| \neq |x_۲|$ ✗

گزینهٔ ۳: $x = ۲t - ۸ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۲s \Rightarrow x_۱ = -۴m \\ t_۲ = ۶s \Rightarrow x_۲ = ۴m \end{cases} \Rightarrow |x_۱| = |x_۲|$ ✓

۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

هر زمان سرعت مثبت است، نمودار مکان- زمان صعودی است و هر زمان سرعت منفی است، نمودار مکان- زمان نزولی است. در لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد، نمودار مکان- زمان به ماکزیمم یا مینیمم نسبی خود می‌رسد.

با توجه به نکات گفته‌شده، در هر سه مورد، نمودارهای $x-t$ و $v-t$ با یکدیگر تطابق دارند.

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_\circ t+x_\circ \Rightarrow \begin{cases} t_1=2s: 2a+2v_\circ+x_\circ=10 & \text{رابطهٔ (۱)} \\ t_2=6s: 18a+6v_\circ+x_\circ=78 & \text{رابطهٔ (۲)} \\ t_3=12s: 72a+12v_\circ+x_\circ=270 & \text{رابطهٔ (۳)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{\text{روابط (۱) و (۲)}} 16a+4v_\circ=68 \quad \text{رابطهٔ (۴)} \\ \xrightarrow{\text{روابط (۲) و (۳)}} 54a+6v_\circ=192 \quad \text{رابطهٔ (۵)} \end{cases} \Rightarrow 30a=90 \Rightarrow a=3\frac{m}{s^2}$$

حالا می‌توان سرعت اولیه و مکان اولیهٔ متحرک را یافت:

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۴)}} 16(3)+4v_\circ=68 \Rightarrow v_\circ=5\frac{m}{s}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} 2(3)+2(5)+x_\circ=10 \Rightarrow x_\circ=-6m$$

در لحظهٔ عبور از مکان $x_4=194m$، تندی متحرک برابر است با:

$$v_4^2-v_\circ^2=2a\Delta x \Rightarrow v_4^2-25=2\times3\times(194-(-6))$$

$$\Rightarrow v_4^2=25+1200=1225 \Rightarrow |v_4|=35\frac{m}{s}$$

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

با توجه به نمودار صورت سؤال، شتاب متحرک منفی است، چون سرعت (شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان) از مقدار اولیه که مثبت است به صفر رسیده و سپس منفی می‌شود؛ پس $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ منفی است:

$$a=-4\frac{m}{s^2}$$

در رأس سهمی، شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان صفر است $(v=0)$:

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-v_\circ^2=2\times(-4)\times(32-(-18))$$

$$\Rightarrow v_\circ^2=400 \Rightarrow v_\circ=20\frac{m}{s}$$

معادلهٔ مکان- زمان متحرک به‌صورت زیر است:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_\circ t+x_\circ \Rightarrow x=-2t^2+20t-18$$

زمان‌های عبور متحرک از مبدأ مکان را محاسبه می‌کنیم:

$$-2t^2+20t-18=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=1s \\ t_2=9s \end{cases}$$

در لحظهٔ $t_2=9s$ برای دومین بار متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند و جهت بردار مکان متحرک تغییر می‌کند:

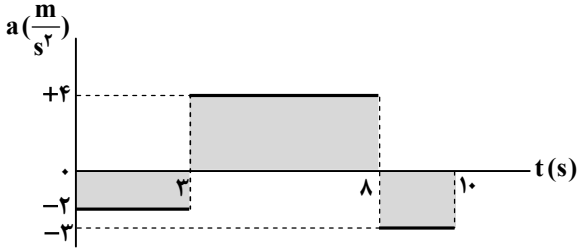
$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{|32-(-18)|+|0-32|}{9}=\frac{82}{9}\simeq 9/1\frac{m}{s}$$

SanjeshCloud

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

Δv با مساحت زیر نمودار شتاب- زمان برابر است:



$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow ۰/۸=\frac{(-۲\times ۳)+(۵\times ۴)+(۲a_۳)}{۱۰}$$

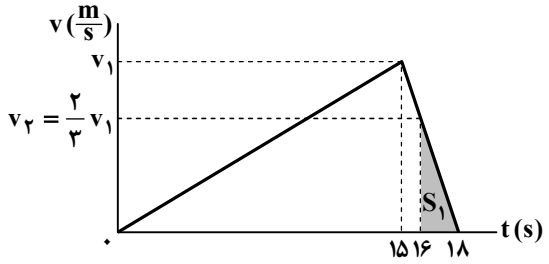
$$\Rightarrow -۶+۲۰+۲a_۳=۸\Rightarrow a_۳=-۳\frac{m}{s^۲}$$

$$\Delta v=a\Delta t\Rightarrow\begin{cases}v(۸)-v(۴)=۴(۴)\\ \Rightarrow v(۸)-(-۲)=۱۶\Rightarrow v(۸)=۱۴\frac{m}{s}\\ v(۱۰)-v(۸)=-۳(۲)\\ \Rightarrow v(۱۰)-۱۴=-۶\Rightarrow v(۱۰)=۸\frac{m}{s}\end{cases}$$

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

نمودار سرعت- زمان متحرک به شکل زیر است. با توجه به تشابه مثلث‌های مربوط به ۲ ثانیه و ۳ ثانیهٔ آخر معلوم می‌شود که در $t=۱۶s$ تندی حرکت $\frac{۲}{۳}v_۱$ است.



$$\frac{v_۲}{۱۸-۱۶}=\frac{v_۱}{۱۸-۱۵}\Rightarrow v_۲=\frac{۲}{۳}v_۱$$

$$S_۱=(\frac{۲}{۳}v_۱)\times(۱۸-۱۶)\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱۲=\frac{۲}{۳}v_۱\Rightarrow v_۱=۱۸\frac{m}{s}$$

$$a_۱=\frac{v_۱}{۱۵}=\frac{۱۸}{۱۵}=\frac{۶}{۵}\frac{m}{s^۲}$$

$$\ell=S_{کل}=\frac{v_۱\times ۱۸}{۲}=۹\times ۱۸=۱۶۲m$$

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

در لحظهٔ $t=۱۰s$ متحرک A به مدت ۱۰ ثانیه و متحرک B به مدت $t-۲=۸s$ حرکت کرده است.

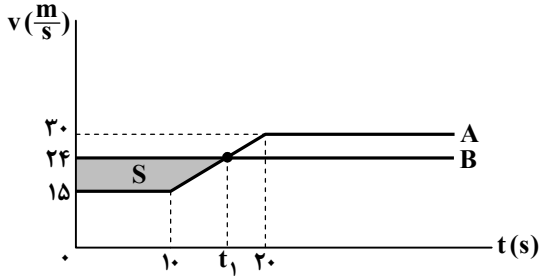
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\begin{cases}\Delta x_A=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱۰^۲=۲۰۰m\\ \Delta x_B=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۸^۲+۱۰\times ۸=۱۴۴m\end{cases}$$

چون نقطهٔ شروع حرکت هر دو متحرک ایستگاه بوده است، فاصلهٔ دو متحرک A و B از یکدیگر برابر اختلاف دو مقدار فوق است:

$$d=\Delta x_A-\Delta x_B=۲۰۰-۱۴۴=۵۶m$$

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه



در ابتدا متحرک A جلوتر از متحرک B است اما سرعت متحرک B بیشتر از A است، پس فاصلهٔ آن‌ها در حال کم شدن است و هر چه زمان بگذرد، این فاصله کمتر می‌شود و این وضعیت تا زمانی که تندی متحرک B بیشتر از تندی متحرک A باشد، ادامه دارد. از لحظه‌ای که تندی متحرک A بیشتر شود، دوباره فاصلهٔ آن‌ها زیاد می‌شود، پس کمترین فاصلهٔ دو متحرک در لحظه‌ای است که تندی دو متحرک A و B مساوی می‌شود، یعنی لحظهٔ $t_۱$ در شکل مقابل:

$$\frac{۳۰-۱۵}{۲۰-۱۰}=\frac{۲۴-۱۵}{t_۱-۱۰} \Rightarrow \frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۹}{t_۱-۱۰} \Rightarrow t_۱=۱۶s$$

از لحظهٔ $t_۰=۰$ تا $t_۱=۱۶s$ فاصلهٔ دو متحرک به‌اندازهٔ مساحت ناحیهٔ رنگی در شکل، کم شده است:

$$S=\frac{۱۶+۱۰}{۲}\times ۹=۱۳\times ۹=۱۱۷m$$

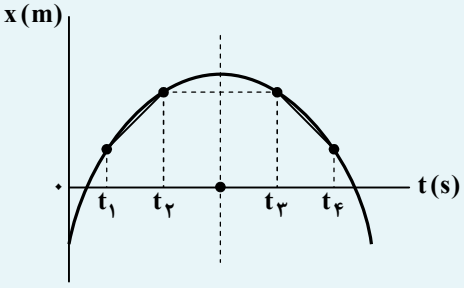
کمترین فاصلهٔ دو متحرک در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۳۰s$ برابر است با:

$$d=۱۴۰-۱۱۷=۲۳m$$

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

خوبه اینو بدونی

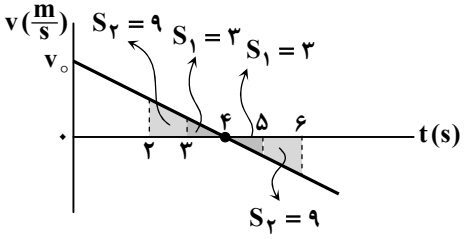
- در نمودار مکان- زمان سهمی‌شکل، با توجه به تقارن آن متوجه می‌شویم که «در حرکت با شتاب ثابت و بر خط راست، اگر مسافت طی‌شده در ۲ بازهٔ زمانی هم‌اندازه، یکسان شود، حتماً آن دو بازهٔ زمانی نسبت به لحظهٔ تغییر جهت حرکت (رأس سهمی) قرینهٔ هم هستند.» مثلاً در شکل مقابل، محور تقارن سهمی هم وسط $t_۱$ و $t_۴$ است و هم وسط $t_۲$ و $t_۳$.



جوابش اینه

در این سؤال مسافت طی‌شده توسط متحرک در ثانیه‌های چهارم و پنجم برابر است؛ بنابراین $t=۴s$ لحظهٔ تغییر جهت حرکت است $(v(۴)=۰)$. در مسائلی که با مسافت طی‌شده سروکار داریم یکی از بهترین روش‌ها، استفاده از نمودار سرعت- زمان و تشابه مثلث‌ها است.

اگر مساحت مثلث با قاعدهٔ $t=۴s$ و ارتفاع $v_۰$ را برابر S در نظر بگیریم، داریم:



$$\frac{۳+۹}{S}=(\frac{۲}{۴})^۲ \Rightarrow S=۴۸$$

$$\Rightarrow ۴۸=\frac{v_۰\times ۴}{۲} \Rightarrow v_۰=۲۴\frac{m}{s}$$

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۰-۲۴}{۴}=-۶\frac{m}{s^۲}$$

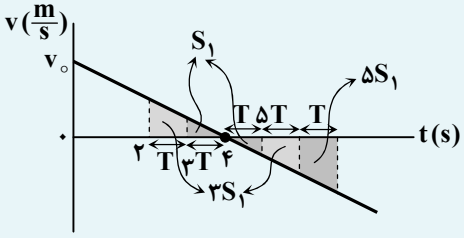
$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x \Rightarrow v_۲^۲-(۲۴)^۲=۲\times(-۶)\times(-۳-(-۳۹))$$

$$\Rightarrow v_۲^۲=۲۴^۲-۱۲\times ۳۶ \Rightarrow v_۲^۲=۵۷۶-۴۳۲=۱۴۴ \Rightarrow v_۲=۱۲\frac{m}{s}$$

خوبه اینو بدونی

- در حرکت با شتاب ثابت در حالتی که جهت حرکت تغییر می‌کند، در بازه‌های زمانی به طول T قبل و بعد از لحظهٔ تغییر جهت حرکت، وضعیت زیر برقرار است:

$$S_۱=\left|\frac{۱}{۲}aT^۲\right|$$



در این سؤال T برابر ۱ ثانیه است:

$$۳=\frac{۱}{۲}|a|\times ۱ \Rightarrow |a|=۶\frac{m}{s^۲} \Rightarrow a=-۶\frac{m}{s^۲}$$

$$v=at+v_۰ \xrightarrow{v(۴)=۰} (-۶\times ۴)+v_۰=۰ \Rightarrow v_۰=۲۴\frac{m}{s}$$

SanjeshCloud

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)**



از تقارن سهمی مشخص است که لحظهٔ $t = ۵s$ رأس سهمی است؛ بنابراین: $v(t = ۵s) = ۰$

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow \begin{cases} v(۹) - v(۵) = ۴a \Rightarrow v(۹) = ۴a & \text{رابطهٔ (۱)} \\ v(۱۰) - v(۵) = ۵a \Rightarrow v(۱۰) = ۵a & \text{رابطهٔ (۲)} \end{cases}$$

جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۹s$ تا $t_۲ = ۱۰s$ برابر است با:

$$\xrightarrow{\text{روابط (۱) و (۲)}} \Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \cdot \Delta t \Rightarrow -۲۷ = \frac{۴a + ۵a}{۲} \times ۱ \Rightarrow a = -۶ \frac{m}{s^۲}$$

در لحظهٔ $t = ۵s$ تندی متحرک صفر است:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow{t=۵s} ۰ = ۵ \times (-۶) + v_۰ \Rightarrow v_۰ = +۳۰ \frac{m}{s}$$

$$t = ۵s : x(۵) = (\frac{۱}{۲} a \times ۵^۲) + (v_۰ \times ۵) + x_۰ = (-۳ \times ۲۵) + (۳۰ \times ۵) + (-۲۷) = -۷۵ + ۱۵۰ - ۲۷ = ۴۸m$$

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)**



اگر سنگ در مدت t به‌اندازهٔ h (ارتفاع ساختمان) سقوط کند، در مدت $(t-۱)s$ به‌اندازهٔ $(h-۱۱)m$ سقوط کرده است؛ بنابراین داریم:

$$y = \frac{۱}{۲} g t^۲ \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{۱}{۲} g t^۲ = ۵t^۲ \\ h - ۱۱ = \frac{۱}{۲} g (t-۱)^۲ = ۵(t-۱)^۲ \end{cases} \Rightarrow ۱۱ = ۱۰t - ۵ \Rightarrow ۱۰t = ۱۶ \Rightarrow t = ۱/۶s$$

کل مدت سقوط سنگ $t = ۱/۶s$ است؛ در نتیجه ارتفاع ساختمان (h) برابر است با:

$$h = \frac{۱}{۲} g t^۲ \Rightarrow h = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times (۱/۶)^۲ = ۱۲/۸m$$

توجه کنید که جهت مثبت محور حرکت را رو به پایین در نظر گرفتیم.

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)**



جهت رو به پایین را مثبت در نظر می‌گیریم:

$$y = \frac{۱}{۲} g t^۲ \Rightarrow ۱۲۲/۵ = \frac{۱}{۲} \times ۹/۸ t^۲ \Rightarrow t^۲ = ۲۵ \Rightarrow t = ۵s$$

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)**



$$v_{av,MN} = \frac{v_M + v_N}{۲} \Rightarrow ۳۵ = \frac{v_M + v_N}{۲} \Rightarrow v_M + v_N = ۷۰ \frac{m}{s} \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

با استفاده از رابطهٔ سرعت- جابه‌جایی داریم:

$$v_M^۲ - v_N^۲ = ۲g\Delta y_{MN} \Rightarrow v_M^۲ - v_N^۲ = ۲ \times ۱۰ \times ۱۷/۵ = ۳۵۰ \Rightarrow (v_M - v_N)(v_M + v_N) = ۳۵۰$$

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} (v_M - v_N) \times ۷۰ = ۳۵۰ \Rightarrow v_M - v_N = ۵ \frac{m}{s} \quad \text{رابطهٔ (۲)}$$

از حل دستگاه حاصل از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} v_M + v_N = ۷۰ \\ v_M - v_N = ۵ \end{cases} \Rightarrow ۲v_M = ۷۵ \Rightarrow v_M = ۳۷/۵ \frac{m}{s}$$

مدت‌زمان رسیدن گلوله به نقطهٔ M را به‌دست می‌آوریم: $v = gt \Rightarrow ۳۷/۵ = ۱۰t_M \Rightarrow t_M = ۳/۷۵s$

بنابراین مدت‌زمان رسیدن گلوله از نقطهٔ M تا سطح زمین برابر است با: $t = t_{\text{کل}} - t_M = ۴/۵ - ۳/۷۵ = ۰/۷۵s$

گزینه دو

آزمون ۷ آذر ۱۴۰۴

فیزیک

۱ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

شتاب متحرک $a = ۶\frac{m}{s^۲}$ و سرعت اولیهٔ آن $v_۰ = ۰$ است؛ بنابراین معادلهٔ مکان- زمان آن در SI به‌صورت زیر می‌شود:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x = ۳t^۲ + x_۰ \xrightarrow[t=۲s]{x=۱۰m} ۱۰ = ۳(۲)^۲ + x_۰ \Rightarrow x_۰ = -۲m$$

معادلهٔ مکان- زمان متحرک به‌صورت $x = ۳t^۲ - ۲$ است؛ بنابراین مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۵s$ برابر است با:

$$x = ۳t^۲ - ۲ \Rightarrow x = ۳(۵)^۲ - ۲ = ۷۳m$$

۲ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

نمودار سرعت- زمان هر دو متحرک، خط مستقیم و مایل است، پس هر دو حرکت با شتاب ثابت هستند.

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۴۹ - ۲۵}{۱۲} = ۲\frac{m}{s^۲}$$

دو متحرک وقتی به هم می‌رسند که x آن‌ها مساوی شود $(x_B = x_A)$:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{۱}{۲} \times ۲t^۲ + ۲۵t + (x_۰ + ۱۰۰) \\ x_B = \frac{۱}{۲}at^۲ + ۱۰t + x_۰ \end{cases}$$

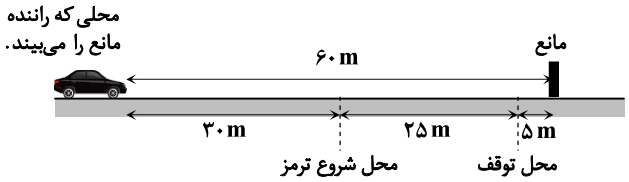
$$x_A = x_B \Rightarrow t^۲ + ۲۵t + ۱۰۰ = \frac{۱}{۲}at^۲ + ۱۰t \Rightarrow t^۲(۱ - \frac{۱}{۲}a) + ۱۵t + ۱۰۰ = ۰ \xrightarrow{t=۲۰s} ۴۰۰(۱ - \frac{۱}{۲}a) + ۳۰۰ + ۱۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۲}a = -۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}a = ۲ \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

۳ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

در مدت ۱ ثانیهٔ واکنش راننده، ماشین هنوز با همان تندی $۳۰\frac{m}{s}$ به حرکت ادامه می‌دهد.

$$\Delta x = v \cdot \Delta t = ۳۰ \times ۱ = ۳۰\,m$$

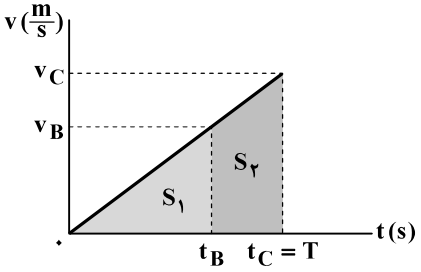


$$\text{مسافت ترمز} = ۶۰ - ۳۰ - ۵ = ۲۵\,m$$

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a \cdot \Delta x \Rightarrow ۰ - ۳۰^۲ = ۲a \times ۲۵ \Rightarrow a = \frac{-۹۰۰}{۵۰} = -۱۸\frac{m}{s^۲} \Rightarrow |a| = ۱۸\frac{m}{s^۲}$$

۴ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)**

می‌توانیم از نمودار سرعت- زمان استفاده کنیم. (مدت کل سقوط را T نامیده‌ایم که همان t_C است.)



$$S_۱ = \frac{۱۶}{۲۵}H$$

$$S_۲ = \frac{۹}{۲۵}H$$

در مثلث‌های متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت تشابه است.

$$\frac{S_۱}{S_{کل}} = (\frac{t_B}{T})^۲ \Rightarrow \frac{۱۶}{۲۵} = (\frac{t_B}{T})^۲ \Rightarrow t_B = \frac{۴}{۵}T$$

$$\frac{v_B}{v_C} = \frac{t_B}{t_C} \Rightarrow v_B = \frac{۴}{۵}v_C$$

$$\text{سرعت متوسط در قسمت BC}: v_{av} = \frac{v_B + v_C}{۲} \Rightarrow ۳۱/۵ = \frac{\frac{۴}{۵}v_C + v_C}{۲} = \frac{۹}{۱}v_C \Rightarrow v_C = \frac{۱۰}{۹} \times ۳۱/۵ = ۳۵\frac{m}{s}$$

۵ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

در حرکت با شتاب ثابت بین سرعت و جابه‌جایی رابطهٔ $v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a\Delta x$ برقرار است.

$$v_B^۲ - v_A^۲ = ۲a \cdot AB$$
$$v_C^۲ - v_B^۲ = ۲a \cdot BC$$
$$v_D^۲ - v_C^۲ = ۲a \cdot CD$$

اگر تندی متحرک در نقطهٔ A را $v_۱$ و فاصلهٔ AB را l بنامیم، خواهیم داشت:

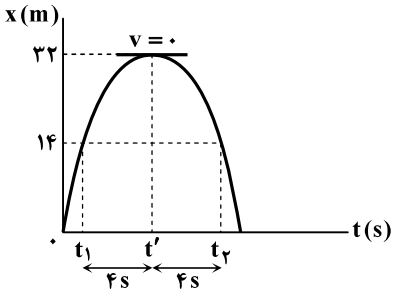
$$\begin{cases} ۴v_۱^۲ - v_۱^۲ = ۲al \Rightarrow ۲al = ۳v_۱^۲ \\ v_C^۲ - ۴v_۱^۲ = ۲a \cdot ۴l \Rightarrow v_C^۲ - ۴v_۱^۲ = ۴ \times ۳v_۱^۲ \Rightarrow v_C^۲ = ۱۶v_۱^۲ \Rightarrow v_C = ۴v_۱ \\ v_D^۲ - (۴v_۱)^۲ = ۲a \cdot ۱۶l \Rightarrow v_D^۲ - ۱۶v_۱^۲ = ۱۶ \times ۳v_۱^۲ \Rightarrow v_D^۲ = ۶۴v_۱^۲ \Rightarrow v_D = ۸v_۱ \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \cdot \Delta t \Rightarrow \begin{cases} \Delta t_{CD} = \frac{۲ \times ۱۶l}{۴v_۱ + ۸v_۱} = \frac{۱۶l}{۶v_۱} = \frac{۸l}{۳v_۱} \\ \Delta t_{BC} = \frac{۲ \times ۴l}{۲v_۱ + ۴v_۱} = \frac{۴l}{۳v_۱} \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta t_{CD}}{\Delta t_{BC}} = ۲$$

۶ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

با توجه به تقارن نمودار سهمی در شکل روبه‌رو، متحرک در مدت ۴ ثانیه از لحظهٔ $t_۱$ تا t' به‌اندازهٔ $\Delta x = ۳۲ - ۱۴ = ۱۸m$ در جهت محور x جابه‌جا شده است:



$$t' \text{ تا } t_۱ \text{ در بازهٔ } : \Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + v_{\text{نهایی}}t$$
$$\Rightarrow ۱۸ = -\frac{۱}{۲}a(۴)^۲ + ۰ \Rightarrow a = \frac{۱۸}{-۸} = -\frac{۹}{۴}\frac{m}{s^۲}$$

با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $t = ۰$ تا t' داریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - v_۰^۲ = ۲ \times (-\frac{۹}{۴}) \times ۳۲ \Rightarrow v_۰^۲ = ۲ \times ۹ \times ۸ = ۱۴۴ \Rightarrow v_۰ = ۱۲\frac{m}{s}$$

۷ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

هنگامی که خودرو شروع به حرکت می‌کند، کامیون از آن جلو می‌افتد تا اینکه تندی خودرو لحظه به لحظه افزایش یافته و به کامیون می‌رسد. از لحظه‌ای که تندی خودرو و کامیون برابر می‌شود تا لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند، فاصلهٔ آن‌ها در حال کاهش است.

تندی ثابت کامیون $۷۲\frac{km}{h}$ است که برابر با $۲۰\frac{m}{s}$ می‌شود:

$$v_{\text{کامیون}} = ۷۲\frac{km}{h} \div ۳/۶ = ۲۰\frac{m}{s}$$

معادلهٔ سرعت- زمان خودرو را می‌نویسیم و لحظهٔ برابری اندازهٔ سرعت‌های دو متحرک را می‌یابیم:

$$v_{\text{خودرو}} = at + v_۰ \Rightarrow v_{\text{خودرو}} = ۲/۵t$$
$$v_{\text{خودرو}} = v_{\text{کامیون}} \Rightarrow ۲/۵t = ۲۰ \Rightarrow t = \frac{۲۰}{۲/۵} = ۸s$$

معادلهٔ مکان- زمان هر دو متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$x_{\text{کامیون}} = vt + x_۰ \Rightarrow x_{\text{کامیون}} = ۲۰t + x_۰$$
$$x_{\text{خودرو}} = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x_{\text{خودرو}} = \frac{۱}{۲} \times ۲/۵t^۲ + x_۰ = ۱/۲۵t^۲ + x_۰$$

معادلهٔ مکان- زمان دو متحرک را برابر با هم قرار می‌دهیم تا لحظه‌ای را که دو متحرک به‌هم می‌رسند، پیدا کنیم. دقت کنید در لحظه‌ای که خودرو شروع به حرکت می‌کند، کامیون در کنار خودرو قرار دارد و در حال سبقت گرفتن از آن است؛ پس مکان اولیهٔ آن‌ها یکسان است:

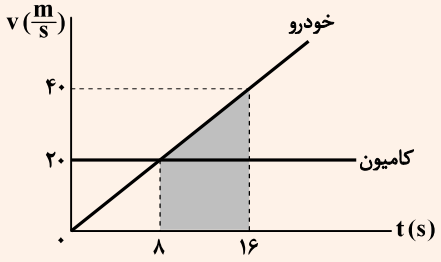
$$x_{\text{خودرو}} = x_{\text{کامیون}} \Rightarrow ۱/۲۵t^۲ + x_۰ = ۲۰t + x_۰ \Rightarrow ۱/۲۵t^۲ - ۲۰t = ۰ \Rightarrow t(۱/۲۵t - ۲۰) = ۰ \Rightarrow t = ۱۶s$$

تندی خودرو در لحظهٔ $t = ۸s$ با تندی کامیونی که جلوتر از آن قرار دارد، برابر می‌شود و در لحظهٔ $t = ۱۶s$، دو متحرک به‌هم می‌رسند؛ بنابراین در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۸s$ تا $t_۲ = ۱۶s$ فاصلهٔ آن‌ها در حال کاهش است؛ در نتیجه مسافتی که خودرو در این مدت طی می‌کند، برابر است با:

$$\ell_{\text{خودرو}} = \Delta x_{\text{خودرو}} = \frac{۱}{۲}a(t_۲^۲ - t_۱^۲) \Rightarrow \ell_{\text{خودرو}} = ۱/۲۵(۱۶^۲ - ۸^۲) = ۱/۲۵ \times (۱۶-۸) \times (۱۶+۸) = ۱/۲۵ \times ۸ \times ۲۴ = ۲۴۰m$$

اینجوری هم میشه

اگر نمودار سرعت- زمان $(v-t)$ دو متحرک را در یک دستگاه رسم کنیم، بخش رنگ‌شده ناحیه‌ای است که فاصلهٔ دو متحرک در حال کاهش است. با توجه به اینکه مساحت محصور بین نمودار سرعت متحرک با محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است، داریم:



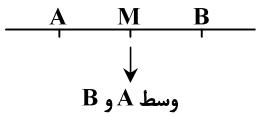
$$\ell_{\text{خودرو}} = \Delta x_{\text{خودرو}} = S_{\text{ذوزنقهٔ رنگی}} = (\frac{۲۰+۴۰}{۲}) \times ۸$$

$$\Rightarrow \ell_{\text{خودرو}} = ۲۴۰m$$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow ۹۶ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴^۲ + v_B \times ۴ \Rightarrow ۹۶ = ۲۴ + ۴v_B \Rightarrow v_B = ۱۸\frac{m}{s}$$

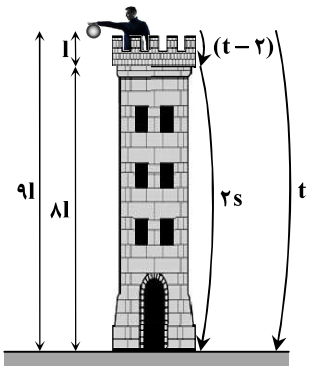


$$\begin{cases} v_B^۲ - v_A^۲ = ۲a \cdot AB & \text{رابطهٔ (۱)} \\ v_M^۲ - v_A^۲ = ۲a \cdot AM & \text{رابطهٔ (۲)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}} \frac{v_B^۲ - ۰}{v_M^۲ - ۰} = ۲ \Rightarrow v_M = \frac{v_B}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۸}{\sqrt{۲}}\frac{m}{s} = ۹\sqrt{۲}\frac{m}{s}$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه



اگر کل مدت سقوط t باشد، قسمت اول (تا قبل از ۲ ثانیهٔ آخر) می‌شود $(t-۲)$:

$$\frac{۱}{۲}gt^۲ = ۹ \times \frac{۱}{۲}g(t-۲)^۲ \Rightarrow t = ۳(t-۲) \Rightarrow t = ۳s$$

$$v = gt = ۱۰ \times ۳ = ۳۰\frac{m}{s}$$

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

تندی گلوله در لحظه‌ای که ۳ ثانیه مانده تا به زمین برسد، برابر است با:

$$g = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۱۰ = \frac{۴۸ - v_۱}{۳} \Rightarrow v_۱ = ۱۸\frac{m}{s}$$

$$\Delta y = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \cdot \Delta t = \frac{۱۸+۴۸}{۲} \times ۳ = \frac{۶۶}{۲} \times ۳ = ۹۹m$$

SanjeshCloud

۱۱ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

هر دو گلوله از یک محل رها می‌شوند و تا زمین سقوط می‌کنند؛ پس حرکت آن‌ها کاملاً مشابه است و با تندی یکسان به زمین می‌رسند. فقط گلولهٔ اولی ۱/۵ ثانیه زودتر می‌رسد.

در لحظه‌ای که گلولهٔ دومی رها می‌شود، تندی گلولهٔ اولی $۱۵\frac{m}{s}$ است $(v = gt = ۱۰\times ۱/۵)$ و از آن به بعد، تندی هر دو با شتاب g زیاد می‌شود. پس همیشه تندی اولی بیشتر از دومی است و هرچه زمان بگذرد، فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر زیاد می‌شود. این وضعیت تا زمانی ادامه دارد که اولی به زمین برسد و از آن به بعد فاصلهٔ آن‌ها کم می‌شود. بنابراین بیشترین فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر مربوط به زمانی است که گلولهٔ اولی به زمین می‌رسد. مسلم است که در این لحظه، گلولهٔ دومی هنوز ۱/۵ ثانیه فرصت لازم دارد تا به زمین برسد. پس می‌توان گفت که هر یک از گلوله‌ها در ۱/۵ ثانیهٔ آخر ۳۶ متر را طی می‌کند.

اگر کل مدت سقوط را t در نظر بگیریم، می‌توانیم بگوییم:

$$x(t)-x(t-۱/۵)=۳۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲}gt^۲-\frac{۱}{۲}g(t-۱/۵)^۲=۳۶ \Rightarrow ۵(t^۲-(t-۱/۵)^۲)=۳۶$$

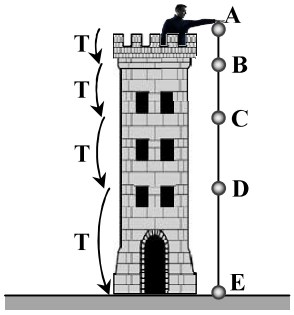
$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} ۷/۲=۱/۵(۲t-۱/۵) \Rightarrow ۲t-۱/۵=\frac{۷/۲}{۱/۵}=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸ \Rightarrow ۲t=۶/۳ \Rightarrow t=۳/۱۵s$$

$$v=gt=۱۰\times ۳/۱۵=۳۱/۵\frac{m}{s}$$

۱۲ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

طول هر یک از پاره‌خط‌های BC، CD و DE را برحسب پاره‌خط AB می‌یابیم:



$$y=\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow \begin{cases} AB=\frac{۱}{۲}gT^۲ \\ AC=\frac{۱}{۲}g(۲T)^۲=۴AB \Rightarrow BC=۳AB \\ AD=\frac{۱}{۲}g(۳T)^۲=۹AB \Rightarrow CD=۵AB \\ AE=\frac{۱}{۲}g(۴T)^۲=۱۶AB \Rightarrow DE=۷AB \end{cases}$$

نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{CE}{AD}=\frac{(۵+۷)AB}{۹AB}=\frac{۱۲}{۹} \Rightarrow CE=\frac{۴}{۳}AD$$

برای مقایسهٔ تندی گلوله در نقاط مختلف داریم:

$$v=gt \Rightarrow \begin{cases} v_A=۰ \\ v_B=gT \\ v_C=۲gT \\ v_D=۳gT \\ v_E=۴gT \end{cases} \Rightarrow v_D=۳v_B$$

۱۳ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$\Delta y_{BC}=\frac{v_B+v_C}{۲}\cdot\Delta t \Rightarrow ۲۸=\frac{v_B+v_C}{۲}\times ۱/۴ \Rightarrow v_B+v_C=۴۰\frac{m}{s} \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

$$\Delta v=g\cdot\Delta t \Rightarrow v_C-v_B=۱۰\times ۱/۴ \Rightarrow v_C=v_B+۱۴\frac{m}{s} \quad \text{رابطهٔ (۲)}$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$v_B+v_B+۱۴=۴۰ \Rightarrow v_B=۱۳\frac{m}{s}$$

حالا می‌توان زمان سقوط گلوله تا رسیدن به نقطهٔ B را حساب کرد:

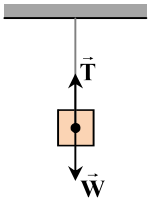
$$v = gt \Rightarrow ۱۳ = ۱۰t_B \Rightarrow t_B = ۱/۳s$$

کل مدت سقوط : $T = ۱/۳ + ۱/۴ + ۰/۸ = ۳/۵s$

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow AD = \frac{۱}{۲}gT^۲ \Rightarrow AD = \frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times ۳/۵ \times ۳/۵ = ۶۱/۲۵m$$

۱۴ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)**

دو نیروی کشش نخ و وزن بر وزنه وارد می‌شوند که واکنش هر یک بر عامل به‌وجودآورندهٔ آن‌ها یعنی نخ و زمین وارد می‌شود.



۱۵ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)**

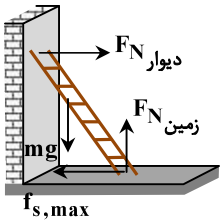
طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{net} = ۲ \times (۷/۵\vec{i} + ۱۰\vec{j}) = (۱۵N)\vec{i} + (۲۰N)\vec{j}$$

$$\left|\vec{F}_{net}\right| = \sqrt{(۱۵)^۲ + (۲۰)^۲} = ۲۵N$$

۱۶ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)**

نیروهای وارد بر نردبان مطابق شکل مقابل است:



با توجه به ساکن بودن نردبان می‌توان نوشت:

در راستای عمودی : $F_{net} = ۰ \Rightarrow F_{N_{زمین}} = mg = ۲۴ \times ۱۰ = ۲۴۰N$

نردبان در آستانهٔ سر خوردن است؛ بنابراین داریم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_{N_{زمین}} \Rightarrow f_{s,max} = ۰/۷۵ \times ۲۴۰ = ۱۸۰N$$

حالا می‌توان اندازهٔ نیروی سطح زمین بر نردبان را حساب کرد:

$$R = \sqrt{(F_{N_{زمین}})^۲ + (f_{s,max})^۲} = \sqrt{(۲۴۰)^۲ + (۱۸۰)^۲} = ۳۰۰N$$

۱۷ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)**

در هر حالت، وزنه در حالت تعادل است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_{net} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} F_{e_۱} = kx_۱ = m_۱g \Rightarrow k(L_۱ - L_۰) = m_۱g & \text{رابطهٔ (۱)} \\ F_{e_۲} = kx_۲ = m_۲g \Rightarrow k(L_۲ - L_۰) = m_۲g & \text{رابطهٔ (۲)} \end{cases}$$

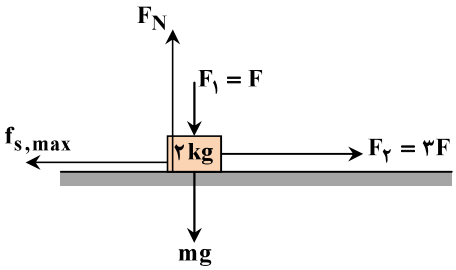
از تقسیم روابط (۱) و (۲) بر هم داریم:

$$\frac{L_۱ - L_۰}{L_۲ - L_۰} = \frac{m_۱}{m_۲} \Rightarrow \frac{۲۴ - L_۰}{۲۵ - L_۰} = \frac{۴۰۰}{۴۰۰ + ۱۰۰} \Rightarrow ۵(۲۴ - L_۰) = ۴(۲۵ - L_۰) \Rightarrow ۱۲۰ - ۵L_۰ = ۱۰۰ - ۴L_۰ \Rightarrow L_۰ = ۲۰cm$$

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

حالت اول:



در حالت اول، جهت نیروی $\vec{F}_1$ رو به پایین است و جسم در آستانهٔ حرکت است؛ بنابراین داریم:

$F_{net,y} = 0$: نیروی خالص در راستای قائم

$\Rightarrow F_1 + mg - F_N = 0 \Rightarrow F_N = F_1 + mg$

$= F + (2\times 10) = F + 20$ رابطهٔ (۱)

حالا می‌توان رابطهٔ نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را برحسب F به‌دست آورد:

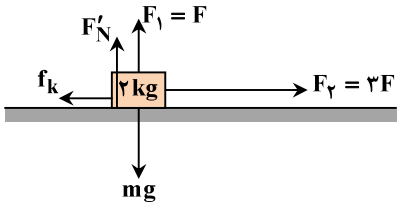
$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} f_{s,max} = 0/5(F+20)$ رابطهٔ (۲)

با نوشتن برایند نیروهای افقی داریم:

$F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_2 = f_{s,max}$

$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۲)}} 3F = 0/5(F+20) \Rightarrow 6F = F + 20 \Rightarrow 5F = 20 \Rightarrow F = 4\,N$ رابطهٔ (۳)

حالت دوم:



در حالت دوم، جهت نیروی $\vec{F}_1$ رو به بالا است و جسم با شتاب ثابت روی سطح افقی حرکت می‌کند. در حالت جدید نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم:

$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F'_N + F_1 = mg \Rightarrow F'_N = mg - F = 20 - F$

$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۳)}} F'_N = 20 - 4 = 16\,N$

چون جسم حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک آن از نوع جنبشی است و مقدار آن برابر است با:

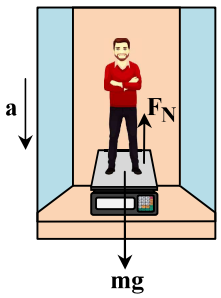
$f_k = \mu_k F'_N = 0/3\times 16 = 4/8\,N$ رابطهٔ (۴)

برایند نیروهای افقی وارد بر جسم سبب شتاب آن به‌اندازهٔ a می‌شود؛ بنابراین داریم:

$F_{net,x} = ma \Rightarrow F_2 - f_k = ma \Rightarrow 3F - f_k = ma \xrightarrow{\text{روابط (۳) و (۴)}} 3(4) - 4/8 = 2a \Rightarrow 7/2 = 2a \Rightarrow a = 3/6\,\frac{m}{s^2}$

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

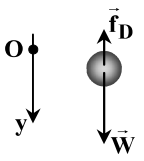


جهت مثبت را رو به پایین در نظر می‌گیریم، بنابراین می‌توان نوشت:

$F_{net} = ma \Rightarrow mg - F_N = ma \Rightarrow F_N = m(g-a) = 75\times(10-4) = 450\,N$

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه



بر این گوی‌ها دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می‌شود. طبق قانون دوم نیوتون، نیروی خالص وارد بر گوی با حاصل‌ضرب جرم در شتاب، برابر است. اگر جهت محور y را به‌سمت پایین در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$W - f_D = ma \Rightarrow a = \frac{W - f_D}{m} = \frac{mg - f_D}{m} = g - \frac{f_D}{m}$

f_D برای هر دو گوی یکسان است و $m_۲ > m_۱$ است، در نتیجه $a_۲ > a_۱$ است؛ زیرا:

$$m_۲ > m_۱ \Rightarrow \frac{f_D}{m_۲} < \frac{f_D}{m_۱} \Rightarrow g - \frac{f_D}{m_۲} > g - \frac{f_D}{m_۱} \Rightarrow a_۲ > a_۱$$

با توجه به رابطهٔ سرعت- جابه‌جایی می‌توان نوشت:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta y \Rightarrow v^۲ - ۰ = ۲ah \Rightarrow \begin{cases} v = \sqrt{۲ah} \\ a_۲ > a_۱ \end{cases} \Rightarrow v_۲ > v_۱$$

با توجه به معادلهٔ مکان- زمان داریم:

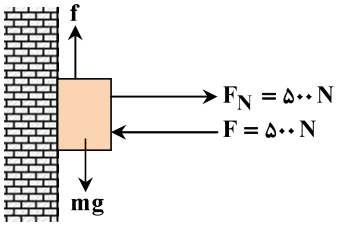
$$\Delta y = \frac{۱}{۲}at^۲ \Rightarrow h = \frac{۱}{۲}at^۲ \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{\frac{۲h}{a}} \\ a_۲ > a_۱ \end{cases} \Rightarrow t_۲ < t_۱$$

پس گوی (۱) دیرتر و با تندی کمتر نسبت به گوی (۲) به زمین می‌رسد.

۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)**

جوابش اینه

نیروهای وارد بر جسم مطابق شکل است:



در راستای افقی: $F_{net} = ۰ \Rightarrow F_N = F = ۵۰۰\,N$

اندازهٔ نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه برابر است با:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = ۰/۴ \times ۵۰۰ = ۲۰۰\,N$$

از آنجا که نیروی $mg = ۱۵ \times ۱۰ = ۱۵۰\,N$ کمتر از نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه است، جسم ساکن می‌ماند و در راستای قائم حرکت نمی‌کند؛ بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوار برابر با وزن جسم است:

در راستای قائم: $F_{net} = ۰ \Rightarrow f_s = mg = ۱۵۰\,N$

SanjeshCloud

گزینه دو

آزمون ۳۰ آذر

فیزیک

۱ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

ذره با سرعت ثابت حرکت می‌کند، پس شتاب آن و در نتیجه برایند نیروهای وارد بر آن صفر می‌باشد.

$$\vec{F}_{net} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = -(2\vec{i} - 6\vec{j}) = -2\vec{i} + 6\vec{j}$$

۲ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

نیروی وزن، نیرویی است که از کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌شود، مقدارش mg و جهتش روبه پایین (به‌سمت مرکز زمین) است ولی عکس‌العمل نیروی وزن، نیرویی است که جسم بر کرهٔ زمین وارد می‌کند و مقدارش همان mg (طبق قانون سوم نیوتون) ولی جهتش رو به بالا (به‌سمت جسم) است.

۳ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

ضلع هر مربع را در امتداد محور x برابر با یک واحد طول و ضلع هر مربع را در امتداد محور F برابر با یک واحد نیرو فرض می‌کنیم. به این ترتیب برای فنرهای (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} F_1 = k_1 x_1 \\ F_2 = k_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = k_1 \times 3 \\ 2 = k_2 \times 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{k_1 \times 3}{k_2 \times 4} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{8}{3}$$

۴ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۳)

چون نیروی دست ما بر راستای جابه‌جایی عمود است، کار نیروی دست ما در این جابه‌جایی صفر است.

$$W = FdCos90^\circ = 0$$

۵ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی پتانسیل گرانشی به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh \Rightarrow$$ تندی‌ها هنگام رسیدن به زمین مساوی است.

چون گلولهٔ B مسیر طولانی‌تری را طی می‌کند، گلولهٔ A زودتر به زمین می‌رسد.

۶ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

گزینهٔ ۲ درست است.

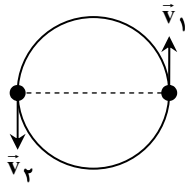
بررسی نادرستی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: اگر برایند نیروهای وارد بر جسمی صفر نباشد حرکت شتابدار است اما ممکن است اندازه سرعت تغییر نکند.

گزینهٔ ۳: در مسیر خمیده بردارهای سرعت و نیرو هم‌راستا نیستند و با هم می‌توانند زاویه‌ی $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ را بسازند. اگر این زاویه قائمه باشد، اندازهٔ سرعت ثابت است.

گزینهٔ ۴: اگر برایند نیروهای وارد بر یک جسم صفر باشد اندازه حرکت آن ثابت است.

۷ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



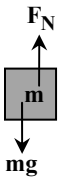
$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi\times 20}{10\pi}=4s$$

$$\Delta t=2s \Rightarrow \Delta t=\frac{T}{2} \Rightarrow \text{در } 2s \text{ نصف دور می‌گردد.} \Rightarrow |\Delta\vec{v}|=|\vec{v}_2-\vec{v}_1|=|2\vec{v}_1|$$

$$\vec{F}_{av}=\frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow |\vec{F}_{av}|=\frac{m\Delta v}{\Delta t}=\frac{4\times(2\times 10\pi)}{2}=(40\pi)N$$

۸ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

طبق قانون سوم نیوتون، اندازهٔ نیرویی که جعبه به کف آسانسور وارد می‌کند، برابر است با اندازهٔ نیرویی که کف آسانسور به جعبه وارد می‌کند.



نیروهای وارد بر جعبه مطابق شکل است. چون حرکت جسم کندشونده است، شتاب و سرعت آن در خلاف جهت هم هستند؛ یعنی جهت شتاب و در نتیجه نیروی خالص به طرف بالا است.

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_N-mg=ma \Rightarrow F_N-100=10\times 1 \Rightarrow F_N=110N$$

۹ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

قانون دوم نیوتون را برای هر دو جسم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} F=ma \\ 1/2F=(m+2)a \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{F}{1/2F}=\frac{m}{m+2} \Rightarrow \frac{1}{1/2}=\frac{m}{m+2}$$

$$1/2m=m+2 \Rightarrow 1/2m-m=2 \Rightarrow 0/2m=2 \Rightarrow m=10kg$$

۱۰ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

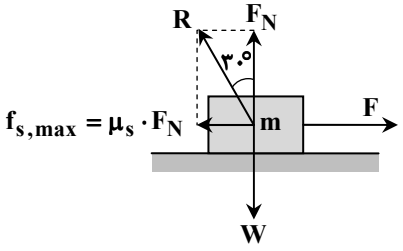
اندازهٔ نیرویی که این دو نفر بر یکدیگر وارد می‌کنند برابر است، پس طبق قانون دوم نیوتون $(F_{net}=ma)$ شتاب آن‌ها به نسبت عکس جرم آن‌ها است $(\frac{a_2}{a_1}=\frac{m_1}{m_2})$. در مدتی که هریک از آن‌ها دیگری را هُل می‌دهد، به خودش نیز نیرو وارد می‌شود، پس مدت اثر نیرو بر هر دو مساوی است.

$$v=at+v_0 \xrightarrow{v_0=0} v=at \xrightarrow{t_1=t_2} \frac{v_2}{v_1}=\frac{a_2}{a_1}=\frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{60}{80}=\frac{3}{4} \xrightarrow{v_1=1/2\frac{m}{s}} v_2=0/9\frac{m}{s}$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow K_2=\frac{1}{2}\times 80\times 0/9^2=32/4J$$

۱۰ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

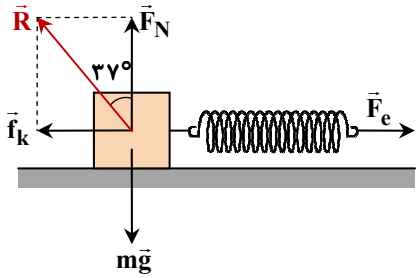


نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند $(\vec{R})$، برایند نیروهای عمودی سطح $(\vec{F}_N)$ و اصطکاک است و وقتی کمترین زاویه با سطح افق را دارد که اصطکاک بیشترین مقدار باشد، یعنی اصطکاک ایستایی بیشینه.

$$\tan 30^\circ=\frac{\mu_s\cdot F_N}{F_N} \Rightarrow \mu_s=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

SanjeshCloud

۱۱ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$\text{Sin}۳۷^\circ = ۰/۶ \Rightarrow \text{Cos}۳۷^\circ = ۰/۸ \Rightarrow \tan ۳۷^\circ = \frac{۳}{۴}$$

$$F_N = mg = ۲۰\,N$$

$$\tan ۳۷^\circ = \frac{f_k}{F_N} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{f_k}{۲۰} \Rightarrow f_k = ۱۵\,N$$

$$F_e - f_k = ma \Rightarrow k(L - L_\circ) - f_k = ma$$

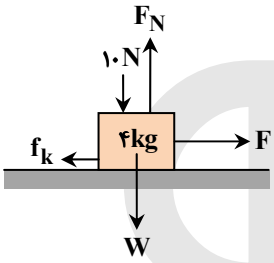
$$\begin{cases} k(۰/۲۵ - L_\circ) - ۱۵ = ۲\times ۵ \Rightarrow k(۰/۲۵ - L_\circ) = ۲۵ \\ k(۰/۲۸ - L_\circ) - ۱۵ = ۲\times ۸ \Rightarrow k(۰/۲۸ - L_\circ) = ۳۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق دو رابطه}} ۰/۰۳k = ۶ \Rightarrow k = ۲۰۰\frac{N}{m}$$

$$۲۰۰\times(۰/۲۵ - L_\circ) = ۲۵ \Rightarrow ۸\times(۰/۲۵ - L_\circ) = ۱ \Rightarrow ۰/۲۵ - L_\circ = ۰/۱۲۵ \Rightarrow L_\circ = ۰/۱۲۵\,m = ۱۲/۵\,cm$$

نکته: با افزایش طول فنر به میزان $۳\,cm = ۲۵ - ۲۸$، نیروی فنر (که به جسم وارد می‌شود) به میزان $۲\times(۸-۵) = ۶\,N$ افزایش یافته است، پس به‌راحتی می‌توان نوشت:

$$\Delta F_e = k\Delta x \Rightarrow ۶ = k\times ۰/۰۳ \Rightarrow k = ۲۰۰\frac{N}{m}$$

۱۲ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$F_N = ۱۰ + mg = ۱۰ + ۴۰ = ۵۰\,N$$

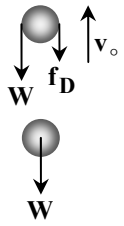
$$f_k = \mu_k F_N = ۰/۴\times ۵۰ = ۲۰\,N$$

$$F_۱ - f_k = ma_۱ \Rightarrow F_۱ - ۲۰ = ۴\times ۵ \Rightarrow F_۱ = ۴۰\,N$$

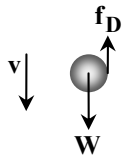
$$F_۲ = ۲F_۱ = ۸۰\,N \Rightarrow ۸۰ - ۲۰ = ۴\times a_۲ \Rightarrow a_۲ = ۱۵\frac{m}{s^۲} \Rightarrow a_۲ = ۳a_۱$$

۱۳ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

در لحظهٔ پرتاب دو نیروی وزن و مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت گلوله بر آن اثر می‌کنند. در نقطهٔ اوج، تندی حرکت صفر است و تنها نیروی وزن بر گلوله اثر می‌کند.



$$\begin{cases} a_۱ = \dfrac{-(f_D + W)}{m} \\ a_۲ = -\dfrac{W}{m} \end{cases} \xrightarrow{a_۱ = ۲a_۲} \text{در لحظهٔ پرتاب}: f_D = W$$



در برگشت، به مانند بالا رفتن شتاب در همان جهت پایین بوده و جهت شتاب در کل رفت و برگشت روبه پایین است.

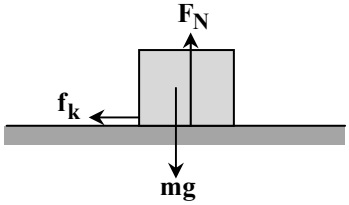
هنگام بالارفتن بزرگی شتاب گلوله بیشتر از شتاب گرانش (g) است. به‌علت کاهش تندی، نیروی مقاومت هوا در حال کم شدن است (نقطهٔ اوج $(v = ۰)$). در نقطهٔ اوج شتاب حرکت برابر g می‌شود و در برگشت اندازهٔ شتاب گلوله از شتاب گرانش (g) کمتر می‌شود.

هنگام بالا رفتن: $-(f_D + mg) = ma$

در پایین آمدن: $f_D - mg = ma \Rightarrow |f_D| < mg$

به‌علت وجود مقاومت هوا هنگام برگشت و رسیدن به سطح زمین تندی گلوله کمتر از $v_\circ$ بوده و مقاومت هوا کمتر از لحظهٔ پرتاب است؛ یعنی کمتر از وزن بوده و به تندی حدّی نمی‌رسد.

۱۴ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$$

اندازهٔ شتاب در مدت حرکت کندشونده: $F_{net} = ma \Rightarrow \mu_k mg = ma \Rightarrow a = \mu_k g$

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - v_۱^۲ = ۲(-g\mu_k)\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v_۱^۲}{۲\mu_k g}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، شتاب و مسافت توقف به جرم جسم بستگی ندارد و هر دو جعبه با فرض داشتن تندی اولیهٔ یکسان، بعد از طی مسافت مساوی متوقف می‌شوند.

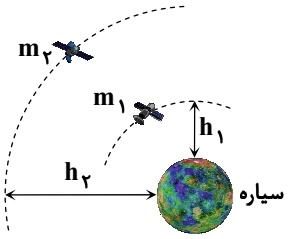
۱۵ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

نیروی خالص وارد بر جعبه صفر است؛ بنابراین نیروهای F و f_s متوازن هستند $(\vec{F}=-\vec{f}_s)$.

گزینه‌های ۱ و ۲ جملات درستی هستند اما نقشی در ساکن بودن جعبه ندارند. توجه کنید که نیروهای کنش و واکنش بر دو جسم مختلف وارد می‌شوند و قرینه بودن آن‌ها نشانهٔ ساکن بودن جعبه نیست. (هر دوی آن‌ها بر جعبه وارد نمی‌شوند.)

۱۶ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

شتاب گرانشی در فاصلهٔ h از سطح یک سیاره به جرم M و شعاع R برابر است با:



$$\text{نیروی گرانشی}: \frac{GM\cdot m}{r^2}=mg \Rightarrow g=\frac{GM}{r^2}=\frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$\frac{g_1}{g_2}=\frac{\frac{GM}{(R+h_1)^2}}{\frac{GM}{(R+h_2)^2}}=\left(\frac{R+h_2}{R+h_1}\right)^2=\left(\frac{R+4R}{R+1/5R}\right)^2=4$$

همان‌طور که دیدید جرم ماهواره در محاسبهٔ شتاب گرانشی در محل مدار، بی‌تأثیر است.

۱۸ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$\ell=n\times(2\pi R)=\frac{50}{3}\times 2\pi\times 0/2=20\,m$$

دور	ثانیه
۱	۰/۳
n	۵

$$\Rightarrow n=\frac{5}{0/3}=\frac{50}{3}\ \text{دور}$$

۱۹ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

در حرکت دایره‌ای، نیروی مرکزگرا با صورت‌های مختلفی آشکار می‌شود. در این سؤال، نیروی فنر نقش نیروی مرکزگرا را بازی می‌کند. (فنر کشیده می‌شود و $\Delta L>0$)

$$F_c=F_e=\frac{mv^2}{r} \Rightarrow F_e=\frac{0/4\times 1/5^2}{0/18}=\frac{0/4\times\frac{9}{4}}{0/18}=5\,N$$

$$F_e=k|\Delta L| \Rightarrow \Delta L=\frac{5}{250}=\frac{1}{50}m=2cm \Rightarrow L-L_0=2 \Rightarrow L_0=18-2=16\,cm$$

۲۰ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$\left.\begin{aligned}p=mv=4\cdot\frac{kg\cdot m}{s}\\ F_{net}=\frac{mv^2}{r}=160\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{v}{r}=4$$

$$T=\frac{2\pi r}{v}=2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}s$$

۲۱ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$\Delta p=(\text{مساحت زیر نمودار نیروی خالص-زمان})=\frac{20+5}{2}\times 40=25\times 20=500\,N\cdot s$$

$$\Delta p=m\cdot\Delta v \Rightarrow 500=20(v_2-(-10)) \Rightarrow 25=v_2+10 \Rightarrow v_2=15\frac{m}{s}$$

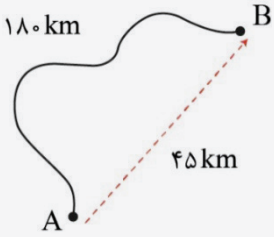
۲۲ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$F_A=F_B \Rightarrow \frac{GM_Am}{r_A^2}=\frac{GM_Bm}{r_B^2} \xrightarrow{M_B=9M_A} r_B=3r_A \quad (1)\ \text{رابطهٔ}$$

$$r_A+r_B=6\times 10^6\,km \xrightarrow{(1)\ \text{رابطهٔ}} 4r_A=6\times 10^6 \Rightarrow r_A=15\times 10^5\,km$$

فیزیک دوازدهم | ۱۷ مهرماه ۱۴۰۴

۱. مطابق شکل اتومبیلی روی مسیر نشان داده شده از شهر A به شهر B جابه‌جا می‌شود. اگر اختلاف تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط اتومبیل در این جابه‌جایی برابر $۲۵\frac{m}{s}$ باشد، تندی متوسط اتومبیل در این جابه‌جایی چند کیلومتر بر ساعت است؟



۱) ۲۷۰

۲) ۱۸۰

۳) ۱۶۰

۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

با توجه به شکل مسافت طی شده و اندازه جابه‌جایی اتومبیل به ترتیب ۱۸۰km و ۴۵km است. اگر مدت زمان حرکت اتومبیل را بر حسب ساعت Δt در نظر بگیریم، تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۸۰}{\Delta t}\frac{km}{h}$$

$$|v_{av}|=\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}=\frac{۴۵}{\Delta t}\frac{km}{h}$$

اختلاف دو مقدار به دست آمده را برابر $۲۵\frac{m}{s}=۹۰\frac{km}{h}$ قرار می‌دهیم:

$$s_{av}-|v_{av}|=\frac{۱۸۰}{\Delta t}-\frac{۴۵}{\Delta t}=\frac{۱۳۵}{\Delta t}=۹۰ \Rightarrow \Delta t=\frac{۳}{۲}h$$

حالا تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{۱۸۰}{\Delta t}=\frac{۱۸۰}{\frac{۳}{۲}}=۱۲۰\frac{km}{h}$$

درسنامه

مسافت، جابه‌جایی، تندی متوسط و سرعت متوسط مفاهیمی هستند که در بیشتر تست‌های حرکت‌شناسی مطرح می‌شوند.

در جدول زیر تمام نکات مربوط به این مفاهیم را برای شما جمع‌بندی کرده‌ایم.

کمیت	تعریف	نماد یا فرمول	نوع کمیت
مسافت	طول مسیر طی شده توسط متحرک	ℓ	نرده‌ای
جابه‌جایی	برداری که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی وصل می‌کند.	$\vec{d}$	برداری
تندی متوسط	نسبت مسافت طی شده به مدت زمان طی شدن مسافت	$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$	نرده‌ای
سرعت متوسط	نسبت جابه‌جایی به مدت زمان سپری شده (آهنگ تغییرات مکان)	$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$	برداری
مقایسهٔ مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی		$\|\vec{d}\|\le\ell$	
مقایسهٔ تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط		$\|\vec{v}_{av}\|\le s_{av}$	

- در مسیر مستقیم اگر متحرک بدون تغییر جهت حرکت کند حالت تساوی رخ می‌دهد.

۲. معادله مکان ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $x=t^۳-۲t^۲+۴$ است. اگر سرعت متوسط متحرک در t ثانیه نخست حرکت $۸\frac{m}{s}$ باشد، سرعت متوسط آن در بازه زمانی $t_۱=۰$ تا $t_۲=۳t$ در SI کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

ابتدا لحظهٔ t را حساب می‌کنیم. منظور از t ثانیه نخست حرکت، بازه زمانی صفر تا t است. رابطه سرعت متوسط در این بازه را می‌نویسیم تا لحظه t به دست بیاید:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_t-x_۰}{t-۰}\Rightarrow ۸=\frac{(t^۳-۲t^۲+۴)-۴}{t}=\frac{t(t^۲-۲t)}{t}\Rightarrow t^۲-۲t-۸=۰\Rightarrow \begin{cases} t=-۲s & \times \\ t=۴s & \checkmark \end{cases}$$

بنابراین سرعت متوسط در بازه زمانی $t_۱=۰$ و $t_۲=۱۲s$ خواسته شده است. سرعت متوسط متحرک در این بازه برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{t_۲}-x_۰}{t_۲-۰}=\frac{t_۲(t_۲^۲-۲t_۲)}{t_۲}=t_۲(t_۲-۲)=۱۲(۱۲-۲)=۱۲۰\frac{m}{s}$$

درسنامه

اگر بتوان رابطه‌ای بین مکان و زمان یک متحرک که روی محور x حرکت می‌کند را به صورت $x=f(t)$ نوشت، این معادله را معادلهٔ مکان- زمان یا معادلهٔ حرکت می‌نامیم.

با استفاده از معادله مکان-زمان می‌توانیم بردار مکان متحرک در هر لحظه، بردارهای جابه‌جایی و سرعت متوسط متحرک در یک بازه زمانی و... را به دست می‌آوریم. به عنوان مثال اگر معادله حرکت متحرکی در SI به صورت $x=t^۲-۲t+۱$ باشد، بردارهای مکان در لحظه‌های $t_۱=۱s$ و $t_۲=۲s$ و بردارهای جابه‌جایی و سرعت متوسط در مدت $t_۱=۱s$ تا $t_۲=۲s$ برابرند با:

بردارهای مکان:

$$x=t^۲-۲t+۱\begin{cases} x_{۱s}=(۱)^۲-۲(۱)+۱=۰ \\ x_{۲s}=(۲)^۲-۲(۲)+۱=۱m \end{cases}$$

بردار جابه‌جایی:

$$x_{۲s}-x_{۱s}=۱-۰=۱m$$

بردار سرعت متوسط:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱}{۲-۱}=۱m/s$$

۳. متحرکی که روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت می‌کند، $\frac{۱}{۴}$ مسیری را با سرعت متوسط $۱۰\frac{m}{s}$ و بقیه مسیر را با سرعت متوسط v حرکت می‌کند. اگر مدت زمان طی کردن $\frac{۱}{۴}$ ابتدای مسیر با مدت زمان طی کردن بقیه مسیر یکسان باشد، تندی متوسط متحرک در کل مسیر حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

ابتدا v را به دست می‌آوریم. طبق صورت تست، مدت زمان طی کردن $\frac{۱}{۴}$ ابتدای مسیر با مدت زمان طی کردن باقی مسیر باهم برابر است. پس:

$$\Delta t_۱=\Delta t_۲\xrightarrow{v=\frac{\Delta x}{\Delta t}}\frac{\Delta x_۱}{v_۱}=\frac{\Delta x_۲}{v_۲}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۴}\Delta x}{۱۰}=\frac{\frac{۳}{۴}\Delta x}{v}\Rightarrow v=۳۰\frac{m}{s}$$

حالا تندی متوسط در کل مسیر را حساب می‌کنیم. مدت زمان سپری شده در هر دو قسمت باهم برابر است. پس:

$$s_{av}=v_{av}=\frac{|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{v_۱\Delta t_۱+v_۲\Delta t_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{۱۰t+۳۰t}{t+t}=\frac{۴۰t}{۲t}=۲۰\frac{m}{s}$$

نکته در مسیرهای چندقسمتی برای محاسبه تندی متوسط، مسافت کل را بر زمان کل تقسیم می‌کنیم.

$$s_{av}=\frac{|\Delta x_1|+|\Delta x_2|}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{v_1\Delta t_1+v_2\Delta t_2+\dots}{\Delta t_1+\Delta t_2+\dots}$$

4. متحرکی روی محور x در حال حرکت است. سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1=0$ تا $t_2=4s$ برابر $(-2\frac{m}{s})\vec{i}$ و در بازه زمانی $t_2=4s$ تا $t_3=10s$ برابر $\vec{v}$ است. اگر بردارهای مکان متحرک در لحظه‌های t_1 و t_3 به‌ترتیب $\vec{r}_1=(12m)\vec{i}$ و $\vec{r}_3=(-20m)\vec{i}$ باشد، $\vec{v}$ در SI کدام است؟

۱) $-\frac{8}{3}\vec{i}$ ۲) $-4\vec{i}$ ۳) $+\frac{8}{3}\vec{i}$ ۴) $4\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

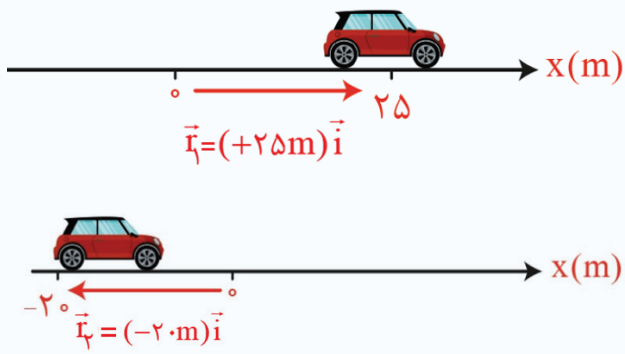
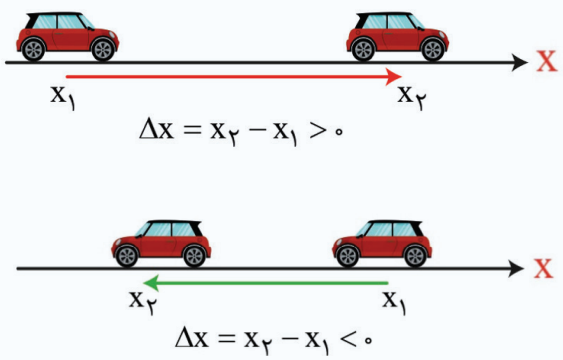
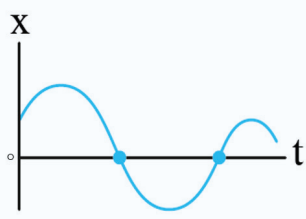
ابتدا بردار مکان متحرک در لحظه $t_2=4s$ را به دست می‌آوریم. برای این منظور از رابطه سرعت متوسط در بازه زمانی $t_1=0$ تا $t_2=4s$ استفاده می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow -2=\frac{x_{4s}-x_0}{4-0}\Rightarrow -2=\frac{x_{4s}-12}{4}\Rightarrow x_{4s}=4m$$

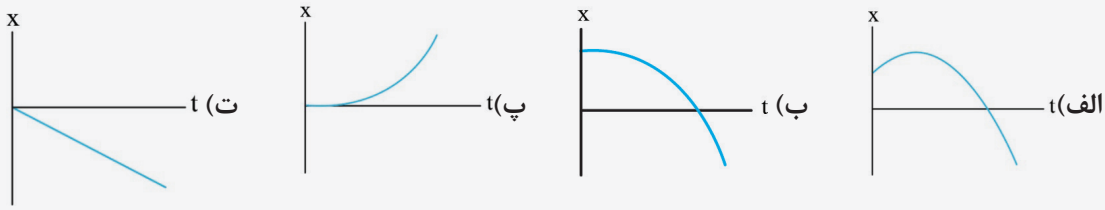
حالا $\vec{v}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{10s}-x_{4s}}{10-4}=\frac{-20-4}{6}=-4\frac{m}{s}\Rightarrow \vec{v}=(-4\frac{m}{s})\vec{i}$$

درسنامه

بردار مکان	بردار جابه‌جایی
برداری است که مبدأ $(x=0)$ را به مکان جسم وصل می‌کند.	برداری است که مکان آغازین را به مکان پایانی وصل می‌کند.
برای متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند دو جهت ممکن برای بردار مکان وجود دارد.	برای متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند دو جهت ممکن برای بردار جابه‌جایی وجود دارد.
	
هنگام عبور متحرک از مبدأ مکان جهت بردار مکان عوض می‌شود. در نمودار $(x-t)$ محل تقاطع منحنی با محور زمان لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان است.  ۲ بار جهت بردار مکان عوض شده است.	

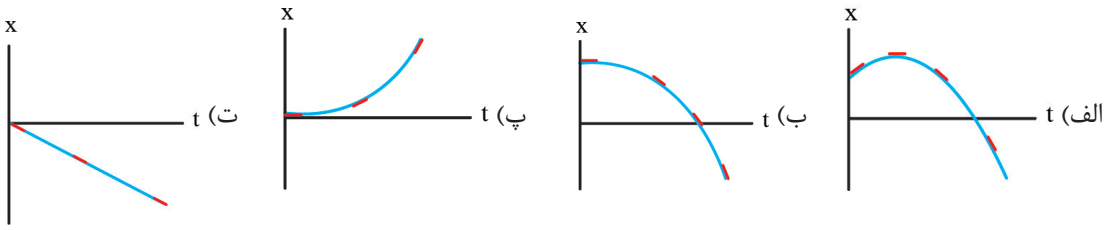
۵. نمودارهای مکان ـ زمان چهار متحرک که در امتداد محور x حرکت می‌کنند مطابق شکل‌های زیر است. کدام متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است و به تدریج به تندی خود اضافه کرده است؟



۱) الف، ب ۲) پ، ت ۳) ب، پ ۴) الف، ت

پاسخ: گزینه ۳ ساده | مفهومی

شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در هر لحظه برابر سرعت متحرک در آن لحظه و اندازه آن برابر تندی متحرک در آن لحظه است. بنابراین شیب مماس بر نمودار مکان- زمان در لحظه $t=0$ باید برابر صفر باشد و به تدریج اندازه شیب مماس‌ها بر نمودار افزایش یابد. خط‌های مماس بر نمودارها را در چندین لحظه رسم می‌کنیم:

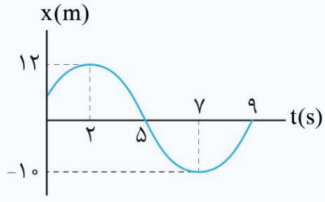


با توجه به مماس‌های رسم شده، در موارد ب و پ، شیب مماس در $t=0$ برابر صفر و با گذشت زمان اندازه شیب مماس بر نمودار افزایش می‌یابد.

درسنامه

برخی از اطلاعات به دست آمده از از نمودار مکان-زمان:

نمودار مکان - زمان مکان متحرک را در هر لحظه نشان می‌دهد.



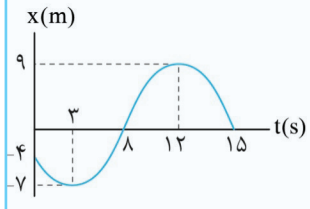
$t=2s \rightarrow x_2=12m$

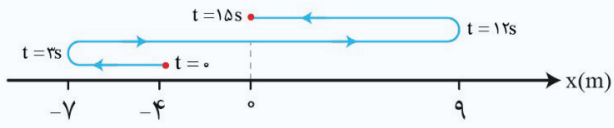
$t=5s \rightarrow x_5=0$

$t=7s \rightarrow x_7=-10m$

$\Delta x_{2\rightarrow 7}=x_7-x_2=-10-12=-22m$

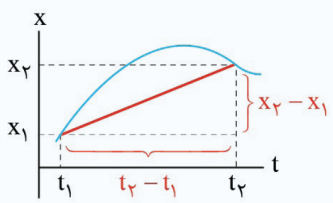
با توجه به نمودار $x-t$ می‌توانیم مسیر حرکت متحرک را روی محور x رسم می‌کنیم و مسافت طی شده را محاسبه می‌کنیم.





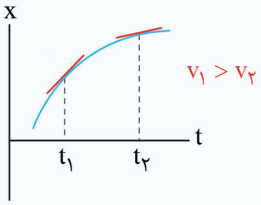
$l=3+7+9+9=28m$

سرعت متوسط در نمودار $x-t$



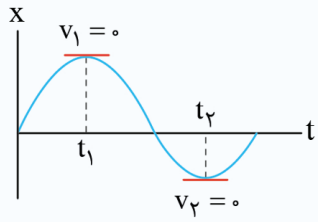
شیب خط $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$

سرعت لحظه‌ای در نمودار $x-t$

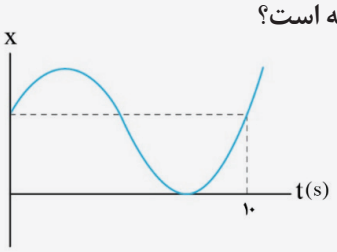


شیب خط مماس در هر لحظه $=v$

نقاط توقف و تغییر جهت حرکت متحرک در قله‌ها ودره‌های نمودار رخ می‌دهد.



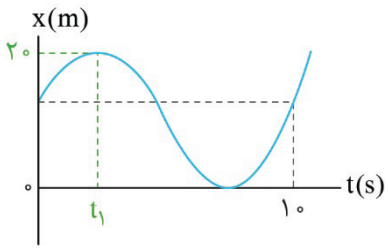
6. نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به صورت زیر است. اگر بردار مکان متحرک در اولین تغییر جهت متحرک برابر $\vec{i}(+20m)$ باشد، تندی متوسط متحرک در ۱۰ ثانیه نخست حرکت چند متر بر ثانیه است؟



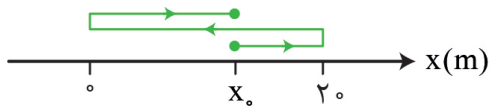
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

اولین تغییر جهت متحرک در لحظه t_1 است. طبق صورت سوال، متحرک در این لحظه در مکان $x = 20m$ قرار دارد. پس نمودار مکان ـ زمان متحرک به صورت زیر است:



اگر مکان اولیه متحرک x_0 باشد، مسیر حرکت متحرک در ۱۰ ثانیه نخست به صورت زیر است.



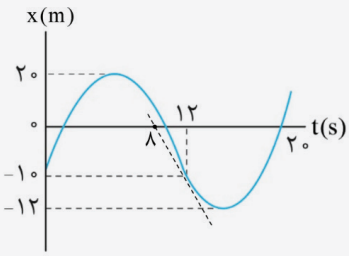
با توجه به مسیر، مسافت طی شده توسط متحرک برابر است با:

$$\ell = (20 - x_0) + 20 + (x_0 - 0) = 40m$$

حالا تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{40}{10} = 4\frac{m}{s}$$

7. نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. خط مماس بر منحنی در لحظه $t' = 12s$ رسم شده است. تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 20s$ چند برابر تندی متحرک در لحظه $t' = 12s$ است؟



۱) ۱/۴۸
۲) ۱/۸۵
۳) ۲/۳۵
۴) ۳/۷۰

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

مسافت طی شده در ۲۰ ثانیه نخست برابر است با:

$$\ell = 10 + 20 + 32 + 12 = 74m$$

تندی متوسط در ۲۰ ثانیه نخست برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{74}{20} = 3/7\frac{m}{s}$$

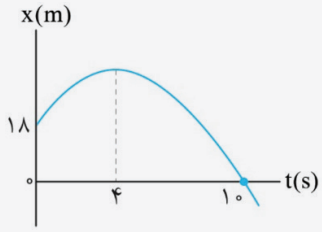
تندی متحرک در هر لحظه در نمودار مکان ـ زمان برابر با اندازه شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه است. پس:

$$|v_{۱۲s}|=|\frac{-۱۰}{۴}|=\frac{۱۰}{۴}\frac{m}{s}$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{s_{av}}{|v_{۱۲s}|}=\frac{۳/۷}{\frac{۱۰}{۴}}=\frac{۱۴/۸}{۱۰}=۱/۴۸$$

۸. نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در ۱۰ ثانیه نخست حرکت، اگر تندی متوسط متحرک در هنگامی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند با تندی متوسط آن هنگامی که در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند یکسان باشد، بزرگی سرعت متوسط متحرک در مدت زمانی که بردارهای سرعت و مکان آن در خلاف جهت یکدیگرند چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۱/۸

۲) ۴/۵

۳) ۹

۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

مکان تغییر جهت متحرک را x در نظر می‌گیریم. تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $(۰,۴s)$ که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $(۴s,۱۰s)$ که متحرک خلاف جهت محور x حرکت می‌کند را به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}s_{av(۰,۴s)}=\frac{x-۱۸}{۴-۰}=\frac{x-۱۸}{۴}\\ s_{av(۴s,۱۰s)}=\frac{|۰-x|}{۱۰-۴}=\frac{x}{۶}\end{cases}$$

طبق صورت تست این دو باهم برابرند، پس:

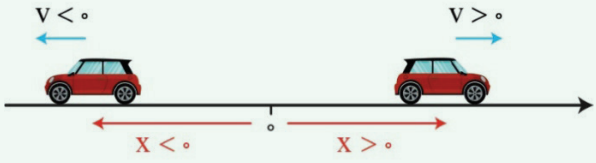
$$s_{av(۰,۴s)}=s_{av(۴s,۱۰s)}\Rightarrow\frac{x-۱۸}{۴}=\frac{x}{۶}\Rightarrow ۳x-۵۴=۲x\Rightarrow x=۵۴m$$

در بازهٔ زمانی ۴s تا ۱۰s بردارهای مکان و سرعت متحرک در خلاف جهت هم هستند، بزرگی سرعت متوسط در این بازه زمانی برابر است با:

$$|v_{av(۴s,۱۰s)}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{|۰-۵۴|}{۱۰-۴}=\frac{۵۴}{۶}=۹\frac{m}{s}$$

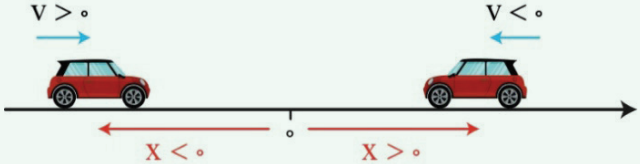
نکته در حرکت بر روی خط راست وقتی بردارهای مکان و سرعت خلاف جهت هم هستند متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ می‌باشد و وقتی بردارهای مکان و سرعت در جهت هم‌دیگر باشند متحرک در حال دور شدن از مبدأ می‌باشد.

متحرک در حال دور شدن از مبدأ:



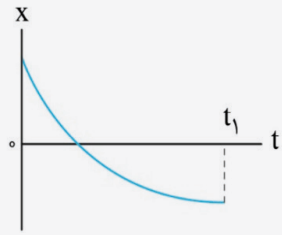
$xv>۰$

متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ:



$xv<۰$

۹. شکل زیر نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که بر روی محور x حرکت می‌کند. کدام موارد دربارهٔ بردار مکان و بردار سرعت متحرک در بازه زمانی صفر تا t_1 درست است؟



الف) بردار مکان متحرک همواره در خلاف جهت محور x است.

ب) بردار سرعت متحرک یک بار تغییر جهت داده است.

پ) طول بردار مکان متحرک ابتدا کاهش سپس افزایش یافته است.

ت) تندی متحرک همواره در حال کاهش است.

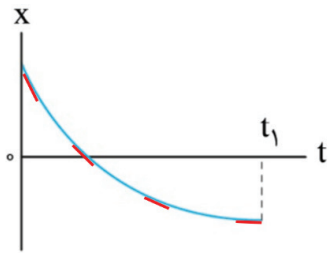
۱) الف، ب ۲) ب، پ ۳) پ، ت ۴) الف و ت

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی

به بررسی هریک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

الف نادرست، متحرک ابتدا در x های مثبت حرکت می‌کند سپس در x های منفی حرکت می‌کند. بنابراین بردار مکان متحرک ابتدا در جهت محور x سپس در خلاف جهت محور x است.

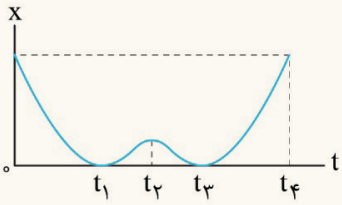
ب نادرست، به شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان برابر سرعت متحرک است. چون شیب خط مماس همواره منفی است، سرعت متحرک همواره در خلاف جهت محور x است و متحرک تغییر جهت نداده است.



پ درست، با نزدیک شدن متحرک به مبدأ، طول بردار مکان کاهش و با دور شدن متحرک از مبدأ، طول بردار مکان افزایش می‌یابد. با توجه به نمودار، متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک سپس از آن دور شده است. پس طول بردار مکان ابتدا کاهش سپس افزایش یافته است.

پ درست، اندازه شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان برابر تندی متحرک است. با توجه به مماس‌های رسم شده، اندازه شیب خط مماس‌های وارد بر نمودار در حال کاهش است. پس تندی متحرک در بازهٔ زمانی $(0, t_1)$ در حال کاهش است.

تست‌درتست متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است. با توجه به نمودار مکان - زمان این متحرک، چند مورد از عبارت‌های زیر در مورد حرکت آن درست است؟



الف) بردار مکان متحرک دو بار تغییر جهت داده است.

ب) در بازه زمانی صفر تا t_2 متحرک در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند.

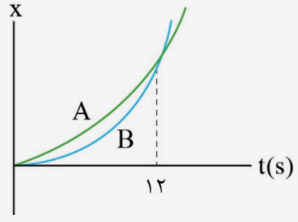
پ) سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا t_4 برابر صفر است.

ت) تندی متوسط متحرک در بازه زمانی t_2 تا t_4 با بزرگی سرعت متوسط در این بازه زمانی برابر نیست.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

۱۰. شکل زیر نمودار مکان ـ زمان دو متحرک را نشان می‌دهد که در امتداد محور x حرکت می‌کند. در لحظه $t = 6s$ فاصله بین دو متحرک بیشترین مقدار در بازه زمانی $(0,12s)$ است. اگر نسبت تندی متحرک A به تندی متحرک B در لحظه‌های $t_1 = 5s$، $t_2 = 6s$ و $t_3 = 7s$ به ترتیب K_1، K_2 و K_3 باشد، کدام رابطه درست است؟



۱) $K_2 = 1 \ , \ K_1 < K_2 < K_3$

۲) $K_2 < 1 \ , \ K_1 < K_2 < K_3$

۳) $K_2 < 1 \ , \ K_1 > K_2 > K_3$

۴) $K_2 = 1 \ , \ K_1 > K_2 > K_3$

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | مفهومی

شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان برابر سرعت متحرک است. با توجه به نمودارهای دو متحرک، اندازه سرعت دو متحرک در بازه زمانی (۰,۱۲s) در حال افزایش است. چون دو متحرک از یک نقطه شروع به حرکت کرده‌اند و بیشترین فاصله بین دو متحرک در لحظه $t=۶s$ رخ داده، پس سرعت متحرک A در ۶ ثانیه نخست بزرگتر از متحرک B است که فاصله بین دو متحرک زیاد شده و از ۶s تا ۱۲s سرعت متحرک B بزرگتر از سرعت متحرک A است که فاصله بین دو متحرک در حال کاهش است تا در $t=۱۰s$ دو متحرک مجدداً به هم می‌رسند. بنابراین قبل از $t=۶s$ سرعت متحرک A بزرگتر از سرعت متحرک B است و پس از $t=۶s$، سرعت متحرک B بزرگتر از سرعت متحرک A است. بنابراین نسبت‌های خواسته شده به شکل زیر است:

$$K_۱ > ۱ \ , \ K_۲ = ۱ \ , \ K_۳ < ۱$$

با توجه به نتیجه به دست آمده، گزینه ۴ درست است.

فیزیک دوازدهم | ۱ آبان‌ماه ۱۴۰۴

۱. متحرکی ۱۰ ثانیه اول حرکتش را با تندی متوسط $۳\frac{m}{s}$، سپس ۵ ثانیه بعد از آن را با تندی متوسط $۱۲\frac{m}{s}$ طی می‌کند. تندی متوسط متحرک در این ۱۵ ثانیه، چند کیلومتر بر ساعت است؟

۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۲۱/۶ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۳ ساده | محاسباتی

برای این‌که تندی متوسط متحرک در مدت ۱۵s را حساب کنیم، به مسافت طی شده در این مدت نیاز داریم. تندی متوسط متحرک در ۱۰s اول حرکتش و ۵s پس از آن را داریم. پس می‌توانیم مسافت طی شده توسط متحرک در ۱۰s اول حرکتش و ۵s پس از آن را به دست بیاوریم.

$$\ell_{۱۰s\text{تا}۰s} = s_{av,۱}\,\Delta t_۱ \xrightarrow[\Delta t_۱ = ۱۰s]{s_{av,۱} = ۳\frac{m}{s}} \ell_{۱۰s\text{تا}۰s} = ۳\times ۱۰ = ۳۰m$$

$$\ell_{۱۵s\text{تا}۱۰s} = s_{av,۲}\,\Delta t_۲ \xrightarrow[\Delta t_۲ = ۵s]{s_{av,۲} = ۱۲\frac{m}{s}} \ell_{۱۵s\text{تا}۱۰s} = ۱۲\times ۵ = ۶۰m$$

مسافت طی شده در مدت زمان‌های ۰s تا ۱۰s و ۱۰s تا ۱۵s را داریم. پس مسافت طی شده در مدت زمان ۰s تا ۱۵s (چیزی که دنبالش بودیم) را می‌توانیم با جمع کردن این دو مسافت، به دست بیاوریم.

$$\ell_{۱۵s\text{تا}۰s} = \ell_{۱۰s\text{تا}۰s} + \ell_{۱۵s\text{تا}۱۰s} \xrightarrow[\ell_{۱۵s\text{تا}۱۰s} = ۶۰m]{\ell_{۱۰s\text{تا}۰s} = ۳۰m} \ell_{۱۵s\text{تا}۰s} = ۳۰ + ۶۰ = ۹۰m$$

الان همه چیز را برای محاسبه تندی متوسط متحرک در مدت زمان ۰s تا ۱۵s داریم و کافی است داده‌ها را در رابطه زیر جای‌گذاری کنیم.

$$s_{av} = \frac{\ell_{۱۵s\text{تا}۰s}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۱۵s]{\ell_{۱۵s\text{تا}۰s} = ۹۰m} s_{av} = \frac{۹۰}{۱۵} = ۶\frac{m}{s}$$

خطر در کمین است! اگر گزینه (۱) را انتخاب کردید قطعاً از زیان‌کاران هستید. چون سوال، تندی متوسط را بر حسب $\frac{km}{h}$ می‌خواهد، نه $\frac{m}{s}$!

نکته تبدیل یکای $\frac{km}{h}$ به $\frac{m}{s}$ و برعکس به صورت زیر است.

$$\frac{km}{h} \underset{\times\frac{۳۶}{۱۰}}{\overset{\times\frac{۱۰}{۳۶}}{\rightleftarrows}} \frac{m}{s}$$

تندی متوسط متحرک در مدت ۰s تا ۱۵s (s_{av}) را بر حسب $\frac{km}{h}$ به دست می‌آوریم و تمام!

$$s_{av} = ۶\frac{m}{s} \xrightarrow{\text{تبدیل } \frac{m}{s} \text{ به } \frac{km}{h}} s_{av} = ۶\times\frac{۳۶}{۱۰} = ۲۱/۶\frac{km}{h}$$

درسنامه

تندی متوسط: اگر متحرکی، مسافت ℓ را در مدت زمان Δt طی کند، تندی متوسط آن (s_{av}) از رابطه زیر به دست می‌آید و بیانگر این است که متحرک در هر ثانیه به‌طور متوسط، چند متر مسافت طی کرده است.

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

۲. متحرکی با تندی ثابت $۲۰\frac{m}{s}$ روی محیط دایره‌ای به شعاع ۲۰m حرکت می‌کند. بزرگی سرعت متوسط متحرک در یک بازه زمانی ۴/۵ ثانیه‌ای چند متر بر ثانیه است؟ ($\pi=۳$)

۱) $\frac{۸۰}{۹}$ ۲) $\frac{۴۰}{۹}$ ۳) $\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۹}$ ۴) $\frac{۴۰\sqrt{۲}}{۹}$

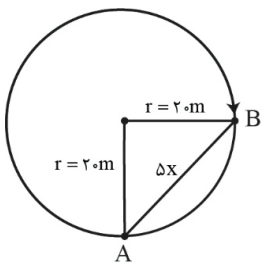
پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

اگر جابه‌جایی متحرک در مدت زمان ۴/۵s را داشته باشیم، می‌توانیم سرعت متوسط آن در این مدت زمان را حساب کنیم. از آن‌جا که متحرک روی محیط دایره حرکت می‌کند، پس باید ببینیم که چه بخشی از محیط دایره را در این مدت طی می‌کند. برای این‌که ببینیم متحرک چه بخشی از محیط را در مدت ۴/۵s طی می‌کند، مسافت طی شده در این مدت و محیط دایره را حساب می‌کنیم.

$$\ell = s_{av}\,\Delta t \xrightarrow[\Delta t=۴/۵s=\frac{۹}{۲}s]{s_{av}=۲۰\frac{m}{s}} \ell = \overset{۱۰}{\cancel{۲۰}}\times\frac{۹}{\underset{۱}{\cancel{۲}}} = ۹۰m$$

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi r \xrightarrow[r=۲۰m]{\pi=۳} \text{محیط دایره} = ۲\times۳\times۲۰ = ۱۲۰m$$

مسافتی که متحرک در مدت ۴/۵s طی می‌کند، ۹۰m و محیط دایره ۱۲۰m است. پس متحرک در این مدت $\frac{۹۰}{۱۲۰}=\frac{۳}{۴}$ از محیط دایره را طی می‌کند. در این صورت، اگر متحرک مطابق شکل زیر در نقطه A قرار داشته باشد، پس از ۴/۵s به نقطه B می‌رسد. الان می‌توانیم جابه‌جایی متحرک در مدت زمان ۴/۵s و سرعت متوسط آن در این مدت را به دست بیاوریم.



$$d = \sqrt{۲۰^۲ + ۲۰^۲} = ۲۰\sqrt{۲}m$$

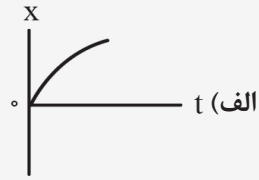
$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=\frac{۹}{۲}s]{d=۲۰\sqrt{۲}m} v_{av} = \frac{۲۰\sqrt{۲}}{\frac{۹}{۲}} = \frac{۴۰\sqrt{۲}}{۹}\frac{m}{s}$$

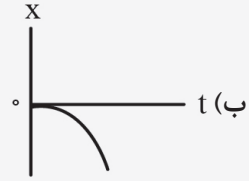
درسنامه

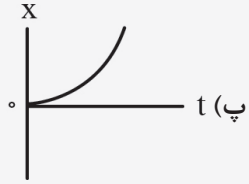
سرعت متوسط: اگر متحرکی در مدت زمان Δt، جابه‌جایی $\vec{d}$ را طی کند، سرعت متوسط آن ($\vec{v}_{av}$) از رابطه زیر به دست می‌آید و بیانگر این است که متحرک در هر ثانیه به‌طور متوسط، چند متر از بردار جابه‌جایی را طی کرده است.

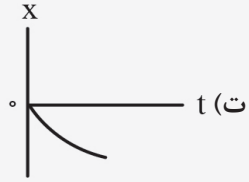
$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

۳. نمودارهای مکان - زمان زیر مربوط به متحرک‌هایی هستند که روی محور x حرکت می‌کنند. در کدام نمودارها بردارهای مکان، سرعت و شتاب متحرک هر سه در یک جهت هستند؟

الف) 

ب) 

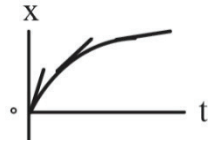
پ) 

ت) 

۱) الف و ب ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) پ و ت

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | کاربردی

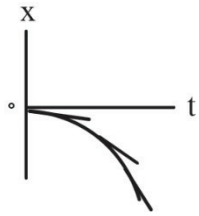
علامت‌های بردار مکان، سرعت و شتاب متحرک را به ترتیب از طریق موقعیت قرارگیری، شیب مماس بر نمودار مکان - زمان و تغییرات سرعت نسبت به زمان متحرک پیدا می‌کنیم.



الف) متحرک در قسمت مثبت محور x است ← بردار مکان متحرک در جهت محور x است.

شیب مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه در جهت محور x است ← سرعت متحرک در جهت محور x است.

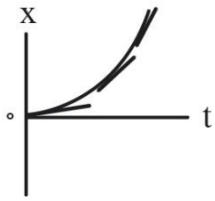
اندازه شیب مماس بر نمودار مکان - زمان (اندازه سرعت متحرک) در حال کاهش است ← شتاب متحرک در خلاف جهت سرعت آن یعنی در خلاف جهت محور x است.



ب متحرک در قسمت منفی محور x است ← بردار مکان متحرک در خلاف جهت مح ور x است.

شیب مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، در خلاف جهت محور x است ← سرعت متحرک در خلاف جهت محور x است.

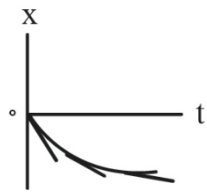
اندازه شیب مماس بر نمودار مکان - زمان (اندازه سرعت متحرک) در حال افزایش است ← شتاب متحرک هم‌جهت با سرعت آن یعنی در خلاف جهت محور x است.



پ متحرک در قسمت مثبت محور x است ← بردار مکان متحرک در جهت محور x است.

شیب مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، در جهت محور x است ← سرعت متحرک در جهت محور x است.

اندازه شیب مماس بر نمودار مکان - زمان (اندازه سرعت متحرک) در حال افزایش است ← شتاب متحرک هم‌جهت با سرعت آن یعنی در جهت محور x است.



ت متحرک در قسمت منفی محور x است ← بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است.

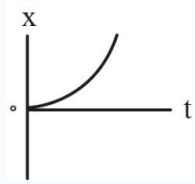
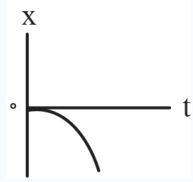
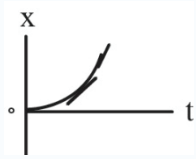
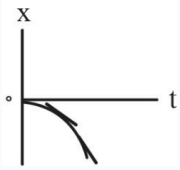
شیب مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، در خلاف جهت محور x است ← سرعت متحرک در خلاف جهت محور x است.

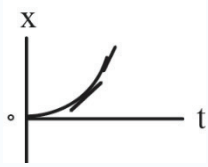
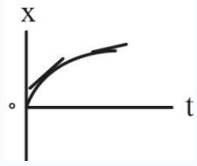
اندازه شیب مماس بر نمودار مکان - زمان (اندازه سرعت متحرک) در حال کاهش است ← شتاب متحرک خلاف جهت سرعت آن یعنی در جهت محور x است.

بنابراین، هر سه بردار مکان، سرعت و شتاب متحرک در نمودارهای «ب» و «پ» در یک جهت هستند.

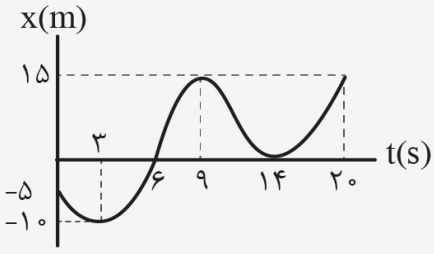
درسنامه:

اگر متحرکی بر روی محور x حرکت کند، از روی **نمودار مکان - زمان** آن می‌توانیم جهت‌های بردار مکان، سرعت و شتاب آن را پیدا کنیم. در جدول زیر حالت‌های ممکن را نشان دادیم.

کمیت	روش تشخیص	حالت‌های ممکن	جهت کمیت	مثال
بردار مکان	موقعیت قرارگیری متحرک	متحرک در قسمت مثبت محور x باشد.	در جهت محور x است.	
		متحرک در قسمت منفی محور x باشد.	در خلاف جهت محور x است.	
سرعت	شیب مماس بر نمودار	شیب مماس بر نمودار مثبت باشد.	در جهت محور x است.	
		شیب مماس بر نمودار منفی باشد.	در خلاف جهت محور x است.	

شتاب	تغییرات اندازه سرعت	اگر اندازه سرعت متحرک افزایش یابد.	هم‌جهت با سرعت است.	
		اگر اندازه سرعت متحرک کاهش یابد.	در خلاف جهت سرعت است.	

۴ . نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند به شکل زیر است. کدام موارد درباره حرکت متحرک در ۲۰ ثانیه نخست حرکت درست است؟



الف) بردار مکان متحرک دو بار تغییر جهت داده است.

ب) تندی متوسط متحرک $3\,m/s$ است.

پ) در مدت زمانی که بردار مکان متحرک در جهت محور x و بردار سرعت آن در خلاف جهت محور x است، بردار شتاب متحرک تغییر جهت داده است.

ت) بردار شتاب متوسط در خلاف جهت محور است.

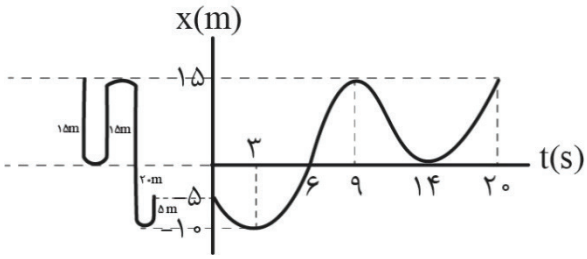
۱) الف و ب ۲) ب و پ ۳) پ و ت ۴) الف و ت

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی، مفهومی

بررسی عبارت‌ها:

الف متحرک یک بار از مبدأ مختصات عبور کرده است، پس بردار مکان متحرک نیز یک بار تغییر جهت داده است. ✗ و (۱) و (۴) پَرا!

ب ابتدا مسافت طی شده توسط متحرک را از روی نمودار مکان - زمانش پیدا می‌کنیم سپس تندی متوسط آن را حساب می‌کنیم.



$$\ell = 5+25+15+15 = 60\,m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 20\,s]{\ell = 60\,m} s_{av} = \frac{60}{20} = 3\,\frac{m}{s}$$

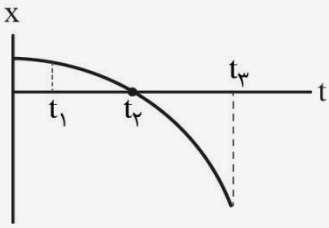
و (۳) پَر پَرا!

پ در بازه زمانی $(6s, 20s)$، متحرک در قسمت مثبت محور x حرکت می‌کند. پس در این مدت، بردار مکان متحرک در جهت محور x است. متحرک در بازه‌های زمانی $(0s, 3s)$ و $(9s, 14s)$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. (شیب مماس بر نمودار منفی است)، پس سرعت متحرک در این بازه‌های زمانی، در خلاف جهت محور x است، بنابراین در بازه زمانی $(9s, 14s)$ بردار مکان متحرک در جهت محور x و سرعت متحرک در خلاف جهت محور x است. شیب مماس بر نمودار مکان - زمان در این بازه زمانی ابتدا افزایش سپس کاهش می‌یابد؛ این یعنی این‌که اندازه سرعت متحرک ابتدا افزایش سپس کاهش پیدا کرده است. پس شتاب متحرک در این مدت تغییر جهت داده است. ✓

ت شیب مماس بر نمودار مکان - زمان متحرک در لحظه $t_1 = 0$ منفی و در لحظه $t_2 = 20s$ مثبت است. پس سرعت متحرک در لحظه $t_1 = 0$ منفی و در لحظه $t_2 = 20s$ مثبت است. طبق رابطه زیر، شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی در جهت محور x است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[v_1 < 0]{v_2 > 0} a_{av} > 0 \quad ✗$$

۵. نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در کدام بازه زمانی بزرگتر از تندی متوسط آن بازه‌های زمانی دیگر است؟



۱) $(0, t_1)$

۲) (t_1, t_2)

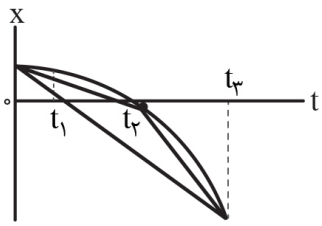
۳) (t_2, t_3)

۴) $(0, t_3)$

پاسخ: گزینه ۳ ساده | مفهومی

ابتدا نکته زیر را بخوانید.

نکته اگر متحرکی تغییر جهت ندهد، اندازه سرعت متوسط آن در هر بازه زمانی برابر با تندی متوسط متحرک در آن بازه زمانی است.

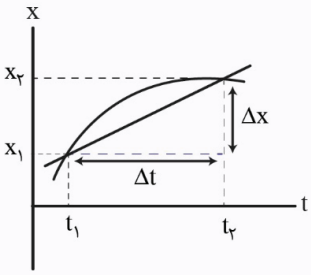


در نمودار مکان - زمان متحرک می‌بینیم که متحرک دائماً در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و در نتیجه تغییر جهت نداده است. پس طبق نکته بالا، برای مقایسه تندی متوسط متحرک در بازه‌های زمانی داده شده، به سراغ اندازه سرعت متوسط متحرک در آن بازه‌های زمانی می‌رویم. از آن‌جا که نمودار مکان - زمان متحرک را داریم، پس شیب نمودار در بازه‌های زمانی داده شده را رسم می‌کنیم و اندازه آن را که برابر با تندی متوسط متحرک در آن بازه زمانی است، با هم مقایسه می‌کنیم.

همان‌طور که می‌بینید، اندازه شیب نمودار مکان - زمان متحرک در بازه زمانی (t_2, t_3) بیشتر از بقیه است. پس اندازه سرعت متوسط متحرک و در نتیجه، تندی متوسط آن در این بازه زمانی بزرگ‌تر از اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک در بقیه بازه‌های زمانی است.

درسنامه

شیب پاره‌خط واصل بین دو لحظه در نمودار مکان - زمان، بیانگر سرعت متوسط متحرک در آن بازه زمانی است.



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

۶. بردار شتاب متوسط متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند در بازه زمانی $(0, 10s)$ در SI برابر $-2\vec{i}$ و بردار شتاب متوسط آن در بازه زمانی $(6s, 10s)$ در SI برابر $+3\vec{i}$ است. اگر سرعت متحرک در لحظه $t = 6s$ برابر $(-12\frac{m}{s})\vec{i}$ باشد، بردار سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 0$ در SI کدام است؟

۱) $-20\vec{i}$ ۲) $+20\vec{i}$ ۳) $-42\vec{i}$ ۴) $+42\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

ابتدا داده‌های مربوط به شتاب متوسط متحرک را در رابطه $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ جای‌گذاری می‌کنیم تا ببینیم چه می‌شود!

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \begin{cases} \vec{a}_1 = \frac{v_{10} - v_0}{t_{10} - t_0} \xrightarrow[t_{10}=10s,\, t_0=0s]{\vec{a}_1 = -2\vec{i}} -2\vec{i} = \frac{v_{10} - v_0}{10 - 0} \rightarrow v_{10} - v_0 = -20\vec{i} \quad (1) \\ \vec{a}_2 = \frac{v_{10} - v_6}{t_{10} - t_6} \xrightarrow[t_{10}=10s,\, t_6=6s]{\vec{a}_2 = 3\vec{i}} 3\vec{i} = \frac{v_{10} - v_6}{10 - 6} \rightarrow v_{10} - v_6 = 12\vec{i} \quad (2) \end{cases}$$

سوال به ما، سرعت متحرک در لحظه $t = 6s$ (یعنی v_6) را داده است. از دو رابطه (۱) و (۲) که به دست آوریم، مقدار v_6 را می‌توانیم در رابطه (۲) جای‌گذاری کنیم و مقدار v_{10} را از دل آن بیرون بکشیم.

$$v_{۱۰}-v_{۶}=۱۲\vec{i}\xrightarrow{v_{۶}=-۱۲\vec{i}}v_{۱۰}-(-۱۲\vec{i})=۱۲\vec{i}\rightarrow v_{۱۰}=۰\frac{m}{s}$$

سوال از ما، بردار سرعت متحرک در لحظه $t=۰s$ (یعنی $v_{۰}$) را می‌خواهد که آن را می‌توانیم از رابطه (۱) پیدا کنیم.

$$v_{۱۰}-v_{۰}=-۲۰\vec{i}\xrightarrow{v_{۱۰}=۰\frac{m}{s}}۰-v_{۰}=-۲۰\vec{i}\rightarrow v_{۰}=۲۰\vec{i}$$

درسنامه

بردار شتاب متوسط: اگر سرعت متحرکی در لحظه $t_۱$ برابر با $v_۱$ و در لحظه $t_۲$ برابر با $v_۲$ باشد، بردار شتاب متوسط آن از رابطه زیر به دست می‌آید.

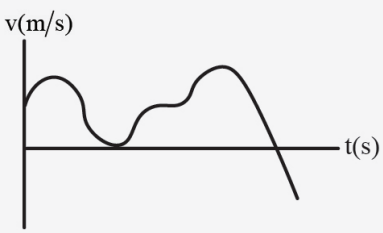
$$\vec{a}_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}$$

تست‌درتست متحرکی روی محور x در حال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازه زمانی $t_۱=۵s$ تا $t_۲=۰s$ در SI برابر $-۴\vec{i}$ و در بازه زمانی $t_۲=۱۰s$ تا $t_۳=۱۲s$ برابر $۲\vec{i}$ است. بردار شتاب متوسط آن در بازه زمانی $t_۱=۵s$ تا $t_۳=۱۲s$ در SI، کدام است؟ (تجربی - ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{۲}{۷}\vec{i}$ ۲) $-\frac{۱۶}{۷}\vec{i}$ ۳) $۴\vec{i}$ ۴) $۸\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

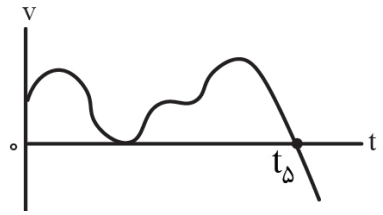
۷. نمودار سرعت - زمان متحرکی که در روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. تعداد تغییر جهت‌های بردار سرعت و تعداد تغییر جهت‌های بردار شتاب متحرک به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



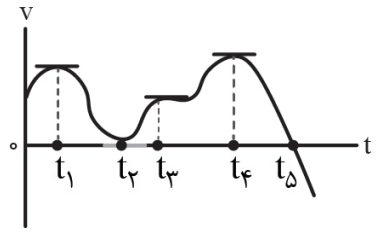
۱) ۱ و ۲
۲) ۳ و ۳
۳) ۳ و ۲
۴) ۱ و ۳

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | مفهومی

تعداد تغییر جهت بردار سرعت: در شکل زیر می‌بینید که علامت سرعت متحرک در لحظه $t_۵$ از مثبت به منفی تغییر کرده است. پس نمودار سرعت متحرک، یک بار تغییر جهت داده است. (۲ و ۳ پَر!)

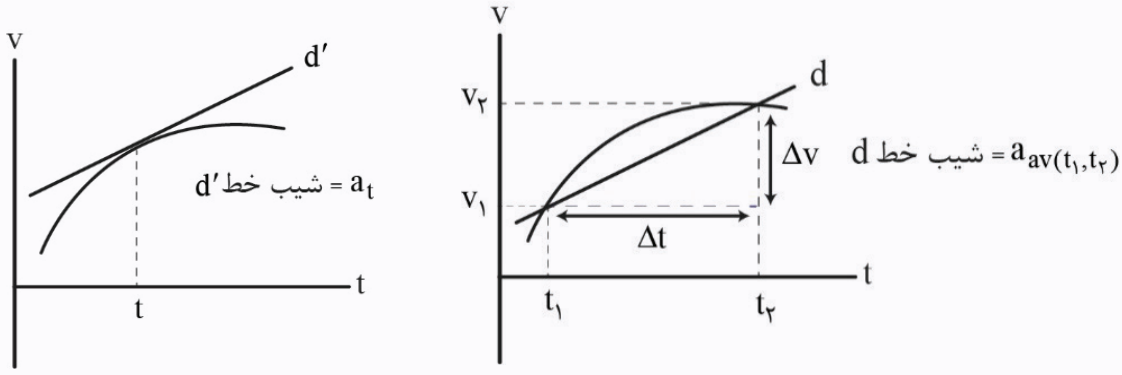


تعداد تغییر جهت بردار شتاب: در این‌جا به سراغ شیب مماس بر نمودار سرعت - زمان می‌رویم. چون شیب مماس بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه بیانگر شتاب متحرک در آن لحظه است. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، شیب مماس بر نمودار سرعت - زمان متحرک در لحظه‌های $t_۱, t_۲, t_۴$ صفر شده و تغییر علامت داده است؛ پس بردار شتاب متحرک، سه بار تغییر جهت داده است (۱ پَر پَرا!). دقت کنید درست است که شیب مماس بر نمودار سرعت - زمان در لحظه $t_۳$ صفر شده است، اما علامت آن قبل و پس از این لحظه، مثبت است و تغییر علامت نداده است.



درسنامه

شیب مماس بر نمودار سرعت - زمان متحرک در هر لحظه، بیانگر شتاب متحرک در آن لحظه است و شیب پاره‌خط واصل بین دو لحظه، بیانگر شتاب متوسط متحرک در آن بازه زمانی است.

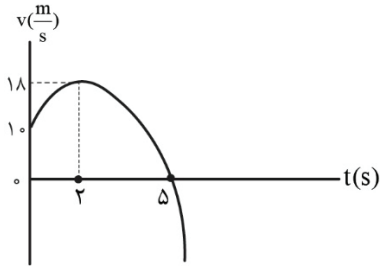


۸. معادله سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v=-۲t^۲+۸t+۱۰$ است. بردار شتاب متوسط متحرک در مدتی که به صورت کندشونده در جهت محور x حرکت می‌کند، در SI کدام است؟

۱) $-۶\vec{i}$ ۲) $-۲\vec{i}$ ۳) $+۲\vec{i}$ ۴) $+۶\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

بهترین کار این است که نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنیم تا ببینیم در چه بازه زمانی‌ای متحرک به صورت کندشونده در جهت محور x حرکت می‌کند. برای این کار، ریشه‌ها و رأس معادله سرعت - زمان را پیدا می‌کنیم.



$$v=-۲t^۲+۸t+۱۰\rightarrow -۲(t-۵)(t+۱)=۰\rightarrow t_۱=-۱s\ \times\ ,\ t_۲=۵s$$

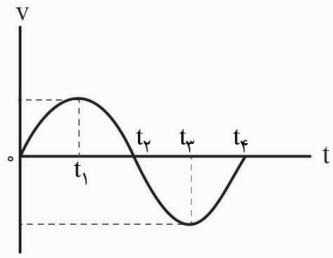
$$t_{\text{راس}}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{۲(-۲)}=۲s\ ,\ v_{\text{راس}}=-۲(۲)^۲+۸(۲)+۱۰=۱۸\frac{m}{s}$$

در بازه زمانی $(۰s,۵s)$، علامت سرعت متحرک مثبت است؛ پس متحرک در این مدت در جهت محور x حرکت می‌کند و در بازه زمانی $(۲s,۵s)$، تندی متحرک در حال کاهش است؛ پس حرکت متحرک در این مدت به صورت کندشونده است. سوال از ما، بردار شتاب متوسط متحرک را در مدت زمانی که به صورت کندشونده در جهت محور x حرکت می‌کند، یعنی بازه زمانی $(۲s,۵s)$ می‌خواهد و ما هم حسابش می‌کنیم.

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_۵-\vec{v}_۲}{t_۵-t_۲}\xrightarrow[t_۵=۵s\ ,\ t_۲=۲s]{v_۵=۰\frac{m}{s}\ ,\ \vec{V}_۲=۱۸\vec{i}}\vec{a}_{av}=\frac{۰-۱۸\vec{i}}{۵-۲}=-۶\vec{i}$$

درسنامه:

نکات زیر را درباره نمودار سرعت - زمان باید بدانید.



۱- اگر علامت سرعت متحرک مثبت باشد (نمودار بالای محور t باشد)، یعنی متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و اگر علامت سرعت منفی باشد (نمودار پایین محور t باشد)، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؛ مثلاً در نمودار بالا متحرک در بازه زمانی $(۰,t_۲)$ در جهت محور x و در بازه زمانی $(t_۲,t_۴)$، در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۲- اگر تندی متحرک افزایش یابد (نمودار از محور t دور شود)، نوع حرکت متحرک به صورت تندشونده و اگر تندی متحرک کاهش یابد (نمودار به محور t نزدیک شود)، نوع حرکت متحرک به صورت کندشونده است؛ مثلاً در نمودار بالا نوع حرکت متحرک در بازه زمانی $(t_۱,t_۲)$، به صورت کندشونده است.

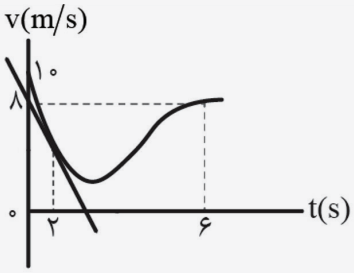
۳- در لحظه‌ای که علامت سرعت تغییر می‌کند، متحرک تغییر جهت می‌دهد، مثلاً در نمودار بالا متحرک در لحظه $t_۲$ تغییر جهت می‌دهد. دقت کنید که در لحظه‌های صفر و $t_۴$، سرعت متحرک صفر شده است ولی چون علامت آن تغییر نکرده است، پس متحرک تغییر جهت نداده است و صرفاً در این لحظات ایستاده بوده است.

تست‌درتست معادله سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $v=3t^2-8$ است. شتاب متوسط آن در ۲ ثانیه دوم چند متر بر مربع ثانیه است؟ (ریاضی ۱۴۰۴)

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

۹. نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1=2s$ تا $t_2=6s$ برابر $1m/s^2$ باشد، شتاب متحرک در لحظهٔ $t=2s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟ (خط رسم شده در لحظهٔ $t=2s$ بر نمودار مماس است.)



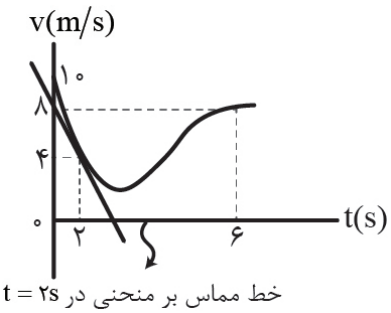
۱) ۲
۲) ۱
۳) -1
۴) -2

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $(2s,6s)$ را داریم. داده‌ها را در رابطه شتاب متوسط جای گذاری می‌کنیم تا سرعت متحرک در لحظهٔ $t=2s$ به دست بیاید.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_6-v_2}{t_6-t_2}\xrightarrow[t_6=6s\,,\,t_2=2s]{a_{av}=1\frac{m}{s}\,,\,V_6=8\frac{m}{s}}1=\frac{8-v_2}{6-2}\rightarrow 8-v_2=4\rightarrow v_2=4\frac{m}{s}$$

خب، سرعت متحرک در لحظه $t=2s$ را پیدا کردیم. سوال از ما شتاب متحرک در لحظه $t=2s$ را می‌خواهد که با استفاده از شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در این لحظه، می‌توانیم حسابش کنیم.



خط مماس بر منحنی در $t=2s$

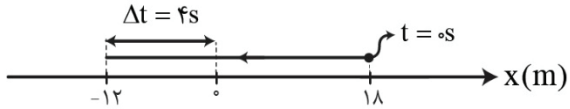
$$t=2s\text{ لحظه در نمودار شیب}=a_{2s}=\frac{4-8}{2-0}=-2\frac{m}{s^2}$$

۱۰. متحرکی با سرعت ثابت روی محور x حرکت می‌کند. اگر بردار مکان متحرک ۴ ثانیه پس از تغییر جهت بردار مکان آن $(-12m)\vec{i}$ و بردار مکان اولیه متحرک $(+18m)\vec{i}$ باشد، بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t=12s$ در SI کدام است؟

۱) $-18\vec{i}$ ۲) $+18\vec{i}$ ۳) $-54\vec{i}$ ۴) $+54\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

وقتی متحرک از مبدأ عبور می‌کند، بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. پس منظور از این‌که، بردار مکان متحرک ۴ ثانیه پس از تغییر جهت بردار مکان (عبور از مبدأ)، $-12\vec{i}$ می‌شود، آن است که ۴ ثانیه طول می‌کشد تا متحرک از مکان $x_1=0m$ به مکان $x_2=-12m$ برسد. شکل زیر را کشیدیم تا بهتر متوجه شوید.



با استفاده از این اطلاعات، می‌توانیم سرعت متحرک را به دست بیاوریم (توجه کنید که چون متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند، پس سرعت متوسط آن در هر بازه زمانی برابر با سرعت آن در هر لحظه است.)

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=4s]{\Delta x=-12-0=-12m}v_{av}=\frac{-12}{4}=-3\frac{m}{s}$$

سوال از ما، بردار مکان متحرک در لحظه $t=12s$ را می‌خواهد. با استفاده از معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت، مکان متحرک در این لحظه را پیدا می‌کنیم سپس بردار مکان آن را می‌نویسیم.

$$x=vt+x_0 \xrightarrow[t=12s,\ x_0=18m]{v=v_{av}=-3\frac{m}{s}} x=-3\times12+18=-18m \rightarrow \vec{r}=(-18m)\vec{i}$$

درسنامه:

معادله مکان - زمان متحرکی که با سرعت ثابت v بر روی خط راست حرکت می‌کند به صورت زیر است:

$x=vt+x_0$

x_0: مکان متحرک در $t=0$

۱۱. یک تانک ساکن گلوله‌ای را به سمت یک هدف در فاصلهٔ ۱۷۰۰ متری شلیک می‌کند و پس از ۶/۷s از شلیک گلوله، صدای انفجار هدف توسط سرنشین تانک شنیده می‌شود. اگر سرعت صوت در هوای محیط ۳۴۰m/s باشد، اندازهٔ سرعت متوسط گلوله تانک از لحظه شلیک شدن تا رسیدن به هدف چند متر بر ثانیه است؟ (مسیر حرکت گلوله تا رسیدن به هدف خط راست است.)

۱) $1/7\times10^3$ ۲) 10^3 ۳) $8/5\times10^2$ ۴) 2×10^3

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

وقتی تانک شلیک می‌کند، مدت زمانی طول می‌کشد تا گلوله مسیر تانک تا هدف را طی کند ($t_{گلوله}$) سپس مدت زمان دیگری طول می‌کشد تا صوت همین مسیر را از هدف تا تانک طی کند ($t_{صوت}$). مدت زمان شلیک تا شنیدن صدای انفجار، برابر با مجموع این دو مدت زمان است که برابر با ۶/۷ ثانیه است.

$$t_{گلوله}+t_{صوت}=6/7s$$

فاصله هدف تا تانک و سرعت صوت را داریم؛ پس می‌توانیم $t_{صوت}$ را به دست بیاوریم.

$$\Delta x=v_{صوت}t_{صوت} \xrightarrow[v_{صوت}=340\frac{m}{s}]{\Delta x=1700m} \overset{5}{\cancel{1700}}=\overset{1}{\cancel{340}}t_{صوت} \rightarrow t_{صوت}=5s$$

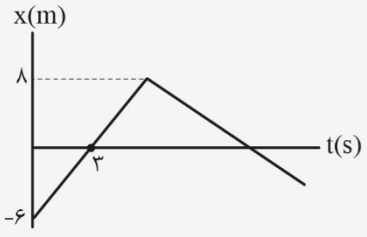
حالا که $t_{صوت}$ را به دست آوردیم، می‌توانیم زمان شلیک گلوله تا رسیدن به هدف $t_{گلوله}$ را هم پیدا کنیم.

$$t_{گلوله}+t_{صوت}=6/7 \xrightarrow{t_{صوت}=5s} t_{گلوله}+5=6/7 \rightarrow t_{گلوله}=1/7s$$

الان همه چیز را برای محاسبه سرعت متوسط گلوله تانک داریم:

$$v_{av,گلوله}=\frac{\Delta x}{t_{گلوله}} \xrightarrow[t_{گلوله}=1/7s]{\Delta x=1700m} v_{av,گلوله}=\frac{1700}{1/7}=10^3\frac{m}{s}$$

۱۲. نمودار مکان - زمان متحرکی که در روی محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر بزرگی شتاب متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ نخست حرکتش برابر $0/6m/s^2$ باشد، بردار مکان متحرک در چه لحظه‌ای برای بار دوم تغییر جهت می‌دهد؟



۱) ۸

۲) ۹

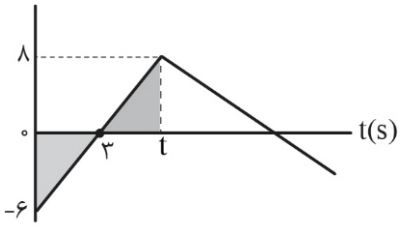
۳) ۱۰

۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۲ سخت | محاسباتی

نمودار مکان - زمان این متحرک از دو قسمت تشکیل شده است. در قسمت اول، متحرک با سرعت ثابت در جهت محور x حرکت می‌کند. (شیب نمودار در این قسمت مثبت است) و در قسمت دوم، متحرک با سرعت ثابت در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (شیب نمودار در این قسمت

منفی است). با تشابه دو مثلث ایجاد شده، لحظه تغییر جهت را به دست می‌آوریم تا اطلاعات‌مان نسبت به متحرک کامل‌تر شود.



$$\frac{\overset{۱}{\not۶}}{\underset{۳}{\not۳}}=\frac{\overset{۴}{\not۸}}{t-۳}\rightarrow t-۳=۴\rightarrow t=۷s$$

خب، الان می‌فهمیم که سرعت متحرک در بازه زمانی $(۰s,۷s)$ مثبت و پس از آن منفی است.

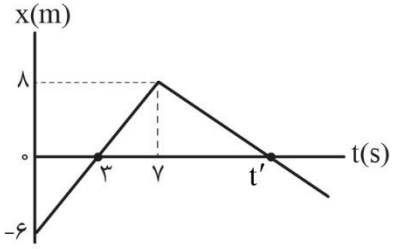
سوال به ما بزرگی شتاب متوسط متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکتش را داده است. چون $v_۰>۰$ و $v_{۱۰}<۰$ است، پس مقدار $v_{۱۰}-v_۰$ منفی است و در نتیجه، شتاب متوسط متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکتش طبق رابطه $a_{av}=\frac{\overbrace{v_{۱۰}-v_۰}^{\text{منفی}}}{\underbrace{t_{۱۰}-t_۰}_{\text{مثبت}}}$ منفی است. شتاب متوسط متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکتش (a_{av}) را که داریم؛ پس سرعت اولیه حرکت $(v_۰)$ را با کمک شیب نمودار مکان - زمان در قسمت اول حرکت می‌توانیم حساب کنیم.

$$v_۰=\frac{۰-(-۶)}{۳-۰}=۲\frac{m}{s}$$

حالا سرعت متحرک در لحظه $t=۱۰s$ $(v_{۱۰})$ را با استفاده از شتاب متوسط آن در ۱۰ ثانیه اول حرکتش (a_{av}) به دست می‌آوریم.

$$a_{av}=\frac{v_{۱۰}-v_۰}{t_{۱۰}-t_۰}\xrightarrow[t_{۱۰}=۱۰s,t_۰=۰s]{a_{av}=-۰/۶\frac{m}{s^۲},v_۰=۲\frac{m}{s}}-۰/۶=\frac{v_{۱۰}-۲}{۱۰-۰}\rightarrow v_{۱۰}-۲=-۶\rightarrow v_{۱۰}=-۴\frac{m}{s}$$

وقتی متحرک از مبدأ مختصات عبور می‌کند، بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، متحرک در لحظه $t_۳=۳s$ برای بار اول و در لحظه t' برای بار دوم از مبدأ مختصات عبور می‌کند؛ پس بردار مکان متحرک در لحظه $t_۳=۳s$ برای بار اول و در لحظه t' برای بار دوم تغییر جهت می‌دهد. سوال از ما لحظه‌ای را که بردار مکان متحرک برای بار دوم تغییر جهت می‌دهد، یعنی لحظه t' را می‌خواهد. سرعت متحرک در لحظه $t=۱۰s$ $(v_{۱۰})$ برابر با شیب نمودار مکان - زمان در قسمت دوم حرکت است که با استفاده از آن می‌توانیم لحظه t' را به دست بیاوریم.



$$\text{شیب نمودار مکان - زمان در قسمت دوم حرکت}=v_{۱۰}\rightarrow v_{۱۰}=\frac{۰-۸}{t'-۷}$$

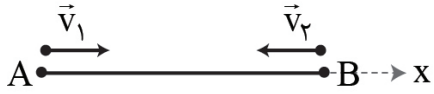
$$\xrightarrow{v_{۱۰}=-۴\frac{m}{s}}-۴=\frac{۰-۸}{t'-۷}\rightarrow t'-۷=۲\rightarrow t'=۹s$$

۱۳. دو اتومبیل (۱) و (۲) هم‌زمان از شهرهای A و B با تندی‌های ثابت روی جادهٔ مستقیم به سمت شهر مبدأ اتومبیل دیگر حرکت می‌کنند. اگر اتومبیل (۱) در مدت ۱۰ ساعت از شهر A به شهر B و اتومبیل (۲) در مدت ۱۵ ساعت از شهر B به شهر A برسد، پس از چند ساعت از شروع حرکت، دو اتومبیل به هم می‌رسند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

در این جور سوال‌ها، رسم شکل کارتان را ساده‌تر می‌کند. مثلاً شکل زیر، دو شهر A و B را نشان می‌دهد که اتومبیل (۱) از شهر A به سمت شهر B و اتومبیل (۲) از شهر B به سمت شهر A حرکت می‌کند.



حالا با نوشتن معادله مکان - زمان دو اتومبیل دست طراح را از پشت می‌بندیم.

$$x_۱ = v_۱ t + x_A \quad , \quad x_۲ = -v_۲ t + x_B$$

اتومبیل (۱) در مدت ۱۰ ساعت از شهر A به شهر B می‌رسد:

$$x_B = v_۱ t_۱ + x_A \xrightarrow{t_۱ = ۱۰h} x_B - x_A = ۱۰v_۱ \qquad (۱)$$

اتومبیل (۲) در مدت ۱۵ ساعت از شهر B به شهر A می‌رسد:

$$x_A = -v_۲ t_۲ + x_B \xrightarrow{t_۲ = ۱۵h} x_B - x_A = ۱۵v_۲ \qquad (۲)$$

همان‌طور که می‌بینید، سمت چپ تساوی دو رابطه (۱) و (۲) با هم برابر است، پس سمت راست تساوی این دو رابطه نیز با هم برابر است.

$$\overset{۲}{\cancel{۱۰}} v_۱ = \overset{۳}{\cancel{۱۵}} v_۲ \rightarrow V_۲ = \frac{۲}{۳} v_۱$$

حالا می‌خواهیم ببینیم که در چه لحظه‌ای این دو اتومبیل به هم می‌رسند. وقتی دو اتومبیل به هم می‌رسند، در یک مکان یکسانی قرار می‌گیرند. پس معادله مکان - زمان دو اتومبیل را برابر با یک‌دیگر قرار می‌دهیم و لحظه وصال! را پیدا می‌کنیم.

$$x_۱ = x_۲ \xrightarrow[x_۲ = -V_۲ t_۲ + x_B]{x_۱ = V_۱ t_۱ + x_A} v_۱ t_۱ + x_A = -v_۲ t_۲ + x_B \xrightarrow[x_B - x_A = ۱۰v_۱]{v_۲ = \frac{۲}{۳} v_۱ , t_۱ = t_۲ = t} v_۱ t = -\frac{۲}{۳} v_۱ t + ۱۰v_۱$$

$$\xrightarrow{\div v_۱} t = -\frac{۲}{۳} t + ۱۰ \rightarrow \frac{\overset{۱}{\cancel{۵}}}{۳} t = \overset{۲}{\cancel{۱۰}} \rightarrow t = ۶h$$

۱۴. قطاری با سرعت ثابت روی مسیر مستقیمی در حال حرکت است و ۱۵ ثانیه طول می‌کشد تا این قطار از روبروی ناظر ساکن به طور کامل عبور کند. اگر این قطار در مدت ۷۵ ثانیه به‌طور کامل از روی پلی به طول ۳۰۰m عبور کند، چند ثانیه به‌طور کامل قطار روی پل قرار داشته است؟

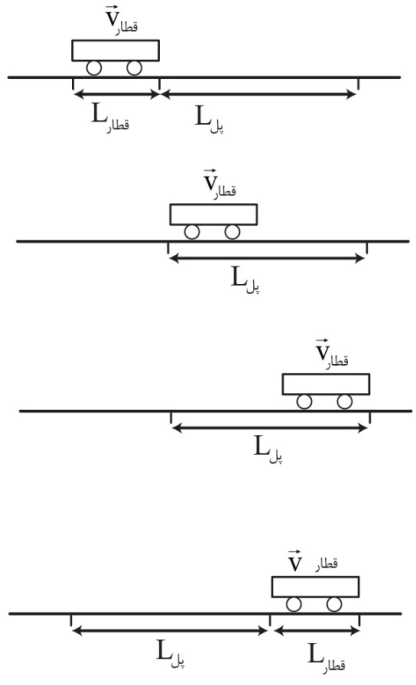
۱) ۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۵۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

روش اول: خودتان را جای ناظر بگذارید و تصور کنید که ایستادید و قطار به شما نزدیک می‌شود. از موقعی که سر قطار را می‌بینید تا موقعی که انتهای قطار را می‌بینید و به طور کامل از جلوی چشم‌تان عبور کند، ۱۵ ثانیه طول می‌کشد. از این موضوع می‌توانیم طول قطار را به دست بیاوریم.

$$L_{\text{قطار}} = V_{\text{قطار}} - \Delta t_{\text{قطار}} \xrightarrow{\Delta t_{\text{قطار}} = ۱۵s} L_{\text{قطار}} = ۱۵ V_{\text{قطار}}$$

حالا شکل‌های (الف) تا (ت) را ببینید.



همان‌طور که می‌بینید، قطار مجموع طول خودش ($L_{قطار}$) و طول پل ($L_{پل}$) را طی می‌کند تا به‌طور کامل از روی پل عبور کند. طبق گفته سوال، ۷۵ ثانیه طول می‌کشد تا قطار مجموع این دو طول ($L_{پل}+L_{قطار}$) را طی کند. از معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت استفاده می‌کنیم تا ببینیم چه می‌شود.

$$L_{قطار}+L_{پل}=v_{قطار}\times\Delta t_{پل\ و\ قطار}\xrightarrow[\Delta t_{پل\ و\ قطار}=75s]{L_{قطار}=15v_{قطار},L_{پل}=300m}15v_{قطار}+300=75v_{قطار}\rightarrow \frac{1}{60}v_{قطار}=\frac{5}{300}\rightarrow v_{قطار}=5\frac{m}{s}$$

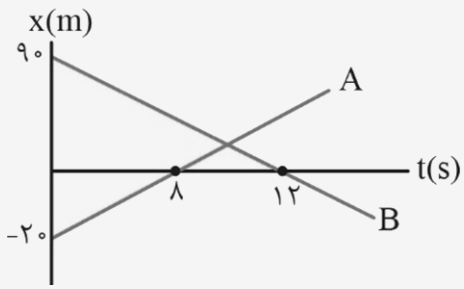
شکل‌های (ب) و (پ) را ببینید. در مدت زمانی که طول می‌کشد تا قطار از وضعیت شکل (ب) به وضعیت شکل (پ) برسد، به‌طور کامل روی پل قرار دارد و قطار در این مدت به اندازه ($L_{پل}-L_{قطار}$) جابه‌جا شود. دوباره از معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت استفاده می‌کنیم و مدت زمانی را که قطار به طور کامل روی پل قرار دارد، به دست می‌آوریم.

$$L_{پل}-L_{قطار}=v_{قطار}-\Delta t\xrightarrow[L_{قطار}=15v_{قطار}=15\times5=75m]{L_{پل}=300m,v_{قطار}=5\frac{m}{s}}300-75=5\Delta t\rightarrow\Delta t=\frac{225}{5}=45s$$

روش دوم: مسافتی که قطار طی می‌کند و در آن تماماً روی پل قرار دارد برابر با اختلاف طول پل و طول قطار است. مسافتی که قطار طی می‌کند تا کاملاً از پل عبور کند برابر با مجموع طول پل و طول قطار است. بنابراین اختلاف مسافت این دو حالت، ۲ برابر طول قطار است.

می‌دانیم طول قطار به مدت ۱۵s از روبروی یک ناظر ساکن عبور کرده است پس قطار مسیری به طول ۲ برابر طول خودش را در مدت $2\times15=30s$ طی می‌کند. بنابراین اختلاف مدت زمان طی کردن کامل پل با بودن کامل روی پل برابر ۳۰s است. پس قطار به مدت $75-30=45s$ کاملاً روی پل بوده است.

۱۵. نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که هر دو روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در چه مکانی بر حسب متر دو متحرک به هم می‌رسند؟



۱) ۵

۲) ۶/۲۵

۳) ۷/۵

۴) ۸/۷۵

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

وقتی دو متحرک A و B به یک‌دیگر می‌رسند، در یک مکان یکسانی قرار می‌گیرند. پس باید معادله مکان - زمان دو متحرک A و B را بنویسیم و برابر با یک‌دیگر قرار بدهیم تا لحظه رسیدن به هم را پیدا کنیم.

$$x_A=v_A t+x_{0,A}\xrightarrow[x_{0,A}=-20m]{v_A=\frac{\Delta x_A}{\Delta t_A}=\frac{0-(-20)}{8-0}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}\frac{m}{s}}x_A=\frac{5}{2}t-20$$

$$x_B=v_B t+x_{0,B}\xrightarrow[x_{0,B}=90m]{v_B=\frac{\Delta x_B}{\Delta t_B}=\frac{0-90}{12-0}=-\frac{90}{12}=-\frac{15}{2}\frac{m}{s}}x_B=-\frac{15}{2}t+90$$

$$x_A=x_B\rightarrow\frac{5}{2}t-20=-\frac{15}{2}t+90\rightarrow\frac{20}{2}t=110\rightarrow t=11s$$

پس این دو متحرک در لحظه $t=11s$ به هم می‌رسند. سوال از ما مکانی را که این دو متحرک به هم می‌رسند، می‌خواهد که برای به دست آوردن آن کافی است لحظه $t=11s$ را در معادله مکان - زمان متحرک A یا B جای‌گذاری کنیم.

$$x_A=v_A t+x_{0,A}\xrightarrow[t=11s,x_{0,A}=-20m]{v_A=\frac{5}{2}\frac{m}{s}}x_A=\frac{27/5}{2}\times11-20=7/5m$$

آزمون‌های ماراتون

فیزیک دوازدهم | ۱۵ آبان‌ماه ۱۴۰۴

۱. موارد «الف» و «ب» به ترتیب از راست به چپ مربوط به کدام نوع حرکت است؟

الف) ساده‌ترین نوع حرکت است. **ب) جسمی که روی سطح هموار یک سراشیبی در حال لغزیدن است.**

۱) سرعت ثابت - سرعت ثابت
۲) سرعت ثابت - شتاب ثابت
۳) شتاب ثابت - سرعت ثابت
۴) شتاب ثابت - شتاب ثابت

پاسخ: گزینه ۲ ساده | حفظی و مفهومی

الف ساده‌ترین نوع حرکت، حرکت با **سرعت ثابت** است. در این نوع حرکت، اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است.

ب جسمی که روی سطح هموار یک سراشیبی در حال لغزیدن است، یا جسمی که در حال سقوط است و اثر مقاومت هوا بر آن ناچیز باشد دارای حرکت با شتاب ثابت‌اند.

۲. متحرکی با سرعت ثابت روی محور x حرکت می‌کند. اگر بردارهای مکان متحرک در لحظه‌های $t_1 = 2s$ و $t_2 = 8s$ به ترتیب $\vec{r}_1 = (+12m)\vec{i}$ و $\vec{r}_2 = (-30m)\vec{i}$ باشد، معادله مکان - زمان متحرک در SI است؟

۱) $x = 7t - 2$
۲) $x = -7t + 12$
۳) $x = -7t + 26$
۴) $x = 7t - 96$

پاسخ: گزینه ۳ ساده | محاسباتی

مکان متحرک در دو لحظه را داریم و معادله مکان - زمان آن را می‌خواهیم. از آن‌جا که متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند، پس باید مکان متحرک در این دو لحظه در معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت جای‌گذاری کنیم و معادله مکان - زمان آن را به دست بیاوریم.

$$x = vt + x_0 \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow[x_1 = 12m]{t_1 = 2s} 12 = v \times 2 + x_0 \\ \xrightarrow[x_2 = -30m]{t_2 = 8s} -30 = v \times 8 + x_0 \end{cases} \Rightarrow v = -7\frac{m}{s} \ , \ x_0 = 26m$$

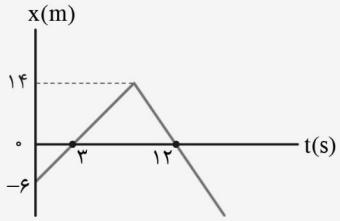
$$x = vt + x_0 \xrightarrow[x_0 = 26m]{v = -7\frac{m}{s}} x = -7t + 26$$

درسنامه

معادله مکان - زمان متحرکی که با سرعت ثابت بر روی خط راست حرکت کند، به صورت زیر است:

$$x = \underset{\text{سرعت}\left(\frac{m}{s}\right)}{v}\, t + \underset{\text{مکان اولیه}(m)}{x_0} \rightarrow \text{زمان}(s) \ , \ \text{مکان}(m) \leftarrow x$$

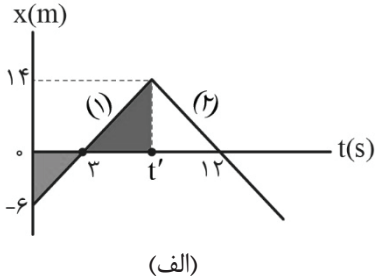
۳. نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند به صورت زیر است. بزرگی شتاب متوسط در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 16s$ و تندی متوسط در همین بازه زمانی به ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟



۱) $4, \frac{3}{5}$
۲) $4, \frac{1}{3}$
۳) $1/6, \frac{3}{5}$
۴) $1/6, \frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

بزرگی شتاب متوسط: برای محاسبه شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1=1s$ تا $t_2=16s$ به سرعت متحرک در این دو لحظه نیاز داریم. همان‌طور که در نمودار مکان - زمان متحرک (شکل الف) می‌بینید، متحرک از لحظه $t_0=0s$ تا لحظه t' با سرعت ثابت در جهت محور x حرکت می‌کند سپس تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. از آن‌جا که شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، برابر با سرعت متحرک در آن لحظه است، پس سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1=1s$ و $t_2=16s$ به ترتیب برابر با شیب خط (۱) و شیب خط (۲) است. این شیب‌ها را به دست می‌آوریم (برای به دست آوردن شیب خط (۲) به لحظه t' نیاز داریم).



(الف)

$$\text{تشابه دو مثلث}: \frac{\cancel{6}^{2}}{14}=\frac{\cancel{3}^{1}}{t'-3} \rightarrow 2t'-6=14 \rightarrow t'=10s$$

$$v_1=\text{شیب خط }(1)=\frac{0-(-6)}{3-0}=2\frac{m}{s}$$

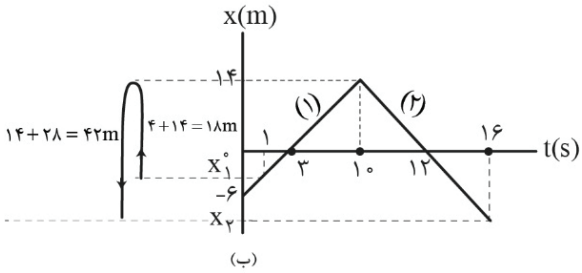
$$v_2=\text{شیب خط }(2)=\frac{0-14}{12-10}=-7\frac{m}{s}$$

حالا می‌توانیم بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1=1s$ تا $t_2=16s$ را حساب کنیم.

$$a_{av}=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{V_2-V_1}{t_2-t_1} \xrightarrow[V_2=-7\frac{m}{s},t_2=16]{V_1=2\frac{m}{s},t_1=1s} a_{av}=\frac{-7-2}{16-1}=-\frac{9}{15}=-\frac{3}{5}\frac{m}{s^2} \rightarrow |a_{av}|=\frac{3}{5}\frac{m}{s^2}$$

۲ و ٤ پَرا!

تندی متوسط: برای محاسبه تندی متوسط متحرک از لحظه $t_1=1s$ تا $t_2=16s$ به مسافت طی شده در این مدت زمان نیاز داریم. با توجه به نمودار مکان - زمان شکل(ب) مکان متحرک در این دو لحظه را با کمک تشابه مثلث‌ها به دست می‌آوریم سپس مسافت طی شده در این مدت را حساب می‌کنیم.



$$\frac{\cancel{6}^{2}}{x_1}=\frac{\cancel{3}^{1}}{3-1} \xrightarrow{x_1<0} x_1=-4m$$

$$\frac{\cancel{14}^{7}}{x_2}=\frac{\cancel{12-10}^{1}}{\cancel{16-12}^{4}} \xrightarrow{x_2<0} x_2=-28m$$

$$\ell=18+42=60m$$

الان همه چیز را برای محاسبه تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1=1s$ تا $t_2=16s$ داریم و می‌توانیم حسابش کنیم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=16-1=15s]{\ell=60m} s_{av}=\frac{60}{15}=4\frac{m}{s}$$

۳ پَرپَرا!

درسنامه

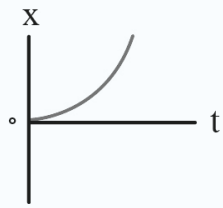
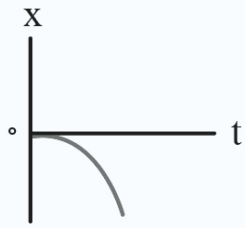
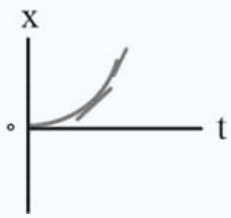
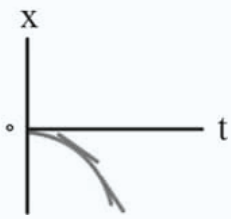
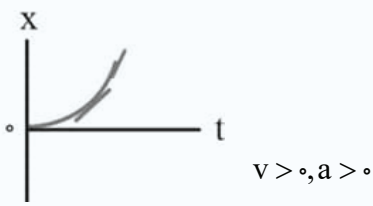
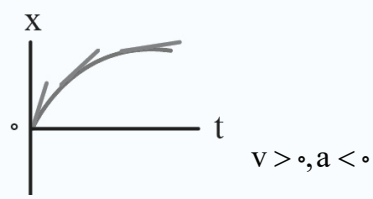
۱) **تندی متوسط:** اگر متحرکی مسافت ℓ را در مدت زمان Δt طی کند، تندی متوسط آن از رابطه زیر به دست می‌آید و بیانگر این است که متحرک در هر ثانیه، به طور متوسط چند متر مسافت طی کرده است.

$$s_{av}\ (\frac{m}{s})\ \text{تندی متوسط}=\frac{l \rightarrow (m)\ \text{مسافت طی شده}}{\Delta t \rightarrow (s)\ \text{مدت زمان}}$$

۲) **شتاب متوسط:** اگر سرعت متحرکی در لحظه t_1 برابر با v_1 و در لحظه t_2 برابر با v_2 باشد، شتاب متوسط آن از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

۳) اگر متحرکی بر روی محور x حرکت کند، از روی نمودار مکان - زمان آن می‌توانیم جهت‌های بردار مکان، سرعت و شتاب آن را پیدا کنیم. در جدول زیر حالت‌های ممکن را نشان دادیم.

کمیت	روش تشخیص	حالت‌های ممکن	جهت کمیت	مثال
بردار مکان	موقعیت قرارگیری متحرک	متحرک در قسمت مثبت محور x باشد.	در جهت محور x است.	
		متحرک در قسمت منفی محور x باشد.	در خلاف جهت محور x است.	
سرعت	شیب مماس بر نمودار	شیب مماس بر نمودار مثبت باشد.	در جهت محور x است.	
		شیب مماس بر نمودار منفی باشد.	در خلاف جهت محور x است.	
شتاب	تغییر اندازه سرعت	اگر اندازه سرعت متحرک افزایش یابد.	هم‌جهت با سرعت است.	
		اگر اندازه سرعت متحرک کاهش یابد.	در خلاف جهت سرعت است.	

۴. دو متحرک با سرعت‌های ثابت $۱۲\frac{m}{s}$ و $۸\frac{m}{s}$ همزمان از نقطه A عبور می‌کنند و به سمت نقطه‌ی B که در فاصله ۲۴۰ متری از نقطه A قرار دارد، حرکت می‌کنند. بیشترین فاصله بین این دو متحرک تا عبور متحرک سریع‌تر از نقطه‌ی B، چند متر است؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه ۳ ساده | محاسباتی

متحرک (۱) با سرعت ثابت $۱۲\frac{m}{s}$ و متحرک (۲) با سرعت ثابت $۸\frac{m}{s}$ هم‌زمان از نقطه A عبور می‌کنند و به سمت نقطه B حرکت می‌کنند. قبول دارید که چون تندی متحرک (۱) بیشتر از تندی متحرک (۲) است، پس متحرک (۱) زودتر از متحرک (۲) به نقطه B می‌رسد؟ وقتی متحرک (۱) به نقطه B می‌رسد، فاصله بین دو متحرک به بیشترین مقدار ممکن در این مدت می‌رسد. باید ببینیم چند ثانیه طول می‌کشد تا متحرک (۱) به نقطه B برسد.

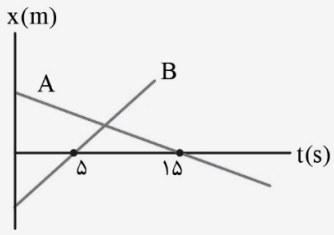
$$x_۱ = v_۱ t + x_A \xrightarrow[v_۱ = ۱۲\frac{m}{s}]{x_۱ - x_A = ۲۴۰m} ۲۴۰ = ۱۲t \rightarrow t = ۲۰s$$

پس ۲۰ ثانیه طول می‌کشد تا متحرک (۱) به نقطه B برسد. حالا باید ببینیم که متحرک (۲) تا لحظه $t = ۲۰s$ چند متر جابه جا شده است.

$$x_۲ = v_۲ t + x_A \xrightarrow[t=۲۰s]{v_۲ = ۸\frac{m}{s}} x_۲ - x_A = ۸ \times ۲۰ = ۱۶۰m$$

بنابراین در لحظه $t = ۲۰s$ که فاصله بین دو متحرک بیشترین مقدار ممکن در این مدت است، متحرک (۱) در فاصله ۲۴۰ متری از نقطه A و متحرک (۲) در فاصله ۱۶۰ متری از این نقطه قرار دارد و فاصله بین این دو متحرک در این لحظه $(۲۴۰ - ۱۶۰) = ۸۰m$ است.

۵. نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که روی خط راست با سرعت‌های ثابت حرکت می‌کنند، به صورت زیر است. اگر فاصله‌ی اولیه دو متحرک ۴۵۰ متر و تندی متحرک B، ۳ برابر تندی متحرک A باشد، فاصله دو متحرک در لحظه‌ی $t = ۸s$ چند متر است؟



۱) ۱۰

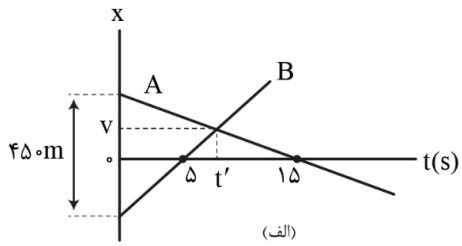
۲) ۱۵

۳) ۲۰

۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

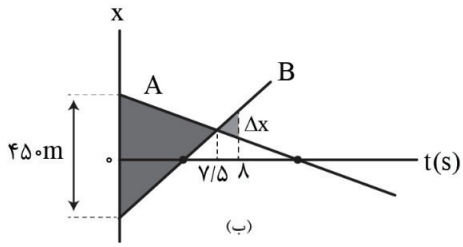
با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، متحرک A با سرعت ثابت در خلاف جهت محور x و متحرک B با سرعت ثابت درجهت محور x حرکت می‌کند. پس منظور از این‌که تندی متحرک B، ۳ برابر تندی متحرک A است، یعنی $v_B = -۳v_A$ است. سوال فاصله دو متحرک را در لحظه $t = ۸s$ می‌خواهد؛ ولی در نمودار مکان - زمان این دو متحرک (شکل الف)، لحظه $t = ۸s$ مشخص نشده است. پس باید لحظه‌ای را که دو متحرک به یک‌دیگر می‌رسند (t') را پیدا کنیم تا لحظه $t = ۸s$ مشخص شود. با روش‌های مختلف می‌توانید لحظه t' را پیدا کنیم. (مثلاً مساوی قرار دادن معادله مکان - زمان دو متحرک)؛ ما از شیب مماس بر نمودار مکان - زمان متحرک که بیانگر سرعت آن است، لحظه t' را پیدا می‌کنیم.



(الف)

$$v_B = -۳v_A \rightarrow \frac{v - ۰}{t' - ۵} = -۳ \times \frac{۰ - v}{۱۵ - t'} \rightarrow ۱۵ - t' = ۳t' - ۱۵ \rightarrow ۴t' = ۳۰ \rightarrow t' = ۷/۵S$$

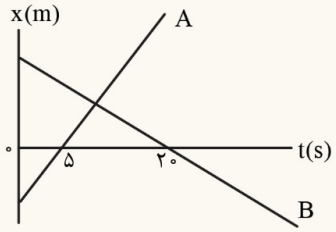
حالا فهمیدیم که لحظه $t = ۸s$ کجاست و می‌توانیم فاصله دو متحرک از یک‌دیگر در این لحظه را با کمک تشابه دو مثلث نشان داده شده در شکل (ب) به دست بیاوریم (شما می‌توانید با استفاده از معادله مکان - زمان دو متحرک، فاصله آن‌ها را در لحظه $t = ۸s$ را پیدا کنید ولی راه‌حل‌تان طولانی می‌شود.).



(ب)

$$\frac{۴۵۰}{۷/۵} = \frac{\Delta x}{۰/۵} \rightarrow \Delta x = ۳۰m$$

تست‌درتست نمودار مکان - زمان دو متحرک **A** و **B** مطابق شکل زیر است. اگر در لحظه $t=0$ فاصله دو متحرک ۱۵۰ متر باشد، و تندی متحرک **A**، ۲ برابر تندی متحرک **B** باشد، فاصله دو متحرک در لحظه $t=20s$ چند متر است؟ (تجربی - ۱۴۰۰)



۱) ۵۰

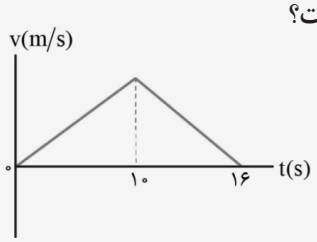
۲) ۱۰۰

۳) ۱۵۰

۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینه ۳

۶. نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور **x** حرکت می‌کند، به صورت زیر است. اگر شتاب متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی $t_1=2s$ تا $t_2=12s$ در **SI** برابر $(1/4\frac{m}{s^2})\vec{i}$ باشد، بیشینه تندی متحرک چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲۰

۲) ۲۵

۳) ۳۵

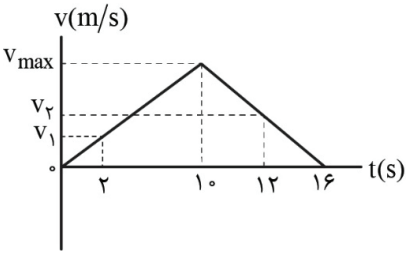
۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

شتاب متوسط متحرک از لحظه $t_1=2s$ تا لحظه $t_2=12s$ را داریم و با استفاده از آن می‌توانیم اختلاف سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1=2s$ تا $t_2=12s$ را به دست بیاوریم.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\xrightarrow[t_1=2s,\,t_2=12s]{a_{av}=1/4\frac{m}{s^2}}1/4=\frac{v_2-v_1}{12-2}\rightarrow v_2-v_1=14\frac{m}{s}\qquad(1)$$

در شکل زیر، سرعت متحرک در لحظه $t_1=2s$ (V_1)، $t_2=12s$ (V_2) و بیشینه تندی متحرک (V_m) را نشان دادیم. همان‌طور که می‌بینید، مقدار هیچ‌کدام از این سرعت‌ها را نداریم ولی با کمی دقت می‌بینیم که می‌توانیم از طریق تشابه مثلث‌ها، V_1 و V_2 را بر حسب V_m بنویسیم.



$$\frac{V_m}{10}=\frac{V_1}{2}\rightarrow V_m=5V_1$$

$$\frac{V_m}{16-10}=\frac{V_2}{16-12}\rightarrow V_m=\frac{3}{2}V_2$$

$$\rightarrow 5V_1=\frac{3}{2}V_2\rightarrow V_1=\frac{3}{10}V_2$$

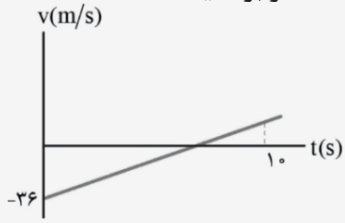
خب! V_1 و V_2 را نسبت به هم به دست آوردیم. حالا می‌توانیم با کمک رابطه (۱)، مقدار هریک از آن‌ها (مثلاً V_2) را حساب کنیم.

$$v_2-v_1=14\xrightarrow{v_1=\frac{3}{10}V_2}v_2-\frac{3}{10}v_2=14\rightarrow\frac{7}{10}v_2=14\rightarrow v_2=20\frac{m}{s}$$

الان می‌توانیم خواسته سوال، یعنی بیشینه تندی متحرک (V_m) را به دست بیاوریم.

$$v_m=\frac{3}{2}v_2\xrightarrow{v_2=20\frac{m}{s}}v_m=\frac{3}{2}\times10=30\frac{m}{s}$$

۷. نمودار سرعت - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند، به صورت زیر است. اگر جابه‌جایی متحرک در ۱۰ ثانیه نخست حرکت برابر با ۱۱۰m- باشد، سرعت متوسط متحرک در دو ثانیه چهارم حرکت چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲

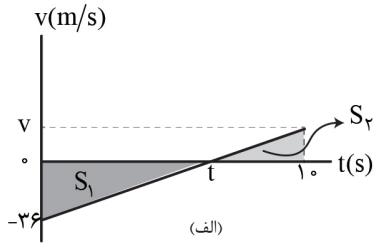
۲) ۱

۳) ۱-

۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

روش اول: گام اول) نمودار سرعت - زمان متحرک (شکل الف) و جابه‌جایی آن در ۱۰ ثانیه اول حرکت را داریم. از آن‌جا که مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t در یک بازه زمانی با اندازه جابه‌جایی متحرک در آن بازه زمانی است، می‌توان نوشت:



$$\Delta x = S_۲ - S_۱ \xrightarrow[S_۱=\frac{۳۶t}{۲}=۱۸t,\ S_۲=\frac{v(۱۰-t)}{۲}]{\Delta x=-۱۱۰m} -۱۱۰=\frac{v(۱۰-t)}{۲}-۱۸t \rightarrow -۱۱۰=۵v-\frac{vt}{۲}-۱۸t \qquad (۱)$$

گام دوم) همان‌طور که می‌بینید، نه V را داریم و نه t را! با کمی دقت در شکل (الف)، می‌بینیم که دو مثلث رنگی شده متشابه‌اند. پس می‌توانیم از تشابه این دو مثلث، استفاده کنیم.

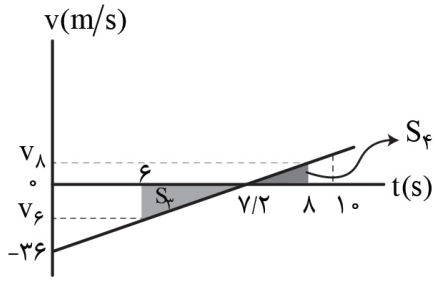
$$\frac{۳۶}{t}=\frac{v}{۱۰-t} \rightarrow v=\frac{۳۶\times(۱۰-t)}{t} \qquad (۲)$$

گام سوم) حالا می‌توانیم رابطه (۲) را در رابطه (۱) جای‌گذاری کنیم و مقدار t را پیدا کنیم.

$$-۱۱۰=\frac{۱۸۰}{\cancel{۵}\times\cancel{۳۶}\times(۱۰-t)}{t}-\frac{\frac{\cancel{۱۸}}{\cancel{۳۶}}\times(۱۰-t)\times\cancel{t}^{۱}}{\cancel{t}}-۱۸t \rightarrow -۱۱۰=\frac{\frac{۱۸۰۰}{t}-۱۸۰}{t}-۱۸۰+۱۸t-۱۸t$$

$$\rightarrow -۱۱۰=\frac{۱۸۰۰}{t}-۳۶۰=۲۵۰=\frac{۱۸۰۰}{t} \rightarrow t=\frac{۱۸۰۰}{۲۵۰}=۷/۲s$$

گام چهارم) اصلا سوال چه می‌خواست؟! سوال سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیه چهارم، یعنی از لحظه $t_۱=۶s$ تا لحظه $t_۲=۸s$ را می‌خواهد. برای محاسبه سرعت متوسط متحرک در این بازه زمانی، به جابه‌جایی آن در این بازه زمانی نیاز داریم که این جابه‌جایی را با استفاده از مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t در این بازه زمانی (شکل ب) می‌توانیم حساب کنیم.



$$\Delta x' = S_۴ - S_۳ \rightarrow \Delta x' = \frac{(\cancel{۸}^{۰/۸}-\cancel{۷/۲})\times V_۸}{۲}-\frac{(\cancel{۷/۲}^{۱/۲}-۶)\times|V_۶|}{۲}=۰/۴V_۸-۰/۶|V_۶| \qquad (۳)$$

گام پنجم) دوباره با کمبود اطلاعات مواجه شدیم! $V_۶$ و $V_۸$ را نداریم! ولی از تشابه مثلث‌ها می‌توانیم پیدا کنیم.

$$\frac{v_۶}{\cancel{۷/۲}^{۱/۲}-۶}=\frac{۳۶}{۷/۲} \xrightarrow{v_۶<۰} v_۶=-۶\frac{m}{s} \ ,\ \frac{v_۸}{\cancel{۸}^{۰/۸}-\cancel{۷/۲}}=\frac{|v_۶|}{\cancel{۷/۲}^{۱/۲}-۶} \xrightarrow[v_۸>۰]{|v_۶|=۶\frac{m}{s}} v_۸=۴\frac{m}{s}$$

گام ششم) رسیدیم به ته خط! مقدارهای $v_۶$ و $v_۸$ را در رابطه (۳) جای‌گذاری می‌کنیم تا جابه‌جای متحرک در ۲ ثانیه چهارم $(\Delta x')$ سپس سرعت متوسط آن در این مدت زمان به دست می‌آوریم و بالاخره تمام!

$$\Delta x' = ۰/۴ v_۸ - ۰/۶ |v_۶| \xrightarrow[|v_۶|=۶\frac{m}{s}]{v_۸=۴\frac{m}{s}} \Delta x' = \cancel{۰/۴\times۴}^{۱/۶} - \cancel{۰/۶\times۶}^{۳/۶} = -۲m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۲s]{\Delta x' = -۲m} v_{av} = -۱\frac{m}{s}$$

روش دوم: سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ نخست که برابر با سرعت لحظهٔ وسط این بازه یعنی سرعت $t = ۵s$ برابر است با:

$$V_{۵s} = \frac{\Delta x(۰,۱۰s)}{\Delta t} = \frac{-۱۱۰}{۱۰} = -۱۱ m/s$$

با استفاده از سرعت اولیه، شتاب ومعادله حرکت را می نویسیم:

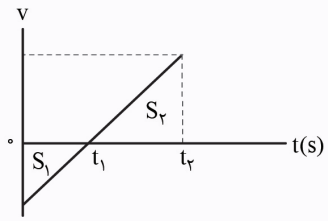
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{۵s} - v_۰}{\Delta t} = \frac{-۱۱-(-۳۶)}{۵} = \frac{۲۵}{۵} = ۵ m/s^۲$$
$$v = at + v_۰ \rightarrow v = ۵t - ۳۶$$

سرعت متوسط در دوثانیهٔ چهارم برابر سرعت لحظهٔ وسط این بازهٔ یعنی سرعت لحظهٔ $t = ۷s$ است پس:

$$v_{ar(۷s,۸s)} = v_{۷s} = ۵(۷) - ۳۶ = -۱m - = /s$$

درسنامه

مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان متحرک و محور t در یک بازه زمانی، برابر با اندازه جابه‌جایی متحرک در آن بازه زمانی است. اگر نمودار سرعت - زمان متحرک بالای محور t باشد. جابه‌جایی متحرک مثبت و اگر پایین محور t باشد، جابه‌جایی آن منفی است.



$$\begin{cases} t_۱ \text{ تا } ۰ : \text{جابه‌جایی در بازه زمانی صفر تا } \Delta x_۱ = -S_۱ \\ t_۲ \text{ تا } t_۱ : \text{جابه‌جایی در بازه زمانی صفر تا } \Delta X_۲ = s_۲ \end{cases} \Rightarrow t_۲ \text{ تا } ۰ : \text{جابه‌جایی در بازه زمانی صفر تا } \Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = -S_۱ + S_۲$$

۸. متحرکی با شتاب ثابت روی محور x در حال حرکت است. سرعت متحرک در مبدأ مکان و در مکان $x = ۱۰m$ به ترتیب $-۳\frac{m}{s}$ و $۲۵/۲\frac{km}{h}$ است. بردار سرعت متحرک در چه مکانی بر حسب متر تغییر جهت می‌دهد؟

۱) $+۲/۵$ ۲) $-۲/۵$ ۳) $+۲/۲۵$ ۴) $-۲/۲۵$

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

گام اول) در مکانی که متحرک تغییر جهت می‌دهد، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت می‌دهد. پس باید ببینیم که سرعت متحرک در چه مکانی صفر می‌شود. چون سرعت متحرک در دو مکان مختلف را داریم، پس می‌توانیم از رابطه مستقل از زمان استفاده کنیم.

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a\Delta x \xrightarrow[v_۱ = -۳\frac{m}{s}, \Delta x = ۱۰-۰ = ۱۰m]{v_۲ = ۲۵/۲\frac{km}{h} = ۷\frac{m}{s}} \cancel{۴۹}^{x} - \cancel{(-۳)^۲}^{۹} = ۲a\times۱۰ \rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

گام دوم) دوباره از رابطه مستقل از زمان استفاده می‌کنیم و مکانی را که سرعت متحرک صفر می‌شود، پیدا می‌کنیم.

$$v_۳^۲ - v_۱^۲ = ۲a\Delta x' \xrightarrow[a = ۲\frac{m}{s^۲}]{v_۳ = ۰\frac{m}{s}, v_۱ = -۳\frac{m}{s}} \cancel{۰}^{۰} - \cancel{(-۳)^۲}^{۹} = \cancel{۲\times۲}^{۴}\Delta x' \xrightarrow{\Delta x' = x' - ۰ = x'} x' = -۲/۲۵m$$

درسنامه

اگر سرعت متحرکی که با شتاب ثابت a بر روی خط راست حرکت می‌کند، در مکان $x_۱$ برابر با $v_۱$ و در مکان $x_۲$ برابر با $v_۲$ باشد، رابطه بین آن‌ها به صورت زیر است که به آن رابطه مستقل از زمان می‌گوییم.

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a(x_۲ - x_۱)$$

۹. متحرکی با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند. اگر جابه‌جایی متحرک در دو ثانیه سوم حرکت $+۶۰\vec{i}(m)$ و جابه‌جایی آن در چهار ثانیه سوم حرکت $-۸۰\vec{i}(m)$ باشد، تندی متوسط آن در ده ثانیه نخست حرکت، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۲ ۳) ۳۰ ۴) ۳۴

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

جابه‌جایی متحرک در دو ثانیه سوم و چهار ثانیه سوم حرکت را داریم؛ بنابراین از رابطه جابه‌جایی در t ثانیه nام استفاده می‌کنیم و داده‌ها را در آن جای‌گذاری می‌کنیم.

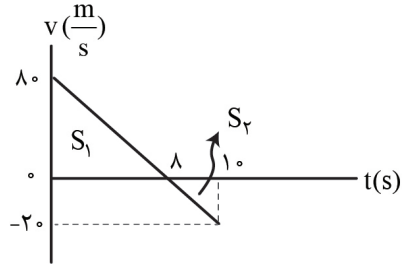
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲n-۱)t^{۲}+v_{۰}t \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{n=۳,t=۲s,\Delta x=۶۰m} ۶۰=\frac{۱}{۲}a(\cancel{۲\times۳-۱}^{\,۵})\times\cancel{۲}^{\,۴}+۲v_{۰} \rightarrow ۶۰=۱۰a+۲v_{۰} \\ \xrightarrow{n=۳,t=۴s,\Delta x'=-۸۰m} -۸۰=\frac{۱}{۲}a(\cancel{۲\times۳-۱}^{\,۵})\times\cancel{۴}^{\,۱۶}+۴v_{۰} \rightarrow -۸۰=۴۰a+۴v_{۰} \end{cases}$$

$$\rightarrow a=-۱۰\frac{m}{s^{۲}}, v_{۰}=۸۰\frac{m}{s}$$

تندی متوسط متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکت را می‌خواهیم. بهترین روش برای محاسبه آن، رسم نمودار سرعت - زمان متحرک است. چون با استفاده از مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t، می‌توانیم مسافت طی شده توسط متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکت و در نتیجه تندی متوسط آن در این مدت زمان را به دست بیاوریم.

$$v=at+v_{۰} \xrightarrow[V_{۰}=۸۰\frac{m}{s}]{a=-۱۰\frac{m}{s^{۲}}} v=-۱۰t+۸۰$$

$$v=-۱۰t+۸۰ \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{v=۰\frac{m}{s}} ۰=-۱۰t+۸۰ \rightarrow t=۸s \\ \xrightarrow{t=۱۰s} v=-۱۰\times۱۰+۸۰=-۲۰\frac{m}{s} \end{cases}$$



$$\ell=S_{۱}+S_{۲} \rightarrow \ell=\frac{۸۰\times\cancel{۸}^{\,۴}}{\cancel{۲}_{۱}}+\frac{۲۰\times(\cancel{۱۰-۸}^{\,۱})}{\cancel{۲}_{۱}}=۳۲۰+۲۰=۳۴۰m$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۱۰s]{l=۳۴۰m} S_{av}=\frac{۳۴۰}{۱۰}=۳۴\frac{m}{s}$$

درسنامه

۱) اگر متحرکی با شتاب ثابت a روی خط راست حرکت کند، جابه‌جایی آن در t ثانیه nام (مثلاً ۲ ثانیه سوم) از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲n-۱)t^{۲}+v_{۰}t$$
$$\downarrow$$
$$\text{سرعت اولیه}(\frac{m}{s})$$

۲) معادله سرعت - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت زیر است.

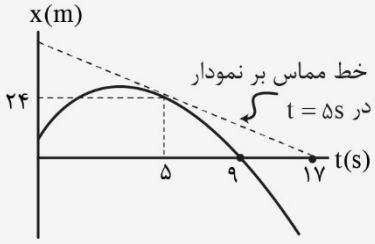
$$\text{سرعت در لحظه t}(\frac{m}{s}) \leftarrow v=a\,t+v_{۰}$$
$$\text{زمان(s)} \uparrow$$
$$\text{شتاب}(\frac{m}{s^{۲}}) \downarrow \quad \downarrow \text{سرعت اولیه}(\frac{m}{s})$$

تست‌درتست متحرکی در لحظه $t=0s$ با شتاب ثابت از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. جابه‌جایی این متحرک در n ثانیه سوم، چند برابر جابه‌جایی در n ثانیه دوم است؟ (ریاضی نوبت اول - ۱۴۰۳)

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $2n$

پاسخ: گزینه ۱

۱۰. نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به شکل سهمی زیر است. مکان اولیه متحرک در SI کدام است؟



۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

از آن‌جا که شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان متحرک در هر لحظه، برابر با سرعت متحرک در آن لحظه است، پس شیب خط مماس بر نمودار در لحظه $t=5s$ برابر با سرعت متحرک در این لحظه است.

$$t=5s\text{ شیب خط مماس بر نمودار در لحظه}=V_{(t_1=5s)}=\frac{0-24}{17-5}=-2\frac{m}{s}$$

چه اطلاعات دیگری می‌توانیم از دل این نمودار بیرون بکشیم؟ جابه‌جایی متحرک از لحظه $t_1=5s$ تا لحظه $t_2=9s$ را داریم؛ پس با کمک معادله مکان - زمان متحرک، می‌توانیم شتاب آن (a) را به دست بیاوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_{(t_1=5s)}t+x_{(t_1=5s)} \xrightarrow[v_{(t_1=5s)}=-2\frac{m}{s},\ t=t_2-t_1=9-5=4s]{x=0m,\ x_{(t_1=5s)}=24m} 0=\frac{1}{2}a\times 16-2\times 4+24\rightarrow 8a=-16\rightarrow a=-2\frac{m}{s^2}$$

حالا که کمی اطلاعات از این متحرک به دست آوردیم، به سراغ خواسته سوال، یعنی مکان اولیه متحرک (x_0) می‌رویم. اگر به نمودار مکان - زمان متحرک نگاه کنید، می‌بینید که مکان متحرک در لحظه‌های $t_1=5s$ و $t_2=9s$ را داریم. شتاب متحرک (a) را هم که الان پیدا کردیم، اگر سرعت اولیه متحرک (V_0) را هم داشته باشیم، کافی است که مکان‌ها (مثلاً مکان متحرک در لحظه $t_1=5s$) را در معادله مکان - زمان متحرک جای‌گذاری کنیم و مکان اولیه آن (x_0) را به دست بیاوریم.

$$v_{(t_1=5s)}=at+v_0 \xrightarrow[t_1=5s]{v_{(t_1=5s)}=-2\frac{m}{s},\ a=-2\frac{m}{s^2}} -2=-2\times 5+V_0\rightarrow V_0=8\frac{m}{s}$$

$$x_{(t_1=5s)}=\frac{1}{2}at_1^2+v_0t_1+x_0 \xrightarrow[t_1=5s,\ v_0=8\frac{m}{s}]{x_{(t_1=5s)}=24m,\ a=-2\frac{m}{s^2}} 24=\frac{1}{2}\times(-2)\times 25+40+x_0\rightarrow 24=-25+40+x_0\rightarrow x_0=9m$$

۱۱. اتومبیلی با سرعت ثابت $72\frac{km}{h}$ روی مسیر مستقیمی حرکت می‌کند. ناگهان راننده مانعی را در فاصله‌ی ۴۶ متری می‌بیند و با شتاب ثابت ترمز می‌گیرد. اگر مدت زمان ترمز گرفتن ۱۵ برابر مدت زمان واکنش راننده و مسافت طی شده هنگام ترمز ۱۰/۵ برابر مسافت طی شده در زمان واکنش باشد، چه اتفاقی برای اتومبیل رخ می‌دهد؟

۱) دقیقاً مقابل مانع متوقف می‌شود.
۲) با تندی $28/8\frac{km}{h}$ به مانع برخورد می‌کند.
۳) در فاصله ۶ متری مانع متوقف می‌شود.
۴) با تندی $14/4\frac{km}{h}$ به مانع برخورد می‌کند.

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

اول باید ببینیم که اتومبیل به مانع برخورد می‌کند یا نه؟! اگر اتومبیل به مانع برخورد نکند، باید تندی آن قبل از برخورد به مانع صفر شود ($v_۲=۰\frac{m}{s}$)، از آن‌جا که اتومبیل در ابتدا با سرعت ثابت (مدت زمان واکنش راننده) سپس با شتاب ثابت (مدت زمان ترمز گرفتن راننده) حرکت می‌کند، پس تندی اتومبیل در هنگامی که راننده با شتاب ثابت در حال ترمز گرفتن است، صفر می‌شود. چون شتاب اتومبیل را نداریم، پس از رابطه مستقل از شتاب استفاده می‌کنیم.

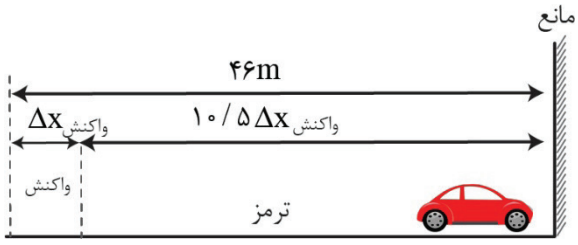
$$\frac{v_۱+v_۲}{۲}=\frac{\Delta x_{\text{ترمز}}}{\Delta t_{\text{ترمز}}} \xrightarrow[v_۲=۰\frac{m}{s},\ \Delta x_{\text{ترمز}}=۱۰/۵\Delta x_{\text{واکنش}}]{v_۱=۷۲\frac{km}{h}=۲۰\frac{m}{s}} \frac{۲۰+۰}{۲}=\frac{۱۰/۵\Delta x_{\text{واکنش}}}{\Delta t_{\text{ترمز}}} \rightarrow \Delta t_{\text{ترمز}}=۱/۰۵\Delta x_{\text{واکنش}}$$

$$\xrightarrow{\Delta x_{\text{واکنش}}=v_۱\Delta t_{\text{واکنش}}=۲۰\Delta t_{\text{واکنش}}} \Delta t_{\text{ترمز}}=۱/۰۵\times۲۰\Delta t_{\text{واکنش}} \rightarrow \Delta t_{\text{ترمز}}=۲۱\Delta t_{\text{واکنش}}$$

این یعنی این اگر قرار باشد اتومبیل قبل از رسیدن به مانع بایستد، باید مدت زمان ترمز گرفتن، ۲۱ برابر مدت زمان واکنش راننده ($\Delta t_{\text{ترمز}}=۲۱\Delta t_{\text{واکنش}}$) باشد؛ در صورتی که طبق سوال، مدت زمان ترمز گرفتن، ۱۵ برابر مدت زمان واکنش راننده ($\Delta t_{\text{ترمز}}=۱۵\Delta t_{\text{واکنش}}$) است. پس به مدت زمان بیشتری برای ترمز گرفتن نیاز است تا اتومبیل قبل از برخورد به مانع بایستد و در نتیجه، اتومبیل قبل از برخورد به مانع نمی‌ایستد و به مانع برخورد می‌کند. ۱ و ۳ پَرا!

پس حالا سوال را با دانستن این‌که اتومبیل به مانع برخورد می‌کند، حل می‌کنیم.

یک شکل مناسب رسم می‌کنیم و هریک از مسافت‌های طی شده در مدت زمان‌هایی که اتومبیل با سرعت ثابت و شتاب ثابت حرکت می‌کند، مشخص می‌کنیم.



$$\Delta x_{\text{واکنش}}+\Delta x_{\text{ترمز}}=۴۶m \rightarrow \Delta x_{\text{واکنش}}+۱۰/۵\Delta x_{\text{واکنش}}=۴۶ \rightarrow ۱۱/۵\Delta x_{\text{واکنش}}=۴۶ \rightarrow \Delta x_{\text{واکنش}}=۴m$$

$$\Delta x_{\text{ترمز}}=۱۰/۵\Delta x_{\text{واکنش}} \xrightarrow{\Delta x_{\text{واکنش}}=۴m} \Delta x_{\text{ترمز}}=۱۰/۵\times۴=۴۲m$$

در زمان واکنش راننده اتومبیل با سرعت ثابت حرکت می‌کند. پس با استفاده از معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت، مدت زمان واکنش را می‌توانیم حساب کنیم.

$$\Delta x_{\text{واکنش}}=v_۱\Delta t_{\text{واکنش}} \xrightarrow[v_۱=۲۰\frac{m}{s}]{\Delta x_{\text{واکنش}}=۴m} \not{۴}^{۲}=\not{۲۰}^{۱۰}\Delta t_{\text{واکنش}} \rightarrow \Delta t_{\text{واکنش}}=۰/۲s$$

$$\Delta t_{\text{ترمز}}=۱۵\Delta t_{\text{واکنش}} \xrightarrow{\Delta t_{\text{واکنش}}=۰/۲s} \Delta t_{\text{ترمز}}=۱۵\times۰/۲=۳s$$

در گزینه‌های سوال می‌بینیم که باید به دنبال تندی برخورد اتومبیل به مانع باشیم. شتاب متحرک را نداریم؛ پس از رابطه مستقل از شتاب استفاده می‌کنیم و تندی برخورد اتومبیل به مانع را به دست می‌آوریم.

$$\frac{v_۱+v_{\text{برخورد}}}{۲}=\frac{\Delta x_{\text{ترمز}}}{\Delta t_{\text{ترمز}}} \xrightarrow[\Delta t_{\text{ترمز}}=۳s]{v_۱=۲۰\frac{m}{s},\ \Delta x_{\text{ترمز}}=۴۲m} \frac{۲۰+v_{\text{برخورد}}}{۲}=\frac{\not{۴۲}^{۱۴}}{\not{۳}} \rightarrow v_{\text{برخورد}}=۸\frac{m}{s}=۲۸/۸\frac{km}{h}$$

درسنامه

اگر سرعت متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند، در لحظه $t_۱$ و مکان $x_۱$ برابر با $v_۱$ و در لحظه $t_۲$ و مکان $x_۲$ برابر با $v_۲$ باشد، رابطه زیر که به آن رابطه مستقل از شتاب می‌گوییم، برقرار است.

$$\frac{v_۱+v_۲}{۲}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}$$

۱۲ . متحرک A با سرعت ثابت $(+۲۰\frac{m}{s})\vec{i}$ روی محور x در حال حرکت است و در لحظه‌ی $t=۰$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند. متحرک B در لحظه‌ی $t=۱۰s$ از حال سکون با شتاب ثابت روی محور x شروع به حرکت می‌کند و در مدت زمان ۶ ثانیه سرعتش را به $(۳۰\frac{m}{s})\vec{i}$ می‌رساند و پس از آن با سرعت ثابت به حرکت ادامه می‌دهد. دو متحرک در چه مکانی بر حسب متر از کنار یک‌دیگر عبور می‌کنند؟

۱) ۶۶۰ ۲) ۷۸۰ ۳) ۸۴۰ ۴) ۹۶۰

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

اگر ۶ ثانیه از حرکت متحرک B بگذرد، متحرک A به مدت $۱۶=(۶+۱۰)$ ثانیه حرکت کرده است. مکان متحرک A را با کمک معادله مکان - زمان آن و مکان متحرک B را به کمک رابطه مستقل از شتاب به دست می‌آوریم.

$$x_A = v_A t_A + x_{۰,A} \xrightarrow[x_{۰,A}=۰m]{v_A=۲۰\frac{m}{s}, t_A=۱۶s} x_A = ۲۰\times ۱۶ + ۰ = ۳۲۰m$$

$$\frac{v_{۰,B}+v_B}{۲} = \frac{x_B - x_{۰,B}}{t_۲ - t_۱} \xrightarrow[x_{۰,B}=۰m, t_۲=۶s, t_۱=۰s]{v_{۰,B}=۰\frac{m}{s}, v_B=۳۰\frac{m}{s}} \frac{۰+۳۰}{۲} = \frac{x_B - ۰}{۶-۰} \rightarrow x_B = ۹۰m$$

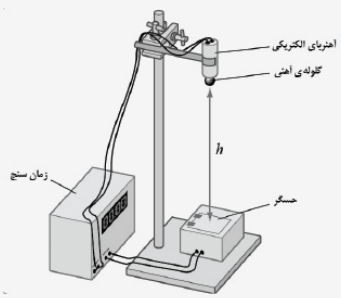
از این لحظه به بعد، متحرک B با سرعت ثابت حرکت می‌کند. وقتی که دو متحرک به هم می‌رسند، در مکان یکسانی قرار می‌گیرند. پس معادله مکان - زمان دو متحرک پس از این لحظه را می‌نویسیم و مساوی با هم قرار می‌دهیم تا لحظه‌ای را که به هم می‌رسند، پیدا کنیم.

$$x'_A = x'_B \rightarrow v_A t + x_A = v_B t + x_B \xrightarrow[v_B=۳۰\frac{m}{s}, x_B=۹۰m]{v_A=۲۰\frac{m}{s}, x_A=۳۲۰m} ۲۰t + ۳۲۰ = ۳۰t + ۹۰ \rightarrow t = ۲۳s$$

سوال مکانی را که دو متحرک به هم می‌رسند، می‌خواهد که برای محاسبه آن کافی است لحظه $t=۲۳s$ را در یکی از معادله‌های مکان - زمان دو متحرک (مثلاً A) جای‌گذاری کنیم.

$$x'_A = v_A t + x_A \xrightarrow[x_A=۳۲۰m]{v_A=۲۰\frac{m}{s}, t=۲۳s} x'_A = \overset{۴۶۰}{\cancel{۲۰\times ۲۳}} + ۳۲۰ = ۷۸۰m$$

۱۳ . شکل زیر اسباب انجام آزمایش ساده‌ای برای اندازه‌گیری شتاب گرانش را نشان می‌دهد. با توجه به داده‌های $h=۱۹/۸m$ و $t=۲/۰s$ که از یک آزمایش توسط این دستگاه به دست آمده است، بزرگی شتاب گرانش در محل این آزمایش در SI کدام است؟



۱) ۹/۸
۲) ۹/۹
۳) ۱۰/۰
۴) ۹/۷

پاسخ: گزینه ۲ ساده | محاسباتی

کافی است رابطه‌ی $y=-\frac{۱}{۲}gt^۲$ استفاده کنیم تا شتاب گرانش در محل آزمایش به دست بیاید:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow -۱۹/۸ = -\frac{۱}{۲}g(۲)^۲ \Rightarrow g = ۹/۹\frac{m}{s^۲}$$

درسنامه

معادله‌های سقوط آزاد بدون سرعت اولیه را در جدول زیر آورده‌ایم (جهت مثبت محور y را رو به بالا فرض کردیم).

معادله	رابطه
مکان - زمان	$y=-\frac{1}{2}gt^2+y_0$ (مکان اولیه جسم (m) → ، مکان جسم (m) ←، شتاب گرانش $(\frac{m}{s^2})$ ↑، زمان (s) ↓)
سرعت - زمان	$v=-gt$
مستقل از زمان	$v^2=-2g\Delta y$

۱۴. گلوله‌ای از ارتفاع h بالای سطح زمین از حال سکون رها می‌شود. اگر گلوله در ثانیهٔ آخر حرکتش تا لحظهٔ برخورد به سطح زمین، مسافت ۳۰m را طی کرده باشد، ارتفاع h بر حسب متر کدام است؟ ($g=10\frac{m}{s^2}$ و از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)

۱) ۶۱/۲۵ ۲) ۴۵ ۳) ۷۱/۲۵ ۴) ۸۰

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

روش اول: اگر کل زمان سقوط گلوله را t در نظر بگیریم، مسافت طی شده توسط گلوله در ثانیه آخر برابر اندازه‌ی جابه‌جایی گلوله در بازه‌ی زمانی $(t-1)$ تا t است.

بنابراین:

$$|y_t-y_{(t-1)}|=|-\frac{1}{2}gt^2-(-\frac{1}{2}g(t-1)^2)|=\frac{1}{2}g|t^2-2t+1-t^2|$$

$$=5(2t-1)\xrightarrow{|y_t-y_{(t-1)}|=30m}5(2t-1)=30\Rightarrow 2t-1=6\Rightarrow t=3/5s$$

حالا ارتفاع سقوط را حساب می‌کنیم:

$$y=-\frac{1}{2}gt^2=-\frac{1}{2}\times5\times(3/5)^2=-61/25m\Rightarrow h=|y|=61/25m$$

روش دوم: با استفاده از سرعت متوسط متحرک در یک ثانیه‌ی آخر، سرعت وسط این بازه و زمان سقوط را به دست می‌آوریم:

$$V_{(t-1,t)}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{-30}{1}=-30\frac{m}{s}\xrightarrow{\frac{t-1+t}{2}=t-0/5}V_{t-0/5}=-30\frac{m}{s}$$

$$V=-gt\Rightarrow -30=-10(t-0/5)\Rightarrow t=3/5s$$

حالا ارتفاع h را به دست می‌آوریم: $y=-\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow y=-5(3/5)^2=-61/25m\Rightarrow h=|y|=61/25m$

۱۵. گلولهٔ A از ارتفاع ۱۲۰ متری سطح زمین از حال سکون رها می‌شود. پس از ۱/۵ ثانیه از لحظهٔ رها شدن گلولهٔ A، گلولهٔ B از همان ارتفاع از حال سکون رها می‌شود. چند ثانیه پس از رها شدن گلولهٔ B، فاصلهٔ دو گلوله از یک‌دیگر به ۵۶/۲۵m می‌رسد؟ ($g=10\frac{m}{s^2}$ و از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.)

۱) ۴/۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۳ سخت | محاسباتی

معادله‌ی مکان - زمان دو گلوله را می‌نویسیم. چون گلوله‌ی B، به مدت ۱/۵ ثانیه دیرتر از گلوله‌ی A رها شده است در معادله‌ی حرکت آن به جای t از $t-1/5s$ استفاده می‌کنیم:

$$y=-\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \begin{cases} y_A=-5t^2 \\ y_B=-5(t-1/5)^2 \end{cases}$$

فاصله‌ی دو گلوله یعنی y_B-y_A را برابر $56/25m$ قرار می‌دهیم تا لحظه‌ای که فاصله به این مقدار می‌رسد به دست بیاید.

$$y_B-y_A=56/25 \Rightarrow -5(t-1/5)^2-5t^2=56/25 \Rightarrow 15t-11/25=56/25 \Rightarrow 15t=67/5 \Rightarrow t=4/5s$$

سوال مدت سقوط گلوله‌ی B تا این لحظه را می‌خواهد که برابر است با:

$$t'=t-1/5=4/5-1/5=3s$$

آزمون‌های ماراتون

فیزیک دوازدهم | ۲۹ آبان‌ماه ۱۴۰۴

۱. یک سیب از شاخه درخت آویزان است. واکنش نیروی وزن سیب به چه جسمی و در چه جهتی وارد می‌شود؟

۱) شاخه درخت - از شاخه به سمت سیب
۲) کره زمین - از مرکز کره زمین به سمت سیب
۳) شاخه درخت - از سیب به سمت شاخه
۴) کره زمین - از سیب به سمت مرکز کره زمین

پاسخ: گزینه ۲ ساده | مفهومی

وزن سیب نیروی گرانشی است که از طرف کره‌ی زمین بر آن وارد می‌شود و جهت آن به سمت مرکز کره‌ی زمین است. پس واکنش این نیرو طبق قانون سوم نیوتون، از طرف سیب بهکره‌ی زمین وارد می‌شود و جهت آن از مرکز کره زمین به سمت سیب است.

درسنامه

قانون اول نیوتون: یک جسم، حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را حفظ می‌کند مگر آن‌که نیروی خالصی (غیرصفر) به آن وارد شود. به عبارت دیگر وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند، اگر جسم ساکن باشد، همچنان ساکن باقی می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد، سرعت جسم تغییر نمی‌کند و با همان سرعت به حرکت خود ادامه می دهد.

قانون دوم نیوتون: هرگاه بر جسمی نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم دارد و در همان جهت نیروی خالص است و با جرم جسم نسبت وارون دارد. $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$

قانون سوم نیوتون: هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم نیز به جسم اول نیرویی هم‌اندازه و هم‌راستا اما در خلاف جهت وارد می‌کند.

$\vec{F}_{۱۲} = -\vec{F}_{۲۱} \Rightarrow F_{۱۲} = F_{۲۱}$

۲. جسمی به جرم ۵kg تحت تأثیر سه نیروی $\vec{F}_۱ = (+۵\,N)\vec{i}$، $|\vec{F}_۲| = ۸\,N$ و $|\vec{F}_۳| = ۱۲\,N$ با سرعت ثابت $(+۶\frac{m}{s})\vec{i}$ روی محور x در حال حرکت است. اگر نیروی $\vec{F}_۱$ حذف شود، تندی جسم ۳ ثانیه پس از حذف این نیرو به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟

۱) ۳/۶ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲ ساده | محاسباتی

چون در ابتدا جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، طبق قانون اول نیوتون، نیروهای وارد بر آن متوازن‌اند و نیروی خالص وارد بر آن صفر است.

$\vec{F}_{net} = ۰$

با حذف نیروی $\vec{F}_۱$، نیروهای $\vec{F}_۲$ و $\vec{F}_۳$ به جسم وارد می‌شوند که همان‌طور که در زیر حساب کردیم، نیروی خالص $(-۵\,N)\vec{i}$ است.

$$\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ + \vec{F}_۳ = ۰ \rightarrow \vec{F}_۲ + \vec{F}_۳ = -\vec{F}_۱ \xrightarrow{\vec{F}_۱ = (۵\,N)\vec{i}} \vec{F}_۲ + \vec{F}_۳ = (-۵\,N)\vec{i}$$

در این حالت، چون جسم با سرعت ثابت $۶\frac{m}{s}$ در جهت محور x حرکت می‌کند و نیروی خالص $۵N$ در خلاف جهت محور x به آن وارد می‌شود، پس حرکت جسم ابتدا کندشونده و در جهت محور x سپس تندشونده و در خلاف جهت محور x خواهد شد.

سوال تندی جسم را ۳ ثانیه پس از نیروی $\vec{F}_۱$ می‌خواهد. اگر معادله‌ی سرعت – زمان جسم را بنویسیم، می‌توانیم تندی آن در این لحظه را حساب کنیم. برای نوشتن معادله‌ی سرعت – زمان جسم، به شتاب آن نیاز داریم که با کمک قانون دوم نیوتون آن را به دست می‌آوریم.

$$\vec{F}'_{net} = m\vec{a} \xrightarrow[m=۵kg]{\vec{F}'_{net} = (-۵\,N)\vec{i}} -۵\vec{i} = ۵\vec{a} \rightarrow \vec{a} = (-۱\frac{m}{s^۲})\vec{i}$$

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[t=۳s,\, v_۰ = ۶\frac{m}{s}]{a = -۱\frac{m}{s^۲}} v = -۱\times ۳ + ۶ = ۳\frac{m}{s} \Rightarrow |v| = ۳\,m/s$$

درسنامه

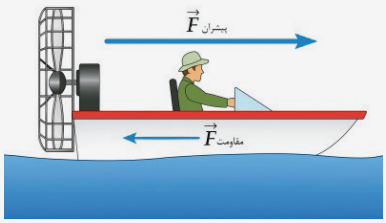
معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت زیر است.

$$v = a\,t + v_{\circ} \quad \left(\frac{m}{s}\right)\text{سرعت در لحظه‌ی } t \leftarrow v = a\,t + v_{\circ} \rightarrow \left(\frac{m}{s}\right)\text{سرعت اولیه}$$

t: زمان (s) ↑

a: شتاب $\left(\frac{m}{s^2}\right)$ ↓

۳. مطابق شکل یک قایق موتوری که جرم آن همراه سرنشین ۴۰۰kg می‌باشد، تحت نیروی پیشران ثابت به بزرگی ۲۱۰۰N از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از طی مسافت ۴۰۰ متر روی خط راست به تندی $۶۰\frac{m}{s}$ می‌رسد. اگر نیروی مقاومت وارد بر قایق ثابت در نظر گرفته شود، بزرگی این نیرو چند نیوتون است؟



۱) ۱۰۰

۲) ۲۰۰

۳) ۳۰۰

۴) ۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

گام اول) اگر نیروی خالص وارد بر مجموعه‌ی قایق و سرنشین $(\vec{F}_{net})$ را داشته باشیم، می‌توانیم نیروی مقاومت وارد بر قایق $(\vec{F}_{\text{مقاومت}})$ را پیدا کنیم. جرم قایق به همراه سرنشین آن (m) را داریم؛ پس اگر شتاب قایق (a) را هم داشته باشیم، می‌توانیم نیروی خالص وارد بر مجموعه‌ی قایق و سرنشین $(\vec{F}_{net})$ را طبق قانون دوم نیوتون $(F_{net} = ma)$ به دست بیاوریم. با استفاده از رابطه‌ی سرعت – جابه‌جایی، شتاب قایق (a) را حساب می‌کنیم.

$$v^2 - v_{\circ}^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[\Delta x = 400\,m]{v = 60\frac{m}{s},\ v_{\circ} = 0} 60^2 - 0^2 = 2a \times 400 \rightarrow a = \frac{9}{2}\frac{m}{s^2}$$

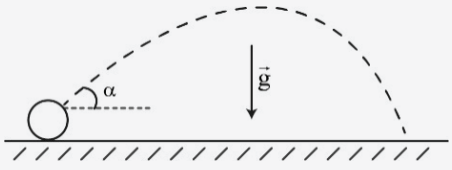
گام دوم) حالا می‌توانیم نیروی خالص وارد بر مجموعه‌ی قایق و سرنشین $(\vec{F}_{net})$ را به دست بیاوریم.

$$F_{net} = ma \xrightarrow[a = \frac{9}{2}\frac{m}{s^2}]{m = 400\,kg} F_{net} = \overset{200}{\cancel{400}} \times \frac{9}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 1800\,N$$

گام سوم) طبق شکل داده شده در صورت سوال، نیروی پیشران و نیروی مقاومت وارد بر قایق، هم‌راستا و در خلاف جهت یک‌دیگر هستند، بنابراین بزرگی نیروی خالص وارد بر مجموعه‌ی قایق و سرنشین (F_{net}) برابر با اختلاف این دو نیرو است.

$$F_{net} = F_{\text{پیشران}} - F_{\text{مقاومت}} \xrightarrow[F_{\text{پیشران}} = 2100\,N]{F_{net} = 1800\,N} 1800 = 2100 - F_{\text{مقاومت}} \rightarrow F_{\text{مقاومت}} = 300\,N$$

۴. مطابق شکل یک توپ در هوا از سطح زمین تحت زاویه α نسبت به افق پرتاب می‌شود. اگر بزرگی شتاب توپ در نقطه اوج آن $۱۲/۵\frac{m}{s^2}$ باشد، بزرگی نیروی مقاومت هوای وارد بر توپ در نقطه اوج چند برابر بزرگی وزن توپ است؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$



۱) $\frac{3}{4}$

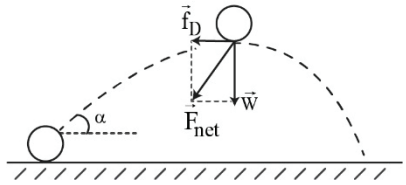
۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

گام اول) دو نیروی وزن $(\vec{W})$ و مقاومت هوا $(\vec{f}_D)$ بر توپ وارد می‌شود. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، در نقطه‌ی اوج، نیروی مقاومت هوا $(\vec{f}_D)$ به سمت چپ و نیروی وزن رو به پایین $(\vec{W})$ است. از آن‌جا که شتاب توپ $(\vec{a})$ هم‌جهت با نیروی خالص وارد بر آن $(\vec{F}_{net})$ است، می‌توان نوشت:



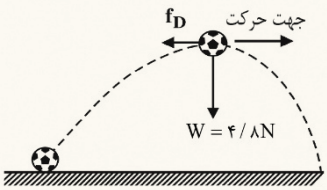
$$F_{net}^2 = f_D^2 + W^2 \xrightarrow[W=mg,\ g=10\frac{m}{s^2}]{F_{net}=ma,\ a=\frac{25}{2}\frac{m}{s^2}} (\frac{25}{2}m)^2 = f_D^2 + (10m)^2 \rightarrow f_D^2 = \frac{225}{4}m^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} f_D = \frac{15}{2}m$$

گام دوم) سوال نسبت اندازهٔ نیروی مقاومت هوا (f_D) به اندازهٔ وزن توپ (W) را می‌خواهد و ما هم حسابش می‌کنیم:

$$\frac{f_D}{mg} = \frac{\frac{15}{2}m}{10m} = \frac{3}{4}$$

تست‌درتست **شکل زیر، نیروهای وارد بر توپی را در بالاترین نقطه‌ی مسیرش نشان می‌دهد که در آن $\vec{f}_D$ نیروی مقاومت هوا و $\vec{W}$ وزن توپ است. اگر بزرگی شتاب در این لحظه $\frac{65}{6}\frac{m}{s^2}$ باشد، f_D چند نیوتون است؟ (از نیروهای دیگر وارد بر توپ صرف‌نظر کنید و $(g = 10\frac{m}{s^2})$**

(ریاضی ۹۹)



۱) ۱

۲) ۱/۵

۳) ۲

۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۳

---

۵. مطابق شکل دو شخص به جرم‌های $m_1 = 100kg$ و $m_2 = 50kg$ در یک سالن مسطح و صاف روی کفش‌های چرخ‌دار روبه‌روی یک‌دیگر ایستاده‌اند. اگر بزرگی شتابی که شخص (۱) می‌گیرد $2\frac{m}{s^2}$ باشد، بردار نیرویی که شخص (۱) به شخص (۲) وارد می‌کند در SI کدام است؟



۱) $+100\vec{i}$

۲) $-100\vec{i}$

۳) $+200\vec{i}$

۴) $-200\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۳ ساده | محاسباتی

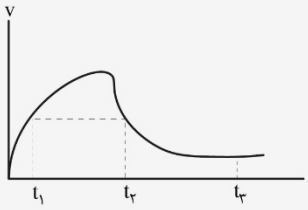
طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که شخص (۱) به شخص (۲) وارد می‌کند $(\vec{F}_{12})$ هم‌اندازه، هم‌راستا و در خلاف جهت نیرویی است که شخص (۲) به شخص (۱) وارد می‌کند $(\vec{F}_2)$.

$$F_{12}=F_{21}\xrightarrow[m_1=100kg,\ a_1=2\frac{m}{s^2}]{F_{21}=m_1a_1}F_{12}=100\times2=200N$$

۱ و ۲ پَرا

طبق شکل داده شده، نیرویی که شخص (۱) به شخص (۲) وارد می‌کند $(\vec{F}_{12})$ در جهت محور x است؛ پس بردار نیرویی که شخص (۱) به شخص (۲) وارد می‌کند، در SI به صورت $\vec{F}_{12}=200\vec{i}$ است.

۶. نمودار تندی یک چترباز که از یک بالگرد ساکن در راستای قائم سقوط کرده است، بر حسب زمان مطابق شکل زیر است. اگر بزرگی نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز در لحظه‌های t_1، t_2 و t_3 به‌ترتیب f_1، f_2 و f_3 باشد، کدام گزینه درست است؟



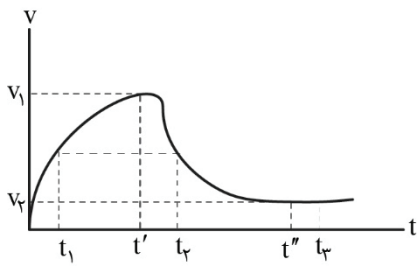
۱) $f_1=f_2>f_3$

۲) $f_1=f_2<f_3$

۳) $f_2>f_3>f_1$

۴) $f_1>f_2>f_3$

پاسخ: گزینه ۳ ساده | مفهومی

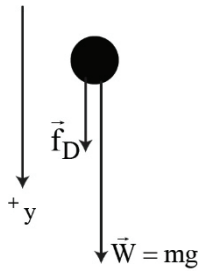


در نمودار تندی – زمان چترباز (شکل زیر) می‌بینیم که تندی چترباز از لحظه‌ی $t=0s$ تا لحظه‌ی t' افزایش می‌یابد و در لحظه‌ی t' به تندی ثابت v_1 می‌رسد. اندکی پس از این لحظه، تندی چترباز به‌طور ناگهانی کاهش می‌یابد و در لحظه‌ی t به تندی ثابت v_2 می‌رسد؛ بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که چترباز از لحظه‌ی $t=0s$ تا لحظه‌ی t با چتر بسته سقوط کرده است و چون تندی آن در این مرحله افزایش می‌یابد، پس وزن آن بزرگ‌تر از نیروی مقاومت هواست $(W>f_1)$. در ادامه، چترباز اندکی پس از لحظه‌ی t' چتر خود را باز کرده است و چون تندی آن تا لحظه‌ی t'' کاهش می‌یابد، پس وزن آن کوچک‌تر از نیروی مقاومت هوا است $(W<f_2)$. در ادامه، چون چترباز با تندی ثابت v_2 به حرکت خود ادامه می‌دهد، پس وزن آن هم اندازه با نیروی مقاومت هوا است $(W=f_3)$؛ بنابراین، مقایسه‌ی نیروی مقاومت هوا در لحظه‌های t_1, t_2, t_3 به صورت $f_2>f_3>f_1$ است.

۷. دو گلوله به جرم‌های $m_1=100g$ و $m_2=400g$ از سطح زمین با سرعت‌های اولیه یکسان $20\frac{m}{s}$ در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شوند. اگر بزرگی نیروی مقاومت هوای وارد بر هر دو گلوله تا رسیدن به ارتفاع اوج آن‌ها ثابت و یکسان فرض شود و ارتفاع اوج یکی از گلوله‌ها ۶ متر بیشتر از گلوله دیگر باشد، بیشترین ارتفاعی که ممکن است گلولهٔ سنگین‌تر به آن برسد، چند متر است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳ سخت | محاسباتی



دو نیروی وزن $(\vec{W})$ و مقاومت هوا $(\vec{f}_D)$ به گلوله وارد می‌شوند. وقتی گلوله‌ای را به سمت بالا پرتاب می‌کنیم، نیروی مقاومت هوای وارد بر آن به سمت پایین است. در این حالت با در نظر گرفتن جهت مثبت محور y به سمت پایین و طبق قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\rightarrow mg+f_D=ma\xrightarrow{\div m}a=g+\frac{f_D}{m}\quad(1)$$

طبق رابطه بالا، اگر نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گلوله یکسان باشد، گلوله‌ای که جرم آن بزرگ‌تر است، اندازه‌ی شتابش کوچک‌تر است. پس

چون جرم گلوله‌ی (۲) بزرگ‌تر از جرم گلوله‌ی (۱) است $(m_۲ > m_۱)$، اندازه‌ی شتاب گلوله‌ی (۲) کوچک‌تر از اندازه‌ی شتاب گلوله‌ی (۱) است $(a_۲ < a_۱)$. حالا با کمک رابطه‌ی مستقل از زمان، ارتفاع اوج دو گلوله را با هم مقایسه می‌کنیم. (جهت $+y$ را رو به پایین فرض کردیم).

$$v^۲ - v_۰^۲ = -۲ah \xrightarrow{v=۰\frac{m}{s}} v_۰^۲ = ۲ah \xrightarrow{v_{۰,۱}=v_{۰,۲}} ۲a_۱h_۱ = ۲a_۲h_۲ \rightarrow \frac{a_۱}{a_۲} = \frac{h_۲}{h_۱} \xrightarrow{a_۲<a_۱} h_۲ > h_۱$$

الان فهمیدیم که ارتفاع اوج گلوله‌ی (۲) بزرگ‌تر از ارتفاع اوج گلوله‌ی (۱) است. پس منظور سوال از این‌که ارتفاع اوج یکی از گلوله‌ها ۶ متر بیشتر از ارتفاع اوج گلوله‌ی دیگر است، $h_۲ - h_۱ = ۶m$ است. با کمک رابطه‌ی مستقل از زمان. ارتفاع اوج هریک از گلوله‌ها را بر حسب اندازه‌ی شتاب آن‌ها می‌نویسیم.

$$v_۰^۲ = ۲a_۱h_۱ \xrightarrow{v_۰=۲۰\frac{m}{s}} \cancel{۴۰۰} = ۲a_۱h_۱ \rightarrow h_۱ = \frac{۲۰۰}{a_۱}, \quad v_۰^۲ = ۲a_۲h_۲ \xrightarrow{v_۰=۲۰\frac{m}{s}} \cancel{۴۰۰} = ۲a_۲h_۲ \rightarrow h_۲ = \frac{۲۰۰}{a_۲}$$

$$h_۲ - h_۱ = ۶ \xrightarrow[h_۱=\frac{۲۰۰}{a_۱}]{h_۲=\frac{۲۰۰}{a_۲}} \frac{۲۰۰}{a_۲} - \frac{۲۰۰}{a_۱} = ۶ \rightarrow \cancel{۲۰۰}^{۱۰۰}\left(\frac{a_۱ - a_۲}{a_۱a_۲}\right) = \cancel{۶}^{۳} \rightarrow \frac{a_۱ - a_۲}{a_۱a_۲} = \frac{۳}{۱۰۰} \qquad (۲)$$

همان‌طور که می‌بینید باید از شر $a_۱$ و $a_۲$ خلاص شویم. برای این کار، دست به دامن رابطه‌ی (۱) می‌شویم و اندازه‌ی شتاب هریک از گلوله‌ها را بر حسب نیروی مقاومت هوا $(\vec{f}_D)$ می‌نویسیم (جهت $+y$ را رو به پایین فرض کردیم).

$$a_۱ = g + \frac{f_D}{m_۱} \xrightarrow[m_۱=۰/۱kg]{g=۱۰\frac{m}{s^۲}} a_۱ = ۱۰ + \frac{f_D}{۰/۱} = ۱۰ + ۱۰f_D$$

$$a_۲ = g + \frac{f_D}{m_۲} \xrightarrow[m_۲=۰/۴kg]{g=۱۰\frac{m}{s^۲}} a_۲ = ۱۰ + \frac{f_D}{۰/۴} = ۱۰ + ۲/۵f_D$$

حالا $a_۱$ و $a_۲$ را در رابطه‌ی (۲) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{a_۱ - a_۲}{a_۱a_۲} = \frac{۳}{۱۰۰} \xrightarrow[a_۲=۱۰+۲/۵f_D]{a_۱=۱۰+۱۰f_D} \frac{\cancel{۱۰+۱۰f_D}\cancel{-۱۰-۲/۵f_D}}{\cancel{(۱۰+۱۰f_D)}\cancel{(۱۰+۲/۵f_D)}} = \frac{\cancel{۱}}{۱۰۰} \rightarrow ۲۵۰f_D = ۲۵f_D^۲ + ۱۲۵f_D + ۱۰۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲۵} f_D^۲ - ۵f_D + ۴ = ۰ \rightarrow (f_D - ۱)(f_D - ۴) = ۰ \rightarrow f_D = N \ , \ f_D = ۴N$$

اگر بخواهیم بیشینه‌ی ارتفاع اوج گلوله‌ی سنگین‌تر (یعنی گلوله (۲)) را حساب کنیم، باید مقدار ۱N را برای نیروی مقاومت هوا در نظر بگیریم، چون در این صورت طبق رابطه‌ی (۱)، اندازه‌ی شتاب گلوله‌ی (۲) کم تر خواهد شد و در نتیجه طبق رابطه‌ی مستقل از زمان، ارتفاع اوج آن بیشتر می‌شود (این‌جوری هم می‌شود نگاه کرد که هرچه اندازه‌ی نیروی مقاومت هوا کم‌تر باشد، گلوله بالاتر می‌رود)؛ بنابراین با در نظر گرفتن $f_D = ۱N$ اندازه‌ی شتاب گلوله‌ی (۲)، $(a_۲)$ و ارتفاع اوج آن $(h_۲)$ را حساب می‌کنیم.

$$a_۲ = ۱۰ + ۲/۵f_D \xrightarrow{f_D=۱N} a_۲ = ۱۰ + ۲/۵ \times ۱ = ۱۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

$$h_۲ = \frac{۲۰۰}{a_۲} \xrightarrow{a_۲=۱۲/۵} h_۲ = \frac{۲۰۰}{\frac{۱۲۵}{۲}} = ۱۶m$$

۸. شخصی به وزن ۹۸۰N درون یک آسانسور بر روی یک ترازوی فنری ایستاده است. اگر آسانسور در حال حرکت با شتاب ثابت باشد، ترازو عدد ۷۸۰N را نشان می‌دهد. کدام موارد در حین حرکت آسانسور الزاماً درست است؟ ($g=10\frac{m}{s^2}$ و جهت مثبت محور y به سمت بالا فرض شود.)

الف) بزرگی برایند نیروهای وارد بر شخص ۲۰۰N است.

ب) جهت حرکت آسانسور رو به پایین است.

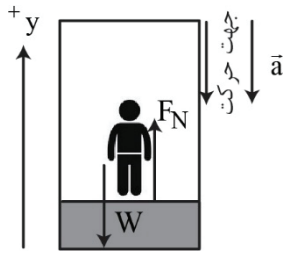
پ) جهت شتاب آسانسور رو به پایین است.

ت) بردار نیرویی که کف آسانسور به پای شخص وارد می‌کند $\vec{j}(+200N)$ است.

۱) الف و ب ۲) ب و ت ۳) الف و پ ۴) پ و ت

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی و مفهومی

عددی که ترازو نشان می‌دهد (۷۸۰N)، کوچک‌تر از وزن شخص (۹۸۰N) است؛ پس آسانسور یا به صورت تندشونده رو به پایین یا به صورت کندشونده رو به بالا حرکت می‌کند (ب ✗ و (۱) و (۲) پَرا) که در هر دو حالت، جهت شتاب آسانسور رو به پایین است (پ ✓). یکی از این دو حالت (مثلاً حرکت تندشونده رو به پایین) را ر نظر می‌گیریم و عبارت‌های (آ) و (ت) را بررسی می‌کنیم.



الف: دو نیروی وزن $(\vec{W})$ و عمودی سطح $(\vec{F}_N)$ بر شخص وارد می‌شود که بزرگی نیروی خالص آن‌ها را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=F_N-W \xrightarrow[W=۹۸۰N]{F_N=۷۸۰N} F_{net}=۷۸۰-۹۸۰=-۲۰۰N \rightarrow |F_{net}|=۲۰۰N$$

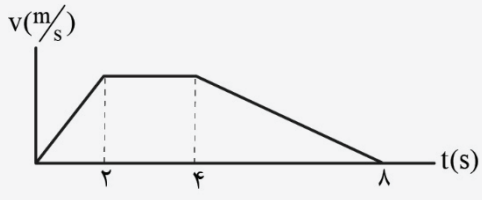
(الف ✓ و (ع) پَرپَرا!)

ت: نیرویی که کف آسانسور به پای شخص وارد می‌کند، $\vec{F}_N$ است. همان‌طور که در شکل می‌بینید، جهت این نیرو رو به بالا و در جهت محور y و اندازه‌ی آن ۷۸۰N است؛ پس $\vec{F}_N=(۷۸۰N)\vec{j}$ است. ✗

درسنامه

جهت حرکت	نوع حرکت	اندازه‌ی نیرویی که آسانسور به شخص وارد می‌کند.	جهت شتاب آسانسور
بالا	تندشونده	$F_N=m(g+a)$	بالا
بالا	کندشونده	$F_N=m(g-a)$	پایین
پایین	تندشونده	$F_N=m(g-a)$	پایین
پایین	کندشونده	$F_N=m(g+a)$	بالا

۹. نمودار سرعت – زمان آسانسوری که در حال حرکت به سمت بالا است، مطابق شکل زیر است. جعبه‌ای به جرم ۵kg درکف آسانسور قرار دارد. اگر بیشترین و کم‌ترین اندازهٔ نیرویی که کف آسانسور به جعبه در حین حرکت آسانسور وارد می‌کند به ترتیب ۶۰N و F باشد، F چند نیوتون است؟ ($g=10\frac{m}{s^2}$)



۱) ۵۰
۲) ۴۰
۳) ۳۰
۴) ۴۵

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

با توجه به نمودار، حرکت آسانسور و جعبه در دو ثانیه‌ی نخست حرکت $(0 \le t \le 2s)$ تندشونده و در چهار ثانیه‌ی دوم حرکت $(4s \le t \le 8s)$ کندشونده است. با توجه به این‌که جهت حرکت آسانسور به سمت بالا است، بیشترین نیروی وارد بر جسم در بازه‌ی زمانی $(0 \le t \le 2s)$ و کم‌ترین نیروی وارد بر جسم در بازه‌ی زمانی $(4s \le t \le 8s)$ است. بزرگی شتاب در هریک از این دو بازه را حساب می‌کنیم:

$$0 \le t \le 2s \Rightarrow |a_1| = \frac{v-0}{2-0} = \frac{v}{2} \quad (v: \text{حداکثر سرعت آسانسور})$$

$$4s \le t \le 8s \Rightarrow |a_2| = \frac{|0-v|}{8-4} = \frac{v}{4}$$

حالا مقادیر F_N را در هر حالت به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F_{N_1} = m(g+a_1) = 5(10+\frac{v}{2}) \\ F_{N_2} = m(g-a_2) = 5(10-\frac{v}{4}) \end{cases}$$

مقدار F_{N_1} را برابر $60N$ قرار می‌دهیم تا مقدار v به دست بیاید:

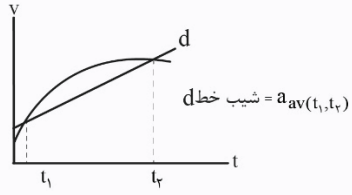
$$F_{N_1} = 5(10+\frac{v}{2}) = 60 \Rightarrow 10+\frac{v}{2} = 12 \Rightarrow v = 4\frac{m}{s}$$

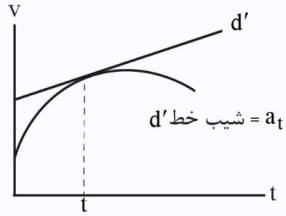
حالا مقدار F_{N_2} را که کم‌ترین نیرویی است که کف آسانسور به جعبه وارد می‌کند، به دست می‌آوریم:

$$F_{N_2} = 5(10-\frac{v}{4}) = 5(10-1) = 45N$$

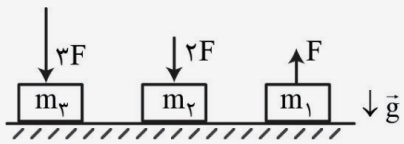
درسنامه

شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان متحرک در هر لحظه، بیانگر شتاب متحرک در آن لحظه است و شیب پاره‌خط واصل بین دو لحظه، بیانگر شتاب متوسط متحرک در آن بازه‌ی زمانی است.





۱۰. مطابق شکل سه جسم روی سطح افقی ثابت هستند. اگربزرگی نیروی عمودی که سطح افقی به جسم (۱) وارد می‌کند، ۲ برابر بزرگی نیروی عمودی باشد که سطح افقی به جسم (۲) وارد می‌کند تا بزرگی نیرویی که سطح افقی به جسم (۳) وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(m_1 = 3m_2 = 5m_3 = 15kg)$

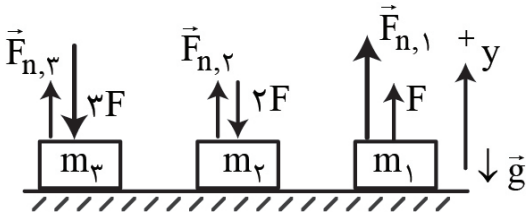


۱) ۴۵ ۲) ۶۰

۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

گام اول) ابتدا طبق قانون اول نیوتون، نیروی عمودی را که سطح افقی به هر سه جسم وارد می‌کند، حساب می‌کنیم (جهت $+y$ را رو به بالا در نظر گرفتیم).



$$F_{net,1} = 0 \rightarrow F_{N,1} + F - m_1 g = 0 \xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2}]{m_1=15kg} F_{N,1} = 150 - F$$

$$F_{net,2} = 0 \rightarrow F_{N,2} - 2F - m_2 g = 0 \xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2}]{m_2=5kg} F_{N,2} = 50 + 2F$$

$$F_{net,3} = 0 \rightarrow F_{N,3} - 3F - m_3 g = 0 \xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2}]{m_3=3kg} F_{N,3} = 30 + 3F$$

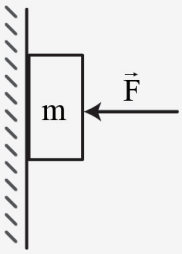
گام دوم) طبق گفته سوال، $F_{N,1}=2F_{N,2}$ است، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{N,1}=2F_{N,2} \xrightarrow[F_{N,2}=50+2F]{F_{N,1}=150-F} 150-F=2(50+2F)\rightarrow 150-F=100+4F\rightarrow 5F=50\rightarrow F=10N$$

گام سوم) حالا می‌توانیم بزرگی نیرویی را که سطح افقی به جسم (۳) وارد می‌کند ($F_{N,3}$)، به دست بیاوریم.

$$F_{N,3}=30+3F \xrightarrow{F=10N} F_{N,3}=30+3\times 10=60N$$

۱۱. مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $m=2kg$ توسط نیروی افقی $\vec{F}$ به دیوار فشرده شده و جسم در آستانه‌ی حرکت است. اگر بزرگی نیروی F نصف شود، جسم با شتابی به بزرگی $6\frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و دیوار چند برابر ضریب اصطکاک ایستایی بین آن‌ها است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$



۱) ۰/۳

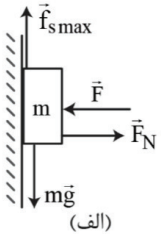
۲) ۰/۴

۳) ۰/۶

۴) ۰/۸

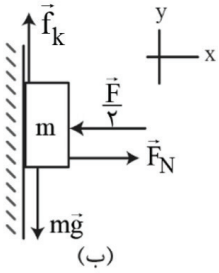
پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

گام اول: در حالت اول چون جسم در آستانه حرکت است (شکل الف)؛ پس نیروی اصطکاک وارد برجسم از نوع نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه است و می‌توان نوشت:



$$f_{s\max}=mg \xrightarrow[m=2kg,g=10\frac{m}{s^2}]{f_{s\max}=\mu_s F_N,F_N=F} \mu_s F=20N$$

گام دوم: در حالت دوم، جسم در حال حرکت است (شکل ب)؛ پس نیروی اصطکاک وارد بر جسم از نوع نیروی اصطکاک جنبشی است و می‌توان نوشت:



$$F_{net,y}=ma \xrightarrow[f_k=\mu_N F_N,F_N=\frac{F}{2}]{F_{net,y}=mg-f_k} mg-\mu_k\frac{F}{2}=ma \xrightarrow[a=6\frac{m}{s^2}]{m=2kg,g=10\frac{m}{s^2}} 2\times 10-\mu_k\frac{F}{2}=2\times 6\rightarrow \mu_k F=16N$$

گام سوم: حالا خواسته‌ی سوال، یعنی نسبت $\frac{\mu_k}{\mu_s}$ را به دست می‌آوریم.

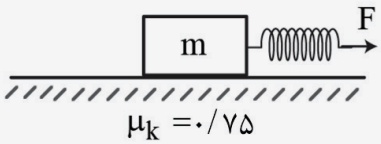
$$\frac{\mu_k \cancel{F}^{1}}{\mu_s \cancel{F}^{1}}=\frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{20}^{10}}=0/8$$

درسنامه:

نوع نیروی اصطکاک	رابطه
ایستایی	رابطه‌ای ندارد و اندازه‌ی آن با قانون دوم نیوتون به دست می‌آید.
ایستایی بیشینه	$f_{s,max}=\mu_s F_N$
نیروی اصطکاک جنبشی	$f_k=\mu_k F_N$

تذکر: برای جسمی که ابتدا ساکن است اگر $F_{محرک} \le f_{s,max}$ باشد، جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک وارد بر جسم برابر با $F_{محرک}$ است و اگر $F_{محرک} > f_{s,max}$ باشد، نیروی اصطکاک از نوع جنبشی (f_k) است.

۱۲. مطابق شکل توسط فنری با ثابت $۴\frac{N}{cm}$، جسمی به جرم m روی سطح افقی با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ به صورت تندشونده در حال حرکت است. اگر بزرگی نیرویی که جسم به سطح افقی وارد می‌کند ۵۰N باشد، تغییر طول فنر نسبت به طول آزاد آن چند سانتی‌متر است؟ $(s=۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) ۸

۲) ۸/۵

۳) ۹/۵

۴) ۱۱/۸۷۵

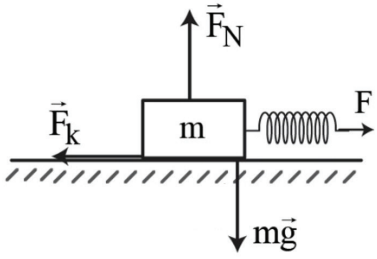
پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

گام اول: نیرویی که جسم به سطح افقی وارد می‌کند ($\vec{R}'$)، هم‌اندازه، هم‌راستا و در خلاف جهت نیرویی است که سطح به جسم وارد می‌کند ($\vec{R}$) و برابر با برایند دو نیروی عمودی سطح ($\vec{F}_N$) و نیروی اصطکاک ($\vec{f}_k$) است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$R^۲ = F_N^۲ + f_k^۲ \xrightarrow[f_k=\mu_k F_N=\mu_k mg=\frac{۳}{۴}m]{R=۵۰N, F_N=mg=۱۰m} ۵۰^۲ = (۱۰m)^۲ + (\frac{۱۵}{۲}m)^۲ \rightarrow ۲۵۰۰ = ۱۰۰m^۲ + \frac{۲۲۵m^۲}{۴}$$

$$\rightarrow ۲۵۰۰ = \frac{۶۲۵}{۴}m^۲ \xrightarrow{\sqrt{}} m = ۴kg$$

گام دوم: از آن‌جا که جسم در حال حرکت است پس نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع نیروی اصطکاک جنبشی است؛ بنابراین طبق قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:



$$F_{net} = ma \xrightarrow[F_N=mg]{F_{net}=F-f_k} F - f_k = ma \xrightarrow[f_k=\mu_k F_N=\mu_k mg]{F=k\Delta x} k\Delta x - \mu_k mg = ma$$

$$\xrightarrow[m=۴kg, g=۱۰\frac{m}{s^۲}, a=۲\frac{m}{s^۲}]{k=۴\frac{N}{cm}, \mu_k=\frac{۳}{۴}} ۴\Delta x - \frac{۳}{۴}\times ۴ \times ۱۰ = ۴\times ۲ \rightarrow ۴\Delta x = ۳۸ \rightarrow \Delta x = ۹/۵cm$$

$$\sqrt{(\frac{۳۰}{۴}m)^۲ + (۱۰m)^۲} = ۵۰ \rightarrow m = ۴kg$$

$$F - ۳۰ = ۴\times x \rightarrow F = ۳۸N \rightarrow ۳۸ = ۴\times x \rightarrow x = ۹/۵cm$$

درسنامه

۱) اندازه‌ی نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند (R)، برابر با برآیند دو نیروی عمودی سطح ($\vec{F}_N$) و نیروی اصطکاک ($\vec{f}$) است.

$$R = \sqrt{F_N^۲ + f^۲}$$

در این رابطه، f می‌تواند f_s، $f_{s,max}$ یا f_k باشد.

۲) اگر فنر را به اندازه‌ی Δx بکشیم یا فشرده کنیم، فنر نیرویی به جسم وارد می‌کند که اندازه‌ی آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

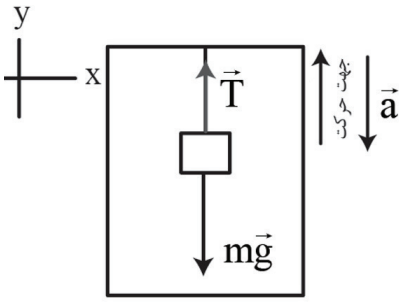
$$F_e = \underset{\text{ثابت فنر}}{K}\Delta x$$

۱۳. طناب با جرم ناچیز به سقف آسانسور آویزان و وزنه‌ای به جرم $4kg$ به این طناب متصل است. اگر آسانسور به صورت کندشونده با شتابی به بزرگی $2\frac{m}{s^2}$ در حال بالا رفتن باشد، بزرگی نیروی کشش طناب چند نیوتون است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) ۸ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

کافی است از قانون دوم نیوتون استفاده کنیم.



$$F_{net,y}=ma\rightarrow mg-T=ma\xrightarrow[a=2\frac{m}{s^2}]{m=4kg,g=10\frac{m}{s^2}}mg-T=ma=40-T=4\times2\Rightarrow32N$$

درسنامه

جهت حرکت	نوع حرکت	اندازه‌ی نیرویی که آسانسور به شخص وارد می‌کند.	جهت شتاب آسانسور
بالا	تندشونده	$F_N=m(g+a)$	بالا
بالا	کندشونده	$F_N=m(g-a)$	پایین
پایین	تندشونده	$F_N=m(g-a)$	پایین
پایین	کندشونده	$F_N=m(g+a)$	بالا

۱۴. دو جسم A و B به جرم‌های m_A و $m_B=2m_A$ با سرعت‌های اولیه‌ی v_A، $v_B=2v$ روی سطح افقی و مماس بر آن پرتاب می‌شوند. اگر مسافتی که جسم A از لحظه‌ی پرتاب تا توقف طی می کند، ۲ برابر مسافتی باشد که جسم B از لحظه‌ی پرتاب تا توقف طی می‌کند، ضریب اصطکاک جسم A با سطح چند برابر ضریب اصطکاک جسم B با سطح است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

ابتدا درسنامهٔ این تست را بخوانید و سپس حل آن را ببینید.

مسافت توقف جسم از رابطهٔ $|\Delta x|=\frac{v_0^2}{2\mu_k g}$ به دست می‌آید. این رابطه را به صورت نسبتی برای دو جسم می‌نویسیم:

$$|\Delta x|=\frac{v_0^2}{2\mu_k g}\rightarrow\frac{|\Delta x_A|}{|\Delta x_B|}=(\frac{v_{0A}}{v_{0B}})^2(\frac{\mu_{k,B}}{\mu_{k,A}})\Rightarrow\frac{1}{2}=(\frac{1}{2})^2(\frac{\mu_{k,B}}{\mu_{k,A}})\Rightarrow(\frac{\mu_{k,B}}{\mu_{k,A}})=\frac{1}{8}$$

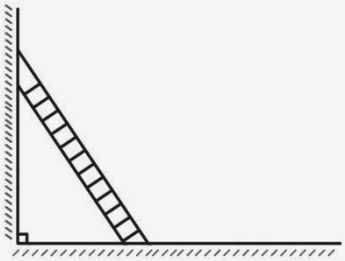
درسنامه:

در پرتاب یک جسم روی سطح افقی و یا ترمزگرفتن اتومبیل روی سطح افقی، برزگی شتاب توقف، مدت زمان توقف و مسافت توقف از روابط زیر به دست می‌آیند:

بزرگی شتاب توقف	مدت زمان توقف	مسافت توقف
$\lvert a\rvert=\mu_k g$	$t=\frac{v_0}{\lvert a\rvert}=\frac{v_0}{\mu_k g}$	$\lvert\Delta x\rvert=\frac{v_0^2}{2\lvert a\rvert}=\frac{v_0^2}{2\mu_k g}$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

۱۵. نردبانی مطابق شکل به دیوار قائم بدون اصطکاک تکیه داده شده و در آستانه‌ی سر خوردن است. اگر بزرگی نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، $\frac{5}{3}$ برابر بزرگی نیرویی باشد که نردبان به دیوار قائم وارد می‌کند، ضریب اصطکاک ایستایی نردبان با سطح افقی کدام است؟



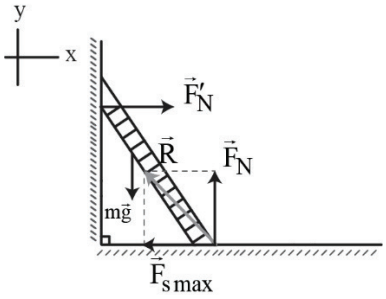
۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی



از آن‌جا که نردبان در آستانه سر خوردن است. پس نیروی اصطکاک وارد بر پای نردبان از نوع نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $(f_{s,max})$ است؛ بنابراین چون نردبان ساکن است، پس طبق قانون اول نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net,y} = 0 \rightarrow F_N - mg = 0 \rightarrow F_N = mg$$

$$F_{net,x} = 0 \rightarrow F'_N - f_{s,max} = 0 \xrightarrow{f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s\, mg} F'_N = \mu_s mg$$

همان‌طور که در شکل می‌بینید، نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، برابر با برایند دو نیروی عمودی سطح $(\vec{F}_N)$ و نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $(\vec{f}_{s,max})$ است و چون دیوار قائم بدون اصطکاک است، پس نیرویی که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند، همان نیروی $\vec{F}'_N$ است. طبق گفته سوال، نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، $\frac{5}{3}$ برابر نیرویی است که نردبان به دیوار قائم وارد می‌کند؛ بنابراین می‌توان نوشت:

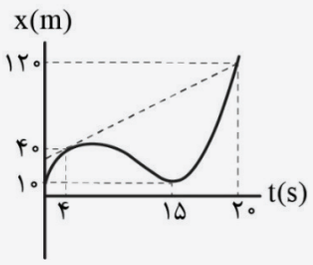
$$R = \frac{5}{3}F'_N \xrightarrow{R=\sqrt{f_{s,max}^2 + F_N^2}} \sqrt{f_{s,max}^2 + F_N^2} = \frac{5}{3}F'_N \xrightarrow{f_{s,max} = \mu_s F_N} \sqrt{(\mu_s F_N)^2 + F_N^2} = \frac{5}{3}F'_N \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$F_N^2(\mu_s^2 + 1) = \frac{25}{9}F'^2_N \xrightarrow[F'_N = \mu_s mg]{F_N = mg} \cancel{(mg)^2}(\mu_s^2 + 1) = \frac{25}{9}\cancel{(\mu_s mg)^2} \rightarrow \mu_s^2 + 1 = \frac{25}{9}\mu_s^2 \rightarrow \mu_s^2 = \frac{9}{16} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \mu_s = \frac{3}{4}$$

آزمون‌های ماراتون

فیزیک دوازدهم | ۱۳ آذرماه ۱۴۰۴

۱. نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظه $t = ۴s$ نصف تندی متوسط آن در ۲۰ ثانیه‌ی اول حرکتش باشد، تندی متوسط متحرک در ۱۵ ثانیه‌ی اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۴

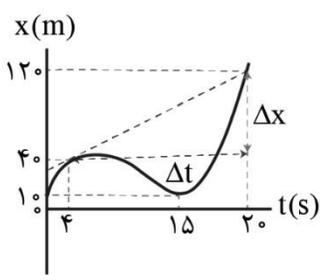
۲) ۵

۳) ۶

۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

گام اول) ابتدا تندی متحرک در لحظه‌ی $t = ۴s$ را با استفاده از شیب خط رسم شده به دست می‌آوریم.



$$v_{(t=۴s)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۲۰ - ۴ = ۱۶s]{\Delta x = ۱۲۰ - ۴۰ = ۸۰m} v_{(t=۴s)} = \frac{۸۰}{۱۶} = ۵\frac{m}{s}$$

گام دوم) از آن‌جا که تندی متحرک در لحظه‌ی $t = ۴s$ ($v_{t=۴s}$) نصف تندی متوسط آن در ۲۰ ثانیه‌ی اول حرکتش است، می‌توانیم بنویسیم:

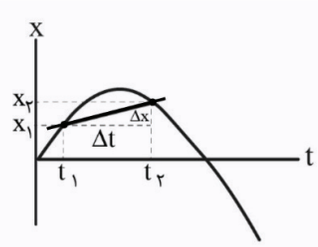
$$v_{(t=۴s)} = \frac{۱}{۲}s_{av} \xrightarrow[s_{av} = \frac{l}{t} = \frac{l}{۲۰}]{v_{(t=۴s)} = ۵\frac{m}{s}} ۵ = \frac{۱}{۲} \times \frac{l}{۲۰} \rightarrow l = ۲۰۰m$$

این یعنی این‌که متحرک در ۲۰ ثانیه‌ی اول حرکتش، مسافت ۲۰۰ متر را طی کرده است. همان‌طور که در نمودار مکان - زمان می‌بینید، متحرک در بازه‌ی زمانی $(۱۵s, ۲۰s)$، مسافت $۱۱۰m (۱۰ - ۱۲۰)$ را طی کرده است؛ پس نتیجه می‌گیریم که متحرک در بازه‌ی زمانی $(۰s, ۱۵s)$، مسافت $۹۰m (۱۱۰ - ۲۰۰)$ را طی کرده است. حالا می‌توانیم خواسته‌ی سوال یعنی تندی متوسط متحرک در ۱۵ ثانیه‌ی اول حرکت را به دست بیاوریم.

$$s_{av} = \frac{l'}{\Delta t'} \xrightarrow[\Delta t' = ۱۵s]{l' = ۹۰m} s'_{av} = \frac{۹۰}{۱۵} = ۶\frac{m}{s}$$

درسنامه

۱) در نمودار مکان - زمان متحرک، شیب خط واصل بین دو لحظه بیانگر سرعت متوسط متحرک در آن بازه‌ی زمانی است.



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{شیب خط واصل}$$

۲) **تندی متوسط:** اگر متحرکی، مسافت l را در مدت زمان Δt طی کند، تندی متوسط آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید و بیانگر این است که متحرک در هر ثانیه، به‌طور متوسط چند متر مسافت طی کرده است.

$$\text{تندی متوسط}\left(\frac{m}{s}\right) \leftarrow s_{av} = \frac{l \rightarrow \text{مسافت طی شده (m)}}{\Delta t \rightarrow \text{مدت زمان (s)}}$$

۲ . معادله سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $v = t^۲ - ۱۰t + ۲۱$ است. به ترتیب از راست به چپ بزرگی شتاب متوسط متحرک در ۴ ثانیه‌ی اول حرکت و بزرگی شتاب متحرک در لحظه $t = ۵s$ در SI کدام است؟

۱) ۶، ۰/۸ ۲) ۱۰، صفر ۳) ۶، صفر ۴) ۱۰، ۰/۸

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

بزرگی شتاب متوسط متحرک در ۴ ثانیه‌ی اول حرکت:

گام اول) ابتدا سرعت متحرک در لحظه‌های $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۴s$ را به دست می‌آوریم.

$$v = t^۲ - ۱۰t + ۲۱ \begin{cases} \xrightarrow{t_۱ = ۰s} v_۱ = ۰^۲ - ۱۰\times ۰ + ۲۱ = ۲۱\frac{m}{s} \\ \xrightarrow{t_۲ = ۴s} v_۲ = ۴^۲ - ۱۰\times ۴ + ۲۱ = -۳\frac{m}{s} \end{cases}$$

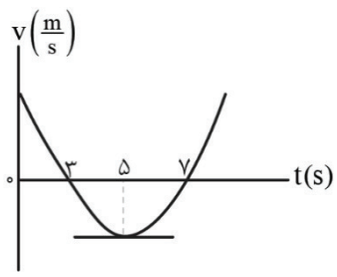
گام دوم) حالا می‌توانیم بزرگی شتاب متوسط متحرک در این مدت زمان را حساب کنیم.

$$|a_{av}| = |\frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}| \xrightarrow[t_۱ = ۰s, t_۲ = ۴s]{v_۱ = ۲۱\frac{m}{s}, v_۲ = -۳\frac{m}{s}} |a_{av}| = |\frac{-۳ - ۲۱}{۴ - ۰}| = ۶\frac{m}{s^۲}$$

۲ و ٤ پَرا

بزرگی شتاب متحرک در لحظه‌ی $t = ۵s$:

برای محاسبه‌ی بزرگی شتاب متحرک در یک لحظه، باید نمودار سرعت - زمان آن را رسم کنیم و با کمک شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه، بزرگی شتاب متحرک در آن لحظه را به دست بیاوریم.



ریشه‌ها: $t^۲ - ۱۰t + ۲۱ = ۰ \rightarrow (t-۳)(t-۷) = ۰ \rightarrow t_۱ = ۳s, t_۲ = ۷s$

راس نمودار: $t_{راس} = -\frac{b}{۲a} \xrightarrow[a=۱]{b=-۱۰} t_{راس} = -\frac{-۱۰}{۲\times ۱} = ۵s$

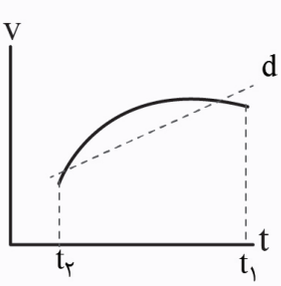
همان‌طور که می‌بینید، شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان متحرک در لحظه‌ی $t = ۵s$ صفر است؛ پس شتاب متحرک در لحظه‌ی $t = ۵s$ نیز صفر است.

درسنامه

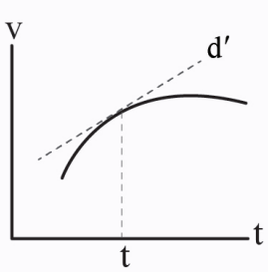
۱) شتاب متوسط: اگر سرعت متحرکی در لحظه‌ی $t_۱$ برابر با $v_۱$ و در لحظه‌ی $t_۲$ برابر با $v_۲$ باشد، شتاب متوسط آن در رابطه‌ی زیر را به دست آورید.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}$$

۲) شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان متحرک در هر لحظه، بیانگر شتاب متحرک در آن لحظه است و شیب خط واصل بین دو لحظه، بیانگر شتاب متوسط متحرک در آن بازه‌ی زمانی است.

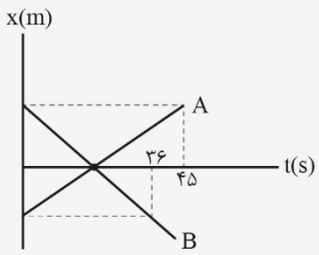


شیب خط d $= a_t$



شیب خط d $= a_{av(t_۱, t_۲)}$

۳ . نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر فاصله دو متحرک در لحظه $t=0$ از یکدیگر ۳۶۰m باشد، در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه برای دومین بار فاصله‌ی دو متحرک از یکدیگر به ۲۷۰m می‌رسد؟



۱) ۵

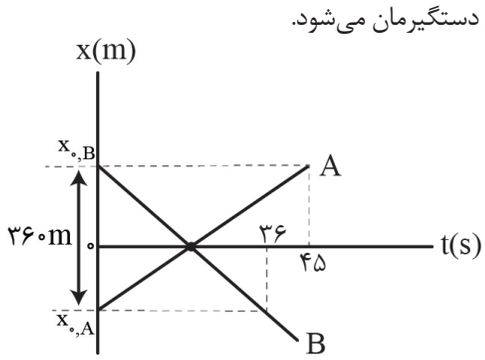
۲) ۳۵

۳) ۱۵

۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

نمودار مکان - زمان دو متحرک به صورت خط راست است، پس هر دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. معادله‌ی مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت بر روی خط راست را برای هر دو متحرک A و B می‌نویسیم و اطلاعات داده شده در نمودار مکان - زمان آن‌ها را در آن جای‌گذاری می‌کنیم تا ببینیم چه چیزی دستگیرمان می‌شود.



$$x_A = v_A t_A + x_{0,A} \xrightarrow[t_A=۴۵s]{x_A=x_{0,B}} x_{0,B} - x_{0,A} = ۴۵ v_A \xrightarrow{x_{0,B}-x_{0,A}=۳۶۰m} v_A = \frac{۳۶۰}{۴۵} = ۸\frac{m}{s}$$

$$x_B = v_B t_B + x_{0,B} \xrightarrow[t_B=۳۶s]{x_B=x_{0,A}} x_{0,A} - x_{0,B} = ۳۶ v_B \xrightarrow{x_{0,A}-x_{0,B}=-۳۶۰m} v_B = -\frac{۳۶۰}{۳۶} = -۱۰\frac{m}{s}$$

خب، سرعت هر دو متحرک را پیدا کردیم. می‌خواهیم لحظه‌ای را که فاصله‌ی دو متحرک از یک‌دیگر برای دومین بار ۲۷۰ متر می‌شود، پیدا کنیم. همان‌طور که در نمودار مکان - زمان دو متحرک می‌بینید، فاصله‌ی آن‌ها در ابتدا ۳۶۰ متر است و در حال نزدیک شدن به یک‌دیگر هستند و پس از این‌که به هم رسیدند، از یک‌دیگر دور می‌شوند. پس فاصله‌ی این دو متحرک، یک بار قبل از رسیدن به هم و بار دیگر پس از رسیدن به هم ۲۷۰ متر می‌شود که ما با بار دوم کار داریم. با توجه به نمودار و معادله‌ی مکان - زمان دو متحرک می‌توانیم بنویسیم:

$$x_A - x_B = (v_A - v_B)t + x_{0,A} - x_{0,B} \xrightarrow[v_B=-۱۰\frac{m}{s},\ x_{0,A}-x_{0,B}=-۳۶۰m]{x_A-x_B=۲۷۰m,\ v_A=۸\frac{m}{s}} ۲۷۰ = ۱۸t - ۳۶۰ \rightarrow t = \frac{۶۳۰}{۱۸} = ۳۵s$$

درسنامه

معادله‌ی مکان - زمان متحرکی که با سرعت ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت زیر است:

$$\text{مکان}(m) \leftarrow x = v\,t + x_0 \rightarrow \text{مکان اولیه}(m)$$

v: سرعت $(\frac{m}{s})$

t: مکان اولیه (m)

۴. معادله حرکت متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x=t^۲-۶t+۸$ است. تندی متوسط متحرک در مدتی که بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است، چند برابر تندی متحرک در لحظه‌ی تغییر جهت بردار مکان متحرک است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۰/۲۵

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

اول باید ببینیم که در چه بازه‌ی زمانی بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x و در چه لحظه‌ای بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد.

بردار مکان در خلاف جهت محور x: وقتی که متحرک در قسمت منفی محور x حرکت می‌کند، بردار مکان آن منفی است.

$$x<۰ \xrightarrow{x=t^۲-۶t+۸} t^۲-۶t+۸<۰ \rightarrow (t-۲)(t-۴)<۰ \rightarrow ۲s<t<۴s$$

پس بردار مکان متحرک در بازه‌ی زمانی $(۲s,۴s)$ منفی است.

لحظه‌ی تغییر جهت بردار مکان: در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ $(x=۰m)$ عبور می‌کند بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد.

$$x=t^۲-۶t+۸ \xrightarrow{x=۰m} t^۲-۶t+۸=۰ \rightarrow (t-۲)(t-۴)=۰ \rightarrow t_۱=۲s, t_۲=۴s$$

پس بردار مکان متحرک در لحظه‌های $t_۱=۲s$ و $t_۲=۴s$ تغییر جهت می‌دهد.

برای محاسبه‌ی تندی متوسط متحرک در یک بازه‌ی معین به مسافت طی شده (دقت کنید! مسافت، نه جابه‌جایی!) در آن بازه‌ی زمانی نیاز داریم.

بهترین روش برای محاسبه‌ی مسافت طی شده یک بازه‌ی زمانی معین، استفاده از مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان متحرک و محور t است. پس به سراغ رسم نمودار سرعت - زمان متحرک می‌رویم.

رسم نمودار سرعت - زمان متحرک: از آن‌جاکه معادله‌ی مکان - زمان متحرک از نوع درجه‌ی دوم است، پس متحرک با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند. با مقایسه‌ی معادله‌ی مکان - زمان متحرک با معادله‌ی مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، شتاب (a) و سرعت اولیه‌ی متحرک $(v_۰)$ را پیدا می‌کنیم.

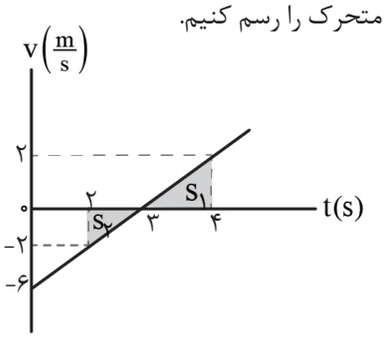
$$\begin{cases} x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \\ x=t^۲-۶t+۸ \end{cases} \rightarrow a=۲\frac{m}{s^۲}, v_۰=-۶\frac{m}{s}$$

این کار را برای نوشتن معادله‌ی سرعت - زمان متحرک کردیم.

$$v=at+v_۰ \xrightarrow[v_۰=-۶\frac{m}{s}]{a=۲\frac{m}{s^۲}} v=۲t-۶$$

حالا می‌توانیم نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنیم.

$$v=۲t-۶ \begin{cases} \xrightarrow{t=۰s} v=۲\times۰-۶=-۶\frac{m}{s} \\ \xrightarrow{t=۲s} v_{(t=۲s)}=۲\times۲-۶=-۲\frac{m}{s} \\ \xrightarrow{t=۴s} v_{(t=۴s)}=۲\times۴-۶=۲\frac{m}{s} \\ \xrightarrow{v=۰\frac{m}{s}} ۰=۲t-۶ \rightarrow t=۳s \end{cases}$$



دنبال چه بودیم؟ مسافت طی شده در بازه‌ی زمانی $(۲s,۴s)$؟ خب، با کمک مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان متحرک و محور t، حسابش می‌کنیم.

$$l=S_۱+S_۲ \xrightarrow[S_۲=\frac{(۴-۳)\times۲}{۲}=۱m]{S_۱=\frac{(۳-۲)\times۲}{۲}=۱m} l=۱+۱=۲m$$

در آخر خواسته‌ی سوال، یعنی نسبت تندی متوسط متحرک در بازی زمانی $(۲s,۴s)$ به تندی آن در لحظه‌ی $t=۲s$ (یا $t=۴s$) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{s_{av}}{v_{(t=۴s)}}=\frac{\frac{l}{\Delta t}}{v_{(t=۴s)}} \xrightarrow[v_{(t=۴s)}=۲\frac{m}{s}]{l=۲m,\Delta t=۴-۲=۲s} \frac{s_{av}}{v_{(t=۴s)}}=\frac{\frac{۲}{۲}}{۲}=۰/۵$$

درسنامه

۱) معادله‌ی مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت زیر است:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

x: مکان در لحظه‌ی t ← $\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ → مکان اولیه (m)

a: شتاب $(\frac{m}{s^2})$، t: زمان (s)، v_0: سرعت اولیه $(\frac{m}{s})$

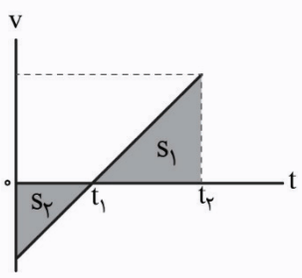
۲) معادله‌ی سرعت - زمان متحرکی که شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت زیر است:

$$V = at + v_0$$

V: سرعت در لحظه‌ی t ← $at + v_0$ → سرعت اولیه $(\frac{m}{s})$

a: شتاب $(\frac{m}{s^2})$، t: زمان (s)

۳) مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان متحرک و محور t در یک بازه‌ی زمانی برابر با جابه‌جایی متحرک در آن بازه‌ی زمانی است. اگر نمودار سرعت - زمان متحرک بالای محور t باشد، جابه‌جایی متحرک مثبت و اگر پایین محور t باشد، جابه‌جایی آن منفی است.



$$\begin{cases} t_1 \text{ تا } 0 \text{ جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی}: \Delta x_1 = -S_1 \\ t_2 \text{ تا } t_1 \text{ جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی}: \Delta x_2 = S_2 \end{cases} \Rightarrow t_2 \text{ تا } 0 \text{ جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی}: \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -S_1 + S_2$$

۵. اتومبیلی از حال سکون با شتاب ثابت روی خط راست شروع به حرکت می‌کند. اگر مسافت طی شده در ثانیه‌ی دوم حرکت اتومبیل ۶ متر باشد، مسافت طی شده توسط اتومبیل در مدت زمان سه ثانیه‌ی چهارم حرکت آن چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۱۲۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۹۵

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

گام اول) چون اتومبیل از حال سکون $(v_0 = 0 \frac{m}{s})$ با شتاب ثابت بر روی خط راست شروع به حرکت کرده است، پس در طول مسیر حرکتش تغییر جهت نداده است و در نتیجه، مسافت طی شده در هر بازه‌ی زمانی برابر با اندازهٔ جابه‌جایی آن در آن بازه‌ی زمانی است؛ بنابراین، مسافت طی شده در ثانیه‌ی دوم توسط اتومبیل برابر با جابه‌جایی آن در این بازه‌ی زمانی است و می‌توان نوشت:

$$\Delta x = \frac{1}{2}a(2n-1) + v_0 \xrightarrow[v_0 = 0 \frac{m}{s}]{\Delta x = 6m, n = 2} 6 = \frac{1}{2}a(2\times 2 - 1) + 0 \rightarrow a = 4\frac{m}{s^2}$$

گام دوم) همه چیز را برای محاسبه‌ی مسافت طی شده در سه ثانیه‌ی چهارم حرکت اتومبیل داریم و کافی است داده‌ها را در رابطه‌ی زیر جای‌گذاری کنیم.

$$\Delta x = \frac{1}{2}a(2n-1)t^2 + v_0 t \xrightarrow[t = 3s, v_0 = 0 \frac{m}{s}]{a = 4\frac{m}{s^2}, n = 4} \Delta x = \frac{1}{2}\times 4 \times (2\times 4 - 1) \times 3^2 + 0 \times 3 = 126m$$

درسنامه

۱) اگر متحرکی با شتاب ثابت a بر روی خط راست حرکت کند. جابه‌جایی آن در ثانیه‌ی n ام از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

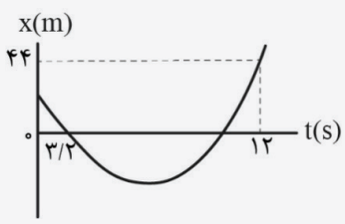
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲n-۱)+V_{۰}\rightarrow(\frac{m}{s})\text{سرعت اولیه}$$

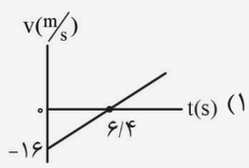
۲) اگر متحرکی با شتاب ثابت a بر روی خط راست حرکت کند، جابه‌جایی آن در t ثانیه‌ی n ام از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

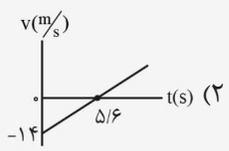
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲n-۱)t^{۲}+v_{۰}t$$

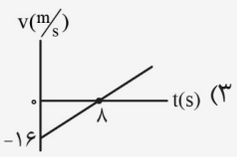
$v_{۰}$: سرعت اولیه $(\frac{m}{s})$

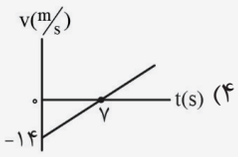
۶ . نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظه‌ای که بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، تندی آن $۶m/s$ باشد، نمودار سرعت - زمان متحرک کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

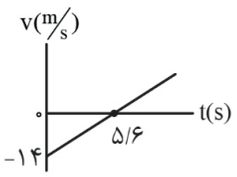
روش اول: همان‌طور که در نمودار مکان - زمان متحرک می‌بینید، متحرک در لحظه‌ی $t_{۱}=۳/۲s$ در مکان $x_{۱}=۰m$ و در لحظه‌ی $t_{۲}=۱۲s$ در مکان $x_{۲}=۴۴m$ است. این مقادیر را در معادله‌ی مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جای‌گذاری می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{۰}t+x_{۰}\begin{cases}\xrightarrow[t_{۱}=۳/۲s]{x_{۱}=۰m}۰=\frac{۱}{۲}a\times\frac{۲۵۶}{۲۵}+v_{۰}\times۳/۲+x_{۰}\\ \xrightarrow[t_{۲}=۱۲s]{x_{۲}=۴۴m}۴۴=\frac{۱}{۲}a\times۱۴۴+v_{۰}\times۱۲+x_{۰}\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را از یکدیگر کم می‌کنیم}}۴۴=\frac{۱۶۷۲}{۲۵}a+۸/۸v_{۰}\qquad(۱)$$

در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان $(x=۰m)$ عبور می‌کند، بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد، پس با توجه به نمودار مکان - زمان متحرک، بردار مکان آن در لحظه‌ی $t=۳/۲s$ تغییر جهت می‌دهد. از طرفی، شیب مماس بر نمودار مکان - زمان متحرک در این لحظه منفی است؛ پس سرعت متحرک در این لحظه منفی است $(v<۰)$ و از آن‌جا که تندی متحرک در این لحظه $۶\frac{m}{s}$ است، پس سرعت آن در این لحظه $-۶\frac{m}{s}$ است. با کمک معادله‌ی سرعت - زمان متحرک می‌توانیم بنویسیم:

$$v=at+v_{۰}\xrightarrow[t=۳/۲s]{v=-۶\frac{m}{s}}-۶=۳/۲a+v_{۰}\qquad(۲)$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول (۱) و (۲)، $a=۲/۵\frac{m}{s^{۲}}$ و $V_{۰}=-۱۴\frac{m}{s}$ به دست می‌آید. حالا با نوشتن معادله‌ی سرعت - زمان متحرک، می‌توانیم نمودار سرعت - زمان آن را رسم کنیم.



$$v=at+v_{۰}\xrightarrow[v_{۰}=-۱۴\frac{m}{s}]{a=۲/۵\frac{m}{s^{۲}}}v=۲/۵t-۱۴\begin{cases}\xrightarrow{t=۰s}v_{۰}=۲/۵\times۰-۱۴=-۱۴\frac{m}{s}\\ \xrightarrow{v=۰\frac{m}{s}}۰=۲/۵t-۱۴\rightarrow t=۵/۶s\end{cases}$$

روش دوم: سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = ۳/۲s$ تا $t_2 = ۱۲s$ را به دست می‌آوریم:

$$v_{av(۳/۲s,۱۲s)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴۴-۰}{۱۲-۳/۲} = \frac{۴۴}{۸/۸} = ۵\frac{m}{s}$$

چون حرکت با شتاب ثابت است، پس سرعت لحظهٔ $t = \frac{۳/۲+۱۲}{۲} = ۷/۶s$ برابر $۵\frac{m}{s}$ است. طبق گفتهٔ طراح سرعت در $t = ۳/۲s$ برابر $v = -۶\frac{m}{s}$ است. بنابراین شتاب حرکت برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۵-(-۶)}{۷/۶-۳/۲} = \frac{۱۱}{۴/۴} = ۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

حالا سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{v_{۳/۲} - v_۰}{۳/۲-۰} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{-۶-v_۰}{۳/۲} \Rightarrow -۶-v_۰ = ۸ \Rightarrow v_۰ = -۱۴\frac{m}{s}$$

۷ . متحرکی روی محور x از مبدأ محور با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ از حال سکون به حرکت درمی‌آید. ۶ ثانیه بعد، متحرک دیگری روی محور x از همان نقطه و در همان جهت با شتاب ثابت $۸m/s^۲$ از حال سکون به حرکت درمی‌آید. در این حرکت چند ثانیه فاصله‌ی بین دو متحرک در حال کاهش است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

روش اول: فاصلهٔ دو متحرک از لحظهٔ برابری سرعت دو متحرک تا لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند در حال کاهش است. بنابراین معادلهٔ مکان - زمان و سرعت - زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{۲}\times ۲ \times t^۲ + ۰ + ۰ = t^۲ \\ x_۲ = \frac{۱}{۲}\times ۸ \times (t-۶)^۲ + ۰ + ۰ = ۴(t-۶)^۲ \end{cases}$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow \begin{cases} v_۱ = ۲t - ۰ \\ v_۲ = ۸(t-۶) + ۰ \end{cases}$$

حالا یک بار لحظهٔ برابری سرعت دو متحرک و بار دیگر لحظهٔ برابری مکان دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v_۱ = v_۲ \Rightarrow ۲t = ۸(t-۶) \Rightarrow t = ۴t - ۲۴ \Rightarrow ۳t = ۲۴ \Rightarrow t = ۸s$$

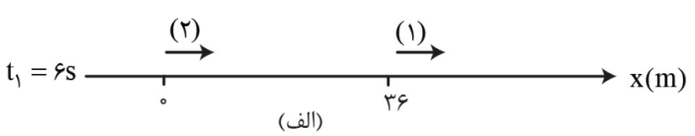
$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow t^۲ = ۴(t-۶)^۲ \xrightarrow{\sqrt{\ }} t = ۲(t-۶) \Rightarrow t = ۱۲s$$

بنابراین به مدت $۱۲ - ۸ = ۴s$ فاصلهٔ دو متحرک در حال کاهش است.

روش دوم: متحرک دوم ۶ ثانیه دیرتر از متحرک اول شروع به حرکت کرده است. برای این‌که وضعیت این دو متحرک را نسبت به هم بسنجیم، باید ببینیم که متحرک اول در این لحظه کجاست و سرعتش چند متر بر ثانیه است (شکل الف).

$$V_۱ = a_۱t_۱ + V_{۰,۱} \xrightarrow[V_{۰,۱}=۰]{a_۱=۲\frac{m}{s^۲},\, t_۱=۶s} V_۱ = ۲\times ۶ + ۰ = ۱۲\frac{m}{s}$$

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}a_۱t_۱^۲ + V_{۰,۱}t_۱ + x_{۰,۱} \xrightarrow[V_{۰,۱}=۰,\, x_{۰,۱}=۰m]{a_۱=۲\frac{m}{s^۲},\, t_۱=۶s} x_۱ = \frac{۱}{\cancel{۲}}\times \cancel{۲}\times ۶^{\overset{۳۶}{\cancel{۳۶}}} + \cancel{۰\times ۶} + ۰ = ۳۶m$$



(الف)

می‌خواهیم ببینیم که چند ثانیه فاصله بین دو متحرک کاهش می‌یابد. خب، در لحظه‌ی $t_1 = 6s$، متحرک اول با سرعت $12\frac{m}{s}$ در حال حرکت است و متحرک دوم در حال سکون ($v_{0,2} = 0\frac{m}{s}$) قرار دارد. در این لحظه چون تندی متحرک اول بیشتر از تندی متحرک دوم است، پس دو متحرک در حال دور شدن از هم هستند و تا لحظه‌ای که سرعت آن‌ها یکسان نشود، فاصله‌ی آن‌ها از هم افزایش می‌یابد؛ بنابراین باید ببینیم که در چه لحظه‌ای پس از شروع حرکت متحرک دوم، سرعت آن‌ها یکسان می‌شود.

$$v_2 = v_1' \xrightarrow[v_1' = a_1 t_2 + v_1]{v_2 = a_2 t_2 + v_{0,2}} a_2 t_2 + v_{0,2} + v_1 \xrightarrow[a_1 = 2\frac{m}{s^2}, v_1 = 12\frac{m}{s}]{a_2 = 8\frac{m}{s^2}, v_{0,2} = 0\frac{m}{s}} 8t_2 + 0 = 2t_2 + 12 \rightarrow 6t_2 = 12 \rightarrow t_2 = 2s$$

این یعنی این‌که تا ۲ ثانیه پس از شروع حرکت متحرک دوم (t ثانیه پس از شروع حرکت متحرک اول)، دو متحرک در حال دور شدن از یک‌دیگر هستند و پس از آن تا لحظه‌ای که متحرک دوم به متحرک اول برسد، فاصله‌ی بین آن‌ها کاهش می‌یابد (چون تندی متحرک دوم بعد از لحظه‌ی $t_2 = 2s$ بیشتر از تندی متحرک اول است)، پس باید ببینیم که دو متحرک در چه لحظه‌ای پس از شروع متحرک دوم، به هم می‌رسند.

$$x_1' = x_2 \xrightarrow[x_2 = \frac{1}{2}a_2 t^2 + V_{0,2} t + x_{0,2}]{x_1' = \frac{1}{2}a_1 t^2 + V_1 t + x_1} \frac{1}{2}a_1 t^2 + V_1 t + x_1 = \frac{1}{2}a_2 t^2 + V_{0,2} t + x_{0,2}$$

$$\xrightarrow[a_2 = 8\frac{m}{s^2}, V_{0,2} = 0\frac{m}{s}, x_{0,2} = 0m]{a_1 = 2\frac{m}{s^2}, V_1 = 12\frac{m}{s}, x_1 = 36m} \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} + 12t + 36 = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}^{4} t^2 + \cancel{0}^{0} t + 0 \rightarrow 3t^2 - 12t - 36 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 3} t^2 - 4t - 12 = 0 \rightarrow (t-6)(t+2) = 0 \rightarrow t_1 = 6s \checkmark \ , \ t_2 = -2s \times$$

بنابراین متحرک دوم، ۶ ثانیه پس از شروع واکنش به متحرک اول می‌رسد و بعد از آن، از متحرک اول سبقت می‌گیرد و عبور می‌کند. در این مدت زمان ۶ ثانیه، فاصله‌ی بین دو متحرک به اندازه‌ی ۲ ثانیه افزایش می‌یابد. پس فاصله‌ی بین دو متحرک به اندازه‌ی ۴(= ۲ − ۶) ثانیه کاهش می‌یابد.

تست‌درتست **متحرکی روی محور x از مبدأ محور با شتاب ثابت $0/5\frac{m}{s^2}$ از حال سکون به حرکت درمی‌آید. سه ثانیه بعد، متحرک دیگری روی محور x از همان نقطه و در همان جهت با شتاب ثابت $2\frac{m}{s^2}$ از حال سکون به حرکت درمی‌آید. در این حرکت، چند ثانیه فاصله‌ی بین دو متحرک در حال کاهش است؟** (ریاضی - ۱۴۰۴ نوبت اول)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲

---

۸. نیروهای وارد بر جسمی به جرم ۲kg متوازن‌اند. اگر در لحظه‌ی $t = 2s$ بردارهای مکان و سرعت جسم به ترتیب $\vec{r} = (-20m)\vec{i}$ و $\vec{v} = (+2m/s)\vec{i}$ باشند، بردار مکان جسم در لحظه‌ی $t_2 = 8s$ در SI کدام است؟

۱) $12\vec{i}$ ۲) $-4\vec{i}$ ۳) $-8\vec{i}$ ۴) $4\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۳ ساده | محاسباتی

چون نیروهای وارد بر جسم متوازن ($F_{net} = 0N$) و جسم در حال حرکت است، پس طبق قانون اول نیوتون، جسم با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. با جای‌گذاری داده‌ها در معادله‌ی مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست، مکان جسم و در نتیجه بردار مکان آن در لحظه‌ی $t_2 = 8s$ را پیدا می‌کنیم.

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow (x_8 - x_2) = 2(8-2) \Rightarrow x_8 + 20 = 12 \Rightarrow x_8 = -8m \Rightarrow \vec{r}_{8s} = (-8m)\vec{i}$$

درسنامه

قانون اول نیوتون: یک جسم، حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را حفظ می‌کند مگر آن‌که نیروی خالصی (غیرصفر) به آن وارد شود. به عبارت دیگر وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند، اگر جسم ساکن باشد، همچنان ساکن باقی می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد، سرعت جسم تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

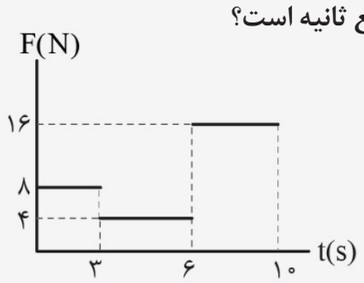
قانون دوم نیوتون: هرگاه بر جسم نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم دارد و در همان جهت نیروی خالص است و با جرم جسم نسبت وارون دارد.

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_{net}}{m} \Rightarrow \vec{F}_{net}=m\vec{a}$$

قانون سوم نیوتون: هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم نیز به جسم اول نیرویی هم‌اندازه و هم‌راستا اما در خلاف جهت وارد می‌کند.

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21} \quad و \quad F_{12}=F_{21}$$

۹. شکل زیر نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی به جرم ۴kg را نشان می‌دهد. اگر جسم در لحظه‌ی $t=0s$ تحت تأثیر این نیرو از حال سکون شروع به حرکت کند، شتاب متوسط آن در ۱۰ ثانیه‌ی اول حرکت، چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۱۰

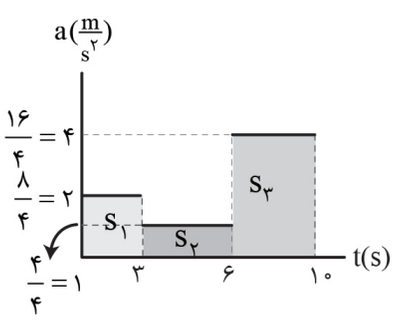
۲) ۲/۵

۳) ۵

۴) ۱/۹

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

اگر مقادیر F را بر جرم جسم $(m=4kg)$ تقسیم کنیم، نمودار نیروی خالص وارد بر جسم بر حسب زمان $(F-t)$ به نمودار شتاب - زمان $(a-t)$ آن تبدیل خواهد شد و می‌توانیم با استفاده از مساحت بین نمودار شتاب - زمان و محور t، تغییرات سرعت جسم در ۱۰ ثانیه‌ی اول را که برای محاسبه‌ی شتاب متوسط آن در این مدت زمان به آن نیاز داریم، به دست بیاوریم.



$$\Delta v=S_1+S_2+S_3 \xrightarrow[S_2=(6-3)\times 1=3\frac{m}{s},\ S_3=(10-6)\times 4=16\frac{m}{s}]{S_1=(3-0)\times 2=6\frac{m}{s}} \Delta v=6+3+16=25\frac{m}{s}$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=10s]{\Delta v=25\frac{m}{s}} a_{av}=\frac{25}{10}=2/5\frac{m}{s^2}$$

۱۰. گلوله‌ای از سطح زمین با سرعت اولیه‌ی $20m/s$ در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر بزرگی نیروی مقاومت هوا در تمام طول مسیر ثابت و ۰/۶ برابر وزن گلوله باشد، مدت زمان حرکت گلوله از لحظه پرتاب تا لحظه‌ی رسیدن مجدد گلوله به سطح زمین چند ثانیه است؟ $(g=10m/s^2)$

۱) ۴/۲۵

۲) ۲/۵

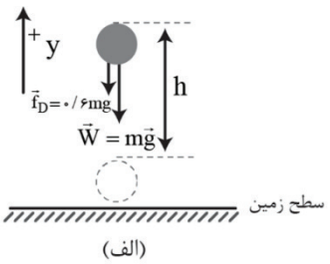
۳) ۳/۲۵

۴) ۳/۷۵

پاسخ: گزینه ۴ سخت | محاسباتی

مسیر رفت: در این مسیر، گلوله با سرعت $20\frac{m}{s}$ در راستای قائم به سمت بالا پرتاب شده و تا ارتفاع اوج h بالا می‌رود (شکل الف) و سرعتش در این ارتفاع صفر شده و تغییر جهت می‌دهد. با استفاده از قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت گلوله در مسیر رفت را حساب می‌کنیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



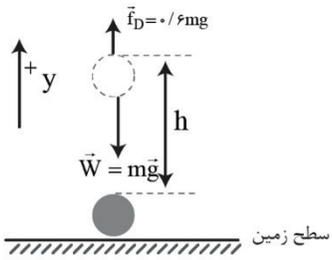
(الف)

$$F_{net}=ma\rightarrow -f_D-mg=ma\ \Rightarrow\ -0/6mg-mg=ma\xrightarrow{g=10\frac{m}{s^2}}a=-16\frac{m}{s^2}$$

سرعت اولیه $(20\frac{m}{s})$، سرعت نهایی $(0\frac{m}{s})$ و شتاب گلوله $(-16\frac{m}{s^2})$ را داریم و مدت زمان حرکت گلوله را می‌خواهیم. پس می‌توانیم از معادله‌ی سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست استفاده کنیم.

$$v_{اوج}=at_{رفت}+v_{0,رفت}\xrightarrow[v_{0,رفت}=20\frac{m}{s}]{v_{اوج}=0\frac{m}{s},a=-16\frac{m}{s^2}}0=-16t_{رفت}+20\rightarrow t_{رفت}=\frac{5}{4}s$$

مسیر برگشت: در این مسیر، گلوله از ارتفاع اوج h به سمت پایین حرکت می‌کند و در نهایت به سطح زمین می‌رسد (شکل ب).



(ب)

با استفاده از قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت گلوله در مسیر برگشت را حساب می‌کنیم.

$$F'_{net}=ma'\rightarrow 0/6mg-mg=ma'\xrightarrow{g=10\frac{m}{s^2}}a'=-4\frac{m}{s}$$

الان مثل حالت رفت، سرعت نهایی گلوله (سرعت برخورد به سطح زمین) را نداریم که بتوانیم مدت زمان حرکت گلوله در مسیر برگشت را حساب کنیم. باید سرعت نهایی گلوله $(V_{برخورد})$ را پیدا کنیم. از رابطه‌ی مستقل از زمان استفاده می‌کنیم. توجه کنید مسافت بالا رفتن با مسافت پایین آمدن برابر است.

$$v^2-v_0^2=2ah\rightarrow\frac{v_{اوج}^2-v_0^2}{v_{برخورد}^2-v_{اوج}^2}=\frac{2ah}{2a'(-h)}\xrightarrow[a=-16\frac{m}{s^2},a'=-4\frac{m}{s^2}]{v_{اوج}=0\frac{m}{s},v_{0,رفت}=20\frac{m}{s}}$$

$$\frac{0^2-20^2}{v_{برخورد}^2-0^2}=\frac{-16}{4}\rightarrow v_{برخورد}^2=100\xrightarrow[V_{برخورد}<0]{\sqrt{\ }}v_{برخورد}=-10\frac{m}{s}$$

حالا می‌توانیم مدت زمان برگشت گلوله از ارتفاع اوج h به سطح زمین را حساب کنیم.

$$v_{برخورد}=a't_{برگشت}+v_{اوج}\xrightarrow[v_{اوج}=0\frac{m}{s}]{v_{برخورد}=-10\frac{m}{s},a'=-4\frac{m}{s^2}}-10=-4t_{برگشت}+0\rightarrow t_{برگشت}=\frac{10}{4}s$$

بنابراین مدت زمان حرکت گلوله از لحظه‌ی پرتاب تا لحظه‌ی رسیدن مجدد گلوله به سطح زمین $t_{رفت}+t_{برگشت}=\frac{5}{4}+\frac{10}{4}=\frac{15}{4}=3/75s$ است.

۱۱. شخصی به جرم ۹۰kg درون یک آسانسور بر روی یک ترازوی فنری ایستاده است. اگر آسانسور با شتاب $-2\frac{m}{s^2}\vec{j}$ حرکت کند، بزرگی نیرویی که پای شخص به ترازو وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g=10\frac{m}{s^2}$ و جهت مثبت محور y به سمت بالا است.)

۱) ۱۰۸۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۹۰۰ ۴) گزینه‌های ۱ و ۲ می‌تواند درست باشد.

پاسخ: گزینه ۲ ساده | محاسباتی

از آن‌جا که جهت مثبت محور y رو به بالاست، پس جهت شتاب $-2\frac{m}{s^2}\vec{j}$ رو به پایین است. در نتیجه، آسانسور یا به صورت تندشونده و رو به پایین حرکت می‌کند یا به صورت کندشونده رو به بالا در هر دو صورت نیرویی که پاهای شخص به کف آسانسور وارد می‌کند، یکسان است.

$$F_N = m(g-a) \xrightarrow[a=۲\frac{m}{s^۲}]{m=۹۰kg,\ g=۱۰\frac{m}{s^۲}} F_N = ۹۰(۱۰-۲) = ۷۲۰N$$

درسنامه

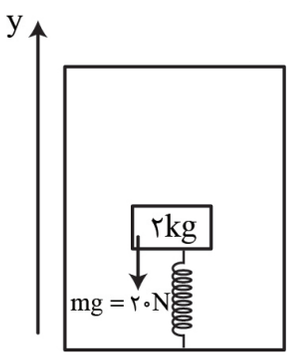
جهت حرکت	نوع حرکت	اندازه‌ی نیرویی که آسانسور به شخص وارد می‌کند.	جهت شتاب آسانسور
بالا	تندشونده	$F_N = m(g+a)$	بالا
بالا	کندشونده	$F_N = m(g-a)$	پایین
پایین	تندشونده	$F_N = m(g-a)$	پایین
پایین	کندشونده	$F_N = m(g+a)$	بالا

۱۲. فنری با جرم ناچیز و ثابت $۲\frac{N}{cm}$ به کف یک آسانسور متصل است، وزنه‌ای به جرم ۲kg روی آن قرار داده شده است. اگر آسانسور با شتاب $۴\frac{m}{s^۲}$ به سمت پایین شروع به حرکت کند، طول فنر به ۲۰cm می‌رسد. طول آزاد فنر (طول فنر هنگامی که نیرویی به آن وارد نمی‌شود) چند سانتی‌متر است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) ۲۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

ابتدا مطابق شکل زیر، نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم سپس از قانون دوم نیوتون کمک می‌گیریم و طول آزاد فنر $(L_۰)$ را به دست می‌آوریم (جهت مثبت محور y را رو به بالا در نظر گرفتیم). چون جهت نیروی فنر را نمی‌دانیم آن را رسم نمی‌کنیم.



$$\vec{F}_{net} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_e - ۲\vec{j} = ۲(-۴)\vec{j} \Rightarrow \vec{F}_e = +۱۲\vec{j}$$

تغییر طول فنر از طول آزاد را حساب می‌کنیم:

$$F_e = kx \Rightarrow ۱۲ = ۲x \Rightarrow x = ۶cm$$

چون نیروی فنر بالاسو است، فنر جمع شده و طول آن از طول آزاد کمتر است. پس:

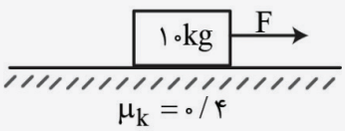
$$x = ۶cm \xrightarrow[L=۲۰cm]{\Delta x = L_۰ - L} L_۰ - ۲۰ = ۶ \rightarrow L_۰ = ۲۶cm$$

درسنامه:

اگر فنر را به اندازه‌ی x بکشیم یا فشرده کنیم، فنر نیرویی به جسم وارد می‌کند که اندازه‌ی آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$F_e = \underset{\text{ثابت فنر } (\frac{N}{m})}{\uparrow K}\, x$$

۱۳. توسط طناب سبکی با نیروی افقی $F=۱۰۰N$ یک جسم ۱۰ کیلوگرمی روی سطح افقی از حال سکون به حرکت درمی‌آید. اگر پس از طی مسافت ۱۲ متر طناب قطع شود، مدت زمان حرکت جسم از لحظه‌ی شروع حرکت تا لحظه‌ی توقف آن چند ثانیه است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) ۲
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

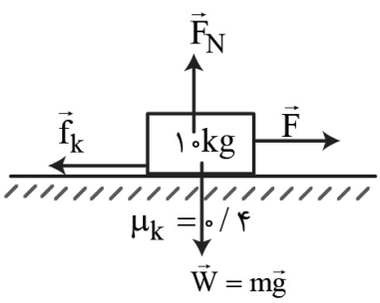
حرکت جسم از لحظه‌ی شروع حرکت تا لحظه‌ی توقف آن، طی دو مرحله انجام می‌شود:

۱- از لحظه‌ی شروع حرکت تا لحظه‌ی قطع طناب

۲- از لحظه‌ی قطع طناب تا لحظه‌ی توقف

از لحظه‌ی شروع حرکت تا لحظه‌ی قطع طناب:

از آن‌جا که جسم حرکت می‌کند، پس نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع جنبشی است. ابتدا باید شتاب جسم را با استفاده از قانون دوم نیوتون به دست بیاوریم سپس با کمک معادله‌ی مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، مدت زمان حرکت جسم را از لحظه‌ی شروع حرکت تا لحظه‌ای که طناب قطع می‌شود، حساب کنیم.



$$F_{net}=ma \rightarrow F-f_k=ma_۱ \xrightarrow{f_k=\mu_k F_N=\mu_k mg} F-\mu_k mg=ma_۱$$

$$\xrightarrow[m=۱۰kg,g=۱۰\frac{m}{s^۲}]{F=۱۰۰N,\mu_k=۰/۴} ۱۰۰-\overset{۴۰}{\cancel{۰/۴\times۱۰\times۱۰}}=۱۰a_۱ \rightarrow a_۱=۶\frac{m}{s^۲}$$

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}a_۱t_۱^۲+V_۰t_۱ \xrightarrow[V_۰=۰\frac{m}{s}]{\Delta x=۱۲m,a_۱=۶\frac{m}{s^۲}} ۱۲=\frac{۱}{\cancel{۲}}\times\cancel{۶}t_۱^۲ \rightarrow t_۱^۲=۴ \xrightarrow{\sqrt{}} t_۱=۲s$$

از لحظه‌ی قطع طناب تا لحظه‌ی توقف: در این مرحله، طناب قطع می‌شود و جسم تحت تأثیر نیروی اصطکاک به حرکت خود ادامه می‌دهد تا متوقف شود. شتاب حرکت جسم در این مرحله را نیز به دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma \rightarrow ۰-f'_k=ma_۲ \xrightarrow[m=۱۰kg,\mu_k=۰/۴,g=۱۰\frac{m}{s^۲}]{f'_k=\mu_k F_N=\mu_k mg} -۰/۴\times۱۰\times۱۰=۱۰a_۲ \rightarrow a_۲=-۴\frac{m}{s^۲}$$

الان باید ببینیم از لحظه‌ای که طناب قطع می‌شود، چند ثانیه طول می‌کشد تا جسم متوقف شود. شتاب جسم $(a_۲=-۴\frac{m}{s^۲})$ سرعت نهایی آن $(v_۲=۰\frac{m}{s})$ را داریم. پس اگر سرعت اولیه‌ی جسم در این مرحله را که همان سرعت نهایی مرحله‌ی قبل است، پیدا کنیم می‌توانیم با کمک معادله‌ی سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، مدت زمان طی شده در این مرحله را حساب کنیم.

$$v_۱=a_۱t_۱+v_۰ \xrightarrow[t_۱=۲s_۰,v_۰=۰\frac{m}{s}]{a_۱=۶\frac{m}{s^۲}} v_۱=۶\times۲+۰=۱۲\frac{m}{s}$$

$$v_۲=a_۲t_۲+v_۱ \xrightarrow[v_۱=۱۲\frac{m}{s}]{v_۲=۰\frac{m}{s},a_۲=-۴\frac{m}{s^۲}} ۰=-۴t_۲+۱۲ \rightarrow t_۲=۳s$$

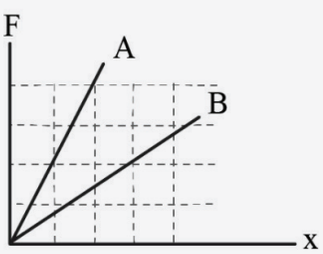
بنابراین، از لحظه‌ی شروع حرکت جسم تا لحظه‌ی توقف آن، مدت زمان $(t_۱+t_۲=۲+۳)۵s$ طول می‌کشد.

درسنامه

نوع نیروی اصطکاک	رابطه
ایستایی	رابطه‌ای ندارد و اندازه‌ی آن با قانون دوم نیوتون به دست می‌آید.
ایستایی بیشینه	$f_{s,max}=\mu_k F_N$
جنبشی	$f_k=\mu_k F_N$

تذکر: برای یک جسم ساکن روی سطح افقی اگر $f_{s,max}\le F_{\text{محرک}}$ باشد، جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک وارد بر جسم برابر با $F_{\text{محرک}}$ است و اگر $f_{s,max}< F_{\text{محرک}}$ باشد، جسم حرکت می‌کند،نیروی اصطکاک از نوع جنبشی (f_k) است.

۱۴. نمودار اندازه نیروی کشسانی بر حسب تغییر طول برای دو فنر A و B مطابق شکل زیر است. اگر به انتهای فنر A وزنه‌ی ۶۰۰ گرمی آویزان کنیم، پس از رسیدن به تعادل، ۱۰cm به طول فنر A اضافه می‌شود. اگر به انتهای فنر B وزنه ۲۰۰ گرمی آویزان کنیم، طول آن پس از رسیدن به تعادل چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد؟



۱) ۳۰

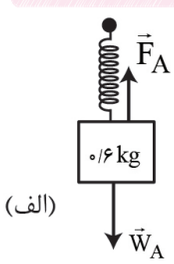
۲) $\frac{۱۰}{۳}$

۳) ۱۰

۴) ۹۰

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

گام اول) دو نیروی کشش فنر $(\vec{F})$ و نیروی وزن $(\vec{W})$ بر وزنه وارد می‌شود (شکل الف). از آن‌جا که وزنه و فنر A در حال تعادل هستند، می‌توان نوشت:



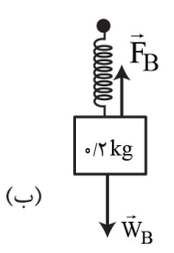
(الف)

$$F_A=W_A \xrightarrow[W_A=m_A g]{F_A=k_A x_A} k_A x_A=m_A g \xrightarrow[m_A=۰/۶kg]{x_A=۱۰cm=۰/۱m} ۰/۱k_A=۰/۶g \to k_A=۶g$$

گام دوم) با استفاده از نمودار نیروی کشسانی فنر بر حسب تغییر طول آن، نسبت ثابت فنر (K_A)A به ثابت فنر (K_B)B را می‌نویسیم تا بتوانیم ثابت فنر (K_B)B را به دست بیاوریم.

$$\frac{k_A}{k_B}=\frac{F_A}{F_B}\times\frac{x_B}{x_A} \to \frac{k_A}{k_B}=\frac{۲}{۲}\times\frac{۳}{۱} \to k_A=۳k_B \xrightarrow{k_A=۶g} \overset{۲}{\cancel{۶}}g=\overset{۱}{\cancel{۳}}k_B \to k_B=۲g$$

گام سوم) حالاکه ثابت فنر (k_B)B را پیدا کردیم، می‌توانیم اندازه‌ی افزایش طول فنر (x_B)B را هنگامی‌که وزنه‌ی ۲۰۰ گرمی به آن آویزان و به تعادل رسیده است (شکل ب) حساب کنیم.



(ب)

$$\xrightarrow[W_B=m_B g]{F_B=k_B x_B} k_B x_B=m_B g \xrightarrow[m_B=۰/۲kg]{k_B=۲g} \overset{۱}{\cancel{۲}}\overset{۱}{\cancel{g}}x_B=\overset{۰/۱}{\cancel{۰/۲}}\overset{۱}{\cancel{g}} \to x_B=۰/۱m=۱۰cm$$

۱۵. خودرویی با شتاب ثابت به بزرگی $۵\frac{m}{s^۲}$ از حال سکون روی جاده مستقیم و افقی شروع به حرکت می‌کند. بزرگی نیرویی که صندلی خودرو به راننده وارد می‌کند، چند برابر وزن راننده است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) ۱

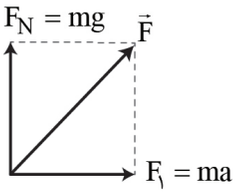
۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۵}$

۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

گام اول) کفهٔ صندلی یک نیروی عمودی رو به بالا به راننده وارد می‌کند $(\vec{F}_N)$ که برابر با وزن راننده است و پشتی صندلی یک نیروی افقی رو به جلو به راننده وارد می‌کند $(\vec{F}_1)$. بزرگی نیرویی که صندلی به راننده وارد می‌کند، برابر با برایند این دو نیرو است $(\vec{F}_{net})$.

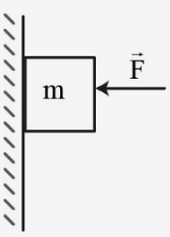


$$F=\sqrt{F_N^2+F_1^2} \xrightarrow[F=ma]{F_N=mg} F=\sqrt{(mg)^2+(ma)^2} \xrightarrow[a=5\frac{m}{s^2}]{g=10\frac{m}{s^2}} F=\sqrt{\underbrace{(10m)^2}_{100m^2}+\underbrace{(5m)^2}_{25m^2}}=\sqrt{125m^2}=5\sqrt{5}m$$

گام دوم) سوال نسبت $\frac{F_{net}}{mg}$ را می‌خواهد و ما هم حسابش می‌کنیم.

$$\frac{F}{mg}=\frac{5\sqrt{5}m}{10m}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

۱۶. مطابق شکل قطعه چوبی با نیروی افقی $\vec{F}$ به دیوار فشرده و ساکن نگه داشته شده است. اگر اندازه نیروی $\vec{F}$ دو برابر شود، کدام مورد درست است؟



الف) بزرگی نیروی اصطکاک ۲ برابر می‌شود.

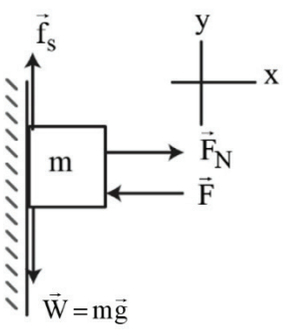
ب) نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، افزایش می‌یابد و کم‌تر از ۲ برابر حالت قبل می‌شود.

پ) زاویه بین نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند با نیروی اصطکاک وارد بر جسم افزایش می‌یابد.

ت) بزرگی نیروی خالص وارد بر جسم افزایش می‌یابد.

۱) الف و ب ۲) ب و پ ۳) پ و ت ۴) الف و ت

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی



از آن‌جا که جسم ساکن است، پس نیروی خالص وارد بر آن در راستای محورهای x و y صفر و نیروی اصطکاک وارد بر جسم از نوع ایستایی $(\vec{f}_s)$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_{net,x}=0 \rightarrow F_N-F=0 \rightarrow F_N=F$$

$$F_{net,y}=0 \rightarrow f_s-W \xrightarrow{W=mg} f_s=mg$$

چون $F_N=F$ است، با دو برابر شدن اندازه‌ی نیروی $\vec{F}$، اندازه‌ی نیروی $\vec{F}_N$ نیز دو برابر می‌شود $(F_{N,2}=2F_N)$. حالا عبارت را بررسی می‌کنیم.

الف همان‌طور که محاسبه کردیم، نیروی اصطکاک وارد بر جسم از نوع ایستایی و برابر با وزن جسم است $(f_s=mg)$ و با دو برابر شدن اندازه‌ی نیروی $\vec{F}_N$، تغییر نمی‌کند $(f_{s,2}=f_s=mg)$. ۱ و ع پَرا!

ب اندازه‌ی نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند $(\vec{R})$ برابر با برآیند دو نیروی $\vec{F}_N$ و $\vec{f}_s$ است. نسبت این نیرو در حالت دوم $(\vec{R}_2)$ به حالت اول $(\vec{R}_1)$ را می‌نویسیم.

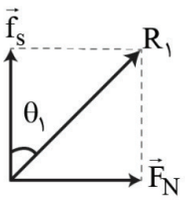
$$R=\sqrt{f_s^2+F_N^2} \rightarrow \frac{R_2}{R_1}=\sqrt{\frac{f_{s,2}^2+F_{N,2}^2}{f_s^2+F_N^2}} \xrightarrow[F_{N,2}=2F_N]{f_{s,2}=f_s} \frac{R_2}{R_1}=\sqrt{\frac{f_s^2+4F_N^2}{f_s^2+F_N^2}}$$

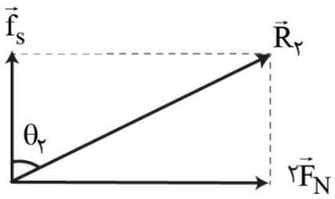
$$\frac{R_2}{R_1}=\sqrt{\frac{f_s^2+F_N^2+3F_N^2}{f_s^2+F_N^2}}=\sqrt{1+\frac{3F_N^2}{f_s^2+F_N^2}} \xrightarrow{\frac{3F_N^2}{f_s^2+F_N^2}<3} 1<\frac{R_2}{R_1}<2$$

بنابراین با دو برابر شدن اندازه‌ی نیروی $\vec{F}$، نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند افزایش می‌یابد و کم‌تر از ۲ برابر حالت قبل می‌شود. ✓ ۳ پَرَپَرا!

SanjeshCloud

پ زاویه‌ی بین نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند $(\vec{R})$ با نیروی اصطکاک وارد بر جسم $(\vec{f}_s)$ قبل از دو برابر شدن نیروی $\vec{F}$ مطابق شکل (الف) و پس از دو برابر شدن نیروی $\vec{F}$ مطابق شکل (ب) است. همان‌طور که می‌بینید، این زاویه با دو برابر شدن اندازه‌ی نیروی $\vec{F}$ افزایش می‌یابد. ✓



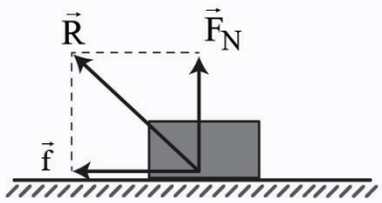


$\theta_2 > \theta_1$

ت قبل و پس از دو برابر شدن اندازه‌ی نیروی $\vec{F}$، جسم ساکن است. پس در هر دو حالت نیروی خالص وارد بر جسم صفر است و با دو برابر شدن اندازه‌ی نیروی F، تغییر نمی‌کند. ✗

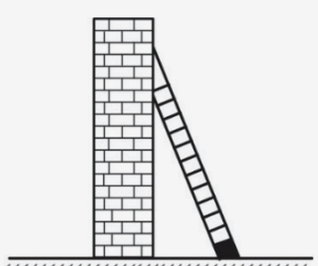
درسنامه

اندازه‌ی نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند (R)، برابر با برآیند دو نیروی عمودی سطح $(\vec{F}_N)$ و نیروی اصطکاک $(\vec{f})$ است. در این رابطه، f می‌تواند f_s، $f_{s,max}$ یا f_k باشد.



$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

۱۷. مطابق شکل، نردبانی به جرم ۲۰kg به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه داده شده است. اگر نردبان در آستانه‌ی سر خوردن و بزرگی نیرویی که دیوار به نردبان وارد می‌کند ۱۵۰N باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین نردبان و سطح زمین کدام است؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$



۱) ۰/۲۵

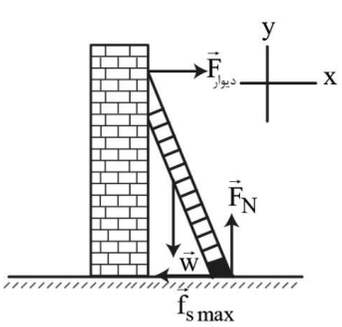
۲) ۰/۵

۳) ۰/۷۵

۴) ۰/۴

پاسخ: گزینه ۳ ساده | محاسباتی

ابتدا نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم.



از آن‌جا که نردبان در آستانه‌ی سر خوردن است، پس نیروی خالص وارد بر جسم در راستای محورهای x و y صفر است و می‌توان نوشت:

$$F_{net,y} = 0 \rightarrow F_N - W = 0 \xrightarrow{W = mg = 20 \times 10 = 200N} F_N = 200N$$

$$F_{net,x} = 0 \rightarrow F_{دیوار} - f_{s,max} = 0 \xrightarrow{f_{s,max} = \mu_s F_N} F_{دیوار} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N = 200N]{F_{دیوار} = 150N} 150 = \mu_s \times 200 \rightarrow \mu_s = 0/75$$

تست‌درتست نردبانی به جرم ۱۶kg به دیوار قائم بدون اصطکاک تکیه دارد و پایه‌ی آن روی سطح افقی در آستانه‌ی سُر خوردن است. اگر نیرویی که در این حالت از طرف نردبان به سطح افقی وارد می‌شود ۲۰۰N باشد، ضریب اصطکاک ایستایی نردبان با این سطح چقدر است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$ (ریاضی - ۱۴۰۰ خارج)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

۱۸. اتومبیلی با تندی ثابت $۱۰\frac{m}{s}$ یک پیچ افقی به شعاع ۲۰m را دور می‌زند. بزرگی نیروی مرکزگرای وارد بر اتومبیل چند برابر وزن اتومبیل است و کدام نیرو نقش نیروی مرکزگرا را دارد؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

۱) ۱، اصطکاک جنبشی ۲) ۱، اصطکاک ایستایی ۳) $\frac{۱}{۲}$، اصطکاک ایستایی ۴) $\frac{۱}{۲}$، اصطکاک جنبشی

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

طبق رابطهٔ $F_c = m\frac{v^۲}{r}$، بزرگی نیروی مرکز گرا را حساب می‌کنیم:

$$F_c = m\frac{v^۲}{r} = m(\frac{۱۰^۲}{۲۰}) = ۵۰m$$

حالا نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{F_c}{W} = \frac{۵۰m}{m\times ۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

نیروی اصطکاک ایستایی در عرض جاده نقش نیروی مرکزگرا را بازی می‌کند.

درسنامه

وقتی خودرویی به شکل زیر در یک پیچ مسطح افقی به شعاع انحنای r با تندی ثابت v در حال حرکت است، نیروی اصطکاک ایستایی، با جلوگیری از لغزش خودرو سبب حرکت دایره‌ای یکنواخت آن شده و نقش نیروی مرکزگرا را بازی می‌کند. بنابراین در این حالت داریم:



$$f_s = F_c \Rightarrow f_s = m\frac{v^۲}{r}$$

طبق این رابطه با افزایش تندی خودرو نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر آن هم افزایش می‌یابد. بنابراین حداکثر تندی خودرو برای این‌که از مسیر دایره‌ای خود منحرف نشود، در شرایطی ایجاد می‌شود که نیروی اصطکاک ایستایی، بیشینه باشد. بنابراین در این حالت داریم:

$$f_{s,max} = m\frac{v_{max}^۲}{r} \xrightarrow[F_N = mg]{f_{v,max} = F_{N\mu_s}} mg\mu_s = m\frac{v_{max}^۲}{r} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{rg\mu_s}$$

تست‌درتست در یک روز بارانی خودرویی می‌خواهد روی سطح افقی پیچ دایره‌ای به شعاع ۲۵ متر را دور بزند. اگر حداکثر سرعتی که خودرو می‌تواند روی پیچ حرکت کند و نلغزد، $۳۶\frac{km}{h}$ باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیک ها و سطح جاده چقدر است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$ (ریاضی خارج ۱۴۰۳)

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ: گزینه ۴

۱۹. شتاب گرانش در ارتفاع ۱۶۰۰km از سطح زمین چند برابر شتاب گرانش در ارتفاع ۶۴۰۰km از سطح زمین است؟ (شعاع زمین ۶۴۰۰km است.)

۱) ۱۶ ۲) ۴ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $\frac{۶۴}{۲۵}$

پاسخ: گزینه ۴ ساده | محاسباتی

کافی است رابطهٔ $g=\frac{GM}{r^2}$ را به صورت نسبی برای دو حالت بنویسیم:

$$\frac{g_1}{g_2}=(\frac{r_2}{r_1})^2=(\frac{R_e+h_2}{R_e+h_1})^2=(\frac{6400+6400}{6400+1600})^2=(\frac{4+4}{4+1})^2=\frac{64}{25}$$

درسنامه

نیروی گرانشی بین دو جسم:

$$F=G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(m_1: جرم جسم (۱)، m_2: جرم جسم (۲)، r: فاصلهٔ مراکز دو جسم)

شتاب گرانشی در ارتفاع h از سطح یک سیاره:

$$g=G\frac{M}{(R+h)^2}$$

(M: جرم سیاره، R: شعاع سیاره)

نسبت شتاب گرانش دو نقطه در ارتفاع‌های h_1 و h_2 از یک سیاره:

$$\frac{g_1}{g_2}=(\frac{R+h_2}{R+h_1})^2$$

تست‌درتست **جرم زمین ۸۰ برابر جرم ماه و شعاع زمین ۴ برابر شعاع ماه است. اگر شتاب گرانشی در سطح زمین $980\frac{cm}{s^2}$ باشد، شتاب گرانشی در سطح ماه چند سانتی‌متر بر مربع ثانیه است؟ (ماه و زمین را کره کامل در نظر می‌گیریم.)** (تجربی خارج ۱۴۰۴)

۱) ۹۸ ۲) ۱۹۶ ۳) ۳۹۲ ۴) ۴۹۰

پاسخ: گزینه ۲

۲۰. دو ماهوارهٔ هم‌جرم A و B در مدارهای دایره‌ای به دور زمین در حل گردش‌اند. اگر دورهٔ تناوب ماهوارهٔ A، ۸ بر ابر دورهٔ گردش ماهوارهٔ B باشد، بزرگی نیروی مرکزگرای وارد بر ماهوارهٔ A چند برابر بزرگی نیروی مرکزگرای وارد بر ماهوارهٔ B است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۳ سخت | محاسباتی

ابتدا نسبت شعاع گردش دو ماهواره را به دست می‌آوریم:

$$T\propto\sqrt{r^3}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\sqrt{(\frac{r_A}{r_B})^3}\Rightarrow 8=\sqrt{(\frac{r_A}{r_B})^3}\Rightarrow\frac{r_A}{r_B}=4$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $a_c=g=\frac{GM}{r^2}$ به صورت نسبتی، نسبت شتاب گرانش در محل دو ماهواره را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a_{c(A)}}{a_{c(B)}}=\frac{g_A}{g_B}=(\frac{r_B}{r_A})^2=(\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16}$$

چون جرم دو ماهواره با هم برابر است، نسبت وزن آن‌ها برابر است با:

$$\frac{W_A}{W_B}=\frac{m_A g_A}{m_B g_B}=\frac{g_A}{g_B}=\frac{1}{16}$$

درسنامه

روابط نسبتی بین دو ماهواره در حال گردش به دور یک سیاره:

شتاب:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{g_2}{g_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2$$

تندی:

$$\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$$

دورهٔ تناوب:

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{(\frac{r_2}{r_1})^3}$$

تست‌درتست **اگر تندی ماهوارهٔ A، دو برابر تندی ماهوارهٔ B باشد، دورهٔ آن چند برابر دورهٔ ماهوارهٔ B است؟** (ریاضی ۱۴۰۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

آزمون ماز

۱۷ مهرماه

فیزیک

۱- معادلهٔ حرکت جسمی در SI به‌صورت $x=t^{۲}-۶t+۵$ است. کدام‌یک از گزاره‌های زیر در ارتباط با این جسم درست است؟

الف ـ بردار مکان جسم فقط در لحظهٔ $t=۵s$ تغییر جهت داده است.

ب ـ این جسم درمجموع به مدت ۳ ثانیه به مبدأ مکان نزدیک می‌شود.

ج ـ سرعت متوسط جسم در بازهٔ زمانی صفر تا $t=۲s$، ۲ متر بر ثانیه است.

د ـ در لحظه‌ای که جسم تغییر جهت داده است، جسم در مکان $x=-۴m$ است.

۱) «الف» و «ب» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «د» ۴) «ب» و «ج»

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۶)

بررسی موارد:

الف

بردار مکان جسم در لحظه (یا لحظاتی) تغییر جهت می‌دهد که جسم از مبدأ مکان $(x=۰)$ عبور کند؛ پس معادلهٔ حرکت جسم را مساوی صفر می‌گذاریم تا ریشه‌های معادلهٔ حرکت جسم را به‌دست آوریم:

$$x=t^{۲}-۶t+۵\xrightarrow{x=۰}t^{۲}-۶t+۵=۰\Rightarrow(t-۱)(t-۵)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=۱s\Rightarrow\text{قابل قبول}\\t=۵s\Rightarrow\text{قابل قبول}\end{cases}$$

دو لحظهٔ $t=۱s$ و $t=۵s$، لحظاتی هستند که جسم از مبدأ مکان $(x=۰)$ عبور کرده است؛ پس در این لحظات، جهت بردار مکان جسم تغییر کرده است؛ پس گزارهٔ «الف» که گفته بردار مکان جسم فقط در لحظهٔ $t=۵s$ تغییر جهت داده است، نادرست است.

ب

نمودار مکان ـ زمان جسم را رسم می‌کنیم:

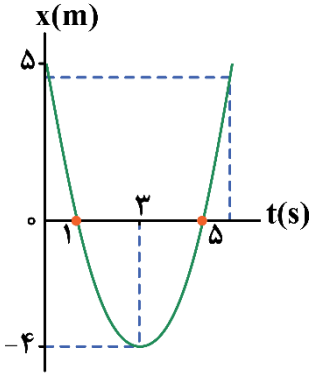
از گزارهٔ قبل فهمیدیم ریشه‌های معادلهٔ حرکت جسم، $t=۱s$ و $t=۵s$ است و همچنین $t_{\text{رأس}}$ برابر است با:

$$t_{\text{رأس}}=\frac{-b}{۲a}\xrightarrow[a=۱]{b=-۶}t_{\text{رأس}}=\frac{-(-۶)}{۲\times۱}=\frac{۶}{۲}=۳s$$

حال مکان جسم در لحظهٔ $t_{\text{رأس}}=۳s$ را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$x=t^{۲}-۶t+۵\xrightarrow{t_{\text{رأس}}=۳s}x=(۳)^{۲}-۶(۳)+۵=-۴m$$

حال با استفاده از اطلاعاتی که به‌دست آوردیم، نمودار مکان ـ زمان جسم را رسم می‌کنیم:



بنابراین جسم در بازهٔ $t=۰$ تا $t=۱s$ و $t=۳s$ تا $t=۵s$، درمجموع به مدت ۳ ثانیه درحال نزدیک‌شدن به مبدأ مکان است.

پس گزارهٔ «ب» درست است.

مکان جسم در لحظات $t=۰$ و $t=۲s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=t^۲-۶t+۵\xrightarrow{t=۰}x_۱=(۰)^۲-۶(۰)+۵=+۵m$$

$$x=t^۲-۶t+۵\xrightarrow{t=۲s}x_۲=(۲)^۲-۶(۲)+۵=-۳m$$

حال، سرعت متوسط جسم را در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۲s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}\xrightarrow[t_۲=۲s\ ,\ t_۱=۰]{x_۲=-۳m\ ,\ x_۱=+۵m}v_{av}=\frac{-۳-(+۵)}{۲-۰}=\frac{-۸}{۲}=-۴\frac{m}{s}$$

پس سرعت متوسط جسم در بازهٔ زمانی صفر تا ۲ ثانیه، برابر $-۴\frac{m}{s}$ است و گزارهٔ «ج» نادرست است.

با توجه به این‌که معادلهٔ حرکت جسم (معادلهٔ مکان ـ زمان)، درجهٔ ۲ است؛ پس جسم در $t_{رأس}$، تغییر جهت داده است. در گزارهٔ «ب»، این زمان را برابر $t_{رأس}=۳s$ به‌دست آوردیم.

حال، مکان جسم در لحظهٔ $t_{رأس}=۳s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=t^۲-۶t+۵\xrightarrow{t_{رأس}=۳s}x=(۳)^۲-۶(۳)+۵=-۴m$$

پس مکان جسم در لحظه‌ای که تغییر جهت داده است $(t_{رأس}=۳s)$، برابر $x=-۴m$ است و گزارهٔ «د» درست است.

دقت کنید با استفاده از نمودار مکان ـ زمان جسم که در گزارهٔ «ب» رسم کردیم نیز می‌توانستیم ببینیم که جسم در لحظهٔ $t=۳s$ تغییر جهت داده است و مکان جسم در این لحظه $x=-۴m$ است.

پس درنهایت گزاره‌های «ب» و «د» درست هستند و گزینهٔ (۳) پاسخ تست است.

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت بر خط راست

یکی از روش‌های تعیین مکان جسم در هر لحظهٔ دلخواه t، استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان است. معادلهٔ مکان ـ زمان، مکان جسم را به‌صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد:

$$x=f(t)$$

برای مثال، فرض کنیم که معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $x=t^۲-۶t+۸$ باشد. با کمک معادلهٔ مکان ـ زمان می‌توان نکات زیر را در مورد حرکت این متحرک فهمید:

۱- مکان متحرک در هر لحظه: با جایگذاری هر لحظهٔ دلخواه در معادلهٔ مکان ـ زمان، مکان متحرک در آن لحظه به‌دست می‌آید. مثلاً برای معادلهٔ داده‌شده:

$$t_۱=۱s\Rightarrow x_۱=۱^۲-(۶\times ۱)+۸=۳m$$

$$t_۲=۶s\Rightarrow x_۲=۶^۲-(۶\times ۶)+۸=۸m$$

۲- جابه‌جایی: با پیداکردن مکان در دو لحظهٔ متفاوت، می‌توان جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی بین این دو لحظه را به‌دست آورد. مثلاً برای معادلهٔ داده‌شده:

$$\begin{cases}t_۱=۱s:x_۱=۳m\\ t_۲=۶s:x_۲=۸m\end{cases}\Rightarrow\Delta x=x_۲-x_۱=۸-۳=۵m$$

۳- سرعت متوسط: با تقسیم جابه‌جایی به طول بازهٔ زمانی، سرعت متوسط به‌دست می‌آید. مثلاً برای معادلهٔ داده‌شده:

سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱=۱s$ تا $t_۲=۶s$: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۵}{۶-۱}=۱\frac{m}{s}$

۴- تعیین لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان: دیدیم که بردار مکان جسم در هر لحظه، برداری است که مبدأ مختصات را به مکان جسم در آن لحظه وصل می‌کند؛ بنابراین در لحظه‌ای که متحرک از روی مبدأ مختصات عبور کند، جهت بردار مکان متحرک عوض می‌شود. درنتیجه اگر در

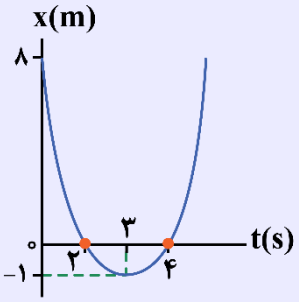
معادلهٔ مکان ـ زمان، $x=0$ قرار دهیم، لحظهٔ موردنظر به‌دست می‌آید. البته باید توجه کنید که علاوه‌بر شرط $x=0$، در این لحظه علامت x نیز باید عوض شود. مثلاً برای معادلهٔ داده‌شده، کافی است معادله را تعیین علامت کنیم. برای این کار ریشه‌های آن را محاسبه می‌کنیم:

t		۲		۴	
x	+	۰	-	۰	+

$$x=t^2-6t+8=(t-2)(t-4)\Rightarrow\begin{cases}t_1=2s\\t_2=4s\end{cases}$$

بنابراین در لحظات $t_1=2s$ و $t_2=4s$، جهت بردار مکان عوض می‌شود.

۵- علاوه‌بر کمیت‌های قبلی، می‌توان کمیت‌هایی **مثل مسافت طی‌شده**، **تندی متوسط**، **لحظات تغییر جهت حرکت** و ... را هم از روی معادلهٔ مکان ـ زمان به‌دست آورد که این کارها را برای حالت خاص معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ ۲ در بخش‌های بعدی انجام خواهیم داد؛ اما اینجا به‌خاطر داشته باشید که اگر بتوانیم معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده را رسم کنیم، می‌توان با کمک نکات مربوط به **نمودار مکان ـ زمان** به‌سادگی این کمیت‌ها را به‌دست آورد. مثلاً برای معادلهٔ داده‌شده، اگر آن را رسم کنیم، داریم:



$$x=t^2-6t+8\Rightarrow x=(t-2)(t-4)$$

مسافت طی‌شده در ۴ ثانیهٔ اول: $\ell=9+1=10m$

تندی متوسط در ۴ ثانیهٔ اول: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{10}{4}=2/5\frac{m}{s}$

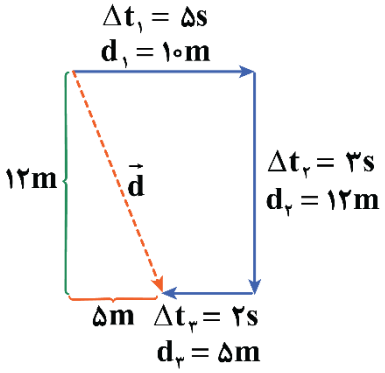
مثال

۲- متحرکی در صفحهٔ مختصات xoy درحال حرکت است. ابتدا در مدت ۵ ثانیه به‌اندازهٔ ۱۰m به سمت شرق، سپس در مدت ۳ ثانیه به‌اندازهٔ ۱۲m به سمت جنوب و درنهایت به مدت ۲ ثانیه به‌اندازهٔ ۵m به سمت غرب حرکت می‌کند. تندی متوسط این متحرک در کل حرکت آن، چند متر بر ثانیه بیش‌تر از بزرگی سرعت متوسط این متحرک است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۰ ۳) ۱/۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ **(متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳)**

بیایید مسیر حرکت این متحرک را رسم کنیم! شکل روبه‌رو این مسیر را نشان می‌دهد:



برای یافتن کل مسافت طی‌شده، کافی است اندازهٔ جابه‌جایی‌های انجام‌شده را جمع جبری کنیم:

$$\ell_{کل}=d_1+d_2+d_3=27m$$

از طرفی برای یافتن بزرگی جابه‌جایی کل، باید طول مسیر مستقیم بین مبدأ و مقصد را محاسبه کنیم:

$$d_{کل}=\sqrt{5^2+12^2}=13m$$

مدت‌زمان کل حرکت نیز به این صورت به‌دست می‌آید:

$$\Delta t_{کل}=\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3=10s$$

درنهایت می‌توان تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط کل را به این صورت به‌دست آورد:

$$\begin{cases}s_{av_{کل}}=\frac{\ell_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{27}{10}=2/7\frac{m}{s}\\v_{av_{کل}}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{13}{10}=1/3\frac{m}{s}\end{cases}\Rightarrow s_{av_{کل}}-v_{av_{کل}}=2/7-1/3=1/4\frac{m}{s}$$

مقایسهٔ مسافت و جابه‌جایی، تندی متوسط و سرعت متوسط

۱- در شکل زیر، متحرک از مسیر نشان‌داده‌شده از A به B می‌رود. در این صورت، طول مسیر واقعی برابر مسافت طی‌شده است و طول پاره‌خطی که A را به B وصل می‌کند، برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است (درواقع جابه‌جایی، کوتاه‌ترین مسافت میان دو نقطه است). به شکل زیر دقت کنید:



۲- مسافت، کمیتی نرده‌ای است؛ درحالی‌که جابه‌جایی، کمیتی برداری است و جهت دارد.

۳- یکای مسافت و جابه‌جایی، هر دو در SI برابر متر (m) است.

۴- اندازهٔ جابه‌جایی همواره کوچک‌تر یا مساوی مسافت طی‌شده است.

$$|\vec{d}| \le \ell$$

۵- در شرایطی جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه هستند که متحرک تغییر جهت ندهد و روی خط راست حرکت کند.

یه نمونهٔ باحال

در کدام‌یک از حرکت‌های زیر، مسافت طی‌شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است؟

الف: اتومبیلی که در مسیر مستقیم به سمت شمال حرکت می‌کند.

ب: اتومبیلی که ابتدا در مسیر مستقیم به سمت شمال حرکت می‌کند و سپس در مسیر مستقیم به سمت شرق می‌رود.

پ: ماهواره‌ای که در مسیر دایره‌ای دور کرهٔ زمین می‌چرخد.

ت: شناگری که طول استخر را شنا می‌کند و دوباره به مکان اولیهٔ خود برمی‌گردد.

پاسخ تشریحی: مطابق نکات فوق، برای آن‌که در حرکتی، مسافت طی‌شده هم‌اندازهٔ جابه‌جایی باشد، حرکت باید بدون هیچ‌گونه تغییر جهتی انجام شود و در مسیر مستقیم باشد. در بین عبارت‌های داده‌شده، فقط در عبارت «الف» متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت حرکت می‌کند.

۶- با تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان حرکت، تندی متوسط حرکت به‌دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

۷- با تقسیم جابه‌جایی بر زمان حرکت، سرعت متوسط به‌دست می‌آید:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\text{بردار جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

۸- تندی متوسط، کمیتی نرده‌ای است، درحالی‌که سرعت متوسط، کمیتی برداری است.

۹- اندازهٔ سرعت متوسط همواره کوچک‌تر یا مساوی تندی متوسط است. هنگامی این دو کمیت هم‌اندازه هستند که متحرک روی مسیر مستقیم بدون تغییر جهت حرکت کند.

۱۰- در حرکت بر روی محور x برای محاسبهٔ جابه‌جایی و سرعت متوسط داریم:

$$\vec{d} = \Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

مثال

۳- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که بر خط راست حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = 2t^2 - bt - 12$ است. اگر بردار مکان این متحرک در آغاز ثانیهٔ پنجم حرکت در SI به‌صورت $\vec{x} = 12\vec{i}$ باشد، در کدام‌یک از لحظه‌های زیر، جهت بردار مکان این متحرک عوض می‌شود؟

۱) پایان ثانیهٔ دوم ۲) پایان ثانیهٔ سوم ۳) ابتدای ثانیهٔ دوم ۴) ابتدای ثانیهٔ سوم

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶)

می‌دانیم ثانیهٔ پنجم، بازهٔ زمانی $t_1 = 4s$ تا $t_2 = 5s$ است که آغاز آن، لحظهٔ $t = 4s$ می‌شود. پس طبق صورت سؤال، در لحظهٔ $t = 4s$، مکان متحرک به‌صورت $x = +12m$ بوده است. با جایگذاری این داده‌ها در معادلهٔ مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$x = 2t^2 - bt - 12 \xrightarrow{t=4s\ ,\ x=12m} 12 = 32 - 4b - 12 \Rightarrow 4b = 8 \Rightarrow b = 2$$

پس معادلهٔ مکان ـ زمان این متحرک به‌صورت $x = 2t^2 - 2t - 12$ بوده است.

از طرفی باید دقت داشت که جهت بردار مکان در لحظه‌هایی که متحرک از مبدأ مکان $(x = 0)$ عبور می‌کند، عوض خواهد شد. این لحظه‌ها در اصل ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان هستند. پس بیایید ریشه‌های معادله را پیدا کنیم:

$$x = 2t^2 - 2t - 12 \xrightarrow{x=0} 2t^2 - 2t - 12 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (t-3)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3s \Rightarrow \text{قابل‌قبول} \\ t = -2s \Rightarrow \text{غیرقابل‌قبول} \end{cases}$$

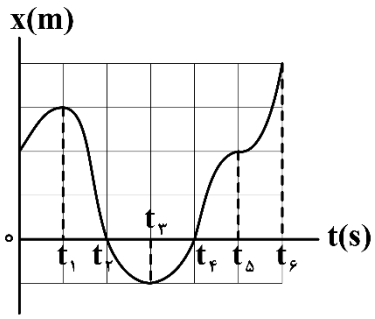
همان‌طور که می‌بینید، $t = 3s$ یک ریشهٔ مثبت (قابل‌قبول) و ساده است که علامت x در اطراف این ریشه عوض می‌شود و به بیان فیزیکی، متحرک در این لحظه از مبدأ مکان گذر کرده و جهت بردار مکان آن عوض خواهد شد. با توجه به گزینه‌ها، لحظهٔ $t = 3s$ همان لحظهٔ پایانی ثانیهٔ سوم است.

راهنمای مسیرت

مفاهیم ریاضی مربوط به توابع درجهٔ (۱) و درجهٔ (۲) و معادلات رو خوب یاد بگیر چون به درد فیزیکت می‌خوره!

ماز

۴- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازهٔ زمانی ..... متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و از مبدأ دور می‌شود و در بازهٔ زمانی ..... متحرک در جهت محور x حرکت کرده و به مبدأ نزدیک می‌شود.



۱) t_1 تا t_2، t_4 تا t_6

۲) t_1 تا t_2، t_3 تا t_4

۳) t_2 تا t_3، t_4 تا t_6

۴) t_2 تا t_3، t_3 تا t_4

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ نموداری ـ سریع ـ صفحهٔ ۸)

با توجه به نمودار مکان ـ زمان، داریم:

۱) دوری از مبدأ: (صفر تا t_1) و (t_2 تا t_3) و (t_4 تا t_6)

۲) نزدیکی به مبدأ: (t_1 تا t_2) و (t_3 تا t_4)

۳) حرکت در جهت محور x: (صفر تا t_1) و (t_3 تا t_6)

۴) حرکت در خلاف جهت محور: (t_1 تا t_3)

بنابراین داریم:

حرکت در خلاف جهت محور x و دوری از مبدأ: اشتراک (۱) و (۴) ← t_2 تا t_3

حرکت در جهت محور x و نزدیکی به مبدأ: اشتراک (۲) و (۳) ← t_3 تا t_4

راهنمای مسیرت

این سؤال از ساده‌ترین مفاهیم نمودار مکان ـ زمان طرح شده! اگه نتونستی جواب بدی حتماً درس‌نامه رو بخون و یه سؤال مشابهش برای خودت طرح کن!

از نمودار مکان ـ زمان، چه اطلاعاتی به‌دست می‌آید؟

۱- مکان اولیه: به مکان جسم در لحظهٔ شروع حرکت $(t_0 = 0)$، مکان اولیه می‌گویند و آن را با x_0 نشان می‌دهند. در نمودار مکان ـ زمان، x_0 نقطه‌ای است که نمودار محور xها را قطع می‌کند.

۲- مکان متحرک در هر لحظهٔ دلخواه t: هر نقطه از نمودار نشان می‌دهد که متحرک در هر لحظهٔ دلخواه t، در چه مکانی قرار دارد.

۳- بیش‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مختصات: توجه کنید که وقتی بیش‌ترین فاصله را بخواهیم، این فاصله هم می‌تواند در xهای مثبت و هم در xهای منفی باشد. پس بیش‌ترین مقداری را که x دارد (بیش‌ترین فاصله از محور t)، از روی نمودار تعیین می‌کنیم.

۴- در چه بازهٔ زمانی متحرک در جهت محور x یا خلاف جهت محور x حرکت می‌کند: در هر بازهٔ زمانی که شیب نمودار مثبت (نمودار رو به بالا) باشد، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و در هر بازهٔ زمانی که شیب نمودار منفی (نمودار رو به پایین) باشد، متحرک خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۵- لحظهٔ تغییر جهت حرکت: لحظه‌هایی که نمودار، بیشینه و کمینه است، لحظهٔ تغییر جهت حرکت است. در این لحظات علامت شیب نمودار تغییر می‌کند.

۶- لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک: در لحظه‌ای که نمودار از روی محور t عبور می‌کند $(x = 0)$ می‌شود و علامت آن تغییر می‌کند)، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد.

۷- در چه بازهٔ زمانی، متحرک به مبدأ مختصات نزدیک یا از آن دور می‌شود: در بازه‌های زمانی که نمودار به محور t نزدیک می‌شود، متحرک به مبدأ مختصات $(x = 0)$ نزدیک می‌شود و در بازه‌های زمانی که نمودار از محور t دور می‌شود، متحرک از مبدأ مختصات دور می‌شود.

۸- جابه‌جایی متحرک در یک بازهٔ زمانی: با داشتن مکان اولیه و نهایی در هر بازهٔ زمانی، جابه‌جایی متحرک محاسبه می‌شود:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

۹- مسافت طی‌شده در یک بازهٔ زمانی: اگر متحرک در بازهٔ زمانی موردنظر، تغییر جهت ندهد، مسافت طی‌شده با بزرگی جابه‌جایی برابر است. ولی اگر در بازهٔ موردنظر، نقاط بیشینه یا کمینهٔ نمودار وجود داشته باشد، ابتدا جابه‌جایی را از ابتدای بازه تا لحظهٔ تغییر جهت و سپس از لحظهٔ تغییر جهت تا انتهای بازه محاسبه می‌کنیم. سپس قدر مطلق جابه‌جایی‌ها را جمع می‌کنیم تا مسافت طی‌شده محاسبه شود.

$$\ell = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \cdots$$

۱۰- توقف متحرک در یک بازهٔ زمانی: در بازه‌های زمانی که نمودار مکان ـ زمان به‌صورت یک خط صاف و افقی است، متحرک توقف کرده است.

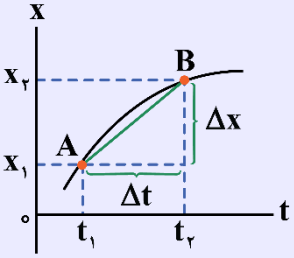
۱۱- سرعت متوسط و تندی متوسط: پس از محاسبهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده، می‌توانیم سرعت متوسط و تندی متوسط را در بازهٔ زمانی موردنظر محاسبه کنیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

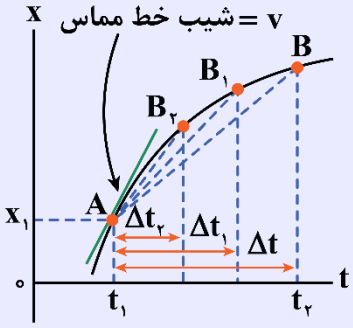
البته برای محاسبهٔ سرعت متوسط می‌توان از روش‌های هندسی هم کمک گرفت.

به نمودار مکان ـ زمان زیر که پاره‌خط بین دو نقطهٔ دلخواه آن مطابق شکل رسم شده است، توجه کنید. همان‌طور که از درس ریاضی می‌دانید نسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ برابر شیب پاره‌خطی است که دو نقطهٔ A و B را به‌هم وصل می‌کند. از سوی دیگر، با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط، می‌دانیم که این نسبت برابر سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 است. به این ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت که سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه از زمان برابر شیب پاره‌خطی است که نقاط نظیر آن دو لحظه در نمودار مکان ـ زمان را به یکدیگر وصل می‌کند:



۱۲- سرعت لحظه‌ای: پیش از این دیدیم که سرعت متوسط متحرک بین هر دو لحظهٔ دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان ـ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند. همان‌طور که در شکل زیر دیده می‌شود، اگر Δt به‌تدریج کوچک و کوچک‌تر شود، نقطهٔ B به نقطهٔ A نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؛ به‌طوری که اگر Δt به سمت صفر میل کند $(\Delta t \to 0)$ نقطهٔ B به نقطهٔ A بسیار نزدیک می‌شود و سرانجام خط واصل بین این دو نقطه به خط مماس بر نمودار در نقطهٔ A میل می‌کند. در این حالت، شیب خط مماس برابر سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 است.

به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که سرعت در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه است:



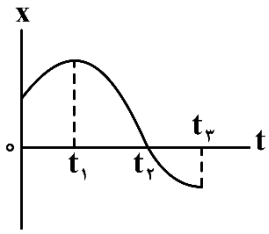
نکات

۱- در لحظهٔ تغییر جهت حرکت (نقاط بیشینه و کمینهٔ نمودار مکان ـ زمان)، سرعت متحرک برابر صفر است. همچنین علامت سرعت (علامت شیب خط مماس بر نمودار) در این لحظه عوض می‌شود.

۲- تندی متحرک در هر لحظه، همان اندازهٔ سرعت لحظه‌ای (اندازهٔ شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه) است.

تاز

۵- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به‌صورت شکل زیر است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (طول بازه های زمانی صفر تا t_1، t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 یکسان است.)



۱) در بازهٔ زمانی صفر تا t_2، اندازهٔ سرعت متوسط کوچک‌تر از تندی متوسط است.

۲) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، تندی متحرک رو به افزایش است.

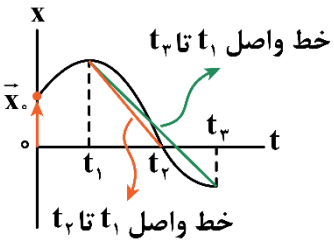
۳) بزرگی سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، کم‌تر از بزرگی سرعت متوسط آن در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 است.

۴) در مبدأ زمان، بردار مکان متحرک در جهت محور است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/نموداری ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰)

بررسی گزینه‌ها:

۱



چون متحرک در لحظهٔ t_1 تغییر جهت داده است، در بازهٔ زمانی ۰ تا t_2، اندازهٔ سرعت متوسط کوچک‌تر از تندی متوسط است؛ بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۲

در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، اندازهٔ شیب نمودار به‌تدریج بیش‌تر می‌شود؛ بنابراین تندی متحرک رو به افزایش است.

۳

سرعت متوسط، شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان ـ زمان است و طبق نمودار بالا، مشاهده می‌کنید که خط واصل t_1 تا t_3 مقدار شیب کم‌تری نسبت به خط واصل t_1 تا t_2 دارد؛ بنابراین بزرگی سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 کم‌تر است و این گزینه نادرست می‌باشد.

۴

روی نمودار بالا، بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t=0$ رسم شده است و می‌بینید که در این لحظه، بردار مکان، در جهت محور x است؛ پس این گزینه درست است.

ماز

۶- **در یک مسیر مستقیم در جادهٔ قره آغاج - اشنویه، دو دوربین ثبت تخلف میانگین سرعت به فاصلهٔ ۱۵ کیلومتر از هم قرار دارند و چنانچه خودرویی فاصلهٔ بین دوربین‌ها را در مدت‌زمانی کم‌تر از ۱۰ دقیقه طی کند، دوربین برای آن خودرو تخلف ثبت می‌کند. حد تخلف میانگین سرعت خودرو چند کیلومتر بر ساعت است؟**

۱) ۷۲ ۲) ۹۰ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵)

طبق رابطهٔ $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=10\,min=\frac{1}{6}h]{d=15km} v_{av}=\frac{15}{\frac{1}{6}}=90\frac{km}{h}$$

راهنمای مسیرت

شاید خیلیاتون نتونستین به این سؤال جواب بدین ولی بعدش که پاسخش رو دیدین می‌فهمین که خیلی راحته! فقط مشکل اینجاست که نتونستین صورت سؤال رو درک کنین. حتماً روی این مورد کار کن و قدرت تحلیلت رو بالا ببر!

ماز

۷- **متحرکی در مبدأ زمان از مبدأ مکان بر روی محور x و در خلاف جهت محور x شروع به حرکت می‌کند. در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، بردار سرعت متحرک تنها یک‌بار در مکان $x=-20m$ تغییر جهت می‌دهد، ولی بردار مکان آن تغییر جهت نمی‌دهد. اگر مسافت طی‌شده در این مدت، ۱/۵ برابر بزرگی جابه‌جایی متحرک باشد، بزرگی سرعت متوسط آن در این مدت چند واحد SI می‌تواند باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۶

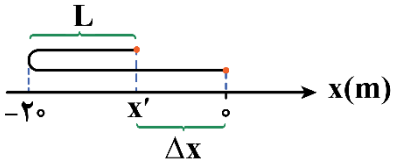
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵)

راه نجات سریع

اول یه مسیر حرکت درنظر بگیر و توی اون مسیر، مکان تغییر جهت و مکان نهایی رو مشخص کن. بعدش با داشتن نسبت مسافت و مقدار جابه‌جایی، مکان نهایی رو به‌دست بیار درنهایت با داشتن جابه‌جایی و زمان حرکت، سرعت متوسط رو حساب کن.

کام اول

مکان متحرک را در لحظهٔ $t=10s$ به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که مسافت طی‌شده بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی بوده و متحرک تنها یک‌بار متوقف شده است، درمی‌یابیم متحرک در مکان $x=-20m$ تغییر جهت داده است؛ بنابراین داریم:



$$\ell=1/5|\Delta x|\Rightarrow 20+L=1/5(20-L)\Rightarrow 20+L=30-1/5L$$
$$\Rightarrow 2/5L=10\Rightarrow L=4m$$
$$\Rightarrow x'=-20+4=-16m$$

کام آخر

اندازهٔ سرعت متوسط متحرک را در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت به‌دست می‌آوریم:

$$|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}\Rightarrow|v_{av}|=\frac{16}{10}=1/6\frac{m}{s}$$

۸- کدام‌یک از عبارت‌های زیر در مورد شکل مقابل صحیح است؟



۱) تندی لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهد.
۲) سرعت لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهد.
۳) تندی متوسط خودرو را نشان می‌دهد.
۴) سرعت متوسط خودرو را نشان می‌دهد.

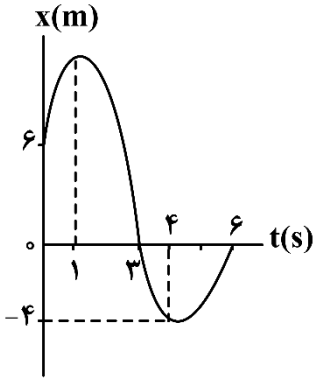
پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ حفظی/مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۹)

عقربهٔ تندی‌سنج خودرو، تندی لحظه‌ای را نشان می‌دهد، ولی اطلاعی راجع به جهت حرکت خودرو به ما نمی‌دهد.

راهنمای مسیرت

با این سؤال می‌خوام بهت یادآوری کنم شکل‌های کتاب درسی مهمن. مخصوصاً برای امتحان نهاییت!

۹- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به‌صورت شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 4s$ برابر $5\frac{m}{s}$ باشد، بزرگی سرعت متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_3 = 6s$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۳/۸
۲) ۱/۴
۳) ۳
۴) ۲/۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ نموداری/محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۸)

فرض کنید مکان متحرک در لحظهٔ $t = 1s$ را x_1 بنامیم؛ بنابراین با توجه به نمودار، مسافت طی‌شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 4s$ برابر است با:

$$\ell_{[1,4]} = x_1 + 4$$

اکنون طبق رابطهٔ تندی متوسط می‌توان نوشت:

$$s_{av_{[1,4]}} = \frac{\ell_{[1,4]}}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{x_1 + 4}{4 - 1} \Rightarrow x_1 = 11m$$

حال می‌توان سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_3 = 6s$ را به‌دست آورد:

$$v_{av_{[1,6]}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{(6)} - x_{(1)}}{t_3 - t_1} = \frac{0 - 11}{6 - 1} = -2/2\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \left|v_{av_{[1,6]}}\right| = 2/2\frac{m}{s}$$

۱۰- در جدول زیر، سرعت متوسط متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در چند بازهٔ زمانی داده شده است. اندازهٔ سرعت متوسط این اتومبیل در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت، ..... متر بر ثانیه از اندازهٔ سرعت متوسط آن در ۲ ثانیهٔ چهارم حرکت ..... است.

بازهٔ زمانی	$t=0$ تا $t=4s$	$t=0$ تا $t=6s$	$t=4s$ تا $t=8s$
سرعت متوسط	$8\frac{m}{s}$	$6\frac{m}{s}$	$-2\frac{m}{s}$

۱) ۴، کم‌تر
۲) ۴، بیش‌تر
۳) ۲، کم‌تر
۴) ۲، بیش‌تر

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۵)

گام اول

با توجه به سرعت‌های متوسط داده‌شده، جابه‌جایی متحرک را در هر بازه به‌دست می‌آوریم. طبق رابطهٔ $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$t=۴s \text{ تا } t=۰: \Delta x_۱=v_{av_۱}\Delta t_۱=۸\times ۴=۳۲m$$

$$t=۶s \text{ تا } t=۰: \Delta x_۲=v_{av_۲}\Delta t_۲=۶\times ۶=۳۶m$$

$$t=۸s \text{ تا } t=۴s: \Delta x_۳=v_{av_۳}\Delta t_۳=-۲\times ۴=-۸m$$

گام دوم

جابه‌جایی و سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ سوم $(۴s<t<۶s)$ برابر است با:

$$\Delta x=\Delta x_۲-\Delta x_۱=۳۶-۳۲=۴m$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۴}{۶-۴}=۲\frac{m}{s}$$

گام سوم

جابه‌جایی و سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ چهارم $(۶s<t<۸s)$ برابر است با:

$$\Delta x'=\overbrace{\Delta x_۱+\Delta x_۳}^{\Delta x_{(۰-۸)}}-\Delta x_۲=۳۲+(-۸)-۳۶=-۱۲m$$

$$v'_{av}=\frac{\Delta x'}{\Delta t}=\frac{-۱۲}{۸-۶}=-۶\frac{m}{s}$$

گام آخر

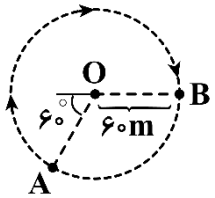
بنابراین خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$|v_{av}|-|v'_{av}|=۲-۶=-۴\frac{m}{s}$$

بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ سوم، $۴\frac{m}{s}$ کم‌تر از اندازهٔ سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ چهارم است.

ماز

۱۱- متحرکی در یک صفحهٔ افقی، مسیری دایره‌ای را مطابق شکل زیر از نقطهٔ A تا نقطهٔ B در مدت یک دقیقه می‌پیماید. به‌ترتیب از راست به چپ بزرگی سرعت متوسط و تندی متوسط این متحرک چند واحد SI است؟ $(\pi=۳)$



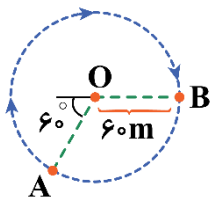
۱) ۱ و ۲

۲) $\sqrt{۳}$ و ۴

۳) ۱ و ۴

۴) $\sqrt{۳}$ و ۲

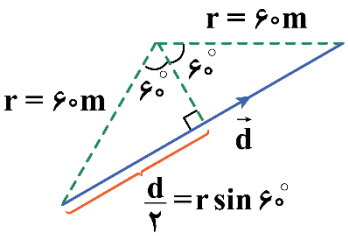
پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳)



گام اول

مسافت طی‌شده و مقدار جابه‌جایی متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$\ell=(\frac{۶۰^\circ+۱۸۰^\circ}{۳۶۰^\circ})\text{محیط دایره}=\frac{۲}{۳}\times ۲\times ۳\times ۶۰=۲۴۰m$$



$$d = ۲r \times \sin ۶۰^\circ = ۲ \times ۶۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶۰\sqrt{۳}m$$

کام آخر

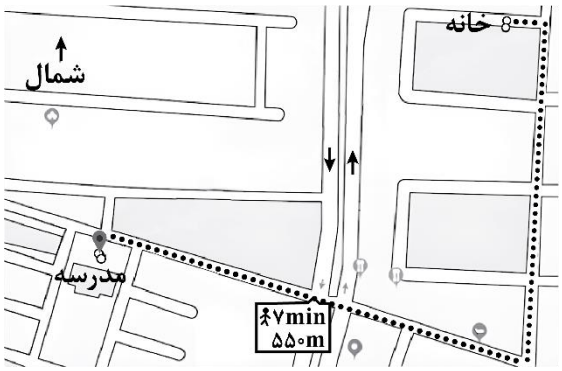
بزرگی سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۱min = ۶۰s]{d = ۶۰\sqrt{۳}m} v_{av} = \frac{۶۰\sqrt{۳}}{۶۰} = \sqrt{۳}\frac{m}{s}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۶۰s]{\ell = ۲۴۰m} s_{av} = \frac{۲۴۰}{۶۰} = ۴\frac{m}{s}$$

ماز

۱۲- مطابق شکل، فردی فاصلهٔ خانه تا مدرسه را از مسیر نشان‌داده‌شده در مدت ۷ دقیقه طی کرده است. اگر در این حرکت، اختلاف تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط برابر $۱/۸\frac{km}{h}$ باشد، فاصلهٔ مستقیم خانه تا مدرسه چند متر است؟



۱) ۳۴۰
۲) ۲۰۶
۳) ۲۳۶
۴) ۲۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳)

اختلاف تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط برابر $۱/۸\frac{km}{h} = \frac{۱/۸}{۳/۶}\frac{m}{s} = ۰/۵\frac{m}{s}$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

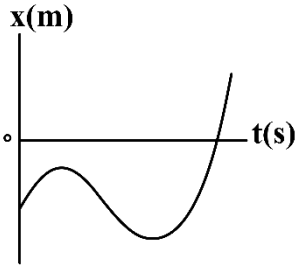
$$s_{av} - |v_{av}| = ۰/۵\frac{m}{s} \Rightarrow \frac{\ell}{\Delta t} - \frac{|d|}{\Delta t} = ۰/۵ \Rightarrow \frac{۵۵۰ - |d|}{۷ \times ۶۰} = ۰/۵$$

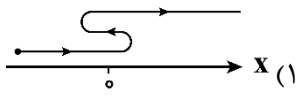
$$\Rightarrow ۵۵۰ - |d| = ۲۱۰ \Rightarrow |d| = ۳۴۰m$$

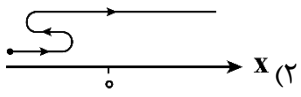
بنابراین فاصلهٔ مستقیم مبدأ و مقصد برابر ۳۴۰m است.

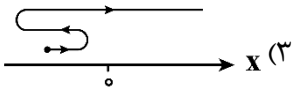
ماز

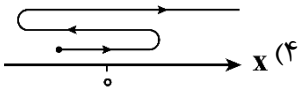
۱۳- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x درحال حرکت است، مطابق شکل زیر است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر، مسیر حرکت این متحرک بر روی محور x را به‌درستی نشان می‌دهد؟



۱) 

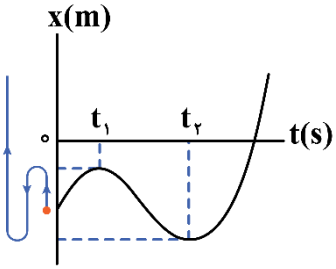
۲) 

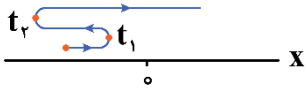
۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ نموداری/مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶)

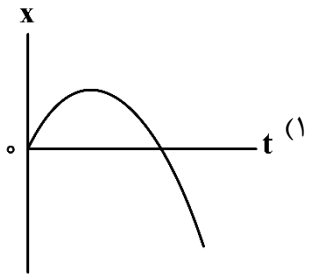
با توجه به نمودار $x-t$، مسیر حرکت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

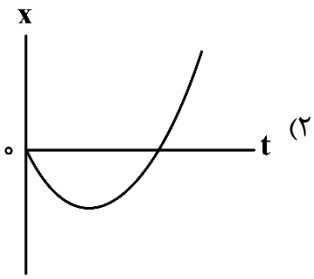


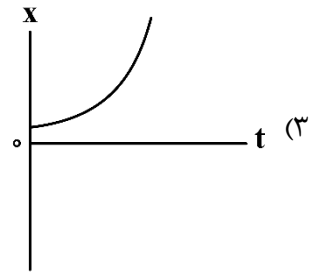


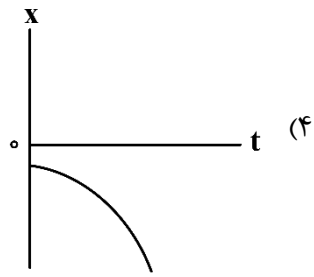
دقت کنید در لحظات تغییر جهت حرکت، مکان متحرک منفی است و دومین لحظهٔ تغییر جهت متحرک (t_2) باید منفی‌ترین مکان متحرک باشد.

۱۴- کدام‌یک از نمودارهای زیر، حرکت متحرکی را نشان می‌دهد که بر روی محور x به‌گونه‌ای حرکت می‌کند که تندی آن همواره رو به افزایش بوده و بردار مکان آن همواره در خلاف جهت محور x است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ نموداری ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۰)

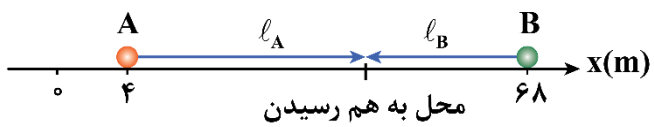
در نمودار گزینهٔ (۴)، نمودار مکان ـ زمان همواره پایین محور t است؛ بنابراین همواره $x<0$ است و اندازهٔ شیب نمودار رو به افزایش است؛ بنابراین تندی متحرک رو به افزایش است.

۱۵- دو متحرک A و B در مبدأ زمان در مکان‌های $x_A=4m$ و $x_B=68m$ قرار دارند. این دو متحرک بدون تغییر جهت به سمت هم حرکت می‌کنند و در لحظهٔ $t=8s$ به‌هم می‌رسند. اگر تندی متوسط متحرک A، $2\frac{m}{s}$ بیش‌تر از تندی متوسط متحرک B باشد، بردار مکان دو متحرک هنگام رسیدن به‌هم در SI کدام است؟

۱) $28\vec{i}$ ۲) $34\vec{i}$ ۳) $44\vec{i}$ ۴) $38\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۵)

با توجه به شکل مقابل و با توجه به این‌که دو متحرک بدون تغییر جهت به سمت هم حرکت کرده‌اند، می‌توان نتیجه گرفت مجموع مسافت طی‌شده توسط آن‌ها برابر $68-4=64m$ است؛ بنابراین طبق رابطهٔ $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$ داریم:



$$\ell_A + \ell_B = ۶۴ \Rightarrow s_A \Delta t + s_B \Delta t = ۶۴$$

$$\Rightarrow (s_B + ۲) \times ۸ + s_B \times ۸ = ۶۴$$

$$\Rightarrow ۱۶ s_B + ۱۶ = ۶۴ \Rightarrow s_B = ۳ \frac{m}{s} \Rightarrow s_A = ۵ \frac{m}{s}$$

$$\ell_A = s_A \Delta t = ۵ \times ۸ = ۴۰ m \Rightarrow x_{\text{به‌هم رسیدن}} = ۴ + ۴۰ = ۴۴ m \Rightarrow \vec{x} = ۴۴ m \vec{i}$$

آزمون ماز

۱ آبان‌ماه

فیزیک

۱- کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ حرکت یک متحرک در مسیر مستقیم درست است؟

الف ـ اگر بردار مکان و سرعت متحرک در خلاف جهت یکدیگر باشند، طول بردار مکان کاهش می‌یابد.

ب ـ اگر بردار سرعت و شتاب متحرک هم‌جهت باشند، بزرگی سرعت متحرک افزایش می‌یابد.

ج ـ تندی لحظه‌ای الزاماً با اندازهٔ سرعت لحظه‌ای برابر نیست.

د ـ جهت سرعت متوسط و بردار تغییر مکان در یک بازهٔ زمانی ممکن است یکسان نباشد.

۱) «الف» و «ب» ۲) «الف» و «د» ۳) «ج» و «د» ۴) «ب» و «ج»

پاسخ: گزینهٔ ۱ **(متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹)**

بررسی موارد:

الف) اگر بردار مکان و سرعت متحرک در خلاف جهت یکدیگر باشند، متحرک درحال نزدیک‌شدن به مبدأ مکان است؛ درنتیجه طول بردار مکان کاهش می‌یابد. (✓)

ب) اگر بردار سرعت و شتاب متحرک هم‌جهت باشند، حرکت تندشونده است؛ درنتیجه بزرگی سرعت (تندی) افزایش می‌یابد. (✓)

ج) تندی لحظه‌ای همواره با مقدار سرعت لحظه‌ای برابر است. (✗)

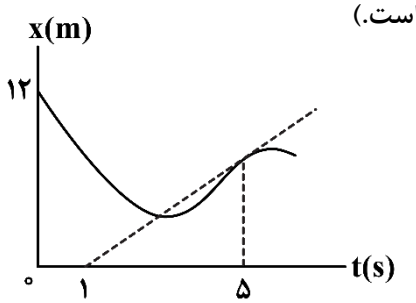
د) جهت بردار سرعت متوسط و جابه‌جایی (تغییر مکان) همواره یکسان است. (✗)

راهنمای مسیرت

اگه نتونستی به این سؤال جواب درست بدی، یعنی مفاهیم اولیه رو خوب یاد نگرفتی! پس دوباره یه سر به درس‌نامه‌های آزمون مرحلهٔ قبل بزن.

ماز

۲- متحرکی روی محور x در مبدأ زمان، با تندی $۱۳\frac{m}{s}$ درحال حرکت بوده است و نمودار مکان ـ زمان آن به‌صورت شکل زیر می‌باشد. اگر بزرگی شتاب متوسط این متحرک در ۵ ثانیهٔ اول حرکت $۳\frac{m}{s^۲}$ باشد، بزرگی سرعت متوسط این متحرک در این بازهٔ زمانی چند متر بر ثانیه است؟ (خط‌چین رسم‌شده، خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=۵s$ است.)



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۰/۴

۴) ۰/۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ **(متوسط ـ نموداری/محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹)**

راه نجات سریع

اول سرعت متحرک را در دو لحظهٔ $t=۰$ و $t=۵s$ با استفاده از رابطهٔ شتاب متوسط و نمودار $x-t$ به‌دست بیار. بعدش به کمک شیب خط مماس در لحظهٔ $t=۵s$، مکان متحرک در لحظهٔ $t=۵s$ رو به‌دست بیار. درنهایت با داشتن مکان در لحظه‌های $t=۰$ و $t=۵s$ سرعت متوسط رو توی این بازه حساب کن.

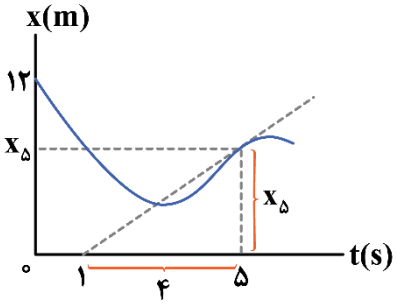
گام اول

سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۵s$ را با استفاده از شتاب متوسط در ۵ ثانیهٔ اول حرکت به‌دست می‌آوریم. با توجه به شیب نمودار مکان ـ زمان در $t=۰$ درمی‌یابیم سرعت در لحظهٔ $t=۰$ منفی است؛ بنابراین سرعت در این لحظه برابر با $v_۰=-۱۳\frac{m}{s}$ است.

از طرفی شیب نمودار مکان ـ زمان در $t=۵s$ مثبت است؛ بنابراین سرعت متحرک در این لحظه مثبت است. درنتیجه با توجه به این‌که سرعت لحظهٔ $t=۰$ منفی و سرعت لحظهٔ $t=۵s$ مثبت است، درمی‌یابیم تغییرات سرعت و شتاب متوسط مثبت است؛ بنابراین داریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_۵-v_۰}{\Delta t}\xrightarrow[v_۰=-۱۳\frac{m}{s}\,,\,\Delta t=۵s]{a_{av}=۳\frac{m}{s^۲}}۳=\frac{v_۵-(-۱۳)}{۵}\Rightarrow v_۵=۲\frac{m}{s}$$

گام دوم



مکان متحرک در $t=۵s$ را به‌دست می‌آوریم. با توجه به شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در $t=۵s$ داریم:

$$v_۵=\text{شیب خط مماس}=۲\Rightarrow\frac{x_۵-۰}{۵-۱}=۲\Rightarrow x_۵=۸m$$

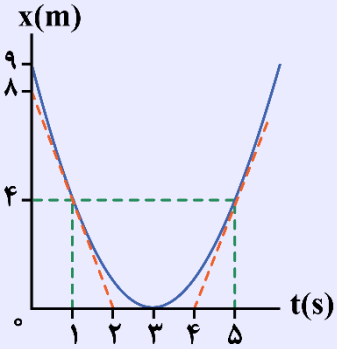
گام آخر

بزرگی سرعت متوسط در ۵ ثانیهٔ اول حرکت را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{x_۵-x_۰}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۸-۱۲}{۵}=-\frac{۴}{۵}=-۰/۸\frac{m}{s}\Rightarrow|v_{av}|=۰/۸\frac{m}{s}$$

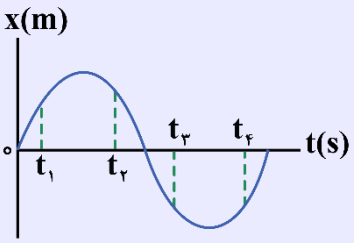
چگونه شتاب از روی نمودار مکان ـ زمان تعیین می‌شود؟

۱- شتاب متوسط: کافی است با کمک شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان، سرعت را در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ مشخص کنیم و سپس با کمک رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$، شتاب متوسط را به‌دست آوریم. مثلاً در نمودار مکان ـ زمان زیر، خط مماس بر نمودار در دو لحظهٔ $t_۱=۱s$ و $t_۲=۵s$ رسم شده‌اند. شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است با:



$$\begin{cases}v_{۱s}=\frac{۴-۸}{۱}=-۴\frac{m}{s}\\ v_{۵s}=\frac{۴-۰}{۵-۴}=۴\frac{m}{s}\end{cases}\Rightarrow a_{av}=\frac{v_{۵s}-v_{۱s}}{\Delta t}=\frac{۴-(-۴)}{۵-۱}=۲\frac{m}{s^۲}$$

۲- شتاب لحظه‌ای: در قسمت‌هایی از نمودار مکان ـ زمان که تقعر نمودار به سمت بالا (نمودار به شکل ∪) است، شتاب مثبت (در جهت محور x) است و در قسمت‌هایی که تقعر به سمت پایین (نمودار به شکل ∩) است، شتاب منفی (در خلاف جهت محور x) است. مثلاً در نمودار مکان ـ زمان زیر، در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ شتاب منفی است و در لحظات $t_۳$ و $t_۴$، شتاب مثبت است.



۳- معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=t^۲-۱۰t+۱۶$ است. شتاب متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی‌ای که ابتدای آن لحظهٔ تغییر جهت بردار شتاب و انتهای آن لحظه‌ای است که متحرک برای دومین بار تغییر جهت می‌دهد، چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱)

گام اول

لحظات ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی را به‌دست می‌آوریم:

لحظهٔ تغییر جهت شتاب: رأس سهمی $\Rightarrow t_۱=-\frac{B}{۲A}\xrightarrow[A=۱]{B=-۱۰}t_۱=\frac{-(-۱۰)}{۲(۱)}=۵s$

لحظه‌ای که برای دومین بار تغییر جهت می‌دهد: دومین ریشهٔ $v-t$ $\Rightarrow v=t^۲-۱۰t+۱۶=(t-۲)(t-۸)\Rightarrow t_۲=۸s$

تغییر جهت: ۲s ۸s

گام دوم

سرعت متحرک را در لحظات $t_۱=۵s$ و $t_۲=۸s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v=t^۲-۱۰t+۱۶\Rightarrow\begin{cases}v_۱=(۵)^۲-۱۰(۵)+۱۶=-۹\frac{m}{s}\\ v_۲=(۸)^۲-۱۰(۸)+۱۶=۰\end{cases}$$

گام آخر

شتاب متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی $t_۱=۵s$ تا $t_۲=۸s$ به‌دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a_{av}=\frac{۰-(-۹)}{۸-۵}=۳\frac{m}{s^۲}$$

راهنمای مسیرت

این ازون سؤالاست که طراح کنکور دوست داره! پس خوب حواستو جمع کن!

از معادلهٔ سرعت ـ زمان چه اطلاعاتی به‌دست می‌آید؟

در این بخش می‌خواهیم ببینیم که با داشتن معادلهٔ سرعت ـ زمان چه اطلاعاتی به‌دست می‌آوریم. به‌عنوان مثال، فرض کنید که معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=t^۲-۱۲t+۳۲$ است. اطلاعات زیر از این معادله قابل‌استخراج است:

۱- سرعت در هر لحظه: با جایگذاری زمان موردنظر در معادله، می‌توانیم سرعت را در هر لحظه به‌دست آوریم. مثلاً:

$$t_۱=۱s:\ v_۱=۱^۲-۱۲\times۱+۳۲=۲۱\frac{m}{s}$$

$$t_۲=۴s:\ v_۲=۴^۲-۱۲\times۴+۳۲=۰$$

۲- تغییرات سرعت: با کم‌کردن سرعت در دو لحظه از هم، تغییرات سرعت به‌دست می‌آید. مثلاً:

$$\begin{cases}t_۱=۱s:\ v_۱=۲۱\frac{m}{s}\\ t_۲=۴s:\ v_۲=۰\end{cases}\Rightarrow\Delta v=v_۲-v_۱=۰-۲۱=-۲۱\frac{m}{s}$$

دقت کنید که منفی‌شدن تغییرات سرعت به معنی آن است که بردار تغییرات سرعت در خلاف جهت محور x است.

۳- شتاب متوسط: با تقسیم‌کردن تغییرات سرعت بر طول بازهٔ زمانی، شتاب متوسط به‌دست می‌آید. مثلاً:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۲۱}{۴-۱}=-۷\frac{m}{s^۲}$$ در بازهٔ زمانی $t_۱=۱s$ تا $t_۲=۴s$

همان‌طور که می‌بینید، در بازهٔ زمانی $۱s\le t<۴s$، شتاب متوسط منفی است، یعنی بردار آن در خلاف جهت محور x می‌باشد.

۴- تعیین جهت حرکت: هرگاه سرعت مثبت باشد، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و هرگاه سرعت منفی باشد، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؛ بنابراین با تعیین علامت‌کردن سرعت، می‌توانیم جهت حرکت را بیابیم. مثلاً:

$$v=t^۲-۱۲t+۳۲=(t-۴)(t-۸)\Rightarrow \text{ریشه‌ها: } \begin{cases}t_۱=۴s\\ t_۲=۸s\end{cases}$$

جدول تعیین علامت:

t	۰		۴s		۸s		+∞
v		+	۰	-	۰	+	

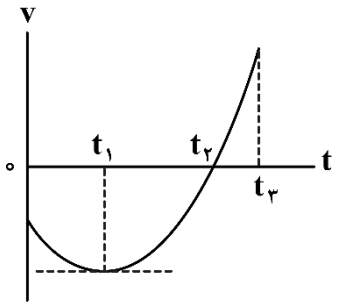
+: در جهت محور x حرکت می‌کند. -: در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۵- تعیین لحظات تغییر جهت حرکت متحرک: لحظاتی که علامت سرعت تغییر می‌کند، جهت حرکت متحرک عوض می‌شود، مثلاً در قسمت قبل دیدیم که در لحظات $t_۱=۴s$ و $t_۲=۸s$، علامت سرعت عوض می‌شود و درنتیجه جهت حرکت متحرک در این لحظات تغییر می‌کند.

۶- برای به‌دست آوردن سایر اطلاعات مثل مسافت طی‌شده، تندی متوسط و ... کافی است نمودار مربوط به معادله را رسم کنید و از نکات مربوط به نمودار کمک بگیرید.

مثال

۴- متحرکی بر روی خط راست درحال حرکت است و نمودار سرعت ـ زمان آن، مطابق شکل زیر می‌باشد. با توجه به نمودار، کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟



الف ـ اگر در مبدأ زمان، بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x باشد، در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۲$ الزاماً درحال دورشدن از مبدأ مکان است.

ب ـ جهت حرکت متحرک در لحظهٔ $t_۱$ عوض شده است.

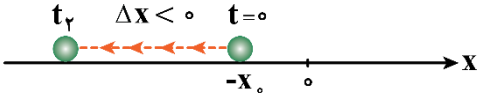
ج ـ در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$ بزرگی شتاب متحرک پیوسته درحال افزایش است.

۱) «الف» و «ب»
۲) «الف» و «ج»
۳) فقط «ج»
۴) فقط «الف»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ نموداری/مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱)

الف

با توجه به این‌که در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۲$ سرعت متحرک منفی است، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و جابه‌جایی متحرک منفی می‌باشد و در این بازه، جهت حرکت متحرک عوض نشده است، پس اگر در مبدأ زمان، مکان متحرک منفی باشد و جابه‌جایی آن نیز منفی باشد، الزاماً درحال دورشدن از مبدأ است. به شکل مقابل دقت نمایید:



بنابراین این گزاره درست است. (✓)

ب

جهت حرکت (علامت سرعت) در لحظهٔ $t_۲$ عوض شده است و در لحظهٔ $t_۱$ جهت بردار شتاب تغییر یافته است. (✗)

ج

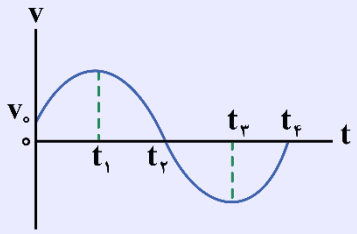
بزرگی شتاب، شیب مماس بر نمودار سرعت ـ زمان است و طبق نمودار، این شیب در لحظهٔ $t_۱$ صفر و از این لحظه به بعد پیوسته درحال افزایش است؛ بنابراین بزرگی شتاب نیز پیوسته درحال افزایش خواهد بود. (✓)

سوتی‌های پرتکرار

حواست باشه اگه نمودار مکان ـ زمان بود، توی لحظهٔ t_1 تغییر جهت حرکت داشتیم اما این نمودار سرعت ـ زمانه و تغییر جهت حرکت توی t_2 رخ می‌ده!

نمودار سرعت ـ زمان در حرکت بر خط راست چه اطلاعاتی به ما می‌دهد؟

اگر سرعت متحرکی را که روی خط راست حرکت می‌کند، نسبت به زمان رسم کنیم، نمودار سرعت ـ زمان به‌دست می‌آید. شکل زیر نمودار سرعت ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی محور x حرکت می‌کند. در این قسمت می‌خواهیم ببینیم نمودار سرعت ـ زمان چه اطلاعاتی از حرکت به ما می‌دهد؟



۱- سرعت اولیه: سرعت جسم در لحظهٔ $t_0 = 0$، سرعت اولیه نام دارد و آن را با v_0 نشان می‌دهند. در نمودار سرعت ـ زمان، v_0 نقطه‌ای است که نمودار محور v را قطع می‌کند. مثلاً در نمودار داده‌شده، $v_0 > 0$ است.

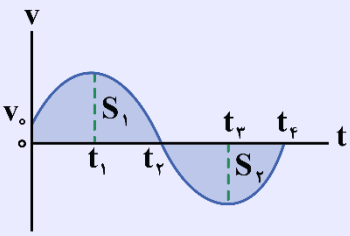
۲- تعیین جهت حرکت: در بازه‌های زمانی‌ای که نمودار بالای محور t است، علامت سرعت مثبت است و متحرک در جهت مثبت محور حرکت می‌کند و در بازه‌های زمانی‌ای که نمودار زیر محور t است، علامت سرعت منفی است و متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند. مثلاً در نمودار داده‌شده، در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 متحرک در جهت محور x و در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۳- لحظهٔ تغییر جهت حرکت: در لحظه‌ای که نمودار از روی محور t عبور می‌کند ($v = 0$ و علامت سرعت متحرک نیز عوض می‌شود)، متحرک تغییر جهت می‌دهد. مثلاً در لحظهٔ t_2 که سرعت متحرک صفر است و همچنین علامت سرعت نیز عوض شده است، متحرک تغییر جهت می‌دهد.

توجه کنید که در لحظهٔ t_4 نیز، سرعت متحرک صفر است، ولی چون جهت حرکت متحرک پس‌ازآن مشخص نیست، این لحظه، لحظهٔ تغییر جهت حرکت نیست.

۴- تعیین نوع حرکت: قبلاً دیدیم که اگر در یک بازهٔ زمانی، تندی (اندازهٔ سرعت) متحرک درحال افزایش باشد، حرکت تندشونده و اگر تندی (اندازهٔ سرعت) متحرک درحال کاهش باشد، حرکت کندشونده است. در نمودار سرعت ـ زمان، اگر در یک بازهٔ زمانی نمودار از محور t دور شود، حرکت تندشونده و اگر نمودار به محور t نزدیک شود، حرکت کندشونده است. مثلاً در بازه‌های زمانی صفر تا t_1 و t_2 تا t_3 حرکت متحرک تندشونده و در بازه‌های زمانی t_1 تا t_2 و t_3 تا t_4، حرکت متحرک کندشونده است.

۵- محاسبهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده: مهم‌ترین نکتهٔ نمودار سرعت ـ زمان این است که مساحت محصور بین نمودار و محور t در یک بازهٔ زمانی، برابر جابه‌جایی متحرک در آن بازهٔ زمانی است. توجه کنید که اگر مساحت محصور بین نمودار و محور t، بالای محور t باشد، جابه‌جایی متحرک در جهت مثبت محور و اگر این مساحت زیر محور t باشد، جابه‌جایی متحرک در جهت منفی محور است؛ بنابراین با توجه به نمودار داریم:



جابه‌جایی در بازهٔ زمانی صفر تا t_2: $\Delta x_1 = +S_1$

جابه‌جایی در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4: $\Delta x_2 = -S_2$

جابه‌جایی در بازهٔ زمانی صفر تا t_4: $\Delta x_{کل} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = S_1 - S_2$

چون مسافت طی‌شده برابر با حاصل‌جمع قدر مطلق جابه‌جایی‌ها است، مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی صفر تا t_4 برابر است با:

$$\ell = S_1 + S_2$$

پس بچه‌ها حواستون باشه که موقع پیداکردن جابه‌جایی، مساحت‌های بالای محور زمان رو با علامت مثبت و مساحت‌های زیر محور زمان رو با علامت منفی استفاده کنین. موقع پیداکردن مسافت هم که تمام مساحت‌ها رو با علامت مثبت استفاده کنین.

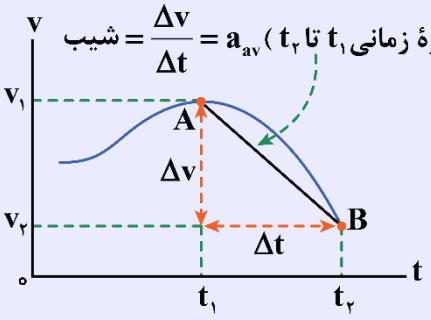
کتاب درسی این مورد رو آخرای فصل گفته، واسه همین سؤالای مربوط به این مورد رو توی آزمون بعدی می‌بینیم.

۶- محاسبهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط: پس از محاسبهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده، می‌توانیم سرعت متوسط و تندی متوسط را در بازهٔ زمانی موردنظر محاسبه کنیم:

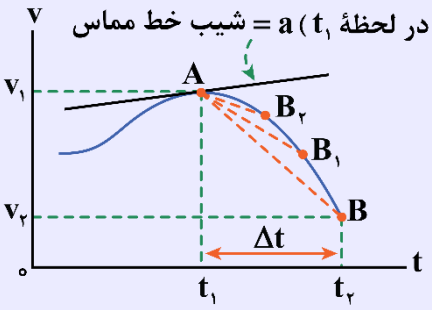
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

۷- محاسبهٔ شتاب متوسط: در شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی نشان داده شده است که روی خط راست حرکت می‌کند. با توجه به تعریف شتاب متوسط، معلوم می‌شود که شتاب متوسط بین دو لحظه برابر شیب پاره‌خطی است که نمودار سرعت ـ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

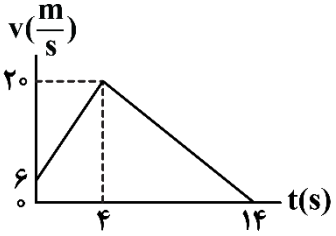


۸- محاسبهٔ شتاب لحظه‌ای: شتاب متحرک در هر لحظه را شتاب لحظه‌ای می‌نامیم. برای سادگی شتاب لحظه‌ای را شتاب می‌نامیم و آن را با $\vec{a}$ نشان می‌دهیم. در حرکت بر خط راست، شتاب را با a نشان می‌دهیم که علامت آن، جهت شتاب را نشان می‌دهد. در نمودار قبل، اگر نقطه‌های A و B را به‌هم نزدیک کنیم تا t_1 و t_2 یک لحظه شوند، Δt به سمت صفر میل می‌کند $(\Delta t \to 0)$ و خط واصل بین نقطه‌های A و B، به خط مماس بر نمودار در نقطهٔ A میل می‌کند، در این حالت، شیب خط مماس برابر شتاب متحرک در لحظهٔ t_1 است. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که شتاب در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در آن لحظه است.



می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه در یک بازهٔ زمانی، نمودار سرعت ـ زمان خط راست باشد، شتاب در آن بازهٔ زمانی ثابت و برابر شیب نمودار است و شتاب متوسط و لحظه‌ای باهم برابرند.

۵- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x درحال حرکت است، به‌صورت شکل زیر است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، چند برابر اندازهٔ شتاب متحرک در پایان ثانیهٔ سوم حرکتش است؟



۱) $\frac{۲}{۳۵}$

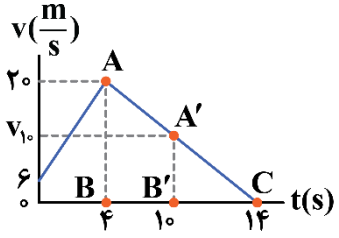
۲) $\frac{۱}{۱۷}$

۳) $\frac{۴}{۷}$

۴) $\frac{۲}{۱۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ نموداری/محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱)

ابتدا باید سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را به‌دست آوریم. با نوشتن تشابه بین دو مثلث ABC و $A'B'C$ داریم:



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C}\Rightarrow\frac{۲۰}{v_{۱۰}}=\frac{۱۰}{۴}\Rightarrow v_{۱۰}=۸\frac{m}{s}$$

$$a_{av[۰,۱۰s]}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{۱۰}-v_{۰}}{۱۰}=\frac{۸-۶}{۱۰}=\frac{۱}{۵}\frac{m}{s^{۲}}$$

از طرفی شتاب در پایان ثانیهٔ سوم یعنی لحظهٔ $t=۳s$ معادل با شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه است که چون خود نمودار یک تابع خطی است، شیب خط مماس با شیب خط اصلی مساوی است.

$$a_{(t=۳s)}=\text{شیب مماس}=\text{شیب نمودار}=\frac{\text{تغییرات عمودی}}{\text{تغییرات افقی}}=\frac{۲۰-۶}{۴-۰}=\frac{۷}{۲}\frac{m}{s^{۲}}$$

درنهایت خواستهٔ سؤال نسبت دو مقدار یافته شده است:

$$\frac{a_{av[۰,۱۰s]}}{a_{(t=۳s)}}=\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۷}{۲}}=\frac{۲}{۳۵}$$

ماز

۶- **معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $x=۵t+۸$ است. کدام گزینه دربارهٔ متحرک نادرست است؟**

۱) این متحرک همواره درحال دورشدن از مبدأ مکان است.

۲) این متحرک در لحظهٔ $t=۶s$ در فاصلهٔ ۳۰ متر از مبدأ حرکت قرار دارد.

۳) بزرگی آهنگ تغییر سرعت این متحرک برابر با ۵ واحد SI است.

۴) در هر بازهٔ زمانی دلخواه، مقدار جابه‌جایی و مسافت طی‌شده برای این متحرک یکسان است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی/محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۳)

بررسی گزینه‌ها:

۱) $x_{۰}>۰$ و $v>۰$ بوده و متحرک دائماً درحال دورشدن از مبدأ مکان است. (✓)

۲) مبدأ حرکت $x_{۰}=۸m$ بوده و مکان متحرک در لحظهٔ $t=۶s$ برابر با $x=۵(۶)+۸=۳۸m$ است؛ بنابراین فاصلهٔ آن از مبدأ حرکت برابر با $x-x_{۰}=۳۸-۸=۳۰m$ است. (✓)

۳) بزرگی سرعت یعنی آهنگ تغییر **مکان** متحرک برابر با ۵ واحد SI است و آهنگ تغییر سرعت این متحرک (شتاب) برابر با صفر است. (✗)

۴) متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند؛ بنابراین همواره بزرگی جابه‌جایی و مسافت طی‌شدهٔ آن برابر است. (✓)

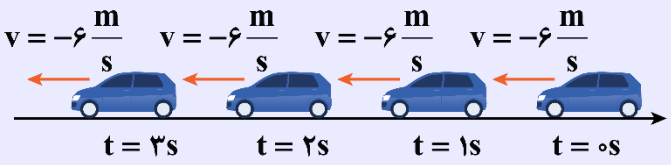
سوتی‌های پرتکرار

حواست باشه توی گزینهٔ (۲) گفته فاصله از مبدأ حرکت نه فاصله از مبدأ مکان!

حرکت با سرعت ثابت

در این نوع حرکت اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است پس در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر سرعت لحظه‌ای آن است:

اندازهٔ سرعت متوسط = تندی متوسط = اندازهٔ سرعت لحظه‌ای = تندی لحظه‌ای



حرکت با سرعت ثابت

حرکت روی خط راست انجام می‌شود.

تندی با گذشت زمان تغییر نمی‌کند.

جهت سرعت ثابت است.

اندازهٔ سرعت ثابت است.

اندازهٔ سرعت و جهت سرعت ثابت است؛
پس شتاب حرکت صفر است: $a = 0$

در حرکت با سرعت ثابت

۱- سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط باهم برابرند: $v_{av} = v$

۲- شتاب حرکت صفر است.

۳- اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت باهم برابرند $(|d| = L)$، درنتیجه در این حرکت اندازهٔ سرعت برابر تندی است $(|v| = s)$.

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت

$$\text{مکان در لحظهٔ } t \leftarrow x = \underset{\text{سرعت}}{v}\underset{\text{زمان}}{t} + x_0 \rightarrow \text{مکان اولیه}$$

معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان حرکت با سرعت ثابت

$$\text{جابه‌جایی} \leftarrow \Delta x = \underset{\text{سرعت}}{v}\underset{\text{زمان سپری‌شده}}{\Delta t}$$

چون جهت حرکت ثابت است در این رابطه، اندازهٔ Δx برابر مسافت طی‌شده می‌باشد.

چگونه با استفاده از مکان متحرک در دو لحظهٔ t_1 و t_2، معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت را به‌دست آوریم؟

۱- در معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت یعنی $x = vt + x_0$ به‌جای t و x مقادیرشان را در دو نقطه جایگذاری می‌کنیم.

۲- با استفاده از دستگاه دو معادله - دو مجهول، مقادیر x_0 و v را به‌دست می‌آوریم.

۳- طبق رابطهٔ $x = vt + x_0$ با داشتن v و x_0 معادلهٔ $x - t$ را می‌نویسیم.

۷- متحرکی روی محور x با سرعت ثابت درحال حرکت است. اگر بردار مکان این متحرک در لحظهٔ $t=۵s$ به‌صورت $\vec{x}=-۲\vec{x}_۰$ باشد، این متحرک در کدام لحظه برحسب ثانیه از مبدأ مکان عبور می‌کند؟ (بردار مکان متحرک در مبدأ زمان، $\vec{x}_۰$ است.)

۱) ۰/۴ ۲) ۲/۵ ۳) ۰/۶ ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳)

با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت می‌توانیم بنویسیم:

$$x=vt+x_۰ \xrightarrow[x=-۲x_۰]{t=۵s} -۲x_۰=v(۵)+x_۰ \Rightarrow v=-\frac{۳}{۵}x_۰$$

$$\Rightarrow x=-\frac{۳}{۵}x_۰t+x_۰ \xrightarrow{x=۰} ۰=-\frac{۳}{۵}x_۰t+x_۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۵}t=۱ \Rightarrow t=\frac{۵}{۳}s$$

راهنمای مسیرت

حتماً یه خلاصه از عبارات مهم توی حرکت‌شناسی و مفهومشون درست کن تا کارت راحت بشه. مثلاً بگو عبور از مبدأ مکان می‌شه ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان و ...

۸- متحرکی با سرعت ثابتی به بزرگی v نیمی از یک مسیر مستقیم را در مدت ۸s می‌پیماید و نیمهٔ دیگر مسیر را با سرعتی به بزرگی $v+۳\frac{m}{s}$ در مدت ۵ ثانیه می‌پیماید. متحرک با سرعت ثابت $v+۵\frac{m}{s}$ در چه مدتی برحسب ثانیه این مسیر را می‌پیماید؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳)

اگر کل مسیر d باشد، می‌توانیم بنویسیم:

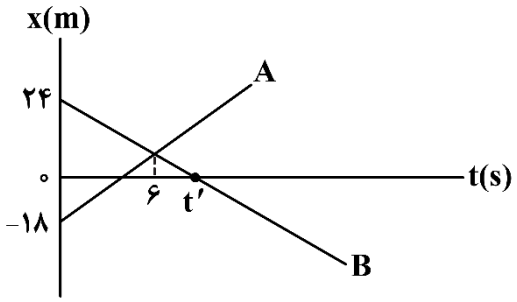
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v=\frac{\frac{d}{۲}}{۸}=\frac{d}{۱۶} \Rightarrow d=۱۶v \quad (۱) \\ v+۳=\frac{\frac{d}{۲}}{۵}=\frac{d}{۱۰} \Rightarrow d=۱۰v+۳۰ \quad (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۶v=۱۰v+۳۰ \Rightarrow ۶v=۳۰ \Rightarrow v=۵\frac{m}{s} \Rightarrow d=۱۶v=۱۶\times ۵=۸۰m$$

درنهایت داریم:

$$v+۵=\frac{d}{\Delta t} \xrightarrow[v=۵\frac{m}{s}]{d=۸۰m} ۱۰=\frac{۸۰}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=۸s$$

۹- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B مطابق شکل زیر است. اگر تندی متحرک A $۱\frac{m}{s}$ بیش‌تر از تندی متحرک B باشد، t' چند ثانیه است؟



۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ نموداری/محاسباتی ـ زمان‌بَر ⏲ ـ صفحهٔ ۱۴)

گام اول

اگر سرعت متحرک A، برابر با v باشد، معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را برحسب v به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} v_A = v > ۰ \\ v_B < ۰ \\ |v_A| = |v_B| + ۱ \end{cases} \Rightarrow v = -v_B + ۱ \Rightarrow v_B = -v + ۱$$

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = vt - ۱۸ \\ x_B = (-v+۱)t + ۲۴ \end{cases}$$

گام دوم

v را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که مکان دو متحرک در لحظهٔ $t = ۶s$ یکسان است، داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow vt - ۱۸ = (-v+۱)t + ۲۴ \xrightarrow{t=۶s} ۶v - ۱۸ = (-v+۱)۶ + ۲۴$$

$$\Rightarrow ۶v - ۱۸ = -۶v + ۳۰ \Rightarrow ۱۲v = ۴۸ \Rightarrow v = ۴\frac{m}{s}$$

گام آخر

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B را به‌دست آورده و لحظه‌ای که $x_B = ۰$ می‌شود، یعنی t' را به‌دست می‌آوریم:

$$x_B = (-v+۱)t + ۲۴ \xrightarrow[v=۴]{x_B=۰ ,\ t=t'} ۰ = (-۴+۱)t' + ۲۴ \Rightarrow ۳t' = ۲۴ \Rightarrow t' = ۸s$$

حرکت دو متحرک با سرعت ثابت چگونه بررسی می‌شود؟

هنگامی که دو متحرک به‌صورت هم‌زمان بر روی محور x حرکت می‌کنند، برای بررسی حرکت آن‌ها کافی است معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را بنویسیم و سپس با بررسی معادلات نوشته‌شده به سؤال پاسخ دهیم. مهم‌ترین چیزهایی که ممکن است از ما پرسیده شود، موارد زیر است:

۱- لحظهٔ به‌هم رسیدن دو متحرک: برای پیداکردن لحظهٔ به‌هم رسیدن دو متحرک، کافی است معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را باهم برابر قرار دهیم.

معادلهٔ مکان ـ زمان A: $x_A = v_A t + x_{۰A}$

معادلهٔ مکان ـ زمان B: $x_B = v_B t + x_{۰B}$

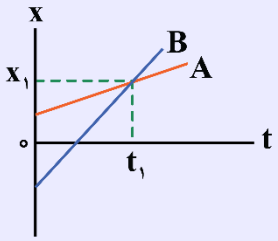
شرط به‌هم رسیدن دو متحرک: $x_A = x_B \Rightarrow v_A t + x_{۰A} = v_B t + x_{۰B}$

۲- محاسبهٔ فاصلهٔ دو متحرک: فاصلهٔ دو متحرک به معنی قدر مطلق اختلاف معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها است؛ بنابراین در سؤالاتی که می‌خواهیم فاصلهٔ دو متحرک را به‌دست آوریم، ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم، سپس قدر مطلق اختلاف مکان آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

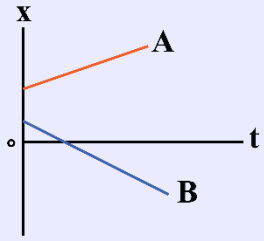
فاصلهٔ دو متحرک از هم: $d = |x_A - x_B| \xrightarrow[x_B = v_B t + x_{۰B}]{x_A = v_A t + x_{۰A}} d = |v_A t + x_{۰A} - (v_B t + x_{۰B})|$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک: گاهی در بررسی حرکت دو متحرک با سرعت ثابت، نمودار مکان ـ زمان آن‌ها رسم می‌شود. هنگامی که دو نمودار یکدیگر را قطع می‌کنند، دو متحرک به‌هم می‌رسند.



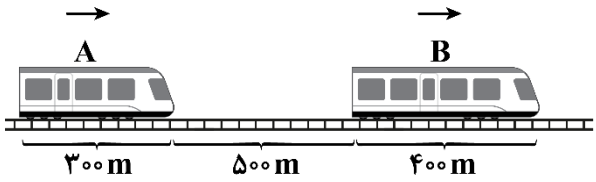
دو متحرک در لحظهٔ t_1 و مکان x_1 به هم می‌رسند.
(فاصلهٔ دو متحرک ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.)



دو متحرک هیچ‌گاه به هم نمی‌رسند.
(فاصلهٔ دو متحرک همواره افزایش می‌یابد.)

مثال

۱۰- مطابق شکل زیر، دو قطار A و B بر روی دو ریل موازی در مسیری مستقیم در لحظهٔ $t=0$ با سرعت‌های $v_A=30\frac{m}{s}$ و $v_B=20\frac{m}{s}$ در یک جهت شروع به حرکت می‌کنند. اگر قطار A در لحظهٔ t_1 به انتهای قطار B برسد و در لحظهٔ t_2 به‌طور کامل از قطار B عبور کند، t_2-t_1 چند ثانیه است؟



۱) ۴۰
۲) ۵۰
۳) ۶۰
۴) ۷۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ⏱ ـ صفحهٔ ۱۴)

روش اول

گام اول

بازهٔ زمانی t_1 را به‌دست می‌آوریم. برای این‌که قطار A به انتهای قطار B برسد، باید جابه‌جایی آن، ۵۰۰m بیش‌تر از قطار B باشد؛ بنابراین داریم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \Delta x=v\Delta t\Rightarrow \begin{cases}\Delta x_A=30t_1\\ \Delta x_B=20t_1\end{cases}$$

$$\Delta x_A-\Delta x_B=500\Rightarrow 30t_1-20t_1=10t_1=500\Rightarrow t_1=50s$$

گام دوم

بازهٔ زمانی t_2 را به‌دست می‌آوریم. برای این‌که قطار A به‌طور کامل از قطار B عبور کند، باید جابه‌جایی آن $300+500+400=1200m$ بیش‌تر از قطار B باشد؛ بنابراین داریم:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow \begin{cases}\Delta x_A=30t_2\\ \Delta x_B=20t_2\end{cases}$$

$$\Delta x_A-\Delta x_B=30t_2-20t_2=10t_2=1200\Rightarrow t_2=120s$$

گام آخر

مقدار t_2-t_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$t_2-t_1=120-50=70s$$

روش دوم

با توجه به رابطهٔ $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ و سرعت نسبی دو متحرک که هم‌جهت باهم حرکت می‌کنند یعنی $v_{نسبی}=v_A-v_B$ داریم:

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v}\Rightarrow t_2-t_1=\frac{d_{2\,نسبی}}{v_{نسبی}}-\frac{d_{1\,نسبی}}{v_{نسبی}}\Rightarrow t_2-t_1=\frac{d_{2\,نسبی}-d_{1\,نسبی}}{v_{نسبی}}=\frac{(۵۰۰+۴۰۰+۳۰۰)-۵۰۰}{۳۰-۲۰}$$

$$\Rightarrow t_2-t_1=\frac{۷۰۰}{۱۰}=۷۰s$$

سرعت نسبی

۱- اگر دو متحرک خلاف جهت یکدیگر حرکت کنند:



$$v_{نسبی}=|v_1|+|v_2|$$

۲- اگر دو متحرک هم‌جهت حرکت کنند:



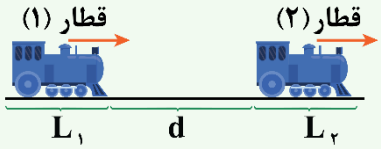
$$v_{نسبی}=|v_1-v_2|$$

جابه‌جایی نسبی دو متحرک از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d_{نسبی}=v_{نسبی}\Delta t$$

نکته

در سؤال‌های مربوط به حرکت نسبی دو قطار اگر قطار (۱) به‌اندازهٔ d عقب‌تر از قطار (۲) باشد، برای عبور کامل قطار (۱) از قطار (۲) جابه‌جایی نسبی برابر است با:



$$d_{نسبی}=L_1+L_2+d$$

کنکور سراسری علوم تجربی نوبت دوم خارج از کشور ۱۴۰۲

دو متحرک با تندی ثابت v_1 و $v_2>v_1$ روی خط راست طوری حرکت می‌کنند که اگر خلاف جهت هم بروند، فاصلهٔ آن‌ها در هر ثانیه ۱۶ متر تغییر می‌کند و اگر هم‌جهت حرکت کنند، فاصلهٔ آن‌ها در هر دقیقه ۲۴۰ متر تغییر می‌کند. $\frac{v_2}{v_1}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

پاسخ تشریحی:

در حالت اول که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، تندی نسبی دو متحرک برابر است با مجموع تندی دو متحرک و در حالت دوم که دو متحرک در یک جهت حرکت می‌کنند، تندی نسبی دو متحرک برابر است با مقدار اختلاف تندی دو متحرک؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v=v_1+v_2$$
$$v'=v_2-v_1$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $v=\frac{d}{\Delta t}$ می‌توان نوشت:

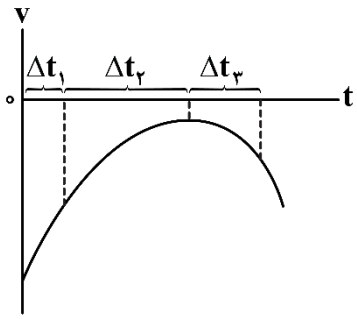
$$v=\frac{d}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۱s]{d=۱۶m}v=\frac{۱۶}{۱}=۱۶\frac{m}{s}$$
$$v'=\frac{d'}{\Delta t'}\xrightarrow[\Delta t'=۶۰s]{d'=۲۴۰m}v'=\frac{۲۴۰}{۶۰}=۴\frac{m}{s}$$

درنهایت با تشکیل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} v_۱ + v_۲ = ۱۶ \\ v_۲ - v_۱ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_۲ = ۱۰\dfrac{m}{s} \\ v_۱ = ۶\dfrac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۳}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

۱۱- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. به‌ترتیب از راست به چپ در بین بازه‌های زمانی $\Delta t_۱$، $\Delta t_۲$ و $\Delta t_۳$، تندی متوسط در بازهٔ زمانی ..... و اندازهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی ..... بیشینه است.



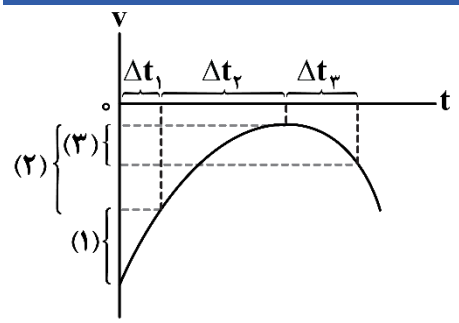
۱) $\Delta t_۱$ ، $\Delta t_۱$

۲) $\Delta t_۲$ ، $\Delta t_۱$

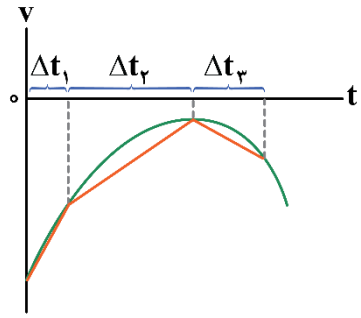
۳) $\Delta t_۱$ ، $\Delta t_۳$

۴) $\Delta t_۲$ ، $\Delta t_۳$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ نموداری/مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۱)



با توجه به این‌که تندی متوسط در هر بازهٔ زمانی، مقداری بین کم‌ترین و بیش‌ترین تندی در آن بازهٔ زمانی است، درنتیجه مطابق شکل به‌صورت تقریبی می‌توانیم تندی متوسط را در سه بازهٔ مشخص‌شده نشان دهیم. درنتیجه: $s_{av_۱} > s_{av_۲} > s_{av_۳}$



در نمودار سرعت ـ زمان، شتاب متوسط برابر با شیب خط واصل بین ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی موردنظر است.

همان‌طور که در نمودار روبه‌رو مشخص است، شیب خط واصل در بازهٔ $\Delta t_۱$ از شیب خط واصل در دیگر بازه‌ها بیش‌تر است؛ پس نتیجه می‌گیریم:

$$a_{av_۱} > a_{av_۲} > a_{av_۳}$$

۱۲- متحرکی با سرعت ثابت به مدت ۳۰ ثانیه در خلاف جهت محور x درحال حرکت است و مسافت طی‌شدهٔ آن در ۳ ثانیهٔ هشتم از مسافت طی‌شده در ۸ ثانیهٔ سوم، ۱۲۰ متر کم‌تر است. اگر در کل حرکت، ۴ ثانیه بردارهای مکان و سرعت دارای علامت مخالف باشند، بردار مکان اولیهٔ متحرک کدام است؟

۱) $(۸۵m)\vec{i}$ ۲) $(۸۹m)\vec{i}$ ۳) $(۹۶m)\vec{i}$ ۴) $(۹۹m)\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۳)

در حرکت یکنواخت، مسافت (یا اندازهٔ جابه‌جایی) برای بازهٔ زمانی Δt از رابطهٔ $L=|v|\Delta t$ به‌دست می‌آید. درنتیجه برای دو بازهٔ زمانی داده‌شده، خواهیم داشت:

$$\text{ثانیهٔ هشتم } ۳ \Rightarrow \Delta t = ۳(s) \Rightarrow L = |v|\Delta t = |v|(۳)$$

$$\text{ثانیهٔ سوم } ۸ \Rightarrow \Delta t' = ۸(s) \Rightarrow L = |v|\Delta t' = |v|(۸)$$

طبق فرض سؤال:

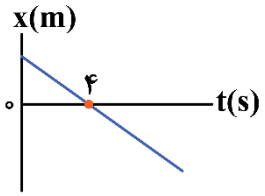
$$L' - L = ۱۲۰ \Rightarrow ۸|v| - ۳|v| = ۱۲۰ \Rightarrow |v| = ۲۴\frac{m}{s}$$

دقت شود چون متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، سرعت منفی است:

$$v = -۲۴\frac{m}{s}$$

هنگامی که در حرکت بر روی خط راست، بردارهای مکان و سرعت دارای جهت‌های مخالف باشند $(xv<۰)$ به این معنی است که متحرک درحال نزدیک‌شدن به مبدأ مکان است. درنتیجه اگر نمودار مکان ـ زمان این متحرک را رسم کنیم مانند شکل زیر می‌شود.

بنابراین داریم:



$$x = vt + x_۰ \xrightarrow[t=۴s\ ,\ x_۰=?]{x=۰\ ,\ v=-۲۴\frac{m}{s}} ۰ = -۲۴(۴) + x_۰$$

$$\Rightarrow x_۰ = ۹۶m \Rightarrow \vec{x}_۰ = ۹۶(m)\vec{i}$$

۱۳- متحرکی ۲۰ ثانیه با تندی ثابت $۱۰\frac{m}{s}$ بر روی یک مسیر مستقیم در یک جهت حرکت کرده و سپس ۵ ثانیه توقف می‌کند. این متحرک ۱۵ ثانیه با تندی چند متر بر ثانیه بازگردد تا تندی متوسط در کل مسیر برابر $۱۲/۵\frac{m}{s}$ شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳)

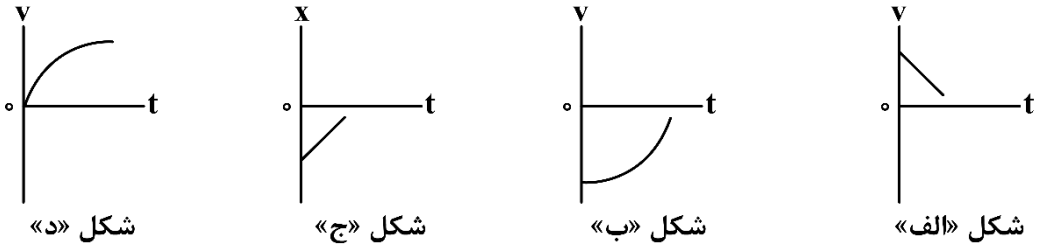
از رابطهٔ تندی متوسط متحرک در کل حرکت، تندی مسیر بازگشت متحرک را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت کل}}{\text{زمان کل}} \Rightarrow s_{av} = \frac{|\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| + |\Delta x_۳|}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲ + \Delta t_۳} \Rightarrow ۱۲/۵ = \frac{۲۰\times ۱۰ + ۰ + ۱۵v}{۲۰ + ۵ + ۱۵}$$

$$\Rightarrow ۵۰۰ = ۲۰۰ + ۱۵v \Rightarrow v = ۲۰\frac{m}{s}$$

۱۴- در شکل‌های زیر، نمودارهای سرعت ـ زمان یا مکان ـ زمان چهار متحرک رسم شده است. با توجه به شکل‌های داده‌شده، به‌ترتیب از راست به چپ، در چه تعداد از آن‌ها تندی متحرک درحال افزایش بوده و در چه تعداد از آن‌ها، اندازهٔ شتاب متحرک درحال کاهش است؟

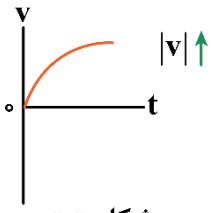
۱) ۲، ۲
۲) ۲، ۳
۳) ۱، ۲
۴) ۱، ۱



شکل «الف» شکل «ب» شکل «ج» شکل «د»

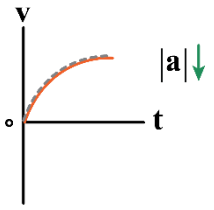
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ نموداری/مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۱)

در شکل‌های داده‌شده، فقط در شکل «د» تندی متحرک درحال افزایش است.



شکل «د»

از طرفی می‌دانیم شیب نمودار $v-t$ برابر شتاب متحرک است؛ بنابراین فقط در شکل «د» اندازهٔ شتاب متحرک درحال کاهش است.



شکل «د»

دقت شود نمودار مکان ـ زمان داده‌شده در شکل «ج»، به‌صورت خطی بوده و حرکت با سرعت ثابت است.

تمرین

مسیر حرکت رو در هریک از نمودارها رسم و نوع حرکت اونا رو مشخص کن.

ماز

۱۵- دو اتومبیل با تندی‌های ثابت $۲۰\frac{m}{s}$ و $۳۰\frac{m}{s}$ از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B که در فاصلهٔ ۶۰۰ متری نقطهٔ A قرار دارد، روی یک مسیر مستقیم حرکت می‌کنند. اگر اتومبیل سریع‌تر، ۸ ثانیه دیرتر از اتومبیل دیگر حرکت کرده باشد، ..... ثانیه ..... از اتومبیل کندتر به مقصد می‌رسد.

۱) ۲، دیرتر ۲) ۱۰، دیرتر ۳) ۲، زودتر ۴) ۱۰، زودتر

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳)

ابتدا مدت‌زمان لازم برای این‌که هریک از دو متحرک با تندی‌های $۲۰\frac{m}{s}$ و $۳۰\frac{m}{s}$ مسافت ۶۰۰ متر را طی کنند، را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \begin{cases} ۶۰۰ = ۲۰\Delta t_۱ \Rightarrow \Delta t_۱ = ۳۰s \\ ۶۰۰ = ۳۰\Delta t_۲ \Rightarrow \Delta t_۲ = ۲۰s \end{cases}$$

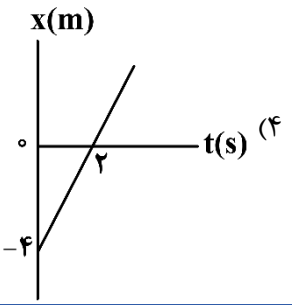
بنابراین متحرک سریع‌تر ۱۰ ثانیه زمان کم‌تر نیاز دارد تا این مسافت را طی کند. درنتیجه اگر ۸ ثانیه دیرتر حرکت کرده باشد، ۲ ثانیه زودتر به مقصد خواهد رسید.

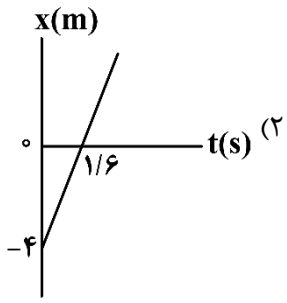
آزمون ماز

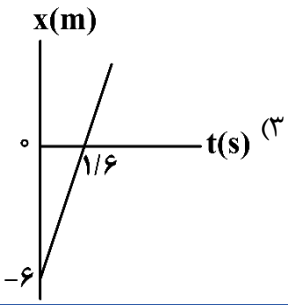
۱۵ آبان‌ماه

فیزیک

۱- جسمی با سرعت ثابت بر روی یک مسیر مستقیم در حرکت است. اگر جسم در لحظهٔ $t_۱ = ۴s$ در مکان $x_۱ = ۶m$ و در لحظهٔ $t_۲ = ۲۰s$ در مکان $x_۲ = ۴۶m$ باشد، نمودار مکان ـ زمان جسم در کدام گزینه به‌درستی رسم شده است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴)

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ نموداری ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

چون سرعت متحرک ثابته، به کمک رابطهٔ سرعت متوسط، سرعت متحرک رو به‌دست بیار و با معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت و به کمک یکی از نقطه‌ها، کار رو تمومش کن.

گام اول

سرعت متحرک ثابت و برابر است با:

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۴۶ - ۶}{۲۰ - ۴} = ۲/۵ \frac{m}{s}$$

گام دوم

به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان، مکان اولیهٔ متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$x = vt + x_۰ \xrightarrow[v=۲/۵\frac{m}{s}]{t=۴s, x=۶m} ۶ = ۲/۵ \times ۴ + x_۰ \Rightarrow x_۰ = -۴m$$

گام آخر

بنابراین نمودار مکان ـ زمان خطی با شیب $v = ۲/۵ \frac{m}{s}$ و عرض از مبدأ $x_۰ = -۴m$ است که در گزینهٔ (۲) به‌درستی رسم شده است.

جرقهٔ ذهنی

شیب نمودار مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت، مقداری ثابت بوده و برابر با سرعت متحرک است. تنها گزینه‌ای که شیب نمودارش ۲/۵ می‌شه، گزینهٔ (۲) هست و نیازی به پیداکردن مکان اولیهٔ متحرک نیست.

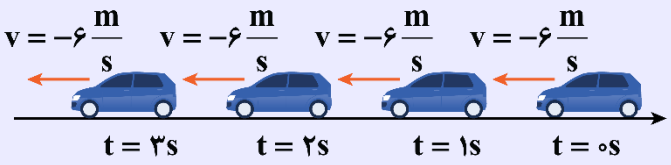
راهنمای مسیرت

شاید از ساده‌بودن این تست خیلی تعجب کنید و بگید مگه توی کنکور همچین سؤالی میاد؟! البته و صد البته که در کنکور همچین سؤالات ساده‌ای که در حد کتاب درسی و امتحان نهایی است، مطرح می‌شه. پس اول کتاب درسی رو حسابی بخونین بعد کمک‌آموزشی!

حرکت با سرعت ثابت

در این نوع حرکت اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است پس در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر سرعت لحظه‌ای آن است:

اندازهٔ سرعت متوسط = تندی متوسط = اندازهٔ سرعت لحظه‌ای = تندی لحظه‌ای



حرکت با سرعت ثابت

- حرکت روی خط راست انجام می‌شود.
- تندی با گذشت زمان تغییر نمی‌کند.
- جهت سرعت ثابت است.
- اندازهٔ سرعت ثابت است.

اندازهٔ سرعت و جهت سرعت ثابت است

پس شتاب حرکت صفر است: $a = 0$

در حرکت با سرعت ثابت

۱- سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط باهم برابرند: $v_{av} = v$

۲- شتاب حرکت صفر است.

۳- اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت باهم برابرند $(|d| = L)$، درنتیجه در این حرکت اندازهٔ سرعت برابر تندی است $(|v| = s)$.

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت

$$\text{مکان در لحظهٔ } t \leftarrow x = \underset{\text{سرعت}}{v}\underset{\text{زمان}}{t} + x_0 \rightarrow \text{مکان اولیه}$$

معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان حرکت با سرعت ثابت

$$\text{جابه‌جایی} \leftarrow \Delta x = \underset{\text{سرعت}}{v}\underset{\text{زمان سپری‌شده}}{\Delta t}$$

چون جهت حرکت ثابت است، در این رابطه اندازهٔ Δx برابر مسافت طی‌شده می‌باشد.

چگونه با استفاده از مکان متحرک در دو لحظهٔ t_1 و t_2، معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت را به‌دست آوریم؟

۱- در معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت یعنی $x = vt + x_0$ به‌جای t و x مقادیرشان را در دو نقطه جایگذاری می‌کنیم.

۲- با استفاده از دستگاه دو معادله - دو مجهول، مقادیر x_0 و v را به‌دست می‌آوریم.

۳- طبق رابطهٔ $x = vt + x_0$، با داشتن v و x_0 معادلهٔ $x - t$ را می‌نویسیم.

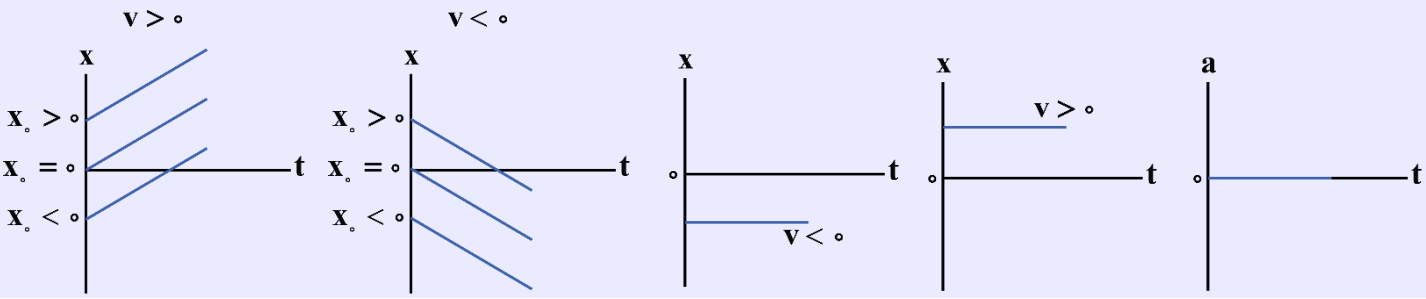
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

نمودارها در حرکت با سرعت ثابت

۱- طبق معادلهٔ مکان ـ زمان که به‌صورت یک معادلهٔ خطی است، نمودار مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت به‌صورت خط راستی با شیب ثابت v و عرض از مبدأ x_0 است:

۲- نمودار سرعت ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت، خط راستی موازی محور t است.

۳- شتاب در حرکت با سرعت ثابت، همواره صفر است.



آزمون سراسری تجربی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

۴۶- جسمی با سرعت ثابت بر مسیری مستقیم در حرکت است. اگر جسم در لحظهٔ $t_1 = 4s$ در مکان $x_1 = 8m$ و در لحظهٔ $t_2 = 10s$ در مکان $x_2 = 26m$ باشد، معادلهٔ مکان ـ زمان آن در SI کدام است؟

۱) $x = 3t + 4$ ۲) $x = 3t - 4$ ۳) $x = 2t + 4$ ۴) $x = 2t - 4$

پاسخ تشریحی:

روش اول: ابتدا سرعت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{26 - 8}{10 - 4} = 3\frac{m}{s} \Rightarrow v = 3\frac{m}{s}$$

حال یکی از لحظات داده‌شده را در معادلهٔ مکان ـ زمان قرار می‌دهیم و مکان اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[x_1 = 8m]{t_1 = 4s} 8 = 3 \times 4 + x_0 \Rightarrow x_0 = -4m$$

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = 3t - 4$$

روش دوم: یکی از لحظات را در گزینه‌ها جایگذاری می‌کنیم تا پاسخ درست مشخص شود:

۱) $x = 3t + 4 \xrightarrow[x_1 = 8m]{t_1 = 4s} 8 = 3 \times 4 + 4$ (✗)

۲) $x = 3t - 4 \xrightarrow[x_1 = 8m]{t_1 = 4s} 8 = 3 \times 4 - 4$ (✓)

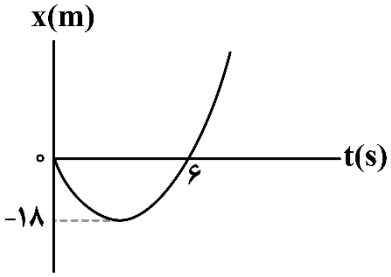
۳) $x = 2t + 4 \xrightarrow[x_1 = 8m]{t_1 = 4s} 8 = 2 \times 4 + 4$ (✗)

۴) $x = 2t - 4 \xrightarrow[x_1 = 8m]{t_1 = 4s} 8 = 2 \times 4 - 4$ (✗)

پاسخ: گزینهٔ ۲

تمرین

۲- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر مسیری مستقیم درحال حرکت است، مطابق سهمی شکل زیر است. بزرگی سرعت متوسط این متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ نموداری ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

گام اول

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را به‌دست می‌آوریم. با توجه به دو ریشهٔ نمودار یعنی $t=۰$ و $t=۶s$ داریم:

رأس سهمی: $t'=\frac{۰+۶}{۲}=۳s$

$$x=At(t-۶)\xrightarrow[x=-۱۸m]{t'=۳s}-۱۸=A(۳)(۳-۶)\Rightarrow A=۲$$

$$\Rightarrow x=۲t(t-۶)$$

گام دوم

می‌دانیم ۲ ثانیهٔ سوم، بازهٔ زمانی $t_۱=۴s$ تا $t_۲=۶s$ است؛ بنابراین مکان متحرک را در این دو لحظه به‌دست می‌آوریم:

$$x_۱=۲(۴)(۴-۶)=-۱۶m$$

$$x_۲=۲(۶)(۶-۶)=۰$$

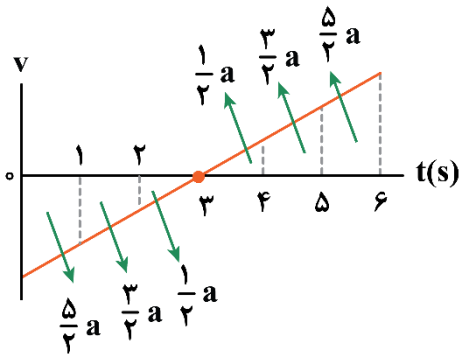
گام آخر

سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow v_{av}=\frac{۰-(-۱۶)}{۶-۴}=\frac{۱۶}{۲}=۸\frac{m}{s}$$

روش دوم

متحرک با شتاب ثابت در خلاف جهت محور x حرکت کرده و بعد از ۳s، ۱۸m- جابه‌جا شده و در لحظهٔ ۶s هم به مکان اولیه‌اش برگشته است. اگر از لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر است (لحظهٔ تغییر جهت) به حرکت آن نگاه کنیم، جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی به‌ترتیب $\frac{۱}{۲}a$، $\frac{۳}{۲}a$، $\frac{۵}{۲}a$ و ... است؛ بنابراین:



$$۰\le t<۳s:\frac{۱}{۲}a+\frac{۳}{۲}a+\frac{۵}{۲}a=۱۸\Rightarrow\frac{۹}{۲}a=۱۸\Rightarrow a=۴\frac{m}{s^۲}$$

$$۴s\le t<۶s:\Delta x=\frac{۳}{۲}a+\frac{۵}{۲}a=۴a\Rightarrow\Delta x=۱۶m$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۶}{۶-۴}=۸\frac{m}{s}$$

راهنمای مسیرت

نمودارهای مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت از تنوع بسیار بالایی برخوردار هستند و حتماً باید توجه ویژه‌ای به این بخش داشته باشین. توصیه می‌کنیم با حل تیپ تست‌های مختلف، سعی کنید مهارتتون رو بالا ببرید تا در زمان استاندارد بتونین پاسخگوی این تست‌ها باشین.

حرکت با شتاب ثابت

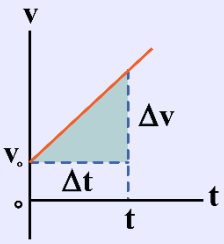
هرگاه بردار شتاب متحرکی در لحظه‌های مختلف یکسان باشد، حرکت جسم را حرکت با شتاب ثابت می‌نامیم.

ویژگی‌های حرکت با شتاب ثابت:

۱- سرعت متحرک با زمان به‌صورت خطی تغییر می‌کند پس تغییرات v نسبت به t به‌صورت یک تابع خطی است، به همین دلیل سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t برابر است با میانگین سرعت متحرک در این دو لحظه، یعنی معادلهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت به‌صورت زیر خواهد بود:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\text{حرکت با شتاب ثابت}}v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Rightarrow v_{av}=v_{(\frac{t_۱+t_۲}{۲})}\xrightarrow{v=at+v_۰}v_{av}=\frac{۱}{۲}a(t_۱+t_۲)+v_۰$$

۲- شیب نمودار سرعت ـ زمان ثابت است و برابر با شتاب متحرک می‌باشد.



$$\text{شیب نمودار سرعت ـ زمان} = a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

۳- شتاب متوسط در بازه‌های زمانی مختلف یکسان است.

شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی برابر شتاب لحظه‌ای متحرک است:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

۴- معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای که مکان متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند.

$$\text{مکان متحرک در لحظهٔ } t \leftarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \rightarrow \text{مکان اولیه}$$

(شتاب ثابت متحرک ↑، سرعت اولیه ↓)

در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک تابعی درجهٔ دوم از زمان است.

۵- معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

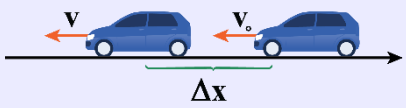
معادله‌ای است که سرعت متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$\text{سرعت متحرک در لحظهٔ } t \leftarrow v = at + v_0 \rightarrow \text{سرعت اولیه}$$

(شتاب ثابت متحرک ↑)

۶- معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت:

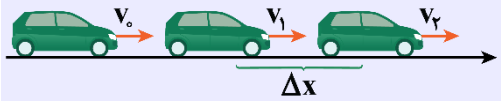
در این معادله زمان وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که زمان را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:



$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

۷- معادلهٔ مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت:

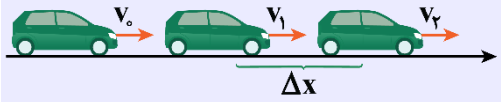
در این معادله شتاب وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که شتاب را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:



$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2}\Delta t$$

روش محاسبهٔ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت:

معادلهٔ جابه‌جایی زمان: (در بازهٔ t_1 تا t_2)



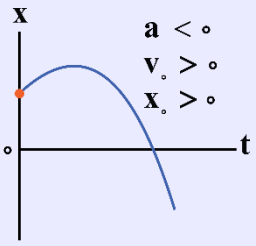
$$\Delta x = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_1\Delta t$$

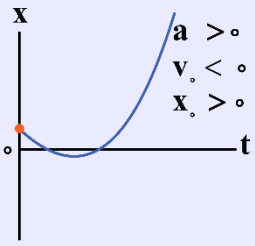
حالت خاص: جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $[0, t]$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

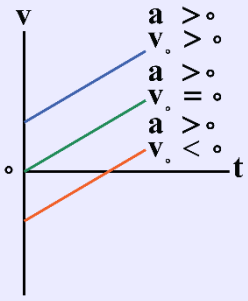
نمودارهای حرکت با شتاب ثابت

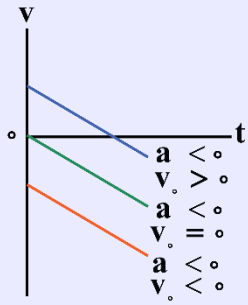
۱- نمودار مکان ـ زمان به شکل یک سهمی است که تقعر آن علامت شتاب را نشان می‌دهد.



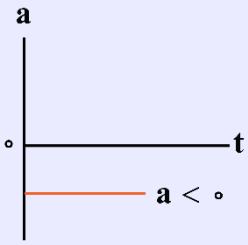


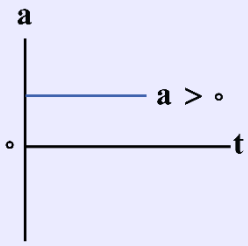
۲- نمودار سرعت ـ زمان به‌صورت یک خط با شیب ثابت است.





۳- نمودار شتاب ـ زمان به‌صورت یک خط افقی است.





نکته

در حرکت با شتاب ثابت اگر برای دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ داشته باشیم $t_{\text{رأس سهمی}} = \frac{t_۱ + t_۲}{۲}$ آن‌گاه $v_{t_۱} = -v_{t_۲}$ می‌شود.

مثال

۳- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $x = -t^۲ + ۶t + ۱۶$ است. تندی متوسط این متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکت آن چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۴/۲۵ ۲) ۳/۷۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

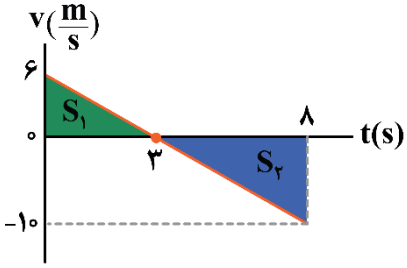
گام اول

به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک در حرکت با شتاب ثابت و مقایسهٔ آن با معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده، داریم:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ x = -t^۲ + ۶t + ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = ۶\frac{m}{s} \end{cases} \xrightarrow{v = at + v_۰} v = -۲t + ۶$$

گام دوم

نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم و با کمک مساحت زیر نمودار، مسافت طی‌شده را به‌دست می‌آوریم:



$$\ell = S_۱ + S_۲ = \frac{۶ \times ۳}{۲} + \frac{۱۰ \times ۵}{۲} = ۹ + ۲۵ = ۳۴m$$

گام آخر

تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۳۴}{۸} = \frac{۱۷}{۴} = ۴/۲۵\frac{m}{s}$$

راهنمای مسیرت

بچه‌ها این تست با توجه به مثال ۱-۱۲ کتاب درسی طرح شده و هم برای امتحان نهایی و هم برای کنکور به‌شدت مناسبه. پس گام‌های پاسخ‌نامه رو به‌دقت بخونین تا روند حل این تیپ تست‌ها ملکهٔ ذهنتون بشه.

آزمون سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳

۷۴- معادلهٔ حرکت جسمی در SI به‌صورت $x=-۲t^۲+۱۰t-۸$ است. در بازهٔ زمانی‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد تا دومین لحظه‌ای که جهت بردار مکان عوض می‌شود، سرعت متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟

۱) $۳\vec{i}$ ۲) $-۳\vec{i}$ ۳) $-۶\vec{i}$ ۴) $۶\vec{i}$

پاسخ تشریحی:

$$x=-۲t^۲+۱۰t-۸ \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰} a=-۴\frac{m}{s^۲}, v_۰=۱۰\frac{m}{s} \Rightarrow v=-۴t+۱۰$$

در لحظهٔ تغییر جهت، سرعت صفر است؛ بنابراین:

$$v=-۴t+۱۰ \xrightarrow{v=۰} -۴t+۱۰=۰ \Rightarrow t=۲/۵s$$

در لحظه‌ای که جهت بردار مکان عوض می‌شود، $x=۰$ می‌باشد؛ بنابراین:

$$x=۰ \Rightarrow -۲t^۲+۱۰t-۸=۰ \Rightarrow t=۱s,\ t=۴s$$

چون دومین لحظهٔ خواسته شده، $t=۴s$ قابل‌قبول است.

مکان جسم را در لحظات $t_۱=۲/۵s$ و $t_۲=۴s$ به‌دست می‌آوریم:

$$t_۱=۲/۵s \Rightarrow x_۱=-۲(۲/۵)^۲+۱۰(۲/۵)-۸ \Rightarrow x_۱=۴/۵m$$

$$t_۲=۴s \Rightarrow x_۲=۰$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۰-۴/۵}{۴-۲/۵}=-۳\frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_{av}=-۳\vec{i}(\frac{m}{s})$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

ماز

۴- متحرکی بر روی محور x با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ درحال حرکت است. اگر سرعت این متحرک در مکان $\vec{x}_۱=-۸m\vec{i}$ برابر با $\vec{v}_۱=-۶\frac{m}{s}\vec{i}$ باشد، در چه مکانی برحسب متر این متحرک تغییر جهت می‌دهد؟

۱) $۱۷\vec{i}$ ۲) $-۱۷\vec{i}$ ۳) $۲۶\vec{i}$ ۴) $-۲۶\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

به این فکر کن که موقع تغییر جهت، سرعت متحرک چقدر می‌شه و به کمک معادلهٔ جابه‌جایی ـ سرعت (مستقل از زمان)، حلش کن.

می‌دانیم در مکانی که متحرک تغییر جهت می‌دهد سرعتش صفر است؛ بنابراین طبق معادلهٔ جابه‌جایی ـ سرعت می‌توانیم بنویسیم:

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a(x_۲-x_۱) \Rightarrow ۰^۲-(-۶)^۲=۲(۲)(x_۲-(-۸))$$

$$\Rightarrow -۳۶=۴(x_۲+۸) \Rightarrow x_۲+۸=-۹ \Rightarrow x_۲=-۱۷m$$

$$\Rightarrow \vec{x}_۲=-۱۷(m)\vec{i}$$

ماز

۵- خودرویی با تندی ثابت $۷۲\frac{km}{h}$ بر روی مسیری مستقیم درحال حرکت است. ناگهان راننده مانعی ساکن را در فاصلهٔ d می‌بیند و ۰/۴ ثانیه بعد با شتابی به بزرگی $۴\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌گیرد و با تندی $۱۴/۴\frac{km}{h}$ به مانع برخورد می‌کند. d چند متر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۵۶ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

یه دونه مسافت واکنش راننده و یه دونه هم مسافت مربوط به ترمزگرفتن راننده رو حساب کن و با جمع اون‌ها فاصله رو به‌دست بیار.

گام اول

جابه‌جایی خودرو را در مدت‌زمان واکنش راننده به‌دست می‌آوریم:

حرکت با سرعت ثابت (۰ تا ۰/۴s):
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=0/4s]{v=72\frac{km}{h}=\frac{72}{3/6}\frac{m}{s}=20\frac{m}{s}} 20=\frac{\Delta x}{0/4} \Rightarrow \Delta x=8m$$

گام دوم

جابه‌جایی خودرو را از لحظهٔ ترمز تا برخورد به مانع با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم:

حرکت با شتاب ثابت:
$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x' \xrightarrow[v_2=14/4\frac{km}{h}=\frac{14/4}{3/6}\frac{m}{s}=4\frac{m}{s}]{v_1=20\frac{m}{s},\ a=-4\frac{m}{s^2}} 4^2-20^2=2(-4)\Delta x'$$

$$\Rightarrow \Delta x'=\frac{16-400}{-8}=48m$$

دقت کنید که چون حرکت کندشونده است، شتاب متحرک منفی است.

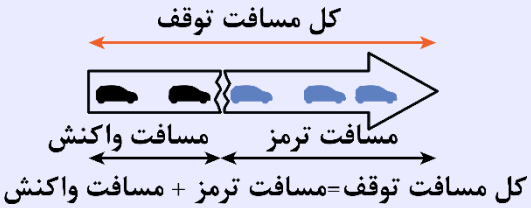
گام آخر

مقدار d را به‌دست می‌آوریم:

$$d=\Delta x+\Delta x'=8+48=56m$$

بررسی مسائل ترمز و توقف

مسائل توقف از دو قسمت تشکیل می‌شوند:



کل مسافت توقف=مسافت ترمز + مسافت واکنش

۱- قبل از ترمز (زمان واکنش راننده):

از زمانی که راننده یک مانع را می‌بیند، تا زمانی که پدال ترمز را فشار دهد، مدتی طول می‌کشد که به این زمان، زمان واکنش (عکس‌العمل) راننده می‌گویند. در این مدت راننده هنوز ترمز نکرده و خودرو با همان سرعت اولیه حرکت می‌کند.

$$\Delta x_{\text{واکنش}}=v_0\Delta t_{\text{واکنش}}$$

۲- پس از ترمز (کندشدن):

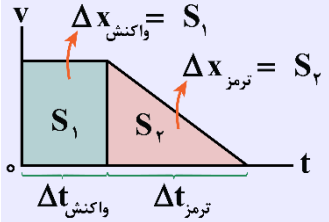
در این مدت، حرکت خودرو با شتاب ثابت a کند می‌شود. زمان و مسافت طی‌شده در هنگام ترمز برابر است با:

$$\Delta t_{\text{ترمز}}=\frac{v_0}{|a|} \quad \text{و} \quad \Delta x_{\text{ترمز}}=\frac{v_0^2}{|2a|}$$

۳- کل مسافتی که خودرو طی می‌کند تا متوقف شود برابر مجموع مسافت طی‌شده در دو مرحلهٔ قبل است:

$$\Delta x_{\text{توقف}}=\Delta x_{\text{واکنش}}+\Delta x_{\text{ترمز}}=v_0\Delta t_{\text{واکنش}}+\frac{v_0^2}{|2a|}$$

۴- گاهی برای بررسی مسائل ترمز، می‌توانیم نمودار سرعت ـ زمان متحرک را نیز رسم کنیم.



آزمون سراسری ریاضی ۱۳۹۶

اتومبیلی روی یک خط راست با سرعت $۱۰۸\frac{km}{h}$ درحال حرکت است. راننده با دیدن مانعی در فاصلهٔ ۱۶۵m، با شتاب ثابت $۳\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌کند و درست جلوی مانع می‌ایستد. اگر زمان واکنش راننده $t_۱$ و زمانی که حرکت اتومبیل کندشونده بوده، $t_۲$ باشد، $\frac{t_۲}{t_۱}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ تشریحی:

گام اول:

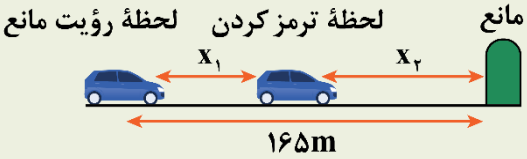
الف) اتومبیلی روی خط راست با سرعت $۱۰۸\frac{km}{h}$ درحال حرکت است. $\leftarrow v_۰ = ۱۰۸\frac{km}{h} = \frac{۱۰۸}{۳/۶} = ۳۰\frac{m}{s}$

ب) راننده با دیدن مانعی در فاصلهٔ ۱۶۵m $\leftarrow$ ۱۶۵m = فاصلهٔ اتومبیل از مانع در لحظهٔ دیدن آن

پ) با شتاب ثابت $۳\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌کند و جلوی مانع می‌ایستد $\leftarrow a = -۳\frac{m}{s^۲}$

گام دوم:

با توجه به شکل زیر و معادلهٔ سرعت ـ زمان خواهیم داشت:



$$x_۲ = \frac{-v_۰^۲}{۲a} = \frac{-(۳۰)^۲}{-۲\times ۳} = ۱۵۰m$$

$$x_۱ = ۱۶۵ - x_۲ = ۱۶۵ - ۱۵۰ = ۱۵m$$

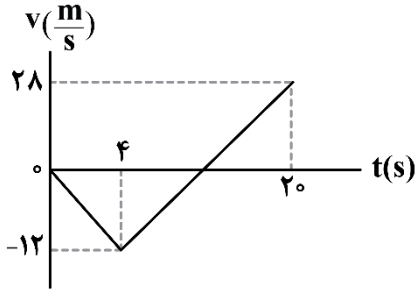
$$v = \frac{x_۱}{t_۱} \Rightarrow t_۱ = \frac{۱۵}{۳۰} = \frac{۱}{۲}s$$

$$v = at_۲ + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۳\times t_۲ + ۳۰ \Rightarrow t_۲ = ۱۰s$$

$$\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۱۰}{\frac{۱}{۲}} = ۲۰$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

۶- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی یک مسیر مستقیم درحال حرکت است، مطابق شکل زیر است. اگر این متحرک در لحظهٔ $t = ۳s$ از مبدأ مکان عبور کند، در لحظهٔ تغییر جهت حرکت در فاصلهٔ چندمتری مبدأ قرار دارد؟

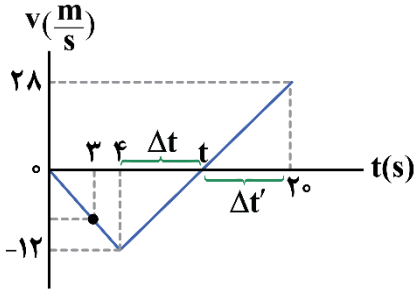


۱) ۲۸/۸
۲) ۲۹/۳
۳) ۳۸/۸
۴) ۳۹/۳

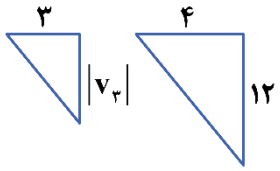
پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ نموداری ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۲۰۱)

کام اول

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۳s$ و لحظهٔ تغییر جهت متحرک را به‌دست می‌آوریم:



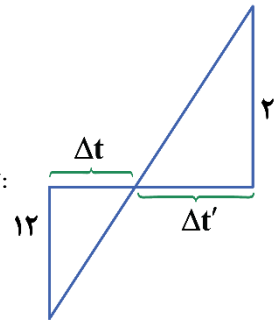
تشابه (۱):



$$\frac{|v_۳|}{۱۲} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow |v_۳| = ۹$$

$$\Rightarrow v_۳ = -۹\frac{m}{s}$$

تشابه (۲):



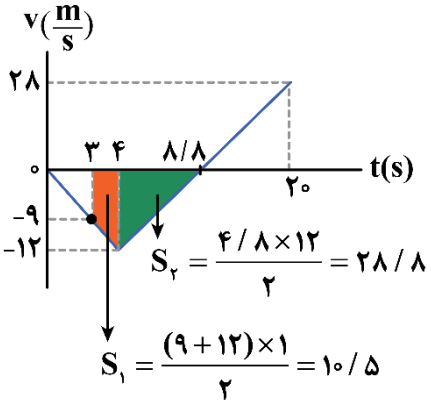
$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{۱۲}{۲۸} = \frac{۳}{۷}$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{۷}{۳}\Delta t$$

$$\Delta t + \Delta t' = ۲۰ - ۴ = ۱۶ \Rightarrow \Delta t + \frac{۷}{۳}\Delta t = \frac{۱۰}{۳}\Delta t = ۱۶ \Rightarrow \Delta t = ۴/۸s \Rightarrow t = ۴ + \Delta t = ۴ + ۴/۸ = ۸/۸s$$

کام دوم

جابه‌جایی متحرک را در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳s$ تا $t_۲ = ۸/۸s$ به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta x = -S_۱ - S_۲ = -۱۰/۵ - ۲۸/۸ = -۳۹/۳m$$

کام آخر

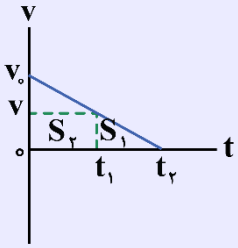
متحرک در لحظهٔ $t = ۳s$ به مبدأ مکان رسیده و از این لحظه تا لحظهٔ تغییر جهت حرکت $(t = ۸/۸s)$، در خلاف جهت محور x، از مبدأ مکان دور شده است. پس در لحظهٔ تغییر جهت حرکت، فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان $|\Delta x| = ۳۹/۳m$ است.

راهنمای مسیرت

اهمیت نمودار سرعت ـ زمان در تحلیل مسائل حرکت‌شناسی بر هیچ‌کس پوشیده نیست. اتفاقاً ما هم سعی می‌کنیم تمام تیپ‌های مربوط به نمودار سرعت ـ زمان را براتون پوشش بدیم تا دید وسیعی پیدا کنین و بتونین از پس این مدل سؤالات به‌راحتی بربیاین.

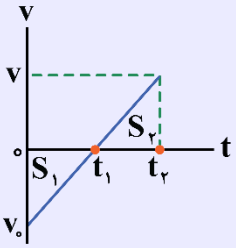
نمودار سرعت ـ زمان

در سؤالات حرکت‌شناسی و نمودارهای این بخش استفاده از تشابه مثلث‌ها بسیار پرکاربرد است. مثلاً در نمودارهای سرعت ـ زمان زیر می‌توانیم تشابه را برای مثلث‌ها به‌کار ببریم:



$$\text{نسبت تشابه مثلث‌ها} = \frac{v}{v_0} = \frac{t_2 - t_1}{t_2}$$

$$\text{نسبت مساحت مثلث‌ها} = \frac{S_1}{S_1 + S_2} = (\frac{v}{v_0})^2 = (\frac{t_2 - t_1}{t_2})^2$$

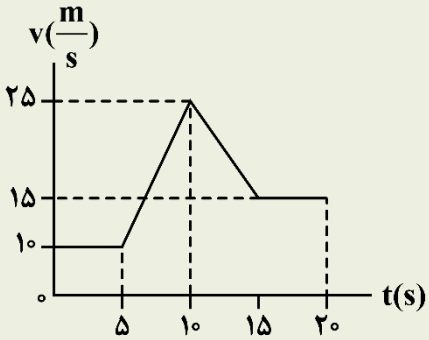


$$\text{نسبت تشابه مثلث‌ها} = \frac{v}{v_0} = \frac{t_2 - t_1}{t_1}$$

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{S_2}{S_1} = (\frac{v}{v_0})^2 = (\frac{t_2 - t_1}{t_1})^2$$

آزمون سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط در بازهٔ $t_1 = 7s$ تا $t_2 = 12s$، چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۱

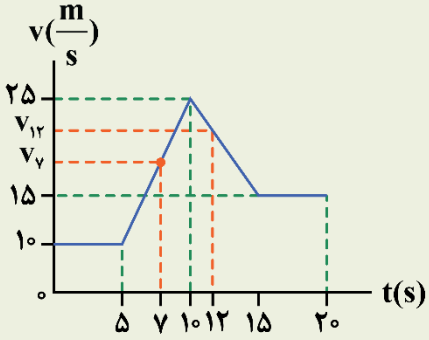
۲) $\frac{۱}{۲}$

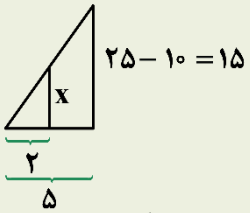
۳) $\frac{۱}{۵}$

۴) صفر

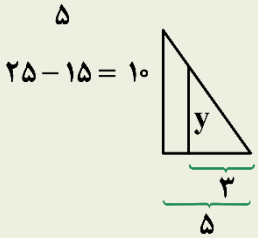
پاسخ تشریحی:

با توجه به قواعد تشابه دو مثلث v_7 و v_{12} را به‌دست می‌آوریم:





$$\frac{x}{۱۵} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow v_7 = v_5 + x = ۱۰ + ۶ = ۱۶ \frac{m}{s}$$



$$\frac{y}{۱۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow y = ۶ \Rightarrow v_{12} = v_{15} + y = ۱۵ + ۶ = ۲۱ \frac{m}{s}$$

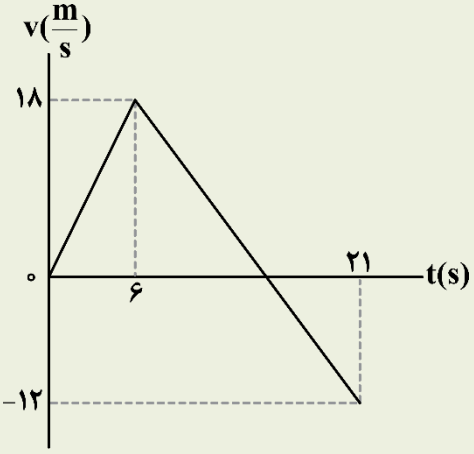
حالا شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = 7s$ تا $t_2 = 12s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{12} - v_7}{۱۲ - ۷} = \frac{۲۱ - ۱۶}{۵} = ۱ \frac{m}{s^2}$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

آزمون سراسری تجربی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴

۵۳- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر متحرک در لحظهٔ $t=0s$ از مکان $\vec{x}_0=(10m)\vec{i}$ عبور کند، در چه لحظه‌هایی برحسب ثانیه مکان متحرک $\vec{x}=(136m)\vec{i}$ است؟



۱) ۱۰ و ۱۵

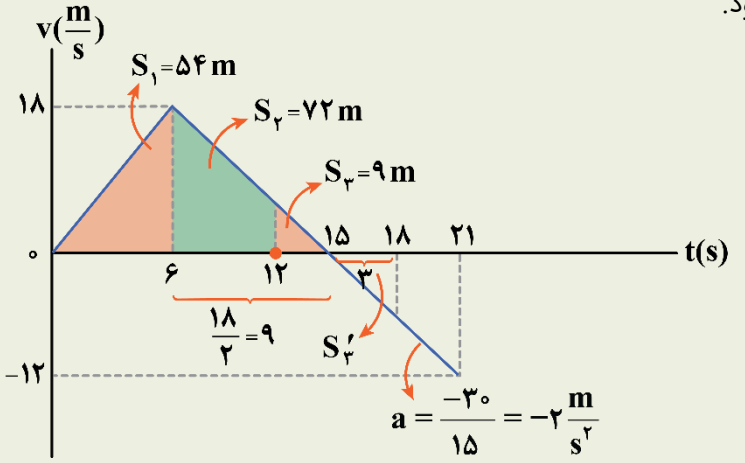
۲) ۱۲ و ۱۸

۳) ۱۳/۵ و ۱۶/۵

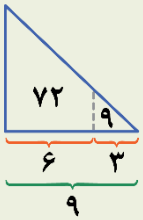
۴) ۱۰/۵ و ۱۹/۵

پاسخ تشریحی:

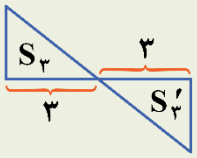
برای آن‌که متحرک از مکان $x_0=10m$ به مکان $x=136m$ برسد، باید جابه‌جایی $\Delta x=126m$ را طی کند؛ بنابراین باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که مساحت زیر نمودار از ابتدا تا آن لحظه برابر ۱۲۶m شود.



تشابه (۱):



تشابه (۲):



$x_{12}=x_{18}=54+72+10=136m$

پاسخ: گزینهٔ ۲

ماز

۷- معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند در SI به‌صورت $v=2/4t-9/6$ است. سرعت متوسط متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد، با سرعت آن در کدام لحظه برابر است؟

۱) پایان ثانیهٔ اول ۲) پایان ثانیهٔ دوم ۳) پایان ثانیهٔ سوم ۴) پایان ثانیهٔ چهارم

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا لحظهٔ تغییر جهت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$v=2/4t-9/6 \xrightarrow{v=0} 0=2/4t-9/6 \Rightarrow t=4s$$

با توجه به این‌که حرکت متحرک با شتاب ثابت انجام می‌شود و معادلهٔ سرعت ـ زمان خطی است؛ سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی برابر سرعت در وسط آن بازه است؛ بنابراین سرعت متوسط در بازهٔ $t_1=0$ تا $t_2=4s$ برابر سرعت در لحظهٔ $t=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{0+4}{2}=2s$ (پایان ثانیهٔ دوم) است.

۸- متحرکی در لحظهٔ $t_1=0s$ با شتاب ثابت و مثبت، با تندی اولیهٔ v_0 در جهت محور x شروع به حرکت می‌کند. اگر در بازه‌های زمانی $t_1=0s$ تا $t_2=6s$ و $t_2=6s$ تا $t_3=12s$، به‌ترتیب مسافت‌های $72m$ و $144m$ را طی کند، در کدام بازهٔ زمانی داده‌شده برحسب ثانیه، مسافت ۳۲ متر را طی می‌کند؟

۱) ۷ تا ۹ ۲) ۶ تا ۸ ۳) ۵ تا ۷ ۴) ۴ تا ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

گام اول

ابتدا دقت کنید که متحرک در جهت محور x و بدون تغییر جهت حرکت کرده و مسافت طی‌شده و جابه‌جایی در هر بازهٔ زمانی برابرند. جابه‌جایی یا همان مسافت طی‌شده در بازه‌های زمانی $t_1=0$ تا $t_2=6s$ و $t_2=6s$ تا $t_3=12s$ برابر است با:

$$\Delta x_{0\to t}=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\begin{cases}\Delta x_{0\to 6s}=\frac{1}{2}a\times 6^2+v_0\times 6=18a+6v_0\\ \Delta x_{6s\to 12s}=\Delta x_{0\to 12s}-\Delta x_{0\to 6s}=(72a+12v_0)-(18a+6v_0)=54a+6v_0\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}18a+6v_0=72\\ 54a+6v_0=144\end{cases}\xrightarrow{\text{تفریق معادله‌ها}}36a=72\Rightarrow a=2\frac{m}{s^2}\ ,\ v_0=6\frac{m}{s}$$

گام آخر

حال با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده برای v_0 و a، باید ببینیم جابه‌جایی در کدام بازهٔ زمانی $32m$ می‌شود. با چک‌کردن گزینهٔ (۴) داریم:

$$\Delta x_{4s\to 6s}=\Delta x_{0\to 6s}-\Delta x_{0\to 4s}=\frac{1}{2}a\times 6^2+6v_0-(\frac{1}{2}a\times 4^2+4v_0)$$

$$\Rightarrow \Delta x_{4s\to 6s}=18a+6v_0-(8a+4v_0)=10a+2v_0$$

$$\xrightarrow[v_0=6\frac{m}{s}]{a=2\frac{m}{s^2}}\Delta x_{4s\to 6s}=10\times 2+2\times 6=32m$$

روش دوم

می‌دانیم در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی در T ثانیهٔ nاُم از رابطهٔ $\Delta x=\frac{1}{2}aT^2(2n-1)+Tv_0$ به‌دست می‌آید که این جملات تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت aT^2 می‌دهند؛ بنابراین داریم:

$$\begin{matrix}\text{جابه‌جایی ۶s اول}:\Delta x_1=72m\\ \text{جابه‌جایی ۶s دوم}:\Delta x_2=144m\end{matrix}\xrightarrow[T=6s]{\Delta x_2-\Delta x_1=aT^2}144-72=a(6)^2\Rightarrow a=2\frac{m}{s^2}$$

$$\xrightarrow[\Delta x_1=72m]{\Delta x_1=18a+6v_0}72=36+6v_0\Rightarrow v_0=6\frac{m}{s}\Rightarrow\Delta x=T^2(2n-1)+6T$$

طول بازهٔ زمانی در همهٔ گزینه‌ها ۲s است و باید این بار $T=2s$ فرض کنیم و $\Delta x=32m$ است:

$32=(2)^2(2n-1)+6(2)\Rightarrow 2n-1=5\Rightarrow n=3\Rightarrow$ پس این جابه‌جایی مربوط به ۲ ثانیهٔ سوم یعنی از ۴s تا ۶s است.

راهنمای مسیرت

بچه‌ها حواستون باشه که رابطهٔ $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ در حرکت شتاب ثابت، جابه‌جایی رو از لحظهٔ صفر تا t حساب می‌کنه و اگر قرار باشه جابه‌جایی را از لحظهٔ t_1 تا t_2 به‌دست بیاریم باید جابه‌جایی صفر تا t_1 رو از جابه‌جایی صفر تا t_2 کم کنیم که به این می‌گن تکنیک جزء به کل و اتفاقاً همواره مورد علاقهٔ طراحان کنکور هست و امیدواریم به کمک این تست، دید خوبی رو به این نوع مسائل پیدا کرده باشین.

ماز

۹- خودرویی در یک مسیر مستقیم، پشت چراغ‌قرمز ایستاده است. با سبزشدن چراغ، خودرو با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت $۱۲۹/۶\frac{km}{h}$ از آن سبقت می‌گیرد. دو متحرک در فاصلهٔ چندمتری از چراغ‌قرمز، دوباره از کنار هم می‌گذرند؟

۱) ۶۴۸ ۲) ۳۲۴ ۳) ۳۴۸ ۴) ۶۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

کام اول

معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

خودرو: $x_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow{a=۴\frac{m}{s^2},\ v_0=0,\ x_0=0} x_1 = ۲t^2$

کامیون: $x_2 = vt + x_0 \xrightarrow{v=۱۲۹/۶\frac{km}{h}=۳۶\frac{m}{s},\ x_0=0} x_2 = ۳۶t$

کام آخر

زمان و مکان به‌هم رسیدن را به‌دست می‌آوریم:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow ۲t^2 = ۳۶t \Rightarrow t = ۱۸s \Rightarrow x = ۳۶ \times ۱۸ = ۶۴۸m$$

توجه!

بچه‌ها حواستون باشه که محل چراغ‌قرمز رو مبدأ مکان گرفتیم $(x_0 = 0)$.

حرکت دو متحرک با شتاب ثابت چگونه بررسی می‌شود؟

گاهی در سؤالات می‌خواهیم حرکت دو متحرک را بررسی کنیم که یکی از آن‌ها یا هر دو با شتاب ثابت حرکت می‌کنند. برای بررسی این‌گونه سؤالات، معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم و از نکات زیر استفاده می‌کنیم:

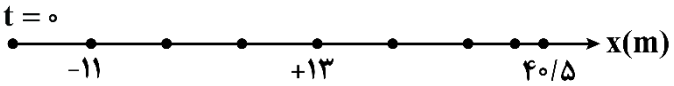
۱- اگر متحرک با سرعت ثابت حرکت کند، معادلهٔ مکان ـ زمان آن را به‌صورت $x = vt + x_0$ می‌نویسیم و اگر متحرک با شتاب ثابت حرکت کند، معادلهٔ مکان ـ زمان آن را به‌صورت $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ می‌نویسیم.

۲- اگر لحظهٔ **به‌هم رسیدن** دو متحرک را بخواهیم، معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را باهم **مساوی** قرار می‌دهیم. $(x_A = x_B)$

۳- اگر **فاصلهٔ دو متحرک** را بخواهیم، **قدر مطلق اختلاف مکان** آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. $(d = |x_A - x_B|)$

ماز

۱۰- **مطابق شکل، قسمتی از مسیر حرکت یک متحرک که بر روی محور x حرکت می‌کند، رسم شده است. این متحرک ۵ ثانیهٔ اول حرکت خود را با سرعت ثابت انجام داده و بلافاصله پس از آن با شتاب ثابت بر مسیر مستقیم به حرکت خود ادامه می‌دهد. اگر نقاط نشان‌داده‌شده بر روی مسیر، بازه‌های زمانی متوالی یک ثانیه‌ای باشند، آن‌گاه در کدام لحظه، متحرک دوباره به مبدأ حرکت خود می‌رسد؟**



۱) $t = ۲۰s$

۲) $t = ۲۵s$

۳) $t = ۳۰s$

۴) $t = ۳۲s$

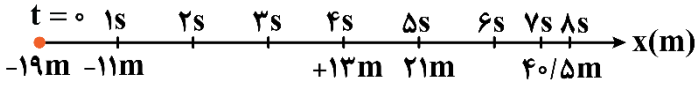
پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

گام اول

در لحظات $t_۱ = ۱s$ و $t_۲ = ۴s$ متحرک از مکان $x_۱ = -۱۱m$ به $x_۲ = +۱۳m$ رسیده است.

با توجه به این‌که در این بازهٔ زمانی، حرکت یکنواخت است، خواهیم داشت:

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(۱۳) - (-۱۱)}{۴ - ۱} = ۸\frac{m}{s}$$



درنتیجه متحرک از لحظهٔ $t = ۴s$ تا لحظهٔ $t = ۵s$، ۸ متر جلوتر رفته و به مکان $۱۳ + ۸ = ۲۱m$ می‌رسد. همچنین چون متحرک در لحظهٔ $t = ۱s$ در مکان $x = -۱۱m$ بوده است، پس در مبدأ زمان، ۸ متر عقب‌تر بوده است. $(x_۰ = -۱۹m)$

از لحظهٔ $t = ۵s$ به بعد، حرکت با شتاب ثابت است. ابتدا شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$۵s \le t \le ۸s : \Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow ۴۰/۵ - ۲۱ = \frac{۱}{۲}a(۳)^۲ + (۸)(۳) \Rightarrow a = -۱\frac{m}{s^۲}$$

گام دوم

اگر قسمت شتاب‌دار را درنظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} v_۰ = ۸\frac{m}{s} \\ a = -۱\frac{m}{s^۲} \\ x_۰ = ۲۱m \\ x = -۱۹m \\ t = ? \end{cases} \qquad \Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow (-۱۹) - (۲۱) = \frac{۱}{۲}(-۱)t^۲ + ۸t$$

$$\Rightarrow t^۲ - ۱۶t - ۸۰ = ۰ \Rightarrow (t + ۴)(t - ۲۰) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۴s \ (\times) \\ t = ۲۰s \ (\checkmark) \end{cases}$$

گام آخر

۲۰ ثانیه پس از شروع حرکت با شتاب ثابت، متحرک به مبدأ حرکت خود برمی‌گردد.

با توجه به این‌که قبل از حرکت با شتاب ثابت، متحرک ۵ ثانیه حرکت یکنواخت داشته است، درنتیجه در لحظهٔ $t = ۵ + ۲۰ = ۲۵s$ متحرک به مکان اولیهٔ خود بازگشته است.

راهنمای مسیرت

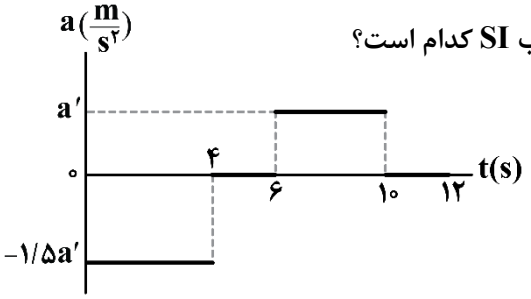
این سؤال براساس تمرین ۱۱ آخر فصل طراحی شده و حرکت سرعت ثابت با حرکت شتاب ثابت ترکیب شده. اگر نتونستی از پس حل این سؤال بر بیای حتماً تمام مراحل پاسخ‌نامه رو به‌دقت بخون و سعی کن یک بار هم کامل خودت حلش کنی. چون این سؤال خیلی برای کنکور مناسبه.

سوتی‌های پرتکرار

اگر خواست به ۵s حرکت یکنواخت نباشه و آخر سر فقط زمان مربوط به حرکت با شتاب ثابت رو لحاظ کنی در دام گزینهٔ (۱) می‌افتی.

ماز

۱۱- نمودار شتاب ـ زمان حرکت متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1=2s$ تا $t_2=12s$ برابر با $0/4\frac{m}{s^2}$ باشد، a' برحسب SI کدام است؟



۱) ۸
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ نموداری ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

به کمک سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان، Δv رو پیدا کن و با رابطهٔ $|a_{av}|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}$ تمومش کن.

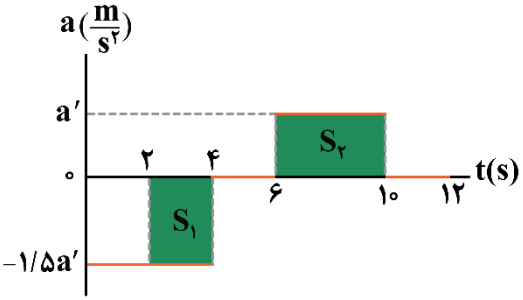
کام اول

بزرگی تغییرات سرعت متحرک را در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 به‌دست می‌آوریم:

$$|a_{av}|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}\Rightarrow 0/4=\frac{|\Delta v|}{12-2}\Rightarrow|\Delta v|=4\frac{m}{s}$$

کام آخر

با توجه به مساحت محصور نمودار شتاب ـ زمان، a' را به‌دست می‌آوریم:



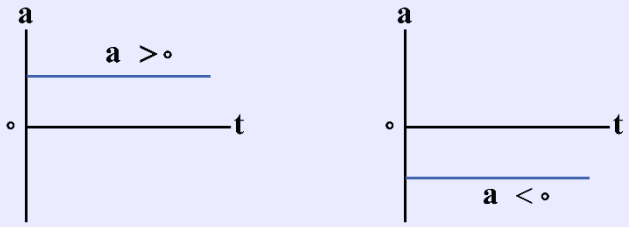
$$\Delta v_1=-S_1=-2\times 1/5a'=-3a'$$

$$\Delta v_2=S_2=4\times a'=4a'$$

$$\Delta v=\Delta v_1+\Delta v_2\Rightarrow \Delta v=-3a'+4a'=a'\xrightarrow{|\Delta v|=4\frac{m}{s}}a'=4\frac{m}{s^2}$$

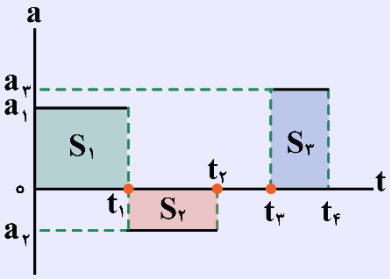
نمودار شتاب ـ زمان حرکت شتاب ثابت

نمودار شتاب ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت، خطی افقی موازی با محور زمان است که بسته به علامت شتاب، به یکی از دو صورت زیر است:



نمودار شتاب ـ زمان

در حرکت با شتاب ثابت، نمودار شتاب ـ زمان خطی موازی محور زمان است. اگر شتاب ثابت حرکت در هر بازهٔ زمانی با بازهٔ دیگر در طول حرکت متفاوت باشد، نمودار مانند شکل زیر، پله‌ای خواهد بود و مساحت زیر نمودار در هر بخش، با تغییرات سرعت در آن بازهٔ زمانی برابر است:



$$\Delta v = +S_1 - S_2 + S_3$$

در بازهٔ t_2 تا t_3 شتاب صفر است.

۱۲- متحرکی بر روی خط راست و با شتاب ثابت درحال حرکت است و در طی حرکت خود، یک بار تغییر جهت می‌دهد. اگر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ دوم و ۳ ثانیهٔ سوم حرکت به‌ترتیب ۶m و ۱۸m باشد، متحرک چند ثانیه به‌صورت کندشونده حرکت کرده است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۳

۳) ۴/۵ ۴) گزینه‌های (۱) یا (۳) می‌توانند صحیح باشند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظه معادل سرعت در لحظهٔ وسط آن دو لحظه است.

$$v_{av} = \frac{v_{t_1} + v_{t_2}}{2} = v_{\frac{t_1+t_2}{2}}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\Delta x = v_{av} t \quad \text{و} \quad v_t = v_0 + at$$

بنابراین:

- در ۲ ثانیهٔ دوم ($t_1 = 2s$ تا $t_2 = 4s$):

$$\Delta x = v_{3s} \times 2$$

$$\Delta x = (v_0 + 3a) \times 2$$

- در ۳ ثانیهٔ سوم ($t_1 = 6s$ تا $t_2 = 9s$):

$$\Delta x = v_{7/5s} \times 3$$

$$\Delta x = (v_0 + 7/5a) \times 3$$

- با توجه به مشخص‌نبودن علامت جابه‌جایی، ۴ حالت خواهیم داشت:

۱) $\left.\begin{matrix}(v_0 + 3a) \times 2 = 6 \\ (v_0 + 7/5a) \times 3 = 18\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}v_0 = 1\frac{m}{s} \\ a = \frac{2}{3}\frac{m}{s^2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ نوع حرکت همواره تندشونده بوده و متحرک متوقف نمی‌شود.

۲) $\left.\begin{matrix}(v_0 + 3a) \times 2 = -6 \\ (v_0 + 7/5a) \times 3 = -18\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}v_0 = -1\frac{m}{s} \\ a = -\frac{2}{3}\frac{m}{s^2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ نوع حرکت همواره تندشونده بوده و متحرک متوقف نمی‌شود.

$$\text{۳)}\ \left.\begin{matrix}(v_۰+۳a)\times ۲=-۶\\(v_۰+۷/۵a)\times ۳=۱۸\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}v_۰=-۹\dfrac{m}{s}\\ a=۲\dfrac{m}{s^۲}\end{matrix}$$

$$\text{۴)}\ \left.\begin{matrix}(v_۰+۳a)\times ۲=۶\\(v_۰+۷/۵a)\times ۳=-۱۸\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}v_۰=۹\dfrac{m}{s}\\ a=-۲\dfrac{m}{s^۲}\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{۳)}\\ \text{۴)}\end{matrix}\right\}\Rightarrow v=v_۰+at=۰\Rightarrow \left.\begin{matrix}-۹+۲t=۰\\ ۹-۲t=۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow t=۴/۵s$$

توجه!

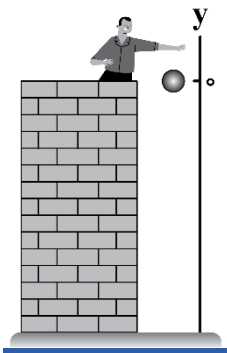
بچه‌ها در حالت‌های (۳) و (۴)، تا لحظهٔ تغییر جهت حرکت، نوع حرکت متحرک کندشونده است.

راهنمای مسیرت

توی این سؤال باید حواستون می‌بود که وقتی می‌گه اندازهٔ جابه‌جایی ۱۸m هست، پس خود جابه‌جایی می‌تونه ۱۸m+ یا ۱۸m- باشه و باید تحلیل در دو حالت مختلف انجام بشه. توصیه می‌کنم این تست رو که دارای دیدگاه جدید و خلاقانه است رو حسابی یاد بگیرین. چون به‌شدت برای کنکور مناسبه.

ماز

۱۳- شکل زیر شخصی را نشان می‌دهد که از بالای دیواری بلند، گلوله‌ای را رها می‌کند. اگر ارتفاع دیوار ۲۰m باشد سرعت برخورد گلوله به سطح زمین و مدت‌زمان کل حرکت آن به‌ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟ ($g=۱۰\frac{m}{s^۲}$ و مقاومت هوا ناچیز است.)



۱) $۲\ ،\ -۲۰\vec{j}$

۲) $۱\ ،\ -۲۰\vec{j}$

۳) $۲\ ،\ -۱۰\vec{j}$

۴) $۱\ ،\ -۱۰\vec{j}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

زمان برخورد گلوله به زمین برابر است با:

$$\Delta y=-\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow -۲۰=-\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times t^۲\Rightarrow t=۲s$$

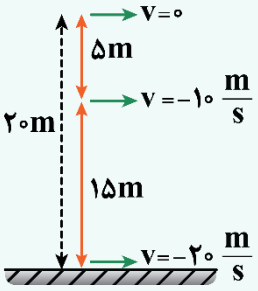
سرعت برخورد گلوله با زمین برابر است با:

$$v=-gt\Rightarrow v=-۱۰\times ۲=-۲۰\frac{m}{s}\Rightarrow \vec{v}=(-۲۰\frac{m}{s})\vec{j}$$

جرقهٔ ذهنی

به کمک تکنیک ده‌دهی داریم:

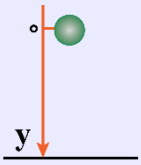
گلوله در مدت ۲s و با سرعت $-۲۰\frac{m}{s}$ به زمین برخورد می‌کند.



سقوط آزاد

به حرکت جسمی که فقط تحت تأثیر جاذبهٔ گرانشی در نزدیکی سطح زمین سقوط می‌کند درصورتی‌که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، سقوط آزاد گویند.

برای راحتی کار در حل سؤالات سقوط آزاد، نقطهٔ رهاشدن جسم را مبدأ مختصات درنظر می‌گیریم و جهت مثبت محور y را به سمت پایین انتخاب می‌کنیم:



در این صورت علامت شتاب، مکان و سرعت در هر لحظه مثبت خواهد شد.

معادله‌های سقوط آزاد درصورت رهاشدن جسم بدون سرعت اولیه

۱- معادلهٔ مکان ـ زمان:

$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0 \xrightarrow[v_0=0]{y_0=0} y=\frac{1}{2}gt^2$$

۲- معادلهٔ سرعت ـ زمان:

$$v=gt+v_0 \xrightarrow{v_0=0} v=gt$$

۳- معادلهٔ مستقل از زمان:

$$v^2-v_0^2=2g\Delta y \xrightarrow[y_0=0]{v_0=0} v^2=2gy$$

۴- معادلهٔ سرعت متوسط:

$$v_{av}=\frac{1}{2}gt$$

تکنیک دهدهی: اگر گلوله‌ای را در شرایط خلأ و بدون سرعت اولیه از ارتفاع معینی رها کنیم و $g=10\frac{m}{s^2}$ باشد، گلوله در ثانیهٔ اول ۵ متر، در ثانیهٔ دوم ۱۵ متر، در ثانیهٔ سوم ۲۵ متر و ... جابه‌جا می‌شود. همچنین تندی گلوله در لحظهٔ ۱s، $10\frac{m}{s}$، در لحظهٔ ۲s، $20\frac{m}{s}$، در لحظهٔ ۳s، $30\frac{m}{s}$ و ... است.

۱۴- از ارتفاع ۵۱/۲ متری سطح زمین، ۵ گلوله در فواصل زمانی یکسان رها می‌شوند. اگر در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ پنجم، گلولهٔ اول به زمین برسد، در این لحظه گلولهٔ چهارم از ارتفاع چندمتری عبور می‌کند؟ ($g=10\frac{m}{s^2}$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

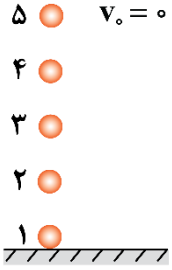
۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۴۸ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

مدت‌زمان رسیدن گلولهٔ اول به زمین برابر است با:

$$\Delta y_1=\frac{1}{2}gt_1^2+\cancel{v_0t_1}^{0} \Rightarrow 51/2=\frac{1}{2}\times10\times t_1^2 \Rightarrow t_1=3/2s$$

با توجه به این‌که در این لحظه گلولهٔ پنجم درحال رهاشدن است؛ بنابراین، فاصلهٔ زمانی رهاشدن گلوله‌ها ۰/۸s است؛ بنابراین:



$$\Delta y_4=\frac{1}{2}gt_4^2+\cancel{v_0t_4}^{0}=\frac{1}{2}\times10\times(0/8)^2=3/2m$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع گلولهٔ چهارم}=51/2-3/2=48m$$

آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴

۴۵- از نقطه‌ای به ارتفاع h هر دو ثانیه یک گلوله رها می‌شود. اگر در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ سوم، گلولهٔ اول به زمین برسد، در این لحظه گلولهٔ دوم از ارتفاع چندمتری عبور می‌کند؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

پاسخ تشریحی:

در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ سوم، گلولهٔ اول به زمین می‌رسد؛ بنابراین زمان سقوط گلولهٔ A برابر است با:

$$t_A = ۲ + ۲ = ۴s$$

ارتفاع h را به کمک رابطهٔ $h = \frac{۱}{۲}gt^۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$h_A = \frac{۱}{۲}gt_A^۲ \Rightarrow h_A = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۴^۲ = ۸۰m$$

در لحظهٔ رسیدن گلولهٔ اول به زمین، از سقوط گلولهٔ دوم، ۲s می‌گذرد. در این مدت مسافت سقوط آن برابر است با:

$$\Delta y_B = \frac{۱}{۲}gt_B^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۲^۲ = ۲۰m$$

درنتیجه در این لحظه گلولهٔ دوم از ارتفاع ۸۰m، به‌اندازهٔ ۲۰m پایین آمده و در ارتفاع $h_B = h - \Delta y_B = ۸۰ - ۲۰ = ۶۰m$ قرار دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

ماز

۱۵- در شرایط خلأ، گلولهٔ A از ارتفاع ۲۳۰ متری سطح زمین رها می‌شود. ۲ ثانیه بعد، گلولهٔ B نیز از همان ارتفاع رها می‌شود. هنگامی که فاصلهٔ دو گلوله به ۹۰m می‌رسد، تندی گلولهٔ A چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

۱) ۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۵۵ ۴) ۶۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

گام اول

محل رهاشدن گلوله‌ها را مبدأ مکان فرض کرده ($y_۰ = ۰$) و معادلهٔ مکان ـ زمان دو گلوله را می‌نویسیم:

$$y_A = -\frac{۱}{۲}gt^۲ = -۵t^۲$$

$$y_B = -\frac{۱}{۲}g(t-۲)^۲ = -۵(t-۲)^۲ = -۵t^۲ + ۲۰t - ۲۰$$

گام دوم

فاصلهٔ دو گلوله برابر است با:

$$\text{فاصله: } |y_B - y_A| = |(-۵t^۲ + ۲۰t - ۲۰) - (-۵t^۲)| = |۲۰t - ۲۰|$$

$$\xrightarrow{\text{فاصله}=۹۰m} |۲۰t - ۲۰| = ۹۰ \Rightarrow t = ۵/۵s$$

گام آخر

بنابراین تندی گلولهٔ A برابر است با:

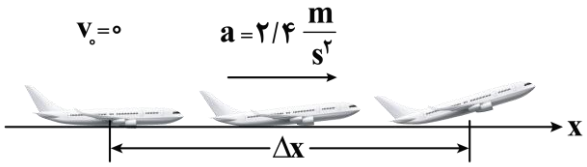
$$v_A = -gt \Rightarrow v_A = -۱۰ \times ۵/۵ = -۵۵\frac{m}{s} \Rightarrow |v_A| = ۵۵\frac{m}{s}$$

آزمون ماز

۲۹ آبان‌ماه

فیزیک

۱- شکل زیر، هواپیمایی را نشان می‌دهد که از حال سکون و با شتاب ثابت $۲/۴\frac{m}{s^۲}$ روی باند پرواز و در امتداد محور x شروع به حرکت می‌کند. هواپیما برای رسیدن به شرایط برخاستن، باید به سرعت $۹۶\frac{m}{s}$ برسد. در این مدت‌زمان، چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟



الف ـ مدت‌زمان لازم برای برخاستن هواپیما ۴۰s است.

ب ـ در این مدت‌زمان، هواپیما ۱۹۲۰m مسافت را طی می‌کند.

ج ـ در این مدت‌زمان، سرعت و شتاب هواپیما در یک جهت است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف

مدت‌زمان لازم برای این‌که سرعت هواپیما از صفر به $۹۶\frac{m}{s}$ برسد را به‌راحتی می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow ۹۶=۲/۴t+۰ \Rightarrow t=۴۰s \quad (✓)$$

ب

روش اول

ازآنجایی‌که هواپیما تغییر جهت نداده، مسافت طی‌شده در این مدت‌زمان با بزرگی جابه‌جایی آن یکسان و برابر است با:

$$\ell=\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t=\frac{۱}{۲}\times ۲/۴\times ۴۰^۲=۱۹۲۰m \quad (✓)$$

روش دوم

بدون درنظر گرفتن مدت‌زمان و به کمک معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی نیز می‌توان مسافت طی‌شده را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۹۶^۲-۰=۲\times ۲/۴\times \Delta x \Rightarrow \ell=\Delta x=۱۹۲۰m \quad (✓)$$

ج

چون حرکت هواپیما در این مدت‌زمان تندشونده است (تندی هواپیما درحال افزایش است.)؛ بنابراین سرعت و شتاب هواپیما در یک جهت است. (✓)

پس هر سه عبارت مطرح‌شده صحیح هستند.

ماز

۲- متحرکی با شتاب ثابت روی محور x درحال حرکت است و بردار جابه‌جایی آن در ثانیه‌های پنجم و هفتم به‌ترتیب $-۴/۲m(\vec{i})$ و $-۳/۴m(\vec{i})$ است. معادلهٔ سرعت ـ زمان این متحرک در SI کدام است؟

۱) $v=۰/۴t-۴$ ۲) $v=۰/۴t-۶$ ۳) $v=۰/۶t-۴$ ۴) $v=۰/۶t-۶$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

گام اول

با توجه به این‌که در حرکت شتاب ثابت، جابه‌جایی در T ثانیهٔ nاُم به‌صورت $\Delta x = \frac{(۲n-۱)}{۲}aT^۲ + v_۰T$ است، خواهیم داشت:

یک ثانیهٔ پنجم: $\begin{cases} T=۱ \\ n=۵ \end{cases} \Rightarrow -۴/۲ = \frac{۹}{۲}a(۱)^۲ + v_۰(۱) \Rightarrow ۴/۵a + v_۰ = -۴/۲$

یک ثانیهٔ هفتم: $\begin{cases} T=۱ \\ n=۷ \end{cases} \Rightarrow -۳/۴ = \frac{۱۳}{۲}a(۱)^۲ + v_۰(۱) \Rightarrow ۶/۵a + v_۰ = -۳/۴$

گام دوم

با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول بالا خواهیم داشت:

$$\Rightarrow a = ۰/۴\frac{m}{s^۲}\ ,\ v_۰ = -۶\frac{m}{s}$$

گام آخر

درنتیجه معادلهٔ سرعت ـ زمان به‌صورت زیر است:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۰/۴t - ۶$$

راهنمای زرنگ‌بازی

بچه‌ها توی حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی‌های متوالی توی بازه‌های زمانی یکسان، یه دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $aT^۲$ تشکیل می‌دن.

پس اختلاف جابه‌جایی توی ثانیهٔ هفتم و پنجم می‌شه ۲a. درنتیجه $a = \frac{۰/۸}{۲} = ۰/۴\frac{m}{s^۲}$ می‌شه.

محاسبهٔ جابه‌جایی در T ثانیهٔ nاُم

جابه‌جایی‌های انجام‌شده توسط متحرک در T ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت $aT^۲$ می‌دهند.

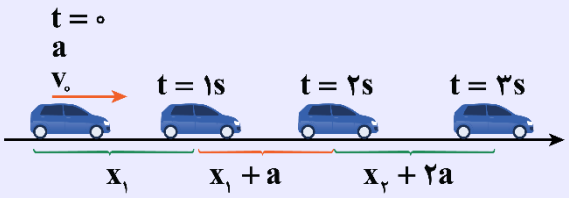
جابه‌جایی در T ثانیهٔ nاُم: $\Delta x_{n,T} = \frac{۱}{۲}a(۲n-۱)T^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ اول: $\Delta x_{T,۱} = ۰/۵aT^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ دوم: $\Delta x_{T,۲} = ۱/۵aT^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ سوم: $\Delta x_{T,۳} = ۲/۵aT^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ چهارم: $\Delta x_{T,۴} = ۳/۵aT^۲ + v_۰T$

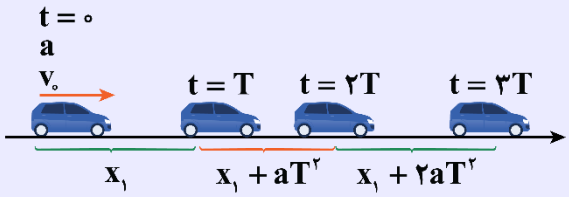


حالت خاص: جابه‌جایی در ثانیهٔ nاُم:

$$\Delta x_n = \frac{۱}{۲}a(۲n-۱) + v_۰$$

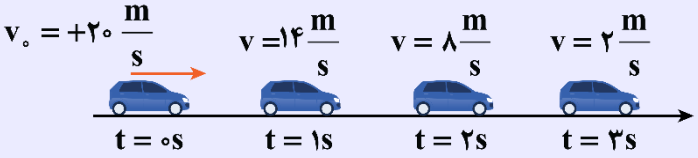
جابه‌جایی‌های انجام‌شده در ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت a می‌دهند.

۱- در هر ثانیه جابه‌جایی یک a تغییر می‌کند.

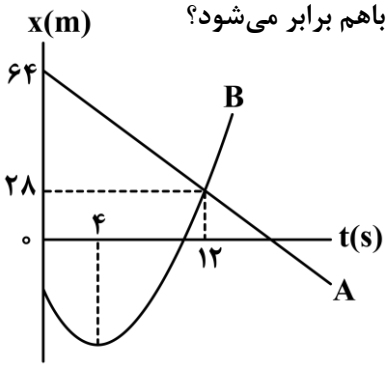


۲- در هر ثانیه سرعت یک a تغییر می‌کند.

$a = -۶\frac{m}{s^۲}$



۳- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B مطابق شکل به‌صورت خط راست و سهمی است. در لحظه‌ای که دو متحرک به‌هم می‌رسند، تندی متحرک B، $\frac{۱۶}{۳}$ برابر تندی متحرک A است. سرعت این دو متحرک در چه لحظه‌ای باهم برابر می‌شود؟



۱) ۱/۵
۲) ۳
۳) ۲/۵
۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ نموداری ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

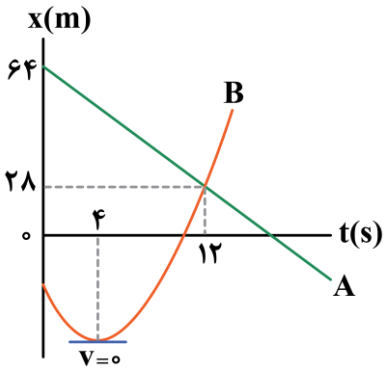
کام اول

متحرک A با سرعت ثابت حرکت می‌کند؛ بنابراین با محاسبهٔ شیب خط A، به‌راحتی سرعت آن را به‌دست می‌آوریم:

$$v_A = \overbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}^{\text{شیب خط A}} = \frac{۲۸ - ۶۴}{۱۲ - ۰} = -۳\frac{m}{s}$$

کام دوم

دو متحرک در لحظهٔ $t = ۱۲s$ به‌هم می‌رسند. در این لحظه تندی متحرک B، $\frac{۱۶}{۳}$ برابر تندی متحرک A است؛ بنابراین داریم:



در لحظهٔ $t = ۱۲s$: $|v_B| = \frac{۱۶}{۳} \times |-۳| = ۱۶\frac{m}{s} \xrightarrow[\text{لحظه مثبت است.}]{\text{شیب نمودار B در این}} v_B = ۱۶\frac{m}{s}$

کام سوم

در لحظهٔ $t = ۴s$ (رأس سهمی)، سرعت متحرک B برابر صفر است؛ بنابراین شتاب حرکت متحرک B برابر است با:

$$a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱۶ - ۰}{۱۲ - ۴} = ۲\frac{m}{s^۲}$$

کام چهارم

به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان حرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیهٔ متحرک B را محاسبه می‌کنیم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[v_B = ۱۶\frac{m}{s}]{t=۱۲s,\ a_B = ۲\frac{m}{s^۲}} ۱۶ = ۲ \times ۱۲ + v_{۰B} \Rightarrow v_{۰B} = -۸\frac{m}{s}$$

کلام آخر

حال برای این‌که سرعت دو متحرک یکسان شود، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} v_A = -۳\dfrac{m}{s} \\ v_B = a_B t + v_{۰B} = ۲t - ۸ \end{cases} \xrightarrow{v_A = v_B} ۲t - ۸ = -۳ \Rightarrow ۲t = ۵ \Rightarrow t = ۲/۵s$$

۴- یک گلوله را باید از چه ارتفاعی برحسب متر در شرایط خلأ رها کنیم تا پس از گذشت مدت‌زمان ۲/۴s به سطح زمین برسد؟

$$(g = ۱۰\dfrac{m}{s^۲})$$

۱) ۲۸/۸ ۲) ۵۷/۶ ۳) ۱۴/۴ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

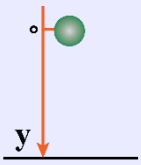
اگر جهت مثبت را رو به پایین فرض کنیم، معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان در حرکت سقوط آزاد برابر است با:

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow h = \Delta y = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۲/۴^۲ = ۲۸/۸m$$

سقوط آزاد

به حرکت جسمی که فقط تحت تأثیر جاذبهٔ گرانشی در نزدیکی سطح زمین سقوط می‌کند، درصورتی‌که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، سقوط آزاد می‌گویند.

برای راحتی کار در حل سؤالات سقوط آزاد، نقطهٔ رهاشدن جسم را مبدأ مختصات درنظر می‌گیریم و جهت مثبت محور y را به سمت پایین فرض می‌کنیم:



در این صورت علامت شتاب، مکان و سرعت در هرلحظه مثبت خواهد شد.

معادله‌های سقوط آزاد درصورت رهاشدن جسم بدون سرعت اولیه

۱- معادلهٔ مکان ـ زمان:

$$y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰ \xrightarrow[v_۰ = ۰]{y_۰ = ۰} y = \frac{۱}{۲}gt^۲$$

۲- معادلهٔ سرعت ـ زمان:

$$v = gt + v_۰ \xrightarrow{v_۰ = ۰} v = gt$$

۳- معادلهٔ مستقل از زمان:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲g\Delta y \xrightarrow[y_۰ = ۰]{v_۰ = ۰} v^۲ = ۲gy$$

۴- معادلهٔ سرعت متوسط:

$$v_{av} = \frac{۱}{۲}gt$$

۵- در شکل زیر، یک کشتی درحال حرکت را می‌بینید که نیروهای وارد بر آن متوازن هستند. چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد این شکل نادرست است؟



الف ـ اندازهٔ نیروی پیشران، بزرگ‌تر از اندازهٔ نیروی مقاومت است.

ب ـ اندازهٔ نیروی شناوری برابر با اندازهٔ نیروی وزن است.

ج ـ عکس‌العمل نیروی پیشران به کشتی وارد می‌شود.

د ـ عکس‌العمل نیروی شناوری به مرکز زمین وارد می‌شود.

۱) ۴ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۲۰۲)

بررسی موارد:



نیروهای وارد بر کشتی متوازن هستند، پس برایند نیروها هم در راستای قائم و هم در راستای افقی برابر صفر است:

الف

(✗) اندازهٔ نیروی مقاومت = اندازهٔ نیروی پیشران $\Rightarrow F_{net,x}=0$

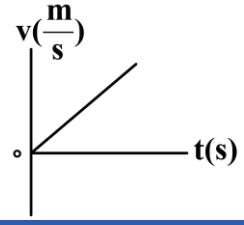
ب

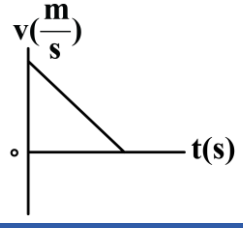
(✓) اندازهٔ نیروی وزن = اندازهٔ نیروی شناوری $\Rightarrow F_{net,y}=0$

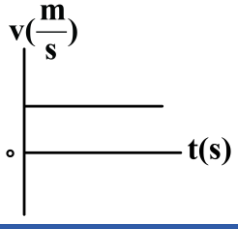
ج پرّه‌های موتور کشتی برای حرکت رو به جلو، نیرویی به سمت عقب به آب وارد می‌کنند و واکنش این نیرو که درواقع همان نیروی پیشران است از طرف آب و در جهت جلو به کشتی وارد می‌شود. پس اگر نیروی پیشران را که به کشتی وارد می‌شود، کنش درنظر بگیریم، واکنش آن به عامل به‌وجودآورندهٔ آن یعنی به آب وارد می‌شود. (✗)

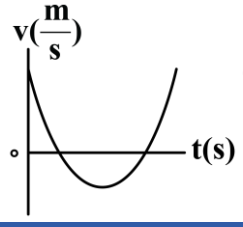
د نیروی شناوری از طرف آب به کشتی وارد می‌شود و واکنش آن از طرف کشتی به آب وارد می‌شود. (✗)

۶- اگر نیروهای وارد بر یک جسم درحال حرکت، متوازن باشند، کدام گزینه می‌تواند نمایانگر نمودار سرعت ـ زمان این جسم باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ نموداری ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۲۰۲)

طبق قانون اول نیوتون، اگر برایند نیروهای وارد به جسمی صفر باشد، جسم حالت قبلی خود را حفظ می‌کند، یعنی یا حالت سکون $(v=0)$ خود را حفظ می‌کند و یا با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد این یعنی نمودار سرعت ـ زمان این جسم باید خطی راست و افقی باشد و گزینهٔ (۳) صحیح است.

قانون اول نیوتون

اگر نیروهای وارد بر جسم متوازن باشند، جسم حالت اولیهٔ خود را حفظ می‌کند؛ بنابراین اگر ساکن بود، ساکن باقی می‌ماند و اگر درحال حرکت بود با همان سرعت به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ بنابراین اگر نیروهای وارد بر یک جسم متوازن باشند، نمودار سرعت ـ زمان به‌صورت خطی افقی و نمودار مکان ـ زمان به‌صورت خطی با شیب ثابت است.

$F_{net}=0 \Rightarrow a=0$

۷- بر جسم ساکنی که روی سطح زمین قرار دارد، فقط دو نیروی افقی و هم‌راستای F_1 و F_2 ($F_2 < F_1$) وارد می‌شود. بیش‌ترین و کم‌ترین شتابی که جسم می‌تواند براثر اعمال هم‌زمان این دو نیرو بگیرد $۱۲\frac{m}{s^2}$ و $۷/۲\frac{m}{s^2}$ است. جرم جسم را چگونه تغییر دهیم تا اگر فقط نیروی F_2 بر جسم اثر کند، شتابی به‌اندازهٔ $۴\frac{m}{s^2}$ به آن بدهد؟

۱) ۴۰ درصد افزایش یابد. ۲) ۲۵ درصد کاهش یابد. ۳) ۴۰ درصد کاهش یابد. ۴) ۲۵ درصد افزایش یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

این دو نیرو هنگامی بیش‌ترین شتاب را به جسم می‌دهند که هم‌جهت باشند و هنگامی کم‌ترین شتاب را به جسم می‌دهند که خلاف جهت هم باشند. به کمک قانون دوم نیوتون و تشکیل دستگاه زیر، نیروی F_2 را برحسب جرم به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F_{max} = ma_{max} \Rightarrow F_1 + F_2 = ۱۲m \\ F_{min} = ma_{min} \Rightarrow F_1 - F_2 = ۷/۲m \end{cases} \Rightarrow F_2 = ۲/۴m$$

گام دوم

اگر نیروی F_2 به‌تنهایی به جسم وارد شود و جرم جسم m' باشد، شتاب جسم $۴\frac{m}{s^2}$ خواهد شد:

$$F_2 = m'a \Rightarrow ۲/۴m = ۴m' \Rightarrow \frac{m'}{m} = \frac{۲/۴}{۴} = ۰/۶ \Rightarrow m' = ۰/۶m$$

گام آخر

حالا با توجه به نسبت $\frac{m'}{m}$، درصد تغییرات m را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد تغییرات } m = \frac{m' - m}{m} \times ۱۰۰ = \frac{(۰/۶ - ۱)m}{m} \times ۱۰۰ = -۴۰٪$$

درنتیجه باید جرم جسم را ۴۰ درصد کاهش دهیم.

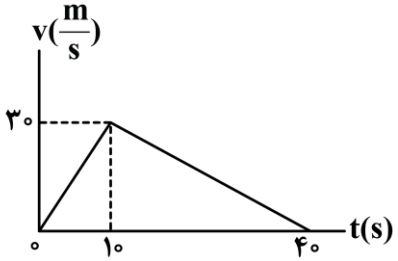
قانون دوم نیوتون

اگر برایند نیروهای وارد بر جسم صفر نباشد، جسم شتاب می‌گیرد که شتاب آن از رابطهٔ $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m}$ به‌دست می‌آید.

مثال

۸- شکل زیر یک قایق موتوری را نشان می‌دهد که جرم آن با سرنشینش ۵۰۰kg است و نمودار سرعت ـ زمان آن مطابق شکل است. با فرض ثابت‌بودن نیروی مقاومت واردشده بر قایق در بازهٔ زمانی صفر تا ۴۰s، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟ (در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۴۰s، موتور قایق خاموش شده است.)





الف ـ در مدتی که قایق درحال حرکت است، بزرگی نیروی مقاومت واردشده بر آن برابر با ۵۰۰N است.

ب ـ بزرگی نیروی پیشران در لحظهٔ $t = ۶s$ برابر با ۲۰۰۰N است.

۱) فقط «الف» ۲) فقط «ب» ۳) «الف» و «ب» ۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ نموداری ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۲۰۲)

بررسی موارد:

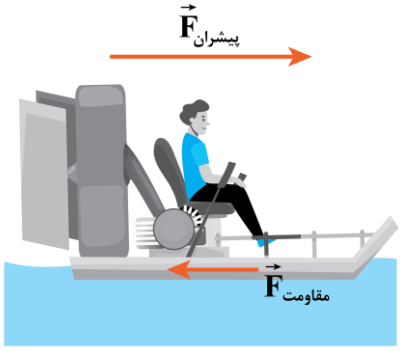
الف) در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۴۰s، تنها نیروی واردشده بر قایق در راستای حرکت آن، نیروی مقاومت است. ابتدا شتاب حرکت را به کمک شیب نمودار محاسبه کرده و سپس بزرگی نیروی مقاومت را با استفاده از قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:



$$a_۲ = \frac{v_{۴۰s} - v_{۱۰s}}{۴۰ - ۱۰} = \frac{-۳۰}{۳۰} = -۱\frac{m}{s^۲}$$

$$F_{net_۲} = ma_۲ \Rightarrow -F_{\text{مقاومت}} = ma_۲ \Rightarrow |F_{\text{مقاومت}}| = ma_۲ = ۵۰۰ \times ۱ = ۵۰۰N \quad (✓)$$

ب) با توجه به این‌که بزرگی نیروی مقاومت ثابت فرض شده است و در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰s، شتاب حرکت قایق (شیب نمودار) ثابت است، پس در این بازه، نیروی پیشران نیز ثابت است و داریم:



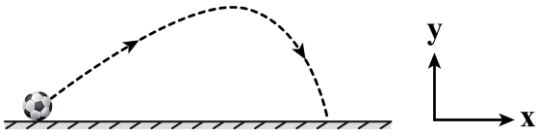
$$a_۱ = \frac{v_{۱۰s} - v_۰}{۱۰ - ۰} = \frac{۳۰}{۱۰} = ۳\frac{m}{s^۲}$$

$$F_{net_۱} = ma_۱ \Rightarrow F_{\text{پیشران}} - F_{\text{مقاومت}} = ma_۱$$

$$\Rightarrow F_{\text{پیشران}} - ۵۰۰ = ۵۰۰ \times ۳ \Rightarrow F_{\text{پیشران}} = ۲۰۰۰N \quad (✓)$$

تمرین

۹- مطابق شکل زیر، توپی به جرم ۴۰۰g شوت می‌شود. اگر در بالاترین نقطه، نیروی خالصی به بزرگی ۵N به توپ وارد شود، بردار نیروی مقاومت هوا در این نقطه برحسب نیوتون، کدام است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$



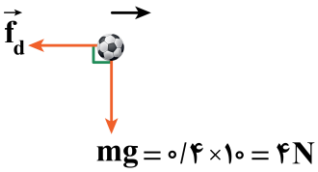
۱) $-۳\vec{i}$ ۲) $۳\vec{i}$

۳) $۵\vec{i}$ ۴) $-۵\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

نیروهای وارد بر توپ در بالاترین نقطه را رسم می‌کنیم:



گام آخر

نیروی مقاومت هوای وارد بر توپ را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که $\vec{f}_d$ و $m\vec{g}$ عمود بر یکدیگرند و بزرگی برایند آن‌ها ۵N است، داریم:

$$F_{net} = \sqrt{f_d^۲ + (mg)^۲} \Rightarrow ۵ = \sqrt{f_d^۲ + ۴^۲} \Rightarrow f_d^۲ = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Rightarrow f_d = ۳N$$

از طرفی با توجه به این‌که در بالاترین نقطه، جهت حرکت (سرعت) به سمت راست است، $\vec{f}_d$ به سمت چپ است:

$$\vec{f}_d = -۳(N)\vec{i}$$

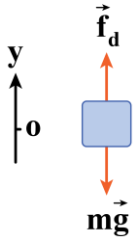
تمرین

۱۰- چتربازی به جرم ۷۰kg مدتی پس از پرش آزاد، چترش را باز می‌کند. ناگهان نیروی مقاومت هوا به ۱۱۹۰N افزایش می‌یابد. شتاب چترباز در این لحظه چند متر بر مربع ثانیه و به چه سمتی است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

۱) ۷ و به سمت بالا ۲) ۷ و به سمت پایین ۳) ۳ و به سمت بالا ۴) ۳ و به سمت پایین

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۲۰۲)

با توجه به نیروهای وارد به چترباز داریم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow f_d - mg = ma$$

$$\Rightarrow ۱۱۹۰ - ۷۰۰ = ۷۰a \Rightarrow a = ۷\frac{m}{s^۲}$$

چون $mg < f_d$ است، برایند نیروها و شتاب به سمت بالا است.

حرکت چترباز



حرکت چترباز را در سه حالت مختلف بررسی می‌کنیم.

در همهٔ حالت‌ها فرض می‌کنیم چترباز روی مسیر مستقیم حرکت می‌کند و اثر باد و عوامل دیگر را درنظر نمی‌گیریم.

در تمامی حالت‌ها بر چترباز دو نیرو وارد می‌شود:

۱- نیروی وزن:

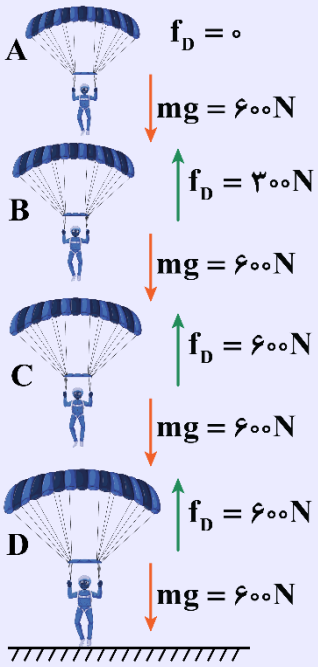
نیروی وزن همواره در راستای قائم به سمت پایین می‌باشد. مقدار نیروی وزن در کل مسیر حرکت را ثابت درنظر می‌گیریم.

۲- نیروی مقاومت هوا:

چون چترباز به سمت پایین حرکت می‌کند، نیروی مقاومت هوا خلاف جهت حرکت چترباز (همواره به سمت بالا) می‌باشد.

با افزایش تندی مقدار مقاومت هوا زیاد می‌شود.

زمانی که چترباز چترش را باز می‌کند به‌دلیل افزایش مساحت، نیروی مقاومت هوا نسبت به قبل به‌شدت افزایش می‌یابد و برای مدتی بزرگ‌تر از نیروی وزن می‌شود.



چترباز دو بار می‌تواند به تندی حدی برسد:

۱- قبل از بازشدن چتر و به کمک سطح بدنش $(v_۱)$

۲- بعد از بازشدن چتر و به کمک سطح چتر $(v_۲)$

$$v_۲ < v_۱ \Leftarrow$$

در حرکت چترباز نیروی مقاومت هوا به دو صورت می‌تواند تغییر کند:

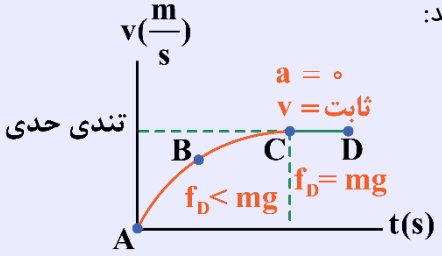
۱- اگر افزایش نیروی مقاومت هوا تدریجی باشد: افزایش مقاومت هوا به‌دلیل افزایش تندی است.

۲- اگر افزایش نیروی مقاومت هوا سریع انجام شود: افزایش مقاومت هوا به‌دلیل بازشدن چتر است.

در کل مسیر حرکت، چترباز هرگز به سمت بالا حرکت نمی‌کند.

با توجه به زمان باز کردن چتر توسط چترباز دو حالت داریم:

الف) چترباز بلافاصله پس از پرش، چتر خود را باز می‌کند:



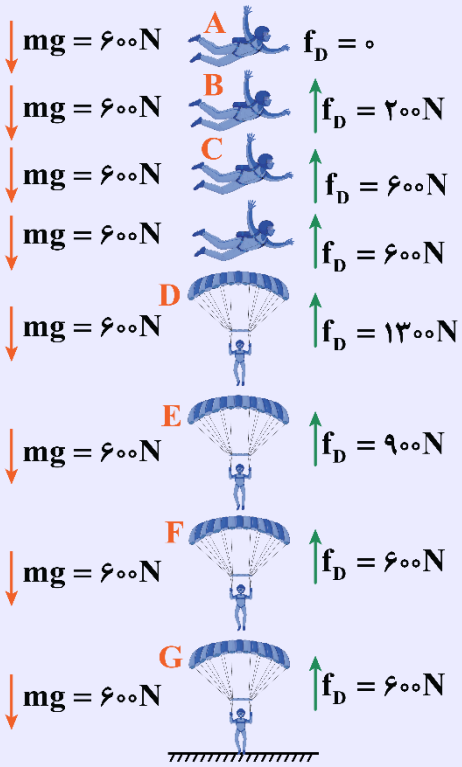
در این حالت، نیروی مقاومت هوا در ابتدا ناچیز است. با افزایش تندی چترباز این نیرو افزایش پیدا می‌کند تا این‌که اندازهٔ این نیرو با اندازهٔ نیروی وزن برابر شود. در این حالت شتاب چترباز صفر شده و چترباز با تندی حدی به حرکت خود ادامه می‌دهد تا به زمین برسد.

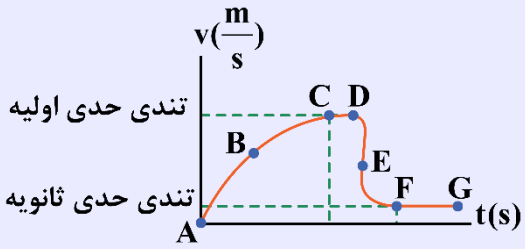
مسیر AC: حرکت تندشونده $\Leftarrow f_D < mg$ و f_D درحال افزایش، F_{net} و a به سمت پایین و هر دو درحال کاهش

مسیر CD: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی) $\Leftarrow f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

ب) چترباز مدتی پس از پرش، چترش را باز می‌کند:

در این حالت پس از پرش، تندی چترباز زیاد و زیادتر می‌شود و نیروی مقاومت هوا در تندی خیلی زیاد با وزن هم‌اندازه می‌شود (تندی حدی اولیه). پس از بازکردن چتر، ناگهان نیروی مقاومت هوا به‌علت افزایش مساحت در آن تندی زیاد، به‌شدت افزایش می‌یابد و حرکت چترباز کند خواهد شد و نیروی مقاومت هوا آن‌قدر کاهش پیدا می‌کند تا با نیروی وزن هم‌اندازه شود. در این حالت، به تندی حدی ثانویه می‌رسد.





مسیر AC: حرکت تندشونده $\Leftarrow f_D < mg$ و f_D درحال افزایش، F_{net} و a به سمت پایین و هر دو درحال کاهش

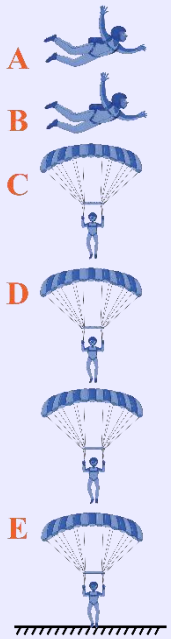
مسیر CD: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی اولیه) $\Leftarrow f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

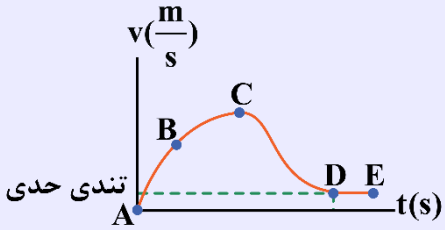
موقعیت D: چترباز چتر خود را باز می‌کند.

مسیر DF: حرکت کندشونده $\Leftarrow f_D > mg$ و f_D درحال کاهش، F_{net} و a به سمت بالا و هر دو درحال کاهش

مسیر FG: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی ثانویه) $\Leftarrow f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

پ) اگر چترباز قبل از رسیدن به تندی حدی اولیه چترش را باز کند:





مسیر AC: حرکت تندشونده $\Leftarrow f_D < mg$ و f_D درحال افزایش، F_{net} و a به سمت پایین و هر دو درحال کاهش

موقعیت C: چترباز چتر خود را باز می‌کند.

مسیر CD: حرکت کندشونده $\Leftarrow f_D > mg$ و f_D درحال کاهش، F_{net} و a به سمت بالا و هر دو درحال کاهش

مسیر DE: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی) $\Leftarrow f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

۱۱- شخصی به جرم $۸۰kg$ بر روی یک ترازوی فنری درون آسانسور ایستاده است. اگر آسانسور ساکن باشد، ترازو عدد $F_۱$ و اگر آسانسور با شتاب $۱/۲\frac{m}{s^۲}$ به سمت بالا شروع به حرکت کند، ترازو عدد $F_۲$ را نشان می‌دهد. اختلاف عدد ترازو در این دو حالت چند نیوتون است؟ $(g=۹/۸\frac{m}{s^۲})$

۱) ۹۶ ۲) ۱۹۲ ۳) ۷۸۴ ۴) ۸۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

اگر آسانسور ساکن باشد، عدد ترازو برابر است با:

$$F_{N_۱}=mg$$

گام دوم

اگر ترازو با شتاب a به‌صورت تندشونده به سمت بالا حرکت کند، عدد ترازو برابر است با:

$$F_{N_۲}=m(g+a)$$

گام آخر

بنابراین اختلاف عدد ترازو در این دو حالت برابر است با:

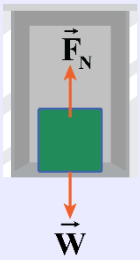
$$F_{N_۲}-F_{N_۱}=m(g+a)-mg=ma\Rightarrow F_{N_۲}-F_{N_۱}=۸۰\times ۱/۲=۹۶N$$

راهنمای مسیرت

توی این سؤال دونستن عدد شتاب گرانشی بهت هیچ کمکی نمی‌کنه، چون درنهایت اختلاف دو عدد ترازو برابر ma شد. احتمالاً اگه عدد ترازو رو توی دو تا حالت به‌دست آورده باشی، ازت یه‌ذره بیش‌تر زمان گرفته به نسبت پاسخ ما.

آسانسور

۱- در شکل زیر، نیروهای وارد بر جسمی که بر کف آسانسور قرار گرفته را نشان می‌دهد که به F_N نیروی عمودی تکیه‌گاه یا وزن ظاهری می‌گویند.



۲- هنگامی‌که شتاب حرکت آسانسور به سمت بالا باشد، داریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-W=ma\Rightarrow F_N=mg+ma=m(g+a)$$

۳- هنگامی‌که شتاب حرکت آسانسور به سمت پایین باشد، داریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow W-F_N=ma\Rightarrow F_N=mg-ma=m(g-a)$$

پس به‌طور کلی می‌توان گفت که:

$$F_N=W\pm ma\Rightarrow F_N=m(g\pm|a|)$$

(+): شتاب به سمت بالا (−): شتاب به سمت پایین

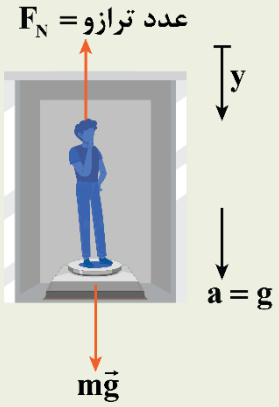
آزمون سراسری تجربی تیرماه خارج از کشور ۱۴۰۳

۵۴- شخصی درون آسانسوری ساکن، روی یک ترازوی فنری ایستاده است و در این حالت ترازو عدد $۶۰۰\,N$ را نشان می‌دهد. اگر آسانسور با شتاب رو به بالای $۲\frac{m}{s^۲}$ درحال حرکت باشد و کابل آسانسور پاره شود و آسانسور سقوط آزاد کند، عددی که ترازو نشان می‌دهد، چند نیوتون است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) صفر ۲) ۳۸۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۷۲۰

پاسخ تشریحی:

شکل شخص را هنگام سقوط آزاد رسم می‌کنیم. جهت محور y را به سمت پایین درنظر می‌گیریم.



قانون دوم نیوتون: $F_{net}=ma$

$$\Rightarrow mg-F_N=mg\Rightarrow F_N=۰$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

ماز

۱۲- در شکل نشان‌داده‌شده، شخص با نیروی $۲۰۰N$ جسم ۹۰ کیلوگرمی را هُل می‌دهد، اما جسم ساکن می‌ماند. ولی وقتی با نیروی $۳۰۰N$ جسم را هُل می‌دهد، جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد. به‌ترتیب از راست به چپ، نیروی اصطکاک واردشده بر جسم در حالت‌های اول و دوم چند نیوتون بوده و ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح، چقدر می‌تواند باشد؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) ۲۰۰، ۳۰۰، ۰/۴

۲) بزرگ‌تر از ۲۰۰، ۳۰۰، ۰/۲

۳) ۲۰۰، ۳۰۰، ۰/۲۵

۴) ۳۰۰، ۳۰۰، ۰/۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

حالت اول

جسم را با نیروی افقی ۲۰۰ نیوتونی هُل می‌دهیم و جسم ساکن می‌ماند؛ بنابراین نیروی اصطکاک از نوع ایستایی بوده و برابر $۲۰۰N$ است.

$$F_{net_x}=m\cancelto{۰}{a}\Rightarrow F-f_s=۰\Rightarrow f_s=F=۲۰۰N$$

حالت دوم

جسم را با نیروی ۳۰۰ نیوتونی هُل می‌دهیم و جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد؛ بنابراین جسم همچنان ساکن بوده و نیروی اصطکاک برابر $۳۰۰N$ است.

آستانهٔ حرکت: $F_{net_x}=۰\Rightarrow f_{s,max}=F=۳۰۰N$

بنابراین ضریب اصطکاک ایستایی برابر است با:

$$f_{s,max}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=mg=۹۰۰N} ۳۰۰=\mu_s\times ۹۰۰\Rightarrow \mu_s=\frac{۱}{۳}\simeq ۰/۳۳$$

از طرفی می‌دانیم ضریب اصطکاک جنبشی کوچک‌تر یا مساوی ضریب اصطکاک ایستایی است $(\mu_k\le\mu_s)$؛ بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

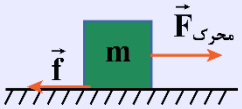
$$\mu_s=۰/۳۳\Rightarrow \mu_k\le ۰/۳۳$$

راهنمای زرنگ‌بازی

بعد از محاسبهٔ نیروی اصطکاک هر دو حالت، بین گزینهٔ «۱» و «۳» می‌مونید. کافیه بدونید $\mu_k \le \mu_s$ تا عدد کم‌تره یعنی ۰/۲۵ رو قبول کنید بدون نیاز به محاسبهٔ μ_s!

حرکت روی سطح دارای اصطکاک

اگر مانند شکل مقابل، نیروی خالص محرکی به جسم ساکن اِعمال شود:



۱- ابتدا مقدار $F_{محرک}$ را به‌دست می‌آوریم که مساوی با برایند نیروهای در راستای حرکت به‌جز خود اصطکاک می‌شود.

۲- سپس نیروی $f_{s,max}$ را از رابطهٔ $f_{s,max} = \mu_s F_N$ به‌دست می‌آوریم.

۳- مقادیر دو مرحلهٔ قبل را باهم مقایسه می‌کنیم و سه حالت پیش می‌آید:

الف) اگر $F_{محرک} < f_{s,max}$ ⇐ جسم ساکن می‌ماند؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_s = F_{محرک}$

ب) اگر $F_{محرک} = f_{s,max}$ ⇐ جسم در آستانهٔ حرکت خواهد بود؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_{s,max} = \mu_s F_N = F_{محرک}$

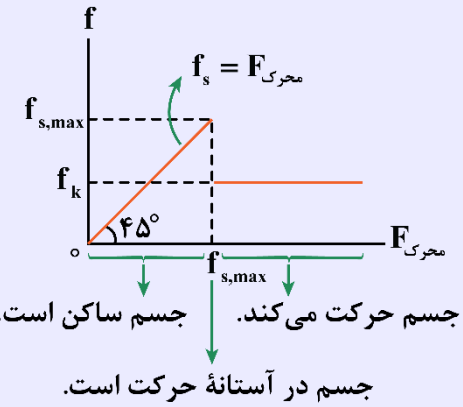
پ) اگر $F_{محرک} > f_{s,max}$ ⇐ جسم حرکت خواهد کرد؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_k = \mu_k F_N$

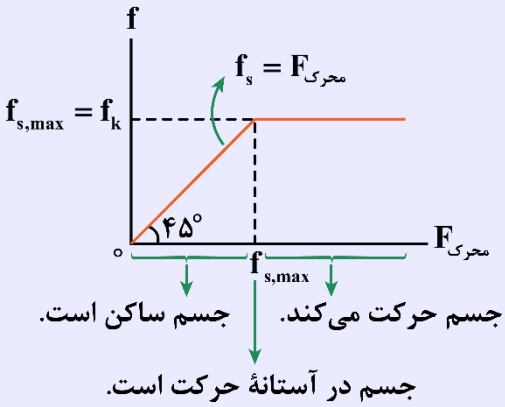
در روابط بالا μ_s و μ_k را به‌ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامیم که به ویژگی‌های سطح در تماس جسم با زمین بستگی دارند و فاقد یکا هستند. در ضمن همواره:

$$\mu_s \ge \mu_k \quad و \quad f_{s,max} \ge f_k$$

اگر $\mu_s > \mu_k$ باشد:

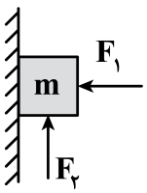


اگر $\mu_s = \mu_k$ باشد:



مثال

۱۳- به جسمی به جرم m، مطابق شکل، دو نیروی F_1 و F_2 وارد می‌کنیم. در این حالت جسم با سرعت ثابت به سمت پایین درحال حرکت است. اگر نیروی F_1 دو برابر شود، پس از این لحظه کدام گزینه صحیح است؟ ($\mu_s > \mu_k$)



۱) جسم با سرعت ثابت به حرکتش ادامه می‌دهد.

۲) جسم با شتابِ رو به بالا، به حرکتش ادامه می‌دهد و بعد از آن متوقف می‌شود.

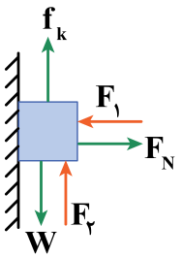
۳) جسم بعد از مدتی متوقف شده، سپس به سمت بالا شروع به حرکت می‌کند.

۴) جسم با شتابِ رو به پایین، به حرکتش ادامه می‌دهد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

کام اول

ابتدا نیروهای وارد به جسم را در حالت اول رسم می‌کنیم:



در این حالت چون سرعت جسم ثابت $(a=0)$ است، طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_1 = F_N \ , \ mg = F_2 + \mu_k F_1$$

همچنین در صورت سؤال ذکر شده که $\mu_s > \mu_k$ است، یعنی:

$$mg < F_2 + \mu_s F_1 \Rightarrow mg - F_2 < \mu_s F_1$$

کام آخر

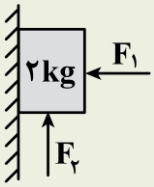
در حالت دوم نیروی F_1 دو برابر می‌شود، یعنی:

$$F_N = 2F_1 \Rightarrow mg < F_2 + \mu_k (2F_1)$$

پس جسم شتاب رو به بالا (هم‌جهت با F_2 و f_k) می‌گیرد که باعث می‌شود سرعت رو به پایین آن کم‌تر و درنهایت صفر شود. همچنین چون $mg - F_2 < \mu_s F_1$ بود، اکنون که F_1 دو برابر شده، حتماً $mg - F_2 < 2\mu_s F_1$ خواهد بود که این به معنی حرکت نکردن جسم به سمت بالا یا پایین پس از رسیدن به حالت سکون است.

آزمون سراسری تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵۸- مطابق شکل با وارد شدن نیروی افقی $F_1 = 40\,N$، جسم روی دیوار قائم به حالت سکون قرار دارد. اگر نیروی قائم $F_2 = 40\,N$ به جسم وارد شود، کدام مورد درست است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$



۱) جسم ساکن می‌ماند.

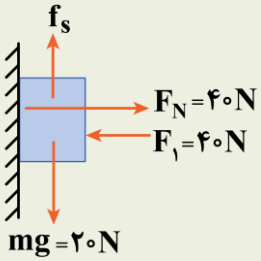
۲) جسم رو به بالا شروع به حرکت می‌کند.

۳) نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، افزایش می‌یابد.

۴) نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، کاهش می‌یابد.

پاسخ تشریحی:

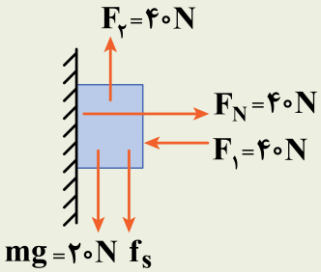
در حالت اول داریم:



$$\text{تعادل قائم}: f_s = mg \Rightarrow f_s = 20N$$

$$f_{s,max} \geq 20N \Rightarrow \text{جسم ساکن است.}$$

در حالت دوم داریم:



$$F_{\text{محرک}} = 20N \leq f_{s,max}$$

(جسم ساکن)

$$\text{تعادل قائم}: f_s + mg = F_2 \Rightarrow f_s = 20N$$

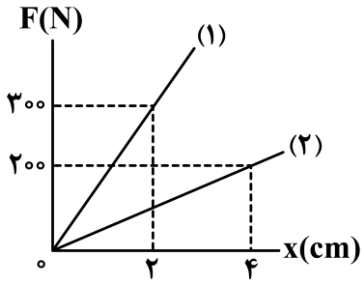
اندازهٔ نیروی محرک (اختلاف دو نیروی $\vec{F}_2$ و نیروی وزن) از نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه کم‌تر است؛ بنابراین جسم ساکن می‌ماند و حرکت نمی‌کند.

در مقایسهٔ اندازهٔ نیروهای $\vec{F}_N$ و $\vec{f}_s$ در هر دو حالت درمی‌یابیم که بزرگی این نیروها در هر دو حالت یکسان است؛ بنابراین نیروی دیوار بر جسم (R) نیز ثابت می‌ماند.

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2}$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

۱۴- نمودار زیر، تغییرات نیروی کشسانی دو فنر (۱) و (۲) را برحسب تغییرات طول آن‌ها نشان می‌دهد. اگر این دو فنر را از سقف آویزان کرده و به هرکدام یک وزنهٔ مشابه ببندیم، تغییرات طول فنر (۱) چند برابر فنر (۲) خواهد بود؟



۱) ۳

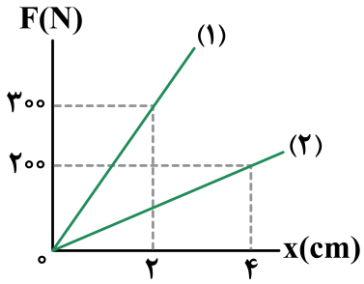
۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ نموداری ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

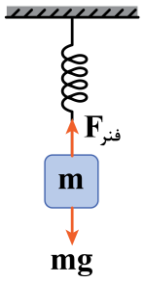
کام اول



ابتدا ثابت فنر برای هریک از آن‌ها را به کمک شیب نمودار به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} k_۱ = (۱)\text{ شیب نمودار} = \frac{۳۰۰}{۲} = ۱۵۰\frac{N}{cm} \\ k_۲ = (۲)\text{ شیب نمودار} = \frac{۲۰۰}{۴} = ۵۰\frac{N}{cm} \end{cases}$$

کام دوم



حال اگر یک وزنهٔ مشابه از هرکدام از آن‌ها آویزان کنیم، در حالت تعادل می‌توان نوشت:

$$F_{net} = ۰ \Rightarrow F_{\text{فنر}} = mg \Rightarrow k\Delta L = mg$$

کام آخر

سپس برای مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{k_۲}{k_۱} \times \frac{\Delta L_۲}{\Delta L_۱} = \frac{mg}{mg} = ۱ \Rightarrow \frac{۵۰}{۱۵۰} \times \frac{\Delta L_۲}{\Delta L_۱} = ۱ \Rightarrow \frac{\Delta L_۱}{\Delta L_۲} = \frac{۱}{۳}$$

سوتی‌های پرتکرار

اگه گزینهٔ «۱» رو زدی احتمالاً توی محاسبات آخر، بی‌دقتی کردی ولی یه نکته داریم که فنر (۱) سخت‌تر از فنر (۲) هست، پس با اعمال نیروی مشابه، تغییر طول کم‌تری داده. اگه این نکته توی ذهنت باشه، حتی اگر با محاسبه هم گزینهٔ (۱) به‌دست بیاری متوجه می‌شی یه جای کار می‌لنگه. فیزیک صرفاً فرمول و محاسبه نیست.

نیروی کشسانی فنر

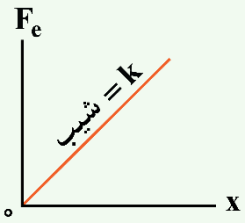
اگر تغییر طول یک فنر نسبت به حالت آزاد آن را با x نشان دهیم، اندازهٔ نیروی کشسانی در این فنر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$F_e = kx \ , \ (x = \ell - \ell_۰)$ $\quad$ $\ell_۰$: طول آزاد فنر

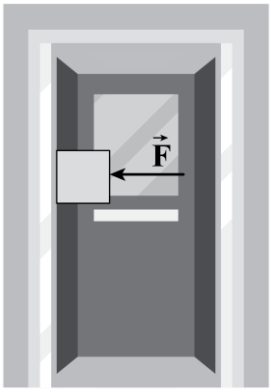
در این رابطه، k را ضریب ثابت فنر می‌نامیم که به جنس و مشخصات ساختمانی فنر بستگی دارد و یکای آن در SI معادل $\frac{N}{m}$ است.

نکته

اگر نمودار نیروی کشسانی فنر برحسب تغییر طول آن را رسم کنیم، یک خط راست گذرنده از مبدأ مختصات خواهد بود که شیب آن معادل همان ثابت فنر است.



۱۵- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $1kg$ را به دیوارهٔ آسانسوری که با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ به‌صورت کندشونده رو به پایین حرکت می‌کند، با نیروی افقی $F=50N$ می‌فشاریم. نیروی F را چند نیوتون کاهش دهیم تا جسم در آستانهٔ لغزش قرار گیرد؟



$(\mu_k=0/4\ ,\ \mu_s=0/5\ ,\ g=10\frac{N}{kg})$

۱) ۲۲

۲) ۲۴

۳) ۲۶

۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

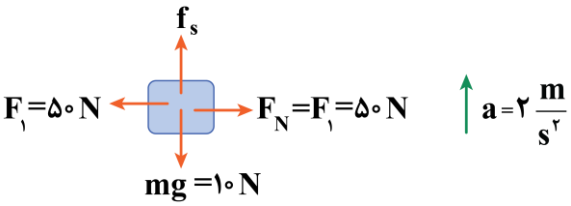
گام اول

جهت شتاب آسانسور و جسم که همراه با آن حرکت می‌کند را به‌دست می‌آوریم:

با توجه به این‌که آسانسور به‌صورت کندشونده حرکت می‌کند، درمی‌یابیم شتاب در خلاف جهت حرکت است و چون آسانسور رو به پایین حرکت می‌کند، شتاب به سمت بالا است.

گام دوم

نیروی اصطکاک وارد بر جسم را حساب می‌کنیم. مطابق شکل داریم:



$$F_{net}=ma$$

$$\Rightarrow f_s-mg=ma\Rightarrow f_s-10=1\times 2\Rightarrow f_s=12N$$

گام سوم

برای این‌که در این شرایط جسم در آستانهٔ لغزش باشد، باید $f_{s,max}=12N$ باشد؛ بنابراین نیروی F را در این حالت به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s,max}=\mu_s F_N \xrightarrow[F_N=F_2]{\mu_s=0/5} 12=0/5\times F_2\Rightarrow F_2=24N$$

گام آخر

تغییرات نیروی F را به‌دست می‌آوریم:

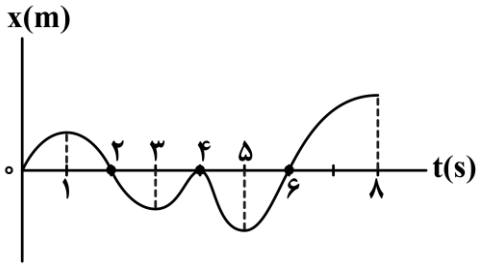
$$F_2-F_1=24-50=-26N$$

آزمون ماز

۱۳ آذرماه

فیزیک

۱- **با توجه به نمودار مکان ـ زمان زیر، مشخص کنید چه تعداد عبارت‌های زیر صحیح است؟**



الف ـ سرعت متوسط در کل بازهٔ زمانی مثبت است.

ب ـ مجموعاً ۵s بردار مکان در جهت محور x است.

ج ـ مجموعاً ۵s بردار مکان و سرعت هم‌جهت هستند.

د ـ متحرک مجموعاً ۳s با سرعت مثبت از مبدأ مکان دور می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ نموداری ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف

شیب خط واصل بین دو نقطه در نمودار $x-t$، برابر سرعت متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی است. شیب خط واصل از لحظهٔ $t=0$ به $t=8s$، دارای شیب مثبت است، پس $v_{av}>0$ است. (✓)

ب

در بازه‌های زمانی‌ای که نمودار $x-t$ بالای محور زمان است، بردار مکان متحرک مثبت است. در بازه‌های زمانی صفر تا ۲s و ۶s تا ۸s مجموعاً ۴ ثانیه بردار مکان مثبت است. (✗)

ج

در بازه‌های زمانی صفر تا ۱s و ۶s تا ۸s بردار مکان و سرعت مثبت‌اند، هم‌چنین در بازه‌های زمانی ۲s تا ۳s و ۴s تا ۵s بردار مکان و سرعت منفی‌اند. پس مجموعاً ۵ ثانیه بردار مکان و سرعت هم‌جهت هستند. (✓)

د

در بازه‌های زمانی صفر تا ۱s و ۶s تا ۸s مجموعاً ۳ ثانیه متحرک با سرعت مثبت از مبدأ مکان دور می‌شود. (✓)

۳ مورد درست است.

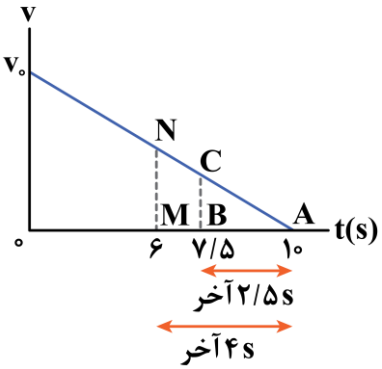
ماز

۲- **متحرکی که با تندی ثابت بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، با شتاب ثابت ترمز می‌کند تا پس از ۱۰ ثانیه متوقف شود. بزرگی جابه‌جایی متحرک در ۲/۵ ثانیهٔ آخر حرکت، چند برابر بزرگی جابه‌جایی آن در ۴ ثانیهٔ آخر حرکت است؟**

۱) $\frac{۲۵}{۶۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

روش اول



نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در مدت ۱۰s با شتاب ثابت متوقف می‌شود، مطابق شکل است. با توجه به تشابه مثلث‌های ABC و AMN داریم:

$$\frac{\Delta x_{\text{آخر }۲/۵s}}{\Delta x_{\text{آخر }۴s}} = \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = (\frac{AB}{AM})^۲ = (\frac{۲/۵}{۴})^۲ = (\frac{۵}{۸})^۲ = \frac{۲۵}{۶۴}$$

روش دوم

با استفاده از معادلهٔ «جابه‌جایی ـ زمان» به کمک سرعت نهایی $(\Delta x = \frac{-۱}{۲}at^۲ + vt)$ داریم:

$$\Delta x = \frac{-۱}{۲}at^۲ + vt \xrightarrow[\text{توقف}]{v=۰} \Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ \Rightarrow \frac{|\Delta x_{\text{آخر }۲/۵s}|}{|\Delta x_{\text{آخر }۴s}|} = \frac{\frac{۱}{۲}a \times ۲/۵^۲}{\frac{۱}{۲}a \times ۴^۲} = \frac{۲۵}{۶۴}$$

۳- معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v = ۴t^۲ - ۷$ است. شتاب متوسط متحرک در ۳ ثانیهٔ دوم حرکت آن چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

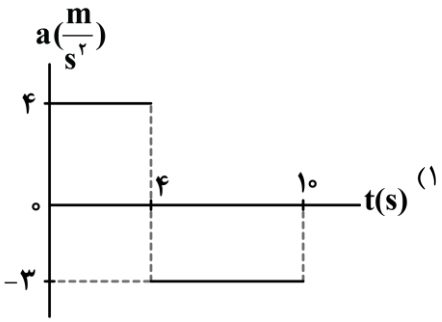
پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

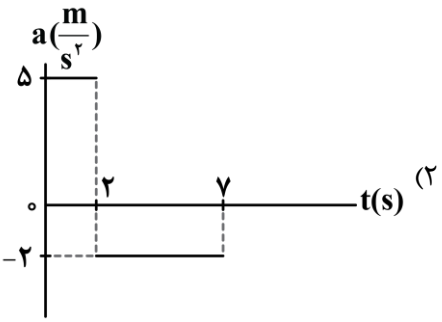
۳ ثانیهٔ دوم به‌معنی بازهٔ $t_۱ = ۳s$ تا $t_۲ = ۶s$ است؛ بنابراین شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

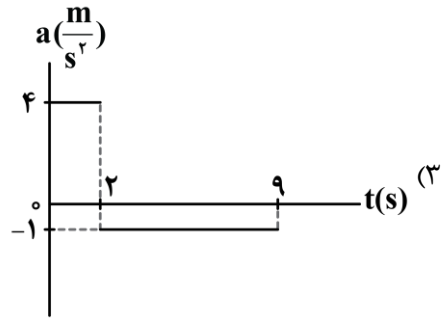
$$v = ۴t^۲ - ۷ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۳s \Rightarrow v_۱ = ۴ \times ۳^۲ - ۷ = ۲۹ \frac{m}{s} \\ t_۲ = ۶s \Rightarrow v_۲ = ۴ \times ۶^۲ - ۷ = ۱۳۷ \frac{m}{s} \end{cases}$$

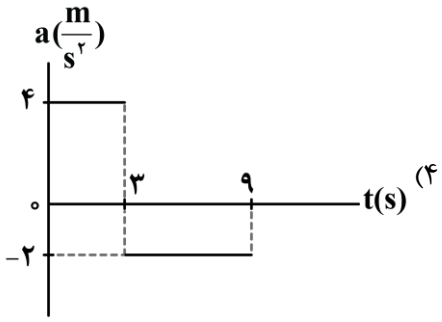
$$\Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱۳۷ - ۲۹}{۳} = \frac{۱۰۸}{۳} = ۳۶ \frac{m}{s^۲}$$

۴- متحرکی بر روی محور x حرکت خود را با سرعت $-۱۰\frac{m}{s}(\vec{i})$ شروع می‌کند و درنهایت پس از طی مسافتی، حرکت خود را با همان سرعت به پایان می‌رساند. اگر این متحرک در مسیر خود تغییر جهت داده باشد، کدام نمودار شتاب ـ زمان زیر، می‌تواند مربوط به حرکت آن باشد؟

(۱)


(۲)


(۳)


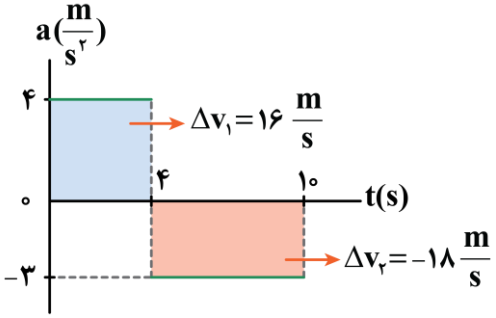
(۴)


پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ نموداری ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به این‌که سرعت اولیه با سرعت نهایی متحرک برابر است، پس تغییرات سرعت در کل حرکت برابر با صفر است. از آنجایی که مساحت محصور نمودار شتاب ـ زمان نسبت به محور t برابر با Δv است، درنتیجه نمودار موردنظر باید به‌گونه‌ای باشد که در آن، مساحت بالای محور t با مساحت پایین محور t، هم‌اندازه باشد. پس از بررسی این شرط، به کمک علامت سرعت متحرک باید ببینیم که متحرک تغییر جهت داشته یا نه!

بررسی گزینه‌ها:

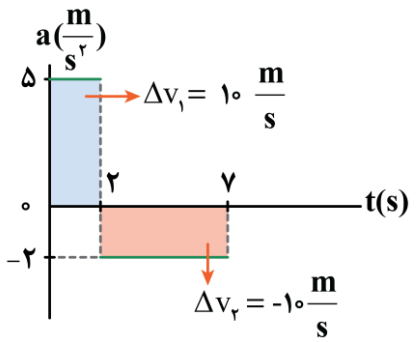
(۱) همان‌طور که می‌بینید، مساحت بالا و پایین نمودار، باهم برابر نیستند.



$$\Delta v_{کل} = ۱۶ - ۱۸ = -۲ \neq ۰$$ (✗)

(۲)

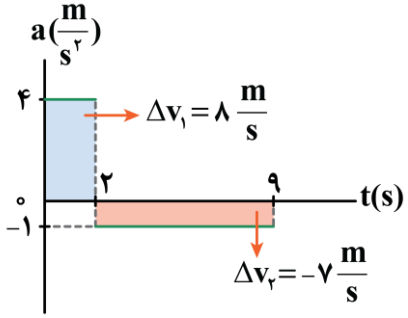
دقت شود که در این گزینه، مطابق شکل، $\Delta v_{کل} = ۰$ است، اما علامت سرعت در طی حرکت تغییری نکرده و درنتیجه متحرک تغییر جهت نداده است.



$$\begin{cases} v_{۲S} = v_۰ + \Delta v_۱ = (-۱۰) + (۱۰) = ۰ \\ v_{۷S} = v_۲ + \Delta v_۲ = (۰) + (-۱۰) = -۱۰\frac{m}{s} \end{cases}$$

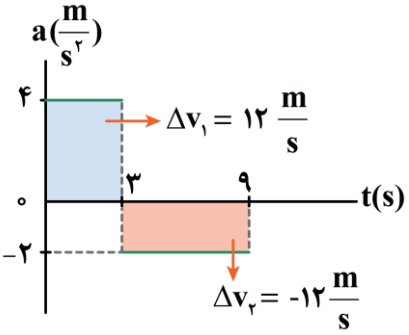
همان‌طور که مشخص است، سرعت متحرک ابتدا از $-10\frac{m}{s}$ به صفر و سپس از صفر به $-10\frac{m}{s}$ می‌رسد. پس علامت سرعت تغییر نکرده است. (✖)

۳



$\Delta v_{کل} = ۸ - ۷ = ۱\frac{m}{s} \neq ۰$ (✖)

۴



مطابق شکل، $\Delta v_{کل} = ۰$ و علامت سرعت نیز طی حرکت، تغییر کرده است.

$$\begin{cases} v_{۳s} = v_۰ + \Delta v_۱ = (-۱۰) + (۱۲) = +۲\frac{m}{s} \\ v_{۹s} = v_۳ + \Delta v_۲ = (+۲) + (-۱۲) = -۱۰\frac{m}{s} \end{cases}$$

همان‌طور که مشخص است، سرعت متحرک ابتدا از $-10\frac{m}{s}$ به $+2\frac{m}{s}$ رسیده و بعد از آن سرعت از $+2\frac{m}{s}$ به $-10\frac{m}{s}$ رسیده است؛ یعنی در کل مسیر متحرک دو بار تغییر جهت داده است. (✓)

مازاد

۵- جسمی به جرم ۶kg را به انتهای فنر سبکی با ثابت $۳۰۰۰\frac{N}{m}$ آویزان می‌کنیم. طول فنر چگونه تغییر می‌کند؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) ۲cm افزایش می‌یابد. ۲) ۲cm کاهش می‌یابد. ۳) ۰/۵cm افزایش می‌یابد. ۴) ۰/۵cm کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

نیروی فنر هم‌اندازهٔ وزن جسم است.

$$F_e = mg \Rightarrow kx = mg \Rightarrow ۳۰۰۰x = ۶ \times ۱۰$$

$$\Rightarrow x = ۰/۰۲m = ۲cm$$

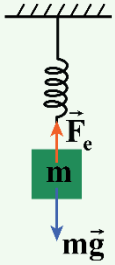
دقت کنید برای آن‌که فنر نیروی رو به بالا به جسم وارد کند، باید کشیده شود و طول آن افزایش یابد.

نیروی فنر

اگر فنری را از حالت آزاد خود خارج کنیم، اندازهٔ نیروی کشش درون فنر از رابطهٔ $F_e = kx$ به‌دست می‌آید. در این رابطه k ثابت فنر (برحسب $\frac{N}{m}$) و x اندازهٔ تغییر طول فنر نسبت به حالت آزاد آن است که از رابطهٔ $x = L - L_۰$ به‌دست می‌آید.

نکته

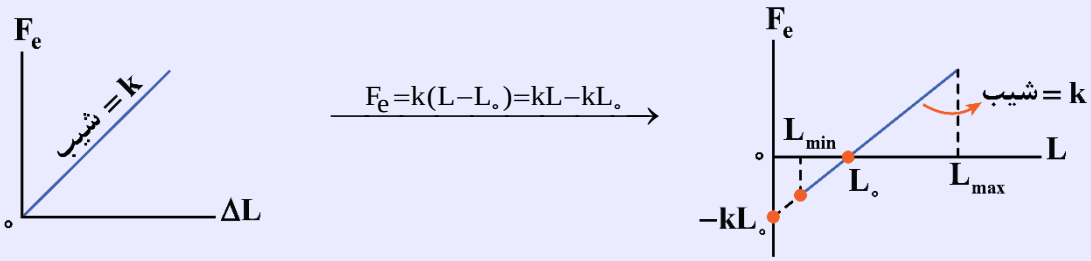
اگر جسمی به جرم m را از فنر قائمی آویزان کنیم، پس از تعادل مجموعه داریم:



$$F_{net,y} = ۰ \Rightarrow F_e = mg \Rightarrow kx = mg$$

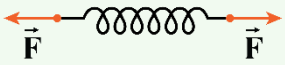
نمودار تغییرات نیروی فنر برحسب تغییر طول آن

نمودار نیروی کشسانی برحسب تغییر طول یک خط گذرنده از مبدأ مختصات با شیبی معادل با k (ثابت فنر) می‌باشد.



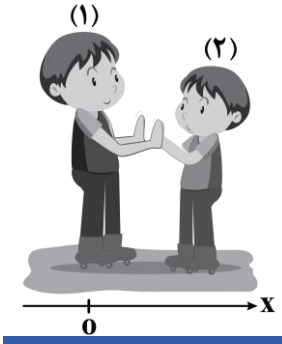
نکته

اگر مانند شکل مقابل، فنری را با دو نیروی مساوی F از دو طرف بکشیم نیروی کشسانی درون فنر همان F خواهد شد.



$\Rightarrow F_e = F$

۶- مطابق شکل، دو شخص به جرم‌های $m_۱ = ۷۵/۰kg$ و $m_۲ = ۵۰/۰kg$ با کفش‌های چرخ‌دار در یک سالن مسطح و صاف روبه‌روی هم ایستاده‌اند. شخص اول با نیروی $۱۰۰/۰N$ شخص دوم را به‌طرف راست هُل می‌دهد. اگر بردار شتاب این دو شخص به‌ترتیب $\vec{a}_۱$ و $\vec{a}_۲$ باشد، حاصل $\vec{a}_۲ - \vec{a}_۱$ در SI کدام است؟



۱) $\frac{۱۰}{۳}\vec{i}$

۲) $\frac{-۱۰}{۳}\vec{i}$

۳) $\frac{۲}{۳}\vec{i}$

۴) $-\frac{۲}{۳}\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

نیرویی که شخص (۱) به شخص (۲) وارد می‌کند به سمت راست (در جهت محور x) است؛ بنابراین $\vec{F}_{۱۲} = ۱۰۰\vec{i}$ است و داریم:

$$\vec{F}_{۱۲} = m_۲\vec{a}_۲ \Rightarrow ۱۰۰\vec{i} = ۵۰\vec{a}_۲ \Rightarrow \vec{a}_۲ = ۲\vec{i}\,(\frac{m}{s^۲})$$

گام دوم

با توجه به قانون سوم نیوتون، نیرویی که شخص (۲) به شخص (۱) وارد می‌کند برابر $\vec{F}_{۲۱} = -۱۰۰\vec{i}$ است و داریم:

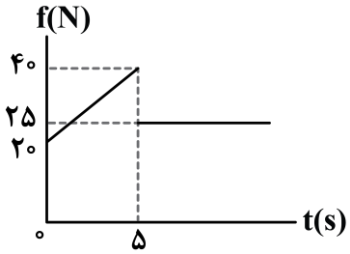
$$\vec{F}_{۲۱} = m_۱\vec{a}_۱ \Rightarrow -۱۰۰\vec{i} = ۷۵\vec{a}_۱ \Rightarrow \vec{a}_۱ = \frac{-۴}{۳}\vec{i}\,(\frac{m}{s^۲})$$

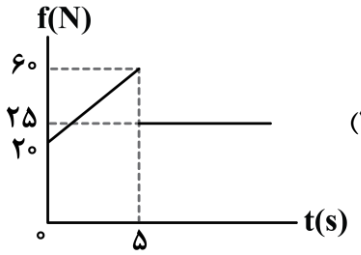
گام آخر

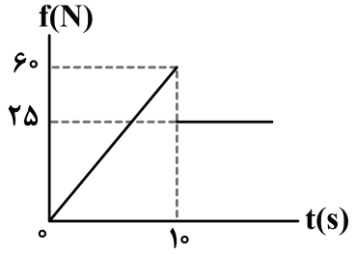
بنابراین خواستهٔ سؤال برابر است با:

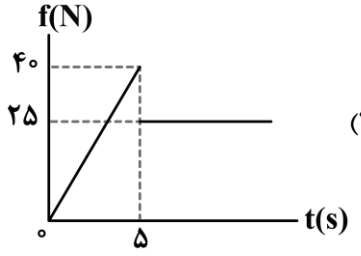
$$\vec{a}_۲ - \vec{a}_۱ = ۲\vec{i} - (\frac{-۴}{۳}\vec{i}) = \frac{۱۰}{۳}\vec{i}\,(\frac{m}{s^۲})$$

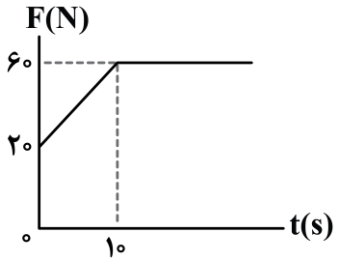
۷- جسمی به جرم $5kg$ بر روی یک سطح افقی قرار دارد. ضریب اصطکاک جنبشی و ایستایی بین جسم و سطح به‌ترتیب برابر ۰/۵ و ۰/۸ است. یک نیروی افقی متغیر با زمان، مطابق نمودار زیر، به جسم وارد می‌شود. نمودار بزرگی نیروی اصطکاک برحسب زمان کدام است؟ $(g=10\frac{N}{kg})$

۱)


۲)


۳)


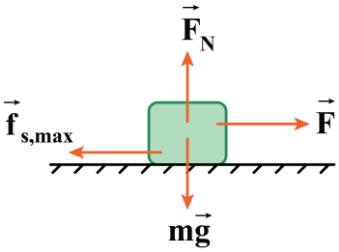
۴)




پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ نموداری ـ زمان‌بَر ⏱ ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

اول باید مقدار بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی را حساب کنیم:

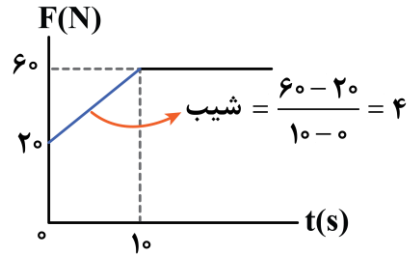


$$F_{net,y}=0\Rightarrow F_N=mg=5\times10=50N$$

$$f_{s,max}=\mu_s F_N=0/8\times50=40N$$

گام دوم

حالا باید حساب کنیم که بزرگی نیروی متغیر با زمان در چه لحظه‌ای برابر با بزرگی بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی می‌شود. چرا؟ چون تا آن لحظه، نیروی اصطکاک ایستایی پابه‌پای نیروی متغیر، افزایش پیدا کرده تا جسم ساکن بماند!



$$\text{شیب}=\frac{60-20}{10-0}=4\Rightarrow 0\le t<10s: F=4t+20\xrightarrow{F=f_{s,max}}$$

$$4t+20=40\Rightarrow 4t=20\Rightarrow t=5s$$

پس در بازهٔ زمانی صفر تا ۵s، بزرگی نیروی اصطکاک برابر با $f_s=4t+20$ است.

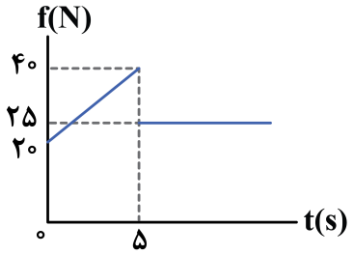
گام سوم

از لحظهٔ $t=5s$ به بعد، جسم شروع به حرکت می‌کند و در حین حرکت، نیروی اصطکاک، ثابت و از نوع جنبشی است؛ درنتیجه داریم:

$$f_k=\mu_k F_N=0/5\times50=25N$$

گام آخر

درنهایت نمودار بزرگی نیروی اصطکاک برحسب زمان را رسم می‌کنیم:

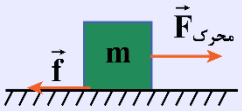


راهنمای مسیرت

بچه‌ها توی حل این سؤال با توجه به گزینه‌ها، نیازی به محاسبهٔ زمان (t) نبود و اگه صرفاً روی محاسبهٔ نیروی اصطکاک تمرکز می‌کردید به پاسخ درست می‌رسیدید.

حرکت روی سطح دارای اصطکاک

اگر مانند شکل مقابل، نیروی خالص محرکی به جسم ساکن اِعمال شود:



۱- ابتدا مقدار $F_{محرک}$ را به‌دست می‌آوریم که مساوی با برایند نیروهای در راستای حرکت خود به‌جز اصطکاک می‌شود.

۲- سپس نیروی $f_{s,max}$ را از رابطهٔ $f_{s,max}=\mu_s F_N$ به‌دست می‌آوریم.

۳- مقادیر دو مرحلهٔ قبل را باهم مقایسه می‌کنیم و سه حالت پیش می‌آید:

الف) اگر $F_{محرک} < f_{s,max}$ ⇐ جسم ساکن می‌ماند؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_s = F_{محرک}$

ب) اگر $F_{محرک} = f_{s,max}$ ⇐ جسم در آستانهٔ حرکت خواهد بود؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_{s,max} = \mu_s F_N = F_{محرک}$

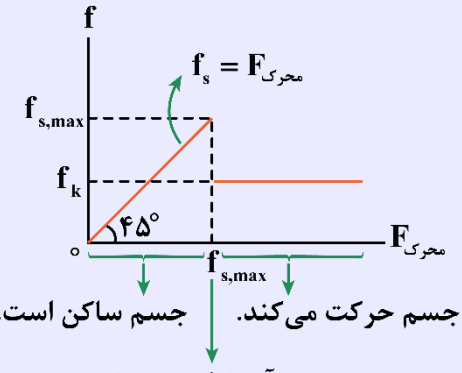
پ) اگر $F_{محرک} > f_{s,max}$ ⇐ جسم حرکت خواهد کرد؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_k = \mu_k F_N$

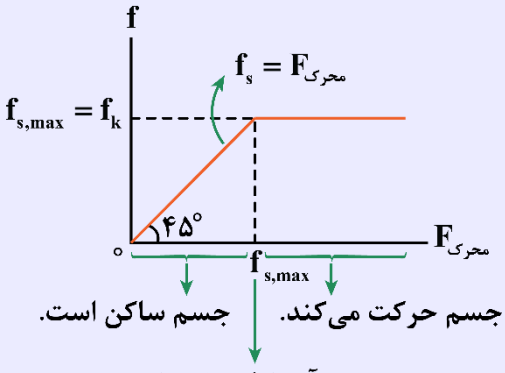
در روابط بالا μ_s و μ_k را به‌ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامیم که به ویژگی‌های سطح در تماس جسم با زمین بستگی دارند و فاقد یکا هستند. در ضمن همواره:

$$\mu_s \geq \mu_k \Rightarrow f_{s,max} \geq f_k$$

اگر $\mu_s > \mu_k$ باشد:



اگر $\mu_s = \mu_k$ باشد:



نکته

اگر بخواهیم جسم با حداقل نیروی محرک (با حداقل شتاب) شروع به حرکت کند، باید:

۱- $(F_{محرک})_{min} = f_{s,max} = \mu_s F_N$

۲- $f = f_k = \mu_k F_N$

که در این حالت داریم:

$$a_{min} = \frac{(F_{محرک})_{min} - f_k}{m} = (\mu_s - \mu_k)\frac{F_N}{m}$$

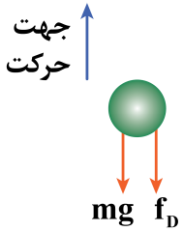
در مسائلی که $F_N = mg$ است، $a_{min} = (\mu_s - \mu_k)g$ است.

۸- گلوله‌ای را در راستای قائم در هوا به‌سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر اندازهٔ شتاب توپ را هنگام بالارفتن با «a_1» و هنگام پایین آمدن با «a_2» نشان دهیم و «g» اندازهٔ شتاب گرانشی باشد، کدام مورد درست است؟

۱) $a_1 > g > a_2$ ۲) $a_1 > a_2 > g$ ۳) $a_2 > g > a_1$ ۴) $a_2 > a_1 > g$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۲۰۲)

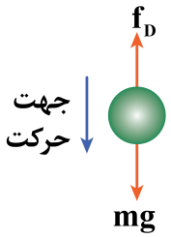
هنگام بالارفتن، مقاومت هوا به‌سمت پایین به گلوله وارد می‌شود و اندازهٔ شتاب آن را افزایش می‌دهد.



$$F_{net} = ma_1 \Rightarrow f_D + mg = ma_1 \Rightarrow a_1 = g + \frac{f_D}{m}$$

$$\Rightarrow a_1 > g$$

هنگام پایین‌آمدن، مقاومت هوا به‌سمت بالا وارد می‌شود و اندازهٔ شتاب گلوله را کاهش می‌دهد.



$$F_{net} = ma_2 \Rightarrow mg - f_D = ma_2 \Rightarrow a_2 = g - \frac{f_D}{m}$$

$$\Rightarrow a_2 < g$$

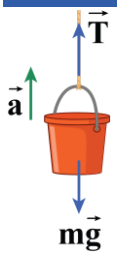
۹- کارگری یک سطل محتوی مصالح به جرم ۲۴kg را با طناب سبکی به‌طرف بالا می‌کشد. اگر بیشینهٔ کشش قابل‌تحمل طناب ۳۰۰N باشد، این کارگر این سطل را با حداکثر چه شتابی در SI می‌تواند بالا بکشد؟ $(g = 10\frac{N}{kg})$



۱) ۲/۵ ۲) ۲
۳) ۱/۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۲۰۲)

اگر جهت بالا را مثبت درنظر بگیریم، با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جسم داریم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow T - mg = ma$$

$$\Rightarrow ۳۰۰ - ۲۴ \times ۱۰ = ۲۴a$$

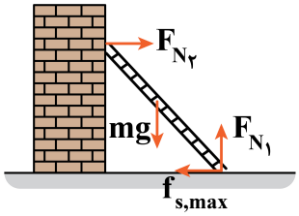
$$\Rightarrow ۶۰ = ۲۴a \Rightarrow a = ۲/۵ \frac{m}{s^2}$$

۱۰- نردبانی به جرم ۲۵kg، به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه دارد و پایهٔ آن روی سطح افقی، در آستانهٔ سُر خوردن است. اگر نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، $۵۰\sqrt{۲۹}N$ باشد، نیرویی که دیوار به نردبان وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = 10\frac{N}{kg})$

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۷۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۲۰۲)

نیروهای وارد به نردبان را رسم می‌کنیم:



نردبان در حالت سکون قرار دارد، با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net,y} = ۰ = F_{N_۱} - mg \Rightarrow F_{N_۱} = mg = ۲۵۰N$$

$$F_{net,x} = ۰ = F_{N_۲} - f_{s,max} \Rightarrow F_{N_۲} = f_{s,max}$$

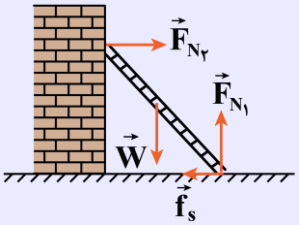
همچنین می‌دانیم نیروی سطح از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$R = \sqrt{F_{N_۱}^۲ + f_{s,max}^۲} \Rightarrow ۵۰\sqrt{۲۹} = \sqrt{۲۵۰^۲ + f_{s,max}^۲}$$

$$\Rightarrow f_{s,max} = ۱۰۰N = F_{N_۲}$$

تعادل نردبان

۱- مطابق شکل زیر هرگاه نردبانی به زمین و یک دیوار بدون اصطکاک تکیه داده شده باشد، از طرف هر یک از پایه‌های نردبان بر سطح تماس متناظرش نیرو وارد می‌شود؛ در این وضعیت چنان‌چه نردبان بدون حرکت باقی بماند، برایند نیروهای افقی و همچنین برایند نیروهای عمودی‌اش برابر صفر می‌باشد:



(راستای عمودی) : $F_{N_۱} = mg$

(راستای افقی) : $F_{N_۲} = f_s$

۲- اگر نردبان در آستانهٔ سُرخوردن باشد، اصطکاک ایستایی بیشینه می‌شود و داریم:

$$F_{N_۱} = mg$$

$$F_{N_۲} = f_{s,max} = \mu_s F_{N_۱} \Rightarrow F_{N_۲} = \mu_s mg$$

بنابراین اگر نردبان در آستانهٔ سُرخوردن باشد، نسبت بزرگی نیرویی که دیوار قائم بر آن وارد می‌کند به وزن آن برابر ضریب اصطکاک ایستایی (μ_s) است. دقت کنید که اگر نردبان در آستانهٔ سُرخوردن نباشد، این نسبت کوچک‌تر از ضریب اصطکاک ایستایی خواهد بود.

۳- اگر نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند را بخواهیم، باید از نیروهای f_s و $F_{N_۱}$ برایند بگیریم:

نیروی سطح : $R = \sqrt{F_{N_۱}^۲ + f_s^۲} = \sqrt{(mg)^۲ + f_s^۲}$

اگر نردبان در آستانهٔ سر خوردن باشد. $\rightarrow R_۱ = \sqrt{(mg)^۲ + (\mu_s mg)^۲} = mg\sqrt{۱ + \mu_s^۲}$

نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند برابر برایند f_s و $F_{N_۱}$ است، درحالی‌که نیرویی که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند هم‌اندازهٔ f_s است؛ بنابراین حتماً نیروی سطح افقی بزرگ‌تر از نیروی دیوار قائم است.

مبتکر

۱۱- متحرکی به جرم ۶kg با شتاب ثابت روی خط راست درحال حرکت است. اگر در لحظهٔ $t=۰$ تکانهٔ آن برابر با $۲۱۰\frac{kgm}{s}$ باشد و پس از ۱۰ ثانیه به $۴۵۰\frac{kgm}{s}$ برسد، شتاب حرکت جسم چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۴ ۲) ۱۱ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۸ ـ ۱۲۰۲)

روش اول

گام اول

از رابطهٔ تکانه و نیروی متوسط داریم:

$$\Delta p = \bar{F}\Delta t \Rightarrow ۴۵۰ - ۲۱۰ = \bar{F}(۱۰) \Rightarrow \bar{F} = ۲۴N$$

کام آخر

حالا طبق قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$\bar{F} = F_{net} = ma \Rightarrow ۲۴ = ۶a \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

روش دوم

کام اول

با استفاده از رابطهٔ $\Delta p = m\Delta v$ داریم:

$$\Delta p = m\Delta v \Rightarrow ۴۵۰ - ۲۱۰ = ۶\Delta v \Rightarrow \Delta v = \frac{۲۴۰}{۶} = ۴۰\frac{m}{s}$$

کام آخر

حالا از تعریف شتاب متوسط استفاده می‌کنیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{۴۰}{۱۰} = ۴\frac{m}{s^۲}$$

تکانه

۱- حاصل‌ضرب جرم در سرعت یک جسم را تکانه می‌نامند. تکانه یک کمیت برداری و هم‌جهت با سرعت است.

$\vec{p} = m\vec{v}$ تغییرات تکانه: $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$

۲- قانون دوم نیوتون با استفاده از تغییرات تکانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

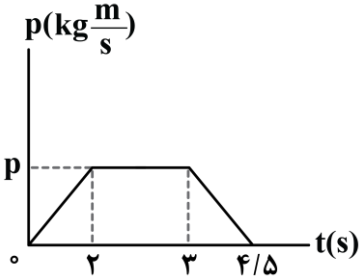
متوسط نیروی وارد بر جسم برابر آهنگ تغییرات تکانه است.

۳- انرژی جنبشی یک جسم را می‌توان برحسب تکانه نیز نوشت:

انرژی جنبشی: $K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}\frac{(mv)^۲}{m} = \frac{۱}{۲}\frac{p^۲}{m} \Rightarrow K = \frac{p^۲}{۲m}$

ماز

۱۲- **شخصی به جرم ۶۰kg در یک آسانسور که رو به بالا شروع به حرکت می‌کند، روی یک ترازو ایستاده و نمودار تکانه ـ زمان او مطابق شکل است. اگر بیش‌ترین عددی که ترازو نشان می‌دهد ۳ برابر کم‌ترین عددی باشد که ترازو نشان می‌دهد، بیش‌ترین تندی آسانسور چند متر بر ثانیه است؟** $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) ۸

۲) ۴

۳) ۲/۵

۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ نموداری ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۴۶ ـ ۱۲۰۲)

کام اول

ترازو نیروی عمودی سطح را نشان می‌دهد و آسانسور به‌طرف بالا در حرکت است. طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_N - mg = ma \Rightarrow F_N = m(g + a) \qquad (*)$$

گام دوم

اگر حرکت آسانسور به‌صورت تندشونده باشد، ترازو بیش‌ترین عدد و اگر به‌صورت کندشونده باشد، ترازو کم‌ترین عدد را نشان می‌دهد. طبق نمودار تکانه ـ زمان، حرکت آسانسور در بازهٔ زمانی صفر تا ۲s تندشونده و در بازهٔ زمانی ۳s تا ۴/۵s کندشونده است، پس می‌توان نوشت:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}(۰-۲)s: a_۱=\dfrac{v-۰}{۲-۰}=\dfrac{v}{۲}\\ (۳-۴/۵)s: a_۲=\dfrac{۰-v}{۴/۵-۳}=-\dfrac{۲}{۳}v\end{cases}$$

گام آخر

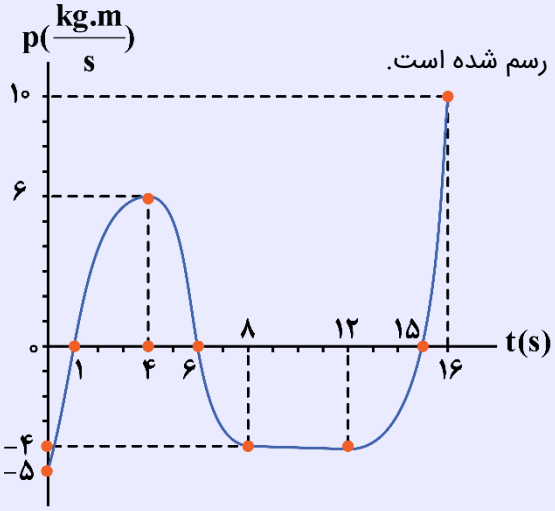
نسبت بیش‌ترین عدد ترازو به کم‌ترین عددی که نشان می‌دهد، برابر ۳ است، پس داریم:

$$\frac{F_{N_{max}}}{F_{N_{min}}}=۳\xrightarrow{(*)}\frac{m(g+\frac{v}{۲})}{m(g-\frac{۲}{۳}v)}=۳\Rightarrow\frac{۱۰+\frac{v}{۲}}{۱۰-\frac{۲}{۳}v}=۳\Rightarrow ۱۰+\frac{v}{۲}=۳۰-۲v\Rightarrow\frac{۵}{۲}v=۲۰\Rightarrow v=۸\frac{m}{s}$$

نمودار تکانه ـ زمان

می‌خواهیم ببینیم که از روی نمودار تکانه ـ زمان می‌توان چه نتایجی به‌دست آورد.

نمودار تکانه ـ زمان مقابل را به‌عنوان مثال درنظر بگیرید که برای جسمی به جرم ۲kg رسم شده است.



۱- تکانه در زمان‌های مختلف:

ساده‌ترین چیزی که از نمودار تکانه ـ زمان می‌فهمیم، تکانهٔ جسم در لحظات مختلف است. مثلاً در نمودار داده‌شده، تکانه در لحظهٔ $t=۱s$ برابر صفر و در لحظهٔ $t=۴s$ برابر $۶\frac{kg.m}{s}$ است.

۲- سرعت در لحظات مختلف:

اگر جرم جسم را داشته باشیم، به‌راحتی با استفاده از رابطهٔ $p=mv$، سرعت آن را به‌دست می‌آوریم.

$$t=۱s: p=۰\Rightarrow v=۰$$

$$t=۴s: p=۶\frac{kg.m}{s}\Rightarrow v=\frac{p}{m}=\frac{۶}{۲}=۳\frac{m}{s}$$

دقت کنید هرگاه سرعت یا تکانه، مثبت باشد، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و هرگاه سرعت یا تکانه، منفی باشد، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۳- نیروی خالص متوسط وارد بر جسم:

نیروی خالص متوسط وارد بر جسم از رابطهٔ $F_{av}=\frac{\Delta p}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید که درواقع برابر شیب خط واصل دو نقطه از نمودار تکانه ـ زمان است. به‌عنوان مثال در بازهٔ زمانی $۱s\le t\le ۴s$ داریم:

$$\begin{cases} t=۱s:\ p=۰ \\ t=۴s:\ p=۶\frac{kg.m}{s} \end{cases} \Rightarrow F_{av}=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{۶-۰}{۴-۱}=۲N$$

۴- نیروی خالص وارد بر جسم در هر لحظه:

شیب خط مماس بر نمودار تکانه ـ زمان در هر لحظه برابر نیروی خالص وارد بر جسم در آن لحظه است. مثلاً در نمودار داده‌شده، نیروی خالص وارد بر جسم در بازه‌های زمانی $۰<t<۴s$ و $۱۲s<t<۱۶s$ مثبت است (در جهت محور x است) و در بازهٔ $۴s<t<۸s$ منفی است (در خلاف جهت محور x است) و در بازهٔ $۸s<t<۱۲s$ صفر است. دقت کنید که در لحظهٔ $t=۴s$، علامت شیب نمودار، تغییر کرده است، یعنی جهت نیروی خالص وارد بر جسم عوض شده است.

۵- اگر جرم جسم را داشته باشیم، علاوه‌بر محاسبهٔ نیرو از نکات قبل، می‌توانیم با کمک قانون دوم نیوتون، شتاب را هم محاسبه کنیم.

۶- تندشونده و کندشونده بودن حرکت:

هرگاه نمودار از محور افقی، دور شود، حرکت، تندشونده و هرگاه به محور افقی، نزدیک شود، حرکت، کندشونده است. مثلاً در نمودار داده‌شده، در بازه‌های زمانی $۰<t<۱s$، $۴s<t<۶s$ و $۱۲s<t<۱۵s$ حرکت، کندشونده و در بازه‌های $۱s<t<۴s$، $۶s<t<۸s$ و $۱۵s<t<۱۶s$، حرکت تندشونده است. دقت کنید که در بازهٔ زمانی $۸s<t<۱۲s$، حرکت با سرعت ثابت انجام شده است.

۷- به‌طور کلی به یاد داشته باشید که اگر جرم جسم را بدانیم، می‌توانیم با تقسیم محور عمودی بر جرم، نمودار تکانه ـ زمان را به نمودار سرعت ـ زمان تبدیل کنیم و درنتیجه همهٔ نکاتی که از نمودار سرعت ـ زمان قابل استنباط است را می‌توانیم بفهمیم.

۸- دقت کنید که اگر به‌جای نمودار تکانه ـ زمان، معادلهٔ تکانه ـ زمان را هم به ما بدهند، به‌طور مشابه می‌توانیم همهٔ موارد بالا را به‌دست آوریم. گاهی هم می‌توانیم معادلهٔ داده‌شده را رسم کنیم و با کمک نمودار به‌دست‌آمده به سؤالات پاسخ دهیم.

۱۳- اگر با ثابت‌ماندن جرم یک گلوله، انرژی جنبشی آن ۱۹ درصد کاهش یابد، اندازهٔ تکانهٔ آن چند درصد کاهش می‌یابد؟

۱) ۱۰ ۲) $\sqrt{۱۹}$ ۳) ۱۹ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

اگر انرژی جنبشی ۱۹ درصد کاهش یابد، داریم:

$$K_۲=K_۱-۱۹٪K_۱=۸۱٪K_۱ \Rightarrow \frac{K_۲}{K_۱}=\frac{۸۱}{۱۰۰}$$

گام دوم

به کمک رابطهٔ انرژی جنبشی و تکانه داریم:

$$K=\frac{p^۲}{۲m} \xrightarrow{m:\text{ثابت}} \frac{K_۲}{K_۱}=(\frac{p_۲}{p_۱})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۸۱}{۱۰۰}=(\frac{p_۲}{p_۱})^۲ \Rightarrow \frac{p_۲}{p_۱}=\frac{۹}{۱۰}$$

کام آخر

حالا درصد تغییرات تکانه را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \times 100 = \frac{p_1(\frac{9}{10} - 1)}{p_1} \times 100 = -10\%$$

درنتیجه تکانه ۱۰ درصد کاهش می‌یابد.

۱۴- پره‌های یک بالگرد با آهنگ ۱۵۰۰rpm می‌چرخند. طول نوک پره‌ها تا محور چرخش آن‌ها را ۲m فرض کنید. دورهٔ تناوب پره‌ها و تندی در نوک پره‌ها به‌ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟

۱) ۰/۰۴ ، 100π ۲) ۰/۰۴ ، 200π ۳) ۰/۰۶ ، 100π ۴) ۰/۰۶ ، 200π

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۲۰۲)

کام اول

آهنگ چرخش پره‌ها ۱۵۰۰rpm است، یعنی در هر دقیقه ۱۵۰۰ دور کامل می‌چرخند و دورهٔ تناوب آن‌ها برابر است با:

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60}{1500} = 0/04s$$

کام آخر

تندی در نوک پره‌ها برابر است با:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 2}{0/04} = 100\pi(\frac{m}{s})$$

آزمون سراسری ریاضی تیرماه ۱۴۰۱

۵۷- جسمی به جرم ۵kg در حرکت دایره‌ای یکنواخت در هر دقیقه ۳۰ دور می‌چرخد. اگر شعاع مسیر ۲ متر باشد، انرژی جنبشی جسم، چند ژول است؟

۱) $10\pi^2$ ۲) $20\pi^2$ ۳) ۸۰ ۴) ۴۰

پاسخ تشریحی:

ابتدا دورهٔ تناوب را محاسبه می‌کنیم و سپس با کمک آن سرعت و انرژی جنبشی را به‌دست می‌آوریم:

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow 30 = \frac{60}{T} \Rightarrow T = 2s$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 2}{2} = 2\pi(\frac{m}{s})$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times (2\pi)^2 = 2/5 \times 4\pi^2 = 10\pi^2 (J)$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

۱۵- خودرویی به جرم $۱۵۰۰kg$ روی سطح افقی با تندی ثابت، یک مسیر دایره‌ای به شعاع $۳۷/۵m$ را دور می‌زند. اگر بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی برابر با $۹۰۰۰N$ باشد، کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟

الف ـ اگر خودرو با تندی $۱۴\frac{m}{s}$ حرکت کند، نمی‌لغزد.

ب ـ نیروی مرکزگرای وارد بر خودرو در این مسیر می‌تواند $۸۰۰۰N$ باشد.

ج ـ بیشینهٔ شتاب مرکزگرای خودرو $۶\frac{m}{s^۲}$ است.

۱) «الف» و «ب» ۲) «الف» و «ج» ۳) «ب» و «ج» ۴) «الف»، «ب» و «ج»

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۳ ـ ۱۲۰۲)

بررسی موارد:

الف و ب) در این سؤال نیروی مرکزگرا، نیروی اصطکاک ایستایی است؛ بنابراین بیشینهٔ نیروی مرکزگرا، همان نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه است و داریم:

$$F_{net_{max}} = f_{s,max} = ۹۰۰۰N \quad (✓)$$

بیشینهٔ تندی خودرو بدون لغزیدن را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net_{max}} = \frac{mv_{max}^۲}{r} \Rightarrow ۹۰۰۰ = \frac{۱۵۰۰ \times v_{max}^۲}{۳۷/۵} \Rightarrow v_{max} = ۱۵\frac{m}{s} \quad (✓)$$

درنتیجه هر دو عبارت درست هستند.

ج) بیشینهٔ شتاب مرکزگرا را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{C_{max}} = \frac{F_{net_{max}}}{m} \Rightarrow a_{C_{max}} = \frac{۹۰۰۰}{۱۵۰۰} = ۶\frac{m}{s^۲} \quad (✓)$$

آزمون سراسری ریاضی ۱۴۰۲

۵۲- خودرویی به جرم ۲ تُن روی سطح افقی با تندی ثابت $۱۸\frac{km}{h}$ مسیر دایره‌ای به شعاع ۲۰ متر را دور می‌زند. نیروی مرکزگرای خودرو چند نیوتون است و کدام نیرو آن را تأمین می‌کند؟

۱) ۲۵۰۰ - نیروی اصطکاک جنبشی ۲) ۲۵۰۰ - نیروی اصطکاک ایستایی

۳) ۱۲۵۰ - نیروی اصطکاک جنبشی ۴) ۱۲۵۰ - نیروی اصطکاک ایستایی

پاسخ تشریحی:

در حرکت دایره‌ای خودرو در پیچ، نیروی اصطکاک ایستایی در نقش نیروی مرکزگراست و اندازهٔ آن برابر است با:

$$v = ۱۸\frac{km}{h} = ۵\frac{m}{s} \qquad m = ۲ton = ۲۰۰۰kg$$

$$F_C = m\frac{v^۲}{R} = ۲۰۰۰ \times \frac{۵^۲}{۲۰} = ۲۵۰۰N$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

آزمون ماز

۹/۲۹

فیزیک

۱- کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف: در یک ساعت عقربه‌ای، بسامد حرکت دوره‌ای عقربهٔ دقیقه‌شمار برابر $\frac{۱}{۶۰}\,Hz$ است.

ب: در یک ساعت عقربه‌ای، دورهٔ حرکت عقربهٔ ساعت‌شمار، ۷۲۰ برابر دورهٔ حرکت عقربهٔ ثانیه‌شمار است.

پ: ضربان قلب انسان را می‌توان یک نوسان دوره‌ای درنظر گرفت.

۱) «الف»، «ب» و «پ»　　۲) «ب» و «پ»　　۳) «الف» و «ب»　　۴) «الف» و «پ»

پاسخ: گزینهٔ ۲　　(آسان ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

بررسی موارد:

الف

عقربهٔ دقیقه‌شمار در هر ساعت یک دور کامل می‌زند؛ بنابراین دورهٔ حرکت آن $T = ۱h = ۳۶۰۰s$ است؛

درنتیجه بسامد آن برابر $f = \frac{۱}{T} = \frac{۱}{۳۶۰۰}\,Hz$ است. (✗)

ب

دورهٔ عقربهٔ ساعت‌شمار برابر ۱۲h و دورهٔ عقربهٔ ثانیه‌شمار برابر ۱min است، بنابراین نسبت آن‌ها برابر است با:

$\frac{۱۲h}{۱min} = \frac{۷۲۰min}{۱min} = ۷۲۰$ (✓)

پ

با توجه به این‌که ریتم و ضربان قلب در بازه‌های زمانی پی‌درپی تکرار می‌شود، حرکت آن یک نوسان دوره‌ای است. (✓)

نوسان دوره‌ای چیست؟

هر حرکت تکرارشونده‌ای که به‌صورت چرخه‌ای و پی‌درپی تکرار می‌شود، یک نوسان دوره‌ای است؛ مانند نفس کشیدن، ضربان قلب، بال زدن حشره و ... .

دورهٔ تناوب: مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا یک چرخه به‌طور کامل انجام شود، را دورهٔ تناوب می‌گوییم و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$T = \frac{t}{n}$$

T: دورهٔ تناوب (s)　　t: زمان سپری‌شده (s)　　n: تعداد چرخه

بسامد: تعداد چرخه‌های انجام‌شده در مدت یک ثانیه را بسامد می‌گوییم و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$f = \frac{n}{t}$$

f: بسامد (Hz)　　n: تعداد چرخه　　t: زمان سپری‌شده (s)

رابطهٔ دورهٔ تناوب و بسامد به‌صورت زیر است:

$$f = \frac{۱}{T}$$

گروه آموزشی ماز

۲- **در یک حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ A و بسامد f، در هنگام عبور نوسانگر از نقطهٔ تعادل، بزرگی سرعت و شتاب نوسانگر به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟**

۱) صفر، $Af^۲$　　۲) صفر، $۴\pi^۲Af^۲$　　۳) Af، صفر　　۴) $۲\pi Af$، صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

هنگام عبور از نقطهٔ تعادل، شتاب، صفر و تندی، بیشینه است.

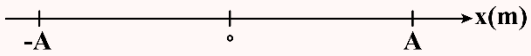
$$v = v_{max} = A\omega \xrightarrow{\omega = 2\pi f} v = 2\pi Af$$

$$a = 0$$

حرکت هماهنگ ساده

در یک حرکت هماهنگ ساده که معادلهٔ مکان ـ زمان آن به‌صورت $x = A\cos\omega t$ است، دانستن نکات زیر، ضروری است:

۱- پاره‌خط نوسان: اگر مکان نوسان‌کننده در زمان‌های مختلف را بر روی یک محور، نمایش دهیم ملاحظه می‌کنیم که مکان نوسان‌کننده بین دو مقدار $+A$ و $-A$ قرار می‌گیرد:

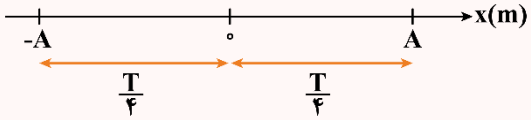


۲- نقطهٔ تعادل: در وسط پاره‌خطی که جسم بر روی آن نوسان می‌کند، قرار دارد؛ یعنی نقطهٔ O ، در این نقطه تندی نوسانگر دارای بیش‌ترین مقدار ممکن است:

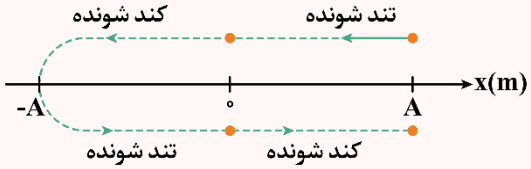
$$v_{max} = A\omega$$

۳- نقاط بازگشت: در دو انتهای پاره‌خط نوسان یعنی در مکان‌های $x = \pm A$ سرعت نوسانگر صفر شده و تغییر جهت می‌دهد، برای همین به این نقاط، نقاط بازگشت می‌گوییم.

۴- کم‌ترین مدت‌زمان لازم برای آن‌که نوسانگر فاصلهٔ بین نقاط بازگشت و تعادل را بپیماید برابر $\frac{T}{4}$ است و مقدار مسافت پیموده‌شده توسط نوسانگر برابر A است:



۵- در یک حرکت هماهنگ ساده، هرچه نوسانگر به نقطهٔ تعادل نزدیک‌تر شود، تندی آن بیش‌تر و هرچه نوسانگر به نقاط بازگشت نزدیک‌تر شود، تندی آن کم‌تر می‌شود:



۶- بیشینهٔ هریک از کمیت‌های مربوط به نوسانگر از روابط زیر به‌دست می‌آید:

مکان بیشینه: $x_{max} = A$

تندی بیشینه: $v_{max} = A\omega$

شتاب بیشینه: $a_{max} = A\omega^2$

نیروی بیشینه: $F_{max} = mA\omega^2$

تکانهٔ بیشینه: $p_{max} = mv_{max} = mA\omega$

گروه آموزشی ماز

۳- معادلهٔ مکان ـ زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده در SI به‌صورت $x = 0/2\cos 50\pi t$ است. چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد نوسانگر صحیح است؟

الف: بیش‌ترین تندی نوسانگر برابر $10\pi \frac{m}{s}$ می‌باشد.

ب: در فاصلهٔ $5cm$ از نقاط بازگشت، اندازهٔ شتاب نوسانگر $125\pi^2 \frac{m}{s^2}$ می‌باشد.

پ: در بازهٔ زمانی $t_1 = 0/02s$ تا $t_2 = 0/08s$ ، تندی متوسط نوسانگر برابر $20\frac{m}{s}$ می‌باشد.

ت: در بازهٔ زمانی دلخواه به‌اندازهٔ $\Delta t = \frac{1}{150}s$ ، بیش‌ترین جابه‌جایی طی‌شدهٔ نوسانگر $20cm$ می‌باشد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

در معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده ابتدا دامنهٔ نوسان (A) و بسامد زاویه‌ای (ω) و دورهٔ تناوب (T) را تعیین می‌کنیم:

$$x = ۰/۲\cos ۵۰\pi t$$

$$A = ۰/۲m \qquad \omega = ۵۰\pi(\frac{rad}{s})$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\omega} \xrightarrow{\omega=۵۰\pi} T = \frac{۴}{۱۰۰}s$$

بررسی موارد:

الف

بیش‌ترین تندی نوسانگر هنگام عبور از مرکز نوسان، با استفاده از رابطهٔ $v_{max} = A\omega$ به‌دست می‌آید، پس داریم:

$$v_{max} = A\omega \xrightarrow{A=۰/۲m\ ,\ \omega=۵۰\pi\frac{rad}{s}} v_{max} = ۰/۲\times ۵۰\pi = ۱۰\pi\frac{m}{s}$$ (✓)

ب

اندازهٔ شتاب نوسانگر در هر لحظه از رابطهٔ $|a| = \omega^۲x$ به‌دست می‌آید که در آن x فاصله از مرکز نوسان می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}\text{فاصله از نقاط بازگشت} = ۵cm = ۰/۰۵m \\ A = ۰/۲m\end{array}\right\} \Rightarrow x = (۰/۲ - ۰/۰۵)m = ۰/۱۵m$$

$$|a| = \omega^۲x \xrightarrow{\omega=۵۰\pi(\frac{rad}{s})\ ,\ x=۰/۱۵m} |a| = ۲۵۰۰\pi^۲ \times \frac{۱۵}{۱۰۰} = ۳۷۵\pi^۲\frac{m}{s^۲}$$ (✗)

پ

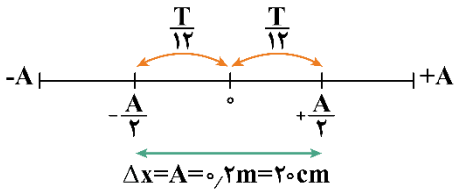
نوسانگر در هر $\frac{T}{۲}$ ثانیه، مسافتی به‌اندازهٔ ۲A طی می‌کند. از طرفی $\Delta t = ۰/۰۶s = \frac{۳T}{۲}$ است؛ پس مسافت طی‌شده برابر $L = ۶A$ می‌باشد، بنابراین برای محاسبهٔ تندی متوسط (s_{av}) داریم:

$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t} \xrightarrow{L=۶A=۱/۲m\ ,\ \Delta t=۰/۰۶s} s_{av} = \frac{۱/۲}{۰/۰۶} = ۲۰\frac{m}{s}$$ (✓)

ت

بیش‌ترین جابه‌جایی نوسانگر در بازهٔ زمانی دلخواه Δt، در اطراف مرکز نوسان رخ می‌دهد؛ یعنی نصف بازهٔ زمانی موردنظر قبل از $x = ۰$ و نصف آن بعد از $x = ۰$.

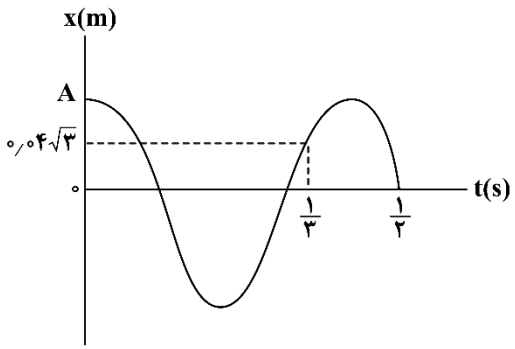
Δt داده‌شده $\frac{۱}{۶}$ دورهٔ تناوب می‌باشد، بنابراین داریم:



$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{۱}{۱۵۰}}{\frac{۴}{۱۰۰}} = \frac{۱}{۶}$$ (✓)

گروه آموزشی ماز

۴- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای مطابق شکل زیر است. بیشینهٔ شتاب نوسانگر چند واحد SI است؟



۱) $\pi^۲$

۲) $\sqrt{۳}\pi^۲$

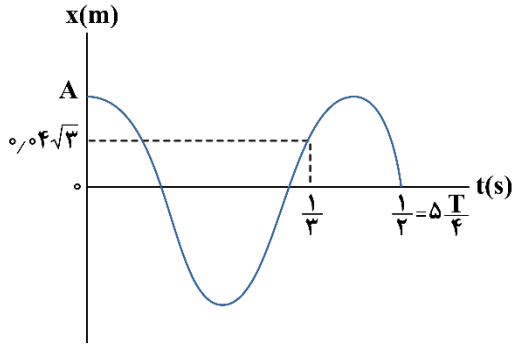
۳) $۲\pi^۲$

۴) $۲\sqrt{۳}\pi^۲$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۳)

گام اول:

با توجه به نمودار مکان ـ زمان داده‌شده ابتدا دورهٔ نوسان (T) و سپس بسامد زاویه‌ای (ω) را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{5T}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow T=\frac{4}{10}s\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}\omega=\frac{2\pi}{\frac{4}{10}}=5\pi(\frac{rad}{s})$$

گام دوم:

در لحظهٔ $t=\frac{1}{3}s$ مکان نوسانگر $0/04\sqrt{3}\,m$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{x=0/04\sqrt{3}\,m\ ,\ \omega=5\pi\frac{rad}{s}\ ,\ t=\frac{1}{3}s}\frac{4}{100}\sqrt{3}=A\cos(\frac{5\pi}{3})\Rightarrow A=\frac{8\sqrt{3}}{100}m$$

گام آخر:

اندازهٔ شتاب بیشینهٔ نوسانگر از رابطهٔ $|a_{max}|=A\omega^2$ به‌دست می‌آید؛ پس داریم:

$$|a_{max}|=A\omega^2\xrightarrow{A=\frac{8\sqrt{3}}{100}m\ ,\ \omega=5\pi\frac{rad}{s}}|a_{max}|=\frac{8\sqrt{3}}{100}\times 25\pi^2=2\sqrt{3}\pi^2\frac{m}{s^2}$$

گروه آموزشی ماز

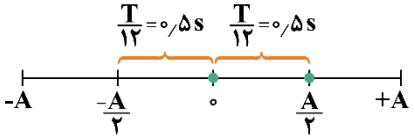
۵- یک نوسانگر ساده روی پاره‌خطی به طول ۴cm با دورهٔ ۶s نوسان می‌کند. در یک بازهٔ زمانی دلخواه $\Delta t=1s$، بیشینهٔ اندازهٔ جابه‌جایی نوسانگر چند سانتی‌متر است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۴ ۴) $4\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

چون بیشینهٔ جابه‌جایی را می‌خواهیم، باید حرکت در نزدیکی نقطهٔ تعادل باشد، زیرا سرعت نوسانگر در نزدیکی نقطهٔ تعادل بیش‌تر است.

در ادامه کافی است توجه کنیم مدت‌زمان $\Delta t=1s$، $\frac{1}{6}$ دوره است.

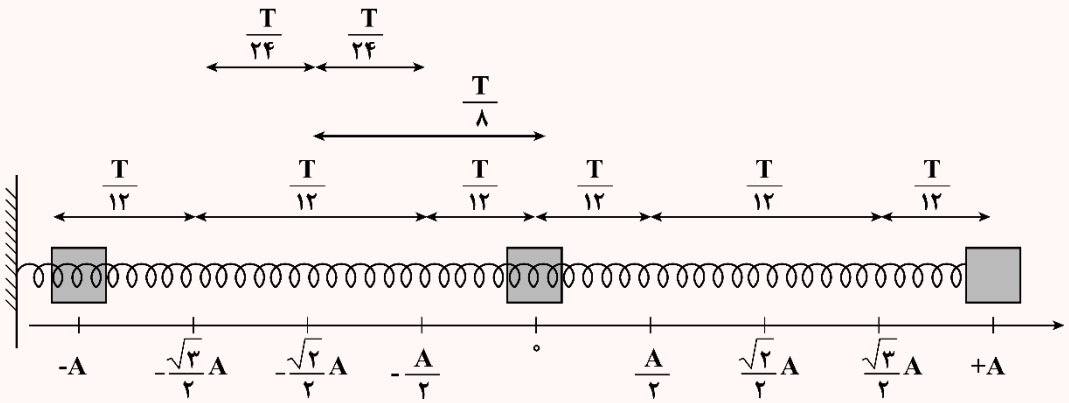


$$|\Delta x|=\left|\frac{-A}{2}-\frac{A}{2}\right|=A\Rightarrow|\Delta x|=A=2cm$$

دقت کنید چون طول پاره‌خط نوسان ۴cm است، دامنه برابر ۲cm می‌باشد.

جدول جمع‌بندی حرکت هماهنگ ساده

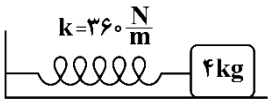
برای حل این سؤال جدول زیر را به‌خاطر بسپارید!



مکان	A	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$	$\frac{A}{۲}$	۰	$\frac{-A}{۲}$	$\frac{-\sqrt{۲}}{۲}A$	$\frac{-\sqrt{۳}}{۲}A$	$-A$
سرعت	۰	$\pm\frac{۱}{۲}v_{max}$	$\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_{max}$	$\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}v_{max}$	$\pm v_{max}$	$\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}v_{max}$	$\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_{max}$	$\pm\frac{۱}{۲}v_{max}$	۰
شتاب	$-a_{max}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}a_{max}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}a_{max}$	$-\frac{۱}{۲}a_{max}$	۰	$\frac{۱}{۲}a_{max}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}a_{max}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}a_{max}$	a_{max}
انرژی جنبشی	۰	$\frac{۱}{۴}K_{max}$	$\frac{۱}{۲}K_{max}$	$\frac{۳}{۴}K_{max}$	K_{max}	$\frac{۳}{۴}K_{max}$	$\frac{۱}{۲}K_{max}$	$\frac{۱}{۴}K_{max}$	۰
انرژی پتانسیل	U_{max}	$\frac{۳}{۴}U_{max}$	$\frac{۱}{۲}U_{max}$	$\frac{۱}{۴}U_{max}$	۰	$\frac{۱}{۴}U_{max}$	$\frac{۱}{۲}U_{max}$	$\frac{۳}{۴}U_{max}$	U_{max}
انرژی مکانیکی	E	E	E	E	E	E	E	E	E

گروه آموزشی ماز

۶- مطابق شکل زیر، جسم متصل به فنر درحال حرکت هماهنگ ساده بر روی سطح افقی بدون اصطکاک است. در مدت نیم دقیقه، جسم چند نوسان کامل انجام می‌دهد؟ $(\pi^۲ = ۱۰)$



۱) ۶۰
۲) ۱۵
۳) ۳۰
۴) ۴۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

گام اول:

دورهٔ حرکت جسم را می‌یابیم:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = ۲\pi\sqrt{\frac{۴}{۳۶۰}} = ۲\pi\times\frac{۱}{۳\pi} = \frac{۲}{۳}s$$

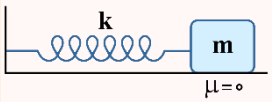
گام آخر:

تعداد نوسان کامل جسم در مدت نیم دقیقه (۳۰s) را می‌یابیم:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{۳۰}{\frac{۲}{۳}} = ۴۵$$

نوسان هماهنگ سادهٔ سامانهٔ جرم ـ فنر

۱- بسامد زاویه‌ای نوسان برابر است با:



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

۲- دورهٔ تناوب و بسامد نوسان برابر است با:

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} \rightarrow T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{۱}{T} \rightarrow f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

۳- برای مقایسهٔ دوره و بسامد دو نوسانگر می‌توان نوشت:

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{m_۲}{m_۱}\times\frac{k_۱}{k_۲}} \qquad \frac{f_۲}{f_۱} = \sqrt{\frac{m_۱}{m_۲}\times\frac{k_۲}{k_۱}}$$

گروه آموزشی ماز

۷- ژئوفیزیک‌دانی با استفاده از یک آونگ ساده به طول ۱۷cm که ۷۲ نوسان کامل را در ۶۰s انجام می‌دهد، شتاب گرانش زمین را در مکانی خاص تعیین می‌کند. وی مقدار شتاب گرانش را در این مکان تقریباً چند متر بر مربع ثانیه به‌دست می‌آورد؟ $(\pi^۲ \simeq ۱۰)$

۱) ۹/۸
۲) ۹/۶
۳) ۱۰/۲
۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

گام اول:

دورهٔ تناوب آونگ را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{t}{n}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۷۲}=\frac{۵}{۶}s$$

گام آخر:

طبق رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، شتاب گرانش را به‌دست می‌آوریم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\xrightarrow[L=۱۷cm=۰/۱۷m]{T=\frac{۵}{۶}s\ ,\ \pi=\sqrt{۱۰}}\frac{۵}{۶}=۲\sqrt{۱۰}\times\sqrt{\frac{۰/۱۷}{g}}\Rightarrow\frac{۲۵}{۳۶}=۴\times۱۰\times\frac{۰/۱۷}{g}$$

$$\Rightarrow g=۴۰\times۰/۱۷\times\frac{۳۶}{۲۵}\simeq۹/۸\frac{N}{kg}$$

آونگ ساده

۱- دورهٔ تناوب یک آونگ ساده به طول L برابر است با:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

۲- برای مقایسهٔ دورهٔ تناوب دو آونگ ساده داریم:

$$T\propto\sqrt{\frac{L}{g}}\rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}\times\frac{g_۱}{g_۲}}$$

۳- گاهی سؤالات آونگ با سؤالات گرانش ترکیب می‌شوند. در این صورت باید شتاب گرانش را خودمان محاسبه کنیم.

$$\begin{cases}g=G\frac{M}{r^۲}\\T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\end{cases}\rightarrow T=۲\pi r\sqrt{\frac{L}{GM}}$$

در رابطهٔ فوق، r فاصله از مرکز سیاره و M جرم سیاره است.

گروه آموزشی ماز

۸- ساعتی آونگ‌دار (با آونگ ساده) در تهران تنظیم شده است. اگر این ساعت به منطقه‌ای در استوا برده شود ..... می‌افتد و اگر دمای آن افزایش یابد، ..... می‌افتد. (سیم آونگ را فلزی درنظر بگیرید و شتاب گرانش در استوا کم‌تر از تهران است.)

۱) عقب ـ عقب ۲) جلو ـ جلو ۳) عقب ـ جلو ۴) جلو ـ عقب

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

با افزایش دما، طول آونگ افزایش می‌یابد و طبق رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، دورهٔ آونگ افزایش می‌یابد، بنابراین ساعت، کندتر کار می‌کند و عقب می‌افتد.

با بردن ساعت به استوا، شتاب گرانش کاهش می‌یابد و طبق رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، دورهٔ آونگ افزایش می‌یابد، بنابراین ساعت بازهم کندتر کار می‌کند و دوباره عقب می‌افتد.

نکته

۱- دورهٔ تناوب یک آونگ ساده از رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ به‌دست می‌آید. در این رابطه، L طول آونگ و g شتاب گرانش است.

۲- در ساعت آونگ‌دار، هرگاه از عقب یا جلو افتادن ساعت صحبت شد، باید دورهٔ آونگ را مدنظر گرفته و به‌صورت زیر با آن برخورد کنیم:

الف) اگر دوره افزایش یابد ← ساعت عقب می‌افتد.

ب) اگر دوره کاهش یابد ← ساعت جلو می‌افتد.

گروه آموزشی ماز

۹- جسمی به جرم $1/0kg$ به فنری افقی با ثابت $4/0\frac{N}{cm}$ متصل است. فنر به‌اندازهٔ $9/0cm$ فشرده و سپس رها می‌شود و جسم روی سطح افقی بدون اصطکاک شروع به نوسان می‌کند. تکانهٔ بیشینهٔ جسم چند واحد SI است؟

۱) ۰/۹ ۲) ۱/۸ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

گام اول:

بسامد زاویه‌ای (ω) را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{400}{1}}=20\frac{rad}{s}$$

گام دوم:

بیشینهٔ سرعت نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{max}=A\omega\Rightarrow v_{max}=0/09\times20=1/8\frac{m}{s}$$

گام آخر:

بیشینهٔ تکانهٔ نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$p_{max}=mv_{max}\Rightarrow p_{max}=1\times1/8=1/8\frac{kg.m}{s}$$

نکته

اگر دامنهٔ نوسان یک سامانهٔ جرم ـ فنر برابر A باشد، بیشینهٔ کمیت‌های مختلف مربوط به نوسانگر از روابط زیر محاسبه می‌شود:

تندی بیشینه: $v_{max}=A\omega=A\sqrt{\frac{k}{m}}$

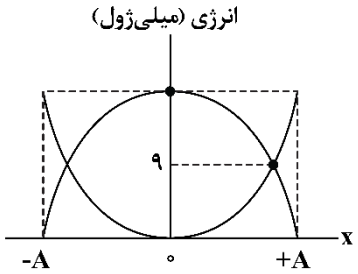
شتاب بیشینه: $a_{max}=A\omega^2=\frac{kA}{m}$

بزرگی نیروی خالص بیشینه: $F_{max}=mA\omega^2=kA$

بزرگی تکانهٔ بیشینه: $p_{max}=mv_{max}=mA\sqrt{\frac{k}{m}}=A\sqrt{km}$

گروه آموزشی ماز

۱۰- نمودار انرژی‌های جنبشی و پتانسیل یک نوسانگر ساده به جرم ۴۰۰ گرم برحسب مکان آن، مطابق شکل زیر است. بیشینهٔ تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۰/۳
۲) $0/3\sqrt{2}$
۳) ۰/۹
۴) $0/9\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۳)

گام اول:

با توجه به نمودار، در یک لحظه انرژی‌های پتانسیل و جنبشی برابر ۹mJ شده‌اند، بنابراین انرژی مکانیکی برابر است با:

$$E=U+K=9+9=18mJ=18\times10^{-3}J$$

گام آخر:

انرژی مکانیکی برابر بیشینهٔ انرژی جنبشی است، بنابراین:

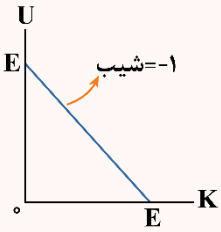
$$\begin{cases}E=K_{max}\\K_{max}=\frac{1}{2}mv_{max}^2\end{cases}\Rightarrow E=\frac{1}{2}mv_{max}^2\Rightarrow18\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times400\times10^{-3}v_{max}^2$$

$$\Rightarrow v_{max}^2=0/09\Rightarrow v_{max}=0/3\frac{m}{s}$$

انرژی در حرکت هماهنگ ساده

یک نوسانگر وزنه ـ فنر را درنظر بگیرید. این دستگاه دارای انرژی پتانسیل کشسانی (U) و انرژی جنبشی (K) است. در مورد انرژی نوسانگر به نکات زیر توجه کنید.

۱- مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است که مقدار ثابتی است.

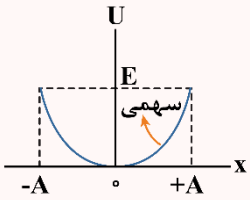


$$U+K=\overset{\text{ثابت}}{E}$$

۲- انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره‌شده در فنر برابر است با:

$$U=\frac{۱}{۲}kx^۲\xrightarrow{k=m\omega^۲}U=\frac{۱}{۲}m\omega^۲x^۲$$

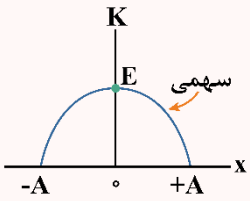
البته توجه داشته باشید که رابطهٔ $U=\frac{۱}{۲}kx^۲$ از کتاب درسی حذف شده است و طرح سؤال مستقیم از آن در کنکور مجاز نمی‌باشد، اینجا برای این‌که موضوع را بهتر متوجه شوید از این رابطه استفاده کرده‌ایم.



۳- بیشینهٔ انرژی پتانسیل کشسانی همان انرژی مکانیکی نوسانگر است.

$$E=U_{max}=\frac{۱}{۲}kA^۲=\frac{۱}{۲}m\omega^۲A^۲=۲\pi^۲A^۲f^۲m$$

۴- اگر انرژی پتانسیل را از انرژی مکانیکی کم کنیم، انرژی جنبشی نوسانگر به‌دست می‌آید.



$$\begin{cases}K=E-U\\U=\frac{۱}{۲}kx^۲\end{cases}\rightarrow K=E-\frac{۱}{۲}kx^۲=E-\frac{۱}{۲}m\omega^۲x^۲$$

البته اگر سرعت نوسانگر را بدانیم، می‌توانیم از رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ هم برای محاسبهٔ انرژی جنبشی کمک بگیریم.

۵- هنگامی‌که متحرک در $x=۰$ (مرکز نوسان) است، همهٔ انرژی به‌صورت جنبشی است. هنگامی‌که متحرک در $x=\pm A$ (نقاط بازگشتی) قرار دارد، همهٔ انرژی به‌صورت انرژی پتانسیل کشسانی است. هنگامی‌که متحرک در مکان $x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ است، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل برابرند و هریک نصف انرژی مکانیکی هستند.

گروه آموزشی ماز

۱۱- جسمی به جرم ۲۰۰g به فنری متصل است و روی سطح افقی بدون اصطکاک، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر بیشینهٔ انرژی پتانسیل ذخیره‌شده در فنر ۰/۹mJ باشد، لحظه‌ای که انرژی پتانسیل نوسانگر ۲۵ درصد بیش‌تر از انرژی جنبشی آن است، اندازهٔ سرعت نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۱۰}$ ۴) $۴\sqrt{۱۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

گام اول:

انرژی مکانیکی نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$E=U_{max}\xrightarrow{U_{max}=۰/۹mJ}E=۰/۹mJ=۹\times۱۰^{-۴}J$$

گام دوم:

انرژی جنبشی نوسانگر را در نقطهٔ موردنظر حساب می‌کنیم:

$$E=K+U\xrightarrow[۱۰۰\quad۱۰۰]{U=K+\frac{۲۵}{۱۰۰}K=\frac{۱۲۵}{۱۰۰}K=\frac{۵}{۴}K}E=K+\frac{۵}{۴}K=\frac{۹}{۴}K\xrightarrow{E=۹\times۱۰^{-۴}J}۹\times۱۰^{-۴}=\frac{۹}{۴}K\Rightarrow K=۴\times۱۰^{-۴}J$$

گام آخر:

اندازهٔ سرعت نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲\xrightarrow[m=۲۰۰g=۰/۲kg]{K=۴\times۱۰^{-۴}J}۴\times۱۰^{-۴}=\frac{۱}{۲}\times۰/۲\times v^۲\Rightarrow v^۲=۴۰\times۱۰^{-۴}\Rightarrow v=۲\sqrt{۱۰}\times۱۰^{-۲}\frac{m}{s}=۲\sqrt{۱۰}\frac{cm}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- معادلهٔ نیرو ـ مکان نوسانگر وزنه ـ فنری در SI به‌صورت $F=-\frac{۴\pi^۲}{۵}x$ است. اگر جرم نوسانگر ۲۰۰ گرم و انرژی مکانیکی آن در مکان $x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ برابر با $۴\pi^۲ mJ$ باشد، معادلهٔ مکان ـ زمان آن در SI کدام است؟

۱) $x=۰/۱\cos ۲\pi t$ ۲) $x=۰/۱\cos ۸\pi t$ ۳) $x=۰/۰۱\cos ۲\pi t$ ۴) $x=۰/۰۱\cos ۸\pi t$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

گام اول:

بسامد زاویه‌ای (ω) را به‌دست می‌آوریم. شکل کلی معادله نیرو ـ مکان در حرکت هماهنگ ساده به‌صورت $F=-m\omega^۲x$ می‌باشد، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}F=-\frac{۴\pi^۲}{۵}x\\ m=۲۰۰g=۰/۲kg\end{array}\right. \Rightarrow ۰/۲\times\omega^۲=\frac{۴\pi^۲}{۵}\Rightarrow\omega^۲=۴\pi^۲\Rightarrow\omega=۲\pi(\frac{rad}{s})$$

گام دوم:

دامنهٔ نوسان (A) را به‌دست می‌آوریم. انرژی مکانیکی نوسانگر در حرکت هماهنگ ساده در تمام نقاط ازجمله مکان $x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ یکسان است و داریم:

$$E=K_{max}\xrightarrow{K_{max}=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲\ ,\ E=۴\pi^۲\times۱۰^{-۳}J\ ,\ m=۰/۲kg\ ,\ \omega=۲\pi\frac{rad}{s}} ۴\pi^۲\times۱۰^{-۳}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۱۰}\times A^۲\times۴\pi^۲$$

$$\Rightarrow A^۲=۱۰^{-۲}\Rightarrow A=۰/۱m$$

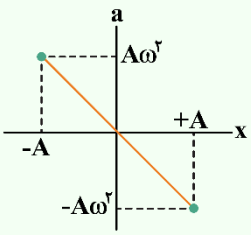
گام آخر:

معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر را به‌دست می‌آوریم. فرم کلی معادلهٔ مکان ـ زمان به‌صورت $x=A\cos\omega t$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}x=A\cos\omega t\\ A=۰/۱m\\ \omega=۲\pi\frac{rad}{s}\end{array}\right\}\Rightarrow x=۰/۱\cos ۲\pi t$$

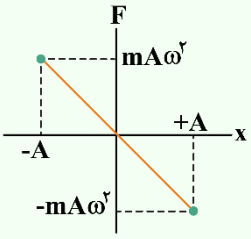
نکته

۱- رابطهٔ شتاب ـ مکان نوسانگر هماهنگ ساده به‌صورت زیر است:



$$a=-\omega^۲x$$

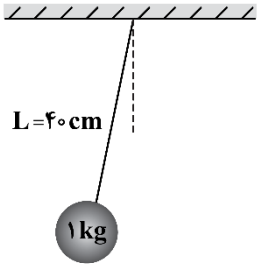
۲- رابطهٔ نیرو ـ مکان نوسانگر هماهنگ ساده به‌صورت زیر است:



$$F=-m\omega^۲x$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- آونگ سادهٔ شکل زیر، قادر به تشدید کدام سیستم وزنه ـ فنر می‌باشد؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$



(۱) $k=۱۵۰\frac{N}{m}$ ، ۱kg

(۲) $k=۱۰۰\frac{N}{m}$ ، ۴kg

(۳) $k=۲۰۰\frac{N}{m}$ ، ۲kg

(۴) $k=۳۰۰\frac{N}{m}$ ، ۲kg

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

نکته

برای آن‌که دو سیستم قادر به تشدید یکدیگر باشند، باید بسامد حرکت هماهنگ ساده آن‌ها با یکدیگر برابر باشد.

گام اول:

بسامد گلولهٔ آونگ ساده را محاسبه می‌کنیم:

$$f_{\text{آونگ}}=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۱۰}{۰/۴}}=\frac{۵}{۲\pi}Hz$$

گام آخر:

حال، بسامد حرکت ۴ سیستم وزنه ـ فنر را می‌یابیم:

$$f_{\text{وزنه ـ فنر}}=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f_۱=\frac{\sqrt{۱۵۰}}{۲\pi}Hz$$

$$f_۲=\frac{۵}{۲\pi}Hz$$

$$f_۳=\frac{۵}{\pi}Hz$$

$$f_۴=\frac{\sqrt{۱۵۰}}{۲\pi}Hz$$

بنابراین سیستم وزنه ـ فنر گزینهٔ (۲) دارای بسامد حرکت یکسان با آونگ ساده بوده و آونگ قادر به تشدید آن خواهد بود.

تشدید

۱- بسامد طبیعی:

اگر یک سامانهٔ جرم ـ فنر یا یک آونگ ساده را از وضع تعادل خارج کرده و رها کنیم با بسامد معیّنی شروع به نوسان می‌کند که به بسامد این حرکت، بسامد طبیعی گویند و با $f_۰$ نشان داده می‌شود.

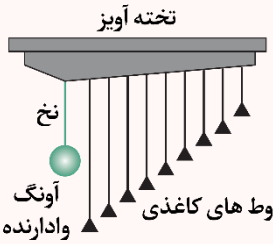
۲- نوسان واداشته:

اگر به‌وسیلهٔ اعمال یک نیروی خارجی، نوسانگرهایی مانند سامانهٔ جرم ـ فنر یا آونگ ساده را وادار به حرکت کنیم، حرکت انجام‌شده را نوسان واداشته می‌گویند و بسامد آن را با f_d نشان می‌دهند.

۳- تشدید:

اگر به یک نوسانگر، یک نیروی خارجی دوره‌ای وارد شود و بسامد نیروی خارجی (f_d) برابر بسامد طبیعی نوسانگر ($f_۰$) باشد، دامنهٔ نوسان‌های جسم، بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود که به این پدیده، تشدید یا رزونانس می‌گویند.

برای بررسی پدیدهٔ تشدید از وسیلهٔ آزمایشگاهی مقابل استفاده می‌شود که به آن آونگ‌های **بارتون** می‌گویند. در این آزمایش اگر آونگ وادارنده شروع به نوسان کند، انرژی آن از طریق نخ به سایر آونگ‌ها منتقل شده و همگی شروع به حرکت می‌کنند



اما آونگی که با آونگ وادارنده هم‌طول است با دامنهٔ بیش‌تری حرکت خواهد کرد، زیرا طبق رابطهٔ $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$ آونگ‌های هم‌طول دارای بسامد و بسامد زاویه‌ای یکسانی هستند و درنتیجه در آونگی که با آونگ وادارنده هم‌طول است، تشدید روی می‌دهد.

۱- **گزینهٔ «۴»** *(سعید تیزرو)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) اتیلن گلیکول با فرمول شیمیایی CH_2OHCH_2OH دارای ۹ پیوند اشتراکی و ۶ اتم هیدروژن می‌باشد.

تعداد پیوندهای اشتراکی در اتیلن گلیکول : $\frac{(2\times4)+(6\times1)+(2\times2)}{2}=9$

$\frac{9}{6}=1/5$

۲) مطابق نمودار صفحهٔ ۳ کتاب درسی این جمله صحیح است.

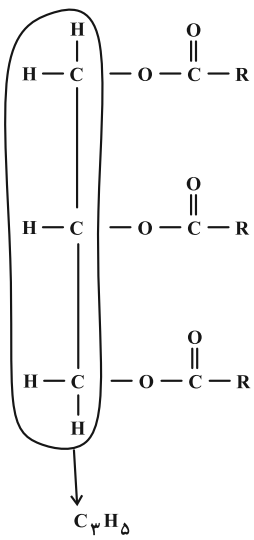
۳) مخلوط آب، روغن و صابون یک کلوئید محسوب شده و برخلاف مخلوط شربت معده که سوسپانسیون محسوب می‌شود، پایدار است.

۴) طبق مطالب صفحهٔ ۵ کتاب درسی مولکول‌های عسل حاوی شمار قابل توجهی گروه هیدروکسیل هستند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۳ تا ۵ و ۷)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

با توجه به ساختار کلی استرهای سه عاملی که به صورت زیر می‌باشد، می‌توان گفت:



$$\begin{array}{l} C_{57}H_{104}O_6 \\ -C_3H_5 \\ \hline C_{54}H_{99}O_6 \end{array}$$

برای به دست آوردن فرمول RCOO:

$C_{54}H_{99}O_6 \div 3 \Rightarrow C_{18}H_{33}O_2$ یا $C_{17}H_{33}COO$

بنابراین اسید چرب سازندهٔ آن $C_{17}H_{33}COOH$ و صابون مربوطه $C_{17}H_{33}COONa$ خواهد بود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ و ۶)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

بررسی موارد:

آ) درست

$$\begin{cases} \text{اوره } CO(NH_2)_2 \text{ جرم مولی} = 60\,g.mol^{-1} \\ \text{اتیلن گلیکول } C_2H_6O_2 \text{ جرم مولی} = 62\,g.mol^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{اتیلن } C_2H_4 \text{ جرم مولی} = 28\,g.mol^{-1} \\ \text{اتان } C_2H_6 \text{ جرم مولی} = 30\,g.mol^{-1} \end{cases}$$

ب) نادرست؛ باید از آب که حلالی قطبی است استفاده کرد.

پ) نادرست؛ چربی‌ها را می‌توان مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلندزنجیر دانست نه پلی‌استر بلند زنجیر.

ت) نادرست؛ مخلوط حاصل پایدار و ناهمگن است. (کلوئیدها مخلوط‌هایی ناهمگن‌اند.)

ث) درست؛ زیرا صابون با یون Ca^{2+} موجود در این آب رسوب می‌نماید.

$$2RCOONa(aq)+CaCl_2(aq)\rightarrow (RCOO)_2Ca(s)+2NaCl(aq)$$

Cl^- آنیون همراه با Ca^{2+} می‌باشد که در آب حضور دارد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۴، ۵، ۷ تا ۹)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا جمشیری)*

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$2RCOONa(aq)+MgCl_2(aq)\rightarrow (RCOO)_2Mg(s)+2NaCl(aq)$$

به ازای هر مول NaCl در آب، ۲ مول یون ($Cl^-(aq)$ و $Na^+(aq)$) حاصل می‌شود؛ با استفاده از شمار مول یون‌های تولید شده و جرم صابون مصرفی، جرم مولی صابون را به دست می‌آوریم.

روش اول: جرم مولی صابون $= M$

$$۲۰۰۰\,g\ RCOONa \times \frac{۱\,mol\ RCOONa}{M\ g\ RCOONa} \times \frac{۲\,mol\ NaCl}{۲\,mol\ RCOONa} \times \frac{۲\,mol\ \text{یون}}{۱\,mol\ NaCl} = ۱۶\,mol\ \text{یون}$$

$$\Rightarrow \frac{۲۰۰۰ \times ۲ \times ۲}{M \times ۲} = ۱۶ \Rightarrow M = ۲۵۰\,g.mol^{-۱}$$

روش دوم:

$$\frac{۲۰۰۰}{۲ \times M} = \frac{۱۶}{۲ \times ۲} \Rightarrow M = ۲۵۰\,g.mol^{-۱}$$

حال با توجه به این‌که فرمول عمومی صابون جامد که دارای زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده است به صورت $C_nH_{۲n+۱}COONa$ است و با دانستن جرم مولی صابون می‌توان تعداد هیدروژن‌ها را محاسبه کرد.

$$۱۴n + ۶۸ = ۲۵۰ \Rightarrow n = ۱۳ \xrightarrow{\text{پس}} \text{تعداد هیدروژن} = ۲۷$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵، ۶، ۸ و ۹)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

موارد (ب) و (پ) درست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست؛ وجود آنزیم در صابون‌ها، درصد لکه‌های باقی‌مانده روی لباس را کاهش می‌دهد.

ب) درست؛ با افزایش غلظت یون $Mg^{۲+}$ در آب سخت قدرت پاک‌کنندگی صابون کاهش یافته و ارتفاع کف حاصل نیز کاهش می‌یابد.

پ) درست؛ با افزایش دما قدرت پاک‌کنندگی یک صابون افزایش می‌یابد.

ت) نادرست؛ پارچه‌ای که از پلیمری شدن الکل‌ها و اسیدهای دو عاملی به دست می‌آید پارچهٔ پلی‌استری است که نسبت به پارچه‌های نخی چسبندگی بیشتری با لکه‌های چربی دارند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۸ و ۹)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی)*

می‌دانیم در ساختار پاک‌کنندهٔ صابونی، اتم Cl وجود ندارد، در نتیجه تمام اتم‌های کلر موجود در مخلوط متعلق به تری‌کلوزان می‌باشد. جرم تری‌کلوزان موجود در مخلوط را محاسبه می‌کنیم:

$$C_{۱۲}H_۷O_۲Cl_۳ \sim ۳Cl$$

$$?\,g\ C_{۱۲}H_۷O_۲Cl_۳ : ۲/۱\,mol\ Cl \times \frac{۱\,mol\ C_{۱۲}H_۷O_۲Cl_۳}{۳\,mol\ Cl} \times \frac{۲۹۰\,g\ C_{۱۲}H_۷O_۲Cl_۳}{۱\,mol\ C_{۱۲}H_۷O_۲Cl_۳} = ۲۰۳\,g\ C_{۱۲}H_۷O_۲Cl_۳$$

$$\Rightarrow \text{جرم پاک‌کنندهٔ صابونی} = ۳۳۵\,g - ۲۰۳\,g = ۱۳۲\,g\ RCOONa$$

$$۲RCOONa \sim ۱(RCOO)_۲Ca$$

$$?\,mol\ RCOONa = ۰/۲۵\,mol\,(RCOO)_۲Ca \times \frac{۲\,mol\ RCOONa}{۱\,mol\,(RCOO)_۲Ca} = ۰/۵\,mol\ RCOONa$$

۰/۵ مول $RCOONa$، ۱۳۲ g جرم دارد. در نتیجه جرم مولی آن برابر با $\frac{۱۳۲}{۰/۵} = ۲۶۴\,g.mol^{-۱}$ است.

$$C_nH_{۲n+۱}COONa \rightarrow M = ۱۲n + ۲n + ۱ + ۱۲ + ۳۲ + ۲۳ = ۲۶۴$$

$$\Rightarrow n = ۱۴$$

تعداد اتم‌های کربن بخش آنیونی این پاک‌کنندهٔ صابونی برابر با ۱۵ می‌باشد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ تا ۹)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا جمشیری)*

بررسی موارد نادرست:

مورد دوم: صابون‌ها با آلاینده‌ها برهم‌کنش دارند ولی پاک‌کنندهٔ خورنده علاوه بر برهم‌کنش، با آلاینده‌ها واکنش نیز می‌دهند.

مورد سوم: در واکنش مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، تولید گاز هیدروژن قدرت پاک‌کنندگی را افزایش می‌دهد.

مورد چهارم: فرمول شیمیایی آهک، CaO می‌باشد.

مورد پنجم: اسیدها با اغلب فلزات واکنش می‌دهند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۲ تا ۱۴)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

صابون تهیه شده از اسید چرب B، به دلیل سیرشده بودن زنجیرهیدروکربنی آن، نسبت به صابون تهیه شده از اسید چرب A، قدرت بیشتری در پاک‌کنندگی و ایجاد کف و همچنین سختی بیشتری دارد. پس محلول ظرف (۱)، مخلوط آب با صابون تهیه شده از اسید چرب B و محلول ظرف (۲)، مخلوط آب با صابون تهیه شده از اسید چرب A است. صابون حاصل از اسید چرب B، نه تنها قدرت پاک‌کنندگی بیشتری دارند، بلکه جرم مولی آن نیز کمتر از صابون حاصل از اسید چرب A است. بنابراین برای پاک‌کردن یک لکهٔ چربی مشخص، مقدار مورد نیاز از صابون تهیه شده از اسید چرب B کمتر است. زیرا در جرم‌های برابر، شمار مولکول‌های صابون بیشتری از آن وجود دارد و علاوه بر این قدرت پاک‌کنندگی آن نیز بیشتر است.

بررسی گزینهٔ «۴»:

اسید چرب A : $C_{19}H_{36}O_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{اختلاف شمار اتم‌های C و H} = 17 \\ \text{مخلوط ظرف (۲)} = \text{صابون حاصل} \end{cases}$$

اسید چرب B : $C_{16}H_{32}O_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{اختلاف شمار اتم‌های C و H} = 16 \\ \text{مخلوط ظرف (۱)} = \text{صابون حاصل} \end{cases}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵، ۶، ۸، و ۹)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(محبوبه بیک‌محمدی)*

موارد (الف) و (پ) صحیح هستند.

بررسی موارد:

الف) با توجه به این‌که مولکول‌های صابون از سمت زنجیرهٔ هیدروکربنی (R) با چربی جاذبه واندروالسی برقرار می‌کنند، بخش قطبی صابون ($-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O^-$) روی سطح خارجی لکهٔ چربی قرار می‌گیرد.

ب) چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلندزنجیر هستند؛ مولکول‌های اسیدچرب برخلاف استر بلندزنجیر توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارند.

پ) عناصر گوگرد و کلر (مادهٔ شیمیایی کلردار) به ترتیب برای از بین بردن قارچ‌های پوستی و افزایش خاصیت میکروب‌کشی به صابون اضافه می‌شوند.

ت) معادلهٔ انحلال ترکیب‌های ذکر شده در آب به صورت زیر است:

$$Li_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow 2Li^+(aq) + 2OH^-(aq)$$

$$N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

در اثر انحلال یک مول از هر ماده در آب، ۴ مول یون تولید می‌شود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵، ۸، ۱۱، ۱۲ و ۱۶)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

برای این منظور از محلول سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم استفاده می‌شود. این پاک‌کننده یک پاک‌کنندهٔ خورنده بوده و در واکنش با آب تولید گاز H_2 و گرما می‌نماید و کارایی پاک‌کننده را افزایش می‌دهد.

بررسی برخی از گزینه‌ها:

۱) زیرا کلوئیدها همانند محلول‌ها پایدار بوده و ته‌نشین نمی‌شوند و برخلاف محلول‌ها ناهمگن‌اند. کلوئیدها شبیه سوسپانسیون‌ها ناهمگن بوده و پخش نور دارند. به دلیل این شباهت‌ها و تفاوت‌ها رفتار کلوئیدها را می‌توان رفتاری بین سوسپانسیون و محلول‌ها در نظر گرفت.

۲) پاک‌کننده‌های غیرصابونی از مواد پتروشیمیایی طی واکنش‌های پیچیده در صنعت تولید می‌شوند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۳ و ۱۵)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

بررسی موارد:

آ) درست؛ این ترکیب در چربی کوهان شتر یافت می‌شود. به دلیل غلبه بخش ناقطبی به بخش قطبی در آب نامحلول است.

ب) درست؛ در ساختار آن ۶ اتم اکسیژن وجود دارد و هر اتم اکسیژن دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی است. به ازای هر گروه استری دو پیوند $C-O$ وجود دارد.

پ) درست $C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶ + ۳NaOH \xrightarrow{\Delta}$

$۳CH_۳(CH_۲)_{۱۶}COO^-Na^+ + CH_۲OHCHOHCH_۲OH$

ت) نادرست؛ این ترکیب یک استر ۳ عاملی است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(یاسر راش)*

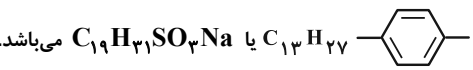
با توجه به مطالب کتاب درسی، مخلوط‌های (۱) و (۲) به ترتیب نشان‌دهندهٔ کلوئید و محلول هستند. دسته‌بندی مخلوط‌های ارائه شده به صورت زیر است:

- محلول: مخلوط آب و نمک
- کلوئید: شیر- ژله- رنگ پوششی
- سوسپانسیون: شربت خاک‌شیر- شربت معده- آب گل‌آلود

کلوئیدها مخلوط‌هایی «پایدار و ناهمگن» و محلول‌ها، مخلوط‌هایی «پایدار و همگن» هستند. بنابراین کلوئیدها و محلول‌ها در ویژگی «پایدار بودن» شباهت دارند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶ و ۷)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

ترکیب داده شده یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی است که فرمول آن به صورت $C_{۱۳}H_{۲۷}$  $SO_۳Na$ یا $C_{۱۹}H_{۳۱}SO_۳Na$ می‌باشد.

در بین عبارت‌های داده شده تنها عبارت آخر درست است.

بخش آبگریز این پاک‌کننده شامل زنجیر کربنی $(C_{۱۳}H_{۲۷})$ و حلقهٔ بنزنی $(C_۶H_۴)$ بوده و در مجموع ۳۱ اتم هیدروژن دارد. این ترکیب از ۵ عنصر، C، H، O، S و Na ساخته شده است. در حالی که صابون جامد دارای ۴ عنصر C، H، O و Na می‌باشد. با توجه به وجود ۳ پیوند دوگانه در ساختار این ترکیب، هر مول از آن با ۳ مول گاز $H_۲$ به‌طور کامل واکنش می‌دهد که جرم آن معادل با ۶ گرم خواهد بود. در این ترکیب ۳۱ اتم H و ۱۹ اتم C وجود دارد که نسبت شمار اتم‌های H به شمار اتم‌های C، $\frac{۳۱}{۱۹}$ بوده و کوچک‌تر از ۲ است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(کیارش معدنی)*

عبارت‌های (آ) و (ت) درست می‌باشند.

ب) آرنیوس قادر به مقایسهٔ قدرت اسیدها با یکدیگر نبود. هر چند عبارت از نظر علمی درست است.

پ) آرنیوس قادر به مقایسهٔ قدرت بازها با یکدیگر نبود. هر چند عبارت از نظر علمی درست است.

نکتهٔ مهم: آرنیوس صرفاً توانست ماهیت اسید و باز و مقایسهٔ آن‌ها با یکدیگر را انجام دهد و قادر به مقایسهٔ قدرت اسیدها با یکدیگر یا بازها با یکدیگر را نداشت.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(مجوبه بیک‌محمدی)*

با توجه به اطلاعات داده شده می‌توان دریافت:

$$?\ mol\ \text{یون} = ۴/۸۱۶\times۱۰^{۲۳}\ \text{یون} \times \frac{۱\ mol\ \text{یون}}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\ \text{یون}}$$

$$= ۰/۸\ mol\ \text{یون}$$

$$\text{مجموع غلظت یون‌ها} = \frac{n(mol)}{V(L)} = \frac{۰/۸}{۵} = ۰/۱۶\ mol.L^{-۱}$$

با توجه به معادلهٔ یونش اسید HA در آب: $HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$، غلظت هر یک از یون‌ها برابر ۰/۰۸ مولار است. اکنون می‌توان با توجه به رابطهٔ زیر درجهٔ یونش این اسید را محاسبه نمود.

$$\alpha = \frac{[H^+]}{M} = \frac{۰/۰۸}{۰/۴} = ۰/۲$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست

۲) درست؛ اغلب اسیدها ضعیف و تنها برخی از آن‌ها قوی هستند.

۳) غلظت اولیهٔ اسید برابر ۰/۴ مولار بوده که ۰/۰۸ مولار آن یونیده شده است، در نتیجه غلظت مولکول‌های اسید برابر $(۰/۴ - ۰/۰۸ = ۰/۳۲)$ مولار است.

۴) با توجه به این‌که مجموع غلظت یون‌ها در اسید HA $(۰/۱۶\ mol.L^{-۱})$ از مجموع غلظت یون‌ها در محلول هیدروکلریک اسید $(۲\times۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱})$ بیشتر است، رسانایی الکتریکی محلول دارای اسید HA بیشتر است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۴ و ۱۶ تا ۲۰)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(یاسر راش)*

هر دو ماده، رسانای یونی هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با توجه به شکل، درجهٔ یونش اسید HA برابر $۰/۲$ و درجهٔ یونش اسید HB برابر ۱ است:

$$\text{درجهٔ یونش } (\alpha) = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل شده}}$$

$$\Rightarrow \alpha_{HA} = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$$

بنابراین مجموع غلظت یون‌ها در محلول‌ها برابر است با:

$$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq)$$

$$HA \text{ مجموع غلظت یون‌ها در محلول} = ۲\alpha_{HA} M_{HA}$$

$$= ۲\times ۰/۲ \times ۰/۲ = ۰/۰۸ mol.L^{-۱}$$

$$HB(aq) \rightarrow H^+(aq) + B^-(aq)$$

$$HB \text{ مجموع غلظت یون‌ها در محلول} = ۲\alpha_{HB} M_{HB}$$

$$= ۲\times ۱ \times ۰/۱ = ۰/۲ mol.L^{-۱}$$

بنابراین رسانایی الکتریکی نمونهٔ محلول اسید قوی‌تر HB بیشتر است.

۲) HB مربوط به یک اسید قوی با $\alpha = ۱$ است، در حالی‌که نیتروواسید $(HNO_۲)$ یک اسید ضعیف است.

۳) HA یک مادهٔ الکترولیت ضعیف است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۶ تا ۲۰)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(روزبه رضوانی)*

یونش اسید و بازهای ضعیف در آب برگشت‌پذیر بوده و به خاطر ثابت یونش کوچک آن‌ها مقدار اسید یا باز یونیده نشده بیشتر از یون‌های آب پوشیده است. اسید و بازهای ضعیف در میان ترکیبات بالا عبارتند از اسید سرکه (استیک اسید)، باز موجود در شیشه پاک‌کن (آمونیاک)، اسید موجود در ریواس.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۵، ۱۶ و ۱۹ تا ۲۲)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(پیمان خوابوی‌مجد)*

$$۰/۴۱۴ g\ C_۷H_۶O_۳ \times \frac{۱ mol\ C_۷H_۶O_۳}{۱۳۸ g\ C_۷H_۶O_۳} = ۰/۰۰۳ mol\ C_۷H_۶O_۳$$

$$[C_۷H_۶O_۳] = \frac{۰/۰۰۳}{۰/۵} = ۰/۰۰۶ mol.L^{-۱}$$

$$K_a = \frac{[H^+]^۲}{M - [H^+]} \Rightarrow ۱۰^{-۳} = \frac{[H^+]^۲}{۰/۰۰۶ - [H^+]}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰[H^+]^۲ + [H^+] - ۰/۰۰۶ = ۰$$

$$\Rightarrow [H^+] = ۰/۰۰۲ mol.L^{-۱}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(مجوبه بیک‌محمدی)*

تنها مورد دوم صحیح است.

بررسی موارد:

مورد اول: گسترهٔ تغییر pH در محلول‌های آبی و در دمای اتاق از ۰ تا ۱۴ است و در این شرایط pH محلول‌های خنثی برابر ۷ است.

مورد دوم: در محلول‌های آبی و در دمای معین، با افزایش غلظت یون H^+ به همان نسبت غلظت آنیون OH^- کاهش خواهد یافت.

مورد سوم: با توجه به اطلاعات داده شده pH آب را پس از حل کردن $HCl(g)$ در آن محاسبه می‌کنیم.

$$?mol\ HCl = ۶/۷۲ L\ HCl \times \frac{۱ mol\ HCl}{۲۲/۴ L\ HCl} = ۰/۳ mol\ HCl$$

$$[H^+] = [HCl] = \frac{n}{V} = \frac{۰/۳ mol}{۲ L}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(۱۵\times ۱۰^{-۲})$$

$$= -(\log ۵ + \log ۳ + \log ۱۰^{-۲}) = -(۰/۷ + ۰/۵ - ۲) = ۰/۸$$

در ابتدا pH آب برابر ۷ بوده است و در نتیجه pH آن به اندازهٔ $۶/۲$ $(۷ - ۰/۸)$ واحد تغییر کرده است.

مورد چهارم: بدون دانستن حجم محلول‌ها نمی‌توان در مورد شمار یون‌های موجود در دو محلول اظهارنظر نمود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

$$K_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲KOH(aq)$$

$$pH = ۱۳/۷ \ , \ [H^+] = ۱۰^{-۱۳/۷} = ۲\times ۱۰^{-۱۴} mol.L^{-۱}$$

$$[H^+][OH^-] = ۱\times ۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [OH^-] = ۵\times ۱۰^{-۱} mol.L^{-۱}$$

$$M_{KOH} = ۰/۵ = \frac{n}{۰/۵ L} \Rightarrow n_{KOH} = ۰/۲۵ mol$$

$$?g\ K_۲O = ۰/۲۵ mol\ KOH \times \frac{۱ mol\ K_۲O}{۲ mol\ KOH}$$

$$\times \frac{۹۴ g\ K_۲O}{۱ mol\ K_۲O} = ۱۱/۷۵ g\ K_۲O$$

$$HA : [H^+] = M.\alpha \Rightarrow [H^+] = ۰/۰۲ \times ۰/۰۴$$

$$= ۸\times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$$

$$pH = -\log(۸\times ۱۰^{-۴}) \Rightarrow pH = ۳/۱ \Rightarrow ۱۳/۷ - ۳/۱ = ۱۰/۶$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(حمید زهی)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) رسانایی الکتریکی محلول‌های الکترولیت به غلظت اولیه الکترولیت نیز بستگی دارد. همچنین می‌دانیم که HCl اسید قوی و HF اسیدی ضعیف می‌باشد ولی میزان یون تفکیک شده HCl و HF وابسته به غلظت اولیه آن‌ها است.

۳) برای مثال رسانایی الکتریکی محلول یک مولار $NaCl$ و Na_2SO_4 در دمای یکسان با هم برابر نیست.

۴) در ساختار $NaCl(s)$، یون‌ها آزادی حرکت ندارند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(سعید تیزرو)*

با توجه به مقادیر ثابت یونش در جدول صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی هیدروکلریک اسید قوی‌تر از نیتریک اسید است. در شرایط یکسان هر چه یک اسید قوی‌تر باشد، قطعاً غلظت یون هیدرونیوم در محلول آن بیشتر خواهد بود.

بررسی برخی گزینه‌ها:

فرمول کربوکسیلیک اسیدها با R سیر شده به صورت $C_nH_{2n}O_2$ می‌باشد و نسبت تعداد کربن به هیدروژن در آن‌ها همواره برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۴)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا جمشیدی)*

با توجه به رابطهٔ $K_a = \frac{[H^+]^2}{M-[H^+]}$، بین K_a و غلظت اسید (M)، رابطهٔ مستقیمی وجود ندارد و K_a فقط به دما وابسته است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۴)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

عبارت‌های (پ)، (ت) و (ث) درست می‌باشند.

بررسی برخی از عبارت‌ها:

الف) سرانجام مقدار واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌شود ولی لزوماً با هم برابر نمی‌شود.

ب) HNO_3 (نیتریک اسید) یک اسید قوی است و واکنش یونش آن تعادلی نمی‌باشد.

پ) ثابت تعادل (K) یک واکنش تعادلی فقط تابع دما است.

ت) در باران معمولی H_2CO_3 و در باران اسیدی که فقط H_2SO_4 دو پروتونه است در باران اسیدی اسیدهای قوی HNO_3 و H_2SO_4 وجود دارند.

ث) زیرا در شرایط یکسان قدرت اسیدی استیک اسید از فورمیک اسید کمتر است و هر چه قدرت اسیدی کمتر باشد، در شرایط یکسان، مجموع شمار یون‌ها و مولکول‌ها کمتر است.

مجموع غلظت یون‌ها و مولکول‌های یک اسید ضعیف:

$$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq)$$

غلظت اولیه : $M \quad - \quad -$

غلظت ثانویه : $M-M\alpha \quad M\alpha \quad M\alpha$

$$\Rightarrow (M-M\alpha)+M\alpha+M\alpha = M+M\alpha$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۴)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(یاسر راش)*

ابتدا ثابت یونش و درجهٔ یونش اسید فرضی HA را قبل از رقیق شدن حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} \alpha_{HA} = \frac{2}{2+8} = 0/2 \\ M_{HA} = \frac{n}{V} = \frac{10\times 0/03}{0/6} = 0/5\,mol.L^{-1} \\ K_a = \frac{\alpha^2 M}{1-\alpha} = \frac{(0/2)^2\times 0/5}{1-0/2} = \frac{1}{40}\,mol.L^{-1} \end{cases}$$

با افزایش صد در صدی α، مقدار آن به ۰/۴ می‌رسد. از آنجا که دما ثابت است، K_a بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابراین در محلول رقیق داریم:

$$\alpha_{HA}=۰/۴ \Rightarrow K_a=\frac{(۰/۴)^۲\times M_{HA}}{۱-۰/۴}=\frac{۱}{۴۰}$$

$$\Rightarrow M_{HA}=\frac{۳}{۳۲}\,mol.L^{-۱}$$

بنابراین در محلول رقیق غلظت محلول به $\frac{۳}{۳۲}$ مولار می‌رسد. با توجه به رابطهٔ $M_۱V_۱=M_۲V_۲$ می‌توان نوشت:

$$۰/۵\times ۶۰۰=\frac{۳}{۳۲}\times V_۲ \Rightarrow V_۲=۳۲۰۰\,mL$$

$$\Rightarrow \text{حجم آب مقطر افزوده شده}=۳۲۰۰-۶۰۰=۲۶۰۰\,mL$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲ و ۳۳ تا ۳۶)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمحمد کنگرانی)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) پاک‌کننده‌های خورنده ممکن است اسیدی یا بازی باشند و pH کمتر یا بیشتر از ۷ داشته باشند.

۳) رسوب‌های چربی دارای خاصیت اسیدی هستند و در اثر واکنش با بازها فراورده‌های محلول در آب تولید می‌کنند.

۴) گاز هیدروژن ایجاد شده با ایجاد فشار فیزیکی، قدرت پاک‌کنندگی را افزایش می‌دهد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۲، ۱۳ و ۲۸ تا ۳۲)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(محسن میمونی)*

برای حل سؤال ابتدا باید غلظت یون هیدرونیوم را در هر دو محلول اولیه محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} HA \text{ در } [H^+]=۱۰^{-۳/۷} \\ \Rightarrow [H^+]=۱۰^{۰/۳}\times ۱۰^{-۴}=۲\times ۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱} \\ HB \text{ در } [H^+]=۱۰^{-۴/۷}=۱۰^{۰/۳}\times ۱۰^{-۵}=۲\times ۱۰^{-۵}\,mol.L^{-۱} \end{cases}$$

حال برای محاسبهٔ غلظت یون هیدرونیوم در محلول حاصل از مخلوط آن‌ها داریم:

$$[H^+]_{\text{نهایی}}=\frac{\text{mol } H^+}{\text{حجم کل محلول}}$$

$$=\frac{۲\times ۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱}\times ۰/۰۲L+۲\times ۱۰^{-۵}\,mol.L^{-۱}\times ۰/۰۳L}{(۰/۰۲+۰/۰۳)L}$$

$$=۹/۲\times ۱۰^{-۵}\,mol.L^{-۱}$$

برای محاسبهٔ pH محلول داریم:

$$pH=-\log[H^+]$$

$$pH=-\log(۹/۲\times ۱۰^{-۵})$$

$$pH\simeq -(\log ۹+\log ۱۰^{-۵})=-(۲\log ۳+\log ۱۰^{-۵})$$

$$=(-۲)\times ۰/۴۸+۵=۴/۰۴\simeq ۴$$

توجه: مقدار عددی $\log ۹/۲$ با $\log ۹$ اختلاف بسیار کمی دارد، پس به جای $\log ۹/۲$، $\log ۹$ را محاسبه می‌کنیم.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴، ۲۵ و ۳۳ تا ۳۶)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(روزبه رضوانی)*

$$pH_{\text{لوله بازکن}}=۱۳/۴ \Rightarrow [H^+]=۱۰^{-۱۳/۴}=۱۰^{۰/۶}\times ۱۰^{-۱۴}$$

$$=۴\times ۱۰^{-۱۴}\,mol.L^{-۱}$$

$$pH_{\text{شیشه‌پاک‌کن}}=۱۰/۷ \Rightarrow [H^+]=۱۰^{-۱۰/۷}=۱۰^{۰/۳}\times ۱۰^{-۱۱}$$

$$=۲\times ۱۰^{-۱۱}\,mol.L^{-۱}$$

محلول لوله‌بازکن pH بزرگ‌تری دارد و از طرفی محلول لوله بازکن باز قوی NaOH است ولی در شیشه‌پاک‌کن $NH_۳$ وجود دارد که یک باز ضعیف است.

$$\frac{[H^+]_{\text{لوله بازکن}}}{[H^+]_{\text{شیشه پاک‌کن}}}=\frac{۴\times ۱۰^{-۱۴}}{۲\times ۱۰^{-۱۱}}=۰/۰۰۲$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(فرشید مرادی)*

$$pH = ۱/۵ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱/۵} = ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{۰/۵}$$

$$= ۳ \times ۱۰^{-۲} mol.L^{-۱}$$

$$pH = ۲/۷ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲/۷} = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۰/۳}$$

$$= ۲ \times ۱۰^{-۳} mol.L^{-۱}$$

$$۰/۰۳ - ۰/۰۰۲ = ۰/۰۲۸ mol.L^{-۱} \xrightarrow{\times ۰/۵L} ۰/۰۱۴ mol\ H^+$$

$$\sim ۰/۰۱۴ mol\ HCl$$

$$۰/۰۱۴ mol\ HCl \times \frac{۱ mol\ NaHCO_۳}{۱ mol\ HCl} \times \frac{۸۴ g\ NaHCO_۳}{۱ mol\ NaHCO_۳}$$

$$\times \frac{۱۰۰۰ mg\ NaHCO_۳}{۱ g\ NaHCO_۳} = ۱۱۷۶ mg\ NaHCO_۳$$

راه دوم:

$$\frac{۰/۰۱۴}{۱} = \frac{x \times ۱۰^{-۳}}{۱ \times ۸۴} \Rightarrow x = ۱۱۷۶ mg\ NaHCO_۳$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۳۲)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

می‌دانیم گل ادریسی در خاک‌های با pH بازی به رنگ سرخ شکوفا می‌شود، در نتیجه محلول نهایی بازی است.

شمار مول یون‌ها در محلول اسید اولیه:

$$pH = ۰/۷ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۰/۷} = ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{۰/۳} = ۰/۲ mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = [Cl^-] = ۰/۲ mol.L^{-۱} \Rightarrow mol\ H^+ = mol\ Cl^-$$

$$= ۰/۲ \times \frac{۱}{۲} = ۰/۱$$

شمار مول یون‌ها در محلول باز اولیه:

$$pH = ۱۳/۵ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱۳/۵} mol.L^{-۱}$$

$$\xrightarrow{[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}} [OH^-] = ۱۰^{-۰/۵} mol.L^{-۱}$$

$$\Rightarrow [OH^-] = ۱۰^{-۰/۵} = ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{۰/۵} = ۰/۳ mol.L^{-۱}$$

$$[OH^-] = [Na^+] = ۰/۳ mol.L^{-۱} \Rightarrow mol\ OH^- = mol\ Na^+$$

$$= ۰/۳ \times V \times ۱۰^{-۳} mol$$

می‌دانیم که اسیدها و بازهای قوی در مخلوط شدن با همدیگر طبق واکنش $H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_۲O(l)$ خنثی می‌شوند. محلول نهایی خاصیت بازی دارد در نتیجه $mol\ OH^- > mol\ H^+$ می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} mol\ OH^- \text{ باقی‌مانده} = (\frac{۳}{۱۰} \times V \times ۱۰^{-۳}) - \frac{۱}{۱۰} \\ mol\ Na^+ = \frac{۳}{۱۰} \times V \times ۱۰^{-۳} \\ mol\ Cl^- = \frac{۱}{۱۰} \end{array}\right\}$$

$$\text{مجموع مول تمام یون‌ها} = \frac{۶}{۱۰} \times V \times ۱۰^{-۳} mol$$

$$\text{مجموع غلظت یون‌ها} = \frac{\text{مجموع مول یون‌ها}}{\text{حجم نهایی}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۶}{۱۰} \times V \times ۱۰^{-۳}}{(۵۰۰ + V) \times ۱۰^{-۳}} = \frac{۰/۶V}{۵۰۰ + V} = ۰/۳۶$$

$$۱۸۰ + ۰/۳۶V = ۰/۶V \Rightarrow ۱۸۰ = ۰/۲۴V \Rightarrow V = ۷۵۰ mL$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۳ تا ۳۶)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*



(شیمی ۳- صفحهٔ ۳۸)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

فقط عبارت (ب) نادرست است.

بررسی بعضی از عبارت‌ها:

الف) واکنش‌هایی مانند $Na^+ + Cl^- \rightarrow NaCl$ بدون داد و ستد الکترون انجام می‌شوند.

ب) باتری لیمویی از فرو بردن دو تیغهٔ فلزی با جنس مختلف در داخل لیمو تشکیل می‌شود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) الکتروشیمی افزون بر تهیهٔ مواد جدید به کمک انرژی الکتریکی (نه گرمایی!) می‌تواند در راستای پیاده کردن اصول شیمی سبز گام بردارد.

پ) کسب اطمینان از کیفیت فراورده‌های دارویی، بهداشتی، غذایی و ... ، در قلمرو علم الکتروشیمی قرار دارد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(سعید تیزرو)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) برای تشکیل هر مول Al_2O_3 ، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود.

۲) تبدیل هر اتم فلزی به کاتیون آن با کاهش شعاع همراه است.

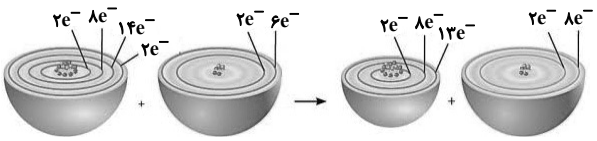
۳) Al با از دست دادن ۳ الکترون، اکسید شده و به Al^{3+} تبدیل می‌شود. گونه‌ای که اکسید می‌شود، همان کاهنده است.

۴) نیم‌واکنش کاهش به صورت روبه‌رو است: $O_2(g) + 4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(یاسر راش)*

معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش انجام شده به صورت زیر است:



$$4Fe(s) + 3O_2(g) \rightarrow 4Fe^{3+}(s) + 6O^{2-}(s)$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) گونهٔ (B) همان گاز اکسیژن بوده و با انجام واکنش، با دریافت الکترون‌های اتم آهن به آرایش الکترونی گاز نجیب هم‌دورهٔ خود یعنی $_{10}Ne$ می‌رسد.

۲) اتم‌های فلزی آهن، با از دست دادن الکترون سبب کاهش اتم‌های اکسیژن می‌شوند، بنابراین کاهنده‌اند.

۳) اتم‌های $Fe(s)$ ضمن تبدیل به یون‌های $Fe^{3+}(s)$ ، الکترون‌های زیرلایه‌های $4s$ (با $n+l=4$) و $3d$ (با $n+l=5$) را از دست می‌دهند.

$$_{26}Fe : [_{18}Ar]3d^6\ 4s^2 \xrightarrow{-3e^-} Fe^{3+} : [_{18}Ar]3d^5$$

۴)
$$4Fe(s) + 3O_2(g) \rightarrow 2Fe_2O_3(s) \sim 12e^-$$

$$?\,mg\ Fe_2O_3 = 0/06\,mol\ e^- \times \frac{2\,mol\ Fe_2O_3}{12\,mol\ e^-}$$

$$\times \frac{160\,g\ Fe_2O_3}{1\,mol\ Fe_2O_3} \times \frac{10^3\,mg}{1\,g} = 1600\,mg\ Fe_2O_3$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

در واکنش $2Zn(s) + O_2(g) \rightarrow 2ZnO(s)$ فلز روی با از دست دادن الکترون، اکسایش یافته و نقش کاهنده را دارد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۹، ۴۰ و ۴۲)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی)*

تنها عبارت (الف) درست است.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

الف)
$$\overbrace{Zn(s) + \underbrace{CuSO_4(aq)}_{\text{محلول آبی‌رنگ}}}^{} \rightarrow \overbrace{\underbrace{ZnSO_4(aq)}_{\text{محلول بی‌رنگ}} + Cu(s)}^{}$$

ب) چون ضریب هر دو یون فلزی در طرفین واکنش برابر است، مجموع غلظت یون‌ها قبل و بعد از واکنش ثابت می‌ماند.

پ)
$$\underset{\text{کاهنده}}{Zn(s)} + \underset{\text{اکسنده}}{Cu^{2+}(aq)} \rightarrow \underset{\text{حاصل از اکسایش}}{Zn^{2+}(aq)} + \underset{\text{حاصل از کاهش}}{Cu(s)}$$

ت) به ازای هر یک مول Zn مصرفی، یک مول Cu بر روی تیغه رسوب می‌کند. از آنجایی که جرم مولی Zn از Cu بیشتر است، جرم تیغه کاهش می‌یابد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(محسن میمونی)*

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) اتم مس نمی‌تواند به یون آلومینیم الکترون بدهد، پس تمایل آن به از دست دادن الکترون از آلومینیم کمتر است و لذا کاهندهٔ ضعیف‌تری است.

ب) ابتدا جرمی از تیغه که کاهش می‌یابد را به دست می‌آوریم:

$$\text{جرم Al مصرفی}: ۳/۰۱\times۱۰^{۲۴}e^- \times \frac{۱mol\ e^-}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^-} \times \frac{۲mol\ Al}{۶mol\ e^-} \times \frac{۲۷g\ Al}{۱mol\ Al} = ۴۵g\ Al$$

حال جرمی که به تیغه اضافه می‌شود را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{جرم Zn رسوب کرده بر روی تیغه}: ۳/۰۱\times۱۰^{۲۴}e^- \times \frac{۱mol\ e^-}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^-} \times \frac{۳mol\ Zn}{۶mol\ e^-} \times \frac{۶۵g\ Zn}{۱mol\ Zn} \times \frac{۳}{۵} = ۹۷/۵g\ Zn$$

$$\text{تغییر جرم تیغه} = ۹۷/۵ - ۴۵ = ۵۲/۵g$$

پ) کاهندگی، تمایل به از دست دادن الکترون است که برای یونی مثل $Al^{۳+}$ تعریف نمی‌شود، چون اتم Al بیش از ۳ الکترون از دست نمی‌دهد. به طریق مشابه، در این واکنش کاهندگی برای یون‌های $Cu^{۲+}$ و $Zn^{۲+}$ نیز تعریف نمی‌شود.

ت) در واکنش‌های خودبه‌خودی، گونه‌های اکسنده و کاهنده سمت چپ (واکنش‌دهنده‌ها) از گونه‌های اکسنده و کاهنده سمت راست (فراورده‌ها) قوی‌تر هستند و در واکنش خودبه‌خودی، اکسنده و کاهنده قوی‌تر به ترتیب به کاهنده و اکسنده ضعیف‌تر تبدیل می‌شوند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(آرمین عظیمی)*

مقایسه قدرت کاهندگی فلزها و قدرت اکسندگی کاتیون‌ها به صورت زیر است:

کاهندگی: $C > A > D > Cu > B$

اکسندگی: $B^{۲+} > Cu^{۲+} > D^{۲+} > A^{۲+} > C^{۲+}$

بررسی عبارت‌ها:

الف) قدرت کاهندگی فلز B از C کمتر است، بنابراین واکنشی میان فلز B و کاتیون $C^{۲+}$ رخ نمی‌دهد و می‌توان آن‌ها را کنار هم نگه داشت.

ب) تمایل به گرفتن الکترون در یون $D^{۲+}$ نسبت به یون $A^{۲+}$ بیشتر است، زیرا یون $D^{۲+}$ قدرت اکسندگی بیشتری دارد.

پ) قدرت کاهندگی فلز Cu از فلز B بیشتر است، بنابراین واکنش داده شده به صورت خودبه‌خودی انجام می‌شود و پایداری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است.

ت) دمای محلول دارای تیغهٔ فلز C بیشتر تغییر کرده است، بنابراین شدت تغییر رنگ آبی محلول مس (II) سولفات در آن نیز بیشتر خواهد بود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(خرشید مرادی)*

$$Zn(s) + ۲H^+(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + H_۲(g)$$

$$۱۷/۹۲L\ H_۲ \times \frac{۱mol\ H_۲}{۲۲/۴L\ H_۲} \times \frac{۱mol\ Zn}{۱mol\ H_۲} \times \frac{۶۵g\ Zn}{۱mol\ Zn} = ۵۲g\ Zn$$

۵۲ گرم از جرم تیغه بر اثر واکنش با اسید کاهش می‌یابد.

$$Zn(s) + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + Cu(s)$$

$$\text{جرم Zn واکنش داده با } Cu(NO_۳)_۲ = x\ mol\ Zn$$

$$\times \frac{۶۵g\ Zn}{۱mol\ Zn} = ۶۵x\ g\ Zn$$

$$\text{جرم Cu رسوب کرده بر تیغه} = x\ mol\ Zn \times \frac{۱mol\ Cu}{۱mol\ Zn}$$

$$\times \frac{۶۴g\ Cu}{۱mol\ Cu} \times \frac{۱}{۲} = ۳۲x\ g\ Cu$$

$$\text{کاهش جرم تیغه} = \text{جرم Zn واکنش داده با } HCl + \text{جرم Cu رسوب کرده روی تیغه} - \text{جرم Zn واکنش داده با } Cu(NO_۳)_۲$$

$$= ۵۲ + ۶۵x - ۳۲x = ۶۵/۲g \Rightarrow x = ۰/۴mol\ Zn$$

$$۰/۴mol\ Zn \times \frac{۱mol\ Cu}{۱mol\ Zn} \times \frac{۱mol\ Cu(NO_۳)_۲}{۱mol\ Cu}$$

$$= ۰/۴mol\ Cu(NO_۳)_۲$$

$$\text{غلظت مولار } Cu(NO_۳)_۲ = \frac{n}{V} = \frac{۰/۴mol}{۱L} = ۰/۴mol.L^{-۱}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

ابتدا فرمول ساختارهای ۱ و ۲ را به دست می‌آوریم:

پاک‌کنندهٔ غیرصابونی (۱)

$$C_nH_{2n+1} + C_6H_4 + SO_3^- + Na^+$$

$$n = 12 \Rightarrow C_{12}H_{25} + C_6H_4 + SO_3^- + Na^+$$

$$C_{18}H_{29}SO_3Na$$

پاک‌کنندهٔ صابونی جامد (۲)

$$C_nH_{2n+1} + COO^- + Na^+$$

$$n = 17 \Rightarrow C_{17}H_{35}COO^-Na^+$$

بررسی عبارت‌ها:

الف) درست؛ ساختار (۲) متعلق به یک پاک‌کنندهٔ صابونی جامد است.

ب) درست؛ $35 - 29 = 6$

پ) درست؛ در ساختار (۱): $\frac{\text{تعداد C}}{\text{تعداد O}} = \frac{18}{3} = 6$

در ساختار (۲): $\frac{\text{تعداد C}}{\text{تعداد O}} = \frac{17+1}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$(9 > 6)$

ت) درست؛ ساختار (۱) یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی بوده و قدرت پاک‌کنندگی آن در آب سخت بیشتر از قدرت پاک‌کنندگی ساختار (۲) در همان آب است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۶ و ۹ تا ۱۱)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا بیانی)*

موارد اول و سوم درست می‌باشند.

مورد اول: با توجه به رابطهٔ $K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}$ و این‌که در اسیدهای ضعیف با $K_a \leq 10^{-4}$ از α مخرج صرف‌نظر می‌شود، به رابطهٔ $K_a = M\alpha^2$ می‌رسیم:

$$K_a = M\alpha^2 \xrightarrow{K_a \text{ ثابت}} M\alpha^2 = 4M\alpha'^2 \Rightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

مورد دوم: ثابت یونش فقط با دما تغییر می‌کند.

مورد سوم: حجم گاز تولید شده ربطی به قدرت اسیدی ندارد و فقط به غلظت و حجم اسید وابسته بوده و یک مسئله استوکیومتری می‌باشد.

$$2HCl + Mg \rightarrow MgCl_2 + H_2$$

$$2HF + Mg \rightarrow MgF_2 + H_2$$

مورد چهارم: یونش اسیدهای قوی (در اینجا HCl) در هر دمایی به تقریب کامل انجام می‌شود ولی اسیدهای ضعیف (HF) با افزایش دما، بیشتر به یون تبدیل می‌شوند و در نتیجه اختلاف pH آن‌ها کاهش می‌یابد.

مورد پنجم: این رابطه برای اسیدهای قوی صدق می‌کند ولی برای اسیدهای ضعیف رابطهٔ تقریبی $\frac{1}{2}\log n$ صادق می‌باشد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیرعلی بیات)*

ابتدا باید مقدار pH محلول اسیدی را محاسبه کنیم. غلظت اولیه اسید برابر است با:

$$\frac{0/2\,mol}{2\,L} = 0/1\,mol.L^{-1}$$

چون اسید ضعیف است و K_a آن کوچک است $(K_a < 10^{-4})$ می توان از عبارت H^+ در مخرج کسر K_a صرف‌نظر کرد:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \xrightarrow{\text{تقریب}} K_a = \frac{[H^+]^2}{M}$$

$$\Rightarrow [H^+] = \sqrt{K_a.M} \Rightarrow \sqrt{10^{-5} \times 0/1} = 10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

$$H^+ \text{ غلظت} \Rightarrow -\log[H^+] = pH = -\log 10^{-3} = 3$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴، ۲۵، ۲۷)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(هادی مهدی‌زاده)*

موارد (ب) و (ت) صحیح هستند.

بررسی موارد نادرست:

الف) آمونیاک یک باز ضعیف است و به‌طور جزئی یونیده می‌شود و به همین علت یک الکترولیت ضعیف به شمار می‌رود.

پ) در دمای یکسان pH محلول ۰/۰۱ مولار استیک اسید از pH محلول ۰/۰۱ مولار فورمیک اسید بزرگ‌تر است، چراکه استیک اسید، ضعیف‌تر از فورمیک اسید می‌باشد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۹)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

آ) درست؛ در واکنش Zn با اکسیژن، عنصر اکسیژن الکترون گرفته، کاهش یافته و نقش اکسنده را دارد.

ب) نادرست؛ برای این منظور از منیزیم (دومین فلز گروه دوم یا دومین فلز دورهٔ سوم) استفاده می‌شده است.

پ) نادرست؛ به دلیل انجام واکنش زیر با مصرف یون‌های $Cu^{2+}(aq)$ شدت رنگ آبی ناشی از محلول مس (II) سولفات کاهش و دمای آن افزایش می‌یابد.

$$\overbrace{Zn(s)+Cu^{2+}(aq)}^{\text{آبی}} \rightarrow \overbrace{Zn^{2+}(aq)+Cu(s)}^{\text{بدون رنگ}}$$

ت) نادرست؛ در برخی واکنش‌های اکسایش- کاهش انرژی آزاد می‌شود.

ث) درست؛

$$2Al(s)+3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq)+3Cu(s) \sim 6e^-$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(میلاد شیخ‌الاسلامی‌فیاوی)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) ضمن کارکرد سلول گالوانی روی- مس، فلز موجود در الکترود آند با جرم مولی $65g.mol^{-1}$ مصرف و فلز موجود در الکترود کاتد با جرم مولی $64g.mol^{-1}$ تولید می‌شود. در نتیجه به دلیل تفاوت در جرم مولی فلز مصرفی و تولیدی و با توجه به یکسان بودن ضرایب این مواد در معادلهٔ موازنه شده، مجموع جرم مواد جامد رفته رفته کاهش می‌یابد.

۲) جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی سلول گالوانی از آند به کاتد است.

۳) در نیم‌سلول SHE از محلولی استفاده می‌شود که غلظت H^+ آن یک مولار باشد. استیک اسید، اسیدی ضعیف است، پس غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۱ مولار آن کمتر از $1mol.L^{-1}$ خواهد بود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین حسن‌نژاد)*

همهٔ موارد بیان شده صحیح هستند.

بررسی برخی موارد:

مورد دوم: اختلاف پتانسیل الکتریکی استاندارد سلول برابر (پتانسیل استاندارد آند- پتانسیل استاندارد کاتد) است. بنابراین داریم:

$$1/66-(-0/34)=2V$$

مورد سوم: طبق واکنش $2Al+3Cu^{2+} \rightarrow 2Al^{3+}+3Cu$ داریم:

$$?g\ Cu=8/1g\ Al\times\frac{1mol\ Al}{27g\ Al}\times\frac{3mol\ Cu}{2mol\ Al}$$

$$\times\frac{64g\ Cu}{1mol\ Cu}=28/8g\ Cu$$

مورد چهارم: در سلول‌های گالوانی استفاده از غشاء متخلخل برای جلوگیری از واکنش مستقیم میان گونه‌های موجود در محلول الزامی است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(یاسر راش)*

همهٔ عبارت‌ها درست هستند. معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$2Fe^{2+}+H_2O_2+2H^+ \rightarrow 2Fe^{3+}+2H_2O \sim 2e^-$$

(۱-) ← ۱۰↓ (اکسنده) ← (۲-)

$$emf=1/76-0/77=0/99>0 \Rightarrow$$ پیشرفت به صورت طبیعی

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(سعید تیزرو)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) پسماندهای الکترونیکی نباید در طبیعت دفن یا رها شوند، زیرا سمی بوده و موجب آلودگی محیط زیست می‌شوند.

۲) لیتیم در میان فلزها، دارای کمترین چگالی و کمترین E° می‌باشد.

۳) سالانه از میلیاردها باتری لیتیمی درون دستگاه‌های الکترونیک در سرتاسر جهان استفاده می‌شود.

۴) در تمامی باتری‌ها (از جمله باتری‌های لیتیمی)، با انجام واکنش‌های شیمیایی الکتریسیته تولید می‌شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۹ و ۵۰)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

با مصرف ۰/۰۵ مول A، ۰/۱۵ مول الکترون مبادله شده است، پس نیم‌واکنش اکسایش به صورت $A \rightarrow A^{3+}+3e^-$ است. با توجه به نیم‌واکنش کاهش $(Cu^{2+}+2e^- \rightarrow Cu)$ معادلهٔ کلی واکنش به صورت $2A+3Cu^{2+} \rightarrow 2A^{3+}+3Cu$ خواهد بود.

$$0/75=\frac{M_A}{64} \Rightarrow M_A=48g.mol^{-1}$$

$$0/15mol\ e^-\times\frac{1mol\ Cu}{2mol\ e^-}\times\frac{64gCu}{1mol\ Cu}=4/8gCu$$

$$0/05mol\ A\times\frac{48g\ A}{1mol\ A}=2/4g\ A$$

پس جرم آند به ۲۲/۶ (۲/۴ – ۲۵) گرم و جرم کاتد به ۲۹/۸ (۴/۸ + ۲۵) گرم می‌رسد.

$$\text{تفاوت جرم آند و کاتد}=29/8-22/6=7/2g$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(سعید تیزرو)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) از دیدگاه زیست محیطی گاز هیدروژن نسبت به گاز متان دارای مزیت است، زیرا متان برخلاف هیدروژن، افزون بر آب (فراورده دوستدار محیط زیست)، گاز گلخانه‌ای CO_2 را نیز تولید می‌کند.

۲) معادلهٔ واکنش کلی سلول سوختی متان- اکسیژن:

$$\underset{-۴}{CH_4} + \underset{\text{۸ درجه}}{۲O_2} \rightarrow \underset{+۴}{CO_2} + \underset{\text{۲ درجه}}{\underset{-۲}{۲H_2O}}$$

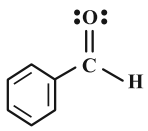
۳) مطابق واکنش ارائه شده، CH_4 اکسایش یافته و کاهنده محسوب می‌شود.

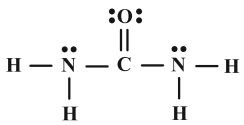
۴) سلول‌های سوختی متان- اکسیژن برخلاف باتری‌ها نمی‌توانند مواد اولیه را ذخیره کنند و باید به‌طور پیوسته گاز CH_4 به آن تزریق شود.

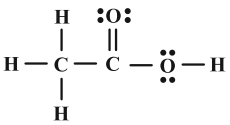
(شیمی ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

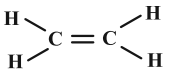
۲- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا بیانی)*

با توجه به ساختارها داریم:

۱)  $۴-۳=۱$

۲)  $۴-۰=۴$

۳)  $۴-۱=۳$

۴)  $۴-۶=-۲$

(شیمی ۳- صفحهٔ ۵۲)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

با توجه به معادلهٔ کلی برقکافت آب:

$$۲H_2O(l) \rightarrow ۲H_2(g) + O_2(g)$$

گاز هیدروژن در اطراف قطب منفی (کاتد) و گاز اکسیژن در اطراف قطب مثبت (آند) تولید می‌شود. حجم گاز تولید شده در اطراف کاتد ۲ برابر حجم گاز تولید شده در اطراف آند می‌باشد.

بررسی گزینهٔ «۴»:

۴) به ازای تولید ۴ مول الکترون مقدار ۲ مول آب مصرف می‌شود.

$$?g\ H_2O = ۰/۸ mol\ e^- \times \frac{۲ mol\ H_2O}{۴ mol\ e^-} \times \frac{۱۸ g\ H_2O}{۱ mol\ H_2O}$$

$$= ۷/۲ g\ H_2O \text{ مصرف شده}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(علی جعفری)*

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) Na^+ به حالت مایع (l) است نه محلول (aq)! چون برای برقکافت فلزات فعال باید از حالت مذاب آن‌ها استفاده کرد.

۳) دو نوع عنصر در آن تولید می‌شود. (سدیم (Na) و کلر (Cl_2))

۴) یون‌های سدیم در کاتد کاهش می‌یابند و شعاع آن‌ها بزرگ‌تر می‌شود.

مقایسهٔ شعاع: $Na > Na^+$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۵۵ و ۵۶)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال، (مبنی بر امکان حفاظت کاتدی با باریم و عدم امکان انجام این فرایند با نیکل)، موقعیت قرارگیری این فلزها در سری الکتروشیمیایی به صورت زیر است:

$$Ni^{۲+} + ۲e^- \rightarrow Ni$$

$$Fe^{۲+} + ۲e^- \rightarrow Fe$$

$$Ba^{۲+} + ۲e^- \rightarrow Ba$$

به این ترتیب امکان انجام خودبه‌خودی واکنش $Ni + Ba^{۲+}$ وجود ندارد.

از آنجا که Ni در سری الکتروشیمیایی بالاتر است، قدرت اکسندگی Ni^{2+} بیشتر از Ba^{2+} خواهد بود. اگر یک جسم آهنی به یک قطعه از جنس نیکل متصل شود می‌تواند با حفاظت کاتدی مانع از واکنش این قطعه (نیکل) شود، اما با توجه به اطلاعات داده شده، نمی‌توان در مورد امکان انجام واکنش نیکل با اسید نظر قطعی داد. توجه داشته باشید که Fe امکان انجام چنین واکنشی را دارد. به این ترتیب Ba نیز می‌تواند در واکنش با اسید شرکت کند. اما از آنجا که موقعیت Ni نسبت به H_2 در سری الکتروشیمیایی مشخص نیست، نمی‌توان با قطعیت گفت که امکان انجام واکنش گفته شده وجود دارد یا خیر.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمسعود حسینی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ در سلول سوختی هیدروژن- اکسیژن، تنها بخارآب مولکول‌های قطبی داشته که از مجاور قطب مثبت (کاتد) خارج می‌شود.

۲) نادرست؛ نیم‌واکنش کاتدی انجام شده در آهن سفید و حلبی خراشیده شده یکسان و به صورت $O_2(g)+2H_2O(l)+4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ است ولی واکنش در آهن سفید در سطح آهن و در حلبی در سطح قلع انجام می‌شود.

۳) نادرست؛ نخستین واکنش در تهیهٔ فلز منیزیم از آب دریا با افزودن باز (OH^-) همراه است که رنگ کاغذ pH را آبی می‌کند.

۴) درست؛ واکنش ترمیت به بصورت زیر است:

$$2Al(s)+Fe_2O_3(s) \rightarrow Al_2O_3(s)+2Fe(l)$$

مجموع ضرایب استوکیومتری مواد $= 6$

واکنش کلی سلول هال نیز به صورت زیر است:

مجموع ضرایب استوکیومتری مواد $= 12$

$$2Al_2O_3(s)+3C(s) \rightarrow 4Al(l)+3CO_2(g)$$

$$\frac{\text{مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش ترمیت}}{\text{مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در فرایند هال}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۶۱)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(پویا رستگاری)*

موارد (ب) و (ت) نادرست‌اند.

بررسی موارد:

آ) در فرایند هال، آند و کاتد هر دو از جنس گرافیت هستند. در این سلول الکترولیتی، دیواره‌ها و کف ظرف نقش کاتد (قطب منفی) و تیغه‌های گرافیتی بالای سلول، نقش آند (قطب مثبت) را دارند.

ب) همان‌طور که گفته شد، دیواره و کف سلول نقش کاتد را دارد و قطب منفی سلول نیز می‌باشد.

پ) گاز اکسیژن یک اکسنده قوی است و در دمای بالا با الکترود آند (گرافیت) واکنش داده و گاز CO_2 تولید می‌کند.

ت) همان‌طور که گفته شد، الکترود آند با گاز اکسیژن واکنش داده و گاز CO_2 را تولید می‌کند و به مرور از جرم آن کاسته می‌شود، بنابراین الکترود آندی در واکنش شرکت می‌کند اما الکترود کاتدی با این‌که در واکنش نیست، الکترون مورد نیاز نیم‌واکنش کاتدی را فراهم می‌کند.

ث) فرایند هال به علت مصرف مقدار زیادی انرژی الکتریکی هزینهٔ بالایی دارد، از این‌رو با بازیافت فلز آلومینیم می‌توان ضمن افزایش عمر یکی از مهم‌ترین منابع تجدیدناپذیر طبیعت، برخی هزینه‌های تولید این فلز را نیز کاهش داد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۱ و ۶۲)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا طاهری‌نژاد)*

ابتدا واکنش ترمیت را می‌نویسیم:

$$2Al+Fe_2O_3 \rightarrow 2Fe+Al_2O_3$$

مول Al مورد نیاز را به دست می‌آوریم:

$$\text{mol Al} = 8\text{kg} \times \frac{1000\text{g}}{1\text{kg}} \times \underbrace{0/8}_{\text{خلوص}} \times \frac{1\text{mol } Fe_2O_3}{160\text{g } Fe_2O_3}$$

$$\times \frac{2\text{mol Al}}{1\text{mol } Fe_2O_3} = 80\text{mol Al}$$

حال واکنش هال را می‌نویسیم:

$$2Al_2O_3+3C \rightarrow 4Al+3CO_2$$

$$\text{تعداد تیغه‌ها} = 80\text{mol Al} \times \frac{3\text{mol C}}{4\text{mol Al}} \times \frac{12\text{g C}}{1\text{mol C}} \times \frac{100}{80}$$

$$\times \frac{1\text{ تیغه}}{100\text{g}} = 9\text{ تیغه}$$

لذا حداقل ۹ تیغه نیاز است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۱ و ۶۲)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

نیم‌واکنش‌های کاهشی در سلول‌های آبکاری به صورت زیر است:

$$Ag^{+}(aq)+e^{-}\rightarrow Ag(s)$$

$$Fe^{2+}(aq)+2e^{-}\rightarrow Fe(s)$$

$$Cr^{3+}(aq)+3e^{-}\rightarrow Cr(s)$$

$$Au^{3+}(aq)+3e^{-}\rightarrow Au(s)$$

تحلیل و بررسی گزارهٔ اول: شمار الکترون‌های مبادله شده در نیم‌واکنش‌ها را یکسان می‌کنیم:

$$6Ag^{+}(aq)+6e^{-}\rightarrow 6Ag(s)$$

$$3Fe^{2+}(aq)+6e^{-}\rightarrow 3Fe(s)$$

$$2Cr^{3+}(aq)+6e^{-}\rightarrow 2Cr(s)$$

$$2Au^{3+}(aq)+6e^{-}\rightarrow 2Au(s)$$

ترتیب تغییر جرم گوی مسی در هر فرایند به ازای مبادلهٔ شمار الکترون‌های برابر را می‌توان به صورت زیر نشان داد: (M نماد جرم مولی است.)

تغییر جرم گوی مسی : $6M_{Ag} > 2M_{Au} > 3M_{Fe} > 2M_{Cr}$

نتیجه‌گیری: هرگاه نسبت «$\frac{\text{جرم مولی فلز}}{\text{شمار الکترون مبادله شده در نیم‌واکنش کاهش}}$» بیشتر باشد، به ازای مبادلهٔ شمار الکترون‌های برابر، جرم جسمی که آبکاری می‌شود، به میزان بیشتری افزایش پیدا می‌کند.

تحلیل و بررسی گزارهٔ دوم: اگر مبنا را بر میزان افزایش جرم گوی مسی به میزان یک گرم در نظر بگیریم:

$$\frac{1}{108}Ag^{+}(aq)+\frac{1}{108}e^{-}\rightarrow\frac{1}{108}Ag(s)$$

$$\frac{1}{56}Fe^{2+}(aq)+\frac{2}{56}e^{-}\rightarrow\frac{1}{56}Fe(s)\Rightarrow\frac{2}{56}=\frac{1}{28}$$

$$\frac{1}{52}Cr^{3+}(aq)+\frac{3}{52}e^{-}\rightarrow\frac{1}{52}Cr(s)\Rightarrow\frac{3}{52}\simeq\frac{1}{17}$$

$$\frac{1}{197}Au^{3+}(aq)+\frac{3}{197}e^{-}\rightarrow\frac{1}{197}Au(s)\Rightarrow\frac{3}{197}\simeq\frac{1}{66}$$

همهٔ نیم‌واکنش‌ها، به ازای افزایش یک گرم (جرم‌های برابر) از فلز بر روی گوی‌های مسی به دست آمدند. حالا می‌توان شمار الکترون‌های مبادله شده را مقایسه کرد: (صورت کسرهای بالا را با کمی تقریب یکسان می‌کنیم تا مقایسه راحت‌تر شود.)

شمار الکترون‌های مبادله شده : $\underbrace{\frac{1}{17}}_{Cr}>\underbrace{\frac{1}{28}}_{Fe}>\underbrace{\frac{1}{66}}_{Au}>\underbrace{\frac{1}{108}}_{Ag}$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۰ تا ۶۲)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

تنها مورد نادرست، عبارت دوم خواهد بود.

با توجه به اطلاعات داده شده در جدول، ترتیب قرار گرفتن این فلزها در سری الکتروشیمیایی به صورت زیر است.

Pd^{2+}/Pd
Cu^{2+}/Cu
Fe^{2+}/Fe
Ca^{2+}/Ca

به این ترتیب برای عبارت‌های داده شده می‌توان گفت:

در برقکافت محلول‌های حاوی Pd^{2+} و Cu^{2+}، با توجه به بیشتر بودن قدرت اکسندگی Pd^{2+} این یون برندهٔ رقابت کاتدی بوده و در نتیجه ابتدا فلز Pd رسوب می‌کند. از آنجا که هر دو فلز Ca و Fe در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از مس قرار دارند، امکان نگهداری محلول‌های آن‌ها (حاوی Ca^{2+} و Fe^{2+}) در ظرف مسی وجود دارد. با توجه به این‌که فاصلهٔ فلزهای Fe و Cu از یکدیگر در سری الکتروشیمیایی کمتر از فاصلهٔ موجود میان فلزهای Ca و Cu است، ولتاژ سلول گالوانی $Fe-Cu$ نیز کمتر از ولتاژ سلول گالوانی $Ca-Cu$ می‌باشد. در سلول گالوانی $Fe-Pd$، الکترود آهن به عنوان آند عمل می‌کند و الکترود پالادیم نیز کاتد خواهد بود. بنابراین جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند (Fe) به طرف کاتد (Pd) می‌باشد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

شیمی ۳

۱- **گزینهٔ «۴»** *(مینا سیدحسینی)*

فرمول شیمیایی صابون $RCOO^- \begin{pmatrix} Na^+ \\ K^+ \\ NH_4^+ \end{pmatrix}$ می‌باشد که بخش $RCOO^-$ بخش آنیونی و بخش شامل یون مثبت بخش کاتیونی می‌باشد که نسبت شمار آنیون به کاتیون آن ۱ است. پاک‌کنندهٔ غیرصابونی دارای فرمول $RC_6H_4SO_3Na$ می‌باشد که بخش کاتیونی Na^+ و بخش آنیونی $RC_6H_4SO_3^-$ می‌باشد که نسبت شمار آنیون به کاتیون آن نیز ۱ می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) وازلین برخلاف عسل دارای گروه عاملی هیدروکسیل نیست و در آب نیز نامحلول می‌باشد.

۲) عسل و آب با هم محلول ساخته که با توجه به کتاب درسی نور را برخلاف کلوئید (مخلوط آب و روغن و صابون) پخش نمی‌کنند و مسیر عبور نور در آن‌ها مشخص نیست.

۳) با توجه به متن کتاب درسی گفته شده که بیماری وبا هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه تهدیدکننده باشد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲ تا ۷، ۱۰ و ۱۱)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(یاسر راش)*

معادلهٔ واکنش انجام شده به صورت زیر است:

$$(RCOO)_3C_3H_5 + 3NaOH \rightarrow C_3H_5(OH)_3 + 3RCOONa$$

در ادامه جرم مولی گروه R را حساب می‌کنیم:

$$221g \text{ استر} \times \frac{1mol\ (\text{استر})}{\underbrace{3(M_R+44)}_{(RCOO)_3} + \underbrace{3(12)}_{C_3} + \underbrace{5}_{H_5})g\ (\text{استر})} \times \frac{3mol\ RCOONa}{1mol\ (\text{استر})} \times \frac{(M_R+67)g\ RCOONa}{1mol\ RCOONa}$$

$$= 228g\ RCOONa \Rightarrow M_R = 237g.mol^{-1}$$

قسمت اول: جرم مولی استر را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی استر سنگین} = 3(237+44)+36+5 = 884g.mol^{-1}$$

در میان گزینه‌ها جرم مولی ترکیب $C_{57}H_{104}O_6$ برابر با ۸۸۴ گرم بر مول است.

قسمت دوم: جرم مولی صابون را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی صابون} = 237+1(12)+2(16)+1(23) = 304g.mol^{-1}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۵ و ۶)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(عرفان شاکری‌راد)*

فقط مورد (ب) صحیح است.

بررسی سایر موارد:

الف) برخی محلول‌ها همانند محلول کات کبود می‌توانند رنگی باشند.

ج) در کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها برخلاف محلول‌ها مسیر حرکت نور مشخص است.

د) در مخلوط‌های همگن (محلول‌ها) برخلاف کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها حالت فیزیکی و ترکیب شیمیایی در همهٔ قسمت‌ها یکسان است.

(شیمی ۳- مشابه خود را بیازمایید صفحه‌های ۶ و ۷)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(پیمان خوابوی‌مجد)*

موارد (آ) و (پ) صحیح هستند.

بررسی سایر موارد:

ب) نادرست؛ زیرا ترکیب B پاک‌کنندهٔ غیرصابونی است و با آب سخت تشکیل رسوب نمی‌دهد بنابراین می‌تواند پاک‌کنندهٔ خوبی باشد.

ت) نادرست؛ صابون‌ها با آلاینده ها برهم‌کنش دارند و واکنش انجام نمی‌دهند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴ تا ۶ و ۸ تا ۱۱)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

برای جلوگیری از تشکیل رسوب در آب سخت، از صابون فسفات‌دار استفاده می‌شود.

در تهیهٔ صابون مراغه از روغن‌های جانوری مانند دنبه گوسفند استفاده می‌شود.

برای از بین بردن میکروب‌ها از صابون با مادهٔ شیمیایی کلردار استفاده می‌شود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۸، ۹، ۱۱ و ۱۲)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

$$۲R-COONa(aq)+CaCl_۲(aq)$$
$$\rightarrow (R-COO)_۲Ca(s)+۲NaCl(aq)$$

$$\text{بازده درصدی}=\frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}}\times ۱۰۰ \Rightarrow ۸۰=\frac{۸/۰۸g}{x}\times ۱۰۰ \Rightarrow x=۱۰/۱\ g$$

$$۱۰/۱\ g\ \text{رسوب}\times\frac{۱mol\ \text{رسوب}}{\underbrace{((\underbrace{۲(M_R+۴۴)}_{(RCOO)_۲})+\underbrace{۴۰}_{Ca})g\ \text{رسوب}}}$$

$$\times\frac{۲mol\ \text{صابون}}{۱mol\ \text{رسوب}}\times\frac{\overbrace{((M_R+۴۴)}^{RCOO}+\overbrace{۲۳}^{Na})g\ \text{صابون}}{۱mol\ \text{صابون}}=۱۰/۲g\ \text{صابون}$$

$$\Rightarrow M_R=۲۳۹g.mol^{-۱}$$

$$\Rightarrow ۲۳۹+۴۴+۲۳=۳۰۶g.mol^{-۱}\ \text{جرم مولی صابون}$$

$$C_nH_{۲n+۱}COONa=۱۲n+۲n+۱+۱۲+۲(۱۶)+۲۳=۳۰۶$$

$$\Rightarrow n=۱۷ \Rightarrow C_{۱۷}H_{۳۵}COONa\ \text{فرمول مولکولی صابون}$$

۱۸ اتم کربن در ساختار صابون وجود دارد.

(شیمی ۳- صفحهٔ ۹)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(سعید تیزرو)*

$$۲Al(s)+۲NaOH(s)+۶H_۲O(l)$$: واکنش موازنه شده

$$\rightarrow ۲NaAl(OH)_۴(aq)+۳H_۲(g)$$

واکنش این مخلوط با آب گرماده بوده و سبب افزایش دمای محیط می‌شود. در واکنش‌های گرماده، سطح انرژی فراورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها قرار دارد.

(شیمی ۳- مشابه با هم بیندیشیم صفحهٔ ۱۳)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(مجتبی محبوب)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۲) اسیدها با اغلب فلزات واکنش می‌دهند، نه همهٔ آن‌ها.

۳) اسید طبق تعریف آرنیوس ماده‌ای است که در آب سبب افزایش غلظت یون هیدرونیوم می‌شود.

۴) پیش از آن‌که ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی‌دانان با برخی از واکنش‌های آن‌ها آشنا بودند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(محسن مجنونی)*

دی‌نیتروژن پنتا اکسید $(N_۲O_۵)$ یک اکسید نافلزی است و با انحلال در آب، رنگ کاغذ pH را قرمز می‌کند. معادلهٔ یونش آن به صورت زیر است:

$$N_۲O_۵(s)+H_۲O(l)\rightarrow ۲H^+(aq)+۲NO_۳^-(aq)$$

هر یک مول از $N_۲O_۵$، چهار مول یون تولید می‌کند پس هر نیم مول از آن دو مول یون تولید می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) برخی از اسیدها در ساختار خود هیدروژن دارند و هنگام حل شدن در آب H^+ آزاد می‌کنند. اما دستهٔ دیگری از اسیدها هستند که در ساختار خود هیدروژن ندارند اما با انحلال خود در آب سبب پدیدار شدن H^+ می‌شوند مانند $SO_۳$.

۳) بازها در آب سبب افزایش یون هیدروکسید (OH^-) می‌شوند و نه هیدروکسیل $(-OH)$

۴) طبق مدل آرنیوس نمی‌توان میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول را مشخص کرد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

$$\begin{cases} BaO+H_۲O\rightarrow \underbrace{Ba^{۲+}+۲OH^-}_{۳\ \text{مول یون}} & \text{اکسید بازی} \quad pH>۷ \\ Na_۲O+H_۲O\rightarrow \underbrace{۲Na^+ +۲OH^-}_{۴\ \text{مول یون}} & \text{اکسید بازی} \quad pH>۷ \end{cases}$$

$$\begin{cases} SO_۳+H_۲O\rightarrow ۲H^+ +SO_۴^{۲-} & \text{اکسید اسیدی} \quad pH<۷ \\ N_۲O_۵+H_۲O\rightarrow ۲H^+ +۲NO_۳^- & \text{اکسید اسیدی} \quad pH<۷ \end{cases}$$

(شیمی ۳- مشابه فود را بیازمایید صفحهٔ ۱۶)

شیمی ۳

۱- **گزینهٔ «۲»** *(مینا سیدحسینی)*

موارد (ب) و (ت) درست است.

بررسی موارد:

الف) اگر pH دو محلول برابر باشد صرف‌نظر از قدرت اسیدی غلظت یون هیدرونیوم در دو محلول برابر است.

ب) اگر pH دو محلول برابر باشد غلظت یون‌ها برابر و در دمای یکسان هیدروفلوئوریک اسید به علت قدرت بیشتر، ثابت یونش بزرگ‌تری دارد.

پ) در شرایطی که غلظت و دمای دو اسید برابر است اسیدی که ثابت یونش بزرگ‌تری دارد یعنی هیدروفلوئوریک اسید، بیشتر تفکیک شده و درصد یونش بزرگ‌تری دارد.

ت) در غلظت‌های برابر اسیدی که قوی‌تر است یعنی هیدروفلوئوریک اسید با شدت بیشتری واکنش خواهد داد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۶ تا ۲۵)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(احسان روستایی)*

فرمول شیمیایی عمومی صابون جامد به صورت $RCOONa$ است $(R = C_nH_{2n+1})$:

$$2RCOONa + MgCl_2 \rightarrow (RCOO)_2Mg + 2NaCl$$

$$?\text{ جرم مولی صابون} \Rightarrow 0/25\,L\ MgCl \times \frac{0/4\,mol\ MgCl_2}{1\,L\,MgCl_2}$$

$$\times \frac{2\,mol\ \text{صابون}}{1\,mol\,MgCl_2} \times \frac{x\,g\ \text{صابون}}{1\,mol\ \text{صابون}} = 55/6\,g\ \text{صابون}$$

$$\Rightarrow \text{جرم مولی صابون} = x = 278\,g.mol^{-1}$$

$$\Rightarrow 12n + 2n + 1 + 12 + 2(16) + 23 = 278 \Rightarrow n = 15$$

$$\Rightarrow C_{15}H_{31}COONa$$

در مجموع در فرمول شیمیایی این صابون، ۱۶ اتم کربن وجود دارد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶، ۸ و ۹)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(نرا حسین‌پورمقدم)*

عبارت صورت سؤال نادرست است.

برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی مواد شوینده، به آن‌ها نمک‌های فسفات می‌افزایند زیرا این نمک‌ها با یون‌های Ca^{+2} و Mg^{+2} موجود در آب‌های سخت واکنش می‌دهند و از تشکیل رسوب و ایجاد لکه جلوگیری می‌کنند.

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ شربت معده سوسپانسیون است ولی شیر، سس مایونز، ژله و رنگ پوششی نمونه‌هایی از کلوئیدها هستند.

۲) نادرست؛ صابون لکه‌های چربی را از روی پارچه‌های نخی بهتر از پارچه‌های پلی‌استری پاک می‌کند. زیرا پارچه نخی ماهیتی قطبی دارد و مولکول‌های چربی چسبندگی کمتری به آن دارند در حالی که پارچهٔ پلی‌استری به دلیل ماهیت غیرقطبی با مولکول‌های چربی که ماهیت غیرقطبی دارند بهتر تعامل برقرار می‌کند و چربی را با نیروی بیشتری نگه می‌دارد و به سختی با صابون برهم‌کنش می‌دهد.

۳) درست

۴) با توجه به مطالب عنوان شده در کتاب درسی می‌توان دریافت که برای تعیین عملکرد صابون میزان کف ایجاد شده مهم است.

(شیمی ۳- مشابه خود را بیازمایید و کاوش کنید ا صفحه‌های ۷، ۸ و ۹)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(هادی مهدی‌زاده)*

موارد اول، دوم و چهارم صحیح‌اند. بررسی مورد نادرست:

مورد سوم: فرمول مولکولی ترکیب داده شده $C_{57}H_{110}O_6$ می‌باشد.

(شیمی ۳- مشابه با هم بیندیشیم صفحه‌های ۵ و ۶)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیر هاتمیان)*

چون چگالی گاز HCN اولیه داده شده، در نتیجه کافی است جرم آن را حساب کنیم تا حجم آن را هم به دست آوریم و چون مقدار α کوچک است لذا می‌توانیم از α در مخرج صرف‌نظر کنیم:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \simeq M\alpha^2 \Rightarrow 5\times10^{-10} = M\times(\frac{5}{2}\times10^{-5})^2$$

$$\Rightarrow 5\times10^{-10} = M\times\frac{25}{4}\times10^{-10}$$

$$M = \frac{5}{\frac{25}{4}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0/8\,mol.L^{-1}$$

چون حجم محلول هم داده شده است لذا می‌توانیم مقدار جرم HCN را حساب کنیم:

$$?g\ HCN = 0/6\,L\ HCN \times \frac{0/8\,mol\ HCN}{1\,L\ HCN} \times \frac{27\,g\ HCN}{1\,mol\ HCN}$$

$$= 12/96\,g\ HCN$$

و با در دست داشتن چگالی گاز HCN حجم را به راحتی به دست می‌آوریم:

$$12/96\,g\ HCN \times \frac{1\,L\ HCN}{5\,g\ HCN} \times \frac{1000\,mL\ HCN}{1\,L\ HCN}$$

$$= 2592\,mL\ HCN$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۸، ۱۹، ۲۲ و ۲۳)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(حسین شاهسواری)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست؛ هر چه گاز آزاد شده در واحد زمان بیشتر باشد، سرعت واکنش بیشتر است.

۲) درست؛ هر چه غلظت یون هیدرونیوم (H^+) بیشتر باشد، سرعت واکنش بیشتر است.

۳) درست؛ اگر در دما و غلظت یکسان، غلظت یون هیدرونیوم (H^+) محلولی بیشتر باشد، K_a آن نیز بیشتر است.

۴) نادرست؛ در پایان هر دو واکنش جرم گاز هیدروژن تولیدی برابر است زیرا غلظت هر دو محلول و نوار منیزیم در هر دو محلول یکسان بوده است.

(شیمی ۳- مشابه فود را بیازمایید صفحهٔ ۲۴)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به معادلهٔ یونش این اسید و برابر بودن غلظت یون‌های H^+ و X^- برای تعیین غلظت این محلول می‌توان گفت:

$$\begin{array}{lccc} & HX & \rightleftharpoons & H^+ + X^- \\ \text{غلظت تعادلی}: & M-d & & d \quad d \end{array}$$

$$\text{مجموع غلظت یون‌ها} = 2d = 4/8\times10^{-2} \Rightarrow d = 2/4\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$$

$$K_a = \frac{d^2}{M-d} \Rightarrow 2\times10^{-4} = \frac{(2/4\times10^{-2})^2}{M-2/4\times10^{-2}}$$

$$\Rightarrow 2\times10^{-4} = \frac{5/76\times10^{-4}}{M-2/4\times10^{-2}}$$

$$\Rightarrow 2(M-2/4\times10^{-2}) = 5/76 \Rightarrow 2M = 5/76 + 4/8\times10^{-2}$$

$$\Rightarrow M = 2/904\,mol.L^{-1}$$

به این ترتیب جرم اسید موجود در ۲ لیتر از چنین محلولی برابر است با:

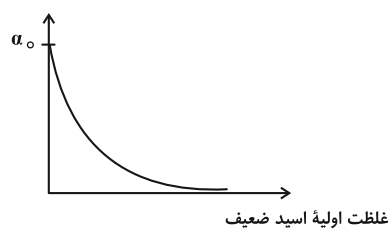
$$2L\ \text{محلول} \times \frac{2/904\,mol\ HX}{1L\ \text{محلول}} \times \frac{50g\ HX}{1mol\ HX}$$

$$= 290/4g\ HX$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیرعلی بیات)*

در اسیدهای ضعیف مثل HA، با کاهش غلظت اسید (رقیق کردن آن) در دمای ثابت، مقدار درجهٔ یونش برخلاف ثابت یونش، افزایش می‌یابد.



بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) pH محلول‌های اسیدی در دمای 25° کوچک‌تر از هفت می‌باشد، ممکن است با تغییر دما pH خنثی بودن دیگر هفت نباشد و در نتیجه pH یک محلول اسیدی هم حتماً کوچک‌تر از هفت نباشد.

۳) از آنجا که HA یک اسید ضعیف است، A نمی‌تواند هالوژن دورهٔ چهارم $(_{35}Br)$ باشد چرا که HBr یک اسید قوی است.

۴) در محلول اسیدهای ضعیف برای خنثی شدن کامل آن‌ها باید مقدار مول اولیهٔ اسید حل شده را با مول باز (مثل $NaOH$) برابر گذاشت:

$$pH = 2/7 \Rightarrow [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2/7} = 10^{0/3}\times10^{-3}$$

$$= 2\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

$$M_{\text{اسید اولیه}} = \frac{[H^+]}{\alpha}$$

از طرفی می‌دانیم که در محلول اسیدهای ضعیف α عددی کوچک‌تر از یک است، پس $M > [H^+]$ خواهد بود و غلظت مولی اولیهٔ اسید حل شده بزرگ‌تر از $2\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$ و مقدار مول آن بزرگ‌تر از 2×10^{-3} یا 4×10^{-3} مول خواهد بود. در نتیجه مقدار سود لازم برای خنثی شدن آن نیز بیشتر از 4×10^{-3} مول خواهد بود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۹، ۲۴ تا ۲۶ و ۳۲)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(پیمان خوابوی‌مجد)*

از آنجا که در دمای ثابت K_a ثابت می‌ماند و اسید خیلی ضعیف است داریم:

$$M_1\alpha_1^2 = M_2\alpha_2^2 \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = (\frac{\alpha_2}{\alpha_1})^2$$

با توجه به این‌که درصد یونش اسید سه برابر شده پس درجه یونش اسید نیز سه برابر شده و غلظت اسید باید $\frac{1}{9}$ برابر شود. یعنی با افزودن آب، حجم محلول ۹ برابر می‌شود.

$$V_1 = 200 \Rightarrow V_2 = 1800\,mL$$

پس $1600\,mL$ آب باید به محلول بیفزاییم.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۸، ۱۹، ۲۲ و ۲۳)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

شیمی‌دان‌ها پیش از آن‌که با ساختار اسیدها و بازها آشنا شوند، افزون بر ویژگی‌های اسیدها و بازها با برخی واکنش‌های آن‌ها آشنا بودند.

$$\underbrace{N_2O_5}_{1mol} + H_2O \rightarrow 2HNO_3 \rightarrow \underbrace{2H^+ + 2NO_3^-}_{4mol}$$

$$\underbrace{K_2O}_{1mol} + H_2O \rightarrow 2KOH \rightarrow \underbrace{2K^+ + 2OH^-}_{4mol}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

شیمی ۳

۱- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا بیانی)*

میزان رسانایی محلول به مجموع غلظت یون‌های موجود در آن وابسته است.

بررسی موارد:

الف) $Al_2(SO_4)_3 \rightarrow 2Al^{3+} + 3SO_4^{2-}$

$$4L\ Al_2(SO_4)_3 \times \frac{0/3\ mol\ \text{ترکیب}}{1L} \times \frac{5\ mol\ \text{یون}}{1\ mol\ \text{ترکیب}} = 10\ mol\ \text{یون}$$

$$\text{مجموع غلظت یون‌ها} = \frac{10\ mol\ \text{یون}}{4L\ Al_2(SO_4)_3} = 2/5\ mol.L^{-1}\ \text{یون}$$

ب) $M_3P_2 \rightarrow 3M^{2+} + 2P^{3-}$

$$4L\ M_3P_2 \times \frac{0/3\ mol\ \text{ترکیب}}{1L} \times \frac{5\ mol\ \text{یون}}{1\ mol\ \text{ترکیب}} = 6\ mol\ \text{یون}$$

$$\text{مجموع غلظت یون‌ها} = \frac{6\ mol\ \text{یون}}{4L\ M_3P_2} = 1/5\ mol.L^{-1}\ \text{یون}$$

پ) $MOH \rightarrow M^+ + OH^-$

$$5L\ MOH \times \frac{0/4\ mol\ \text{ترکیب}}{1L} \times \frac{2\ mol\ \text{یون}}{1\ mol\ \text{ترکیب}} = 4\ mol\ \text{یون}$$

$$\text{مجموع غلظت یون‌ها} = \frac{4\ mol\ \text{یون}}{5L\ MOH} = 0/8\ mol.L^{-1}\ \text{یون}$$

ت) فورمیک اسید یک اسید ضعیف و تک پروتون‌دار با درجهٔ یونش کمتر از یک است و از آنجا که شمار یون‌های H^+ با $HCOO^-$ برابر است پس مجموع شمار یون‌ها در محلول کمتر از ۴ مول و مجموع غلظت آن‌ها نیز کمتر از ۰/۸ مولار می‌باشد.

$$5L\ HCOOH \times \frac{0/4\ mol\ \text{ترکیب}}{1L} \times \frac{2\times\alpha\ mol\ \text{یون}}{1\ mol\ \text{ترکیب}}$$

$$= 4\times\alpha\ mol\ \text{یون} \xrightarrow{\alpha<1} 4\alpha < 4$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی محبوب)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ به ترکیبات یونی در حالت جامد الکترولیت و در صورتی که در آب محلول باشند، به محلول آبی آن‌ها محلول الکترولیت گفته می‌شود.

۲) نادرست؛ موادی مانند HCl با وجود این‌که مولکولی هستند در آب یونش می‌یابند و با تغییر غلظت یون‌ها رسانایی الکتریکی محلول را تغییر می‌دهند.

۳) درست؛ گل ادریسی در خاک‌هایی با خاصیت اسیدی به رنگ آبی در می‌آید.

۴) نادرست؛ به‌طور مثال $Mg(OH)_{2(s)}$ رسوب است و در آب نامحلول می‌باشد ولی به عنوان ضد اسید به کار می‌رود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۷، ۳۲ و ۳۴)

(مشابه متن کتاب درسی)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(حسین شاهسواری)*

بررسی موارد نادرست:

ب) نادرست؛ غلظت یون هیدرونیوم در محلول شمارهٔ (۱) بیشتر است پس غلظت یون هیدروکسید در آن کمتر است.

ت) نادرست؛ حجم و غلظت اولیهٔ دو اسید با هم برابر است پس مقدار گاز هیدروژن تولیدی در واکنش آن‌ها با نوار منیزیم برابر می‌شود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۸، ۱۹ و ۲۳ تا ۲۸)

(مشابه با هم بیندیشیم صفحه‌های ۱۸ و ۱۹ کتاب درسی)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(ندا حسین‌پورمقدم)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست $[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-1/7} = 2\times10^{-2}\ mol.L^{-1}$

$$\text{درجهٔ یونش } (\alpha) = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل‌شده}}$$

$$\Rightarrow [H^+] = (M)\ \text{غلظت اولیهٔ محلول} \times (\alpha)\ \text{درجهٔ یونش}$$

$$\Rightarrow M = \frac{2\times10^{-2}}{0/1} = 0/2\ mol.L^{-1}$$

$$\text{۱۰mL محلول} \times \frac{\text{۰/۲mol } CH_3COOH}{\text{۱۰۰۰mL محلول}} \times \frac{\text{۶۰g } CH_3COOH}{\text{۱mol } CH_3COOH}$$

$$= \text{۰/۱۲g } CH_3COOH$$

۲) درست؛ بنابر محاسبات موجود در گزینهٔ «۱» غلظت یون H^+ برابر $۲\times۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱}$ است.

۳) درست؛

$$pH_{\text{اولیه}} = ۱/۷ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱/۷} \Rightarrow [H^+]_{\text{اولیه}} = ۲\times۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱}$$

$$\Delta pH = ۰/۷ \Rightarrow pH_{\text{ثانویه}} = ۱/۷ - ۰/۷ = ۱$$

$$pH_{\text{ثانویه}} = ۱ \Rightarrow [H^+]_{\text{ثانویه}} = ۱۰^{-۱}\,mol.L^{-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{[H^+]_{\text{ثانویه}}}{[H^+]_{\text{اولیه}}} = \frac{۱۰^{-۱}}{۲\times۱۰^{-۲}} = ۵$$

۴) نادرست؛ $CH_3COOH + NaOH \rightarrow CH_3COONa + H_2O$

$$\text{۲۰۰mL محلول} \times \frac{\text{۰/۲mol اسید}}{\text{۱۰۰۰mL}} \times \frac{\text{۱mol NaOH}}{\text{۱mol اسید}}$$

$$\times \frac{\text{۱L NaOH}}{\text{۰/۵mol NaOH}} \times \frac{\text{۱۰۰۰mL}}{\text{۱L}} = \text{۸۰mL}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۸ تا ۳۲)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(محسن میمونی)*

می‌دانیم با رقیق کردن محلول یک اسید pH آن افزایش می‌یابد. اگر pH اولیه محلول را برابر x در نظر بگیریم، پس از رقیق‌سازی pH برابر $x+۱/۷$ می‌شود. بنابراین نسبت $[H^+]$ نهایی به اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{[H^+]_۲}{[H^+]_۱} = \frac{۱۰^{-(x+۱/۷)}}{۱۰^{-x}} = ۱۰^{-۱/۷} = ۱۰^{-۲}\times۱۰^{۰/۳} = ۰/۰۲$$

در مرحلهٔ بعد با استفاده از رابطهٔ زیر حجم محلول اولیه را می‌یابیم:

$$M_۱V_۱ = M_۲V_۲ \Rightarrow V_۱ = \frac{M_۲}{M_۱}\times V_۲$$

$$V_۱ = ۰/۰۲\times۴۵۰mL = ۹mL$$

و در نهایت حجم آب اضافه شده به محلول را به دست می‌آوریم:

$$\text{حجم آب اضافه شده} = ۴۵۰ - ۹ = ۴۴۱mL$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرعلی بیات)*

واکنش تعادلی یونش این اسید به شرح زیر است:

	$HA(aq)$	+ $H_2O(l)$	⇌ $H_3O^+(aq)$	+ $A^-(aq)$
ابتدا	M		–	–
پس از یونش	$M-M\alpha$		$M\alpha$	$M\alpha$

حال نسبت گفته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{غلظت گونه‌ها پس از یونش}}{\text{غلظت تعادلی HA}} = \frac{(M-M\alpha)+(M\alpha)+(M\alpha)}{M-M\alpha}$$

$$= \frac{M+M\alpha}{M-M\alpha} = \frac{۱+\alpha}{۱-\alpha} = ۲ \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۳}$$

حال با توجه به رابطهٔ K_a و pH داریم:

$$pH = ۳/۷ \Rightarrow ۱۰^{-pH} = [H^+] = ۱۰^{-۳/۷} = ۱۰^{-۴}\times۱۰^{۰/۳}$$

$$= ۲\times۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱}$$

$$K_a = \frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha} = \frac{(M\alpha)\alpha}{۱-\alpha} \xrightarrow[\alpha=\frac{۱}{۳}]{[H^+]=M\alpha} K_a = \frac{۲\times۱۰^{-۴}\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}}$$

$$= ۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۹ و ۲۳ تا ۲۵)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

ابتدا غلظت یون هیدرونیوم را در محلول HCl را محاسبه می‌کنیم:

$$[H_3O^+] = \frac{۰/۰۰۷}{۰/۱L} = ۷\times۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱}$$

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log(۷\times۱۰^{-۲}) = -(۰/۸۵-۲) = ۱/۱۵$$

سپس غلظت یون هیدروکسید را در محلول آمونیاک محاسبه می‌کنیم:

$$[OH^-] = \frac{۰/۰۰۲}{۰/۱L} = ۲\times۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱}$$

$$[H^+][OH^-] = ۱۰^{-۱۴}$$

$$[H^+] = \frac{۱\times۱۰^{-۱۴}}{۲\times۱۰^{-۲}} = ۵\times۱۰^{-۱۳}$$

$$pH = -\log(۵\times۱۰^{-۱۳}) = -(۰/۷-۱۳) = ۱۲/۳$$

$$\Delta pH = ۱۲/۳ - ۱/۱۵ = ۱۱/۱۵$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

۸- **گزینهٔ «۲»** (مینا سیدحسینی)

موارد (الف) و (ب) با توجه به متن کتاب درسی صحیح می‌باشند.

بررسی موارد نادرست:

پ) با توجه به متن کتاب درسی شیر منیزی یکی از رایج‌ترین ضداسیدها می‌باشد که به صورت سوسپانسیون (و نه کلوئید) مصرف می‌شود.

ت) ضداسیدها صرفاً برای انجام عملکرد خود لزومی ندارد که در ساختارشان یون هیدروکسید (OH^-) وجود داشته باشد. مثل سدیم هیدروژن کربنات با فرمول $NaHCO_۳$ که خاصیت بازی دارد و در ساختار آن یون OH^- وجود ندارد، بلکه محلول آن در آب در طی واکنش‌هایی که انجام می‌دهد یون OH^- تولید می‌کند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۶، ۲۶ و ۳۲)

(مشابه متن کتاب درسی)

۹- **گزینهٔ «۲»** (فرشید مرادی)

ابتدا میزان یون هیدرونیومی که محلول اسیدی دارد را محاسبه می‌کنیم:

$$pH = ۳/۷ \xrightarrow{[H^+]=۱۰^{-pH}} [H^+] = ۱۰^{-۳/۷}$$

$$\Rightarrow [H^+] = ۲\times۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱}$$

$$۱L\times۲\times۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱} = ۲\times۱۰^{-۴}\,mol\ H^+$$

$$H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_۲O(l) \Rightarrow ۲\times۱۰^{-۴}\,mol\ OH^-$$

اگر قرص حاوی a مول منیزیم هیدروکسید و b مول آلومینیم هیدروکسید باشد، تعداد یون هیدروکسیدی که تولید می‌کند $(۲a+۳b)$ مول خواهد بود.

$$\left.\begin{array}{l} ۱)\ ۲a+۳b = ۲\times۱۰^{-۴} \\ ۲)\ ۵۸a+۷۸b = ۵۳/۵\times۱۰^{-۴}\,g \end{array}\right\} \xrightarrow{۱)\times۲۹}$$

$$۱)\ ۵۸a+۸۷b = ۵۸\times۱۰^{-۴}\ ,\ ۲)\ ۵۸a+۷۸b = ۵۳/۵\times۱۰^{-۴}$$

$$\Rightarrow ۹b = ۴/۵\times۱۰^{-۴} \Rightarrow b = ۰/۵\times۱۰^{-۴} \Rightarrow a = ۰/۲۵\times۱۰^{-۴}$$

$$\frac{a}{b} = ۰/۵$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۳۲)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (هدی بهاری‌پور)

برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی شوینده‌ها و زدودن بهتر چربی‌ها می‌توان به آن‌ها جوش شیرین $(NaHCO_۳)$ اضافه کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) درست $NaHCO_۳ + HCl \rightarrow CO_۲ + H_۲O + NaCl$

۲) درست؛ محلول $SO_۳$ خاصیت اسیدی و محلول $NH_۳$ خاصیت بازی دارند.

۳) درست

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۶، ۳۰ تا ۳۲ و ۳۶)

شیمی ۳

۱- **گزینهٔ «۲»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) شکل A مربوط به قلمروی تولید مواد مانند آبکاری است.

۳) شکل C چراغ خورشیدی را نشان می‌دهد که از لامپ LED، سلول خورشیدی و باتری قابل شارژ تهیه شده است.

۴) برای ساخت باتری لیمویی به دو فلز با جنس‌های متفاوت نیاز است. (به‌طور مثال مس و روی)

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

واکنش انجام شده به صورت $2Na + Cl_2 \rightarrow 2NaCl$ می‌باشد که در آن اتم‌های سدیم الکترون از دست می‌دهند $(Na \rightarrow Na^+ + e^-)$ و اکسایش پیدا می‌کنند. به این ترتیب به عنوان کاهنده باعث کاهش یافتن گاز کلر $(Cl_2 + 2e^- \rightarrow 2Cl^-)$ خواهند شد.

(شیمی ۳- مشابه با هم بیندیشیم صفحهٔ ۴۰)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست؛ $A\ (_{28}Ni)$ در واکنش کاهنده است و اکسایش می‌یابد.

۲) نادرست؛ معادلهٔ کاهش به صورت $B_2(g) + 4e^- \rightarrow 2B^{2-}(s)$ است.

۳) نادرست؛ به ازای تشکیل هر مول فراوردهٔ یونی، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود:

$$0/4\,mol\,NiO \times \frac{2\,mol\,e^-}{1\,mol\,NiO} \times \frac{6/02 \times 10^{23} e^-}{1\,mol\,e^-} = 4/816 \times 10^{23} e^-$$

۴) نادرست؛ قدرت اکسندگی گوگرد از قدرت اکسندگی اکسیژن کمتر است.

(شیمی ۳- صفحهٔ ۴۰)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا جمشیدی)*

عبارت صورت سوال نادرست است.

اغلب فلزها در واکنش با نافلزها تمایل دارند الکترون از دست بدهند و اکسایش یابند.

بررسی برخی گزینه‌ها:

۱) گونهٔ کاهندهٔ فلز منیزیم می‌باشد که با توجه به آرایش الکترونی آن، دارای ۳ لایهٔ اشغال شده از الکترون می‌باشد.

$$_{12}Mg: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2$$

۴) اغلب فلزها در واکنش با محلول اسیدها، گاز هیدروژن و نمک تولید می‌کنند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

(مشابه متن کتاب درسی)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(امیرعلی بیات)*

به ازای هر مول فلز مس تولید شده در واکنش، یک مول فلز روی از تیغه جدا می‌شود. این یعنی جرم تیغه به ازای مصرف ۱ مول فلز روی به اندازهٔ ۱ گرم کاهش می‌یابد.

تغییر جرم تیغه به ازای مصرف یک مول فلز روی :

$$\text{جرم Zn جدا شده - جرم Cu رسوب کرده} = 64 - 65 = -1\,g.mol^{-1}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

واکنش موازنه شدهٔ انجام شده به صورت زیر است که ضرایب دو سمت معادله با هم برابر است.

$$Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$$

به دلیل مصرف یون Cu^{2+}، با گذشت زمان شدت رنگ محلول کاهش می‌یابد. یون‌های Cu^{2+} در واکنش با گرفتن الکترون‌های فلز روی باعث اکسایش آن می‌شوند پس اکسنده هستند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

(مشابه متن و شکل کتاب درسی)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(یاسر راش)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) در واکنش‌هایی مانند: « $Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow \ldots$ »، یون مس کاهش یافته و به اتم مس (Cu) تبدیل می‌شود که به صورت رسوب ظاهر می‌گردد. گونه‌ای که اکسید می‌شود، معمولاً به شکل یون در محلول باقی می‌ماند.

۲) هر فرایندی که به سمت پایداری بیشتر (انرژی کمتر) پیش می‌رود، تفاوت انرژی را به صورت گرما یا نور آزاد می‌کند.

۳) فلز کاهنده‌تر، تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون دارد و می‌تواند الکترون‌های خود را به کاتیون فلز با قدرت کاهندگی کمتر بدهد و آن را کاهش داده و از نمک آن خارج کرده و به صورت فلز آزاد کند.

۴) فلزاتی که به صورت آزاد یافت می‌شوند (مانند طلا و پلاتین) در برابر اکسایش بسیار مقاوم هستند و قدرت کاهندگی بسیار پایینی دارند، یعنی تمایل کمتری به از دست دادن الکترون دارند و بنابراین به صورت ترکیب (اکسید شده) در طبیعت یافت نمی‌شوند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(هدی بهاری‌پور)*

$$\underset{۱۰g}{Zn(s)} + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + \underset{?g}{Cu(s)}$$

$$۲۴/۰۸\times۱۰^{۲۱}e^{-}\times\frac{۱mol\ e^{-}}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^{-}}\times\frac{۱mol\ Cu}{۲mol\ e^{-}}$$

$$\times\frac{۶۴g\ Cu}{۱mol\ Cu}=۱۲۸\times۱۰^{-۲}g\ Cu$$

$$۲۴/۰۸\times۱۰^{۲۱}e\times\frac{۱mol\ e^{-}}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^{-}}\times\frac{۱mol\ Zn}{۲mol\ e}$$

$$\times\frac{۶۵g\ Zn}{۱mol\ Zn}=۱۳۰\times۱۰^{-۲}g\ Zn$$

جرم تیغهٔ جامد نهایی $۱۰+۱/۲۸-۱/۳=۹/۹۸$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(احسان روستایی)*

معادلهٔ موازنه شده به صورت زیر است:

$$۲Al+۳Cu^{۲+}\rightarrow ۲Al^{۳+}+۳Cu$$

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ یون $Cu^{۲+}$ کاهش یافته و اکسنده است نه فلز Cu.

ب) درست؛ با توجه به تغییر عدد اکسایش، واکنش از نوع اکسایش- کاهش است.

پ) درست؛

(تغییر عدد اکسایش کاهنده) × (تعداد کاهنده) = شمار الکترون مبادله شده برحسب مول

$$=۲\times۳=۶mol\ e^{-}$$

$$۲/۷g\ Al\times\frac{۱mol\ Al}{۲۷g\ Al}\times\frac{۶mol\ e^{-}}{۲mol\ Al}=۰/۳mol\ e^{-}$$

ت) درست؛ مجموع ضرایب استوکیومتری مواد برابر ۱۰ است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا بیانی)*

با توجه به میزان افزایش دمای محلول‌ها، مقایسهٔ قدرت کاهندگی فلزها به صورت زیر است: $A>C>B>M>D$ ؛ قدرت کاهندگی

بررسی موارد:

مورد اول: درست

مورد دوم: درست

$A^{a+}<C^{c+}<B^{+}<M^{m+}<D^{d+}$ ؛ قدرت اکسندگی

مورد سوم: واکنش فلز B با یون D^{d+} انجام‌پذیر است و دمای مخلوط واکنش افزایش می‌یابد.

مورد چهارم: محلول حاوی نمک C را نمی‌توان در ظرفی از جنس A نگهداری کرد زیرا واکنش اکسایش- کاهش میان آن‌ها انجام می‌شود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

بررسی همهٔ موارد:

مورد اول: در واکنش‌های سوختن، اکسیژن معمولاً الکترون می‌گیرد و کاهش می‌یابد، بنابراین نقش اکسنده (عامل اکسایش مادهٔ سوختنی) را ایفا می‌کند.

مورد دوم: طلا و پلاتین جزء فلزات نجیب هستند و به دلیل تمایل بسیار کم به از دست دادن الکترون، با اکسیژن واکنش نمی‌دهند و اکسید نمی‌شوند. این مقاومت، از ویژگی‌های بارز این فلزات است.

مورد سوم: بسیاری از واکنش‌های اکسایش- کاهش گرماده هستند (نه همهٔ آن‌ها). همچنین سرعت واکنش ربطی به مقدار گرمای آزاد شده ندارد و تنها بر سرعت آزاد شدن گرما می‌تواند تاثیرگذار باشد.

مورد چهارم: در واکنش‌های شیمیایی (از جمله واکنش‌های «اکسایش- کاهش»)، تنها آرایش الکترون‌ها تغییر می‌کند و تعداد پروتون‌ها (هویت اتم‌ها) و نوترون‌ها ثابت می‌ماند.

مورد پنجم: در هر واکنش «اکسایش- کاهش»، قانون بقای بار الکتریکی حکم می‌کند که تعداد کل الکترون‌های از دست داده شده (در اکسایش) باید دقیقاً برابر با تعداد کل الکترون‌های گرفته شده (در کاهش) باشد تا بار کلی حفظ شود. این یک اصل پایه در موازنهٔ واکنش‌های اکسایش- کاهش است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

شیمی ۳

۱- **گزینهٔ «۴»** *(احسان روستایی)*

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی از مواد پتروشیمیایی طی واکنش‌های پیچیده در صنعت تولید می‌شود و در تهیهٔ آن از چربی استفاده نمی‌شود.

ب) نادرست؛ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی برخلاف پاک‌کنندهٔ صابونی با یون Mg^{2+} موجود در آب سخت تشکیل رسوب نمی‌دهد.

پ) درست؛ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی دارای ۳ اتم اکسیژن و صابون دارای ۲ اتم اکسیژن می‌باشد. در نتیجه تعداد جفت الکترون ناپیوندی در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی بیشتر است.

ت) درست؛ فرمول شیمیایی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی و صابون با ۱۶ اتم کربن و R سیرشده به صورت زیر است:

پاک‌کنندهٔ غیرصابونی: $C_{10}H_{21}C_6H_4SO_3^-Na^+$

پاک‌کنندهٔ صابونی: $C_{15}H_{31}COONa$

تفاوت جرم مولی برابر خواهد بود با:

$$[(16\times12)+(25\times1)+32+(3\times16)+23]$$

$$-[(16\times12)+(31\times1)+(2\times16)+23]=42\,g.mol^{-1}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۶، ۹ و ۱۱)

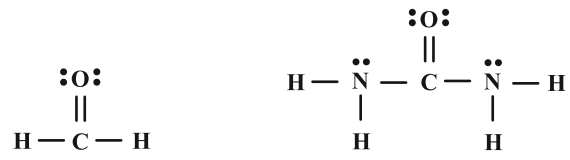
(برگرفته از متن کتاب)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

در شرایط یکسان دما و غلظت هر چه pH محلول اسیدی کمتر باشد، ثابت یونش آن بزرگ‌تر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با توجه به ساختار لوویس آن‌ها این نسبت برابر ۲ می‌باشد:



۲) یکی از شباهت‌های محلول و کلوئید این است که هر دو پایدار بوده و ته‌نشین نمی‌شوند. اندازهٔ ذرات: سوسپانسیون > کلوئید > محلول

۴) زیرا ثابت یونش فورمیک اسید بزرگ‌تر بوده و اسید قوی‌تری نسبت به استیک اسید است؛ بنابراین غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۰/۱ مولار آن بیشتر از استیک اسید است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۴، ۶، ۱۸، ۱۹ و ۲۳ تا ۲۷)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا طاهری‌نژاد)*

$$K_a=\frac{[H^+][A^-]}{[HA]_{\text{تعادلی}}}\Rightarrow[HA]_{\text{تعادلی}}=\frac{10^{-8}}{4\times10^{-5}}$$

$$=2/5\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

$$K_a=\frac{[H^+][B^-]}{[HB]_{\text{تعادلی}}}\Rightarrow[HB]_{\text{تعادلی}}=\frac{10^{-8}}{4\times10^{-4}}$$

$$=2/5\times10^{-5}\,mol.L^{-1}$$

غلظت اولیهٔ HA: $2/5\times10^{-4}+10^{-4}=3/5\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$

غلظت اولیهٔ HB: $2/5\times10^{-5}+10^{-4}=1/25\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$

$$\begin{cases}\alpha_{HA}=\dfrac{10^{-4}}{3/5\times10^{-4}}=\dfrac{1}{3/5}\\ \alpha_{HB}=\dfrac{10^{-4}}{1/25\times10^{-4}}=\dfrac{1}{1/25}\end{cases}\Rightarrow\frac{3/5}{1/25}=\frac{14}{5}=2/8$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸، ۱۹، ۲۳ تا ۲۵)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به این‌که pH محلول نهایی برابر با ۱/۲ است، بنابراین محلول نهایی اسیدی بوده و غلظت یون H^+ در آن برابر است با:

$$[H^+]=10^{-pH}=10^{-1/2}=10^{-2}\times10^{0/8}=10^{-2}\times10^{0/5}\times10^{0/3}$$

$$=10^{-2}\times3\times2=6\times10^{-2}$$

حال می‌توان با استفاده از رابطهٔ زیر، ظرفیت باز مورد استفاده را تعیین کرد:

$$[H^+]_{\text{باقی‌مانده}}=\frac{n_aM_aV_a-n_bM_bV_b}{V_a+V_b}$$

$$\Rightarrow6\times10^{-2}=\frac{(1\times0/4\times800)-(n_b\times0/65\times200)}{800+200}$$

$$\Rightarrow60=320-130n_b\Rightarrow n_b=2$$

SanjeshCloud

به این ترتیب این باز دو ظرفیتی بوده و فرمول کلی آن به صورت $B(OH)_2$ خواهد بود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۳۱)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

موارد سوم و چهارم درست هستند.

بررسی موارد:

مورد اول: در نیم‌واکنش اکسایش، گونهٔ مورد نظر الکترون از دست می‌دهد. در نتیجه بار الکتریکی آن مثبت‌تر می‌شود. اما گونهٔ مدنظر اکسنده نمی‌باشد و در واقع کاهنده است.

مورد دوم: در واکنش‌های اکسایش- کاهش، نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش هم‌زمان با یکدیگر صورت می‌گیرند.

مورد سوم: در واکنش انجام شده بین Zn و Cu^{2+}، فلز روی نقش کاهنده را دارد و مصرف هر مول از آن (طی نیم‌واکنش $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$) با مبادلهٔ ۲ مول الکترون همراه است.

مورد چهارم: در برخی واکنش‌های اکسایش- کاهش افزون بر داد و ستد الکترون، انرژی نیز آزاد می‌شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

(برگرفته از متن کتاب)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(ندا حسین‌پورمقدم)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ در سلول گالوانی کروم- مس با توجه به مقادیر پتانسیل کاهشی داده شده فلز مس به عنوان کاتد و فلز کروم به عنوان آند عمل می‌کنند و الکترون‌ها در مدار خارجی از آند (الکترود کروم) به سمت کاتد (الکترود مس) حرکت می‌کنند از طرفی برای برقراری تعادل بار در محلول‌ها، برخی یون‌های موجود توسط غشاء متخلخل جابه‌جا می‌شوند. در محلول آند، به دلیل تشکیل یون‌های Cr^{3+}، بار مثبت تجمع می‌یابد. لذا آنیون‌های موجود توسط دیواره متخلخل به سمت آند حرکت می‌کنند در حالی که در محلول کاتد، به دلیل مصرف یون‌های Cu^{2+}، بار منفی تجمع می‌یابد، بنابراین کاتیون‌های دیواره متخلخل به سمت کاتد حرکت می‌کنند. در نتیجه جهت حرکت الکترون‌ها (از کروم به مس) با جهت حرکت آنیون‌های موجود در دیواره متخلخل (از دیواره متخلخل به سوی کروم) همسو نیستند.

۲) درست

$$E^\circ_{cell} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} \Rightarrow (+0/34) - (-0/74) = 1/08V$$

در آند (کروم) نیم‌واکنش اکسایش رخ می‌دهد $(Cr \rightarrow Cr^{3+} + 3e^-)$ در نتیجه جرم الکترود کروم کاهش می‌یابد. در کاتد (مس) واکنش کاهش رخ می‌دهد $(Cu^{2+} + 2e^- \rightarrow Cu)$ در نتیجه جرم الکترود مس افزایش می‌یابد.

۳) درست؛ واکنش کلی سلول: $2Cr + 3Cu^{2+} \rightarrow 2Cr^{3+} + 3Cu$

$$1/806\times10^{22}e^- \times \frac{1\,mol\ e^-}{6/02\times10^{23}e^-} \times \frac{3\,mol\ Cu}{6\,mol\ e^-} \simeq 0/015\,mol\ Cu$$

۴) درست؛ با توجه به واکنش کلی سلول

$$2Cr + 3Cu^{2+} \rightarrow 2Cr^{3+} + 3Cu$$

در هر واکنش کامل، تعداد ۳ مول یون در سمت واکنش‌دهنده (۳ مول Cu^{2+}) مصرف و ۲ مول یون و در سمت فراورده (۲ مول Cr^{3+}) تولید می‌شود. در نتیجه با گذشت زمان و پیشرفت واکنش سلول گالوانی «کروم- مس» گرچه یون‌های Cr^{3+} در نیم‌سلول آند تولید می‌شود اما مصرف بیشتر یون‌های Cu^{2+} در نیم‌سلول کاتد سبب می‌شود که در مجموع، تعداد شمار مول یون‌های موجود در کل سلول به تدریج کاهش یابد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۹)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرعلی بیات)*

اگر E° نیم‌سلول مربوط به فلز C برخلاف فلز D از E° نیم‌سلول SHE که صفر است بزرگ‌تر باشد یعنی فلزهای A، B و C برخلاف D و E، E° بزرگ‌تری از یون H^+ دارند و نمی‌توانند به آن الکترون بدهند و نقش کاهنده داشته باشند. پس با محلول HCl واکنش نمی‌دهند و گاز H_2 تولید نمی‌کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) کاتد و آند سلول گفته شده به ترتیب A و E می‌باشد که جهت حرکت الکترون‌ها از الکترود آند به سمت الکترود کاتد یعنی از E به سمت A است.

۲) کاتیون کاتد نباید از غشاء متخلخل عبور کند وگرنه فرایند انتقال الکترون بین اکسنده و کاهنده به صورت مستقیم رخ می‌دهد.

۳) با توجه به این‌که E° فلز C از B کوچک‌تر است، پس نمی‌توان B^{2+} را در ظرفی از جنس C نگهداری کرد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحهٔ ۴۸)

۸- **گزینهٔ «۳»** (محسن میمونی)

با توجه به واکنش کلی انجام شده مقدار مس رسوب کرده بر روی تیغه آن را محاسبه می‌کنیم.

$$2Al(s)+3Cu^{2+}(aq)\rightarrow 2Al^{3+}(aq)+3Cu(s)$$

$$?\,g\,Cu=9/03\times10^{22}\,e^-\times\frac{1\,mol\,e^-}{6/02\times10^{23}\,e^-}\times\frac{3\,mol\,Cu}{6\,mol\,e^-}$$

$$\times\frac{64\,g\,Cu}{1\,mol\,Cu}\times\frac{75}{100}=3/6\,g\,Cu$$

= مقدار یون Cu^{2+} نهایی

مقدار یون Cu^{2+} مصرف شده − مقدار یون Cu^{2+} اولیه

مقدار یون Cu^{2+} اولیه $=2L$ محلول $\times\frac{0/1\,mol\ Cu^{2+}}{1L\ محلول}$

$$=0/2\,mol\ Cu^{2+}$$

مقدار Cu^{2+} مصرف شده $=9/03\times10^{22}\,e^-\times\frac{1\,mol\,e^-}{6/02\times10^{23}\,e^-}$

$$\times\frac{3\,mol\,Cu^{2+}}{6\,mol\,e^-}=0/075\,mol\,Cu^{2+}$$

مقدار یون Cu^{2+} نهایی $=0/2\,mol-0/075\,mol$

$$=0/125\,mol\ Cu^{2+}$$

غلظت یون Cu^{2+} نهایی $=\frac{0/125\,mol\,Cu^{2+}}{2L\ محلول}$

$$=6/25\times10^{-2}\,mol.L^{-1}\ Cu^{2+}$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹)

۹- **گزینهٔ «۲»** (مجتبی محبوب)

از آنجا که فلز D با اکسیژن واکنش نمی‌دهد ولی فلز B با اکسیژن واکنش می‌دهد می‌توان نتیجه گرفت قدرت کاهندگی فلز D از فلز B کمتر است و چون محلول سولفات فلز A را بدون واکنش می‌توان در ظرفی از جنس فلز B نگهداری کرد می‌توان نتیجه گرفت قدرت کاهندگی فلز B از فلز A کمتر است و فلز A کاهندهٔ قوی‌تری است. در نهایت چون فلز C می‌تواند با محلول سولفات فلز A واکنش دهد قدرت کاهندگی آن نسبت به فلز A بیشتر است و مقایسهٔ درست قدرت کاهندگی فلزات در گزینهٔ «۲» آمده است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

(برگرفته از متن کتاب)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** (سعید تیزرو)

واکنش‌های موازنه شدهٔ اکسایش- کاهش به صورت زیر است:

$$2Al+3Mn^{2+}\rightarrow 2Al^{3+}+3Mn$$

$$Zn+2Ag^{+}\rightarrow Zn^{2+}+2Ag$$

در واکنش اول به ازای هر بار انجام واکنش، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود، در حالی که در واکنش دوم به ازای هر بار انجام واکنش، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود. تعداد e^- مبادله شده در دو واکنش را x درنظر می‌گیریم:

افزایش جرم تیغه نقره در واکنش دوم : $x\,mol\,e^-\times\frac{2\,mol\,Ag}{2\,mol\,e^-}$

$$\times\frac{108\,g\,Ag}{1\,mol\,Ag}=108x\,g$$

کاهش جرم تیغهٔ آلومینیم در واکنش اول : $x\,mol\,e^-\times\frac{2\,mol\,Al}{6\,mol\,e^-}$

$$\times\frac{27\,g\,Al}{1\,mol\,Al}=9x\,g$$

$$\Rightarrow \text{نسبت خواسته شده}=\frac{108x}{9x}=12$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸)

۱ با توجه به فرمول ترکیب‌های داده‌شده، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

۱) $C_{۱۸}H_{۳۵}O_۲K$

۲) $CH_۳CH_۲COOH$

۳) $C_{۵۱}H_{۹۲}O_۶$

۴) $CO(NH_۲)_۲$

الف) ترکیب (۲)، سومین عضو خانوادهٔ اسیدهای چرب محسوب می‌شود.

ب) ترکیب (۴) مانند اتیلن گلیکول، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارد.

پ) ترکیب (۱) همانند ترکیبی با فرمول $CH_۳COONH_۴$، خاصیت پاک‌کنندگی دارد و حالت فیزیکی دو ترکیب در دمای اتاق یکسان است.

ت) ترکیب (۳) را می‌توان یک استر سه‌عاملی در نظر گرفت که زنجیرهای هیدروکربنی در آن، سیرنشده هستند.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ

۳) ب ـ ت ۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) اسیدهای چرب، دسته‌ای از کربوکسیلیک اسیدها ($RCOOH$) هستند که تعداد زیادی کربن دارند. اسید داده‌شده، فقط ۳ اتم کربن دارد و اسید چرب محسوب نمی‌شود. اگر *می‌گفت* سومین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها درست بود!

ب) ترکیب (۴) همان اوره است که N متصل به H دارد. اتیلن گلیکول $(HO-CH_۲CH_۲-OH)$، O متصل به H دارد؛ به همین دلیل این دو مولکول، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با خود و یا آب را دارند.

نکته بین مولکول‌هایی که در ساختار آن‌ها یکی از پیوندهای $H-O$ ، $H-N$ یا $H-F$ وجود دارد (یعنی H متصل به FON دارند)، می‌تواند پیوند هیدروژنی برقرار شود. مانند: HF، $NH_۳$ ، $H_۲O$ ، $C_۲H_۵OH$ و ...!

پ) ترکیب (۱)، نمک پتاسیم اسید چرب بوده و صابون مایع است، اما دقت کنید هر ترکیب آمونیوم‌داری $(RCOONH_۴)$، خاصیت پاک‌کنندگی ندارد؛ *باید تعداد کربن‌هاش زیاد باشه!* $CH_۳COONH_۴$، تعداد کربن کمی دارد.

ت)

نکته استرهای سه‌عاملی با زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده، دارای ۳ پیوند دوگانهٔ $C(=O)$ هستند؛ بنابراین نسبت به آلکان‌های هم‌کربن خود $(C_nH_{۲n+۲})$، ۶ اتم هیدروژن کم‌تر دارند! از این رو فرمول عمومی آن‌ها به صورت $C_nH_{۲n-۴}O_۶$ است.

فرمول $C_{۵۱}H_{۹۲}O_۶$ از رابطهٔ $C_nH_{۲n-۴}O_۶$ تبعیت نمی‌کند و این نشان می‌دهد که زنجیرهای هیدروکربنی در آن سیرشده نیستند.

$n = ۵۱ \xrightarrow{\text{اگر سیرشده باشد.}}$ شمار اتم‌های هیدروژن $= ۲(۵۱) - ۴ = ۹۸$

ترکیب داده‌شده نسبت به حالت سیرشده، $۹۸ - ۹۲ = ۶$ اتم هیدروژن کم‌تر دارد؛ پس در مجموع دارای ۳ پیوند $C=C$ است.

۲ **کدام مورد درست است؟**

۱) بیماری واگیردار وبا امروزه به لطف صابون و شوینده‌ها، دیگر برای جوامع انسانی تهدید محسوب نمی‌شود.

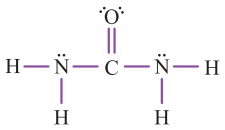
۲) آهنگ رشد شاخص امید به زندگی در نواحی برخوردار بیشتر از نواحی کم‌برخوردار است.

۳) سدیم کلرید همانند اتانول، مولکول‌های قطبی دارد و در آب حل می‌شود.

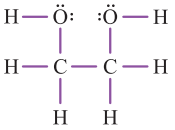
۴) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول اوره کم‌تر از اتیلن گلیکول است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ساختار لوویس مولکول‌های اوره و اتیلن گلیکول به صورت زیر است:



اوره



اتیلن گلیکول

نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی:

$$\begin{cases} \text{اوره} = \frac{۸}{۴} \\ \text{اتیلن گلیکول} = \frac{۹}{۴} \end{cases}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): بیماری وبا هنوز هم می‌تواند برای جوامع انسانی تهدیدکننده باشد.

گزینهٔ (۲): آهنگ رشد یا شیب نمودار امید به زندگی در طول سال‌های اخیر در نواحی کم‌برخوردار بیشتر از نواحی برخوردار بوده است. اگر به نمودار کتاب درسی دقت کنید می‌بینید که شیب نمودار مربوط به نواحی کم‌برخوردار بیشتر است.

امید به زندگی در هر سال: نواحی برخوردار < میانگین جهانی < نواحی کم‌برخوردار

شیب منحنی امید به زندگی (آهنگ رشد): نواحی کم‌برخوردار < میانگین جهانی < نواحی برخوردار

گزینهٔ (۳): سدیم کلرید ($NaCl$) همانند اتانول ($C_۲H_۵OH$) در آب حل می‌شود، اما دقت کنید که سدیم کلرید، یک ترکیب یونی است و در ساختار آن مولکول وجود ندارد و به کار بردن واژهٔ مولکول برای آن ممنوعه!

۳ **از میان دو نمونهٔ صابون سدیم (I) و صابون پتاسیم (II) که زنجیر هیدروکربنی در آن‌ها یکسان است، کدام صابون نقطهٔ ذوب بالاتری دارد و تفاوت جرم مولی صابون دیگر با اسید چرب سازندهٔ آن، چند گرم است؟**

$(H = ۱, Na = ۲۳, K = ۳۹ : g.mol^{-۱})$

۱) صابون II ـ ۲۳

۲) صابون I ـ ۳۸

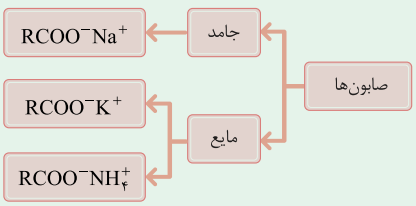
۳) صابون I ـ ۳۹

۴) صابون II ـ ۲۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته

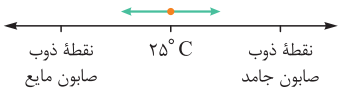
به نمک اسیدهای چرب، صابون می‌گویند. صابون‌های جامد، نمک سدیم، اسید چرب و صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسید چرب هستند؛ پس اگر در ساختار اسیدهای چرب به جای هیدروژن متصل به اتم اکسیژن، Na^+، K^+ یا $NH_۴^+$ قرار گیرد، صابون یا همان نمک اسید چرب به دست می‌آید.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

در دمای اتاق، صابون سدیم (RCOONa)، جامد و صابون پتاسیم (RCOOK)، مایع است. این موضوع نشان می‌دهد که نقطهٔ ذوب صابون سدیم بیشتر از نقطهٔ ذوب صابون پتاسیم است؛ یعنی دمای اتاق برای ذوب‌کردن صابون سدیم کافی نیست، اما می‌تواند صابون پتاسیم را ذوب کند.

یادآوری: هر ماده‌ای پایین‌تر از نقطهٔ ذوب خود، به حالت جامد و بالاتر از نقطهٔ ذوب خود، به حالت مایع است.



پس جواب قسمت اول سؤال شد صابون سدیم! برای قسمت دوم، باید تفاوت جرم مولی صابون پتاسیم را با اسید چرب سازنده‌اش حساب کنیم.

صابون پتاسیم (RCOOK) نسبت به اسید چرب سازنده‌اش (RCOOH)، یک اتم هیدروژن کم‌تر و یک اتم پتاسیم بیشتر دارد:

$$\text{جرم مولی } RCOOK - \text{جرم مولی } RCOOH = \text{جرم مولی } K - \text{جرم مولی } H = ۳۹ - ۱ = ۳۸$$

SanjeshCloud

۴ با توجه به فرمول همگانی پاک‌کننده‌های صابونی جامد، کدام موارد زیر درست است؟

RCOONa

$(H=۱, C=۱۲, O=۱۶, Na=۲۳ : g.mol^{-1})$

الف) اگر بخش آب‌گریز آن، سیرشده و دارای ۱۶ اتم کربن باشد، فرمول آنیون این صابون $C_{۱۶}H_{۳۳}O_۲^-$ است.

ب) قسمت‌های Na^+ و $-COO^-$ در این ترکیب، بخش‌های آب‌دوست و زنجیر بلند هیدروکربنی (R) بخش آب‌گریز هستند.

پ) اگر بخش چربی‌دوست آن دارای ۱۷ اتم کربن و ۲ پیوند دوگانه باشد، جرم مولی صابون ۱/۲۵ برابر جرم مولی گلوکز است.

ت) اگر گروه آلکیل با ۳۱ اتم هیدروژن داشته باشد، درصد جرمی کربن در صابون به تقریب ۸/۳ برابر درصد جرمی یون فلزی است.

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ ت
۳) پ ـ ت
۴) الف ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته

فرمول عمومی پاک‌کننده‌های صابونی جامد به صورت RCOONa است که در آن، R می‌تواند زنجیر هیدروکربنی سیرشده یا سیرنشده باشد.

فرمول عمومی زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده (گروه آلکیل) به صورت $C_nH_{۲n+۱}$ است. اگر زنجیر هیدروکربنی سیرنشده باشد، به ازای هر پیوند $C=C$، دو اتم هیدروژن از فرمول مولکولی آن کم می‌شود؛ مثلاً اگر یک زنجیر هیدروکربنی دارای ۲ پیوند $C=C$ باشد، فرمول مولکولی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$C_nH_{۲n+۱-(۲\times۲)} = C_nH_{۲n-۳}$$

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در ساختار صابون‌ها، زنجیر هیدروکربنی (R)، ناقطبی و آب‌گریز است. اگر این گروه دارای ۱۶ اتم کربن بوده و سیرشده باشد، فرمول آن به صورت $C_{۱۶}H_{۳۳}$ خواهد بود:

فرمول صابون: $C_{۱۶}H_{۳۳}COO^-Na^+$ ⇒ فرمول بخش آنیونی: $C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲^-$

ب) *کاملاً درسته!*

پ) گروه R، آب‌گریز یا چربی‌دوست است.

$$n=۱۷ \xrightarrow{\text{اگر سیرشده باشد.}} C_{۱۷}H_{۳۵} \xrightarrow[(-۴H)]{\text{۲ پیوند دوگانه دارد.}} C_{۱۷}H_{۳۱}$$

$$\Rightarrow \text{فرمول صابون} : C_{۱۷}H_{۳۱}COO^-Na^+ \equiv C_{۱۸}H_{۳۱}O_۲Na$$

$$\frac{\text{جرم مولی صابون } (C_{۱۸}H_{۳۱}O_۲Na)}{\text{جرم مولی گلوکز } (C_۶H_{۱۲}O_۶)} = \frac{(۱۸\times۱۲)+۳۱+(۲\times۱۶)+۲۳}{(۶\times۱۲)+۱۲+(۶\times۱۶)} = \frac{۳۰۲}{۱۸۰} \simeq ۱/۶۷$$

ت) فرمول گروه آلکیل با ۳۱ اتم هیدروژن به صورت $C_{۱۵}H_{۳۱}$ است:

$$\text{فرمول صابون} = C_{۱۵}H_{۳۱}COONa \equiv C_{۱۶}H_{۳۱}O_۲Na$$

$$\frac{\text{درصد جرمی کربن}}{\text{درصد جرمی یون سدیم}} = \frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم سدیم}} = \frac{\text{جرم مولی C} \times \text{مول C}}{\text{جرم مولی Na} \times \text{مول Na}} = \frac{۱۶\times۱۲}{۱\times۲۳} \simeq ۸/۳$$

SanjeshCloud

۵ با توجه به واکنش‌های زیر که مراحل تولید یک نوع صابون را نشان می‌دهند، کدام مورد دربارهٔ A، B و X، نادرست است؟ (ترکیب X، زنجیره‌ای، دارای ۱۷ اتم کربن و جرم یک مول از آن برابر ۲۹۰ گرم است.)

$(H=1, C=12, O=16, Na=23 : g.mol^{-1})$

$$A + 3H_2O \rightarrow 3B + C_3H_5(OH)_3$$

$$B + NaOH \rightarrow X + H_2O$$

۱) در ساختار مولکول B، دو پیوند دوگانه وجود دارد.

۲) شمار پیوندهای C—O در ساختار مولکول A برابر ۶ است.

۳) شمار الکترون‌های ناپیوندی در ساختار A، سه برابر شمار این الکترون‌ها در ساختار X است.

۴) ترکیب A یک استر بلندزنجیر بوده و در دمای اتاق، مایع است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

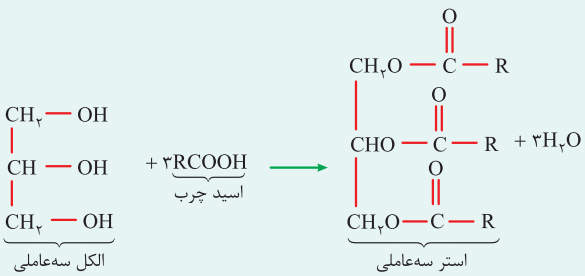
درس Box

چند واکنش مهم:

۱) واکنش تشکیل صابون جامد از اسید چرب:

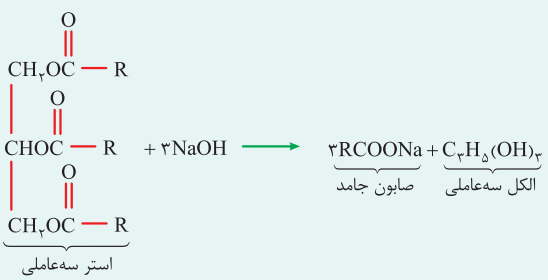
$$\underbrace{RCOOH}_{\text{اسید چرب}} + NaOH \rightarrow \underbrace{RCOONa}_{\text{صابون جامد}} + H_2O$$

۲) واکنش تشکیل استر سه‌عاملی:



واکنش بالا برگشت‌پذیر است، یعنی استر می‌تواند در شرایط مناسب آبکافت شده و به واحدهای سازندهٔ خود تبدیل شود.

۳) واکنش تشکیل صابون از استر سه‌عاملی:



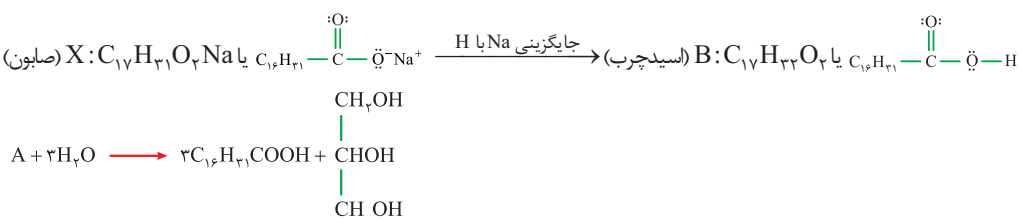
پاسخ خیلی تشریحی ✔

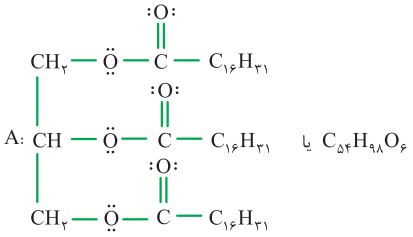
واکنش اول، واکنش آبکافت استر A به الکل $C_3H_5(OH)_3$ و اسید چرب B است و واکنش دوم، واکنش تشکیل صابون سدیم‌دار X، از سدیم هیدروکسید و اسید چرب B می‌باشد.

فرمول شیمیایی صابون X با ۱۷ اتم کربن و جرم مولی $290\ g.mol^{-1}$، $C_{17}H_xO_2Na$ می‌باشد که تعداد اتم‌های هیدروژن در آن، برابر است با:

$$290 = (17\times12) + (x\times1) + (2\times16) + 23 \Rightarrow x = 31$$

در این صورت، داریم:



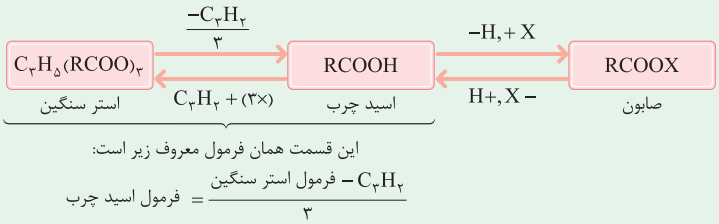


نکته

تبدیل فرمول اسید چرب و استر سنگین به صابون و برعکس[1]

اگر به جای اتم هیدروژن گروه کربوکسیل اسید چرب، یکی از کاتیون‌های Na^+، K^+ یا NH_4^+ قرار گیرد، صابون به دست می‌آید؛ پس برای تبدیل فرمول اسید چرب و صابون به یکدیگر، کافی است اتم هیدروژن گروه کربوکسیل و این کاتیون‌ها را با هم جایگزین کنیم. از طرفی می‌دانیم که با استرهای سنگین هم می‌توان صابون تولید کرد. برای تعیین فرمول صابون حاصل از یک استر سنگین، می‌توانیم ابتدا اسید چرب استر را به دست آورده و سپس فرمول اسید چرب را به فرمول صابون تبدیل کنیم.

با عکس این روند هم می‌توانیم از فرمول صابون به فرمول استر برسیم.



این قسمت همان فرمول معروف زیر است:

$$\text{فرمول اسید چرب} = \frac{\text{فرمول استر سنگین} - C_3H_2}{3}$$

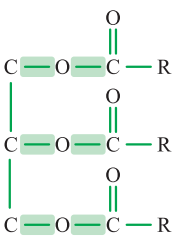
مثال اگر فرمول صابون جامد حاصل از یک استر سنگین به صورت $C_{17}H_{31}O_2Na$ باشد، فرمول استر سنگین را به دست آورید.

$$\underset{\text{صابون}}{C_{17}H_{31}O_2Na} \xrightarrow{-Na,+H} \underset{\text{اسید چرب}}{C_{17}H_{32}O_2} \xrightarrow{(\times 3)+C_3H_2} \underset{\text{استر سنگین}}{C_{54}H_{98}O_6}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر زنجیرهٔ هیدروکربنی R در ساختار B سیرشده باشد، دارای $2\times16+1=33$ اتم هیدروژن خواهد بود؛ در حالی که تعداد اتم‌های هیدروژن در آن $33-31=2$ واحد کم‌تر است. پس یک پیوند دوگانه $C=C$ در زنجیرهٔ R و یک پیوند دوگانه در گروه کربوکسیل $-\overset{O}{\overset{\|}{C}}$ دارد.

گزینهٔ (۲): استرهای سه‌عاملی دارای ۶ پیوند $C-O$ می‌باشند.



گزینهٔ (۳): مطابق با ساختارهای بالا، استر A دارای ۲۴ الکترون ناپیوندی و ترکیب X (صابون)، دارای ۱۰ الکترون ناپیوندی می‌باشند.

$$\frac{24}{10}=2/4$$

گزینهٔ (۴): می‌دانیم روغن زیتون با فرمول مولکولی $C_{57}H_{104}O_6$ که دارای ۳ پیوند $C=C$ می‌باشد، در دمای اتاق مایع است. تعداد هیدروژن‌ها و کربن‌های ترکیب A با فرمول مولکولی $C_{54}H_{98}O_6$، کم‌تر از روغن زیتون است؛ پس نتیجه می‌گیریم که ترکیب A نیز در دمای اتاق مایع می‌باشد.

۱- کتاب تست شیمی دوازدهم خیلی سبز برای سال تحصیلی ۰۵ ـ ۱۴۰۴، به طور کامل بازنویسی شده و نسبت به چاپ‌های قبلی، بسیار کامل‌تر شده است. برای آموزش کامل نکاتی که در آزمون می‌بینید، می‌توانید به این کتاب مراجعه کنید.

۶ کدام مورد درست است؟

۱) کلوئیدها، مخلوط‌هایی ناپایدارند و از توده‌های مولکولی تشکیل شده‌اند.

۲) آب دریا، نوشیدنی‌ها، انواع رنگ‌ها، شوینده‌ها و داروها، همگی مخلوط‌هایی همگن با خواص متفاوت هستند.

۳) رفتار سوسپانسیون‌ها را می‌توان رفتاری بین کلوئیدها و محلول‌ها در نظر گرفت.

۴) مسیر نور از میان مخلوط آب، روغن و صابون مشخص است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته مقایسهٔ محلول‌ها، کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها:

ویژگی / نوع مخلوط	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن‌بودن	ناهمگن	ناهمگن (به ظاهر همگن)	همگن
پایداری	ناپایدار است/ ته‌نشین می‌شود.	پایدار است/ ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است/ ته‌نشین نمی‌شود.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریزماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌های مجزا
نمونه‌های مهم	آب گل‌آلود، شربت معده، شربت خاکشیر	هوای آلوده، مه، چسب، شیر، ژله، سس مایونز، رنگ، مخلوط آب، روغن و صابون	مخلوط مس (II) سولفات و آب، آب‌قند، آب‌نمک

پاسخ خیلی تشریحی مخلوط آب، روغن و صابون یک کلوئید است و با پخش نور، مسیر عبور نور از میان آن مشخص می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): کلوئیدها به ظاهر همگن بوده، ولی مخلوط‌هایی پایدار هستند.

گزینهٔ (۲): نوشیدنی‌ها، انواع رنگ‌ها، شوینده‌ها و داروها می‌توانند سوسپانسیون یا کلوئید باشند که مخلوط‌هایی ناهمگن محسوب می‌شوند.

گزینهٔ (۳): رفتار کلوئیدها را می‌توان رفتاری بین سوسپانسیون‌ها و محلول‌ها در نظر گرفت.

۷ **درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**

۱) در فرایند پاک‌کردن چربی از روی پارچه، هر چه میزان برهم‌کنش بین مولکول‌های چربی و پارچه بیشتر باشد، چربی راحت‌تر از پارچه پاک می‌شود.

۲) در آب سخت برخلاف آب معمولی، یون‌های منیزیم و کلسیم وجود دارد.

۳) در فرایند پاک‌کنندگی با صابون، اگر لباس از جنس نخ و دما $30^{\circ}C$ باشد، درصد لکهٔ چربی باقی‌مانده کم‌تر از زمانی خواهد بود که لباس از جنس پلی‌استر و دما $40^{\circ}C$ باشد.

۴) از صابون‌های کلردار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینهٔ (۳) برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): هر چه میزان برهم‌کنش چربی و پارچه بیشتر باشد، جاذبهٔ بیشتری بین لکه و پارچه وجود داشته و چربی سخت‌تر پاک می‌شود.

گزینهٔ (۲): در هر دو نمونهٔ آب معمولی و سخت، یون‌های منیزیم و کلسیم وجود دارد، فقط در آب سخت، مقدار این یون‌ها بیشتره!

گزینهٔ (۳): با توجه به جدول کتاب درسی، درصد لکهٔ باقی‌مانده در حالت پارچهٔ نخی و دمای $30^{\circ}C$، کم‌تر از حالتی است که پارچه، پلی‌استری و دما، $40^{\circ}C$ باشد.

نوع صابون	نوع پارچه	دما ($^{\circ}C$)	درصد لکهٔ باقی‌مانده
صابون بدون آنزیم	نخی	۳۰	۲۵
صابون بدون آنزیم	نخی	۴۰	۱۵
صابون آنزیم‌دار	نخی	۳۰	۱۰
صابون آنزیم‌دار	نخی	۴۰	۰
صابون آنزیم‌دار	پلی‌استر	۴۰	۱۵

توجه *شاید بگین* وجود پارچهٔ نخی و دمای کم‌تر، دو اثر متضاد بر قدرت پاک‌کنندگی صابون دارند، به همین دلیل، گزینهٔ (۳)، *نامردیه و حقی حساب می‌شه! حرفتون کاملاً درسته!* اما این عبارت رو عمداً *براتون* آوردیم و توقع داشتیم با رد گزینه به پاسخ درست سؤال برسید. در کنکور هم ممکنه به چنین مواردی برخورد کنید.

گزینهٔ (۴): از صابون‌های **گوگرددار** برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸ **کدام مورد، نادرست است؟**

۱) احساس لیزی هنگام تماس پوست دست با محلول بازی، به دلیل تشکیل صابون است.

۲) اسید معده، همان اسیدی است که به جوهرنمک نیز معروف است.

۳) همهٔ اکسیدهای نافلزی با حل‌شدن در آب، pH آب را کاهش می‌دهند.

۴) اگر کاغذ pH با فراوردهٔ آلی حاصل از واکنش پتاسیم هیدروکسید با اسید چرب تماس پیدا کند، به رنگ آبی درمی‌آید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ برخی از اکسیدهای نافلزی مانند NO، CO و N_2O، به صورت مولکولی در آب حل می‌شوند و نمی‌توانند pH آب را تغییر دهند، زیرا سبب تغییر $[H^+]$ آب نمی‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): چربی پوست می‌تواند در واکنش با باز، صابون تولید کند.

گزینهٔ (۲): اسید معده، همان HCl می‌باشد که به جوهرنمک نیز معروف است.

گزینهٔ (۴): از واکنش KOH با اسید چرب، صابون مایع حاصل می‌شود که خاصیت بازی دارد. با تماس کاغذ pH با باز، رنگ کاغذ به آبی می‌گراید.

۹ **اگر مجموع شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول شیمیایی یک پاک‌کنندهٔ صابونی جامد و اتم‌های هیدروژن حلقهٔ بنزنی در یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، برابر ۳۵ باشد و هر دو دارای تعداد کربن برابر در زنجیر هیدروکربنی سیرشدهٔ خود باشند، کدام مورد دربارهٔ آن‌ها درست است؟ $(H=1, C=12, O=16, Na=23, S=32 : g.mol^{-1})$**

۱) جرم مولی پاک‌کنندهٔ صابونی، برابر با جرم مولی بخش ناقطبی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی است.

۲) اگر به جای گروه آلکیل متصل به حلقهٔ بنزنی در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، گروه آلکیل ۷کربنی جایگزین کنیم، جرم مولی پاک‌کنندهٔ صابونی و غیرصابونی، برابر می‌شود.

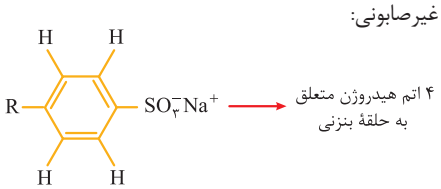
۳) تفاوت مجموع شمار اتم‌ها در فرمول شیمیایی این دو پاک‌کننده، برابر ۱۴ است.

۴) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، دو برابر این شمار در پاک‌کنندهٔ صابونی است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به ساختار عمومی پاک‌کننده‌های صابونی جامد و پاک‌کننده‌های غیرصابونی:



۴ اتم هیدروژن متعلق به حلقهٔ بنزنی

پاک‌کنندهٔ غیرصابونی

$\underset{\text{پاک‌کنندهٔ صابونی جامد}}{RCOONa} \rightarrow R : C_nH_{2n+1}$

تعداد اتم‌های هیدروژن در ساختار صابون جامد $2n+1=35-4=31$ و تعداد اتم‌های کربن نیز $n=15$ می‌باشد؛ بنابراین ساختار دو پاک‌کننده به شکل زیر است:

$\underbrace{C_{15}H_{31}}_{\text{بخش ناقطبی}}\underbrace{COONa}_{\text{بخش قطبی}}$ $\qquad$ $\underbrace{C_{15}H_{31}C_6H_4}_{\text{بخش ناقطبی}}\underbrace{SO_3Na}_{\text{بخش قطبی}}$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): جرم مولی پاک‌کنندهٔ صابونی $= (16\times12)+(31\times1)+(2\times16)+23=278\ g.mol^{-1}$

جرم مولی بخش ناقطبی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی $= (21\times12)+(35\times1)=287\ g.mol^{-1}$

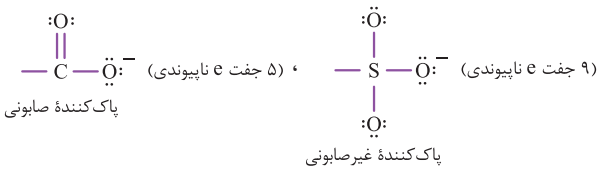
گزینهٔ (۲): ساختار پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با تغییر گروه آلکیل: $C_7H_{15}C_6H_4SO_3Na$

جرم مولی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی جدید $= (13\times12)+(19\times1)+32+(3\times16)+23=278\ g.mol^{-1}$

گزینهٔ (۳): شمار اتم‌ها در پاک‌کنندهٔ صابونی $(C_{15}H_{31}COONa)$ برابر با ۵۰ و شمار اتم‌ها در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی $(C_{15}H_{31}C_6H_4SO_3Na)$ برابر با ۶۱ است.

$61-50=11$

گزینهٔ (۴): جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در هر دو پاک‌کننده مربوط به اتم‌های اکسیژن است:



پاک‌کنندهٔ صابونی

پاک‌کنندهٔ غیرصابونی

$\frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی پاک‌کنندهٔ صابونی}}=\frac{9}{5}\neq 2$

۱۰ با توجه به معادلهٔ واکنش سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم با آب، کدام مورد، نادرست است؟ $(Al = 27\ g.mol^{-1})$

$$NaOH(s) + Al(s) + H_2O(l) \rightarrow NaAl(OH)_4(aq) + X(g)$$

۱) از این پاک‌کننده می‌توان برای بازکردن لوله‌هایی که در اثر تجمع چربی بسته شده‌اند، استفاده کرد.

۲) علامت ΔH واکنش، منفی است و مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در آن پس از موازنه برابر ۱۵ است.

۳) گاز تولیدشده در فراورده‌ها، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد.

۴) به ازای مصرف ۲/۷ گرم آلومینیم، ۰/۱۵ مول گاز اکسیژن تولید می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم در بازکردن لوله‌ها و مسیرهایی که بر اثر تجمع چربی بسته شده‌اند، کاربرد دارد.

فراورده‌های دیگر + گاز هیدروژن ← آب + مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید

کارایی این مخلوط در بازکردن مجاری به واسطهٔ موارد زیر است:

۱) خاصیت بازی مخلوط (به دلیل وجود NaOH) منجر به تشکیل صابون می‌شود.

۲) واکنش این مخلوط با آب گرماده است که گرمای حاصل از آن در ذوب‌کردن چربی و آلاینده‌ها و زدودن راحت‌تر آن‌ها نقش دارد.

۳) گاز هیدروژن حاصل از واکنش این مخلوط با آب، فشار بالایی را در مجاری و لوله‌ها ایجاد می‌کند که به کمک این فشار مکانیکی زدودن آن‌ها از آلاینده‌ها راحت‌تر است.

پاسخ‌خیلی‌تشریحی *بدون هیچ حساب کتابی، معلومه که* گزینهٔ (۴) *غلطه!* زیرا در واکنش، گاز هیدروژن تولید می‌شود، نه اکسیژن!

در مورد گزینهٔ (۲) دقت کنید که واکنش، گرماده بوده و ΔH آن منفی است. هم‌چنین معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$2NaOH(s) + 2Al(s) + 6H_2O(l) \rightarrow 2NaAl(OH)_4(aq) + 3H_2(g)$$

مجموع ضرایب $= 2+2+6+2+3 = 15$

۱۱ کدام مورد درست است؟

۱) پیش از شناخت ساختار اسیدها و بازها توسط آرنیوس، شیمی‌دان‌ها با ویژگی‌های این مواد آشنا نبودند.

۲) مولکول CH_3CH_2OH به دلیل داشتن گروه OH در ساختار خود، باز آرنیوس محسوب می‌شود.

۳) برای کاهش pH خاک، می‌توان به آن آهک (کلسیم اکسید) اضافه کرد.

۴) ملاک مقایسهٔ قدرت دو اسید در شرایط یکسان، میزان $[H_3O^+]$ در محلول آبی آن‌ها است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

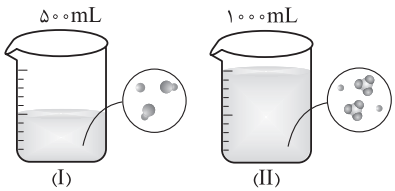
پاسخ‌خیلی‌تشریحی بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): شیمی‌دان‌ها پیش از شناسایی ساختار اسیدها و بازها با برخی ویژگی‌های آن‌ها آشنا بوده‌اند، اما سوانت آرنیوس نخستین کسی بود که رفتار اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.

گزینهٔ (۲): مولکول CH_3CH_2OH یا اتانول در آب به صورت مولکولی حل شده و یونیده نمی‌شود؛ پس غلظت یون هیدروکسید محلول را تغییر نداده و باز آرنیوس محسوب نمی‌شود.

گزینهٔ (۳): آهک (کلسیم اکسید)، یک اکسید فلزی با خاصیت بازی است که افزودن آن به خاک، pH خاک را افزایش می‌دهد.

12 با توجه به شکل‌های زیر که از حل‌شدن دی‌نیتروژن پنتااکسید و باریم اکسید در آب به دست آمده‌اند، کدام موارد درست است؟ (هر ذرهٔ نشان‌داده‌شده معادل ۰/۰۱ مول است، $N = 14, O = 16 : g.mol^{-1}$)



الف) غلظت مولار یون هیدروکسید در محلول (I)، دو برابر غلظت مولار یون نیترات در محلول (II) است.

ب) با افزودن ۱/۰۸ گرم دی‌نیتروژن پنتااکسید جامد به محلول آن، می‌توان غلظت مولار یون هیدرونیوم در محلول را دو برابر کرد.

پ) هر دو محلول، رسانایی الکتریکی بیشتری از محلول هیدروبرمیک اسید ۰/۱ مولار دارند.

ت) کاغذ pH در محلول‌های (I) و (II) به ترتیب به رنگ سرخ و آبی درمی‌آید.

۱) پ ـ ت
۲) الف ـ ت
۳) الف ـ ب
۴) ب ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های (الف) و (ب) درست‌اند.

اکسیدهای فلزی مانند BaO در آب خاصیت بازی دارند و در محلول آن‌ها، یون هیدروکسید (OH^-) وجود دارد، در حالی که اکسیدهای نافلزی مانند N_2O_5، در آب خاصیت اسیدی داشته و در محلول آن‌ها یون هیدرونیوم (H^+) وجود دارد.

محلول I: $BaO + H_2O \rightarrow Ba^{2+} + 2OH^-$

محلول II: $N_2O_5 + H_2O \rightarrow 2H^+ + 2NO_3^-$

بررسی عبارت‌ها:

الف) در محلول (I)، ۰/۰۲ مول یون هیدروکسید و در محلول (II)، ۰/۰۲ مول یون نیترات وجود دارد، اما حجم محلول (I) نصف محلول (II) است؛ بنابراین غلظت مولار یون هیدروکسید در محلول (I)، دو برابر غلظت یون نیترات در محلول (II) است.

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{تعداد مول}}{\text{حجم محلول}}$$

ب)

$$1/08\ g\ N_2O_5 \times \frac{1\ mol\ N_2O_5}{108\ g\ N_2O_5} \times \frac{2\ mol\ HNO_3}{1\ mol\ N_2O_5} \times \frac{1\ mol\ H^+}{1\ mol\ HNO_3} = 0/02\ mol\ H^+$$

تعداد مول‌های هیدرونیوم حاصل از افزودن N_2O_5 به محلول برابر با تعداد هیدرونیوم در محلول اولیه است، پس با افزودن آن، غلظت H^+ در محلول دو برابر می‌شود.

پ) مجموع غلظت یون‌ها، تعیین‌کنندهٔ رسانایی الکتریکی محلول است که در ظرف (I)، ۰/۰۶ مولار و در ظرف (II)، ۰/۰۴ مولار است؛ اما در محلول هیدروبرمیک اسید ۰/۱ مولار $(HBr \rightarrow H^+ + Br^-)$، مجموع غلظت یون‌ها برابر ۰/۲ مولار است. مجموع غلظت یون‌ها در محلول هیدروبرمیک اسید بیشتر است؛ پس رسانایی الکتریکی آن نیز بیشتر خواهد بود.

ت) *برعکس گفته!* کاغذ pH در محیط‌های بازی مانند محلول (I)، به رنگ آبی و در محیط‌های اسیدی مانند محلول (II) به رنگ سرخ درمی‌آید.

13 کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

الف) حرکت یون‌ها به سوی قطب‌های همنام خود در مدار الکتریکی، علت رسانایی محلول‌های الکترولیت، مانند $NaCl(aq)$ می‌باشد.

ب) در بین مواد «گرافیت، $NaCl(s)$ و $C_6H_{12}O_6(aq)$»، هیچ رسانای یونی وجود ندارد.

پ) کربوکسیلیک اسیدها با آزاد کردن هیدروژن‌های متصل به کربن در ساختارشان، خاصیت اسیدی در محلول ایجاد می‌کنند.

ت) مواد مولکولی، می‌توانند غیرالکترولیت، الکترولیت ضعیف و یا الکترولیت قوی باشند.

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ ت
۳) الف ـ پ
۴) ب ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد (ب) و (ت) درست‌اند.

بررسی موارد:

الف) یون‌ها با قرارگیری در مدار الکتریکی به سوی قطب‌های ناهمنام خود حرکت می‌کنند، نه قطب‌های همنام!

ب) گرافیت، رسانای الکترونی است و دو مادهٔ دیگر، رسانای جریان برق نیستند.

گول نخوری ✘ ترکیب‌های یونی در حالت جامد، رسانای جریان برق نیستند؛ زیرا یون‌ها در حالت جامد نمی‌توانند آزادانه جابه‌جا شوند.

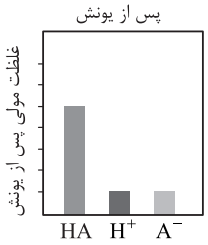
نکته محلول‌های الکترولیت جزء رساناهای یونی هستند؛ یعنی در آن‌ها، جریان الکتریکی در اثر حرکت یون‌ها ایجاد می‌شود. ما علاوه بر رساناهای یونی، رساناهای الکترونی هم داریم. در این نوع رساناها، جریان الکتریکی به وسیلهٔ حرکت الکترون‌ها ایجاد می‌شود. فلزها و گرافیت (یکی از آلوتروپ‌های نافلز کربن)، رسانای الکترونی هستند.

نوع رسانا	دلیل رسانایی	مثال
الکترونی	حرکت الکترون‌ها	فلزها و گرافیت
یونی	حرکت یون‌ها	محلول‌های الکترولیت و نمک‌های مذاب

پ) فقط هیدروژن متصل به عامل کربوکسیل $(COOH)$، هیدروژن اسیدی محسوب می‌شود؛ نه همهٔ اتم‌های هیدروژن یک کربوکسیلیک اسید!

ت) مواد مولکولی می‌توانند غیرالکترولیت (مثل اتانول یا شکر)، الکترولیت ضعیف (مثل HF) و یا الکترولیت قوی (مثل HCl) باشند.

14 **شکل زیر غلظت نسبی اجزای یک محلول اسیدی به حجم $0/25\ L$ را نشان می‌دهد. کدام مطلب، درست است؟**



۱) درصد یونش اسید، برابر ۲۰٪ است.

۲) اگر غلظت یون هیدرونیوم پس از یونش $4\times10^{-2}\ mol.L^{-1}$ باشد، شمار مولکول‌های HA پیش از یونش، برابر $3/612\times10^{22}$ است.

۳) شمار یون‌های حاصل از انحلال $0/6$ مول HA در آب، با شمار یون‌های حاصل از واکنش $0/1$ مول لیتیم اکسید با آب برابر است.

۴) با افزودن آب به محلول، غلظت مولار محلول و در نتیجه غلظت یون هیدرونیوم در آن افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

مطابق با شکل نشان‌داده‌شده اگر غلظت مولی یون هیدرونیوم پس از یونش را $x\ mol.L^{-1}$ در نظر بگیریم، غلظت مولی A^- و مولکول‌های یونش‌نیافته به ترتیب برابر $x\ mol.L^{-1}$ و $5x\ mol.L^{-1}$ می‌باشد. هم‌چنین غلظت مولی مولکول‌های اولیهٔ اسید از مجموع غلظت یونیده‌شدهٔ آن (معادل با $[H^+]$) و غلظت باقی‌مانده (یونیده‌نشده) به دست می‌آید:

$$[HA]_{\text{اولیه}} = \underbrace{[HA]_{\text{یونیده‌شده}}}_{=[H^+]} + [HA]_{\text{یونیده‌نشده}} = x + 5x = 6x\ mol.L^{-1}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$\text{درصد یونش} = \frac{\text{غلظت مولی مولکول‌های یونیده‌شده}}{\text{غلظت مولی کل مولکول‌های حل شده}} \times 100 = \frac{x}{6x} \times 100 \simeq 16/67\%$$

گزینهٔ (۲):

$$[H_3O^+]_{\text{پس از یونش}} = x = 4\times10^{-2}\ mol.L^{-1} \rightarrow [HA]_{\text{پیش از یونش}} = 6x = 0/24\ mol.L^{-1}$$

$$\text{شمار مولکول‌های HA پیش از یونش} = \text{غلظت} \times \text{حجم} \times N_A = 0/24\times0/25\times6/02\times10^{23} = 3/612\times10^{22}$$

گزینهٔ (۳): اگر غلظت اولیهٔ اسید در محلول را $6x$ در نظر بگیریم، با توجه به رابطهٔ «غلظت × حجم = تعداد مول»، تعداد مول‌های اسید در محلول پیش از یونش $1/5x = 0/25 \times 6x$ خواهد بود.

$$1/5x = 0/6\ mol \rightarrow x = 0/4$$

$$\text{غلظت یون‌های حاصل یونش} = \frac{2x}{x+x} = 0/8\ mol.L^{-1} \rightarrow \text{شمار مول یون‌های حاصل یونش} = 0/8\times0/25 = 0/2\ mol$$

از واکنش $0/1$ مول Li_2O با آب، $0/4$ مول یون حاصل می‌شود:

$$\underbrace{Li_2O}_{0/1\ mol} + H_2O \rightarrow 2LiOH \sim \underbrace{2Li^+ + 2OH^-}_{4\times0/1 = 0/4\ mol}$$

گزینهٔ (۴): با اضافه‌کردن آب، محلول رقیق می‌شود و غلظت محلول کاهش می‌یابد.

16 کدام مورد نادرست است؟

۱) فرایند تبدیل یک ترکیب مولکولی به یون‌ها در آب، تنها در مورد اسیدها صدق می‌کند.

۲) بخش عمده‌ای از گونه‌های موجود در سرکه، به شکل مولکول‌های یونیده‌نشده دیده می‌شوند.

۳) رسانایی الکتریکی بالا در یک محلول اسیدی، دلیلی بر غلظت بالای یون‌های آب‌پوشیده است.

۴) در شرایط معین، غلظت همهٔ گونه‌های موجود در محلول هیدروفلوئوریک اسید، همانند دیگر اسیدهای ضعیف ثابت است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ‌خیلی‌تشریحی علاوه بر اسیدها، برای برخی بازها نیز واژهٔ یونش و تبدیل ترکیب به یون، به کار می‌رود، مانند آمونیاک:

$$NH_3(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq)$$

در مورد گزینهٔ (۲) دقت کنید که سرکه، همان محلول استیک اسید در آب است. استیک اسید (CH_3COOH) یک اسید ضعیف است و به طور جزئی یونیده می‌شود؛ از این رو در محلول آن، تعداد مولکول‌های یونیده‌نشده، زیاد و تعداد یون‌های آب‌پوشیده کم است.

17 **x گرم از یک کربوکسیلیک اسید تک‌ظرفیتی ۵کربنه با زنجیر هیدروکربنی سیرشده را به ۱۲ لیتر آب اضافه می‌کنیم.**

اگر تعداد یون‌های هیدرونیوم حاصل برابر $۲۱۶/۷۲\times۱۰^{۲۰}$ و درجهٔ یونش اسید، برابر ۰/۰۰۵ باشد، x کدام است؟

$C_nH_{2n}O_2$

(از تغییر حجم آب صرف نظر کنید، $H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1}$)

۱) ۶۱۲/۰

۲) ۶۸۶/۴

۳) ۷۲۰/۰

۴) ۷۳۴/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ‌خیلی‌تشریحی ابتدا تعداد مول اولیهٔ کربوکسیلیک اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$RCOOH + H_2O \rightleftharpoons RCOO^- + H_3O^+$$

$$۲۱۶/۷۲\times۱۰^{۲۰}\ H_3O^+ \times \frac{۱\ mol\ H_3O^+}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\ H_3O^+} = ۰/۰۳۶\ mol\ H_3O^+$$

$$\alpha(\text{درجهٔ یونش}) = \frac{\text{تعداد مول‌های هیدرونیوم}}{\text{تعداد مول‌های اسید حل‌شده}} \Rightarrow \text{تعداد مول اسید حل‌شده} = ۷/۲\ mol$$

(۰/۰۰۵ و ۰/۰۳۶ روی کسر)

سپس با تعیین‌کردن فرمول کربوکسیلیک اسید، جرم مولی آن و در نهایت x را به دست می‌آوریم:

فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدها با زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده: $C_nH_{2n}O_2 \xrightarrow{n=5} C_5H_{10}O_2$

جرم مولی اسید $= ۱۰۲\ g.mol^{-1} \rightarrow$ (جرم) x = مول × جرم مولی $= ۷/۲\times۱۰۲ = ۷۳۴/۴\ g$

18 **در محلولی از اسید HA با غلظت ۰/۱ مولار، غلظت مولی یون‌های هیدرونیوم، ۴ برابر غلظت مولی مولکول‌های یونیده‌نشده است. درصد یونش اسید در محلول کدام است و اگر در دمای ثابت، غلظت محلول را به صورتی تغییر دهیم که درجهٔ یونش محلول نصف شود، نسبت غلظت مولکول‌های یونیده‌نشدهٔ اسید به غلظت یون‌های هیدرونیوم در محلول نهایی کدام است؟**

۱) ۴۰ ـ ۱/۵ ۲) ۸۰ ـ ۱/۵

۳) ۴۰ ـ ۲/۵ ۴) ۸۰ ـ ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

درجهٔ یونش اسیدها:

اسیدهای ضعیف به طور جزئی در آب یونش می‌یابند؛ یعنی تنها تعداد کمی از مولکول‌های اسید، یونش یافته و به یون تبدیل می‌شوند و بیشتر مولکول‌های اسید به صورت یونیده‌نشده در آب باقی می‌مانند. فرض کنید غلظت اولیهٔ یک اسید ضعیف (مانند HX)، M مولار باشد و x مولار آن یونش یابد؛ بنابراین غلظت مولکول‌های یونش‌نیافته در محلول برابر $(M-x)$ مولار و غلظت هر یک از یون‌های حاصل از یونش نیز برابر x مولار خواهد بود.

	$HX(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + X^-(aq)$		
گونه	$HX(aq)$	$H^+(aq)$	$X^-(aq)$
غلظت پیش از یونش	M	۰	۰
غلظت پس از یونش	$M-x$	x	x

برای مقایسهٔ میزان یونش اسیدها از کمیتی به نام درجهٔ یونش استفاده می‌شود که رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\text{درجهٔ یونش } (\alpha) = \frac{\text{شمار مول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مول‌های حل‌شده}} \quad \text{یا} \quad \text{درجهٔ یونش } (\alpha) = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل‌شده}}$$

در برخی موارد به جای درجهٔ یونش، از درصد یونش $(\%\alpha)$ استفاده می‌شود:

$$\text{درصد یونش } (\%\alpha) = \text{درجهٔ یونش } (\alpha) \times ۱۰۰$$

پاسخ خیلی تشریحی

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

غلظت اولیه: ۰/۱ ۰ ۰

غلظت نهایی: $۰/۱-x$ x x

فرض سؤال: $x = ۴(۰/۱-x) \Rightarrow x = ۰/۴ - ۴x \Rightarrow ۵x = ۰/۴ \Rightarrow x = \frac{۰/۴}{۵} = ۰/۰۸$

$$\text{درصد یونش} = \frac{x}{۰/۱} \times ۱۰۰ = \frac{۰/۰۸}{۰/۱} \times ۱۰۰ = ٪۸۰$$

اگر با تغییر غلظت محلول، درجهٔ یونش اسید نصف شود، یعنی از ۰/۸ به ۰/۴ برسد، خواهیم داشت:

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

غلظت نهایی: $M-y$ y y

$$\alpha = \frac{y}{M} = ۰/۴$$

$$\text{خواستهٔ سؤال} = \frac{[HA]}{[H^+]} = \frac{M-y}{y} = \frac{M}{y} - ۱ = \frac{۱}{۰/۴} - ۱ = ۲/۵ - ۱ = ۱/۵$$

19 **کدام مورد به یقین درست است؟**

۱) مطابق مدل آرنیوس، اسید ماده‌ای است که در ساختار آن، اتم هیدروژن وجود دارد.

۲) اسیدهایی که انحلال‌پذیری زیادی در آب دارند، جزء اسیدهای قوی دسته‌بندی می‌شوند.

۳) اسیدهای تک‌پروتون‌دار، اسیدهایی هستند که در ساختار آن‌ها، تنها یک اتم هیدروژن وجود دارد.

۴) در اسیدهای ضعیف تک‌پروتون‌دار همانند اسیدهای قوی تک‌پروتون‌دار، غلظت مولی آنیون حاصل از یونش با غلظت مولی یون هیدرونیوم برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

به ازای یونش هر مول اسید HA (قوی یا ضعیف) یک مول یون هیدرونیوم و یک مول آنیون تولید خواهد شد، پس در هر دو نوع محلول، غلظت مولی کاتیون‌ها و آنیون‌های حاصل از یونش با هم برابر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

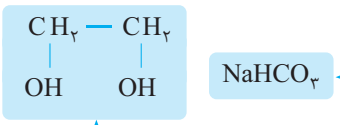
گزینهٔ (۱): *اولاً این‌که* در ساختار بعضی از اسیدها (مانند N_2O_5) اصلاً اتم هیدروژن وجود ندارد. *دوماً* موادی وجود دارند که در ساختار آن‌ها اتم هیدروژن وجود دارد، اما اسید محسوب نمی‌شوند؛ مانند C_2H_5OH!

گزینهٔ (۲): طبقه‌بندی اسیدها به قوی و ضعیف، بر مبنای میزان یونش آن‌ها در آب است، نه براساس میزان انحلال‌پذیری آن‌ها!

گزینهٔ (۳): *نه کی گفته!* مثلاً استیک اسید (CH_3COOH)، ۴ اتم هیدروژن دارد، ولی تک‌پروتون‌دار محسوب می‌شود، زیرا فقط هیدروژن گروه کربوکسیل آن، می‌تواند به صورت یون هیدرونیوم وارد محلول شود.

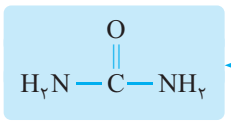
۱ کدام مورد درست است؟

۱) در واکنش مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، گاز هیدروژن تولید می‌شود و گرما از محیط به سامانه انتقال می‌یابد.



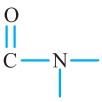
۲) کاغذ pH در محلول‌های جوش‌شیرین و اتیلن گلیکول در آب، به رنگ آبی درمی‌آید.

۳) اگر به جای گروه‌های NH_2 در اوره، گروه‌های CH_3 قرار گیرد، ماده‌ای به دست می‌آید که به هر نسبت در آب حل می‌شود.

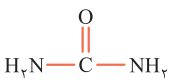


۴) وازلین با فرمول مولکولی $C_{18}H_{38}$، ناقطبی بوده و در هگزان به خوبی حل می‌شود.

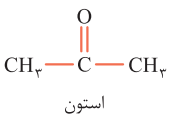
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ فرمول مولکولی اوره، $CO(NH_2)_2$ یا CH_4N_2O است و در ساختار آن، عامل آمیدی  وجود دارد.

ساختار این ماده به صورت مقابل است:



با جایگزین‌کردن گروه‌های NH_2 در ساختار اوره با گروه‌های CH_3، مولکول حاصل، استون خواهد بود. این ماده به هر نسبتی در آب حل می‌شود و نمی‌توان محلول سیرشده‌ای از آن در آب تهیه کرد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نوعی پاک‌کنندهٔ خورنده که به شکل پودر عرضه می‌شود، شامل مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم است. معادلهٔ نوشتاری واکنش این مخلوط با آب به صورت زیر است:

مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید + آب ⟶ گاز هیدروژن + فراورده‌های دیگر $(\Delta H < 0)$

با توجه به معادلهٔ بالا مشخص است که در این واکنش، گاز هیدروژن (H_2) آزاد می‌شود. هم‌چنین با توجه به $\Delta H < 0$ این واکنش و گرماده‌بودن آن، می‌توان گفت که **بر اثر انجام این واکنش، گرما از سامانه به محیط انتقال می‌یابد.**

گزینهٔ (۲): با توجه به این‌که جوش‌شیرین یا سدیم هیدروژن کربنات $(NaHCO_3)$ یک ضداسید است، می‌توان گفت محلول این ماده خاصیت بازی داشته و رنگ کاغذ pH را آبی می‌کند، در حالی که اتیلن گلیکول $(C_2H_6O_2)$ به عنوان یک دی‌الکل به صورت کاملاً مولکولی در آب حل شده و غلظت یون‌ها را تغییر نمی‌دهد؛ در نتیجه محلول آن در آب **خنثی** بوده و **کاغذ pH را به رنگ آبی درنمی‌آورد.**

گزینهٔ (۴): وازلین یک هیدروکربن و ناقطبی بوده و در هگزان که یک حلال ناقطبی است، به خوبی حل می‌شود، اما دقت کنید که فرمول مولکولی میانگین وازلین به صورت $C_{25}H_{52}$ می‌باشد؛ نه $C_{18}H_{38}$!

گول‌نخوری✘ فرمول تقریبی وازلین، $C_{25}H_{52}$ و فرمول تقریبی گریس، $C_{18}H_{38}$ است. *یه وقت با هم قاطی نکنین!*

SanjeshCloud

۲ **با توجه به شکل‌های زیر که الگویی برای نمایش یک مولکول اسید چرب و یک استر سنگین است، کدام مورد نادرست است؟**

مشاوره تمرین‌های کتاب درسی، از منابع اصلی طراحی سؤالات در امتحانات نهایی و کنکورهای سراسری هستند؛ به همین دلیل علاوه بر بررسی و حل این تمرین‌ها، سعی کنید از آن‌ها تست و سؤال‌های تشریحی متنوعی حل کنید.



۱) هر دو ترکیب، از اجزای سازندهٔ چربی‌ها بوده و بخش‌های A و A′ در آن‌ها، به ترتیب دارای گروه‌های عاملی استری و کربوکسیل هستند.

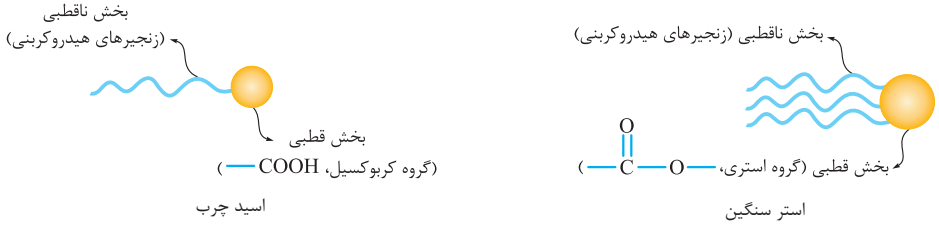
۲) هر دو ترکیب، دارای بخش‌های قطبی و ناقطبی بوده و نیروی بین مولکولی غالب در هر دو آن‌ها از نوع وان‌دروالسی است.

۳) در ساختار هر مولکول از ترکیب (۱)، ۶ پیوند C—O وجود دارد.

۴) هر دو ترکیب، توانایی واکنش با محلول سود را دارند و فراوردهٔ این واکنش‌ها، آب و نمک اسید چرب است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اسیدهای چرب و استرهای سنگین را می‌توان با الگوهای زیر نشان داد:



بنابراین شکل‌های (۱) و (۲) به ترتیب نشان‌دهندهٔ استر سه‌عاملی و اسید چرب هستند.

طبق معادله‌های مقابل، از واکنش اسیدهای چرب با سدیم هیدروکسید، صابون (نمک اسید چرب) و آب به دست می‌آید، اما از واکنش استرهای سنگین با سدیم هیدروکسید، صابون و الکل سه‌عاملی به دست می‌آید.

۱) $RCOOH + NaOH \longrightarrow \underbrace{RCOONa}_{\text{صابون}} + \underbrace{H_2O}_{\text{آب}}$

۲) $\begin{matrix} CH_2-O-C(=O)-R \\ | \\ CH-O-C(=O)-R' \\ | \\ CH_2-O-C(=O)-R'' \end{matrix} + 3NaOH \longrightarrow \begin{matrix} RCOONa \\ \\ R'COONa \\ \\ R''COONa \\ \underbrace{\qquad}_{\text{صابون}} \end{matrix} + \underbrace{\begin{matrix} CH_2-OH \\ | \\ CH-OH \\ | \\ CH_2-OH \end{matrix}}_{\text{الکل سه‌عاملی}}$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): A و A′ بخش‌های قطبی مولکول‌های نشان داده شده هستند و A دارای گروه عاملی استری ($-C(=O)-O-$) و A′ دارای گروه عاملی کربوکسیل ($-COOH$) است.

گزینهٔ (۲): نیروی بین مولکولی غالب در هر دو این مولکول‌ها از نوع وان‌دروالسی است. از آن‌جا که در این مولکول‌ها، بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه دارد، در آب حل نمی‌شوند.

گزینهٔ (۳): در ساختار هر مولکول از ترکیب (۱)، در مجموع ۶ پیوند اشتراکی C—O دیده می‌شود:

$\begin{matrix} CH_2-O-C(=O)-(CH_2)_{16}CH_3 \\ | \\ CH-O-C(=O)-(CH_2)_{16}CH_3 \\ | \\ CH_2-O-C(=O)-(CH_2)_{16}CH_3 \end{matrix}$

۳ **با توجه به شکل زیر که مربوط به مقایسهٔ رفتار نور در کلوئیدها و محلول‌ها است، درستی یا نادرستی کدام گزینه با بقیهٔ گزینه‌ها تفاوت دارد؟**



ظرف (۲) ظرف (۱)

۱) هر دو مخلوط، پایدار هستند و با گذشت زمان، ذرات سازندهٔ آن‌ها ته‌نشین نمی‌شود.

۲) مخلوط (۱) همانند سوسپانسیون‌ها، ناهمگن به شمار می‌آید.

۳) مخلوط اتانول و آب از نوع (۲) و شیر از نوع (۱) است.

۴) ذرات حل‌شده در مخلوط (۱)، توده‌های مولکولی با اندازهٔ متفاوت هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

ویژگی / نوع مخلوط	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کنند.	نور را پخش می‌کنند.	نور را عبور می‌دهند (پخش نمی‌کنند).
همگن‌بودن	ناهمگن	ناهمگن (به ظاهر همگن)	همگن
پایداری	ناپایدار است/ ته‌نشین می‌شود.	پایدار است/ ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است/ ته‌نشین نمی‌شود.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریزماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌ها
نمونه‌های مهم	شربت معده، دوغ، شربت خاکشیر و آب گل‌آلود	رنگ‌های پوششی، چسب‌ها، شیر، ژله، سس مایونز، مخلوط آب، صابون و چربی	سدیم کلرید (نمک) در آب، آب دریا، هوا، آب‌قند، ید در هگزان

از آن‌جا که کلوئیدها در برخی رفتارها شبیه محلول‌ها و در برخی دیگر شبیه سوسپانسیون‌ها هستند، می‌توان رفتار کلوئیدها را رفتاری بین محلول‌ها و سوسپانسیون‌ها در نظر گرفت.

ویژگی مشترک محلول‌ها و کلوئیدها ← پایداربودن

ویژگی مشترک کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها ← ناهمگن‌بودن و پخش نور

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گزینهٔ (۴) برخلاف سایر گزینه‌ها، نادرست است.

محلول‌ها (مانند محلول مس (II) سولفات در آب) نور را از خود عبور می‌دهند؛ بنابراین مسیر عبور نور از میان محلول‌ها قابل مشاهده نیست. اما ذره‌های موجود در کلوئید، درشت‌تر از محلول‌اند؛ به همین دلیل، کلوئیدها برخلاف محلول‌ها نور را پخش می‌کنند، در نتیجه مسیر عبور نور از میان کلوئیدها قابل دیدن است؛ بنابراین مخلوط (۱)، نشان‌دهندهٔ رفتار کلوئیدها و مخلوط (۲)، نشان‌دهندهٔ رفتار محلول‌ها در برابر نور است.

حالا بیایید *دونه‌دونه!* گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱): کلوئیدها همانند محلول‌ها پایدار هستند و ذرات سازندهٔ هر دو آن‌ها با گذشت زمان ته‌نشین نمی‌شوند.

گزینهٔ (۲): کلوئیدها همانند سوسپانسیون‌ها و برخلاف محلول‌ها، جزء مخلوط‌های ناهمگن هستند.

گزینهٔ (۳): اتانول در آب به هر نسبتی حل شده و مخلوط این دو ماده، محلول محسوب می‌شود، هم‌چنین شیر نیز نوعی کلوئید است.

گزینهٔ (۴): مخلوط (۱)، کلوئید است. دقت کنید که در کلوئیدها، ماده‌ای در مادهٔ دیگر حل نمی‌شود؛ در نتیجه استفاده از واژه‌هایی مانند حل‌شدن، حلال و حل‌شونده و ... برای کلوئیدها *ممنوع و غیرمجازه!*

۴ کدام مورد درست است؟

۱) صابون مراغه به دلیل خاصیت بازی و افزودنی‌های مناسب مانند گوگرد و کلر، خاصیت لکه‌بری و پاک‌کنندگی خوبی دارد.

۲) برای از بین بردن رسوب تشکیل‌شده در دیگ‌های بخار و لوله‌ها، باید از پاک‌کننده‌های غیرصابونی استفاده کرد.

۳) از واکنش هر مول اسید C_3H_7COOH با مقدار کافی پتاسیم هیدروکسید، یک مول صابون مایع با قدرت پاک‌کنندگی بالا تولید می‌شود.

۴) پیش از توصیف علمی اسیدها و بازها توسط آرنیوس، شیمی‌دان‌ها با برخی از واکنش‌های میان این مواد آشنا بودند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

شواهد بسیاری در تاریخ علم وجود دارد که نشان می‌دهند پیش از آن‌که ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی‌دان‌ها افزون بر ویژگی‌های اسیدها و بازها با برخی واکنش‌های آن‌ها نیز آشنا بودند. سوانت آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.

بررسی گزینه‌ها:

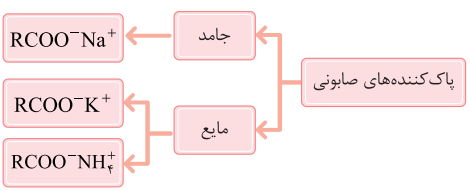
گزینهٔ (۱): دقت کنید که صابون **مراغه، افزودنی شیمیایی ندارد** و به دلیل خاصیت بازی مناسب، برای موهای چرب استفاده می‌شود.

نکته



گزینهٔ (۲): رسوب تشکیل‌شده بر روی دیوارهٔ کتری، لوله‌ها، آب‌راه‌ها و دیگ‌های بخار آن‌چنان به این سطح‌ها می‌چسبند که **با صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی زدوده نمی‌شوند.** برای زدودن این رسوب‌ها به پاک‌کنندهای خورنده نیاز است که بتوانند با آن‌ها واکنش شیمیایی بدهند و آن‌ها را به فراورده‌هایی تبدیل کنند که با آب شسته شوند.

گزینهٔ (۳): **به نمک اسیدهای چرب**، صابون می‌گویند. صابون‌های جامد، نمک سدیم اسید چرب و صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسید چرب هستند:



اما دقت کنید که C_3H_7COOH **به دلیل زنجیر هیدروکربنی کوتاهی که دارد، اسید چرب نبوده و نمک حاصل از واکنش آن با پتاسیم هیدروکسید** $(C_3H_7COO^-K^+)$ **نیز، پاک‌کننده محسوب نمی‌شود.**

SanjeshCloud

۵ اگر یک پاک‌کنندهٔ صابونی مایع در زنجیر آلکیل خود (R)، دارای ۱۳ پیوند کربن ـ کربن باشد و ۱۰۳/۶ گرم از آن با مقدار کافی منیزیم کلرید واکنش دهد، جرم رسوب تشکیل‌شده چند گرم خواهد بود و اختلاف شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در فرمول شیمیایی این پاک‌کننده کدام است؟ (در ساختار پاک‌کننده، یون فلزی وجود ندارد.)

کاتیون صابون مایع، آمونیوم است.

$(H=1, C=12, N=14, O=16, Mg=24 : g.mol^{-1})$

۱) ۱۸ ـ ۹۶/۴
۲) ۱۸ ـ ۱۰۱/۲
۳) ۱۴ ـ ۹۶/۴
۴) ۱۴ ـ ۱۰۱/۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ساختار پاک‌کنندهٔ صابونی مورد نظر را پیدا می‌کنیم:

در زنجیرهٔ آلکیل به دلیل داشتن ۱۳ پیوند $C-C$، ۱۴ اتم کربن وجود دارد و چون در ساختار این پاک‌کننده، یون فلزی وجود ندارد، جزء کاتیونی آن را یون آمونیوم (NH_4^+) تشکیل می‌دهد؛ بنابراین داریم:

$$R: C-C \text{ آلکیل دارای ۱۳ پیوند} = C_{14}H_{29} \xrightarrow{\text{جایگزین‌کردن } NH_4^+ \text{ به جای H اسید}} C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+$$
$$RCOOH \Rightarrow C_{14}H_{29}COOH$$

مشخص است که در فرمول شیمیایی این صابون، شمار اتم‌های C و H به ترتیب برابر با ۱۵ و ۳۳ و تفاوت شمار اتم‌های C و H، برابر با $۱۸ = ۱۵ - ۳۳$ است ← *گزینه‌های (۳) و (۴) پر!*

نکته

معادلهٔ واکنش صابون آمونیوم‌دار با محلول‌های منیزیم کلرید و کلسیم کلرید به صورت زیر است:

$$2RCOONH_4 + MgCl_2 \rightarrow \underbrace{(RCOO)_2Mg}_{\text{رسوب}} + 2NH_4Cl$$
$$2RCOONH_4 + CaCl_2 \rightarrow \underbrace{(RCOO)_2Ca}_{\text{رسوب}} + 2NH_4Cl$$

گام دوم: با توجه به نکتهٔ بالا، می‌توانیم معادلهٔ واکنش صابون $C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+$ با محلول منیزیم کلرید $(MgCl_2)$ را می‌نویسیم:

$$2C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+ + MgCl_2 \rightarrow \underbrace{(C_{14}H_{29}COO)_2Mg}_{\text{رسوب}} + 2NH_4Cl$$

گام سوم: جرم رسوب حاصل از واکنش ۱۰۳/۶ گرم از صابون مورد نظر با مقدار کافی محلول $MgCl_2$ را حساب می‌کنیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$103/6\ g\ C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+ \times \frac{1\ mol\ C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+}{259\ g\ C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+} \times \frac{1\ mol\ (C_{14}H_{29}COO)_2Mg}{2\ mol\ C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+} \times$$
$$\frac{506\ g\ (C_{14}H_{29}COO)_2Mg}{1\ mol\ (C_{14}H_{29}COO)_2Mg} = 101/2\ g\ (C_{14}H_{29}COO)_2Mg$$

یه‌جور دیگه

$$2C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+ \sim (C_{14}H_{29}COO)_2Mg$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{2C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{(C_{14}H_{29}COO)_2Mg}} \Rightarrow \frac{103/6}{2\times259} = \frac{x}{1\times506}$$

$$\Rightarrow x = \frac{103/6 \times 506}{2 \times 259} = 101/2\ g\ (C_{14}H_{29}COO)_2Mg$$

۶ **یک مول از هر کدام از ترکیب‌های N_2O_5، Li_2O و BaO، در ظرف‌هایی جداگانه به ۱۰ لیتر آب افزوده می‌شود. کدام مورد درست است؟ (از تغییر حجم آب صرف نظر کنید.)**

۱) رسانایی الکتریکی محلول دی‌نیتروژن پنتااکسید از محلول لیتیم اکسید، بیشتر است.

۲) مدل آرنیوس می‌تواند تفاوت رنگ کاغذ pH در محلول‌های دی‌نیتروژن پنتااکسید و باریم اکسید را توجیه کند.

۳) با یونش لیتیم اکسید در آب، $۲۴/۰۸ \times ۱۰^{۲۳}$ یون در محلول ایجاد می‌شود.

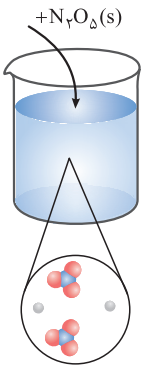
۴) مدل فضاپرکن آنیون نیتروژن‌دار موجود در محلول دی‌نیتروژن پنتااکسید، مشابه یون سولفات است.

SO_4^{2-} ← ← NO_3^-

پاسخ: گزینهٔ ۲

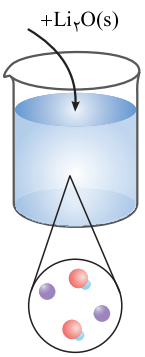
پاسخ خیلی تشریحی ✔

ابتدا محلول‌های حاصل در هر ظرف را مشخص می‌کنیم:



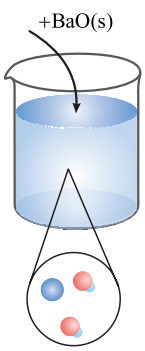
- با حل‌شدن هر مول N_2O_5 در آب (شکل روبه‌رو)، ۲ مول H^+ و ۲ مول NO_3^- (در مجموع ۴ مول یون) تولید می‌شود.

$$N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$



- با حل‌شدن هر مول اکسید فلز قلیایی در آب، ۲ مول کاتیون آن فلز و ۲ مول هیدروکسید (در مجموع ۴ مول یون) تولید می‌شود.

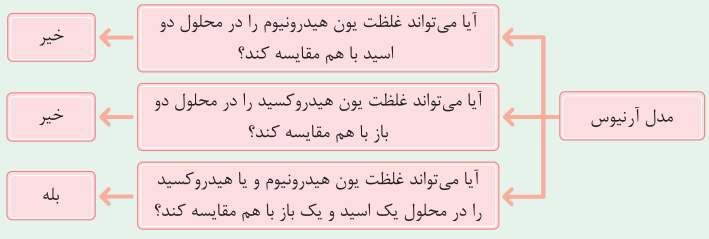
$$Li_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow 2Li^+(aq) + 2OH^-(aq)$$



- با حل‌شدن هر مول اکسید فلز قلیایی خاکی در آب، ۱ مول کاتیون آن فلز و ۲ مول یون هیدروکسید (در مجموع ۳ مول یون) تولید می‌شود.

$$BaO(s) + H_2O(l) \rightarrow Ba^{2+}(aq) + 2OH^-(aq)$$

نکته



طبق مدل آرنیوس، N_2O_5، اسید و Li_2O، باز است؛ بنابراین می‌توان گفت که $[H^+]$ در محلول N_2O_5 بیشتر از محلول Li_2O است (یا $[OH^-]$ در محلول Li_2O بیشتر از محلول N_2O_5 است).

بررسی سایر گزینه‌ها:

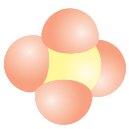
گزینهٔ (۱): رسانایی الکتریکی محلول‌ها به مجموع غلظت یون‌ها در آن‌ها بستگی دارد. همان‌طور که گفتیم، در محلول حاصل از انحلال یک مول از هر دو ترکیب N_2O_5 و Li_2O، ۴ مول یون حاصل شده و با توجه به حجم یکسان محلول‌ها، می‌توان گفت که مجموع غلظت یون‌ها و در نتیجهٔ رسانایی الکتریکی آن‌ها یکسان می‌باشد.

گزینهٔ (۳): شمار یون‌ها در محلول حاصل از انحلال یک مول Li_2O برابر است با:

$$1\ mol\ Li_2O \times \frac{4\ mol\ \text{یون}}{1\ mol\ Li_2O} \times \frac{6/02 \times 10^{23}\ \text{یون}}{1\ mol\ \text{یون}} = 24/08 \times 10^{23}\ \text{یون}$$

اما دقت کنید که **یونش**، فرایندی است که در آن یک **ترکیب مولکولی** به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود و با توجه به این‌که Li_2O یک ترکیب یونی است، استفاده از واژهٔ «یونش» برای آن *غلط اندر غلط!* بلکه باید از واژهٔ «**تفکیک**» برای آن استفاده کرد.

گزینهٔ (۴): آنیون موجود در محلول حاوی N_2O_5، یون نیترات (NO_3^-) است. با توجه به شکل‌های زیر مشخص است که مدل فضاپرکن یون‌های نیترات (NO_3^-) و سولفات (SO_4^{2-}) متفاوت‌اند:



سولفات (SO_4^{2-})



نیترات (NO_3^-)

۷ اگر ثابت یونش نوعی اسید ضعیف HA در دمای اتاق برابر ۸×۱۰^{-۵} باشد، غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۲/۳ گرم بر لیتر آن، به تقریب کدام است و چنان‌چه غلظت اولیهٔ محلول را با افزودن اسید به ۰/۲ مولار برسانیم، درجهٔ یونش اسید به تقریب چند درصد تغییر می‌کند؟ $(HA = ۴۶\ g.mol^{-۱})$

۱) $۰/۰۰۲$ ـ ۵۰٪ کاهش
۲) $۰/۰۰۲$ ـ ۵۰٪ افزایش
۳) $۰/۰۴$ ـ ۵۰٪ کاهش
۴) $۰/۰۴$ ـ ۵۰٪ افزایش

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اگر درجهٔ یونش اسید ضعیف HX برابر α و غلظت اولیهٔ اسید برابر M باشد، به اندازهٔ $M\alpha$ یونیده شده و غلظت تعادلی آن برابر با $M-M\alpha$ خواهد بود؛ پس می‌توان نوشت:

	HX	$\rightleftharpoons$	H^+	+	X^-
غلظت اولیه:	M		۰		۰
تغییر غلظت:	$-M\alpha$		$+M\alpha$		$+M\alpha$
غلظت تعادلی:	$M-M\alpha$		$M\alpha$		$M\alpha$

$$K_a=\frac{[H^+][X^-]}{[HX]}=\frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M-M\alpha}=\frac{M^۲\alpha^۲}{M(۱-\alpha)}=\frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha}\Rightarrow K_a=\frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha},K_a=\frac{[H^+]^۲}{M-[H^+]}$$

حالا اگر بخواهیم $[H^+]$ را برحسب K_a و α به دست آوریم، *این‌طوری می‌شه*:

$$K_a=\frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha}\xrightarrow{\alpha=\frac{[H^+]}{M}}K_a=\frac{M\times\frac{[H^+]^۲}{M^۲}}{۱-\alpha}\Rightarrow K_a=\frac{[H^+]^۲}{M(۱-\alpha)}\Rightarrow [H^+]=\sqrt{K_a\cdot M(۱-\alpha)}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: غلظت مولی اولیهٔ اسید را (برحسب $mol.L^{-۱}$) حساب می‌کنیم:

$$۲/۳\ g/L\times\frac{۱\ mol\ HA}{۴۶\ g\ HA}=\frac{۱}{۲۰}=۰/۰۵\ mol.L^{-۱}$$

گام دوم: با توجه به K_a و غلظت اولیهٔ اسید، $[H^+]$ را در آن به دست می‌آوریم:

$$K_a=\frac{[H^+]^۲}{M-[H^+]}\Rightarrow ۸\times۱۰^{-۵}=\frac{[H^+]^۲}{۰/۰۵-[H^+]}$$

$$\xrightarrow{\text{می‌توانیم از }[H^+]\text{ در مقابل M صرف نظر کنیم.}}[H^+]^۲=۸\times۱۰^{-۵}\times۵\times۱۰^{-۲}=۴\times۱۰^{-۶}\Rightarrow [H^+]=۲\times۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

گام سوم: درجهٔ یونش محلول را در حالت اولیه و هم‌چنین پس از افزودن اسید، محاسبه می‌کنیم:

حالت اولیه: $K_a=M\alpha^۲\Rightarrow ۸\times۱۰^{-۵}=\frac{۱}{۲۰}\times\alpha^۲\Rightarrow \alpha^۲=۱۶\times۱۰^{-۴}\Rightarrow \alpha=۴\times۱۰^{-۲}$

ثابت یونش (K_a) فقط تابع دما است؛ بنابراین در دمای معین، K_a ثابت بوده و می‌توان گفت:

پس از افزودن اسید: $K_a=M\alpha^۲\Rightarrow ۸\times۱۰^{-۵}=۰/۲\times\alpha^۲\Rightarrow \alpha^۲=۴\times۱۰^{-۴}\Rightarrow \alpha=۲\times۱۰^{-۲}$

بنابراین درجهٔ یونش اسید نسبت به حالت اولیه، نصف می‌شود.

تیزهوشی

در دمای معین، K_a ثابت بوده و می‌توان گفت در اسیدهای ضعیف، هر چه غلظت مولی (M) افزایش یابد، درجهٔ یونش (α) کاهش می‌یابد تا حاصل‌ضرب آن‌ها (K_a) ثابت بماند؛ بنابراین برای اسیدهای ضعیف با K_a خیلی کوچک داریم:

در دمای ثابت: $\alpha^۲\propto\frac{۱}{M}\Rightarrow\frac{\alpha_۲}{\alpha_۱}=\sqrt{\frac{M_۱}{M_۲}}=\sqrt{\frac{۰/۰۵}{۰/۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}$ ، α ↓ کاهش، M ↑ افزایش، K_a = ثابت

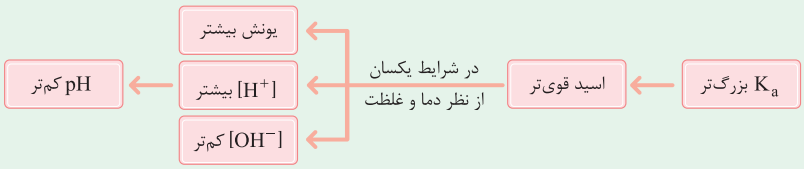
در نتیجه با توجه به نصف‌شدن درجهٔ یونش نسبت به حالت اولیه، می‌توان نتیجه گرفت که درجهٔ یونش، ۵۰٪ کاهش می‌یابد.

۸ در دمای $25\ ^\circ C$، pH محلول ۰/۱ مولار کدام اسید در آب بیشتر است؟

۱) هیدرویدیک اسید
۲) نیترواسید
۳) هیدروفلوئوریک اسید
۴) نیتریک اسید

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته



پاسخ خیلی تشریحی ✔

هر چه اسید ضعیف‌تر (و K_a آن کوچک‌تر) باشد، در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، در محلول حاصل از آن غلظت یون H^+ کم‌تر و pH آن بزرگ‌تر است.

هیدرویدیک اسید (HI) و نیتریک اسید (HNO_3)، هر دو جزء اسیدهای قوی تک‌پروتون‌دار هستند و تقریباً به طور کامل در آب یونیده می‌شود؛ پس در غلظت‌های یکسان، $[H^+]$ در محلول این دو اسید، بیشتر از محلول اسیدهای ضعیف نیترو اسید (HNO_2) و هیدروفلوئوریک اسید (HF) است؛ در نتیجه pH محلول این دو اسید قوی، کوچک‌تر است.

قدرت اسیدی (K_a) HF از HNO_2 بیشتر و HF اسید قوی‌تری است؛ پس در غلظت یکسان، pH محلول HNO_2 بزرگ‌تر خواهد بود:

pH محلول در غلظت یکسان: $\underset{\text{اسید ضعیف با } K_a \text{ کوچک‌تر}}{HNO_2} > \underset{\text{اسید ضعیف با } K_a \text{ بزرگ‌تر}}{HF}$

نکته

با توجه به صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴ کتاب درسی، مقایسهٔ K_a و در نتیجه قدرت اسیدی چند اسید ضعیف به صورت زیر است:

مقایسهٔ K_a و قدرت اسیدی: $\underset{\text{هیدروسیانیک اسید}}{HCN} < \underset{\text{کربنیک اسید}}{H_2CO_3} < \underset{\text{استیک اسید}}{CH_3COOH} < \underset{\text{فورمیک اسید}}{HCOOH} < \underset{\text{نیترو اسید}}{HNO_2} < \underset{\text{هیدروفلوئوریک اسید}}{HF}$

۹ **اگر محلولی یک‌لیتری از دو اسید هیدروسیانیک اسید (I) و فورمیک اسید (II) با غلظت یک مولار در دمای یکسان داشته باشیم، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$**

الف) رسانایی محلول (I) از (II) کم‌تر و تفاوت جرم آنیون حاصل از آن‌ها برابر ۱۹ گرم است.

ب) ثابت یونش محلول هر دو اسید از ثابت یونش استیک اسید، بیشتر است.

پ) سرعت واکنش فلز سدیم در ظرف (II) از ظرف (I) بیشتر اما حجم گاز تولیدی در دو ظرف در پایان واکنش برابر است.

ت) اگر در دمای $25^\circ C$، غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول (II)، ۲/۵ برابر محلول (I) باشد، pH محلول (II)، ۰/۴ واحد کم‌تر از محلول (I) است.

۱) الف ـ ب ۲) پ ـ ت

۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

مشاوره مقایسهٔ ویژگی‌های مختلف در دو محلول، به ویژه مقایسهٔ دو اسید قوی و ضعیف، پای ثابت سؤالات کنکور سراسری در هر دوره محسوب می‌شود که در قالب هر دو نوع سؤال مفهومی و محاسباتی طرح می‌شود. *خلاصه با توجه به اهمیت بسیار بالای آن مبحث، بر شما واجبه که سعی کنید تست‌های متنوعی از آن حل کنید.*

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) هیدروسیانیک اسید (HCN) و فورمیک اسید $(HCOOH)$، هر دو اسیدهایی ضعیف هستند، به طوری که K_a و قدرت اسیدی $HCOOH$ از HCN بیشتر است؛ در نتیجه در غلظت اولیهٔ یکسان از این دو اسید، غلظت یون‌ها در محلول $HCOOH$ و در نتیجه رسانایی الکتریکی این محلول بیشتر است. حال با فرض قوی‌بودن $(\alpha = 1)$ دو اسید، داریم:

محلول فورمیک اسید: $HCOOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCOO^-(aq)$

$$\Rightarrow [H^+] = [HCOO^-] = M \cdot \alpha = 1\ mol.L^{-1} \xrightarrow[V=1\ L]{\text{غلظت مولی} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}}} n_{HCOO^-} = 1\ mol \times \frac{45\ g}{1\ mol} = 45\ g\ HCOO^-$$

محلول هیدروسیانیک اسید: $HCN(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + CN^-(aq)$

$$\Rightarrow [H^+] = [CN^-] = M \cdot \alpha = 1\ mol.L^{-1} \xrightarrow[V=1\ L]{\text{غلظت مولی} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}}} c_{CN^-} = 1\ mol \times \frac{26\ g}{1\ mol} = 26\ g\ CN^-$$

تفاوت جرم آنیون‌ها $= 45 - 26 = 19\ g$

اما دقت کنید که هر دو اسید، ضعیف بوده و درجهٔ یونش آن‌ها بین ۰ تا ۱ $(0 < \alpha < 1)$ است؛ بنابراین تفاوت جرم آنیون‌های حاصل در دو محلول کم‌تر از ۱۹ گرم می‌باشد.

ب) ترتیب ثابت یونش هیدروسیانیک اسید (HCN)، فورمیک اسید $(HCOOH)$ و استیک اسید (CH_3COOH) به صورت زیر است:

$$K_a : HCOOH > CH_3COOH > HCN$$

بنابراین ثابت یونش محلول HCN کم‌تر از CH_3COOH می‌باشد.

نکته در کربوکسیلیک اسیدها، با افزایش تعداد کربن‌ها، قدرت اسیدی کاهش می‌یابد:

قدرت اسیدی (K_a): $\underset{\text{متانوئیک (فورمیک) اسید}}{HCOOH} > \underset{\text{اتانوئیک (استیک) اسید}}{CH_3COOH} > \underset{\text{پروپانوئیک اسید}}{CH_3CH_2COOH} > \cdots$

پ) سرعت واکنش فلز سدیم با محلول این دو اسید، به غلظت یون هیدرونیوم (H^+) موجود در محلول بستگی دارد، به طوری که هر چه غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید بیشتر باشد، سرعت واکنش آن محلول با فلز بیشتر خواهد بود؛ بنابراین می‌توان گفت که در دما و غلظت یکسان، هر چه اسیدی قوی‌تر باشد (ثابت یونش آن بزرگ‌تر باشد)، با سرعت و شدت بیشتری با فلزهایی مانند سدیم واکنش می‌دهد؛ بنابراین با توجه به قوی‌تربودن فورمیک اسید نسبت به هیدروسیانیک اسید می‌توان گفت که سرعت واکنش فلز سدیم با محلول (II) بیشتر است.

معادلهٔ واکنش فلز سدیم با محلول اسیدهای تک‌پروتون‌دار را می‌توان به صورت $۲Na + ۲HA \rightarrow ۲NaA + H_۲$ نشان داد. اگر جرم نوار سدیم و حجم و غلظت محلول‌های اسیدی یکسان باشد، با توجه به دانش *استوکیومتری‌مون!* می‌شه فهمید که در نهایت (در پایان واکنش)، جرم یا حجم گاز هیدروژن آزادشده در واکنش‌ها یکسان خواهد بود. (در هر دو حالت به ازای مصرف ۲ مول سدیم یا ۲ مول اسید، ۱ مول گاز هیدروژن تولید می‌شود.)

ت)

$$[H^+]_{(II)} = ۲/۵[H^+]_{(I)} \xrightarrow{\text{از دو طرف، لگاریتم منفی می‌گیریم.}} -\log[H^+]_{(II)} = -\log ۲/۵[H^+]_{(I)}$$

$$\Rightarrow -\log[H^+]_{(II)} = -\log ۲/۵ - \log[H^+]_{(I)}$$

$$\Rightarrow pH_{(II)} = -\log\frac{۵}{۲} + pH_{(I)} \Rightarrow pH_{(II)} = -(\underbrace{\log ۵}_{۰/۷} - \underbrace{\log ۲}_{۰/۳}) + pH_{(I)} \Rightarrow pH_{(II)} = pH_{(I)} - ۰/۴$$

۱۰ اگر ثابت یونش اسید HA، نصف ثابت یونش اسید HB و درصد یونش محلول ۱ مولار HB، ۲۰٪ باشد، درصد یونش محلول ۰/۱۵ مولار HA کدام است؟

۱) ۶۶ ۲) ۳۳ ۳) ۲۵ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

مسیر حل اینطوریاست:

$M, \%\alpha \xrightarrow{K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}}$ محاسبهٔ K_a برای اسید HB $\xrightarrow{K_a(HA)=\frac{K_a(HB)}{2}}$ محاسبهٔ K_a برای اسید HA $\xrightarrow{K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}}$ محاسبهٔ α برای اسید HA

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درصد یونش و غلظت محلول اسید HB، ثابت یونش این اسید را حساب می‌کنیم:

$$\text{اسید HB: } K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow[M=1\,mol\cdot L^{-1}]{\alpha=\frac{\%\alpha}{100}=0/2} K_a=\frac{1\times(0/2)^2}{1-0/2}=\frac{0/04}{0/8}=5\times10^{-2}$$

از آن‌جا که ثابت یونش اسید HA، نصف ثابت یونش اسید HB است، داریم:

$$\text{اسید HA: } K_a=\frac{5\times10^{-2}}{2}=2/5\times10^{-2}$$

در نهایت باید درجهٔ یونش محلول ۰/۱۵ مولار اسید HA را به دست بیاوریم:

$$K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow \frac{2/5\times10^{-2}}{1}=\frac{0/15\times\alpha^2}{6}\cdot\frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow 6\alpha^2+\alpha-1=0$$

توجه! برای حل معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac \quad , \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1, x_2=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(6)(-1)}}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1-5}{12}=-0/5 \text{ غ‌ق‌ق} \\ x_2=\frac{-1+5}{12}=\frac{4}{12}=0/33 \end{cases} \Rightarrow \alpha=0/33 \Rightarrow \%\alpha=\alpha\times100=33$$

۱۱ کدام مورد نادرست است؟

۱) از واکنش ۱ لیتر محلول مولار سود با ۱ لیتر محلول مولار جوهرنمک، محلول آب‌نمک با غلظت ۱ مولار تولید می‌شود.

۲) محلولی از نیتریک اسید با $pH = ۰$، همانند یک نمونه آب خالص، دارای یون هیدروکسید است.

۳) اگر برای محلول ۳ مولار یک اسید، pH در گسترهٔ صفر تا ۷ قرار گیرد، آن اسید از هیدروبرمیک اسید، ضعیف‌تر است.

۴) در مقداری آب گوجه‌فرنگی همانند شیر ترش‌شده، غلظت مولی یون هیدرونیوم بیشتر از یون هیدروکسید است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ واکنش بین محلول سود (محلول سدیم هیدروکسید در آب) و محلول هیدروکلریک اسید (محلول جوهرنمک) به صورت زیر است:

$$NaOH(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_۲O$$

در این واکنش، ۱ لیتر محلول یک مولار سود (محلولی که حاوی ۱ مول سدیم هیدروکسید است) و ۱ لیتر محلول یک مولار هیدروکلریک اسید (محلولی که حاوی ۱ مول هیدروکلریک اسید است) مصرف شده است؛ پس می‌توان گفت مقدار سدیم کلرید تولیدشده برابر با ۱ مول می‌شود. توجه داریم که در این فرایند، دو محلول ۱ لیتری با هم مخلوط شده‌اند، پس حجم محلول نهایی برابر با ۲ لیتر می‌شود. بر این اساس، غلظت مولی محلول سدیم کلرید (نمک خوراکی) تولیدشده را محاسبه می‌کنیم:

$$[NaCl] = \frac{۱ \text{ mol NaCl}}{۲ \text{ L محلول}} = ۰/۵ \text{ mol.L}^{-۱}$$

بنابراین از واکنش ۱ لیتر محلول مولار سود با ۱ لیتر محلول مولار جوهرنمک، محلول آب‌نمک با غلظت نیم‌مولار حاصل می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

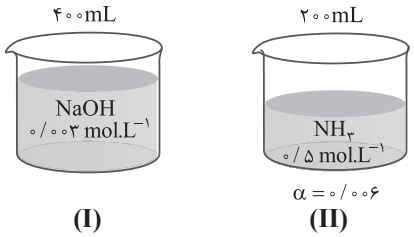
گزینهٔ (۲): آب و همهٔ محلول‌های آبی، محتوی یون‌های هیدرونیوم (H^+) و هیدروکسید (OH^-) هستند. به عنوان مثال، در محلولی از نیتریک اسید با $pH = ۰$، غلظت یون هیدروژن برابر با ۱ مول بر لیتر بوده و بر این اساس، غلظت مولی یون هیدروکسید برابر با $۱۰^{-۱۴}$ مول بر لیتر می‌شود. هر چند که غلظت یون هیدروکسید در این محلول خیلی خیلی کم است، اما باز هم یون‌های هیدروژن و هیدروکسید در این محلول در کنار هم قرار گرفته‌اند. در یک نمونه از آب خالص نیز یون‌های هیدروکسید و هیدروژن با غلظت برابر، در کنار هم قرار دارند.

گزینهٔ (۳): هیدروبرمیک اسید یک اسید قوی است. اگر اسید مورد نظر قوی‌تر از HBr بود، pH محلول ۳ مولار آن منفی می‌شد $(-\log ۳ = -۰/۵)$، حالا که pH آن در گسترهٔ صفر تا ۷ قرار گرفته، نتیجه می‌گیریم که غلظت یون هیدرونیوم در محلول آن کم‌تر از ۳ مولار بوده و یک اسید ضعیف بوده است.

گزینهٔ (۴): چون آب گوجه‌فرنگی و یک نمونه از شیر ترش‌شده، خاصیت اسیدی داشته و pH آن‌ها کم‌تر از ۷ قرار گرفته، پس می‌توان گفت در مقداری از آب گوجه‌فرنگی، همانند شیر ترش‌شده، غلظت مولی یون هیدرونیوم بیشتر از یون هیدروکسید است.

SanjeshCloud

۱۲ **شکل زیر دو محلول با مشخصات مختلف (شامل حجم و غلظت اولیه) را در دمای یکسان نشان می‌دهد. کدام گزینه دربارهٔ آن‌ها درست است؟**



۱) pH محلول (I) از pH محلول (II) بیشتر است.

۲) رسانایی الکتریکی محلول (II) از محلول (I) کم‌تر است.

۳) شمار یون‌های آمونیوم در محلول (II) با شمار یون‌های سدیم در محلول (I) برابر است.

۴) ثابت یونش باز ضعیف به تقریب برابر $۱/۸\times۱۰^{-۵}$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ محلول (I)، حاوی سدیم هیدروکسید $(NaOH)$ به عنوان یک باز قوی و محلول (II)، حاوی آمونیاک $(NH_۳)$ به عنوان یک باز ضعیف است.

ثابت یونش $NH_۳$ با توجه به اطلاعات داده‌شده برابر است با:

$$K_b(NH_۳)=\frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha}\xrightarrow{\alpha<۰/۰۵} K_b(NH_۳)=M\alpha^۲=۰/۵\times(۶\times۱۰^{-۳})^۲=۰/۵\times۳۶\times۱۰^{-۶}=۱/۸\times۱۰^{-۵}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): ابتدا غلظت یون هیدروکسید $[OH^-]$ در دو محلول را محاسبه کرده، سپس با توجه به آن‌ها، pH دو محلول را مقایسه می‌کنیم:

محلول (I): $[OH^-]=[NaOH]=۳\times۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$

محلول (II): $[OH^-]=M\cdot\alpha\cdot n=۰/۵\times(۶\times۱۰^{-۳})\times۱=۳\times۱۰^{-۳}$

با توجه به یکسان‌بودن $[OH^-]$ در دو محلول، می‌توان نتیجه گرفت که $[H^+]$ نیز در آن‌ها برابر بوده و pH دو محلول با هم برابر است.

گزینه (۲): **رسانایی الکتریکی محلول‌ها، به مجموع غلظت یون‌ها در آن‌ها بستگی دارد.** با توجه به تک‌ظرفیتی‌بودن هر دو باز، در هر دوی آن‌ها غلظت کاتیون (Na^+) در محلول (I) و $NH_۴^+$ در محلول (II)) برابر با غلظت OH^- می‌باشد؛ بنابراین می‌توان گفت که غلظت کاتیون‌ها و در نتیجه، مجموع کل غلظت یون‌ها در دو محلول یکسان و رسانایی الکتریکی آن‌ها نیز با هم برابر است.

$$\left.\begin{array}{l}\text{محلول (I)}: [Na^+]=[OH^-]\\ \text{محلول (II)}: [NH_۴^+]=[OH^-]\end{array}\right\}\xrightarrow{[OH^-]_{(I)}=[OH^-]_{(II)}}[Na^+]_{(I)}=[NH_۴^+]_{(II)}$$

$\Rightarrow$ مجموع غلظت یون‌ها و در نتیجه رسانایی الکتریکی دو محلول یکسان است.

گزینهٔ (۳): **غلظت** یون‌های آمونیوم $(NH_۴^+)$ در محلول (II)، برابر با **غلظت** یون‌های سدیم (Na^+) در محلول (I) می‌باشد، *اما هواستون باشه که* با توجه به این‌که حجم محلول (I)، دو برابر حجم محلول (II) است؛ در نتیجه شمار یون‌های Na^+ در محلول (I) نیز دو برابر شمار یون‌های $NH_۴^+$ در محلول (II) می‌باشد.

۱۳ درون ظرفی، ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲۵ مولار باریم هیدروکسید وجود دارد. اگر ۵۰ میلی‌لیتر از این محلول را برداشته و به ظرف دیگری منتقل کنیم، pH محلول باقی‌مانده در ظرف، کدام خواهد بود؟

۱) ۱۰/۰ ۲) ۱۰/۳

۳) ۱۳/۴ ۴) ۱۳/۷

پاسخ: گزینهٔ ۴

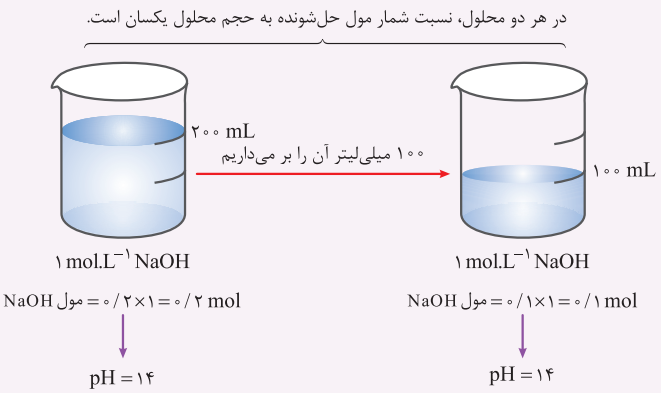
پاسخ خیلی تشریحی ✔ با برداشتن ۵۰ میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید ($Ba(OH)_2$) از محلول اولیه، غلظت مولی محلول تغییری نمی‌کند:

$$[OH^-] = 2[Ba(OH)_2] = 2\times 0/25 = 0/5\ mol.L^{-1}$$

$$\xrightarrow{[H^+][OH^-]=10^{-14}} [H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{0/5}$$

$$= 2\times 10^{-14}\ mol.L^{-1} \Rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log 2\times 10^{-14} = 14 - \log 2 = 13/7$$

گول نخوری ✘ غلظت یک محلول مشخص به مقدار محلول بستگی ندارد؛ در نتیجه pH آن نیز به مقدار محلول وابسته نیست.



مثلاً اگر ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول با غلظت ۱ مولار NaOH تهیه کنیم و سپس ۱۰۰ میلی‌لیتر از آن را برداریم، باز هم غلظت محلول، ۱ مولار خواهد بود؛ در نتیجه pH هر دوی آن‌ها برابر با ۱۴ می‌باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴ کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) هر چه نسبت $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در محلول یک باز بیشتر باشد، آن باز به یقین قوی‌تر است.

ب) در محلول شیشه‌پاک‌کن، کاتیونی چندا‌تمی وجود دارد که در ساختار برخی از صابون‌های مایع نیز وجود دارد.

حاوی آمونیاک

پ) با افزودن یک باز به آب، غلظت یون هیدروکسید افزایش یافته و به دلیل کاهش غلظت یون هیدرونیوم، رسانایی الکتریکی محلول تغییر قابل توجهی نمی‌کند.

ت) از محلول آبی سدیم هیدروکسید، برای بازکردن لوله‌ها استفاده می‌شود.

۱) الف ـ ب
۲) الف ـ پ
۳) ب ـ ت
۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

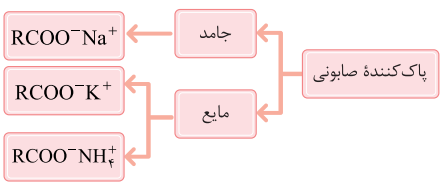
بررسی عبارت‌ها:

الف) بیشتربودن $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در یک محلول، نشان‌دهندهٔ خاصیت بازی بیشتر آن محلول است. برای مقایسهٔ قدرت دو باز، به غلظت اولیهٔ محلول‌ها و یا ثابت یونش بازها نیز نیاز داریم.

ب) معادلهٔ یونش آمونیاک (که در شیشه‌پاک‌کن وجود دارد.) در آب، به صورت زیر است:

$$NH_3 + H_2O \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$$

کاتیون چندا‌تمی حاصل از یونش، NH_4^+ (یون آمونیوم) است. این یون در ساختار برخی صابون‌های مایع یافت می‌شود.



پ) اگرچه با افزودن باز به آب، غلظت یون‌های H^+ کاهش و غلظت یون‌های OH^- افزایش می‌یابد، اما با توجه به افزایش غلظت یون‌های موجود در محلول، رسانایی الکتریکی بیشتر می‌شود. هم‌چنین با افزودن باز به آب، غلظت کاتیون‌ها نیز در محلول افزایش می‌یابد.

ت) سود سوزآور $(NaOH)$ از جمله بازهای قوی است و جزء مواد خورنده به شمار می‌رود. برای بازکردن لوله‌هایی که با اسیدهای چرب مسدود شده‌اند، می‌توان محلول سدیم هیدروکسید را در لوله ریخت تا با اسید چرب واکنش دهد. فراوردهٔ این واکنش یک نوع پاک‌کننده (صابون) است و علاوه بر این‌که در آب حل می‌شود، چربی‌ها را در آب پخش می‌کند.

$$\underset{\text{اسید}}{RCOOH(s)} + \underset{\text{باز}}{NaOH(aq)} \rightarrow \underset{\text{(نمک) صابون}}{RCOONa(aq)} + H_2O(l)$$

۱۵ **اگر به دو لیتر محلول نیتریک اسید ۰/۰۵ مولار، در هر ۴۸ ثانیه، ۶۰۰ میلی‌لیتر آب خالص افزوده شود، پس از گذشت چند دقیقه pH محلول به ۲/۳ می‌رسد و غلظت مولار یون هیدروکسید در این محلول، چند برابر می‌شود؟**

۱) $0/1 - 24$ ۲) $10 - 24$

۳) $0/1 - 8$ ۴) $10 - 8$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: حجم آب افزوده‌شده که pH محلول ۰/۰۵ مولار نیتریک اسید را به ۲/۳ می‌رساند را به دست می‌آوریم:

با رقیق‌کردن یک محلول (اضافه‌کردن آب به آن)، تعداد مول مادهٔ حل‌شونده تغییر نمی‌کند؛ بنابراین به هنگام رقیق‌کردن محلول‌های غلیظ، می‌توان از رابطهٔ روبه‌رو استفاده کرد: $M_{\text{غلیظ}} V_{\text{غلیظ}} = M_{\text{رقیق}} V_{\text{رقیق}}$

با توجه به این‌که نیتریک اسید (HNO_3)، یک اسید قوی تک‌پروتون‌دار است؛ به طور کامل یونیده شده و در محلول آن، غلظت یون هیدرونیوم (H^+)، برابر با غلظت اولیهٔ اسید است. غلظت نیتریک اسید در محلول نهایی (پس از رقیق‌شدن) برابر است با:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2/3} = 10^{0/7} \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-3}\ mol.L^{-1} \Rightarrow [HNO_3] = [H^+] = 5 \times 10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

از آن‌جا که محلول نهایی نیتریک اسید، حاصل افزودن آب به محلول غلیظ اولیه است؛ در نتیجه تعداد مول مادهٔ حل‌شونده در این دو محلول برابر است و می‌توان گفت که:

$$M_{\text{غلیظ}} V_{\text{غلیظ}} = M_{\text{رقیق}} V_{\text{رقیق}} \Rightarrow 0/05 \times 2 = 0/005 \times V_{\text{رقیق}} \Rightarrow V_{\text{رقیق}} = 20\ L$$

بنابراین حجم آب افزوده‌شده برابر است با:

$$V_{\text{رقیق}} = V_{\text{غلیظ}} + V_{\text{آب}} \Rightarrow V_{\text{آب}} = 20 - 2 = 18\ L$$

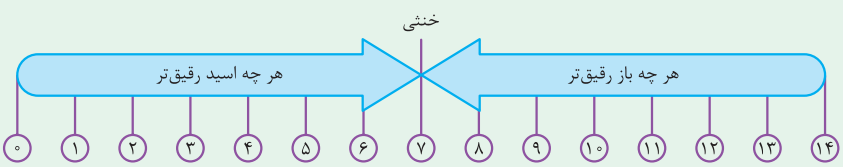
نکته

هرگاه محلول یک اسید را با اضافه‌کردن آب رقیق کنیم، خاصیت اسیدی محلول و غلظت یون H^+ در آن کاهش یافته و pH محلول افزایش می‌یابد. به همین ترتیب هر چه محلول یک باز را رقیق کنیم، خاصیت بازی محلول و غلظت یون OH^- در آن کاهش یافته و pH محلول کم‌تر می‌شود.

با توجه به این‌که pH، یک مقیاس لگاریتمی است، برای محلول اسیدها و بازهای قوی می‌توان نوشت: (V_1 حجم اولیه و V_2 حجم نهایی محلول است.)

$$|\Delta pH| = \log(\text{چند مرتبه رقیق‌شدن}) = \log \frac{V_2}{V_1}$$:اسیدها و بازهای قوی

پس در این سری از مسائل به کمک رابطهٔ بالا، میزان تغییر pH محلول اسیدها و بازهای قوی را به دست می‌آوریم و با توجه به مفهوم محلول اسیدی و بازی، کم یا زیاد شدن pH محلول را اعلام می‌کنیم.



گام دوم: محاسبه می‌کنیم که چند دقیقه طول می‌کشد تا ۱۸ L آب به محلول غلیظ اولیه افزوده شود:

$$18\ L_{\text{آب}} \times \frac{1000\ mL_{\text{آب}}}{1\ L_{\text{آب}}} \times \frac{48\ s}{600\ mL_{\text{آب}}} \times \frac{1\ min}{60\ s} = 24\ min$$

گام سوم: حساب می‌کنیم که در این فرایند، غلظت یون هیدروکسید (OH^-) چند برابر می‌شود:

نکته

اگر حجم محلول اسید قوی را n برابر کنیم، غلظت اسید و غلظت H^+، $\frac{1}{n}$ برابر و غلظت OH^-، n برابر می‌شود و pH به اندازهٔ $\log n$ افزایش می‌یابد.

با توجه به نکتهٔ بالا می‌توان گفت که با افزایش pH نیتریک اسید به اندازهٔ ۱ واحد، غلظت اسید و غلظت H^+، $\frac{1}{10}$ برابر و غلظت OH^-، ۱۰ برابر خواهد شد.

یه‌جور دیگه

pH محلول غلیظ اولیهٔ HNO_3 برابر است با:

$$[H^+] = [HNO_3] = 0/05\ mol.L^{-1} \Rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log 0/05 = 2 - \log 5 = 1/3$$

بنابراین با افزودن آب و رقیق‌کردن محلول نیتریک اسید، pH محلول یک واحد افزایش یافته و با توجه به این‌که HNO_3، یک اسید قوی است، می‌توان گفت که:

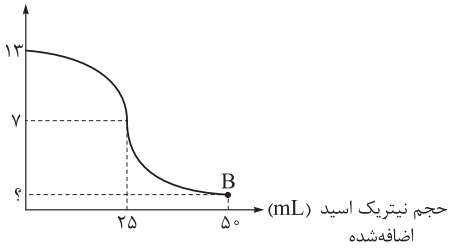
$$|\Delta pH| = \log \text{(چند مرتبه رقیق‌شدن)} \quad \log \frac{V_2}{V_1} = 1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 10 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 10 \Rightarrow V_2 = 20\ L$$

حجم آب افزوده‌شده برابر است با:

$$V_{آب} = V_2 - V_1 = \Delta V = 18\ L$$

SanjeshCloud

۱۶ با توجه به نمودار زیر که تغییرات pH را برای ۵۰ میلی‌لیتر محلول پتاس بر اثر افزودن تدریجی محلول نیتریک اسید نشان می‌دهد، pH در نقطهٔ B چه‌قدر است؟



۱) ۳/۸
۲) ۰/۸
۳) ۴/۳
۴) ۱/۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ابتدا با توجه به pH محلول پتاس (KOH) در حالت اول، غلظت باز در این محلول را محاسبه کن، سپس با توجه به این‌که محلول پتاس با افزودن ۲۵ mL محلول نیتریک اسید (HNO_3) به طور کامل خنثی شده، غلظت محلول HNO_3 را به دست بیاور. در نهایت با توجه به این‌که ۲۵ mL محلول HNO_3 دیگر پس از خنثی‌شدن به محلول اضافه شده، شمار مول‌های H^+، کل حجم محلول و در نتیجه $[H^+]$ را در نقطهٔ B حساب کن. *حالا فیلی راحت می‌تونی pH محلول رو تو این نقطه بسابی!*

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به pH اولیهٔ محلول پتاس (KOH)، غلظت KOH در محلول اولیهٔ آن را حساب می‌کنیم:

$$\text{محلول اولیهٔ KOH: } [H^+]=10^{-pH}=10^{-13} \xrightarrow{[H^+][OH^-]=10^{-14}} [OH^-]=\frac{10^{-14}}{[H^+]}=\frac{10^{-14}}{10^{-13}}=0/1\ mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow [KOH]=[OH^-]=0/1\ mol.L^{-1}$$

گام دوم: غلظت مولار محلول نیتریک اسید (HNO_3) را به دست می‌آوریم:

محلول ۰/۱ مولار KOH، براثر افزودن ۲۵ میلی‌لیتر محلول HNO_3، به طور کامل خنثی شده و به $pH=7$ رسیده است؛ بنابراین داریم:

$$n_aM_aV_a=n_bM_bV_b \Rightarrow 1\times M_a\times 25=1\times 0/1\times 50 \Rightarrow M_a=0/2\ mol.L^{-1}$$

گام سوم: غلظت یون H^+ را پس از افزودن ۲۵ میلی‌لیتر محلول HNO_3 دیگر پس از خنثی‌شدن (نقطهٔ B) حساب می‌کنیم:

$$mol_{H^+}=mol_{HNO_3}=M_aV_a=0/2\times 25\times 10^{-3}=5\times 10^{-3}\ mol$$

$$\Rightarrow [H^+]=\frac{mol_{H^+}}{V_{کل}}=\frac{5\times 10^{-3}}{(50+50)\times 10^{-3}}=\frac{5}{100}=5\times 10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

گام چهارم: pH محلول حاصل در نقطهٔ B را محاسبه می‌کنیم:

$$pH=-\log[H^+]=-\log 5\times 10^{-2}=2-\log 5=2-0/7=1/3$$

SanjeshCloud

۱۷ کدام مورد، درست است؟

۱) الکترولیت‌ها، موادی محلول در آب و غیرالکترولیت‌ها، موادی نامحلول در آب هستند.

۲) فراوردهٔ یونی واکنش جوش‌شیرین با محلول هیدروکلریک اسید، نمک خوراکی است.

۳) دستگاه گوارش انسان، یک سامانهٔ اسیدی به شمار می‌آید.

۴) مطابق مدل آرنیوس، اسیدها جزء ترکیب‌های مولکولی و بازها، جزء ترکیب‌های یونی هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مادهٔ $NaHCO_3$ ، سدیم هیدروژن کربنات یا *همون* جوش‌شیرین است. واکنش این ماده با اسید معده *این‌هوریاست*:

$$NaHCO_3(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + \underbrace{CO_2(g) + H_2O(l)}_{H_2CO_3}$$

همان‌طور که می‌بینید یک مول جوش‌شیرین، یک مول اسید معده را خنثی می‌کند. هم‌چنین در این واکنش، ترکیب یونی NaCl *(همون نمک خوراکی!)* تولید می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): الکترولیت یا غیرالکترولیت بودن یک ماده، ربطی به میزان انحلال آن در آب ندارد، مثلاً متانول به هر نسبتی در آب حل می‌شود، ولی چون یون تولید نمی‌کند، غیرالکترولیت است. نوع انحلال (یونی یا مولکولی) مهم است.

هم‌چنین ترکیب‌های یونی نامحلول در آب مانند AgCl و $BaSO_4$ ، اگرچه به مقدار بسیار کمی در آب حل می‌شوند (کم‌تر از ۰/۰۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب)، اما همان مقدار ناچیز حل‌شده هم تقریباً به طول کامل به یون تفکیک می‌شود؛ بنابراین الکترولیت قوی به شمار می‌آیند.

گزینهٔ (۳): دستگاه گوارش، سامانه‌ای با pH های مختلف است که این pH ها در قسمت‌های مختلف، متفاوت‌اند:

	رودهٔ کوچک	آب بزاق دهان	محیط معده
مقدار pH	۸/۵	۵/۲ تا ۷/۱	۱/۶ تا ۱/۸
سامانهٔ اسیدی یا بازی	بازی	اسیدی ضعیف (نزدیک به خنثی و اندکی بازی)	اسیدی

با توجه به جدول بالا مشخص است که همهٔ قسمت‌های مختلف دستگاه گوارش، لزوماً اسیدی نیستند!

گزینهٔ (۴): *نه والا!* به عنوان مثال آمونیاک (NH_3) که با انحلال در آب، غلظت یون OH^- را افزایش داده و در واقع باز آرنیوس می‌باشد، یک ترکیب مولکولی است؛ نه یونی!

آزمون ۷ آذر ۱۴۰۴

شیمی ۳

۱ **کدام مورد، درست است؟**

۱) ثابت تعادل (K) برای هر واکنش تعادلی، همواره عددی ثابت است.

۲) در هر گسترهٔ زمانی، شمار مول‌های یونیده‌شدهٔ HBr در آب، با شمار مول‌های HBr حاصل از پیوستن یون‌های H^+ و Br^- به یکدیگر، برابر است.

۳) واکنش‌های رفت و برگشت در سامانه‌های تعادلی، با سرعت برابری انجام می‌شوند.

۴) از یونش ۰/۶۲۵ مول استیک اسید در آب، ۰/۳ مول یون هیدرونیوم و ۰/۳۲۵ مول یون استات تولید می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در حالت تعادل، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت با هم برابر است، به عبارت دیگر، شرط اصلی برقراری تعادل، برابربودن سرعت واکنش‌های رفت و برگشت است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *امیدواریم گول نخورده باشین!* ثابت تعادل یک واکنش با تغییر دما تغییر می‌کند.

گزینهٔ (۲): HBr یک اسید قوی است و معادلهٔ یونش آن در آب به صورت یک‌طرفه است و نه تعادلی! عبارت داده‌شده برای اسیدهای ضعیفی مانند HF درست است.

گزینهٔ (۴): استیک اسید (CH_3COOH)، یک اسید ضعیف است و به طور جزئی در آب یونش می‌یابد. از طرفی برای اسیدهای ضعیف تک‌پروتون‌دار، شمار مول H^+ و آنیون حاصل از یونش با هم برابر است:

$$CH_3COOH \rightleftharpoons H^+ + CH_3COO^-$$

مول اولیه	n	۰	۰
تغییر مول	$-x$	$+x$	$+x$
مول تعادلی	$n-x$	x	x

۲ با توجه به تعادل‌های زیر (در دما و غلظت یکسان)، کدام مطلب درست است؟

۱) $HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq) \quad K_a = ۶/۹ \times ۱۰^{-۱۰}$

۲) $HB(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + B^-(aq) \quad K_a = ۴/۵ \times ۱۰^{-۴}$

۱) رسانایی الکتریکی محلول HB، بیشتر از محلول HA است.

۲) غلظت یون هیدرونیوم در محلول HB، کم‌تر است.

۳) قدرت اسیدی HA بیشتر از HB است.

۴) اگر HB فورمیک اسید باشد، HA می‌تواند اتانوئیک اسید باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به این‌که ثابت یونش اسید HB بیشتر از HA است، اسید HB قوی‌تر است و در شرایط یکسان، غلظت یون‌ها در محلول آن و در نتیجه، رسانایی الکتریکی محلول آن بیشتر است.

در مورد گزینهٔ (۴) دقت کنید که هرچند ثابت یونش فورمیک اسید ($HCOOH$) از اتانوئیک اسید ($CH_۳COOH$) بیشتر است، اما نسبت ثابت یونش آن‌ها، یک میلیون برابر نیست. (ثابت یونش فورمیک اسید، حدود ۱۰ برابر اتانوئیک اسید است.)

نکته مقایسهٔ ثابت یونش اسیدهای ضعیف موجود در کتاب درسی به صورت زیر است:

قدرت اسیدی: $\underbrace{HF > HNO_۲ > HCOOH > CH_۳COOH}_{K_a \simeq ۱۰^{-۴}} > \underbrace{H_۲CO_۳}_{K_a \simeq ۱۰^{-۷}} > \underbrace{HCN}_{K_a \simeq ۱۰^{-۱۰}}$

امتحان نهایی **با توجه به جدول زیر که ثابت یونش چند اسید مقایسه شده است، پاسخ دهید.** *(سؤال ۳ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

نام اسید	فرمول شیمیایی	ثابت یونش اسید
هیدروسیانیک اسید	HCN	$۴/۹ \times ۱۰^{-۱۰}$
هیدروفلوئوریک اسید	HF	$۵/۹ \times ۱۰^{-۴}$
نیترو اسید	$HNO_۲$	$۴/۵ \times ۱۰^{-۴}$

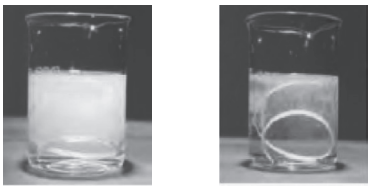
آ) کدام اسید قوی‌تر است؟ چرا؟

ب) در دما و غلظت یکسان، رسانایی الکتریکی کدام اسید کم‌تر است؟ چرا؟

پ) در شرایط یکسان، سرعت واکنش فلز منیزیم با یک لیتر محلول ۱ مولار کدام اسید جدول بالا، بیشتر است؟

۳ **با توجه به شکل زیر که چند ثانیهٔ اول واکنش محلول دو اسید متفاوت با مقدار یکسانی از نوار منیزیم در دمای معینی را نشان می‌دهد، کدام عبارت به یقین درست است؟ (حجم هر دو محلول برابر است و در پایان هر دو واکنش، نوار فلزی از بین می‌رود.)**

واکنش ۲ | واکنش ۱



HB | HA

۱) ثابت یونش HA از HB بیشتر است.

۲) اگر غلظت اولیهٔ دو اسید برابر باشد، حجم گاز نهایی تولیدی در واکنش «۱» بیشتر است.

۳) اگر HA و HB به ترتیب HF و HCl باشند، غلظت اولیهٔ HA بسیار بیشتر از HB است.

۴) pH محلول HA بیشتر از pH محلول HB است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

حباب‌های موجود در ظرف‌ها، نشان‌دهندهٔ مقدار گاز هیدروژن تولیدشده در چند ثانیهٔ اول واکنش‌ها است؛ پس تنها نتیجه‌ای که می‌توان از این شکل‌ها گرفت، این است که در محلول HA، غلظت یون هیدرونیوم بیشتر بوده است. *حالا بریم* گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱): بیشتربودن غلظت یون هیدرونیوم در محلول HA، می‌تواند به دلیل قوی‌تربودن اسید HA یا بیشتربودن غلظت مولی محلول آن باشد. ما اطلاعاتی از غلظت محلول‌ها نداریم؛ پس نمی‌توانیم به طور قطع، قدرت اسیدی و ثابت یونش اسیدها را با هم مقایسه کنیم.

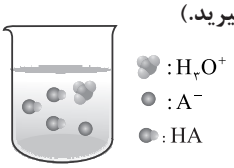
گزینهٔ (۲): با توجه به این‌که مقدار منیزیم در هر دو ظرف یکسان است و به طور کامل مصرف می‌شود، در هر دو واکنش، مقدار یکسانی گاز هیدروژن تولید می‌شود.

$$\underset{1\,mol}{Mg} + 2HX \rightarrow MgX_2 + \underset{1\,mol}{H_2}$$

گزینهٔ (۳): HF که یک اسید ضعیف است، مقدار بیشتری یون هیدرونیوم نسبت به اسید قوی HCl تولید کرده است. *چه‌جوری چنین چیزی ممکنه؟؟* حتماً غلظت محلول HF باید بالاتر از محلول HCl باشد.

گزینهٔ (۴): pH با غلظت یون هیدرونیوم رابطهٔ وارونه دارد ($pH = -\log[H^+]$)؛ پس pH محلول HA که غلظت یون هیدرونیوم در آن بیشتر است، کم‌تر می‌باشد.

۴ با توجه به شکل زیر که نمای ذره‌ای $2/5\ L$ از محلول HA را در دمای اتاق نشان می‌دهد، به ترتیب pH محلول چه‌قدر بوده و غلظت اولیهٔ اسید چند مولار است؟ (هر ذره را معادل $0/02$ مول در نظر بگیرید.)



۱) $2/1$ ـ $0/008$

۲) $1/7$ ـ $0/008$

۳) $2/1$ ـ $0/032$

۴) $1/7$ ـ $0/032$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ در محلول، یک ذره H_3O^+ که معادل $0/02$ مول است، وجود دارد؛

$$[H_3O^+]=\frac{0/02\ mol}{2/5\ L}=\frac{0/02}{\frac{10}{4}}=8\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

$$pH=-\log[H_3O^+]=-\log(8\times10^{-3})=3-\log 8=3-\log 2^3=3-3\log 2=3-3(0/3)=2/1$$

با توجه به شکل، سه ذرهٔ اسید به صورت یونیده‌نشده باقی مانده‌اند. از طرفی وجود یک ذرهٔ H_3O^+ نشان‌دهندهٔ یونیده‌شدن یک ذرهٔ اسید است؛ پس شمار ذره‌های اسید اولیه برابر $3+1=4$ بوده است:

$$\text{غلظت اولیهٔ اسید}=\frac{(4\times0/02)\ mol}{2/5\ L}=\frac{0/08}{\frac{10}{4}}=0/032\ mol.L^{-1}$$

۵ در دمای ثابت، با رقیق‌کردن محلول یک اسید ضعیف با آب، چه تعداد از موارد زیر افزایش می‌یابد؟

الف) درجهٔ یونش

ب) نسبت غلظت مولی یون هیدروکسید به هیدرونیوم

ج) pH محلول

د) ثابت یونش اسید

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ به‌جز ثابت یونش، بقیهٔ موارد افزایش می‌یابند.

بررسی همهٔ موارد:

الف) طبق رابطهٔ $K_a \simeq M\alpha^2$ و ثابت‌بودن K_a در دمای مشخص، درجهٔ یونش (α) با غلظت محلول (M) رابطهٔ وارونه دارد، یعنی با رقیق‌شدن و کاهش غلظت محلول، درجهٔ یونش اسید افزایش می‌یابد.

ب) با رقیق‌شدن محلول یک اسید، $[H^+]$ در محلول کاهش می‌یابد؛ بنابراین با توجه به ثابت‌بودن حاصل $[H^+][OH^-]$ در دمای معین، $[OH^-]$ افزایش می‌یابد؛ پس حاصل $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ نیز افزایش می‌یابد.

$$\frac{[OH^-]\uparrow}{[H^+]\downarrow} = \uparrow$$

ج) با رقیق‌شدن و کاهش $[H^+]$ محلول، pH افزایش می‌یابد.

د) ثابت یونش فقط به دما بستگی دارد و با تغییر غلظت محلول، تغییر نمی‌کند.

۶ به نیم‌لیتر محلول ۰/۱ مولار باریم هیدروکسید، در هر دقیقه ۱۰۰ mL آب اضافه می‌شود. پس از چند دقیقه pH محلول به ۱۳ می‌رسد؟ (دما را ثابت و برابر با $25^\circ C$ فرض کنید.)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا pH اولیهٔ محلول را می‌یابیم:

$$Ba(OH)_2 \rightarrow Ba^{2+} + 2OH^-$$

$$[OH^-] = 2[Ba(OH)_2] = 0/2\ mol.L^{-1} \xrightarrow{[H^+][OH^-]=10^{-14}} [H^+] = \frac{10^{-14}}{2\times10^{-1}} = 5\times10^{-14}$$

$$\Rightarrow pH = -\log[H^+] = 14 - \log 5 = 13/3$$

pH محلول از ۱۳/۳ به ۱۳ رسیده است؛ یعنی به اندازهٔ ۰/۳ واحد $(\log 2)$ تغییر کرده است؛ بنابراین با اضافه‌کردن آب باید حجم محلول ۲ برابر شده باشد:

$$\frac{V_2}{V_1} = 2 \Rightarrow \frac{V_2}{500} = 2 \Rightarrow V_2 = 1000\ mL \Rightarrow \text{حجم آب اضافه‌شده} = 1000 - 500 = 500\ mL$$

با توجه به این‌که در هر دقیقه، ۱۰۰ mL آب به محلول اضافه می‌شود، ۵ دقیقه زمان نیاز است تا حجم آب اضافه‌شده برابر با ۵۰۰ mL شود.

$$500\ mL\ \text{آب} \times \frac{1\ min}{100\ mL\ \text{آب}} = 5\ min$$

یه‌جور دیگه

$$\begin{cases} M_1 = 0/1 \\ V_1 = 500\ mL \end{cases} \quad \begin{cases} [OH^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-13}} = 0/1 \Rightarrow M_2 = \frac{0/1}{2} = 0/05\ mol.L^{-1} \\ V_2 = ? \end{cases}$$

$$\underbrace{M_1V_1}_{\text{غلیظ}} = \underbrace{M_2V_2}_{\text{رقیق}} \Rightarrow 0/1\times500 = 0/05\times V_2 \Rightarrow V_2 = 1000\ mL$$

$$\text{حجم آب اضافه‌شده} = \text{حجم محلول رقیق} - \text{حجم محلول غلیظ} = 1000 - 500 = 500\ mL \Rightarrow \Delta t = 5\ min$$

نکته

اگر با افزودن آب خالص به محلول یک اسید یا باز قوی، حجم آن را n برابر کنیم یا به عبارت دیگر، محلول را n مرتبه رقیق کنیم، pH آن به اندازهٔ $\log n$ تغییر می‌کند.

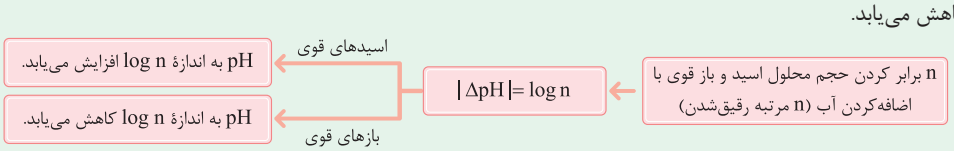
$$|\Delta pH| = \log n = \log\frac{V_2}{V_1}$$

n : تعداد مرتبه‌های رقیق‌شدن

V_1 : حجم اولیهٔ محلول اسید یا باز (محلول غلیظ)

V_2 : حجم نهایی محلول اسید یا باز (محلول رقیق)

همان‌طور که گفتیم با رقیق‌کردن محلول‌های اسیدی و بازی، خاصیت اسیدی و بازی آن‌ها کم شده و pH آن‌ها به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد.



SanjeshCloud

۷ **محلول‌های مولار از دو اسید HX و HY و دو باز AOH و BOH موجود می‌باشند. در دمای معینی، اختلاف pH محلول‌های HX و AOH، ۴ واحد از اختلاف pH محلول‌های HY و BOH بیشتر است. اگر pH محلول‌های AOH و BOH به ترتیب برابر ۱۲ و ۱۳ باشد، کدام عبارت در مورد این محلول‌ها درست است؟**

۱) اختلاف pH محلول‌های HX و HY برابر ۳ است.

۲) نسبت ثابت یونش HX به HY و این نسبت در BOH به AOH، به یقین عددی بزرگ‌تر از یک است.

۳) با افزایش دما به یک اندازه، pH هر چهار محلول به یک اندازه تغییر می‌کند.

۴) اگر BOH محلول سود باشد، HX به یقین محلول جوهرنمک است.

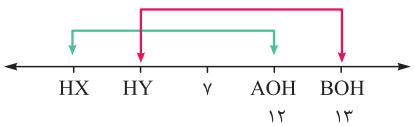
پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به اطلاعات داده‌شده، خواهیم داشت:

$$\underbrace{pH(AOH)}_{۱۲} - pH(HX) = \underbrace{pH(BOH)}_{۱۳} - pH(HY) + ۴ \Rightarrow pH(HY) - pH(HX) = ۵$$

در غلظت یکسان، pH محلول HX کم‌تر است؛ بنابراین نسبت به HY، اسید قوی‌تری است.

$$\begin{cases} K_a(HX) > K_a(HY) \\ K_b(BOH) > K_b(AOH) \end{cases}$$



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اختلاف pH محلول‌های اسیدی برابر ۵ است.

گزینهٔ (۳): با توجه به این‌که نمی‌دانیم اسیدها، قوی یا ضعیف هستند، نمی‌توانیم به طور قطع اظهار نظر کنیم.

گزینهٔ (۴): اولاً که نمی‌دانیم HX، قوی یا ضعیف است. دوماً pH محلول مولار (همان یک مولار) باز قوی تک‌ظرفیتی مانند سود (NaOH)، برابر ۱۴ است.

SanjeshCloud

۸ pH محلول ۰/۰۰۶ مولار کدام ترکیب در دمای $25^\circ C$ می‌تواند برابر ۱۲/۱ باشد؟

۱) اتیلن گلیکول
۲) دی‌متیل آمین
۳) پتاسیم هیدروکسید
۴) کلسیم هیدروکسید

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اتیلن گلیکول $(HO-CH_2CH_2-OH)$، به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و خاصیت بازی ندارد، پس گزینهٔ (۱) پَر! دی‌متیل آمین مانند آمونیاک، یک باز ضعیف تک‌ظرفیتی، پتاسیم هیدروکسید (KOH) یک باز قوی تک‌ظرفیتی و کلسیم هیدروکسید $(Ca(OH)_2)$، یک باز قوی دوظرفیتی است. برای این‌که بدانیم محلول ما، حاوی کدام‌یک از این مواد است، ابتدا بیایید pH محلول ۰/۰۰۶ مولار یک باز قوی تک‌ظرفیتی را حساب کنیم:

$$[OH^-]=6\times10^{-3} \Rightarrow [H^+]=\frac{10^{-14}}{6\times10^{-3}}=\frac{1}{6}\times10^{-11}$$

$$\Rightarrow pH=-\log(\frac{1}{6}\times10^{-11})=11-\log\frac{1}{6}=11+\log6=11+\log2+\log3$$

$$=11+0/3+0/5=11/8$$

پس باز ما، قوی و تک‌ظرفیتی نیست؛ در نتیجه باز مورد نظر، نمی‌تواند باز ضعیف تک‌ظرفیتی مانند دی‌متیل آمین باشد، زیرا در غلظت یکسان، pH محلول یک باز ضعیف کم‌تر از pH محلول یک باز قوی است؛ پس گزینه‌های (۲) و (۳) هم پَر! حالا برای اطمینان، گزینهٔ (۴) را بررسی می‌کنیم:

$$[OH^-]=2[Ca(OH)_2]=2\times6\times10^{-3}=12\times10^{-3} \Rightarrow [H^+]=\frac{10^{-14}}{12\times10^{-3}}=\frac{1}{12}\times10^{-11}$$

$$\Rightarrow pH=11+\log12=11+2\log2+\log3=11+(2\times0/3)+0/5=12/1$$

۹ کدام مورد، درست است؟

سوسپانسیون ← کلوئید ←

۱) شیر منیزی برخلاف شیر، نور را پخش نمی‌کند.

۲) ضداسیدها بخشی از اسید معده را خنثی کرده و pH محتویات معده را کاهش می‌دهند.

خاصیت بازی ←

۳) در محلول شیشه‌پاک‌کن، رابطهٔ $[OH^-] < [H^+]$ برقرار است.

۴) برای بازکردن مسیر لوله‌هایی که با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده‌اند، از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اگر مواد مسدودکنندهٔ لوله‌ها، خاصیت بازی داشته باشند، برای از بین بردن آن‌ها باید از شوینده‌های خورندهٔ اسیدی استفاده کنیم و اگر مواد مسدودکنندهٔ لوله‌ها، خاصیت اسیدی داشته باشند، باید از شوینده‌های خورندهٔ بازی استفاده کنیم.

۱) فراورده‌های محلول در آب یا گازی ← خورندهٔ بازی + رسوب اسیدی

۲) فراورده‌های محلول در آب یا گازی ← خورندهٔ اسیدی + رسوب بازی

مثلاً اگر مسیر لوله‌ای با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده باشد، برای بازکردن لوله، می‌توان از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید استفاده کرد:

$$\underset{\text{اسیدچرب (نامحلول در آب)}}{\overset{\text{اسید}}{RCOOH(s)}} + \underset{\text{شویندهٔ خورندهٔ بازی}}{\overset{\text{باز}}{NaOHC(aq)}} \rightarrow \underset{\text{صابون}}{RCOONa(aq)} + H_2O(l)$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): شیر منیزی، سوسپانسیون است و نور را پخش می‌کند.

گزینهٔ (۲): با خنثی‌شدن اسید معده توسط ضداسیدها، pH محتویات معده افزایش می‌یابد. (pH با $[H^+]$ رابطهٔ وارونه دارد.)

گزینهٔ (۳): محلول شیشه‌پاک‌کن خاصیت بازی دارد و در آن، $[OH^-]$ از $[H^+]$ بیشتر است.

۱۰ برای خنثی‌کردن یک لیتر محلول هیدروفلوئوریک اسید با $pH = ۲/۴$، $۳/۱$ گرم پودر سدیم اکسید به محلول اضافه می‌شود. درجهٔ یونش اسید کدام است؟ $(Na = ۲۳, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

$Na_۲O + HF \rightarrow NaF + H_۲O$ (معادله موازنه شود.)

۱) $۰/۰۲$
۲) $۰/۰۴$
۳) $۰/۰۵$
۴) $۰/۵۵$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا با توجه به معادلهٔ واکنش و جرم $Na_۲O$، غلظت محلول HF رو به دست بیار و بعد به کمک pH و رابطهٔ $\alpha = \frac{[H^+]}{M}$، درجهٔ یونش اسید رو حساب کن!

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$Na_۲O + ۲HF \rightarrow ۲NaF + H_۲O$$

گام دوم: به کمک جرم $Na_۲O$، غلظت مولی محلول HF را حساب می‌کنیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$۳/۱\ g\ Na_۲O \times \frac{۱\ mol\ Na_۲O}{۶۲\ g\ Na_۲O} \times \frac{۲\ mol\ HF}{۱\ mol\ Na_۲O} = ۰/۱\ mol\ HF$$

$$\text{غلظت مولی HF} = \frac{۰/۱\ mol}{۱\ L} = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{NaF}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{HF}} \Rightarrow \frac{۳/۱}{۱ \times ۶۲} = \frac{x \times ۱}{۲} \Rightarrow x = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$$

گام سوم: به کمک pH، $[H^+]$ در محلول HF را حساب می‌کنیم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲/۴} = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۰/۶} = ۱۰^{-۳} \times (۱۰^{۰/۳})^۲ = ۴ \times ۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

گام چهارم: از رابطهٔ درجهٔ یونش استفاده می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{[H^+]}{M} = \frac{۴ \times ۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۱}} = ۴ \times ۱۰^{-۲} = ۰/۰۴$$

۱۱ کدام مورد نادرست است؟

۱) با اضافه‌کردن مقداری آمونیاک به آب در دمای ثابت، $[OH^-]$ افزایش و در نتیجه حاصل $[H^+][OH^-]$ افزایش می‌یابد.

۲) یکی از فراورده‌های واکنش جوش‌شیرین با هیدروکلریک اسید، یک اسید آرنیوس است.

۳) واکنش نمادین خنثی‌شدن اسید و باز، همانند واکنش یونش نیتریک اسید، یک واکنش یک‌طرفه است.

۴) شکوفه‌های گل ادریسی در خاکی با $[OH^-] = ۵ \times ۱۰^{-۹}\ mol.L^{-۱}$، به رنگ آبی درمی‌آیند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

حاصل $[H^+][OH^-]$ در دمای مشخص، برای آب و همهٔ محلول‌های آبی، یک مقدار معین است. درسته که با افزودن آمونیاک به آب $[OH^-]$ افزایش می‌یابد، اما $[H^+]$ کاهش می‌یابد تا حاصل $[H^+][OH^-]$ ثابت باقی بماند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): در واکنش جوش‌شیرین با هیدروکلریک اسید، $CO_۲$ تولید می‌شود که اسید آرنیوس است.

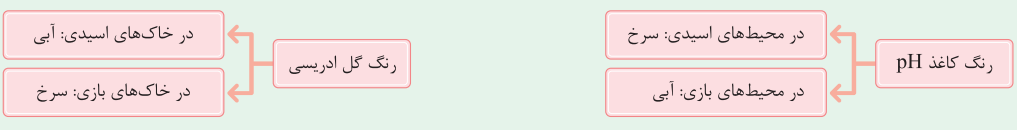
$$NaHCO_۳(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$$

گزینهٔ (۳): معادلهٔ کلی واکنش خنثی‌شدن اسید و باز به صورت $H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_۲O(l)$ بوده که مانند معادلهٔ یونش اسید قوی نیتریک اسید $(HNO_۳(aq) \rightarrow H^+(aq) + NO_۳^-(aq))$، یک‌طرفه است.

گزینهٔ (۴): گل ادریسی در خاک‌های اسیدی $([OH^-] < ۱۰^{-۷}$ یا $[H^+] > ۱۰^{-۷})$، به رنگ آبی درمی‌آید.

نکته

رنگ گل ادریسی در خاک‌های اسیدی و بازی برعکس رنگ کاغذ پی‌اچ در محیط‌های اسیدی و بازی *هستش!*



SanjeshCloud

۱۲ **کدام مورد، درست است؟**

۱) انرژی الکتریکی تولیدشده به کمک الکتروشیمی، پاک اما پرهزینه است.

۲) یکی از کاربردهای الکتروشیمی در قلمرو کنترل کیفی، pH سنج دیجیتال است.

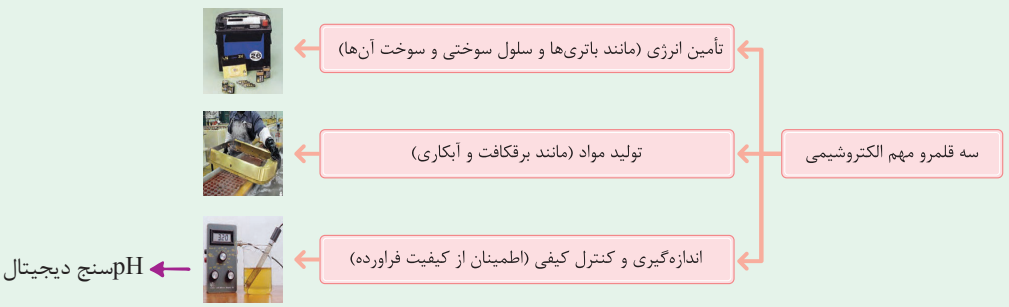
۳) با یک تیغهٔ مس، یک تیغهٔ روی و مقداری محلول اتانول و آب، می‌توان نوعی باتری ساخت و با آن یک لامپ LED را روشن کرد.

۴) با دو تیغه از جنس روی و با میوه‌ای مانند لیمو، می‌توان نوعی باتری ساخت و با آن یک لامپ LED را روشن کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته

سه قلمرو مهم الکتروشیمی در نمودار زیر آمده است:



پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در کتاب درسی می‌خوانیم که تولید انرژی الکتریکی پاک و ارزان، از دستاوردهای الکتروشیمی است.

گزینهٔ (۳): برای ساخت باتری باید از الکترولیت مناسب مانند لیمو، استفاده کرد. محلول اتانول در آب که الکترولیت نیست! (اتانول به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و در محلول آن، یون وجود ندارد.)

گزینهٔ (۴): هر دو تیغه نباید از یک جنس باشند. تیغه‌ای از جنس روی و تیغه‌ای دیگر مثلاً از جنس مس!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

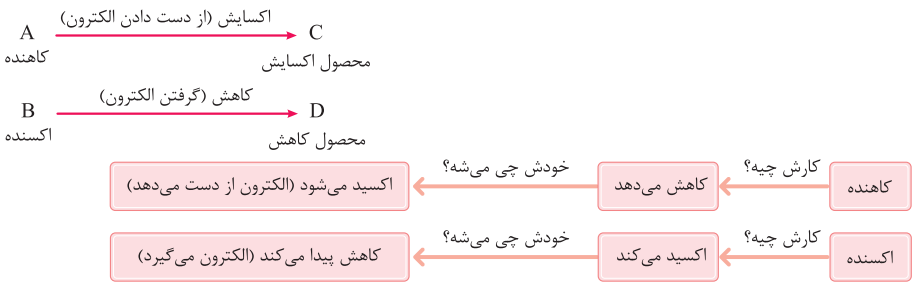
۱۳ **با توجه به شکل زیر که الگویی ساده از یک واکنش اکسایش ـ کاهش بین دو اتم را نشان می‌دهد، گونه‌های B و C به ترتیب کدام‌اند؟**



۱) اکسنده ـ محصول کاهش
۲) کاهش‌یافته ـ محصول اکسایش
۳) کاهنده ـ محصول اکسایش
۴) اکسایش‌یافته ـ محصول کاهش

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ A، الکترون از دست داده؛ بنابراین اکسایش یافته و نقش کاهنده را دارد. B الکترون گرفته، یعنی کاهش یافته و نقش اکسنده را دارد.



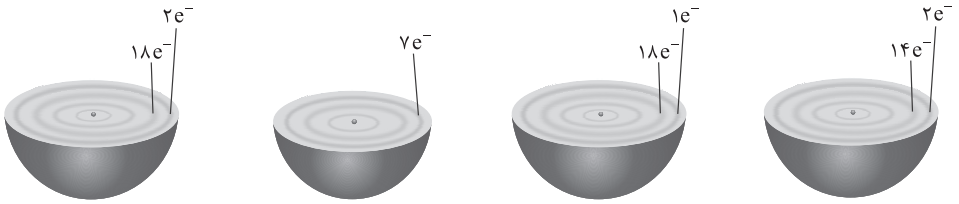
کنکور

در واکنش سوختن فلز منیزیم، گونه‌های «اکسایش‌یافته» و «کاهنده»، به ترتیب (از راست به چپ) کدام‌اند؟

(سؤال ۹۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ـ نوبت دوم)

۱) O_2 و O_2
۲) O_2 و Mg
۳) Mg و O_2
۴) Mg و Mg

۱۴ با توجه به شکل‌های زیر که بخشی از اتم چند عنصر را نشان می‌دهند، کدام مورد، نادرست است؟



(A) (B) (C) (D)

۱) اگر قطعه‌ای از فلز A را در محلولی حاوی یون‌های C قرار دهیم، دمای محلول به تدریج افزایش می‌یابد.

۲) قدرت کاهندگی A از D بیشتر است و B برخلاف A، خاصیت اکسندگی دارد.

۳) در واکنش A با B، به ازای مصرف هر مول A، $۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}$ الکترون بین اکسنده و کاهنده مبادله می‌شود.

۴) در واکنش $D+C^{۲+}\rightarrow D^{۲+}+C$، D کاهنده و $C^{۲+}$ اکسنده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ *اول بیایید عنصرها رو شناسایی کنیم:*

عدد اتمی A $= \underset{\text{لایهٔ اول}}{۲} + \underset{\text{لایهٔ دوم}}{۸} + \underset{\text{لایهٔ سوم}}{۱۸} + \underset{\text{لایهٔ چهارم}}{۲} = ۳۰ \Rightarrow {}_{۳۰}Zn$

عدد اتمی B $= \underset{\text{لایهٔ اول}}{۲} + \underset{\text{لایهٔ دوم}}{۸} + \underset{\text{لایهٔ سوم}}{۷} = ۱۷ \Rightarrow {}_{۱۷}Cl$

عدد اتمی C $= \underset{\text{لایهٔ اول}}{۲} + \underset{\text{لایهٔ دوم}}{۸} + \underset{\text{لایهٔ سوم}}{۱۸} + \underset{\text{لایهٔ چهارم}}{۱} = ۲۹ \Rightarrow {}_{۲۹}Cu$

عدد اتمی D $= \underset{\text{لایهٔ اول}}{۲} + \underset{\text{لایهٔ دوم}}{۸} + \underset{\text{لایهٔ سوم}}{۱۴} + \underset{\text{لایهٔ چهارم}}{۲} = ۲۶ \Rightarrow {}_{۲۶}Fe$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): قدرت کاهندگی فلز روی از فلز مس بیشتر است؛ پس فلز روی با محلول حاوی یون‌های مس، به طور طبیعی واکنش می‌دهد.

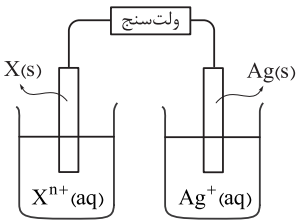
گزینهٔ (۲): قدرت کاهندگی روی (A) از آهن (D) بیشتر است. هم‌چنین کلر (B)، نافلز است و برخلاف روی، تمایل به گرفتن الکترون داشته و خاصیت اکسندگی دارد.

گزینهٔ (۳): در واکنش فلز روی با کلر، فلز روی اکسایش یافته و به $Zn^{۲+}$ تبدیل می‌شود؛ پس به ازای هر مول Zn، ۲ مول الکترون $(۲\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^{-})$ مبادله خواهد شد.

$$Zn(s)\rightarrow Zn^{۲+}(s)+۲e^{-}$$

گزینهٔ (۴): در واکنش مورد نظر، D اکسایش و $C^{۲+}$ کاهش یافته است؛ بنابراین D، نقش کاهنده و $C^{۲+}$، نقش اکسنده را دارد.

۱۵ **دانش‌آموزی یک سلول گالوانی مطابق شکل زیر تشکیل می‌دهد و بعد از اتصال ولت‌سنج در مدار، عدد صفر بر روی آن نمایش داده می‌شود. کدام عامل می‌تواند دلیل این اتفاق باشد؟**



۱) X، فلز پایداری مانند طلا و پلاتین می‌باشد و اکسایش نمی‌یابد.

۲) تبادل یون میان دو نیم‌سلول انجام نمی‌شود.

۳) غلظت اولیهٔ محلول دو الکترولیت با هم برابر نیستند.

۴) ابعاد و جرم دو الکترود تفاوت زیادی با هم دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

دیوارهٔ متخلخل: در سلول‌های گالوانی، یک دیواره که متخلخل است، دو نیم‌سلول آندی و کاتدی را از یکدیگر جدا می‌کند. این دیوارهٔ متخلخل که از جنس مواد خاصی است، دو وظیفهٔ مهم و حیاتی دارد:

۱) از مخلوط‌شدن مستقیم و سریع دو الکترولیت، جلوگیری می‌کند.

اگر الکترولیت‌های دو نیم‌سلول مخلوط شوند، جریان برق تولید نمی‌شود و عملاً سلول کارایی خود را از دست می‌دهد. مثلاً در سلول گالوانی «روی ـ مس» اگر دیوارهٔ متخلخل وجود نداشته باشد، یون‌های Cu^{2+} که در اطراف تیغهٔ Zn قرار دارند، به طور مستقیم با تیغه واکنش می‌دهند؛ یعنی مانند قراردادن تیغهٔ روی در محلول مس (II) سولفات، به طور مستقیم با یکدیگر الکترون مبادله می‌کنند؛ پس خبری از عبور الکترون‌ها از سیم و تولید جریان برق نخواهد بود.

۲) به یون‌های موجود در دو محلول اجازهٔ عبور می‌دهد تا بار الکتریکی محلول‌ها خنثی باقی بماند.

برای درک بهتر نقش دیوارهٔ متخلخل، بیایید برگردیم به سلول گالوانی روی ـ مس!

در بخش آندی این سلول، نیم‌واکنش $Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^{-}$ انجام می‌شود و الکترون‌های حاصل از آن، برای تیغهٔ مس فرستاده می‌شود و یون‌های Zn^{2+} وارد محلول الکترولیت نیم‌سلول آندی می‌شوند. *به نظرتون نتیجهٔ این اتفاق چیه؟!*

درسته! محلول الکترولیت نیم‌سلول آندی، به تدریج دارای بار الکتریکی مثبت (به دلیل تجمع کاتیون‌های Zn^{2+}) می‌شود. تجمع بار مثبت در نیم‌سلول آندی، سبب می‌شود که الکترون‌ها نتوانند در سیم از آند به سمت کاتد حرکت کنند و جریان قطع می‌شود؛ پس باید فکری به حال خنثی‌شدن محلول بکنیم. *این‌جاست* که دیوارهٔ متخلخل به داد *ما می‌رسه!* به دلیل دافعهٔ موجود بین یون‌های Zn^{2+} در نیم‌سلول آندی، یون‌های اضافی Zn^{2+} از طریق منافذ ریز دیوارهٔ متخلخل، از نیم‌سلول آندی خارج و وارد نیم‌سلول کاتدی می‌شوند. به این ترتیب، محلول الکترولیت در نیم‌سلول آندی خنثی می‌شود. *حالا ببینیم در نیم‌سلول کاتدی، چه اتفاقی می‌افتد؟*

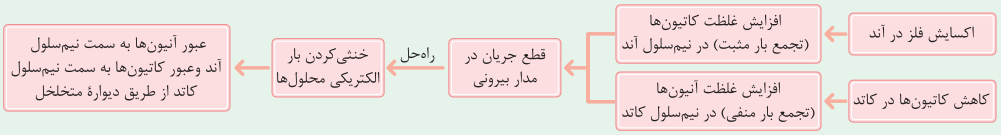
در نیم‌سلول کاتدی، نیم‌واکنش $Cu^{2+}(aq) + 2e^{-} \rightarrow Cu(s)$ انجام می‌شود؛ بنابراین با مصرف یون‌های Cu^{2+} در نیم‌سلول کاتدی، شمار آنیون‌ها زیاد شده و محلول الکترولیت دارای بار الکتریکی منفی می‌شود. در نتیجه به دلیل زیادبودن بار الکتریکی منفی و دافعهٔ بین آنیون‌های موجود در محلول (مثلاً SO_4^{2-})، این آنیون‌ها از طریق منافذ ریز دیوارهٔ متخلخل، از نیم‌سلول کاتدی خارج و وارد نیم‌سلول آندی می‌شوند. به این ترتیب، محلول الکترولیت در نیم‌سلول کاتدی نیز خنثی می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

یکی از الزامات سلول گالوانی، ارتباط میان دو نیم‌سلول با دیوارهٔ متخلخل است.

نکته

در یک سلول گالوانی، همواره کاتیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل به سمت کاتد و آنیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل به سمت آند مهاجرت می‌کنند تا هم مدار الکتریکی را کامل کنند و هم محلول‌ها را خنثی نگه دارند.

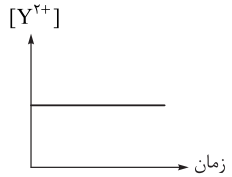


SanjeshCloud

۱۶ **برای بررسی رفتارهای الکتروشیمیایی چند فلز و محلول‌های حاوی یون‌های آن‌ها، آزمایش‌های زیر انجام شده است. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده، کدام مورد نادرست است؟**

الف) با قراردادن تیغهٔ A درون محلول X^{2+}، دما افزایش یافت.

ب) با قراردادن تیغهٔ A درون محلول Y^{2+}، نمودار تغییرات غلظت یون‌های Y^{2+} به صورت روبه‌رو به دست آمد.



۱) مقایسهٔ قدرت کاهندگی فلزهای مورد آزمایش به صورت $Y > A > X$ است.

۲) با قراردادن تیغهٔ X درون محلول Y^{2+}، فلز Y ته‌نشین می‌شود.

۳) اگر A با محلول مولار HCl واکنش دهد، Y به یقین با این محلول واکنش داده ولی در مورد X، نمی‌توان با یقین اظهار نظر کرد.

۴) میزان افزایش دما در واکنش تیغهٔ Y با محلول X^{2+}، بیشتر از واکنش این تیغه با محلول A^{2+} است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا باید ببینیم از هر آزمایش چه نتیجه‌ای می‌گیریم:

الف) افزایش دما، نشانهٔ انجام واکنش شیمیایی بین A و X^{2+} است؛ بنابراین قدرت کاهندگی فلز A از X بیشتر است.

قدرت کاهندگی: $A > X$

ب) غلظت یون‌های Y^{2+} تغییری نکرده است؛ بنابراین واکنش بین تیغهٔ A و یون‌های Y^{2+} انجام نشده است:

قدرت کاهندگی: $A < Y$

از جمع این دو آزمایش به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

قدرت کاهندگی: $Y > A > X$

با این اوصاف، گزینهٔ (۲) نادرست است، زیرا به دلیل کم‌تربودن قدرت کاهندگی X نسبت به Y، واکنش $X + Y^{2+} \rightarrow$ انجام نمی‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *این رو که گفتیم!*

گزینهٔ (۳): اگر A با محلول ۱ مولار HCl واکنش دهد، Y نیز که قدرت کاهندگی بیشتری دارد، قطعاً با این محلول واکنش خواهد داد، اما در مورد X *نمی‌دونیم!* چون قدرت کاهندگی کم‌تری نسبت به A دارد و از طرفی، مثبت یا منفی بودن E° آن مشخص نیست.

گزینهٔ (۴): تفاوت قدرت کاهندگی Y و X، بیشتر از تفاوت قدرت کاهندگی Y و A است، پس میزان افزایش دما در واکنش $Y + X^{2+} \rightarrow$ بیشتر از واکنش $Y + A^{2+} \rightarrow$ است.

کنکور

با توجه به اطلاعات زیر، که رفتار چهار فلز D، X، A و Z را در آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد، کدام مورد دربارهٔ مقایسهٔ قدرت کاهندگی آن‌ها در مقایسه با Cu درست است؟ *(سؤال ۱۰۴ کنکور تجربی ۱۴۰۴ـ نوبت دوم)*

- **قدرت اکسندگی X^{2+}، از قدرت اکسندگی Z^{2+} بیشتر است.**
- **تنها سه فلز D، Z و X با محلول $CuCl_2(aq)$ واکنش می‌دهند.**
- **با قراردادن تیغه‌ای از فلز D در محلول‌های جداگانهٔ دارای یون‌های Z^{2+}، A^{2+} و X^{2+}، فقط فلزهای A و X رسوب می‌کنند.**

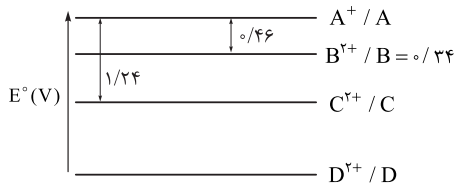
۱) $X > D > Cu > Z > A$

۲) $Z > X > Cu > A > D$

۳) $X > Z > D > Cu > A$

۴) $Z > D > X > Cu > A$

۱۷ با توجه به نمودار پتانسیل کاهشی زیر و گونه‌های موجود در آن، کدام عبارت نادرست است؟ (A، B، C و D عنصرهای فلزی‌اند.)



۱) به ترتیب A^+ و D^{2+}، قوی‌ترین و ضعیف‌ترین گونه‌های اکسنده‌اند.

۲) دو فلز C و D می‌توانند با محلول ۱ مولار HCl واکنش دهند.

۳) اگر فلز C در اتصال با SHE، سلول گالوانی تشکیل دهد، به مرور pH الکترولیت در نیم‌سلول کاتدی کاهش می‌یابد.

۴) واکنش فلز D با محلول‌هایی حاوی یون سایر فلزها، به طور خودبه‌خودی انجام می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

می‌توانیم قدرت اکسندگی و کاهندگی گونه‌ها را به کمک E° با هم مقایسه کنیم. دیدیم که فرم کلی معادلهٔ نیم‌سلول‌های استاندارد به صورت مقابل است: گونهٔ کاهنده $\rightarrow$ گونهٔ اکسنده $+ne^-$

بنابراین برای مقایسهٔ قدرت اکسندگی، باید به گونه‌های سمت چپ نیم‌واکنش‌ها و برای مقایسهٔ قدرت کاهندگی، باید به گونه‌های سمت راست نیم‌واکنش‌ها نگاه کنیم:

- در مقایسهٔ قدرت اکسندگی ← به گونه‌های سمت چپ نیم‌واکنش‌ها توجه می‌کنیم.
  - هر چه E° بزرگ‌تر، گونهٔ سمت چپ، اکسندهٔ قوی‌تر
  - هر چه E° کوچک‌تر، گونهٔ سمت چپ، اکسندهٔ ضعیف‌تر
- در مقایسهٔ قدرت کاهندگی ← به گونه‌های سمت راست نیم‌واکنش‌ها توجه می‌کنیم.
  - هر چه E° کوچک‌تر، گونهٔ سمت راست، کاهندهٔ قوی‌تر
  - هر چه E° بزرگ‌تر، گونهٔ سمت راست، کاهندهٔ ضعیف‌تر

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نیم‌سلول A^+ / A، بیشترین E° و نیم‌سلول D^{2+} / D، کم‌ترین E° را دارد؛ بنابراین A^+ بیشترین قدرت اکسندگی و D^{2+} کم‌ترین قدرت اکسندگی را دارد.

گزینهٔ (۲): فلزهایی می‌توانند با محلول هیدروکلریک اسید واکنش دهند که E° منفی داشته باشند. به کمک اطلاعات داده‌شده، می‌توانیم E° نیم‌سلول C^{2+} / C را به دست آوریم.

$$emf : E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند})$$

$$\text{سلول B – A} : ۰/۴۶ = E^\circ(A^+ / A) - ۰/۳۴ \Rightarrow E^\circ(A^+ / A) = ۰/۸\ V$$

$$\text{سلول C – A} : ۱/۲۴ = ۰/۸ - E^\circ(C^{2+} / C) \Rightarrow E(C^{2+} / C) = -۰/۴۴\ V$$

E° فلز C منفی است. از طرفی با توجه به نمودار، E° فلز D نسبت به C کم‌تر می‌باشد و قطعاً منفی است؛ پس هر دو فلز می‌توانند با محلول HCl واکنش دهند.

گزینهٔ (۳): E° فلز C منفی است و در مقابل SHE، نقش آند را دارد:

$$C + ۲H^+ \rightarrow C^{2+} + H_۲$$

با کاهش $[H^+]$ در نیم‌سلول کاتدی، pH الکترولیت افزایش می‌یابد.

گزینهٔ (۴): E° فلز D نسبت به بقیه منفی‌تر است، یعنی قدرت کاهندگی فلز D نسبت به سایر فلزها بیشتر است؛ پس فلز D می‌تواند با یون سایر فلزها واکنش دهد.

۱۸ **قطعه‌ای از فلز آلومینیم به جرم ۴۰ گرم را در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۵ مولار مس (II) سولفات وارد می‌کنیم. اگر پس از مدتی ۰/۳ مول الکترون بین گونهٔ اکسنده و کاهنده مبادله شود، جرم تیغه به چند گرم و غلظت محلول مس (II) سولفات به چند مولار خواهد رسید؟ (حجم محلول ثابت فرض شود و ۴۰ درصد فلز مس ایجادشده روی تیغهٔ آلومینیم رسوب می‌کند، $Al = ۲۷, Cu = ۶۴ : g.mol^{-۱}$)**

۱) ۴۱/۱۴ ـ ۰/۲

۲) ۴۴/۹۸ ـ ۰/۲

۳) ۴۱/۱۴ ـ ۰/۳

۴) ۴۴/۹۸ ـ ۰/۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

مسائل تغییر جرم تیغه

وقتی یک تیغهٔ فلزی را درون محلولی از یون‌های فلزی که قدرت کاهندگی کم‌تری نسبت به فلز سازندهٔ تیغه دارد، قرار می‌دهیم، یک واکنش اکسایش ـ کاهش رخ می‌دهد که در آن جرم تیغه تغییر می‌کند. میزان تغییر جرم تیغه به دو عامل بستگی دارد: جرم تیغه‌ای که اکسایش می‌یابد و جرم فلزی که روی تیغه می‌*نشیند!* (در سطح تیغه رسوب می‌کند.) با توجه به مقدار این دو جرم، جرم تیغه در نهایت می‌تواند کاهش یا افزایش یابد. به طور مثال برای واکنش فلز روی با محلول مس (II) سولفات، می‌توان نوشت:

$$Zn(s) + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + Cu(s)$$

$$\text{تغییر جرم تیغه} = \text{جرم } Cu \text{ که روی تیغه می‌نشیند} - \text{جرم } Zn \text{ کم‌شده}$$

با توجه به این‌که به ازای مصرف ۱ مول فلز روی (۶۵ g)، ۱ مول فلز مس (۶۴ g) با جرم کم‌تر بر سطح تیغه می‌نشیند، جرم تیغه کاهش می‌یابد. اگر شمار الکترون مبادله‌شده برابر ۲ مول باشد و فرض کنیم، همهٔ مس تولیدشده روی تیغه می‌نشیند، خواهیم داشت:

$$\text{تغییر جرم تیغه} = ۶۴ - ۶۵ = -۱ \Rightarrow \text{به ازای مبادلهٔ ۲ مول الکترون، جرم تیغه ۱ گرم کاهش می‌یابد.}$$

$$\text{جرم نهایی تیغه} = \text{جرم اولیهٔ تیغه} - \text{جرم تیغهٔ مصرف‌شده} + \text{جرم فلز نشسته روی تیغه}$$

در مسائل مربوط به تغییر جرم تیغه، می‌توانیم از کسر تناسب به شکل زیر استفاده کنیم:

$$\frac{\text{تغییر جرم تیغه}}{(\text{جرم مولی فلز تیغه} \times \text{ضریب}) - (\frac{\text{درصد چسبیدن}}{۱۰۰} \times \text{جرم مولی فلز تولیدشده} \times \text{ضریب})} = \cdots = \frac{\text{تعداد}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}$$

اگر همهٔ فلز تولیدشده روی تیغه رسوب کند، درصد چسبیدن برابر ۱۰۰ است و برای فلز تولیدشده، از همان «جرم مولی × ضریب» استفاده می‌کنیم، اما اگر در سؤالی گفته شود، فلان درصد از فلز تولیدشده روی تیغه رسوب می‌کند، حتماً باید درصد چسبیده‌شدن را در محاسبات وارد کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

معادلهٔ واکنش انجام‌شده به صورت زیر است:

$$۲Al(s) + ۳Cu^{۲+}(aq) \rightarrow ۲Al^{۳+}(aq) + ۳Cu(s) \sim ۶e^-$$

$$۰ \quad \overset{۲ \times ۳ = ۶e^-}{\longleftarrow} \quad +۳$$

باید ببینیم با مبادلهٔ ۰/۳ مول الکترون، چند گرم Al مصرف شده و چند گرم Cu روی تیغه می‌نشیند:

$$\text{جرم } Al \text{ مصرف‌شده: } ۰/۳ \text{ mol } e^- \times \frac{۲ \text{ mol Al}}{۶ \text{ mol } e^-} \times \frac{۲۷ \text{ g}}{۱ \text{ mol Al}} = ۲/۷ \text{ g}$$

$$\text{جرم } Cu \text{ نشسته روی تیغه: } ۰/۳ \text{ mol } e^- \times \frac{۳ \text{ mol Cu}}{۶ \text{ mol } e^-} \times \frac{۶۴ \text{ g}}{۱ \text{ mol Cu}} \times \frac{۴۰}{۱۰۰} = ۳/۸۴ \text{ g}$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\text{جرم نهایی تیغه} = \text{جرم اولیهٔ تیغه} - \text{جرم تیغهٔ مصرف‌شده} + \text{جرم فلز نشسته روی تیغه} = ۴۰ - ۲/۷ + ۳/۸۴ = ۴۱/۱۴ \text{ g}$$

برای محاسبهٔ غلظت نهایی محلول، باید ببینیم در ابتدا چند مول $Cu^{۲+}$ داشتیم و چند مول آن مصرف شده است:

$$\text{مول اولیه } Cu^{۲+}: ۰/۵ \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times ۰/۵ \text{ L} = ۰/۲۵ \text{ mol}$$

$$\text{مول } Cu^{۲+} \text{ مصرف‌شده: } ۰/۳ \text{ mol } e^- \times \frac{۳ \text{ mol } Cu^{۲+}}{۶ \text{ mol } e^-} = ۰/۱۵ \text{ mol}$$

باقی‌مانده Cu^{2+} مول $= 0/25 - 0/15 = 0/1\ mol = [Cu^{2+}]_{\text{نهایی}} = \frac{0/1\ mol}{0/5\ L} = 0/2\ mol.L^{-1}$

یه‌جور دیگه

$2Al \sim 3Cu^{2+} \sim 3Cu \sim 6e^-$

$$\frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} = \frac{\text{تغییر جرم تیغه}}{(\text{جرم مولی Cu} \times \text{ضریب Cu} \times \frac{\text{درصد چسبیدن}}{100}) - (\text{جرم مولی Al} \times \text{ضریب Al})} = \frac{\text{حجم} \times \text{تغییر غلظت مولی}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{Cu^{2+}}}$$

$$\Rightarrow \frac{0/3}{6} = \frac{x}{(3 \times 64 \times \frac{40}{100}) - (2 \times 27)} = \frac{y \times 0/5}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = +1/14 \text{ (افزایش جرم تیغه)} \\ y = 0/3 \text{ (کاهش غلظت مولی محلول)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{جرم نهایی تیغه} = 40 + 1/14 = 41/14\ g \\ \text{غلظت نهایی محلول} = 0/5 - 0/3 = 0/2 \end{cases}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

خیلی سبز

آزمون ۳۰ آذر

شیمی ۳

۱ کدام مطلب، نادرست است؟

۱) باتری مولدی است که در آن واکنش شیمیایی با سفر الکترون رخ می‌دهد تا بخشی از انرژی شیمیایی مواد، به انرژی الکتریکی تبدیل شود.

۲) هرگاه تیغه‌ای از جنس فلز آلومینیم درون محلول مس (II) سولفات قرار گیرد، به تدریج از شدت رنگ محلول کاسته می‌شود. (رنگ آبی ناشی از $Cu^{2+}(aq)$)

۳) در هر واکنش شیمیایی، هنگامی که بار الکتریکی یک گونه مثبت‌تر شود، آن گونه اکسایش یافته است.

۴) در واکنش فلز روی با یون‌های وانادیم (III) و تبدیل آن به یون‌های روی، نقش کاهنده مربوط به یون‌های $V^{3+}(aq)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

وقتی در واکنش فلز روی با یون‌های وانادیم (III)، اتم‌های روی (Zn) با عدد اکسایش صفر به یون‌های روی (Zn^{2+}) با عدد اکسایش ۲+ تبدیل و دچار اکسایش می‌شوند و نقش کاهنده را دارند؛ یعنی در واکنش $Zn + V^{3+} \rightarrow Zn^{2+} + V^{n+} (n < 3)$، اتم‌های روی، اکسایش و یون‌های وانادیم (III)، کاهش یافته‌اند؛ بنابراین اتم‌های روی (Zn)، نقش کاهنده و یون‌های وانادیم (III) (V^{3+})، نقش اکسنده را دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *به وضوح درسته!*

گزینهٔ (۲): می‌دانیم که یون‌های مس (II)، به محلول رنگ آبی می‌دهند. در واکنش آلومینیم با مس (II) سولفات مطابق واکنش زیر، به تدریج یون‌های مس (II) مصرف و به اتم‌های مس تبدیل شده و بدین ترتیب از شدت رنگ آبی محلول کاسته می‌شود:

$$2Al + 3CuSO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + 3Cu$$

گزینهٔ (۳): به طور کلی در هر واکنش شیمیایی، هنگامی که بار الکتریکی یک گونه افزایش یابد (مثبت‌تر شود)، آن گونه اکسایش یافته و گونهٔ دیگر که بار الکتریکی آن کم‌تر(منفی‌تر) می‌شود، کاهش می‌یابد.

در هر واکنش شیمیایی اگر عدد اکسایش یک گونه ...

- افزایش یابد ← آن‌گونه اکسایش یافته ← کاهنده است
- کاهش یابد ← آن‌گونه کاهش یافته ← اکسنده است

۲ واکنش‌های زیر با قراردادن برخی تیغه‌های فلزی درون محلول‌های یکسان مس (II) سولفات در دمای $20^\circ C$ انجام می‌شوند. با توجه به آن‌ها، کدام مطلب نادرست است؟ (بر اثر انجام هر سه واکنش، دمای محلول‌ها افزایش می‌یابد.)

۱) $Al(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$

۲) $Fe(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$

۳) $Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$

۱) دمای نهایی محلول در واکنش (۲)، کم‌تر از سایر واکنش‌ها است.

قدرت کاهندگی فلز Fe، کم‌تر از Al و Zn است.

۲) مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شدهٔ (۱)، ۲/۵ برابر مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شدهٔ (۳) است.

۴ ۱۰

۳) محصولات واکنش (۲) می‌توانند فلز مس و $Fe^{2+}(s)$ باشند.

۴) واکنش‌پذیری هر سه فلز آلومینیم، روی و آهن، بیشتر از مس است.

درس Box

با قراردادن تیغهٔ A در محلولی از فلز B، دو حالت پیش می‌آید:

۱) اگر فلز A نسبت به فلز B واکنش‌پذیری بیشتری داشته باشد (کاهنده‌تر باشد)، واکنش زیر انجام می‌شود و دمای محلول افزایش می‌یابد:

$$A + B^{n+} \rightarrow A^{m+} + B$$

هر چه فلز A واکنش‌پذیری بیشتری داشته باشد (کاهنده‌تر باشد)، دمای محلول نیز به میزان بیشتری افزایش می‌یابد.

۲) اگر فلز B واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به فلز A داشته باشد (کاهنده‌تر باشد)، واکنشی انجام نشده و دمای محلول تغییری نمی‌کند. واکنش‌پذیری فلزات گروه اصلی از فلزهای واسطه بیشتر بوده و ترتیب واکنش‌پذیری عناصر موجود در واکنش‌ها در این سؤال، به صورت $Al > Zn > Fe > Cu$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ واکنش‌های (۱) تا (۳) به صورت زیر انجام می‌شوند:

۱) $2Al(s) + 3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3Cu(s)$

۲) $Fe(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + Cu(s)$

۳) $Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$

بنابراین محصولات واکنش دوم، فلز مس و یون $Fe^{2+}(aq)$ هستند. *هواستون باشه* که در این واکنش، یون‌های Fe^{2+} به حالت محلول (aq)اند؛ نه حالت جامد (s)!

بررسی سایر گزینه‌ها:

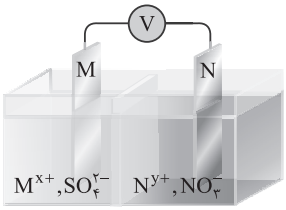
گزینهٔ (۱): ترتیب دمای نهایی محلول‌ها در واکنش‌ها، به صورت $(1) > (3) > (2)$ است.

گزینهٔ (۲): مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌های (۱) و (۳)، به ترتیب برابر با ۱۰ و ۴ است $(\frac{10}{4} = 2/5)$.

گزینهٔ (۴): واکنش‌پذیری فلزات اصلی (Al) از عناصر واسطه بیشتر است و در میان عناصر واسطه، واکنش‌پذیری فلز مس از فلزات آهن و روی کم‌تر است.

SanjeshCloud

۳ با توجه به شکل زیر که یک سلول گالوانی استاندارد را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟ $(Cu = ۶۴, Fe = ۵۶ : g.mol^{-۱})$



الف) اگر قدرت اکسندگی N^{y+} بیشتر از M^{x+} باشد، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از سمت فلز M به سمت فلز N است.

ب) اگر فلز M، روی و فلز N، نقره باشد، یون‌های سولفات از طریق دیوارهٔ متخلخل به سمت تیغهٔ N حرکت خواهند کرد.

پ) اگر N^{y+}، یون $Fe^{۲+}$ و فلز M، مس باشد، به ازای مبادلهٔ $۱۲/۰۴ \times ۱۰^{۲۲}$ الکترون در مدار بیرونی، جرم تیغهٔ N، ۲۲/۴ گرم افزایش خواهد داشت.

ت) اگر قدرت کاهندگی فلز M بیشتر از فلز N باشد، در نیم‌سلول سمت چپ، غلظت کاتیون‌ها و مجموع غلظت آنیون‌ها دچار افزایش می‌شود.

ث) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد فلز M از N کم‌تر باشد، فلز N قطب مثبت سلول است و بر سطح آن نیم‌واکنش کاهش انجام می‌شود.

تیغهٔ M آند و تیغهٔ N کاتد

۱) الف ـ پ ـ ت
۲) ب ـ ث
۳) الف ـ ت ـ ث
۴) ب ـ پ

نکته

سلول گالوانی
- E° کوچک‌تر ← آند (قطب منفی). با گذشت زمان ← جرم تیغه ↓، غلظت کاتیون ↑
- E° بزرگ‌تر ← کاتد (قطب مثبت). با گذشت زمان ← جرم تیغه ↑، غلظت کاتیون ↓

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف»، «ت» و «ث» درست‌اند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

الف) اگر قدرت اکسندگی N^{y+} بیشتر از M^{x+} باشد، عنصر M کاهندهٔ قوی‌تر و در نتیجه تیغهٔ M آند سلول است؛ بنابراین جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از سمت آند به کاتد (M به N) خواهد بود.

ب) در سلول‌های گالوانی، آنیون‌ها از سمت نیم‌سلول کاتد به سمت آند و کاتیون‌ها از سمت نیم‌سلول آند به سمت کاتد حرکت می‌کنند؛ بنابراین در سلول گالوانی روی ـ نقره که روی، آند و نقره، کاتد است (روی کاهندهٔ قوی‌تری از نقره است)، یون‌های موجود در نیم‌سلول کاتد، یعنی نیترات (آنیون) به سمت آند (تیغهٔ M یا روی) حرکت خواهند کرد.

پ) در سلول گالوانی آهن ـ مس، آهن کاهندهٔ قوی‌تر و در نتیجه آند سلول است. جرم تیغهٔ آندی در سلول گالوانی کاهش و جرم تیغهٔ کاتدی افزایش می‌یابد؛ بنابراین جرم تیغهٔ N (آهن) با مبادلهٔ الکترون کاهش می‌یابد؛ نه افزایش! *پس دیگه عددهاش رو حساب نمی‌کنیم!*

ت) در نیم‌سلول آندی این سلول گالوانی، فلز M اکسایش یافته و به صورت کاتیون وارد محلول می‌شود؛ پس غلظت کاتیون افزایش می‌یابد. از طرفی با عبور آنیون‌ها از دیوارهٔ متخلخل و حرکت به سمت آند، مجموع غلظت آنیون‌ها نیز افزایش می‌یابد.

ث) در سلول‌های گالوانی، آند قطب منفی و کاتد قطب مثبت است و از آن‌جایی که E° فلز M از N کم‌تر است؛ در نتیجه فلز M کاهندهٔ قوی‌تر و آند این سلول است و فلز N نیز کاتد و قطب مثبت سلول می‌باشد.

تیزبازی *تو این سؤال فقط کافی بود عبارت‌های «پ» و «ت» رو بررسی کنید و به جواب درست برسید. هم‌چنین در عبارت «ب» همون‌طور که توضیح دادیم نیازی به انجام محاسبات نبود.*

۴ در سلول گالوانی «وانادیم ـ هیدروژن» در شرایط استاندارد، حجم هر کدام از نیم‌سلول‌های آندی و کاتدی برابر ۰/۵ لیتر است. تا لحظه‌ای که غلظت یون‌های وانادیم (II) به ۱/۳ مولار می‌رسد، چند الکترون در مدار بیرونی مبادله می‌شود و pH محلول در نیم‌سلول SHE به چه عددی می‌رسد؟ $(E^\circ(V^{2+}/V) = -1/2V)$

۱) $0/6 - 6/02 \times 10^{23}$

۲) $0/4 - 6/02 \times 10^{23}$

۳) $0/6 - 1/806 \times 10^{23}$

۴) $0/4 - 1/806 \times 10^{23}$

Hint ابتدا معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ واکنش را نوشته و با توجه به تغییرات غلظت یون‌های V^{2+} در آن، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش را محاسبه کن، هم‌چنین تغییرات غلظت یون H^+ و غلظت نهایی آن را به دست بیاور و در نهایت pH محلول نهایی در نیم‌سلول SHE را حساب کن.

نکته در محلول الکترولیت‌های آندی و کاتدی در شرایط استاندارد، غلظت اولیهٔ الکترولیت‌ها برابر ۱ مولار است و با گذشت زمان، غلظت یون‌ها در نیم‌سلول آندی، افزایش و در نیم‌سلول کاتدی، کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی **قسمت اول:** در سلول گالوانی «وانادیم ـ هیدروژن»، با توجه به افزایش غلظت یون وانادیم (II) از ۱ به ۱/۳ مولار داریم:

$$\Delta[V^{2+}] = 1/3 - 1 = 0/3 \ mol.L^{-1}$$

$$V(s) + 2H^+(aq) \rightarrow H_2(g) + V^{2+}(aq)$$

استفاده از کسر تبدیل:

$$0/3 \ mol.L^{-1}\ V^{2+} \times 0/5L \times \frac{2 \ mol\ e^-}{1 \ mol\ V^{2+}} \times \frac{6/02 \times 10^{23} e^-}{1 \ mol\ e^-} = 1/806 \times 10^{23} e^-$$

یه جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{حجم محلول} \times \text{غلظت}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{V^{2+}}} = \frac{\text{تعداد}}{\underbrace{\text{ضریب} \times N_A}_{e^-}} \Rightarrow \frac{0/3 \times 0/5}{1} = \frac{x}{2 \times 6/02 \times 10^{23}} \Rightarrow x = 1/806 \times 10^{23}$$

قسمت دوم: در نیم‌سلول SHE، غلظت اولیهٔ یون هیدرونیوم برابر ۱ مولار است و با گذشت زمان، غلظت آن کاهش می‌یابد:

$$0/3 \ mol.L^{-1}\ V^{2+} \times \frac{2 \ mol\ H^+}{1 \ mol\ V^{2+}} = 0/6 \ mol.L^{-1}\ H^+ \ \text{(مصرف شده)}$$

بنابراین غلظت نهایی یون هیدرونیوم برابر $1 - 0/6 = 0/4$ مولار خواهد شد و بدین ترتیب، pH محلول نهایی برابر است با:

$$pH = -\log[H^+] = -\log 4 \times 10^{-1} = 1 - \log 4 = 0/4$$

گول نخوری *هواستون باشه* غلظت نهایی یون هیدرونیوم برابر ۰/۴ و میزان مصرف‌شدهٔ یون هیدرونیوم برابر ۰/۶ است *که اگر فاتی کنی جواب رو گزینهٔ (۳) می‌زنی!*

SanjeshCloud

۵ جدول زیر نیروی الکتروموتوری سه سلول گالوانی را نشان می‌دهد. با توجه به آن، کدام مطلب به یقین درست است؟

	B^{2+}/B	C^{2+}/C
A^{2+}/A	۰/۸۹ V	۰/۵۸ V
B^{2+}/B		۰/۳۱ V

۱) اکسنده‌ترین گونهٔ بین آن‌ها، یون A^{2+} است.

۲) کاهنده‌ترین گونهٔ بین آن‌ها، عنصر B است.

۳) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول مربوط به عنصر C را برابر صفر ولت در نظر بگیریم، پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول مربوط به عنصر A برابر با ۰/۵۸ ولت خواهد بود.

۴) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول مربوط به عنصر C را برابر صفر ولت در نظر بگیریم، پتانسیل کاهشی استاندارد، فقط برای یکی از عنصرهای A و B، مثبت خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اگر پتانسیل کاهشی استاندارد (C^{2+}/C) برابر صفر باشد، خواهیم داشت:

$$E^\circ_{(\text{سلول B–C})} : |E^\circ_C - E^\circ_B| = ۰/۳۱$$

$$E^\circ_{(\text{سلول A–C})} : |E^\circ_C - E^\circ_A| = ۰/۵۸$$

از آن‌جایی که $E^\circ_{(\text{سلول A–B})}$ برابر ۰/۸۹ ولت است و ولتاژ سلول‌های گالوانی A—C و B—C از ۰/۸۹ ولت کم‌تر است؛ درمی‌یابیم که E° نیم‌واکنش کاهش $C^{2+} + 2e^- \rightarrow C$ بین E° دو نیم‌واکنش کاهش $B^{2+} + 2e^- \rightarrow B$ و $A^{2+} + 2e^- \rightarrow A$ است و چون پتانسیل کاهشی استاندارد (C^{2+}/C)، برابر صفر ولت است، در نتیجه پتانسیل‌های کاهشی استاندارد (B^{2+}/B) و (A^{2+}/A)، یکی مثبت و دیگری منفی خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌های (۱) و (۲): با توجه به اطلاعات جدول، نمی‌توان قدرت کاهندگی و اکسندگی گونه‌های موجود را مقایسه کرد.

گزینهٔ (۳): اگر پتانسیل کاهشی استاندارد (C^{2+}/C) برابر صفر ولت باشد، با توجه به E° سلول گالوانی A—C درمی‌یابیم که:

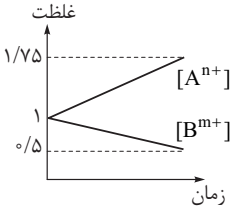
$$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = |E^\circ_A - E^\circ_C| = |E^\circ_A| = ۰/۵۸V$$

بنابراین چون نمی‌دونیم قدرت کاهندگی A بیشتره یا C، نمی‌توانیم به طور قطعی بگوییم $E^\circ(A^{2+}/A)$ برابر ۰/۵۸− یا ۰/۵۸+ ولت است.

SanjeshCloud

۶ براساس اطلاعات زیر، چه تعداد از مطالب داده‌شده درست است؟

الف) در سلول گالوانی مربوط به دو فلز **A** و **B**، نمودار تغییر غلظت کاتیون‌ها به صورت مقابل است:



ب) با قراردادن فلز **B** در محلول حاوی کاتیون‌های D^{2+}، دمای محلول دچار افزایش می‌شود.

پ) **emf** سلول گالوانی حاصل از فلزهای **A** و **X** برابر ۰/۵ ولت و **emf** سلول گالوانی حاصل از فلزهای **B** و **X** برابر ۰/۸ ولت است.

ت) در سلول گالوانی حاصل از فلزهای **X** و **A**، الکترون‌ها در مدار بیرونی از سمت الکترود **X** به سمت الکترود **A** جابه‌جا می‌شوند.

- **emf** سلول گالوانی **A — B**، برابر با ۰/۳V است.
- در میان عنصرهای **A**، **B**، **X** و **D**، فلز **A** کاهنده‌ترین و کاتیون D^{2+} اکسنده‌ترین گونه هستند.
- اگر $E^{\circ}(D^{2+}/D)$ عددی منفی باشد، محلول هیدروکلریک اسید را می‌توان در ظرف فلزی از جنس **B** نگه‌داری کرد.
- اگر فلز **A** درون محلول D^{2+} قرار گیرد، با گذشت زمان، $[A^{n+}]$ افزایش می‌یابد.
- فلزهای **A** و **B** می‌توانند به ترتیب فلزهای **Zn** و **Al** باشند.

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به عبارت‌های «الف» تا «ت»، اطلاعاتی از عناصر A، B، X و D به دست می‌آوریم، سپس عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم.

الف) در سلول گالوانی A — B، غلظت کاتیون A^{n+} افزایش یافته است؛ بنابراین A آند و کاهندهٔ قوی‌تری نسبت به B می‌باشد.

با توجه به تغییرات غلظت یون‌ها درمی‌یابیم تغییرات غلظت کاتیون A^{n+}، ۱/۵ برابر کاتیون B^{m+} است؛ بنابراین بار کاتیون B^{m+}، ۱/۵ برابر A^{n+} می‌باشد.

ب) با افزایش دمای محلول در اثر قراردادن فلز B درون محلول حاوی کاتیون‌های D^{2+}، درمی‌یابیم که واکنش $B + D^{2+} \rightarrow \ldots$ به طور طبیعی انجام‌پذیر بوده و در نتیجه قدرت کاهندگی فلز B بیشتر از D است.

پ) با توجه به **emf** سلول‌های داده‌شده، داریم:

$$|E^{\circ}_A - E^{\circ}_X| = ۰/۵$$
$$|E^{\circ}_B - E^{\circ}_X| = ۰/۸$$

ت) در سلول‌های گالوانی، الکترون‌ها از آند به سمت کاتد حرکت می‌کنند؛ بنابراین در سلول گالوانی حاصل از فلزهای A و X، X آند و A کاتد است.

عبارت‌های اول و چهارم درست است.

بیایین عبارت‌ها رو به ترتیب بررسی کنیم؛

عبارت‌های اول و دوم: ترتیب قدرت کاهندگی عنصرهای فلزی به صورت $D < B < A < X$ و ترتیب قدرت اکسندگی گونه‌ها به صورت $X^{y+} < A^{n+} < B^{m+} < D^{2+}$ است. بدین ترتیب داریم:

$$emf_{A-B} = E^{\circ}_B - E^{\circ}_A$$

$$\left.\begin{array}{l} emf_{X-A} = E^{\circ}_{\text{کاتد}} - E^{\circ}_{\text{آند}} = E^{\circ}_A - E^{\circ}_X = ۰/۵ \\ emf_{X-B} = E^{\circ}_{\text{کاتد}} - E^{\circ}_{\text{آند}} = E^{\circ}_B - E^{\circ}_X = ۰/۸ \end{array}\right\} \Rightarrow E^{\circ}_B - E^{\circ}_A = ۰/۸ - ۰/۵ = ۰/۳ \Rightarrow E^{\circ}_{\text{A-B سلول}} = ۰/۳V$$

عبارت سوم: با توجه به بیشتربودن قدرت کاهندگی فلز B نسبت به فلز D و از آن‌جایی که $E^{\circ}(D^{2+}/D)$ منفی است؛ می‌توان نتیجه گرفت E° نیم‌سلول B نیز منفی است و اگر فلز B در مجاورت HCl قرار گیرد، واکنش $B + H^{+} \rightarrow B^{m+} + H_2$ به طور طبیعی انجام خواهد شد؛ *پس ظرف فلزی B خورده می‌شه و برای نگه‌داری هیدروکلریک اسید مناسب نیست!*

عبارت چهارم: با توجه به بیشتربودن قدرت کاهندگی فلز A نسبت به فلز D، واکنش $A + D^{2+} \rightarrow A^{n+} + D$ به طور خودبه‌خودی انجام‌پذیر است.

عبارت پنجم: قدرت کاهندگی فلز A نسبت به فلز B، بیشتر است؛ بنابراین فلزهای A و B نمی‌توانند به ترتیب Zn و Al باشند.

۷ با توجه به جدول زیر، کدام گونه(ها) می‌توانند در واکنش با یون $C^{2+}(aq)$، آن را اکسید کنند؟

در واکنش با $C^{2+}(aq)$ نقش اکسنده را ایفا کنند و باعث اکسایش آن شوند.

$E^\circ(V)$	نیم‌واکنش کاهش
+۱/۳۳	$A^+(aq)+e^- \rightarrow A(s)$
+۰/۸۷	$B^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow B(s)$
−۰/۱۲	$C^{3+}(aq)+e^- \rightarrow C^{2+}(aq)$
−۱/۵۹	$D^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow D(s)$

۱) فقط $D^{3+}(aq)$

۲) $A(s)$ و $B(s)$

۳) فقط $A^+(aq)$

۴) $A^+(aq)$ و $B^{2+}(aq)$

نکته برای این‌که گونهٔ X بتواند گونهٔ Y را اکسید کند، باید گونهٔ X کاهش و گونهٔ Y اکسایش یابد؛ بنابراین قدرت کاهندگی گونهٔ Y باید نسبت به گونهٔ X بیشتر باشد و E° نیم‌واکنش کاهش آن کم‌تر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی در این‌جا برای این‌که گونه‌ای بتواند $C^{2+}(aq)$ را اکسید کند، E° نیم‌واکنش کاهش آن باید از E° نیم‌واکنش کاهش (C^{3+}/C^{2+}) بیشتر باشد؛ بنابراین با توجه به جدول، گونه‌های A^+ و B^{2+} در واکنش با C^{2+} می‌توانند آن را اکسید کنند و خودشان کاهش یابند.

گول نخوری *مواستون باشه* که $A(s)$ و $B(s)$ گونه‌های **کاهنده‌ای** هستند که با $C^{2+}(aq)$ واکنش نمی‌دهند.

با توجه به جدول زیر به پرسش‌ها پاسخ دهید. *(تمرین‌های دوره‌ای ـ صفحهٔ ۶۴)*

$E^\circ(V)$	نیم‌واکنش کاهش
+۱/۳۳	$A^+(aq)+e^- \rightarrow A(s)$
+۰/۸۷	$B^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow B(s)$
−۰/۱۲	$C^{3+}(aq)+e^- \rightarrow C^{2+}(aq)$
−۱/۵۹	$D^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow D(s)$

الف) کدام گونه قوی‌ترین و کدام ضعیف‌ترین اکسنده است؟

ب) کدام گونه قوی‌ترین و کدام ضعیف‌ترین کاهنده است؟

پ) کدام گونه(ها) می‌توانند C^{2+} را اکسید کنند؟

SanjeshCloud

۸ آلیاژی از فلزهای آلومینیم و قلع به جرم ۱۰ گرم، با مقدار کافی محلول آهن (II) سولفات واکنش داده و پس از کامل‌شدن واکنش، درون ظرف ۱۵/۷ گرم مادهٔ جامد وجود دارد. بر این اساس چند درصد جرمی آلیاژ اولیه را فلز قلع تشکیل داده و در پایان اختلاف جرم دو عنصر فلزی در مخلوط جامد باقی‌مانده، چند گرم است؟ $(Sn = ۱۱۹, Fe = ۵۶, Al = ۲۷ : g.mol^{-1})$

$E^\circ(Sn^{2+} / Sn) = -۰/۱۴V$

$E^\circ(Al^{3+} / Al) = -۱/۶۶V$

$E^\circ(Fe^{2+} / Fe) = -۰/۴۴V$

۱) ۱/۱ – ٪۵۴

۲) ۲/۷ – ٪۵۴

۳) ۲/۷ – ٪۷۳

۴) ۱/۱ – ٪۷۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شمار مول‌های Al و Sn موجود در آلیاژ را به ترتیب برابر x و y در نظر می‌گیریم؛ بنابراین با توجه به جرم این آلیاژ داریم:

$۲۷x + ۱۱۹y = ۱۰$

گام دوم: با توجه به E° نیم سلول‌های آلومینیم (Al)، قلع (Sn) و آهن (Fe)، ترتیب قدرت کاهندگی آن‌ها به صورت $Sn < Fe < Al$ است؛ بنابراین فقط فلز Al می‌تواند مطابق معادلهٔ زیر با محلول آهن (II) سولفات، واکنش دهد:

$۲Al(s) + ۳FeSO_۴(aq) \rightarrow Al_۲(SO_۴)_۳(aq) + ۳Fe(s)$

حال چون واکنش انجام‌شده کامل و مقدار محلول $FeSO_۴$، به اندازهٔ کافی است، تودهٔ جامد برجای‌مانده در پایان واکنش، شامل فلزهای قلع و آهن می‌باشد؛ در نتیجه تمام فلز Al موجود در آلیاژ در واکنش فوق مصرف شده و بدین ترتیب، جرم فلز Fe تولیدشده در این واکنش را می‌توانیم به راحتی محاسبه کنیم:

$$\frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{Al}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Fe}} \rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{\text{جرم Fe تولید شده}}{۳ \times ۵۶} \rightarrow \text{جرم Fe تولید شده} = ۸۴x\ g$$

گام سوم: با توجه به جرم مواد جامد موجود در پایان واکنش و هم‌چنین جرم آلیاژ اولیه، تفاوت جرم فلزهای Sn و Fe موجود در تودهٔ جامد برجای‌مانده در پایان واکنش را می‌*یابیم*.

$$\begin{cases} ۲۷x + ۱۱۹y = ۱۰ \\ ۸۴x + ۱۱۹y = ۱۵/۷ \end{cases}$$

$$۵۷x = ۵/۷ \rightarrow x = ۰/۱$$

در نتیجه در تودهٔ جامد نهایی، ۸/۴ گرم فلز Fe و $۱۵/۷ - ۸/۴ = ۷/۳$ گرم فلز Sn وجود دارد که اختلاف جرم آن‌ها برابر است با:

$۸/۴ - ۷/۳ = ۱/۱ g$

گام چهارم: با توجه به این‌که فلز Sn در طول این فرایند، دست‌نخورده باقی مانده و در واکنش شرکت نمی‌کند، درصد جرمی آن در آلیاژ اولیه برابر است با:

$$\text{درصد جرمی Sn در آلیاژ} = \frac{\text{جرم Sn}}{\text{جرم آلیاژ}} \times ۱۰۰ = \frac{۷/۳}{۱۰} \times ۱۰۰ = ٪۷۳$$

SanjeshCloud

۹ دربارهٔ واکنش اکسایش ـ کاهش بین گونه‌های داده‌شده، کدام مطلب نادرست است؟

$Ce^{4+}(aq)+e^- \rightarrow Ce^{3+}(aq), E^\circ = -1/72\ V$

$Al^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow Al(s), E^\circ = -1/66\ V$

۱) کاتیون $Ce^{3+}(aq)$ در این واکنش، کاهنده است.

۲) قدرت کاهندگی $Al(s)$ از $Ce^{4+}(aq)$ کم‌تر است.

۳) E° واکنش برابر $+0/06$ ولت بوده و به صورت خودبه‌خودی پیش می‌رود.

۴) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد پس از موازنهٔ معادلهٔ آن، برابر با ۸ بوده و ۳ الکترون در آن مبادله شده است.

مشاوره در سوالات مربوط به نیم‌واکنش‌های کاهشی و E° مربوط به آن‌ها، مقایسهٔ قدرت کاهندگی، بین گونه‌های سمت راست و مقایسهٔ قدرت اکسندگی، بین گونه‌های سمت چپ نیم‌واکنش انجام می‌شود و تنها با دقت و توجه به این نکتهٔ پرتکرار، *فیلی راحت!* به پاسخ درست تست می‌رسیدیم!

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به E° نیم‌واکنش‌های داده‌شده، **قدرت کاهندگی Ce^{3+} از آلومینیم بیشتر بوده** و واکنش بین آن‌ها به صورت $Al^{3+}(aq)+3Ce^{3+}(aq) \rightarrow Al(s)+3Ce^{4+}(aq)$ می‌باشد؛ زیرا هر چه E° یک نیم‌واکنش کاهش، منفی‌تر باشد، گونهٔ سمت راست آن، کاهندهٔ قوی‌تری است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): کاتیون Al^{3+}، نقش اکسنده و Ce^{3+}، نقش کاهنده را دراین واکنش دارند.

گزینهٔ (۳): نیم‌واکنش اکسایش Ce^{3+}، آندی و نیم‌واکنش کاهش Al^{3+} کاتدی است؛ بنابراین برای محاسبهٔ E° این سلول داریم:

$$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = -1/66 - (-1/72) = +0/06\ V$$

اگر نیم‌واکنش‌ها را از E° بیشتر به E° کم‌تر (از بالا به پایین) مرتب کنیم، گونهٔ سمت راست پایین‌تر می‌تواند با گونهٔ سمت چپ بالاتر به صورت خودبه‌خودی واکنش دهد؛ در نتیجه واکنش فوق به صورت خودبه‌خودی پیش خواهد رفت.

گزینهٔ (۴): در واکنش انجام‌شده، مجموع ضرایب استوکیومتری مواد برابر $۱+۳+۱+۳=۸$ است.

نکته

شمار الکترون مبادله‌شده به ازای واکنش موازنه‌شده برابر است با:

تغییر بار الکتریکی اکسنده × ضریب اکسنده × شمار اتم‌ها در اکسنده = تعداد مول الکترون مبادله‌شده براساس معادلهٔ موازنه‌شده

تغییر بار الکتریکی کاهنده × ضریب کاهنده × شماره اتم‌ها در کاهنده =

$$\text{تعداد } e^- \text{ مبادله‌شده} = \underbrace{۱}_{\text{تعداد اتم‌ها در } Al^{3+}} \times \underbrace{۱}_{\text{تغییر بار الکتریکی}} \times \overbrace{۳}^{\text{ضریب } Al^{3+}} \quad \text{یا} \quad \underbrace{۱}_{\text{تعداد اتم‌ها در } Ce^{3+}} \times \underbrace{۳}_{\text{تغییر بار الکتریکی}} \times \overbrace{۱}^{\text{ضریب } Ce^{3+}} = ۳$$

بنابراین طبق معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، ۳ الکترون در آن مبادله می‌شود.

دربارهٔ واکنش اکسایش ـ کاهش بین گونه‌های داده‌شده، کدام مطلب، نادرست است؟ *(ریاضی داخل ۹۹)*

$Ce^{4+}(aq)+e^- \rightarrow Ce^{3+}(aq), E^\circ = -1/72\ V$

$Cr^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow Cr(s), E^\circ = -0/74\ V$

۱) کاتیون $Ce^{3+}(aq)$ در این واکنش، کاهنده است.

۲) قدرت کاهندگی $Ce^{4+}(aq)$ از $Cr(s)$ بیشتر است.

۳) E° واکنش برابر $+0/98$ ولت است و به صورت طبیعی (خودبه‌خود) پیشرفت دارد.

۴) مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد پس از موازنهٔ معادلهٔ آن، برابر ۸ است و ۳ الکترون در آن مبادله شده است.

SanjeshCloud

۱۰ کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) در سلول سوختی متان ـ اکسیژن، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی، از الکترودی که در آن گاز متان جریان دارد به سمت الکترودی است که در آن گاز اکسیژن وارد می‌شود.

الکترود آند

الکترود کاتد

ب) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن نسبت به سلول‌های سوختی مربوط به هیدروکربن‌ها، علاوه بر تولید کم‌تر گاز گلخانه‌ای، احتمال بروز خطر نیز کم‌تر است.

پ) جهت حرکت یون هیدرونیوم در غشای سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، همانند جهت حرکت کاتیون Cu^{2+} در سلول گالوانی آهن ـ مس و از سمت آند به کاتد است.

ت) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول متانول برابر ۰/۰۱۶ ولت باشد، emf سلول‌های هیدروژن ـ اکسیژن و متانول ـ اکسیژن، ۰/۰۱۶ ولت اختلاف خواهد داشت.

۱) الف ـ پ　　۲) الف ـ ت

۳) ب ـ پ　　۴) ب ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

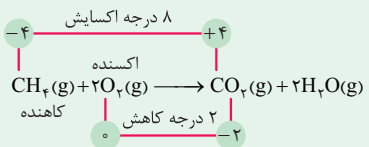
بررسی عبارت‌ها:

عبارت‌های «الف» و «ب»:

نکته در مورد سلول سوختی متان ـ اکسیژن، نکات زیر را به یاد داشته باشید:

۱) *اگه یادتون باشه!* متان همان گاز شهری است؛ بنابراین یکی از مزیت‌های این سلول سوختی درمقایسه با سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، تولید راحت‌تر و در دسترس بودن CH_4 است.

۲) واکنش انجام‌شده در سلول سوختی متان، به صورت زیر است:



در آند این سلول، گاز متان اکسایش می‌یابد؛ پس کاهنده است. از طرفی در کاتد این سلول، گاز اکسیژن کاهش می‌یابد و نقش اکسنده را بازی می‌کند!

۳) شیمی‌دان‌ها با طراحی این سلول‌های سوختی *سر از پا نمی‌شناختن! ولی دیدن که علاقه‌مندان به محیط زیست، صبایی از دست اونا شاکی هستن! اگه گفتین چرا؟* در این سلول سوختی، علاوه بر H_2O که در سلول سوختی هیدروژن هم تولید می‌شد، گاز CO_2 نیز تولید می‌شود. CO_2 هم *تو کار* اثر گلخانه‌ای و آلوده‌کردن *محیط زیسته!*

نوع سلول سوختی	مزیت	عیب
هیدروژن	آلوده‌کنندهٔ محیط زیست نیست.	خطرناک و آتش‌گیر
متان	ارزان‌تر و کم‌خطرتر	آلوده‌کنندهٔ محیط زیست است.

در سلول سوختی متان ـ اکسیژن، جهت حرکت الکترون‌ها از **آند (که گاز متان اکسایش می‌یابد) به سمت کاتد (که گاز اکسیژن کاهش می‌یابد)** است. هم‌چنین حواستان باشد که یکی از معایب سلول‌های سوختی هیدروژن ـ اکسیژن نسبت به سلول‌های سوختی متان ـ اکسیژن این است که احتمال بروز خطر در آن‌ها بالاتر است.

پ) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، یون هیدرونیوم از طریق غشای مبادله‌کننده از آند به کاتد می‌رود و در سلول گالوانی آهن ـ مس (آهن آند و مس کاتد است)، کاتیون‌های Fe^{2+} از دیوارهٔ متخلخل به سمت کاتد حرکت می‌کنند؛ نه کاتیون‌های Cu^{2+}!

ت) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، emf سلول برابر است با:

$$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{اکسیژن}} - E^\circ_{\text{هیدروژن}}$$

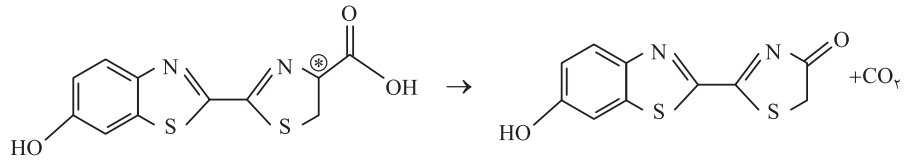
و در سلول سوختی متانول ـ اکسیژن نیز emf سلول برابر است با:

$$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{اکسیژن}} - E^\circ_{\text{متانول}}$$

بنابراین اختلاف ولتاژ این دو سلول برابر است با:

$$E^\circ_{\text{متانول}} - \cancel{E^\circ_{\text{هیدروژن}}}^{\text{(صفر)}} = E^\circ_{\text{متانول}} = ۰/۰۱۶\,V$$

۱۱ نور تولیدشده توسط کرم شب‌تاب، نتیجهٔ انجام واکنش شیمیایی زیر است. این واکنش‌ها به بیولومینسانس معروف‌اند که از طریق آن‌ها این جانور و برخی جانوران دیگر، به جفت خود پیام می‌دهند. واکنش‌دهنده در این واکنش شیمیایی، لوسیفرین کرم شب‌تاب و آنزیمی که این واکنش را کاتالیز می‌کند، لوسیفراز نام دارد. عدد اکسایش کربن ستاره‌دار در واکنش‌دهندهٔ این واکنش، چند واحد تغییر می‌کند؟



مشاوره تعیین اعداد اکسایش اتم‌ها در ساختار ترکیب‌های آلی، یکی از مواردی است که بارها و بارها در کنکور سراسری مورد پرسش واقع شده است؛ در نتیجه شما هم حتماً سعی کنید به تسلط کافی در این مبحث برسید که *سؤال کنکور در کمین شماست.*

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

درس Box

برای تعیین عدد اکسایش اتم‌ها، در مواد مولکولی یا یون‌های چندتایی، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

شمار الکترون‌های نسبت داده‌شده به اتم − شمار الکترون‌های ظرفیت اتم = عدد اکسایش اتم

همان‌طور که می‌دانید شمار الکترون‌های ظرفیت برای عنصرهای گروه ۱ و ۲، همان شمارهٔ گروه و برای عنصرهای گروه ۱۳ به بعد، برابر با یکان شمارهٔ گروه است.

شمارهٔ گروه	۱	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
اتم	$_{1}H$	$_{4}Be$	$_{5}B$, $_{13}Al$	$_{6}C$, $_{14}Si$, $_{32}Ge$, $_{50}Sn$	$_{7}N$, $_{15}P$	$_{8}O$, $_{16}S$, $_{34}Se$	$_{9}F$, $_{17}Cl$, $_{35}Br$, $_{53}I$
شمار الکترون‌های ظرفیت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

برای تعیین شمار الکترون‌های نسبت داده‌شده به هر اتم، پس از رسم ساختار لوویس گونهٔ مورد نظر، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

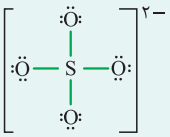
- به ازای هر جفت‌الکترون پیوندی میان دو اتم یکسان، یک الکترون به هر اتم نسبت می‌دهیم.
- به ازای هر جفت‌الکترون پیوندی میان دو اتم متفاوت، هر دو الکترون را به اتم با خصلت نافلزی بیشتر، نسبت می‌دهیم.
- همهٔ الکترون‌های ناپیوندی روی هر اتم را به همان اتم نسبت می‌دهیم.

توجه: در محاسبهٔ عدد اکسایش اتم‌ها، بهتر است مقایسهٔ خصلت نافلزی چند عنصر زیر را *بلد باشین:*

خصلت نافلزی: $F > O > N > Cl > Br > I > S > C > H$

مثال: عدد اکسایش اتم گوگرد را در یون سولفات (SO_4^{2-}) مشخص کنید.

پاسخ: اول ساختار لوویس یون سولفات را رسم می‌کنیم:

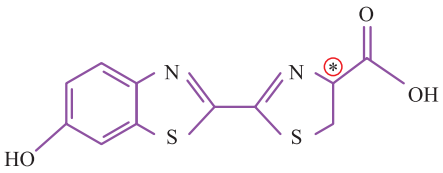


در یک گروه از بالا به پایین خصلت نافلزی کاهش می‌یابد ($O > S$:خصلت نافلزی)؛ بنابراین از ۸ الکترون پیوندی بین گوگرد و اتم‌های اکسیژن، هیچ الکترونی به گوگرد نسبت نمی‌دهیم.

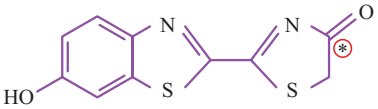
گوگرد در گروه ۱۶ قرار دارد و دارای ۶ الکترون ظرفیتی است؛ پس خواهیم داشت:

عدد اکسایش گوگرد = شمار الکترون‌های ظرفیت اتم گوگرد − شمار الکترون‌های نسبت داده‌شده به اتم گوگرد $= 6 - 0 = +6$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عدد اکسایش کربن ستاره‌دار در ترکیب واکنش‌دهنده و عدد اکسایش آن کربن در ترکیب حاصل را محاسبه می‌کنیم:



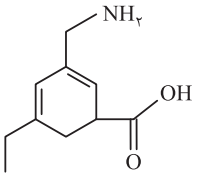
عدد اکسایش کربن = شمار الکترون‌های ظرفیت اتم کربن − شمار الکترون‌های نسبت داده‌شده به اتم کربن $= 4 - (2 + 1 + 1) = 0$



عدد اکسایش کربن = شمار الکترون‌های ظرفیت اتم کربن − شمار الکترون‌های نسبت داده‌شده به اتم کربن $= 4 - 1 = +3$

بنابراین عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار، ۳ واحد تغییر می‌کند.

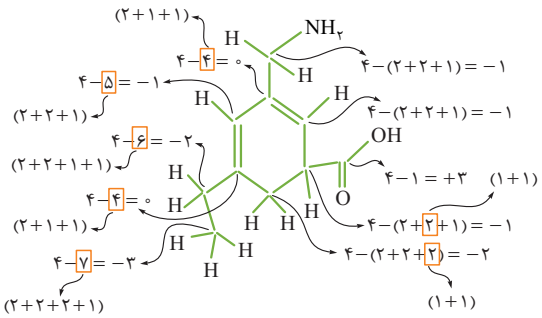
۱۲ در شکل زیر، چند درصد از اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش صفر هستند و در صورت سوختن کامل این ماده، چند اتم کربن دچار ۶ واحد تغییر عدد اکسایش می‌شوند؟



چون عدد اکسایش C در CO_2، برابر ۴+ است؛ در واقع *سؤال اینه که* چند اتم کربن در ساختار این ماده، عدد اکسایش ۲− دارند.

۱) ٪۲۰ − ۲
۲) ٪۲۰ − ۳
۳) ٪۳۰ − ۲
۴) ٪۳۰ − ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا عدد اکسایش کربن‌های موجود در ترکیب را محاسبه می‌کنیم:

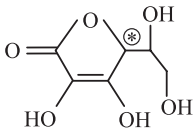


در نتیجه از ده کربن موجود در ساختار این ترکیب، ۲ اتم کربن، عدد اکسایش صفر دارند؛ *که می‌شه* ٪۲۰!

در اثر سوختن این ترکیب، همهٔ اتم‌های کربن به کربن دی‌اکسید تبدیل شده و عدد اکسایش آن‌ها به ۴+ می‌رسد؛ بنابراین برای آن‌که عدد اکسایش کربن در طی سوختن، ۶ واحد تغییر کرده باشد، باید عدد اکسایش آن در ترکیب برابر ۲− باشد که در این ساختار، دو اتم کربن عدد اکسایش برابر ۲− دارند.

SanjeshCloud

۱۳ ترکیب زیر نشان دهندهٔ ساختار آسکوربیک اسید، ریزمغذی‌ای حیاتی برای گونه‌های پیشرفتهٔ پستانداران از جمله انسان است. با توجه به آن، کدام مطلب نادرست است؟



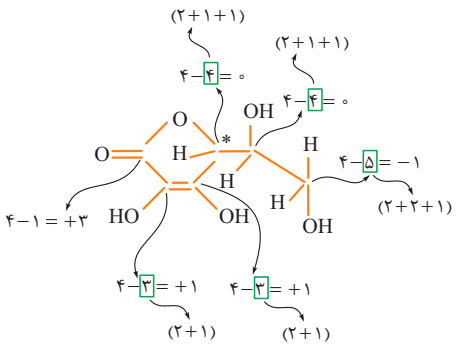
۱) این ترکیب به دلیل توانایی تشکیل پیوندهای هیدروژنی با مولکول‌های آب، به راحتی در آب حل می‌شود.

۲) مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن در آن، برابر با تعداد گروه‌های عاملی هیدروکسیل در ساختار آن است.

۳) در ساختار این ترکیب، عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار، کم‌تر از اتم کربن گروه عاملی استری است.

۴) عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار در ساختار آن، برابر با عدد اکسایش اتم کربن در هیدروژن سیانید است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در ساختار آسکوربیک اسید، عدد اکسایش اتم‌های کربن را محاسبه می‌کنیم:



در نتیجه عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار در ساختار این ترکیب، برابر صفر است، اما عدد اکسایش اتم کربن در هیدروژن سیانید (HCN)، برابر است با:



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): آسکوربیک اسید با داشتن ۴ گروه هیدروکسیل $(-OH)$، پیوند هیدروژنی با آب تشکیل داده و به خوبی در آب حل می‌شود.

گزینهٔ (۲): مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن در ساختار آسکوربیک اسید و شمار گروه‌های هیدروکسیل موجود در ساختار آن، برابر ۴ است.

نکته برای به دست آوردن مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن، لازم نیست تک‌تک آن‌ها را بررسی کرده و بعد با هم جمع کنیم. کافیه از رابطهٔ زیر، در ترکیب آسکوربیک اسید $(C_6H_8O_6)$، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن را مجهول گذاشته و حساب کنیم:

$$C_6H_8O_6 : (6C) + (8\times(+1)) + (6\times(-2)) = 0 \Rightarrow 6C = +4$$

گزینهٔ (۳): در ساختار این ترکیب عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار، برابر صفر بوده، اما عدد اکسایش اتم کربن گروه استری، برابر $+3$ است.

۱۴ در واکنش زیر و پس از موازنهٔ کامل معادلهٔ آن، نسبت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها به مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها کدام است؟

$$Sn^{2+}(aq) + Cr_2O_7^{2-}(aq) + H^+(aq) \rightarrow Sn^{4+}(aq) + Cr_2O_3(aq) + H_2O(l)$$

۱) ۰/۶۷

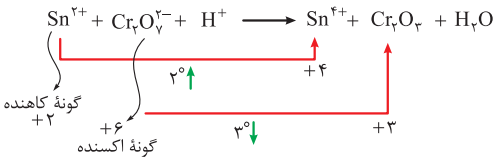
۲) ۰/۶۹

۳) ۱/۴۴

۴) ۱/۵۰

مشاوره موازنه به روش اکسایش ـ کاهش، از مباحث بسیار مهم است و برای تسلط به آن، باید بسیار تمرین کنید؛ در نتیجه *لازمه که* تست‌های متنوعی از این مباحث بزنید *تا بتونید* توکنکور *از پسش بربیایین!*

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا گونهٔ کاهنده و اکسنده و میزان تغییرات عدد اکسایش آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:



دراین واکنش، به ازای مصرف هر مول گونهٔ کاهندهٔ (Sn^{2+})، ۲ مول الکترون و به ازای مصرف هر مول گونهٔ اکسنده $(Cr_2O_7^{2-})$، $۲ \times ۳ = ۶$ مول الکترون مبادله می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$۳Sn^{2+} + Cr_2O_7^{2-} + H^+ \rightarrow ۳Sn^{4+} + Cr_2O_3 + H_2O$$

در گام بعدی به روش وارسی، موازنه را ادامه می‌دهیم:

$$۳Sn^{2+} + Cr_2O_7^{2-} + ۸H^+ \rightarrow ۳Sn^{4+} + Cr_2O_3 + ۴H_2O$$

بدین ترتیب در این واکنش، مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها به ترتیب برابر با ۱۲ و ۸ بوده و در نتیجه نسبت خواسته‌شده برابر $\frac{۱۲}{۸} = ۱/۵$ می‌باشد.

گول نخوری در موازنه به روش اکسایش ـ کاهش، *مواستون باشه که* اگر اتمی که عدد اکسایش آن تغییر می‌کند، دارای زیروند باشد، باید تغییرات عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کنید؛ مثلاً اتم‌های Cr در هر واحد فرمولی از $Cr_2O_7^{2-}$، مجموعاً $۲ \times ۳ = ۶$ واحد کاهش پیدا کرده و به Cr_2O_3 تبدیل می‌شوند.

در واکنش داده‌شده و پس از موازنهٔ کامل معادلهٔ آن، نسبت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها به مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها کدام است؟ *(تجربی خارج ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)*

$$Fe^{2+}(aq) + MnO_4^-(aq) + H^+(aq) \rightarrow Fe^{3+}(aq) + Mn^{2+}(aq) + H_2O(l)$$

۱) ۱/۰

۲) ۱/۴

۳) ۱/۶

۴) ۰/۸

۱۵ در اثر واکنش ۲/۳ گرم گاز NO_2 با یک لیتر آب، غلظت نیتریک اسید در محلول به ۲۱۰۰ ppm رسیده است. اگر همراه با تولید نیتریک اسید، یکی از اکسیدهای نیتروژن نیز تولید شده باشد، عدد اکسایش N در اکسید حاصل برابر چند است و با انجام این واکنش، چند مول الکترون مبادله می‌شود؟ (چگالی محلول‌ها $1\ g.mL^{-1}$ بوده و حجم محلول در طول انجام واکنش، ثابت باقی می‌ماند.)

$$aNO_2 + H_2O \rightarrow bN_xO_y + 2HNO_3$$

۱) $+2$، $\frac{1}{30}$

۲) $+5$، $\frac{1}{30}$

۳) $+2$، $\frac{1}{20}$

۴) $+5$، $\frac{1}{20}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ واکنش نیتروژن دی‌اکسید با آب را نوشته و با موازنهٔ آن، مقادیر مجهول را به دست می‌آوریم:

$$aNO_2 + H_2O \rightarrow bN_xO_y + 2HNO_3$$

از آن‌جایی که به ازای مصرف ۲/۳ گرم NO_2، غلظت HNO_3 به ۲۱۰۰ ppm رسیده است، نسبت ضرایب استوکیومتری HNO_3 و NO_2 را به دست می‌آوریم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$2/3\ g\ NO_2 \times \frac{1\ mol\ NO_2}{46\ g\ NO_2} \times \frac{2\ mol\ HNO_3}{a\ mol\ NO_2} \times \frac{63\ g\ HNO_3}{1\ mol\ HNO_3} = \frac{63\times 2}{20a}$$

به‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{HNO_3}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{NO_2}} \Rightarrow \frac{2/3}{a\times 46} = \frac{HNO_3\ \text{جرم}}{2\times 63} \Rightarrow HNO_3\ \text{جرم} = \frac{63\times 2}{20a}$$

با توجه به غلظت HNO_3 داریم:

$$ppm = \frac{HNO_3\ \text{جرم}}{\text{جرم محلول}}\times 10^6 \Rightarrow \frac{\frac{63\times 2}{20a}}{1000}\times 10^6 = 2100 \Rightarrow \frac{63\times 2}{2a} = 21 \Rightarrow a = 3$$

حال با توجه به معادلهٔ واکنش داریم:

$$3NO_2 + H_2O \rightarrow bN_xO_y + 2HNO_3$$

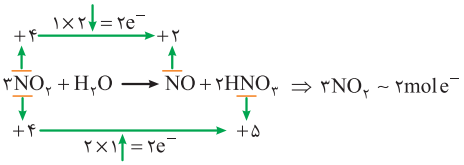
موازنهٔ N: $3 = 2 + bx \rightarrow (b, x \geq 1) \Rightarrow b = x = 1$

موازنهٔ O: $6 + 1 = by + 6 \Rightarrow (b, y \geq 1) \Rightarrow b = y = 1$

بنابراین واکنش موازنه‌شده به صورت مقابل است: $3NO_2 + H_2O \rightarrow NO + 2HNO_3$

اکسید نیتروژن حاصل، NO و عدد اکسایش نیتروژن در آن برابر $+2$ است.

گام دوم: با توجه به واکنش موازنه‌شده و شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آن، شمار مول الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش را به ازای مصرف ۲/۳ گرم گاز NO_2، حساب می‌کنیم:



$$3NO_2 \sim 2\ mol\ e^-$$

استفاده از کسر تبدیل:

$$2/3\ g\ NO_2 \times \frac{1\ mol\ NO_2}{46\ g\ NO_2} \times \frac{2\ mol\ e^-}{3\ mol\ NO_2} = \frac{1}{30}\ mol\ e^-$$

به‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{NO_2}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{2/3}{3\times 46} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{30}\ mol\ e^-$$

SanjeshCloud

۱۶ چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- منیزیم را در صنعت از برقکافت محلول آبی منیزیم کلرید ($MgCl_2(aq)$) به دست می‌آورند.
- علت پایین‌تربودن سطح مایع در لولهٔ مربوط به کاتد در فرایند برقکافت آب، تولید گاز اکسیژن بیشتر در آن است.
- با انجام فرایند برقکافت آب، به تدریج غلظت مادهٔ الکترولیت در سلول برقکافت افزایش می‌یابد.
- در سلول استخراج سدیم از $NaCl(l)$، در آند گاز زردرنگی ($Cl_2(g)$) تولید می‌شود که از آن می‌توان یکی از مواد مورد نیاز در فرایند استخراج منیزیم از آب دریا ($HCl(aq)$) را تأمین کرد.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- در صنعت، منیزیم از برقکافت **منیزیم کلرید مذاب** ($MgCl_2(l)$) و طی واکنش $MgCl_2(l) \rightarrow Mg(l) + Cl_2(g)$ به دست می‌آید؛ نه برقکافت محلول آبی منیزیم کلرید ($MgCl_2(aq)$)!

نکته در برقکافت آب که طی واکنش $2H_2O(l) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$ انجام می‌شود، اکسیژن در آند و هیدروژن در کاتد تولید می‌شود و حجم گاز تولیدی در آند، نصف گاز تولیدی در کاتد است.

- در فرایند برقکافت آب، **سطح مایع در لولهٔ مربوط به آند بیشتر از کاتد است**؛ زیرا حجم گاز اکسیژن تولیدی در آند از حجم گاز هیدروژن تولیدی در کاتد، کم‌تر است.
- در سلول برقکافت آب با مصرف آب، غلظت الکترولیت به دلیل کاهش حجم محلول، افزایش می‌یابد.
- در فرایند استخراج سدیم طی واکنش $2NaCl(l) \rightarrow 2Na(l) + Cl_2(g)$، گاز کلر در آند و فلز سدیم در کاتد تولید می‌شود که می‌توان از کلر حاصل برای تهیهٔ HCl و استفاده در استخراج منیزیم استفاده کرد.

SanjeshCloud

۱۷ اگر الکترون‌های آزادشده از اکسایش ۵۲ گرم فلز روی در باتری دگمه‌ای روی ـ نقره (واکنش موازنه شود: $Zn(s)+Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s)+Ag(s)$)، در نیم‌واکنش کاتدی سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب مصرف شود، چند گرم فلز سدیم تولید و چند لیتر گاز (در شرایط STP) آزاد می‌شود؟ $(Zn=65, Na=23 : g.mol^{-1})$

$Na^+(l)+e^- \rightarrow Na(l)$

۱) ۱۷/۹۲ – ۱۸/۴

۲) ۳۵/۸۴ – ۱۸/۴

۳) ۱۷/۹۲ – ۳۶/۸

۴) ۳۵/۸۴ – ۳۶/۸

Hint ابتدا شمار الکترون‌های حاصل از اکسایش ۵۲ گرم Zn در باتری دگمه‌ای روی ـ نقره را محاسبه کن، سپس با توجه به معادلهٔ واکنش برقکافت $NaCl(l)$، جرم $Na(l)$ و حجم گاز Cl_2 تولیدی در شرایط STP را با مصرف همان مقدار الکترون در واکنش، به دست بیاور.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** شمار الکترون‌های آزادشده به ازای اکسایش ۵۲ گرم فلز روی در واکنش را به دست می‌آوریم:

$$Zn(s)+Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s)+2Ag(s)$$

استفاده از کسر تبدیل:

$$52\,g\,Zn \times \frac{1\,mol\,Zn}{65\,g\,Zn} \times \frac{2\,mol\,e^-}{1\,mol\,Zn} = 1/6\,mol\,e^-$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Zn}} = \frac{mol}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{52}{1\times 65} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1/6\,mol\,e^-$$

گام دوم: معادلهٔ واکنش کلی و نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی برقکافت سدیم کلرید مذاب را می‌نویسیم:

نیم‌واکنش آندی (در قطب مثبت): $2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g)+2e^-$

نیم‌واکنش کاتدی (در قطب منفی): $2Na^+(l)+2e^- \rightarrow 2Na(l)$

واکنش کلی سلول: $2NaCl(l) \rightarrow 2Na(l)+Cl_2(g)$

گام سوم: براساس میزان الکترون مبادله‌شده، جرم سدیم و حجم گاز کلر تولیدشده را محاسبه می‌کنیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$1/6\,mol\,e^- \times \frac{2\,mol\,Na}{2\,mol\,e^-} \times \frac{23\,g\,Na}{1\,mol\,Na} = 36/8\,g\,Na$$

$$1/6\,mol\,e^- \times \frac{1\,mol\,Cl_2}{2\,mol\,e^-} \times \frac{22/4\,L\,Cl_2}{1\,mol\,Cl_2} = 17/92\,L\,Cl_2$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

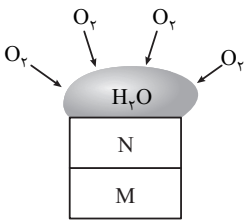
$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Na}} = \frac{mol}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{x}{2\times 23} = \frac{1/6}{2} \Rightarrow x = 36/8\,g\,Na$$

$$\frac{\text{حجم گاز}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{Cl_2}} = \frac{mol}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{x}{1\times 22/4} = \frac{1/6}{2} \Rightarrow x = 17/92\,L\,Cl_2$$

گول نخوری در این سؤال *باید هواستون باشه* به ازای تولید هر مول سدیم، یک مول الکترون و به ازای تولید هر مول گاز کلر، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود و *اگر هواستون به ضریب‌ها نباشه*، جرم سدیم و حجم کلر رو به اشتباه *ممکنه دو برابر یا نصف جواب درست* به دست بیاورید.

SanjeshCloud

۱۸ براساس شکل زیر، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) اگر M و N به ترتیب آلومینیم و روی باشند، در قطرهٔ آب، غلظت یون‌های Zn^{2+} به تدریج افزایش می‌یابد.

ب) اگر M و N به ترتیب طلا و نقره باشند، با ایجاد خاصیت اسیدی در آب، غلظت هر دو کاتیون مربوط به طلا و نقره افزایش می‌یابد.

پ) اگر M فلز آهن و N فلز روی باشد، از این ترکیب در ساخت کانال کولر استفاده می‌شود. در این صورت فلز M در برابر خوردگی محافظت می‌شود.

ت) اگر M و N به ترتیب از جنس آهن و قلع باشند، از آن برای ساخت ظروف بسته‌بندی مواد غذایی استفاده می‌شود.

۱) الف ـ ب

۲) ب ـ پ

۳) پ ـ ت

۴) الف ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) اگر M و N به ترتیب Al و Zn باشند، با قرارگرفتن آن‌ها در معرض اکسیژن و رطوبت، آلومینیم چون کاهنده قوی‌تری است، اکسید شده و **غلظت گونهٔ Al^{3+} در قطرهٔ آب افزایش می‌یابد.**

ب) با ایجاد خاصیت اسیدی در آب، غلظت یون هیدرونیوم در آن افزایش می‌یابد؛ ولی *هواستون باشه که* **فلزهای نقره و طلا با اسید واکنش نمی‌دهند.**

پ) این جمله به دلیل پدیدهٔ حفاظت کاتدی درست است. اجازه بدهید با جزئیات بیشتری توضیح دهم.

آهن در حضور اکسیژن و رطوبت دچار خوردگی می‌شود. در این فرایند، آهن اکسید می‌شود. این واکنش الکتروشیمیایی شامل دو نیم‌واکنش است:

نیم‌واکنش اکسایش: $Fe(s) \rightarrow Fe(aq)^{2+} + 2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

حفاظت کاتدی: برای جلوگیری از خوردگی آهن، می‌توان از روش حفاظت کاتدی استفاده کرد. در این روش، فلز فعال‌تری (با پتانسیل کاهشی کم‌تر) مانند روی (Zn) به آهن متصل می‌شود.

روی به عنوان آند قربانی می‌شود: در این حالت، روی به عنوان آند عمل می‌کند و اکسید می‌شود و از اکسیدشدن آهن جلوگیری می‌کند. به عبارت دیگر، روی به جای آهن قربانی شده و خورده می‌شود.

کاربرد در کانال کولر: کانال‌های کولر اغلب در معرض رطوبت قرار دارند و به همین دلیل مستعد خوردگی هستند. با استفاده از ورق‌های گالوانیزه (ورق آهن پوشش داده‌شده با روی) در ساخت کانال کولر، می‌توان از خوردگی آهن جلوگیری کرد.

ت)

آهن + لایهٔ نازکی از فلز قلع(Sn) ← حلبی ← (کاربرد) ساخت ظروف بسته‌بندی مواد غذایی

نکته

حالا برای جمع‌بندی نگاهی به جدول *همع وهور* زیر بیندازید:

نوع آهن	آهن گالوانیزه (آهن سفید) (آهن + لایهٔ نازکی از فلز روی)	حلبی (آهن + لایهٔ نازکی از فلز قلع)
نوع حفاظت آهن	فیزیکی + کاتدی	فقط فیزیکی
آند	روی	آهن
نیم‌واکنش اکسایش	$Zn(s) \longrightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$	$Fe(s) \longrightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$
کاتد	آهن	قلع
نیم‌واکنش کاهش	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \longrightarrow 4OH^-(aq)$	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \longrightarrow 4OH^-(aq)$
گونهٔ کاهنده	Zn	Fe
گونهٔ اکسنده	O_2	O_2
رسوب تشکیل شده در پایان واکنش	روی هیدروکسید	آهن (III) هیدروکسید ($Fe(OH)_3$)
کاربرد	تانکر آب و کانال کولر	ظروف بسته‌بندی مواد غذایی

گزینه دو

آزمون ۲۵ مهر ۱۴۰۴

شیمی ۳

۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

موارد «ب» و «پ» نادرست است.

ب) نادرست

$$\text{وازلین : } C_{25}H_{52} \Rightarrow \text{شمار پیوند اشتراکی} = \frac{(25\times C)+(52\times H)}{2} = \frac{(25\times 4)+(52\times 1)}{2} = 76$$

(۷۶ مضربی از عدد ۹ نیست و حتی نیازی به محاسبه شمار پیوندها در مولکول اوره نیست.)

$$\text{اوره : } CO(NH_2)_2 \Rightarrow \text{شمار پیوند اشتراکی} = \frac{C+O+(2\times N)+(4\times H)}{2} = \frac{4+2+6+4}{2} = 8$$

پ) نادرست

$$\begin{cases} \text{جرم مولی وازلین : } C_{25}H_{52} = 352\,g\cdot mol^{-1} \\ \text{جرم مولی بنزین : } C_8H_{18} = 114\,g\cdot mol^{-1} \end{cases} \Rightarrow \text{تفاوت} = 238$$

$$\text{جرم مولی چهارمین آلکین } (C_nH_{2n-2}) \Rightarrow C_5H_8 \text{ جرم مولی} = 68\,g\cdot mol^{-1} \Rightarrow \frac{238}{68} = 3/5 \neq 4$$

اینجوری هم میشه

پ)

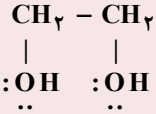
$$\begin{cases} C_{25}H_{52} \\ C_8H_{18} \end{cases} \xrightarrow{\text{اختلاف}} C_{17}H_{34} : 17\times 12+34\times 1 = 238\,g\cdot mol^{-1}$$

$$\text{جرم مولی چهارمین آلکین } (C_nH_{2n-2}) \Rightarrow C_5H_8 \text{ جرم مولی} = 68\,g\cdot mol^{-1} \Rightarrow \frac{238}{68} = 3/5 \neq 4$$

نباید سراغ اینا بری

الف) درست

$$\text{اتیلن گلیکول : } C_2H_6O_2 \Rightarrow \text{شمار جفت الکترون ناپیوندی} = 4$$

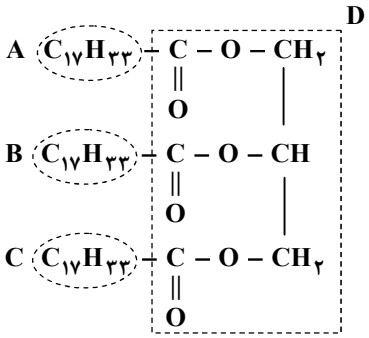


$$\text{اوره : } CO(NH_2)_2 \Rightarrow \text{شمار عناصر تشکیل‌دهنده} = 4$$

ت) درست؛ فرمول مولکولی گلوکز و روغن زیتون به‌ترتیب $C_6H_{12}O_6$ و $C_{57}H_{104}O_6$ است که در هر دو ماده شمار اتم‌های اکسیژن یکسان و برابر ۶ است.

۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه



گزینهٔ ۴: نادرست؛ بخش D در تمام استرهای طبیعی سنگین، یکسان و دارای فرمول مولکولی $C_6H_5O_6$ است؛ بنابراین تفاوت شمار اتم‌های کربن و اکسیژن در این بخش همواره برابر صفر است.

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: درست؛ اگر هر سه گروه A، B و C یکسان باشند، فرمول مولکولی آن‌ها $C_{17}H_{33}$ است.

گزینهٔ ۲: درست؛ در صورت یکسان بودن هر سه زنجیر هیدروکربنی، فرمول آن‌ها $C_{17}H_{33}$ است، که در مقایسه با زنجیر هیدروکربنی سیرشدهٔ ۱۷ کربنی یا $C_{17}H_{35}$ دو اتم هیدروژن کمتر دارند، پس در ساختار هر سه زنجیر یک پیوند $C=C$ وجود دارد.

گزینهٔ ۳: درست؛ در اثر واکنش با سدیم هیدروکسید صابونی با فرمول $C_{17}H_{33}COONa$ $(C_{18}H_{33}O_2Na)$ تولید خواهد شد.

۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

ابتدا با توجه به واکنش صابونی شدن زیر فرمول صابون را مشخص می‌کنیم:

$$C_nH_{2n-4}O_6 + 3NaOH \rightarrow 3C_{n'}H_{2n'-1}O_2Na + C_3H_8O_3$$

$$0/3\,mol\,NaOH \times \frac{3\,mol\,\text{صابون}}{3\,mol\,NaOH} \times \frac{\text{جرم مولی}\ M}{1\,mol\,\text{صابون}} = 87/6\,g \Rightarrow M = 292$$

$$\text{جرم مولی}\ C_{n'}H_{2n'-1}O_2Na : 292 = 14n' - 1 + 32 + 23 \Rightarrow n' = 17$$

شمار اتم‌های کربن در استر سنگین سه عاملی برابر $3n'+3$ است، پس با توجه به فرمول کلی این استر که به‌صورت $C_nH_{2n-4}O_6$ است، فرمول مولکولی آن $C_{54}H_{104}O_6$ می‌شود.

۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

الف) درست؛ صابون مایع از گرم کردن چربی‌ها با پتاسیم هیدروکسید یا محلول آمونیاک تهیه می‌شود.

ب) درست؛ نمک‌های پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب صابون مایع هستند و مثل دیگر صابون‌ها هم در آب و هم در چربی حل می‌شوند.

نباید سراغ اینا بری

پ) نادرست؛ $C_{57}H_{110}O_6$ (چربی کوهان شتر) یک استر بلندزنجیر است، که الکل سازنده آن یک الکل سه عاملی با فرمول شیمیایی $C_3H_8O_3$ است.

ت) نادرست؛ اسیدهای چرب، کربوکسیلیک اسیدهای بلندزنجیر هستند؛ بنابراین اولین و دومین عضو این خانواده، اسید چرب به‌شمار نمی‌آیند.

۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

عبارت‌های نادرست:

پ) شاخص امید به زندگی در کشورها و حتی شهرهای یک کشور هم متفاوت است؛ زیرا به عوامل گوناگونی بستگی دارد.

ت) هرچند امید به زندگی در کشورهای برخوردار از کم‌برخوردار بیشتر است، اما رشد این شاخص و افزایش آن در کشورهای کم‌برخوردار شیب تندتری دارد؛ زیرا در سال‌های اخیر توسعه بهداشت و خدمات‌رسانی در نواحی کم‌برخوردار جهان توجه بیشتری شده است.

۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

گزینهٔ ۲: درست؛ صابون‌های دارای یون آمونیوم $(RCOONH_4)$، مایع ولی صابون‌های دارای یون سدیم $(RCOONa)$، جامد هستند.

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: نادرست؛ چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلندزنجیر هستند که استرها امکان تشکیل پیوند هیدروژنی را ندارند. جاذبه غالب در آن‌ها از نوع واندروالسی است.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ حالت فیزیکی صابون‌ها به زنجیر هیدروکربنی آن‌ها وابسته نیست.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ برای تولید صابون نمی‌توان از همه کربوکسیلیک اسیدها استفاده کرد و باید اسیدهای چرب (کربوکسلیک اسیدهای دراز زنجیر) به کار روند.

۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

گزینهٔ ۴ درست است.

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: نادرست؛ کاتیون به کار رفته در صابون بر میزان انحلال‌پذیری آن تأثیر دارد. ولی بخش کاتیونی صابون هیچ نقشی در پاک‌کنندگی صابون ندارد ازاین‌رو حالت فیزیکی صابون ارتباطی با پاک‌کنندگی آن ندارد.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ آنچه باعث پراکنده شدن قطرات چربی در آب می‌شود، سر قطبی صابون $(-COO^-)$ است.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ در کلوئید مورد اشاره اندازه بار در ذره‌ها یکسان نیست.

۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

عبارت‌های «پ» و «ت» درست هستند.

پ) درست؛ اندازهٔ ذره‌های سازنده کلوئیدها بزرگ‌تر از اندازه ذره‌های سازنده محلول‌ها است.

ت) درست؛ کلوئید مخلوطی ناهمگن و پایدار است.

نباید سراغ اینا بری

الف) نادرست؛ محلول‌ها مخلوط‌هایی همگن هستند، اما کلوئیدها مخلوطی ناهمگن به‌شمار می‌آیند ولی به ظاهر همگن هستند.

ب) نادرست؛ بررسی رفتار نور هنگام عبور از مخلوط، نمی‌تواند کلوئیدها را از سوسپانسیون‌ها متمایز سازد؛ زیرا نور هنگام عبور از هر دو نوع مخلوط پخش شده و مسیر عبور نور از درون این دو نوع مخلوط (برخلاف محلول‌ها) معلوم است.

۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

با توجه به نمودار ارائه شده، رابطهٔ بین متغیرهای X و Y مستقیم است. به این معنی که با افزایش متغیر X، متغیر Y نیز افزایش می‌یابد و برعکس.

گزینهٔ ۲: درست؛ با افزایش مقدار صابون آنزیم‌دار، آنزیم‌های بیشتری برای تجزیهٔ لکه‌ها در دسترس قرار می‌گیرند. این آنزیم‌ها لکه‌ها را خرد می‌کنند و شستن آن‌ها را آسان‌تر می‌کنند، به همین دلیل درصد لکه باقی‌مانده روی پارچه کمتر می‌شود نه بیشتر. (رابطه بین مقدار صابون آنزیم‌دار و درصد لکهٔ باقی‌مانده عکس است.)

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: نادرست؛ افزایش دما باعث افزایش جنبش مولکولی در محلول صابون می‌شود. این جنبش بیشتر، به مولکول‌های صابون اجازه می‌دهد تا راحت‌تر به چربی‌ها و کثیفی‌ها بچسبند و آن‌ها را از سطوح جدا کنند. در نتیجه، صابون در دمای بالاتر، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری خواهد داشت. (رابطه بین متغیر دما و قدرت پاک‌کنندگی مستقیم است.)

گزینهٔ ۳: نادرست؛ افزایش میزان صابون (آنزیم‌دار یا بدون آنزیم)، به‌طور مستقیم منجر به افزایش حجم و میزان ارتفاع کف تولیدی می‌گردد. به بیان ساده، هرچه مقدار صابون بیشتر باشد، کف بیشتری حاصل می‌شود. (رابطه بین مقدار صابون و کف تولیدی مستقیم است.)

گزینهٔ ۴: نادرست؛هنگامی‌که لکه‌ای روی‌پارچه‌های پلی‌استری نفوذ کند، به سختی از آن جدا می‌شود. افزایش درصد پلی‌استر در پارچه، میزان جذب رطوبت و مواد شوینده را کاهش می‌دهد و در نتیجه، شست‌وشوی لکه‌ها دشوارتر می‌شود. به عبارت دیگر، هرچه الیاف پلی‌استر در پارچه بیشتر باشد، احتمال باقی ماندن لکه پس از شست‌وشو افزایش می‌یابد. (رابطه بین درصد پلی‌استر در تهیه پارچه و درصد لکهٔ باقی‌مانده نیز مستقیم است.)

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

معادلهٔ موازنه شده واکنش چنین است:

$$2RCOONa + Mg^{2+} \rightarrow (RCOO)_2Mg + 2Na^+$$

$$0/200L \times \frac{0/2mol\,Mg^{2+}}{1L} \times \frac{25}{100} \times \frac{2mol\,\text{صابون}}{1mol\,Mg^{2+}} \times \frac{M\,g\,\text{صابون}}{1mol\,\text{صابون}} = 5/56g\,\text{صابون} \Rightarrow M = 278g$$

اینجوری هم میشه

$$Mg^{2+} \sim 2RCOONa$$

$$\frac{0/2L \times 0/2\frac{mol}{L} \times \frac{25}{100}}{1} = \frac{5/56g}{M \times 2} \Rightarrow M = 278g$$

پس جرم مولی صابون موردنظر ۲۷۸ گرم بر مول است، فرمول شیمیایی صابون با زنجیر هیدروکربنی سیرشده $C_nH_{2n+1}COONa$ بوده و جرم مولی آن از رابطهٔ $14n+68$ قابل محاسبه است:

$$14n + 68 = 278 \Rightarrow n = 15$$

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

با توجه به فرمول عمومی پاک‌کننده‌های صابونی جامد $(C_nH_{2n-1}O_2Na)$ و نسبت جرمی کربن به اکسیژن می‌توان فرمول شیمیایی آن را مشخص کرد:

$$\frac{\text{جرم C}}{\text{جرم O}} = ۷/۵ \Rightarrow \frac{n\times ۱۲}{۲\times ۱۶} = ۷/۵ \Rightarrow n = ۲۰ \Rightarrow \text{فرمول شیمیایی صابون} : C_{۲۰}H_{۳۹}O_۲Na$$

از سویی فرمول عمومی پاک‌کننده غیرصابونی که زنجیر هیدروکربنی آن نیز سیرشده باشد به‌صورت $C_nH_{2n+1}C_۶H_۴SO_۳Na$ می‌باشد. با توجه به برابر بودن تعداد اتم‌های هیدروژن در این دو پاک‌کننده می‌توان برای تعیین فرمول شیمیایی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی به‌صورت زیر عمل کرد:

$$۲n+۱+۴ = ۳۹ \Rightarrow n = ۱۷ \Rightarrow \text{فرمول شیمیایی پاک‌کننده غیرصابونی} : C_{۱۷}H_{۳۵}C_۶H_۴SO_۳Na$$

حال می‌توان درصد جرمی سدیم موجود در این پاک‌کننده را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\%Na = \frac{\text{جرم سدیم}}{\text{جرم پاک‌کننده}}\times ۱۰۰ = \frac{۲۳}{۴۱۸}\times ۱۰۰ \simeq \%۵/۵$$

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

پاک‌کننده‌های خورنده، علاوه‌بر برهم‌کنش‌های فیزیکی، قادر به انجام واکنش‌های شیمیایی با آلاینده‌ها نیز هستند. این واکنش‌ها منجر به تبدیل آلاینده‌ها به موادی می‌شوند که به راحتی با آب شسته می‌شوند. اما پاک‌کننده‌هایی که براساس برهم‌کنش میان ذره‌ای عمل می‌کنند (پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی)، فقط براساس برهم‌کنش‌های فیزیکی عمل می‌کنند و نمی‌توانند با آلاینده‌ها واکنش شیمیایی انجام دهند.

ویژگی‌های گزینه‌های ۱ و ۲ از ویژگی‌های مشترک میان پاک‌کننده‌های خورنده و پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی است، از سویی پاک‌کننده‌های خورنده از نظر شیمیایی فعال‌اند و خاصیت خورندگی دارند، به همین دلیل نباید با پوست تماس داشته باشند. در واقع ایمنی پاک‌کننده‌های خورنده در تماس با پوست کمتر از پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی است.

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

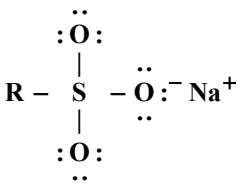
خوبه اینو بدونی

- با توجه به تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در حلقه بنزنی $(C_۶H_۴)$ این نوع پاک‌کننده با شمار اتم‌های هیدروژن در زنجیر کربنی، می‌توان نتیجه گرفت که شمار اتم‌های هیدروژن در زنجیر کربنی برابر ۲۱ است و از سوی دیگر در ساختار این پاک‌کننده ۴ پیوند دوگانه نیز وجود دارد که با توجه به وجود ۳ پیوند دوگانه در حلقه بنزنی پس یک پیوند دوگانه باید در زنجیره کربنی وجود داشته باشد؛ بنابراین فرمول عمومی زنجیر کربنی با یک پیوند دوگانه به‌صورت C_nH_{2n+1-2} است در نتیجه:

$$۲n-۱ = ۲۱ \Rightarrow ۲n = ۲۲ \Rightarrow n = ۱۱$$

جوابش اینه

گزینهٔ ۴: نادرست؛ شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی پاک‌کننده غیرصابونی مستقل از شمار اتم‌های کربن بوده و همواره برابر ۹ زوج الکترون ناپیوندی است.



نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: درست؛ فرمول زنجیر کربنی $C_{۱۱}H_{۲۱}$ است.

گزینهٔ ۲: درست؛ جرم مولی آن برابر ۳۳۲ گرم بر مول است.

$$C_{۱۱}H_{۲۱}C_۶H_۴SO_۲Na$$

$$\text{جرم مولی} : (۱۱\times ۱۲)+(۲۱\times ۱)+(۶\times ۱۲)+(۴\times ۱)+۳۲+(۳\times ۱۶)+۲۳ = ۳۳۲ g\cdot mol^{-۱}$$

گزینهٔ ۳: درست؛ ۱۰ پیوند $C-C$ در زنجیره کربنی و ۳ پیوند $C-C$ در حلقه بنزنی وجود دارد.

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

گزینهٔ ۳ درست است.

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: هگزان حلال بوده و پاک‌کننده خورده محسوب نمی‌شود.

گزینهٔ ۲: استون حلال و $C_{۱۵}H_{۳۱}COOK$ صابون است و هیچ‌کدام پاک‌کننده خورنده به‌شمار نمی‌آیند.

گزینهٔ ۴: وایتکس یا همان محلول سفیدکننده یک پاک‌کنندهٔ خورنده است ولی $C_{۱۲}H_{۲۵}-C_۶H_۴-SO_۳Na$ یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی است و خورنده به‌شمار نمی‌آید.

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

مورد «ب» درست است.

نباید سراغ اینا بری

الف) پاک‌کننده‌های غیرصابونی برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی که منشأ طبیعی دارند، فراورده‌های پتروشیمیایی بوده و طی فرایندهای پیچیده در صنعت تولید می‌شوند و در مقایسه با صابون سازگاری کمتری با محیط‌زیست دارند.

پ) بخش آنیونی پاک‌کننده غیرصابونی $(RC_۶H_۴SO_۳^-)$ و بخش آنیونی صابون $(RCO_۲^-)$ هر دو اندازه بار یکسانی دارند.

ت) اگر زنجیر هیدروکربنی یک صابون جامد و یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی یکسان باشد، تفاوت جرم مولی‌های آن‌ها با تفاوت جرم مولی‌های کربن‌دی‌اکسید و گوگرد تری اکسید متفاوت است؛ زیرا در ساختار پاک‌کننده غیرصابونی حلقه بنزنی با ۶ اتم کربن و ۴ اتم هیدروژن نیز وجود دارد.

$$\begin{cases} RCOONa \\ RC_۶H_۴SO_۳Na \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CO_۲ \\ C_۶H_۴SO_۲ \end{cases}$$

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

گزینهٔ ۴: درست؛ حباب‌های گاز تولیدشده با ضربه زدن به چربی‌ها و ایجاد فشار مکانیکی سبب حرکت، تکان خوردن آن‌ها می‌شود.

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: نادرست؛ مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در واکنش برابر ۱۵ است.

$$۲Al(s)+۲NaOH(s)+۶H_۲O(l) \rightarrow ۲NaAl(OH)_۴(aq)+۳H_۲(g)$$

گزینهٔ ۲: نادرست؛ این واکنش گرماده است و آنتالپی واکنش مقداری منفی است. $(\Delta H < ۰)$

گزینهٔ ۳: نادرست؛ ترکیب تولیدشده محلول در آب است و نقشی در پاک کردن لوله‌های مسدود شده با چربی ندارد.

آزمون ۱۶ آبان ۱۴۰۴

شیمی ۳

۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

چهار ماده آب، ضدیخ (اتیلن گلیکول)، اوره و شکر موادی قطبی و نمک خوراکی (NaCl) ماده‌ای یونی است که این ۵ ماده در آب (حلال قطبی) حل می‌شوند. در حالی که بنزین، روغن زیتون و وازلین موادی ناقطبی هستند. از آنجاکه مخلوط مواد قطبی در یکدیگر و همچنین مخلوط مواد ناقطبی در یکدیگر منجر به تشکیل مخلوط‌های همگن (محلول) می‌شوند، مخلوط‌های «الف» و «ت» همگن بوده ولی مخلوط‌های «ب» و «پ» ناهمگن خواهند بود.

۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: نادرست؛ شکل (۲) نوعی کلوئید است که مسیر عبور نور را نشان می‌دهد.
گزینهٔ ۲: نادرست؛ مایع قطبی و آب در یکدیگر حل می‌شوند ولی در شکل (۱) دو مایع، مخلوط نشده‌اند.
گزینهٔ ۳: نادرست؛ شربت خاکشیر نوعی سوسپانسیون است ولی شکل (۲) مربوط به یک مخلوط کلوئیدی همانند سس مایونز است.

۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

فرمول عمومی اسیدهای چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده $C_nH_{2n}O_2$ است. وجود یک پیوند دوگانه در زنجیر هیدروکربنی همراه با حذف دو اتم H و تبدیل فرمول عمومی به‌شکل $C_nH_{2n-2}O_2$ می‌شود. بنابراین جرم مولکولی این اسید چرب برابر است با:

$$(12n)+(2n-2)+32=14n+30$$

هر مول از اسید چرب با یک مول NaOH واکنش می‌دهد و یک مول صابون تولید می‌کند.

$$C_nH_{2n-2}O_2 \sim NaOH$$

$$\frac{96g}{(14n+30)g}=\frac{0/8L\times 0/5mol\cdot L^{-1}}{1mol} \Rightarrow 14n+30=240 \Rightarrow n=15$$

$$\Rightarrow \text{فرمول اسید چرب } C_{15}H_{28}O_2 \rightarrow \text{فرمول صابون } C_{15}H_{27}O_2Na$$

جرم صابون تولید شده با جرم مولی $262g\cdot mol^{-1}$ نیز برابر است با:

$$NaOH \sim C_{15}H_{27}O_2Na$$

$$\frac{M\times V}{a}=\frac{m}{a\times M} \Rightarrow \frac{0/5\times 0/8}{1}=\frac{mg}{1\times 262} \Rightarrow m=104/8g$$

SanjeshCloud

۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

معادلهٔ موازنه شده واکنش کلی چنین است:

$$۲RCOONa(aq)+Mg^{۲+}(aq)\rightarrow (RCOO)_۲Mg(s)+۲Na^{+}(aq)$$

ازآنجاکه صابون جامد دارای زنجیر هیدروکربنی سیرشده است، پس R یک آلکیل با فرمول عمومی $C_nH_{۲n+۱}$ خواهد بود. با توجه به جرم مولی صابون می‌توان گفت که فرمول R برابر است با:

$$\underbrace{۱۴n+۱}_{R}+\underbrace{۶۷}_{COONa}=۳۴۸ \Rightarrow n=۲۰ \Rightarrow C_{۲۰}H_{۴۱}COONa$$

$$۲C_{۲۰}H_{۴۱}COONa \sim (C_{۲۰}H_{۴۱}COO)_۲Mg$$

$$\frac{۶۹/۶\,g}{۲\times ۳۴۸}=\frac{۶۷/۵\,g}{(۳۲۵\times ۲)+Mg} \Rightarrow ۶۷۵=۶۵۰+Mg \Rightarrow Mg=۲۵$$

اینجوری هم میشه

$$۶۹/۶\,g\ \text{صابون}\times\frac{۱\,mol\ \text{صابون}}{۳۴۸\,g}\times\frac{۱\,mol\ \text{رسوب}}{۲\,mol\ \text{صابون}}\times\frac{(۳۲۵\times ۲)+Mg}{۱\,mol\ \text{رسوب}}=۶۷/۵\,g$$

$$\frac{۶۹/۶\times(۶۵۰+Mg)}{۳۴۸\times ۲}=۶۷/۵ \Rightarrow Mg=۲۵$$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

گزینهٔ ۱: نادرست؛ اگر $x=۱۶$ باشد، آبکافت ساختار (۲) به‌صورت زیر است:

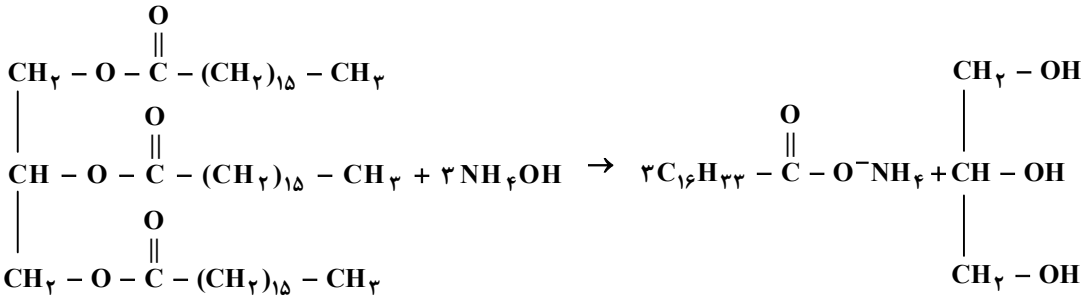
$$\begin{array}{l} CH_۲-O-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-(CH_۲)_{۱۶}-CH_۳ \\ | \\ CH-O-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-(CH_۲)_{۱۶}-CH_۳ \\ | \\ CH_۲-O-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-(CH_۲)_{۱۶}-CH_۳ \end{array} + ۳H_۲O \rightarrow ۳C_{۱۷}H_{۳۵}-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH + \begin{array}{l} CH_۲-OH \\ | \\ CH-OH \\ | \\ CH_۲-OH \end{array}$$

گزینهٔ ۲: نادرست؛ زنجیر هیدروکربنی سیرشده از فرمول $C_nH_{۲n+۱}$ (آلکیل‌ها) پیروی می‌کند، پس این زنجیر در ساختار (۱) سیرشده نیست و دارای یک پیوند $C=C$ است.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ در هر صورت، جرم مولی صابون با ساختار (۳)، کمتر از جرم مولی صابون جامد حاصل از واکنش صابونی شدن ساختار (۱) است، ببینید:

$$\left.\begin{array}{l} C_{۱۶}H_{۳۳}-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O^{-}NH_۴^{+} \Rightarrow C_{۱۷}H_{۳۷}O_۲N \\ C_{۱۷}H_{۳۳}-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O^{-}Na^{+} \Rightarrow C_{۱۸}H_{۳۳}O_۲Na \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اختلاف}} \begin{cases} ۴H,N: ۴+۱۴=۱۸ \\ C,Na: ۱۲+۲۳=۳۵ \end{cases}$$

گزینهٔ ۴: درست؛ اگر جرم مولی استر سنگین برابر $848\,g\cdot mol^{-1}$ باشد، پس $x=15$ خواهد بود.

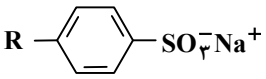


$$?\,g(\text{صابون}) = 636\,g(\text{استر سنگین}) \times \frac{1\,mol(\text{استر سنگین})}{848\,g(\text{استر سنگین})} \times \frac{3\,mol(\text{صابون})}{1\,mol(\text{استر سنگین})} = 2/25\,mol(\text{صابون})$$

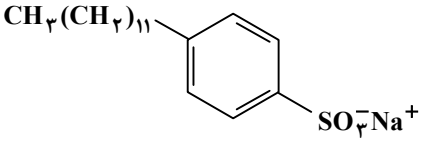
۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

ساختار یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی (R) به‌صورت زیر است:



اگر در ساختار این پاک‌کننده، ۱۱ گروه CH_2 وجود داشته باشد، ساختار آن به‌صورت زیر می‌شود:



فرمول مولکولی این پاک‌کننده به‌صورت $C_{18}H_{29}SO_3Na$ بوده و جرم مولی آن برابر با ۳۴۸ گرم بر مول است. ببینید:

$$\text{جرم مولی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی} = 18(12)+29(1)+1(32)+3(16)+1(23) = 348\,g\cdot mol^{-1}$$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

اگر تعداد مول اسید چرب و استر بلندزنجیر را به‌ترتیب x و y فرض کنیم خواهیم داشت:

$$x+y=0/6$$

از سوی دیگر هر مول اسید چرب با یک مول محلول سدیم هیدروکسید و هر مول استر بلندزنجیر با ۳ مول محلول سدیم هیدروکسید واکنش می‌دهند و تولید صابون می‌کنند.

$$RCOOH + NaOH \rightarrow RCOONa + H_2O$$

$$x\,mol\ \text{اسید چرب} \sim x\,mol\ \text{صابون}$$

$$(RCOO)_3C_3H_5 + 3NaOH \rightarrow 3RCOONa + C_3H_8O_3$$

$$y\,mol\ \text{استر} \sim 3y\,mol\ \text{صابون}$$

$$\begin{cases} x+3y=1/4 \\ x+y=0/6 \end{cases} \Rightarrow 2y=0/8 \Rightarrow \begin{cases} y=0/4 \\ x=0/2 \end{cases}$$

$$\text{درصد مولی اسید چرب} = \frac{\text{مول اسید چرب}}{\text{مول چربی}} \times 100 = \frac{0/2}{0/6} \times 100 = \%33/3$$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

گزینهٔ ۳: نادرست؛ پاک‌کننده‌های خورندهٔ بازی با چربی‌ها واکنش می‌دهند و آن‌ها را به صابون تبدیل می‌کنند. این پاک‌کننده‌ها در ساختار خود زنجیر هیدروکربنی ندارند.

SanjeshCloud

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: درست؛ واکنش پودر لوله‌بازکن با آب، همراه با تولید گاز هیدروژن است که به باز شدن لوله‌های مسدود شده کمک می‌کند.

گزینهٔ ۲: درست؛ واکنش پودر لوله‌بازکن با آب، گرماده است و افزایش دما سرعت واکنش را افزایش می‌دهد و همچنین به ذوب شدن چربی‌ها کمک می‌کند.

گزینهٔ ۴: درست

۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

	HA	$\rightleftharpoons$	H^+	+	A^-
غلظت اولیه :	$۰/۵$		۰		۰
تغییرات غلظت :	$-x$		$+x$		$+x$
غلظت تعادلی :	$۰/۵-x$		x		x

تفاوت غلظت تعادلی مواد شرکت‌کننده $= \frac{۰/۰۱\,mol}{۰/۱\,L} = ۰/۱\,\frac{mol}{L}$

با توجه به نمودار تفاوت غلظت HA یونش نیافته و غلظت هریک از یون‌های H^+ یا A^- برابر است با:

$$(۰/۵-x)-x=۰/۱ \Rightarrow ۰/۵-۲x=۰/۱ \Rightarrow ۲x=۰/۴ \Rightarrow x=۰/۲\,mol\cdot L^{-۱}$$

$$K=\frac{[H^+][A^-]}{[HA]}=\frac{۰/۲\times ۰/۲}{۰/۵-۰/۲}=\frac{۰/۰۴}{۰/۳}=\frac{۴}{۳۰}$$

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

با توجه به سرخ رنگ شدن کاغذ pH در محلول تهیه شده از اکسید عنصر A، می‌توان نتیجه گرفت که عنصر A عنصری نافلز است؛ زیرا اغلب محلول اکسیدهای نافلزی در آب خاصیت اسیدی دارند و کاغذ pH را سرخ رنگ می‌کنند.

گزینهٔ ۱: درست؛ همهٔ نافلزها در دستهٔ p جدول دوره‌ای جای دارند. (به‌جز هیدروژن که اکسید آن یا همان $H_۲O$ از نظر pH ماده‌ای خنثی است.)

گزینهٔ ۲: درست؛ دی نیتروژن پنتااکسید $(N_۲O_۵)$ در دمای اتاق به حالت جامد است و هر مول از آن بر اثر انحلال در آب، چهار مول یون تولید می‌کند:

$$N_۲O_۵(s)+H_۲O(l) \rightarrow ۲HNO_۳(aq) \rightarrow ۲H^+(aq)+۲NO_۳^-(aq)$$

خوبه اینو بدونی

- اکسیدهای فسفردار جامدند $(P_۴O_۶ , P_۴O_{۱۰})$ و از واکنش آن‌ها با آب، محلول اسیدهای ضعیف به‌دست می‌آید.

گزینهٔ ۴: درست؛ اگرچه انحلال برخی اکسیدهای نافلزی (مثل NO و CO) در آب به‌صورت مولکولی است، اما اگر انحلال اکسید عنصر A در یک محلول به آن خاصیت اسیدی داده و کاغذ pH را سرخ رنگ کند، پس انحلال آن به یقین از نوع مولکولی نبوده و به‌صورت یونش خواهد بود. همچنین با اینکه می‌توان اسید و باز را براساس مدل آرنیوس تشخیص داد، اما نمی‌توان دربارهٔ میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول اظهارنظر کرد.

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۳: نادرست؛ اکسید عنصر A را می‌توان اسید آرنیوس در نظر گرفت، نه خود عنصر A! برای مثال عنصر گوگرد با آب واکنش نمی‌دهد ولی گاز $SO_۳$ در واکنش با آب، محلول سولفوریک اسید تولید می‌کند.

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$$[H^+] = [A^-] = \frac{[\text{یون‌ها}]}{۲} = \frac{۰/۱}{۲} = ۰/۰۵ \frac{mol}{L}$$

$$[HA]_{\text{اولیه}} = [HA]_{\text{موجود}} + [HA]_{\text{یونیده‌شده}} = ۰/۹ + ۰/۰۵ = ۰/۹۵$$

$$\%\alpha = \frac{\text{غلظت مولی اسید یونیده‌شده}}{\text{غلظت مولی اسید حل‌شده}} \times ۱۰۰ = \frac{۰/۰۵}{۰/۹۵} \times ۱۰۰ \simeq \%۵/۲$$

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

ثابت یونش اسید تنها تابعی از دما است و در دمای معین، اسیدی که ثابت یونش بزرگ‌تری دارد، اسید قوی‌تری است. در دمای معین، اگر محلول‌هایی با غلظت مولی یکسان از دو اسید تک پروتون‌دار در نظر گرفته شوند، محلول اسید قوی‌تر حاوی غلظت بیشتری از یون‌ها بوده، رسانایی الکتریکی بیشتری داشته و اسیدی‌تر است.

گزینهٔ ۱: نادرست؛ در اسیدهای ضعیف تک پروتون‌دار که ثابت یونش اسیدی کوچک‌تر از $۱۰^{-۴}$ است میان ثابت یونش (K_a) و درجه یونش (α) رابطهٔ تقریبی زیر برقرار است:

$$K_a = M\alpha^۲ \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{K_a}{M}} \Rightarrow \frac{\alpha(HA)}{\alpha(HB)} = \sqrt{\frac{K_a(HA)\cdot M(HB)}{K_a(HB)\cdot M(HA)}} = \sqrt{\frac{۴\times۱۰^{-۶}}{۸\times۱۰^{-۸}}} = \sqrt{\frac{۱}{۲}\times۱۰^۲} = \sqrt{\frac{۱}{۲}}\times۱۰ \neq ۵$$

گزینهٔ ۲: نادرست؛ میزان رسانایی الکتریکی محلول‌ها، به غلظت مولی یون‌های محلول وابسته است و با در نظر گرفتن K_a دو اسید به تنهایی نمی‌توان در مورد رسانایی الکتریکی محلول آن‌ها اظهارنظر کرد.

گزینهٔ ۳: درست؛ $HB(aq)$ اسید ضعیف‌تری است؛ بنابراین اگر غلظت مولکول‌های یونش نیافته در محلول دو اسید برابر باشد، پس غلظت مولی محلول $HB(aq)$ کمتر بوده است.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ غلظت یون هیدرونیوم در محلول افزون بر K_a و یا α به غلظت مولی اسید نیز وابسته است.

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

پ) نادرست؛ $C_۲H_۵OH$ (اتانول) یک الکل است و در آب یون OH^- تولید نمی‌کند. (اتانول در آب یونش نمی‌یابد و فقط به شکل مولکولی حل می‌شود.)

ت) نادرست؛ یک مول لیتیم اکسید در آب چهار مول یون تولید می‌کند:

$$Li_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow \underbrace{۲Li^+ + ۲OH^-}_{\text{۴ مول یون}}$$

نباید سراغ اینا بری

الف) درست؛ اکسیدهای نیتروژن مانند $NO_۲$ و $N_۲O_۵$، همچنین اکسیدهای گوگرد مانند $SO_۲$ و $SO_۳$، در آب محلولی اسیدی تولید می‌کنند.

ب) درست؛ چهار گاز HF، HCl، HBr و HI با وارد شدن در آب، محلول اسیدی تولید می‌کنند.

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

برابر بودن رسانایی الکتریکی در دو محلول به معنای برابر بودن شمار یون‌ها در آن‌ها است:

$$HX \rightarrow H^+ + X^-$$

$$[H^+] = [X^-] = ۵\times۱۰^{-۳}\ mol\cdot L^{-۱}$$

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$$[H^+] = [A^-] = ۵\times۱۰^{-۳}\ mol\cdot L^{-۱}$$

$$\%\alpha = \frac{\text{غلظت مولی اسید یونیده‌شده}}{\text{غلظت مولی اسید حل‌شده}} \times ۱۰۰ = \frac{۵\times۱۰^{-۳}}{۰/۲} \times ۱۰۰ = \%۲/۵$$

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

مورد «دوم»: درست؛ ازآنجایی که غلظت‌های ابتدایی دو اسید برابر بوده اما غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید HA بیشتر است، می‌توان نتیجه گرفت که قدرت اسیدی HA بیشتر از قدرت اسیدی HB است.

مورد «چهارم»: درست؛ با داشتن درجه یونش (در مورد اول) می‌توان K_a را به‌دست آورد.

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow \begin{cases} K_a(HA) = \frac{1\times(0/5)^2}{1-0/5} = 0/5 \\ K_a(HB) = \frac{1\times(0/2)^2}{1-0/2} = 0/05 \end{cases}$$

نباید سراغ اینا بری

مورد «اول»: نادرست

$$\%\alpha = \frac{\text{شمار مولکول‌های اسید یونش یافته}}{\text{شمار مولکول‌های اسید حل شده}} \times 100 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{(HA)} = \frac{5}{10}\times 100 = \%50 \\ \alpha_{(HB)} = \frac{2}{10}\times 100 = \%20 \end{cases}$$

مورد «سوم»: نادرست؛ درجه یونش هیدروکلریک اسید برابر یک است و در نمای ذره‌ای باید تمام مولکول‌های آن به‌طور کامل یونش یافته باشد ولی در شکل HA چنین نیست. با توجه به دو شکل هر دو اسید ضعیف هستند ولی قدرت اسیدی HA بیشتر از HB است.

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

سرعت تولید گاز H_2 به غلظت یون H^+ در محلول اسید بستگی دارد؛ ازاین‌رو در محلول اسید قوی سرعت تولید گاز هیدروژن بیشتر است، ولی مقدار نهایی گاز H_2 تولیدشده به مقدار مول اولیه اسید بستگی دارد و قدرت اسیدی نقشی در مقدار H_2 تولید شده ندارد.

$$Mg(s) + 2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + H_2(g)$$

$$Mg(s) + 2HF(aq) \rightarrow MgF_2(aq) + H_2(g)$$

SanjeshCloud

گزینه دو

آزمون ۷ آذر ۱۴۰۴

شیمی

۱ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)**



گزینهٔ ۱: نادرست؛ کربن (گرافیت) نوعی رسانای الکترونی است و تمایلی به تشکیل کاتیون ندارد.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ سولفوریک اسید (H_2SO_4) همانند هیدروکلریک اسید (HCl) یک الکترولیت قوی است، اما رسانایی الکتریکی محلول‌هایی با شرایط یکسان از سولفوریک اسید و هیدروکلریک اسید متفاوت است. سولفوریک اسید برخلاف هیدروکلریک اسید یک اسید دو پروتون‌دار بوده و در محلول آن یون‌های بیشتری وجود دارد.

گزینهٔ ۳: درست؛ هر دو اسید تک پروتون‌دار هستند و از یونش هر مولکول از آن‌ها دو یون تولید می‌شود. معادلهٔ یونش دو اسید ضعیف HF و HA به‌صورت زیر است:

$$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq)$$

$$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq)$$

اکنون غلظت مولی کل یون‌ها در دو محلول را حساب می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی کل یون‌ها در محلول HF} = M \cdot \alpha \cdot i = ۱ \times ۰/۰۲ \times ۲ = ۰/۰۴ \, mol \cdot L^{-۱}$$

$$\text{غلظت مولی کل یون‌ها در محلول HA} = M \cdot \alpha \cdot i = ۰/۲ \times ۰/۲ \times ۲ = ۰/۰۸ \, mol \cdot L^{-۱}$$

توجه داشته باشید که i نشان‌دهندهٔ تعداد یون‌های حاصل از یونش اسید است.

ازآنجایی‌که غلظت مولی کل یون‌ها در محلول اسید HA بیشتر است؛ بنابراین رسانایی الکتریکی محلول آن نیز بیشتر خواهد بود.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ گلوکز برخلاف سدیم کلرید غیرالکترولیت است و محلول آن رسانایی الکتریکی ایجاد نمی‌کند.

SanjeshCloud

۲ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

هر دو اسید تک پروتون‌دار و ضعیف هستند که معادلهٔ یونش آن‌ها را می‌توان به‌صورت کلی زیر نشان داد:

$$HX(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + X^-(aq)$$

بنابراین شمار یون‌های موجود در محلول اسیدها، دو برابر شمار مولکول‌های یونیده شده است. به عبارتی به‌ازای هر مولکول اسید یونش یافته، دو یون تولید می‌شود.

$$\text{درجهٔ یونش} = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده‌شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل‌شده}} = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده‌شده}}{\text{شمار مولکول‌های یونیده‌شده + شمار مولکول‌های یونیده‌نشده}}$$

$$\begin{cases} \alpha_{HA} = \dfrac{(\frac{۲۰۰}{۲})}{۸۰۰ + \frac{۲۰۰}{۲}} = \frac{۱}{۹} \\ \alpha_{HB} = \dfrac{(\frac{۳۶۰}{۲})}{۶۴۰ + \frac{۳۶۰}{۲}} = \frac{۹}{۴۱} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha_{HA}}{\alpha_{HB}} = \frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۹}{۴۱}} = \frac{۴۱}{۸۱}$$

۳ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{(۸\times۱۰^{-۵})^۲}{۰/۱ - \underbrace{۸\times۱۰^{-۵}}_{\text{چشم‌پوشی}}} = ۶/۴\times۱۰^{-۸}$$

۴ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$\alpha_{HA}\cdot\alpha_{BOH} = \frac{[H^+]}{M_{HA}} \times \frac{[OH^-]}{M_{BOH}} \xrightarrow[[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}]{[H^+]=۱۰^{-pH}} \frac{۱۰^{-a}}{۰/۱} \times \frac{\frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]}}{۰/۰۱}$$

$$= \frac{۱۰^{-a}}{۱۰^{-۱}} \times \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۲}\times۱۰^{-a-۵}} = \frac{۱۰^{-a}}{۱۰^{-۱}} \times \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۲}\times۱۰^{-a}\times۱۰^{-۵}} = ۱۰^{-۶}$$

SanjeshCloud

۵ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



ابتدا معادلهٔ واکنش را می‌نویسیم:

$$۲Li + ۲H_۲O \rightarrow ۲LiOH + H_۲$$

$$pH = ۱۱/۷ \Rightarrow pOH = ۱۴ - pH = ۲/۳ \Rightarrow \left[OH^-\right] = ۱۰^{-pOH} = ۱۰^{-۲/۳} = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۰/۷} = ۵ \times ۱۰^{-۳}\ mol \cdot L^{-۱}$$

$$?g\ Li = ۲۰۰L \times \frac{۵ \times ۱۰^{-۳} mol\ OH^-}{۱L} \times \frac{۱mol\ LiOH}{۱mol\ OH^-} \times \frac{۲mol\ Li}{۲mol\ LiOH} \times \frac{۷g\ Li}{۱mol\ Li} = ۷g\ Li$$

در ادامه با توجه به مقدار Li مصرف شده می‌توان حجم گاز $H_۲$ تولیدشده را محاسبه کرد:

$$?L\ H_۲ = ۷g\ Li \times \frac{۱mol\ Li}{۷g\ Li} \times \frac{۱mol\ H_۲}{۲mol\ Li} \times \frac{۲۲/۴L}{۱mol\ H_۲} = ۱۱/۲L\ H_۲$$

۶ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



در محلول اسید قوی تک پروتون‌دار، غلظت $H^+(aq)$ با غلظت مولی اسید برابر است، پس:

$$HA \rightarrow H^+ + A^-$$

$$pH = ۲ \Rightarrow \left[H^+\right] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲} mol \cdot L^{-۱}$$

$$۵۰ \times ۱۰^{-۳}L \times \frac{۱۰^{-۲} mol(HA)}{۱L} \times \frac{Mg(HA)}{۱mol(HA)} = ۳۱/۵ \times ۱۰^{-۳} g(HA) \Rightarrow M(HA) = ۶۳ g \cdot mol^{-۱}$$

۷ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



pH محلول $HNO_۳$ به‌دلیل قوی بودن اسید، کمتر است و ازآنجایی‌که درجه یونش آن با افزایش دما تغییر نمی‌کند، pH ثابت است؛ ولی در اسید ضعیف $HNO_۲$ با افزایش دما، درجه یونش افزایش می‌یابد، در نتیجه pH کاهش می‌یابد.

۸ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



$$SO_۳ + H_۲O \rightarrow H_۲SO_۴ \rightarrow ۲H^+$$

$$N_۲O_۵ + H_۲O \rightarrow ۲HNO_۳ \rightarrow ۲H^+$$

$$۳/۳۶L\ SO_۳ \times \frac{۱mol\ SO_۳}{۲۲/۴L\ SO_۳} \times \frac{۲mol\ H^+}{۱mol\ SO_۳} = ۰/۳mol\ H^+$$

$$۱۰/۸g\ N_۲O_۵ \times \frac{۱mol\ N_۲O_۵}{۱۰۸g\ N_۲O_۵} \times \frac{۲mol\ H^+}{۱mol\ N_۲O_۵} = ۰/۲mol\ H^+$$

$$\text{مول کل } H^+ = ۰/۳ + ۰/۲ = ۰/۵mol$$

$$\text{غلظت یون هیدرونیوم}: \left[H^+\right] = \frac{۰/۵mol}{۱۰^۴L} = ۵ \times ۱۰^{-۵} \frac{mol}{L}$$

اکنون می‌توان pH محلول را محاسبه کرد:

$$pH = -\log\left[H^+\right] = -\log ۵ \times ۱۰^{-۵} = ۵ - ۰/۷ = ۴/۳$$

و در نهایت میزان تغییر pH آب برابر است با:

$$\Delta pH = ۷ - ۴/۳ = ۲/۷$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



$$3KOH + H_3PO_4 \rightarrow K_3PO_4 + 3H_2O$$

$$\frac{0/8 \times M}{3} = \frac{0/4 \times 0/2}{1} \Rightarrow M = 0/3 \Rightarrow [OH^-] = 0/3\,mol \cdot L^{-1}$$

$$\Rightarrow pOH = -\log[OH^-] = -\log 3 \times 10^{-1} = 1 - 0/5 = 0/5 \Rightarrow pH = 14 - pOH = 13/5$$

$$K_2O + H_2O \rightarrow 2KOH$$

$$\frac{?\,g\,K_2O \times \frac{70/5}{100}}{94\,g\,K_2O} = \frac{0/8\,L \times 0/3\,mol \cdot L^{-1}}{2\,mol\,KOH} \Rightarrow ? = 16\,g\,K_2O$$

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



گزینهٔ ۱: درست؛ با توجه به اینکه هر دو اسید و باز داده‌شده قوی هستند، تفاوت pH دو محلول برابر ۱۲ خواهد بود.

$$HA: \begin{cases} M = 0/1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow [H^+] = M \cdot \alpha = 0/1 \times 1 \Rightarrow pH = 1$$

$$BOH: \begin{cases} M = 0/1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow [OH^-] = M \cdot \alpha = 0/1 \times 1 \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = 10^{-13} \Rightarrow pH = 13$$

گزینهٔ ۲: درست؛ نمک به‌دست آمده از واکنش یک مقدار معین اسید قوی مانند HCl و باز قوی مانند NaOH خنثی است و pH محلول دارای آن برابر ۷ است.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ در اثر افزودن آب به محلول اسیدها یا بازهای قوی، اگر حجم محلول n برابر شود، pH به میزان $\log n$ تغییر خواهد کرد. با افزودن ۱۰۰mL آب به ۱۰۰mL محلول، حجم محلول دو برابر می‌شود، پس:

$$\Delta pH = \log n = \log 2 = 0/3$$

گزینهٔ ۴: درست؛ اگر هر دو ماده به یک اندازه یونش یابند، پس غلظت مولی یون‌ها در هر دو محلول برابر است و رسانایی الکتریکی که تابع غلظت یون‌هاست نیز برابر می‌شود.

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



ابتدا شمار مول‌های OH^- حاصل از NaOH را به‌دست می‌آوریم:

$$?\,mol\,OH^- = 0/8\,g\,NaOH \times \frac{1\,mol\,NaOH}{40\,g\,NaOH} \times \frac{1\,mol\,OH^-}{1\,mol\,NaOH} = 0/02\,mol\,OH^-$$

سپس شمار مول‌های H^+ حاصل از HCl را به‌دست می‌آوریم:

$$?\,mol\,H^+ = 100\,mL\,HCl \times \frac{1\,L\,HCl}{1000\,mL\,HCl} \times \frac{0/1\,mol\,HCl}{1\,L\,HCl} \times \frac{1\,mol\,H^+}{1\,mol\,HCl} = 0/01\,mol\,H^+$$

از مخلوط شدن NaOH با محلول HCl، خنثی شدن به‌صورت کامل انجام نمی‌شود، چون شمار مول‌های OH^- بیشتر است و محلول نهایی بازی می‌شود:

$$\text{مول هیدروکسید باقی‌مانده} = 0/02 - 0/01 = 0/01\,mol\,OH^-$$

$$[OH^-] = \frac{0/01\,mol}{0/1\,L} = 10^{-1}\,mol \cdot L^{-1} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{10^{-1}} = 10^{-13}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log 10^{-13} = 13$$

برای قسمت دوم سؤال که غلظت مولی نمک سدیم کلرید را خواسته است، ابتدا معادله واکنش را می‌نویسیم.

$$HCl(aq) + NaOH(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_2O(l)$$

با توجه به اینکه شمار مول‌های HCl کمتر است، پس مول نمک تولیدشده را با توجه به مول HCl محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,NaCl = ۰/۰۱ mol\,HCl \times \frac{۱\,mol\,NaCl}{۱\,mol\,HCl} = ۰/۰۱ mol\,NaCl$$

$$[NaCl] = \frac{۰/۰۱ mol}{۰/۱۰۰ L} = ۰/۱ mol \cdot L^{-۱}$$

۱۲ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



گزینهٔ ۱: نادرست؛ pH آب خالص در دمای اتاق $(۲۵^\circ C)$ برابر ۷ است.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ در دمای اتاق، حاصل‌ضرب $[H^+][OH^-]$ برابر $۱۰^{-۱۴}$ است.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ رابطه میان pH و $[H^+]$ چنین است: $[H^+] = ۱۰^{-pH} \Leftrightarrow pH = -\log[H^+]$

۱۳ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



با توجه به اینکه سود سوزآور یا همان NaOH یک باز قوی است می‌توان گفت اگر حجم باز با اضافه کردن آب n برابر شود، pH به اندازهٔ $\log n$ کاهش می‌یابد:

$$\Delta pH = \log n \Leftrightarrow n = ۱۰^{\Delta pH}$$

$$۹۰ mL + ۱۰ mL = ۱۰۰ mL$$

حجم باز ۱۰ برابر شده و چون $\log ۱۰ = ۱$، پس pH یک واحد کم می‌شود:

$$pH = ۱۲ - ۱ = ۱۱$$

۱۴ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



ابتدا غلظت محلول بازی مورد استفاده را به‌دست می‌آوریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱۲} \Rightarrow [OH^-] = [KOH] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۱۲}} = ۱۰^{-۲} mol \cdot L^{-۱}$$

اکنون می‌توان غلظت محلول اسیدی خنثی شده توسط این باز را تعیین کرد:

$$n_a M_a V_a = n_b M_b V_b \Rightarrow ۱ \times M_a \times ۲۵ = ۱ \times ۱۰^{-۲} \times ۱۰۰ \Rightarrow M_a = ۰/۰۴ mol \cdot L^{-۱}$$

ازآنجاکه با افزودن آب به محلول اسیدی اولیه حجم آن ۵ برابر شده است، می‌توان نتیجه گرفت که محلول حاصل با غلظت ۰/۰۴ مول بر لیتر، ۵ برابر رقیق‌تر از محلول اولیه بوده است. به این ترتیب غلظت محلول اولیه برابر خواهد بود با:

$$[HNO_۳]_{اولیه} = ۰/۰۴ \times ۵ = ۰/۲ mol \cdot L^{-۱}$$

۱۵ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



ابتدا حجم محلول را با استفاده از چگالی به‌دست می‌آوریم:

$$d = \frac{m(g)}{V(mL)} \Rightarrow ۱/۲ = \frac{۳۰}{V(mL)} \Rightarrow V = \frac{۳۰}{۱/۲} = ۲۵ mL = ۰/۰۲۵ L$$

در ادامه شمار مول‌های سدیم هیدروکسید موجود در محلول را حساب می‌کنیم:

$$n(NaOH) = \frac{۰/۱۶ g}{۴۰ g \cdot mol^{-۱}} = ۰/۰۰۴ mol\,NaOH$$

اکنون غلظت مولی محلول NaOH را حساب می‌کنیم:

$$M_{NaOH} = \frac{۰/۰۰۴ mol}{۰/۰۲۵ L} = ۰/۱۶ mol \cdot L^{-۱}$$

سدیم هیدروکسید یک باز قوی است؛ بنابراین غلظت یون هیدروکسید در محلول آن با غلظت محلول برابر است. در نتیجه برای محاسبهٔ pH محلول، غلظت یون هیدرونیوم را با استفاده از غلظت یون هیدروکسید حساب می‌کنیم:

$$\left[H^+\right]\left[OH^-\right]=۱۰^{-۱۴} \Rightarrow \left[H^+\right]=\frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۶\times۱۰^{-۲}}=\frac{۱}{۱۶}\times۱۰^{-۱۲}$$

$$\Rightarrow pH=-\log\left[H^+\right]=-\log\left[\frac{۱}{۱۶}\times۱۰^{-۱۲}\right]=-\log۱۶^{-۱}-\log۱۰^{-۱۲}=\log۱۶+۱۲=\underbrace{۴\log۲}_{۰/۳}+۱۲=۱۳/۲$$

اینجوری هم میشه

$$pOH=-\log\left[OH^-\right]=-\log۱۶\times۱۰^{-۲}=\underbrace{-۴\log۲}_{۰/۳}+۲=۰/۸$$

$$pH+pOH=۱۴ \Rightarrow pH=۱۴-۰/۸=۱۳/۲$$

۱۶ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

فرمول شیمیایی جوش شیرین، $NaHCO_۳$ است.

گزینهٔ ۱: درست؛ نسبت کاتیون Na^+، به آنیون چند اتمی $HCO_۳^-$، برابر یک است.

گزینهٔ ۲: درست

$$HCl(aq)+NaHCO_۳(s) \rightarrow NaCl(aq)+H_۲O(l)+CO_۲(g)$$

هر سه فراورده سه حالت فیزیکی متفاوت دارند.

گزینهٔ ۳: درست

$$RCOOH(s)+NaHCO_۳(aq) \rightarrow RCOONa(aq)+CO_۲(g)+H_۲O(l)$$

گزینهٔ ۴: نادرست؛ سدیم هیدروژن کربنات در آب محلول است و مخلوط آن با آب، از نوع همگن است.

۱۷ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

$$?\,mg\,NaHCO_۳=۵۰\,mL\,HCl\times\frac{۱\,L\,HCl}{۱۰۰۰\,mL\,HCl}\times\frac{۰/۰۰۱\,mol\,HCl}{۱\,L\,HCl}\times\frac{۱\,mol\,NaHCO_۳}{۱\,mol\,HCl}\times\frac{۸۴\,g\,NaHCO_۳\ \text{خالص}}{۱\,mol\,NaHCO_۳}$$

$$\times\frac{۱۰۰\,g\,NaHCO_۳\ \text{ناخالص}}{۸۰\,g\,NaHCO_۳\ \text{خالص}}\times\frac{۱۰۰۰\,mg\,NaHCO_۳}{۱\,g\,NaHCO_۳}=۵/۲۵\,mg\,NaHCO_۳$$

اینجوری هم میشه

$$\frac{?\times۱۰^{-۳}\,g\times\frac{۸۰}{۱۰۰}}{۸۴\,g\,NaHCO_۳}=\frac{۰/۰۵۰\,L\times۰/۰۰۱\,mol\cdot L^{-۱}}{۱\,mol\,HCl} \Rightarrow ?=۵/۲۵\,g\,NaHCO_۳$$

۱۸ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه

منیزیم هیدروکسید $(Mg(OH)_۲)$ یا شیر منیزی یک ضداسید است که اگر با اسید معده واکنش دهد، آن را خنثی کرده و در نتیجه سبب بالا رفتن pH آن می‌شود. واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$۲HCl+Mg(OH)_۲ \rightarrow MgCl_۲+۲H_۲O$$

گزینه دو

آزمون ۳۰ آذر

شیمی ۳

۱ - پاسخ: گزینهٔ ۴ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$۵/۶\,L\ CO_۲ \times \frac{۱mol\ CO_۲}{۲۲/۴\,L\ CO_۲} \times \frac{۱mol\ HCl}{۱mol\ CO_۲} = ۰/۲۵\,mol\ HCl$$

۰/۲۵ مول HCl در ۲۰۰ میلی‌لیتر از محلول موردنظر حل شده است؛ بنابراین در هر لیتر آن، ۱/۲۵ مول HCl حل شده است.

۲ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

فقط عبارت «پ» درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت الف) از کمّیت pH برای بیان غلظت کم و بسیار کم یون هیدرونیوم استفاده می‌شود.

عبارت ب) آب خالص همیشه خنثی است حتی اگر pH برابر ۷ نباشد.

عبارت ت)

$$\left.\begin{array}{l} HCl: pH = a \Rightarrow \left[H^+\right] = M = ۱۰^{-a} \\ KOH: pH = ۳a \Rightarrow \left[OH^-\right] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{\left[H^+\right]} = M' = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۳a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{M}{M'} = \frac{\frac{۱۰^{-a}}{۱}}{\frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۳a}}} = ۱۰^{-۴a} \times ۱۰^{۱۴} = ۱۰^{۱۴} \times \left[H^+\right]^۴_{(HCl)}$$

۳ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$pH_۱ = ۴ \Rightarrow \left[H^+\right]_۱ = ۱۰^{-۴} mol \cdot L^{-۱} \Rightarrow \alpha_۱ = \frac{\left[H^+\right]}{M_۱} = \frac{۱۰^{-۴}}{۰/۱} = ۰/۰۰۱$$

$$pH_۲ = ۴/۳ \Rightarrow \left[H^+\right]_۲ = ۱۰^{-۴/۳} = ۵ \times ۱۰^{-۵} mol \cdot L^{-۱} \Rightarrow \alpha_۲ = \frac{\left[H^+\right]}{M_۲} = \frac{۵ \times ۱۰^{-۵}}{\frac{۰/۱}{۴}} = ۰/۰۰۲$$

$$\frac{\alpha_۲}{\alpha_۱} = \frac{۰/۰۰۲}{۰/۰۰۱} = ۲$$

۴ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ ۱) در دمای اتاق، غلظت H_3O^+ با غلظت OH^-، رابطهٔ وارونه دارد. (نمودار باید نزولی باشد.)

گزینهٔ ۳) با افزایش غلظت H_3O^+، نسبت $\frac{[H_3O^+]}{[OH^-]}$ نیز افزایش می‌یابد.

گزینهٔ ۴) حاصل‌ضرب غلظت H_3O^+ و OH^- در دمای اتاق، فقط وابسته به دما است و با تغییر غلظت یکی از یون‌ها، دچار تغییر نمی‌شود.

۵ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

با توجه به نمودار، در محلول موردنظر غلظت یون هیدروکسید ۹ برابر غلظت یون هیدرونیوم است: $[OH^-]=9\times[H^+]$

$$[H^+][OH^-]=10^{-14} \Rightarrow 9\times[H^+]^2=10^{-14} \Rightarrow [H^+]=\frac{1}{3}\times10^{-7}\,mol\cdot L^{-1}$$

$$[OH^-]=\frac{10^{-14}}{\frac{1}{3}\times10^{-7}}=3\times10^{-7}\,mol\cdot L^{-1}$$

$$pH=-\log[H^+] \Rightarrow pH=-\log(\frac{1}{3}\times10^{-7})=7+\log3\simeq7/5$$

۶ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

فراوردهٔ این واکنش، صابون سدیم خواهد بود و صابون نیز خاصیت بازی دارد؛ بنابراین pH مخلوط حاصل، عددی بزرگ‌تر از ۷ خواهد بود.

$$C_{17}H_{35}COOH+NaOH \rightarrow \underset{\text{صابون}}{C_{17}H_{35}COONa}+H_2O$$

۷ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

ابتدا غلظت مولی HBr را محاسبه می‌کنیم:

$$0/2\,L\,AgNO_3\times\frac{0/2\,mol\,AgNO_3}{1\,L\,AgNO_3}\times\frac{1\,mol\,HBr}{1\,mol\,AgNO_3}=0/04\,mol\,HBr$$

$$[HBr]=\frac{0/04\,mol}{0/4\,L}=0/1\,mol\cdot L^{-1}$$

$$pH=-\log[H^+]=-\log10^{-1}=1$$

۸ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

نسبت شمار آنیون به کاتیون در $Mg(OH)_2$ برابر با ۲ و در جوش‌شیرین $(NaHCO_3)$ برابر با یک است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱) با انجام این واکنش در بدن، مقدار اسید معده کاهش و pH آن افزایش می‌یابد.

گزینهٔ ۲) یون Mg^{2+} با صابون رسوب تشکیل داده و قدرت پاک‌کنندگی را کاهش می‌دهد.

گزینهٔ ۳) در این واکنش، رسوبی شامل یون Cl^- تشکیل نشده است؛ بنابراین نمی‌تواند برای شناسایی این یون به‌کار رود.

SanjeshCloud

۹ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱،فصل ۴)

آب + اتیل استات → اتانول + استیک اسید

$$\left[H^+\right] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲/۴} = ۱۰^{-۳} \times (۱۰^{۰/۳})^۲ = ۴ \times ۱۰^{-۳}\,mol \cdot L^{-۱}$$

$$K_a = \frac{\left[H^+\right]^۲}{M} \Rightarrow M = \frac{۱۶ \times ۱۰^{-۶}}{۱/۶ \times ۱۰^{-۵}} = ۱mol \cdot L^{-۱}$$

$$(C_۲H_۴O_۲)\text{مول استیک اسید} = ۱mol \cdot L^{-۱} \times ۲L = ۲mol$$

در واکنش سنتز استر، به‌ازای مصرف هر مول اسید، یک مول استر به‌دست می‌آید:

$$(C_۴H_۸O_۲)\text{جرم استر} = ۲mol \times ۸۸\,g \cdot mol^{-۱} = ۱۷۶g$$

$$\text{درصد جرمی استیک اسید در سرکه} = \frac{۲mol \times ۶۰\,g \cdot mol^{-۱}}{۲۰۰۰mL \times ۱/۰۵\,g \cdot mL^{-۱}} \times ۱۰۰ \simeq ٪۵/۷$$

۱۰ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

کاغذ pH بر اثر تماس با محلول آبی جوش‌شیرین، آبی‌رنگ می‌شود و از این تجربه می‌توان نتیجه گرفت که جوش‌شیرین $(NaHCO_۳)$ خاصیت بازی دارد و نمک‌ها می‌توانند با حل شدن در آب خاصیت اسیدی آن را تغییر دهند.

۱۱ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

pH شیرهٔ معده در هنگام فعالیت آن حدود ۱/۵ و در هنگام استراحت حدود ۳/۷ است.

۱۲ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست هستند.

۱۳ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱) معادلهٔ موازنه شده به‌صورت $۲FeCl_۳(aq) + ۲KI(aq) \rightarrow ۲FeCl_۲(aq) + I_۲(s) + ۲KCl(aq)$ می‌باشد و تعداد الکترون‌های مبادله‌شده برابر است با تغییرات بار الکتریکی Fe یا I در تعداد آن‌ها که برابر ۲ الکترون است.

$$\text{تعداد } e^- \text{ مبادله‌شده : تعداد} \times \Delta n(x) \times x \begin{cases} \Delta n(Fe) = ۱\ ,\ \text{تعداد Fe} = ۲ \Rightarrow ۲ \times ۱ = ۲ \\ \Delta n(I) = ۱\ ,\ \text{تعداد I} = ۲ \Rightarrow ۲ \times ۱ = ۲ \end{cases}$$

گزینه‌های ۲ و ۳، با توجه به انجام‌پذیر بودن واکنش، قدرت اکسندگی و کاهندگی واکنش‌دهنده‌ها از فراورده‌ها بیشتر است.

$$\text{قدرت کاهندگی}: I^- > Fe^{۲+}$$

$$\text{قدرت اکسندگی}: Fe^{۳+} > I_۲$$

گزینهٔ ۴) یون‌های K^+ و Cl^-، در هر دو طرف معادله به‌صورت محلول وجود دارند و غلظت آن‌ها، ثابت است، اما با مصرف $I^-(aq)$، غلظت آن در محلول کاهش می‌یابد.

۱۴ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

ابتدا معادلهٔ واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم، سپس یکی از اجزای اکسایش یا کاهش یافته را انتخاب و تغییرات عدد اکسایش آن را (Δn) در تعداد آن ضرب کنیم:

$$۲Ag^+ + Cu \rightarrow ۲Ag + Cu^{۲+} \quad ; \quad \text{تعداد } \Delta n(Ag) \times Ag = ۱ \times ۲ = ۲e^-$$

$$۲Fe^{۳+} + Sn^{۲+} \rightarrow ۲Fe^{۲+} + Sn^{۴+} \quad ; \quad \text{تعداد } \Delta n(Fe^{۳+}) \times Fe^{۳+} = ۱ \times ۲ = ۲e^-$$

$$۲Cu^+ \rightarrow Cu + Cu^{۲+} \quad ; \quad \text{تعداد } \Delta n(Cu) \times Cu = ۱ \times ۱ = ۱e^-$$

$$Cr + ۳Fe^{۳+} \rightarrow Cr^{۳+} + ۳Fe^{۲+} \quad ; \quad \text{تعداد } \Delta n(Cr) \times Cr = ۳ \times ۱ = ۳e^-$$

۱۵ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

$$\text{مقایسهٔ قدرت کاهندگی}: Al > Fe > Cu > Ag$$

واکنش‌های ۱ و ۳ انجام‌ناپذیر هستند، اما در واکنش‌های ۲ و ۴، افزایش دما مشاهده می‌شود و با توجه به تفاوت بیشتر قدرت کاهندگی Al و Ag، میزان افزایش دما در واکنش ۲ بیشتر است.

شیمی دوازدهم | ۱۷ مهرماه ۱۴۰۴

۱ . برای تولید نوعی صابون، اسید چربی با فرمول مولکولی $C_{۱۹}H_{۳۸}O_۲$ با مقدار کافی محلول NaOH واکنش داده است. اگر مقدار کافی از این صابون را به یک لیتر آب سخت که غلظت یون‌های منیزیم و کلسیم موجود در آن به ترتیب ۶۰۰ppm و ۳۰۰۰ppm است، اضافه کنیم، در مجموع چند گرم رسوب تشکیل می‌شود؟ (بازده واکنش تشکیل هر کدام از رسوب‌ها، ۸۰٪ است. $d_{آب}=۱g.mL^{-۱}$

$(H=۱,C=۱۲,O=۱۶,Mg=۲۴,Ca=۴۰:g.mol^{-۱})$

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینه ۳ سخت | محاسباتی

استراتژی ابتدا جرم یون‌های $Mg^{۲+}, Ca^{۲+}$ موجود در آب سخت را حساب می‌کنیم، سپس با تعیین فرمول شیمیایی صابون، معادله واکنش آن با یون‌های $Mg^{۲+}, Ca^{۲+}$ که منجر به تشکیل رسوب می‌شود، را می‌نویسیم. در نهایت با توجه به جرم این یون‌ها، جرم رسوب‌های تولیدشده در هر واکنش و مجموع جرم آن‌ها را به دست می‌آوریم.

نکته برای محاسبه غلظت محلول‌ها بر حسب ppm می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$\text{ppm}\text{فرمول‌های}\rightarrow\begin{cases}۱)\ \text{ppm}=\dfrac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}}\times ۱۰^۶ & (\text{برای همه محلول‌ها})\\ ۲)\ \text{ppm}=\dfrac{\text{جرم حل‌شونده}(mg)}{\text{جرم محلول}(kg)} & (\text{برای همه محلول‌ها})\\ ۳)\ \text{ppm}=\dfrac{\text{جرم حل‌شونده}(mg)}{\text{جرم حلال}(kg)} & (\text{برای محلول‌های بسیار رقیق})\\ ۴)\ \text{ppm}=\dfrac{\text{جرم حل‌شونده}(mg)}{\text{حجم محلول}(L)} & (\text{برای محلول‌های بسیار رقیق که حلال آن‌ها آب است})\end{cases}$$

اگر جرم محلول آبی مشخص باشد، از روابط (۱) و (۲) استفاده می‌کنیم ولی اگر حجم محلول آبی رقیق معلوم باشد، رابطه (۴) مناسب‌تر است؛ توجه داشته باشید که رابطه‌های (۱) و (۲) برای همه محلول‌ها ولی رابطه (۴) فقط برای محلول‌های آبی بسیار رقیق (با چگالی $۱g.mL^{-۱}$) کاربرد دارد.

گام اول) با توجه به چگالی و حجم اب سخت، جرم آن و با توجه به غلظت یون‌های $Mg^{۲+}$ و $Ca^{۲+}$ بر حسب ppm در آب سخت، جرم یون‌های موجود در آب سخت را به دست می‌آوریم:

روش اول:

$$?g\text{نمونه آب سخت}=۱L\times\frac{۱۰^۳mL}{۱L}\times\frac{۱g}{۱mL}=۱۰^۳g$$

$$\text{ppm}(mg^{۲+})=\frac{\text{جرم }Mg^{۲+}}{\text{جرم نمونه آب سخت}}\times ۱۰^۶\rightarrow ۶۰۰=\frac{x}{۱۰^۳}\times ۱۰^۶\rightarrow x=۰/۶g\,Mg^{۲+}$$

$$\text{ppm}(Ca^{۲+})=\frac{\text{جرم }Ca^{۲+}}{\text{جرم نمونه آب سخت}}\times ۱۰^۶\rightarrow ۳۰۰۰=\frac{y}{۱۰^۳}\times ۱۰^۶\rightarrow y=۳g\,Ca^{۲+}$$

روش دوم:

$$ppm=\frac{\text{جرم حل‌شونده(mg)}}{\text{حجم محلول(L)}}\rightarrow\begin{cases}Mg^{2+}:۶۰۰=\frac{x}{۱}\rightarrow x=۶۰۰mg\,Mg^{2+}=۰/۶g\,Mg^{2+}\\ Ca^{2+}:۳۰۰۰=\frac{y}{۱}\rightarrow y=۳۰۰۰mg\,Ca^{2+}=۳g\,Ca^{2+}\end{cases}$$

گام دوم) فرمول شیمیایی صابون حاصل از واکنش اسید چرب $C_{۱۹}H_{۳۸}O_۲$ با محلول NaOH را تعیین می‌کنیم.

$$C_{۱۹}H_{۳۸}O_۲+NaOH\rightarrow\underbrace{C_{۱۹}H_{۳۷}O_۲Na}_{\text{صابون}}+H_۲O$$

گام سوم) معادله شیمیایی واکنش صابون با یون‌های Mg^{2+} و Ca^{2+} که منجر به تشکیل رسوب می‌شود را نوشته و جرم رسوب‌های تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

نکته واکنش صابون با یون‌های موجود در آب سخت:

$$۲RCOONa(aq)+Ca^{2+}(aq)\rightarrow(RCOO)_۲Ca(s)+۲Na^{+}(aq)$$

$$۲RCOONa(aq)+Mg^{2+}(aq)\rightarrow(RCOO)_۲Mg(s)+۲Na^{+}(aq)$$

بنابراین داریم:

$$(I):۲C_{۱۹}H_{۳۷}O_۲Na(aq)+Mg^{2+}(aq)\rightarrow(C_{۱۹}H_{۳۷}O_۲)_۲Mg(s)+۲Na^{+}(aq)$$

$$(II):۲C_{۱۹}H_{۳۷}O_۲Na(aq)+Ca^{2+}(aq)\rightarrow(C_{۱۹}H_{۳۷}O_۲)_۲Ca(s)+۲Na^{+}(aq)$$

$$\text{جرم رسوب تشکیل شده در واکنش (I)}:\frac{g\,Mg^{2+}\times\frac{R}{۱۰۰}}{۱\times۲۴}=\frac{g(C_{۱۹}H_{۳۷}O_۲)_۲Mg}{۱\times۶۱۸}\rightarrow\frac{۰/۶\times\frac{۸۰}{۱۰۰}}{۲۴}=\frac{x}{۶۱۸}\rightarrow x=۱۲/۳۶g(C_{۱۹}H_{۳۷}O_۲)_۲Mg$$

$$\text{جرم رسوب تشکیل شده در واکنش (II)}:\frac{g\,Ca^{2+}\times\frac{R}{۱۰۰}}{۱\times۴۰}=\frac{g(C_{۱۹}H_{۳۷}O_۲)_۲Ca}{۱\times۶۳۴}\rightarrow\frac{۳\times\frac{۸۰}{۱۰۰}}{۴۰}=\frac{y}{۶۳۴}\rightarrow y=۳۸/۰۴g(C_{۱۹}H_{۳۷}O_۲)_۲Ca$$

گام چهارم) مجموع جرم رسوب‌های تولید شده را به دست می‌آوریم:

$$\text{مجموع جرم رسوب‌ها}=۱۲/۳۶+۳۸/۰۴=۵۰/۴\simeq۵۰g$$

تست‌درتست **به ۲۰۰mL آب سخت ($d=۱g.mL^{-۱}$) که دارای یون‌های Ca^{2+} با غلظت ۲۰۰۰ppm است، ۴/۷۲ گرم از صابون با جرم مولی $۲۳۶g.mol^{-۱}$ اضافه شده است. با فرض کامل بودن واکنش صابون با یون کلسیم، چند درصد از آن، به صورت رسوب درآمده است؟** (سراسری ریاضی ۹۸)

$(Ca=۴۰,Na=۲۳:g.mol^{-۱})$

$RCOONa(aq)+CaCl_۲(aq)\rightarrow(RCOO)_۲Ca(s)+NaCl(aq)$ (معادله موازنه شود.)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

روش اول: با توجه به این که چگالی آب، $۱g.mL^{-۱}$ است، ۲۰۰mL آب معادل ۲۰۰g آب است. از طرفی با توجه به غلظت یون Ca^{2+} در آب (۲۰۰۰ppm) می‌توان گفت در هر $۱۰^۶$ گرم آب، ۲۰۰۰ گرم از این یون وجود دارد؛ حالا باید ببینیم ۲۰۰ گرم آب سخت با چند گرم صابون واکنش می‌دهد:

$$۲RCOONa+CaCl_۲\rightarrow(RCOO)_۲Ca+۲NaCl$$

$$\text{صابون} = ۲۰۰\,g\,\text{آب سخت} \times \frac{۲۰۰۰\,g\,Ca^{۲+}}{۱۰^{۶}\,g\,\text{آب سخت}} \times \frac{۱\,mol\,Ca^{۲+}}{۴۰\,g\,Ca^{۲+}} \times \frac{۲\,mol\,\text{صابون}}{۱\,mol\,Ca^{۲+}} \times \frac{۲۳۶\,g\,\text{صابون}}{۱\,mol\,\text{صابون}} = ۴/۷۲\,g$$

انگار از ۴/۷۲ گرم صابون، تمام آن واکنش داده و به صورت رسوب درآمده است، یعنی ۱۰۰٪ آن

روش دوم:

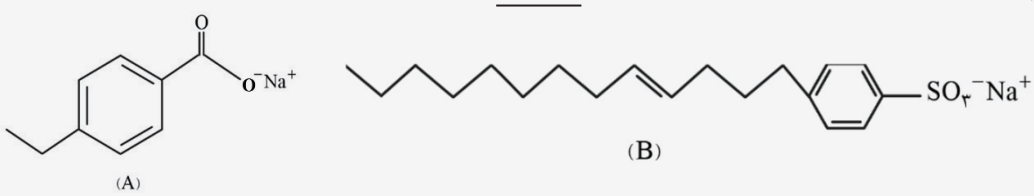
$$Ca^{۲+}\,\text{جرم} = ۲۰۰\,g\,\text{آب} \times \frac{۲۰۰۰\,g\,Ca^{۲+}}{۱۰^{۶}\,g\,\text{آب}} = ۰/۴\,g\,Ca^{۲+}$$

$$۲RCOONa \sim ۱Ca^{۲+}$$

فرض می‌کنیم x درصد از صابون وارد واکنش شده است:

$$\frac{\text{جرم} \times \frac{x}{۱۰۰}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{صابون}}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{یون کلسیم}}} \rightarrow \frac{۴/۷۲ \times \frac{x}{۱۰۰}}{۲ \times ۲۳۶} = \frac{۰/۴}{۱ \times ۴۰} \rightarrow x = ۱۰۰$$

۲ . کدام مطلب زیر در ارتباط با ترکیب‌های A و B، نادرست است؟



(A) (B)

آ) اگر در ترکیب A، گروه COO^- را با گروه SO_3^- جایگزین کنیم، یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی به دست می‌آید.

ب) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار عنصرهای سازنده ترکیب B برابر با ۵/۸ است.

پ) ترکیب B، برخلاف ترکیب A، با محلول منیزیم کلرید واکنش می‌دهد.

ت) بخش آب‌گریز ترکیب A شامل ۱۷ اتم است.

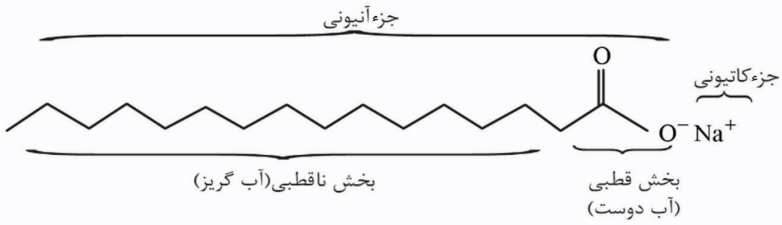
۱) آ، ب ۲) آ، پ ۳) ب، ت ۴) پ، ت

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی

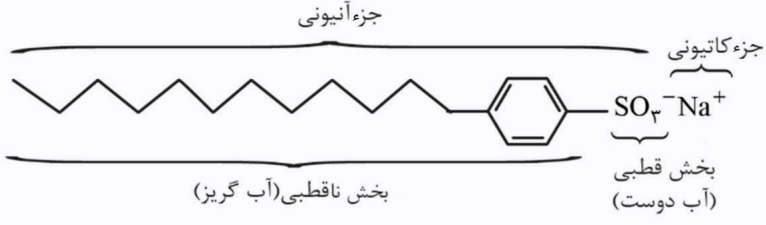
درسنامه

در این‌جا می‌خواهیم شباهت‌ها و تفاوت‌های پاک‌کننده‌های صابونی با فرمول کلی RCOONa و پاک‌کننده‌های غیرصابونی با فرمول کلی $RC_۶H_۴SO_۳Na$ را بررسی کنیم!

پاک‌کنندهٔ صابونی:



پاک‌کنندهٔ غیرصابونی:



شباهت‌ها: ۱- هر دو دارای اجزای آنیونی و کاتیونی هستند و در جزء آنیونی هر دو پاک‌کننده، بخش‌های قطبی و ناقطبی وجود دارد.

۲- نحوه عملکرد هر دو نوع پاک‌کننده بر اساس برهم‌کنش‌های بین‌ذره‌ای است.

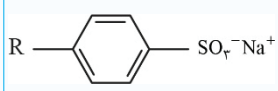
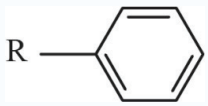
۳- سطح بیرونی چربی و روغن هنگامی که در آب به وسیله این دو پاک‌کننده پایدار می‌شوند، دارای بار منفی هستند.

تفاوت‌ها: ۱- بخش قطبی در پاک‌کننده‌های صابونی ($-CO_2^-$) و در پاک‌کننده‌های غیرصابونی گروه‌های دیگری مانند ($-SO_3^-$) می‌باشد.

۲- صابون‌ها نمک اسیدهای چرب دراز زنجیر هستند که منشأ طبیعی (گیاهی یا جانوری) دارند ولی پاک‌کننده‌های غیرصابونی از واکنش مواد پتروشیمیایی مانند بنزن طی واکنش‌های پیچیده در صنعت تولید می‌شوند.

۳- قدرت پاک‌کنندگی پاک‌کننده‌های غیرصابونی بیشتر از پاک‌کننده‌های صابونی است.

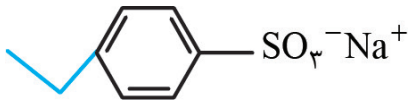
۴- پاک‌کننده‌های غیرصابونی برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی در آب‌های سخت، قدرت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند.

نوع پاک‌کننده	فرمول کلی	بخش ناقطبی (آب‌گریز، چربی‌دوست)	بخش قطبی (آب‌دوست، چربی‌گریز)	گروه عاملی موجود در جزء آنیونی	عملکرد در آب سخت
صابونی	$R-COO^-Na^+$	R	$-COO^-$	$-CO_2^-$ (کربوکسیلات)	رسوب می‌دهد و خاصیت پاک‌کنندگی آن کاهش می‌یابد.
غیرصابونی			$-SO_3^-$	$-SO_3^-$ (سولفونات)	رسوب نمی‌دهد و خاصیت پاک‌کنندگی آن حفظ می‌شود.

عبارت‌های «آ» و «پ» نادرست هستند.

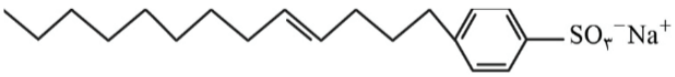
بررسی همه عبارت‌ها:

آ با جایگزین کردن گروه COO^- با گروه SO_3^- در ترکیب A، به ساختار زیر می‌رسیم.



دقت کنید که چون تعداد اتم‌های کربن در گروه هیدروکربنی متصل به حلقه بنزنی در این ساختار کم است، بخش ناقطبی (آب‌گریز) ترکیب حاصل نمی‌تواند با چربی‌ها برهم‌کنش موثری داشته باشد و در نتیجه پاک‌کننده غیرصابونی به‌شمار نمی‌رود.

ب



(B)

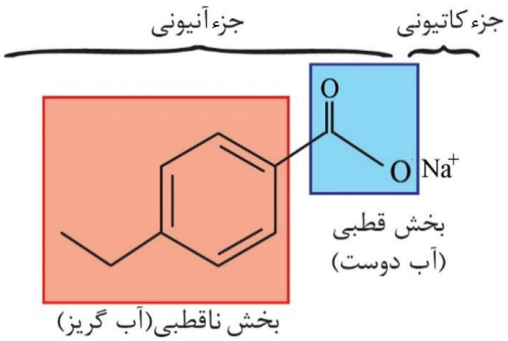
$\Rightarrow C_{13}H_{25}C_6H_4SO_3Na$ یا $C_{19}H_{29}SO_3Na$

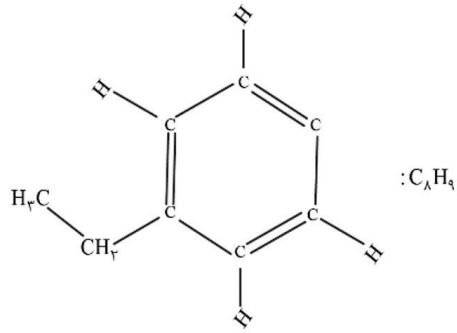
بنابراین نسبت موردنظر برابر است با:

$$\frac{\text{شمار اتم‌های H}}{\text{شمار عنصرها}} = \frac{29}{5} = 5/8$$

پ پاک‌کننده‌های غیرصابونی (ترکیب B) قدرت پاک‌کنندگی بیشتری نسبت به صابون دارند و در آب‌های سخت نیز خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند، زیرا گروه $-SO_3^-$ (برخلاف گروه $-CO_2^-$) با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} موجود در آب سخت، رسوب نمی‌دهد، بنابراین می‌توان گفت که ترکیب B، با محلول منیزیم کلرید واکنش نمی‌دهد.

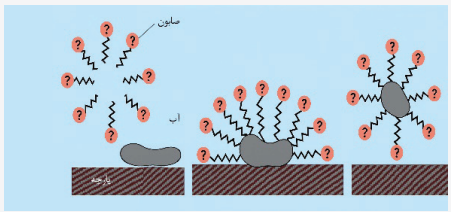
ت در بخش آب‌گریز ترکیب A، ۱۷ اتم وجود دارد.





۳ . با توجه به شکل زیر که مراحل پاک شدن لکه‌ای با یک صابون جامد سیرشده را نشان می‌دهد، کدام عبارت درست است؟

$(H=1, C=12, O=16, Na=23, K=39 : g.mol^{-1})$



۱) قسمت مشخص شده، کاتیون Na^+ را نشان می‌دهد.

۲) لکه می‌تواند اسید چربی با فرمول C_3H_7COOH باشد.

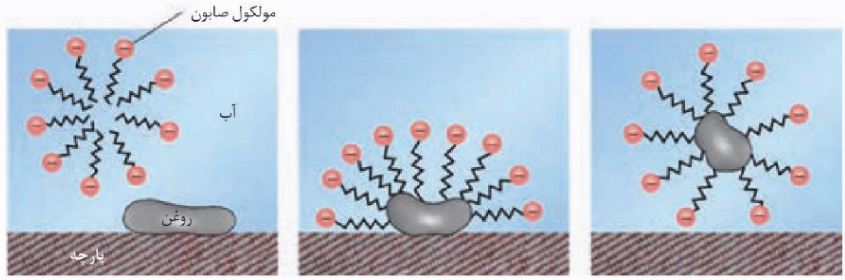
۳) اگر در ساختار صابون، شمار پیوندهای $C-C$ برابر با ۱۵ باشد جرم مولی آن ۲۴۲ گرم بر مول است.

۴) با افزودن مقداری کلسیم کلرید جامد به آب، شمار جاذبه‌های میان بخش آب‌گریز صابون با لکه کاهش می‌یابد.

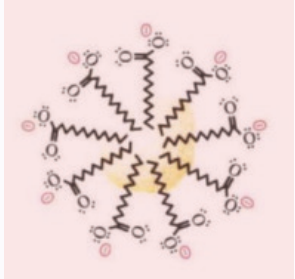
پاسخ: گزینه ۴ متوسط | حفظی

درسنامه

با انحلال صابون در آب، جزء کاتیونی آن جدا شده و نقشی در پاک‌کنندگی آن ندارد، در نتیجه تنها $RCOO^-$ در پاک‌کنندگی لکه‌های چربی وارد می‌شود. چگونگی پاک‌کنندگی چربی توسط صابون به صورت زیر است:



الف) هنگامی که صابون وارد آب می‌شود، از سر آب‌دوست خود $(-COO^-)$ با مولکول‌های آب، جاذبهٔ یونی - دوقطبی برقرار کرده و در آب حل می‌شود.



ب) صابون از سر چربی‌دوست (آب‌گریز) خود $(-R)$ با مولکول‌های چربی، جاذبهٔ واندروالسی ایجاد می‌کند.

پ) مولکول‌های صابون همانند پلی میان آب و چربی قرار می‌گیرند و ذره‌های چربی را از سطح موردنظر جدا کرده و در آب پخش می‌کنند. به این ترتیب صابون می‌تواند مخلوط پایداری از چربی‌ها را در آب ایجاد کند.

تذکر: بخش ناقطبی صابون با چربی جاذبه برقرار می‌کند، در نتیجه این بخش صابون، داخل قطره چربی قرار می‌گیرد و از آن‌جا که بخش قطبی صابون که دارای بار منفی است، با آب جاذبه برقرار می‌کند، سطح بیرونی قطره چربی دارای بار منفی می‌شود.

با افزودن کلسیم کلرید $(CaCl_2)$ به آب، شماری از مولکول‌های صابون با یون‌های Ca^{2+} موجود در آب، مطابق معادله زیر واکنش داده و رسوب

تشکیل می‌دهند. $2RCOONa(aq)+CaCl_2(aq)\rightarrow (RCOO)_2Ca(s)+2NaCl(aq)$

بنابراین شمار مولکول‌های صابونی که می‌توانند با لکه جاذبه برقرار کنند، کاهش یافته و در نهایت قدرت پاک‌کنندگی صابون در آب، کاهش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ همان‌طور که می‌دانید، **با حل شدن صابون در آب، جزء کاتیونی جدا شده و نقشی در پاک‌کنندگی آن ندارد.** قسمت مشخص شده، بخش قطبی (آب‌دوست) صابون $(-COO^-)$ و بار **منفی** را نشان می‌دهد.

۲ این لکه، مولکولی ناقطبی است و می‌تواند یک اسید چرب باشد، اما دقت کنید که **اسیدهای چرب، کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر کربنی بلند هستند؛** بنابراین C_2H_7COOH اسید چرب محسوب **نمی‌شود!**

۳ اگر شمار اتم‌های کربن در ساختار صابون موردنظر را n در نظر بگیریم، با توجه به این که زنجیر هیدروکربنی آن سیر شده و حالت فیزیکی آن جامد است، فرمول شیمیایی آن به صورت $C_nH_{2n-1}O_2Na$ بوده و شمار پیوندهای $C-C$ در ساختار صابون، برابر با $n-1$ می‌باشد؛ بنابراین داریم:

$$\text{فرمول شیمیایی صابون: } C_{16}H_{31}O_2Na \rightarrow \text{جرم مولی صابون} = 16(12)+31(1)+2(16)+23 = 278\,g.mol^{-1} \rightarrow n=16 \rightarrow \text{۱۵ پیوند } C-C$$

۴ . دانش‌آموزی از نوعی صابون آنزیم‌دار برای پاک کردن لکهٔ چربی بر روی نوعی پارچه متشکل از الیاف پلی‌استری و نخی استفاده کرده است. کدام گزینه عبارت زیر را به درستی کامل می‌کند؟

«با افزایش .....، ..... کاهش می‌یابد.»

۱) دمای آب ـ قدرت پاک‌کنندگی صابون

۲) درصد جرمی آنزیم در صابون ـ درصد باقی‌مانده از لکهٔ چربی

۳) درصد پلی‌استر در پارچه ـ میزان چسبندگی لکهٔ چربی به پارچه

۴) جرم صابون مصرفی ـ درصد لکهٔ چربی پاک شده

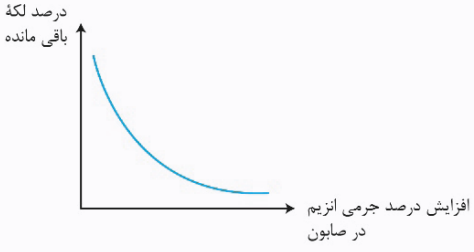
پاسخ: گزینه ۲ ساده | حفظی

درسنامه

عوامل موثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون:

قدرت پاک‌کنندگی صابون	هر چقدر که صابون درصد چربی بیشتری را پاک کند، قدرت بیشتری دارد.
	با افزایش مقدار صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون افزایش پیدا می‌کند.
	استفاده از پارچه نخی به جای پلی‌استری، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد. زیرا ذرات چربی با پارچه پلی‌استری پیوند قوی‌تری برقرار می‌کنند.
	هرچه آب سختی بیشتری داشته باشد، قدرت پاک‌کنندگی صابون کاهش پیدا می‌کند. زیرا یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت با صابون تشکیل رسوب می‌دهند.
	اضافه کردن آنزیم به صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

با افزایش درصد جرمی آنزیم در صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون افزایش یافته و در نتیجه درصد لکه چربی باقی‌مانده روی پارچه کم‌تر می‌شود.



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ با افزایش دمای آب، قدرت پاک‌کنندگی صابون افزایش می‌یابد.

۳ صابون لکه چربی را از روی پارچه نخی بهتر از پارچه پلی‌استر پاک می‌کند؛ زیرا میزان چسبندگی چربی این پارچه کم‌تر از پارچه پلی‌استری است.

پارچهٔ پلی‌استر > پارچهٔ نخی :درصد لکه باقی‌مانده

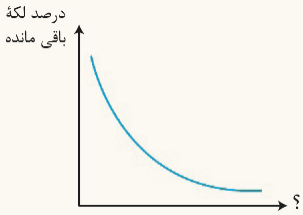
بنابراین می‌توان گفت که با افزایش درصد جربی پلی‌استر در پارچه، میزان چسبندگی لکه چربی به پارچه افزایش می‌یابد.

موشکافی میزان قطبیت پلی‌استر کم‌تر از نخ است و پارچه‌های پلی‌استری نسبت به پارچه‌های نخی آب کم‌تری جذب می‌کنند، یعنی امکان نفوذ مولکول‌های آب و صابون و پاک کردن چربی‌ها از سطح پارچه‌های پلی‌استر سخت‌تر است.

۴ با افزایش مقدار صابون، درصد لکه چربی پاک شده از روی پارچه افزایش و درصد لکه چربی باقی‌مانده کاهش می‌یابد.

تست‌درتست **با توجه به جدول زیر، چه تعداد از عبارت‌های پیشنهاد شده، نادرست است؟**

نوع صابون	نوع پارچه	دما ($^{\circ}C$)	درصد لکه باقی‌مانده
صابون بدون آنزیم	نخی	۳۰	۲۵
صابون بدون آنزیم	نخی	۴۰	X
صابون آنزیم‌دار	نخی	۳۰	۱۰
صابون آنزیم‌دار	نخی	۴۰	۰
صابون آنزیم‌دار	پلی‌استر	۴۰	۱۵



آ) مقدار X در این جدول می‌تواند برابر ۳۰ باشد.

ب) استفاده از آنزیم برخلاف دمای آب تأثیری بر قدرت پاک‌کنندگی صابون ندارد.

پ) در نمودار روبه‌رو محور افقی می‌تواند دما یا درصد پلی‌استر موجود در پارچه باشد.

ت) میزان چسبندگی لکه‌های چربی بر روی پارچه نخی کمتر از پارچه پلی‌استری است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | حفظی

عبارت‌های «آ»، «ب» و «پ» نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

آ با افزایش دما در صورت ثابت بودن سایر عوامل موثر بر میزان پاک‌کنندگی، قدرت پاک‌کنندگی افزایش می‌یابد. بنابراین درصد لکه باقی‌مانده در ردیف دوم نسبت به ردیف اول کمتر است.

ب نوع پارچه، دما، نوع آب، استفاده از آنزیم و مقدار صابون بر روی قدرت پاک‌کنندگی صابون تأثیرگذار است.

پ در نمودار داده شده با افزایش کمیت محور افقی، درصد لکه باقی‌مانده روی پارچه کاهش می‌یابد. بنابراین محور افقی می‌تواند مربوط به دما، مقدار صابون و درصد آنزیم باشد.

توجه: با افزایش درصد پلی‌استر موجود در پارچه قدرت پاک‌کنندگی صابون کاهش می‌یابد.

ت با توجه به اینکه در دمای 40° درصد لکه باقی‌مانده بر روی پارچه نخی کم‌تر از درصد لکه باقی‌مانده بر روی پارچه پلی‌استری است، می‌توان نتیجه گرفت که میزان چسبندگی چربی بر روی پارچه نخی کم‌تر از پارچه پلی‌استری است.

۵. کدام مطلب درست است؟

۱) گاز آمونیاک برخلاف پتاسیم هیدروکسید جامد، یک باز آرنیوس محسوب می‌شود.

۲) نخستین عنصر جدول دوره‌ای که حل شدن اکسید آن در آب، موجب افزایش غلظت یون هیدروکسید می‌شود، جزو عناصر دستهٔ p است.

۳) اگر افزودن اکسید عنصر M به آب، موجب افزایش غلظت یون هیدرونیوم شود، M به یقین متعلق به گروه چهاردهم جدول دوره‌ای نیست.

۴) مطابق یافته‌های تجربی آرنیوس، محلول اسیدها و بازها رسانای برق هستند و میزان رسانایی الکتریکی آن‌ها با یکدیگر یکسان نیست.

پاسخ: گزینه ۴ ساده | حفظی ، مفهومی

آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.

آرنیوس بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی کار می‌کرد. یافته‌های تجربی او نشان داد که محلول اسیدها و بازها رسانای جریان الکتریکی هستند، هر چند میزان رسانایی آن‌ها با یکدیگر یکسان نیست.

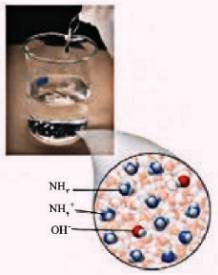
دستاوردها و پژوهش‌های آرنیوس:
- نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.
- بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی کار می‌کرد.
- نشان داد که محلول اسیدها و بازها رسانای برق هستند ولی میزان رسانایی آن‌ها با یک‌دیگر یکسان نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ **پتاسیم هیدروکسید جامد ($KOH(s)$) و گاز آمونیاک ($NH_3(g)$)، هردو باز آرنیوس محسوب می شود.** زیرا با افزودن هر دو آن‌ها به آب، غلظت یون هیدروکسید (OH^-) افزایش می‌یابد.

موشکافی ۱- ترکیب‌های یونی مانند NaOH ، LiOH و KOH که در ساختار خود یون هیدروکسید دارند، باز آرنیوس به حساب می‌آیند؛ زیرا با حل شدن آن‌ها در آب، غلظت یون $OH^-(aq)$ در آب افزایش می‌یابد.

۲- با حل شدن آمونیاک در آب، یون‌های NH_4^+ و OH^- تولید می‌شود. در ضمن انحلال آمونیاک در آب به صورت مولکولی ـ یونی است؛ یعنی همه مولکول‌های آن در آب، به یون تبدیل نمی‌شوند.

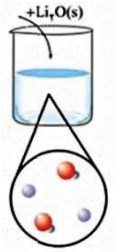


$$NH_3(g)+H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq)+OH^-(aq)$$

نکته

	اسید آرنیوس	باز آرنیوس
تعریف	ماده‌ای که با حل شدن در آب، غلظت یون H^+ را افزایش می‌دهد.	ماده‌ای که با حل شدن در آب، غلظت یون OH^- را افزایش می‌دهد.
نمونه‌های مهم	۱- هیدروژن هالیدها: HF ، HCl و HBr ۲- HNO_3 ، H_2SO_4 و ... ۳- برخی اکسیدهای نافلزی: $CO_2(g)$ ، $SO_3(g)$ و $N_2O_5(s)$	۱- هیدروکسیدهای فلزهای گروه‌های اول و دوم: NaOH ، KOH ، $Ca(OH)_2$ و $Ba(OH)_2$ ۲- آمونیاک (NH_3) ۳- برخی اکسیدهای فلزی: $Li_2O(s)$ ، $Na_2O(s)$ و $BaO(s)$
رنگ کاغذ pH در محلول آن‌ها	سرخ	آبی

۲ نخستین عنصری که اکسید آن با انحلال در آب، باعث افزایش غلظت یون OH^- شد و در واقع اکسید بازی محسوب می‌شود، فلز لیتیم ($_{3}Li$) است، زیرا Li_2O یک اکسید فلزی (اکسید بازی) است که مطابق معادله زیر در آب حل می‌شود.



$$Li_2O(s)+H_2O(l)\rightarrow \underbrace{2Li^+(aq)+2OH^-(aq)}_{2LiOH(aq)}$$

مشخص است که با انحلال صرفا در آب، غلظت یون OH^- افزایش می‌یابد، اما دقت کنید که **لیتیم، جزو عنصرهای دستهٔ s جدول دوره‌ای می‌باشد.**

۳ کربن ($_{6}C$)، عنصری از گروه ۱۴ جدول دوره‌ای است که اکسید سنگین‌تر آن یعنی **کربن دی‌اکسید** (CO_2)، **اسید آرنیوس محسوب می‌شود و با حل شدن در آب، غلظت یون H_3O^+ را افزایش می‌دهد.**

موشکافی ۱- در شیمی دهم خواندیم باران معمولی (طبیعی) به دلیل وجود کربن دی‌اکسید محلول در آن، اندکی اسیدی است. اسید موجود در باران طبیعی، کربنیک اسید (H_2CO_3) است.

$$CO_2(g)+H_2O(l)\rightleftharpoons H_2CO_3(aq)$$

۲- سبک‌ترین اکسید کربن یعنی کربن مونوکسید (CO) در آب به صورت مولکولی حل شده و خاصیت اسیدی ندارد!

۶ . کدام عبارت درست است؟

۱) اوره و ماده‌ای که به عنوان ضدیخ به کار می‌رود، در آب محلول بوده و شمار جفت الکترون‌های پیوندی در مولکول آن‌ها یکسان است.

۲) در ساختار روغن زیتون همانند مولکول‌های موجود در عسل، بیش از یک گروه هیدروکسیل وجود دارد.

۳) مقدار اکسیژن لازم برای سوختن کامل یک مول وازلین، بیش از سه برابر مقدار اکسیژن لازم برای سوختن کامل یک مول بنزین است.

۴) آلاینده‌ها مواد سمی هستند که فارغ از ساختار و رفتار متفاوت ذره‌های سازنده، بیش از مقدار طبیعی در یک محیط وجود دارند.

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | حفظی، محاسباتی

معادله شیمیایی واکنش‌های سوختن کامل وازلین ($C_{25}H_{52}$) و بنزین (C_8H_{18}) به صورت زیر است:

$$(I)\ 2C_{25}H_{52}(s)+76O_2(g)\rightarrow 50CO_2(g)+52H_2O(g)$$

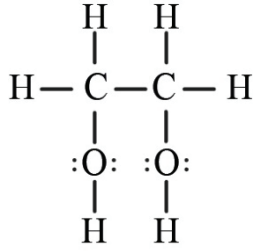
$$(II)\ 2C_8H_{18}(l)+25O_2(g)\rightarrow 16CO_2(g)+18H_2O(g)$$

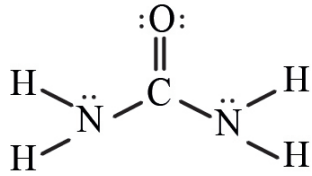
بنابراین برای سوختن کامل یک مول بنزین و یک مول وازلین به ترتیب به $\frac{76}{2}=38$ و $\frac{25}{2}=12/5$ مول گاز اکسیژن (O_2) نیاز است.

$$\frac{\text{مول } O_2 \text{ مورد نیاز در واکنش (I)}}{\text{مول } O_2 \text{ مورد نیاز در واکنش (II)}}=\frac{38}{12/5}>3$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ اتیلن گلیکول (ضد یخ) یک دی‌الکل (الکل دوعاملی) با فرمول $C_2H_6O_2$ است. این ماده به دلیل داشتن گروه عاملی هیدروکسیل ($-OH$) می‌تواند با مولکول‌های خود و آب پیوند هیدروژنی برقرار کند. اوره هم دارای دو گروه $-NH_2$ است و می‌تواند با مولکول‌های خود و آب پیوند هیدروژنی تشکیل دهد. در ضمن اوره به خانواده آمیدها تعلق دارد.





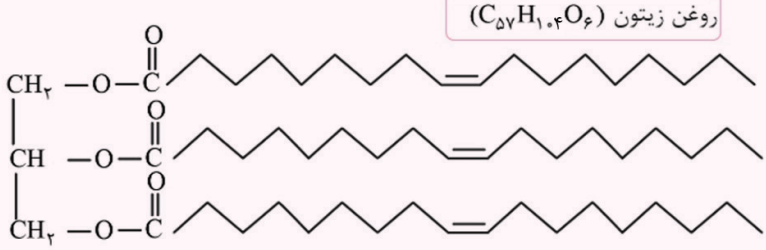
اتیلن گلیکول ($C_2H_6O_2$) که به عنوان ضد یخ کاربرد دارد، همانند اوره ($CO(NH_2)_2$)، قطبی بوده، توانایی تشکیل پیوندهای هیدروژنی بین مولکول‌های خود را دارد و در آب، محلول است، اما دقت کنید **شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار اتیلن گلیکول، برابر با ۹ و در اوره، برابر با ۸ می‌باشد.**

۲ عسل حاوی مولکول‌های قطبی (قندها) است که در ساختار آن‌ها شمار قابل توجهی گروه هیدروکسیل ($-OH$) وجود دارد، اما **در ساختار روغن زیتون، گروه هیدروکسیل وجود ندارد!**

موشکافی

روغن زیتون را می‌توان یک استر سه عاملی (استری که سه گروه عاملی $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-$ دارد.) دانست که در آن، بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه داشته و این مولکول در مجموع، ناقطبی بوده و در حلال‌های ناقطبی مانند هگزان حل می‌شود. ساختار این ماده به صورت زیر است:

روغن زیتون ($C_{57}H_{104}O_6$)



الکل سازنده: $C_3H_8O_3$

اسید چرب سازنده: $C_{18}H_{34}O_2$

۴ بر اساس تعریف کتاب درسی، آلاینده‌ها، موادی هستند که بیش ازمقدار طبیعی در یک محیط، نمونه ماده یا یک جسم وجود دارند. گل‌ولای، گردوغبار هوا، لکه‌های چربی و مواد غذایی روی لباس‌ها و پوست بدن، جزو آلاینده‌ها به حساب می‌آیند؛ بنابراین آلاینده‌ها لزوماً سمی نیستند.

۷ . در جدول زیر برخی ویژگی‌های انواع مخلوط‌ها، با یکدیگر مقایسه شده است. چه تعداد از خانه‌های ۱۲ گانهٔ این جدول باید اصلاح شوند؟

نوع مخلوط / ویژگی	محلول	سوسپانسیون	کلوئید
ذره‌های سازنده	مولکول‌ها و یون‌ها	ذرات درشت ماده	توده‌های مولکولی و یونی
پایداری	پایدار	ته‌نشین می‌شود	ناپایدار
رفتار در برابر نور	جذب نور	پخش نور بیشتر	پخش نور کمتر
همگن بودن	همگن	ناهمگن	ناهمگن

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱ ساده | حفظی

نکته ۱- مخلوط‌ها نقش بسیار پررنگی در زندگی ما دارند، به طوری‌که اغلب موادی که در زندگی روزانه با آن‌ها سروکار داریم، از مخلوط دو یا چند ماده تشکیل شده‌اند.

مثال‌هایی از مخلوط‌ها: آب دریا، نوشیدنی‌ها، انواع رنگ‌ها، سرامیک‌ها، چسب‌ها، شوینده‌ها و داروها.

۲- مخلوط ها را می‌توان به سه دسته محلول، سوسپانسیون و کلوئید تقسیم کرد. این سه دسته خواص متفاوتی دارند:

ویژگی / نوع مخلوط	محلول (مانند کات‌کبود در آب)	کلوئید (مانند سس مایونز یا رنگ پوششی)	سوسپانسیون (مانند شربت معده)
رفتار در برابر نور	عدم پخش نور (عبور نور)	پخش نور کم‌تر	پخش نور بیشتر
همگن بودن	همگن	ناهمگن	ناهمگن
پایداری	پایدار (ته‌نشین نمی‌شود)	پایدار (ته‌نشین نمی‌شود)	ناپایدار (ته‌نشین می‌شود)
ذره‌های سازنده	یون‌ها یا مولکول‌ها	توده‌های مولکولی و یونی	ذره‌های ریز ماده

۳- مخلوط آب و روغن ناهمگن بوده و دارای دو قسمت آب و روغن به صورت مجزا است. اما با افزودن مقداری صابون به این مخلوط، یک مخلوط پایدار (نوعی کلوئید) ایجاد می‌شود که به ظاهر همگن است. در این مخلوط، قطره‌های روغن توسط مولکول‌های صابون احاطه شده و در آب پخش می‌شوند.

۴- با توجه به ویژگی‌های انواع مخلوط‌ها، کلوئیدها را می‌توان پلی بین محلول‌ها و سوسپانسیون‌ها در نظر گرفت.

آفرود محلول‌ها نور را به‌طور کامل از خود عبور می‌دهند و نور در آن‌ها پخش نمی‌شود. سوسپانسیون‌ها نور را از خود عبور نمی‌دهند و پخش نور در آن‌ها به‌صورت کامل انجام می‌شود. اما کلوئیدها بخشی از نور را از خود عبور داده و بخشی دیگر از آن را پخش می‌کنند و پخش نور در آن‌ها کمتر از سوسپانسیون‌ها است.

با توجه به نکته بالا خانه‌های نادرست در جدول داده شده به صورت زیر هستند:

(۱): ذره‌های سازنده سوسپانسیون ← **ذرات ریز ماده**

(۲): پایداری کلوئید ← **پایدار** (ته‌نشین نمی‌شود.)

(۳): رفتار محلول در برابر نور ← **عبور نور** (نه جذب نور!)

۸ . کدام عبارت(ها)، در ارتباط با پاک‌کننده‌های خورنده به درستی بیان شده است؟

آ) این پاک‌کننده‌ها به جای بر هم‌کنش با ذره‌های آلاینده، با آن‌ها واکنش شیمیایی می‌دهند.

ب) این پاک‌کننده‌ها با آلاینده‌ها واکنش شیمیایی داده و آن‌ها را به فراورده‌هایی تبدیل می‌کنند که با آب شسته می‌شوند.

پ) موادی مانند جوهر نمک (کلریک اسید) و سفیدکننده‌ها، پاک‌کننده‌هایی هستند که از نظر شیمیایی فعال بوده و خاصیت خورندگی دارند.

ت) برای زدودن رسوب تشکیل‌شده بر روی دیواره کتری، لوله‌ها، آب‌راه‌ها و دیگ‌های بخار از پاک‌کننده‌های خورنده استفاده می‌شود.

۱) آ، ب، پ ۲) ب، ت ۳) آ، ت ۴) ب

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | حفظی

عبارت‌های «ب» و «ت» درست هستند.

بررسی همه عبارت‌ها:

آ و ب پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی تنها بر اساس برهم‌کنش بین ذره‌ها عمل می‌کنند، اما پاک‌کننده‌های خورنده علاوه بر این برهم‌کنش‌ها، با آلاینده‌ها واکنش هم می‌دهند.

عملکرد پاک‌کننده‌ها: صابونی و غیرصابونی ← برهم‌کنش بین ذره‌ها؛ خورنده ← برهم‌کنش بین ذره‌ها و واکنش با آلاینده‌ها

موادی مانند هیدروکلریک اسید (جوهر نمک)، سدیم هیدروکسید (سود سوزآور) و سفیدکننده‌ها از جمله پاک‌کننده‌های خورنده هستند.

SanjeshCloud

موشکافی

۱ برای باز کردن لوله‌هایی که با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده‌اند، می‌توان از محلول غلیظ سدیم‌هیدروکسید استفاده کرد. فراورده چنین واکنشی محلول در آب بوده و همچنین، خود نوعی پاک‌کننده است که در آب حل می‌شود و می‌تواند چربی‌های اضافی را بزداید.

$$RCOOH(s)+NaOH(aq)\rightarrow RCOONa(aq)+H_2O(l)$$

۲ به‌طور کلی، شوینده‌های خورنده، رسوب‌های به جای مانده را به مواد محلول در آب یا گازی‌شکل تبدیل می‌کنند و از این راه سبب جرم‌گیری می‌شوند.

۳ اگر موادی که سبب گرفتگی لوله‌ها و مجاری می‌شوند، خاصیت بازی داشته باشند (مانند $CaCO_3$)، برای زدودن آن‌ها از محلول غلیظ هیدروکلریک اسید استفاده می‌کنند:

$$2HCl(aq)+CaCO_3(s)\rightarrow CaCl_2(aq)+H_2O(l)+CO_2(g)$$

در واقع فرآورده‌های حاصل از واکنش پاک‌کننده‌های خورنده با آلاینده‌ها، به راحتی با آب شسته می‌شوند.

پ دقت کنید که جوهر نمک همان هیدروکلریک اسید $(HCl(aq))$ است.

ت رسوب تشکیل شده بر روی دیواره کتری، لوله‌ها، آب‌راه‌ها و دیگ‌های بخار، با صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی زدوده نمی‌شود. برای زدودن آن‌ها به پاک‌کننده‌های خورنده نیاز است که بتوانند با آن‌ها واکنش شیمیایی دهند و آن‌ها را به فراورده‌هایی تبدیل کنند که با آب شسته شوند.

۹ . کدام مورد نادرست است؟

۱) مجموع غلظت یون‌های حاصل از حل شدن ۰/۲۵ مول دی‌نیتروژن پنتااکسید در ۵ لیتر آب برابر با ۰/۲ مولار است.

۲) از حل کردن ۰/۸ مول لیتیم اکسید در ۲ لیتر آب، ۰/۸ مول یون هیدروکسید تولید می‌شود.

۳) با حل شدن ۰/۴ مول باریم اکسید جامد در ۴ لیتر آب، ۱/۲ مول یون تولید می‌شود.

۴) غلظت مولی یون هیدرونیوم حاصل از حل شدن ۰/۰۴ مول گاز گوگرد تری‌اکسید در ۵ لیتر آب، بیشتر از 8×10^{-3} مولار است.

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | حفظی ، مهارتی

ابتدا معادله انحلال گوگرد تری‌اکسید (SO_3)، دی نیتروژن پنتااکسید (N_2O_5)، لیتیم اکسید (Li_2O) و باریم اکسید (BaO) را می‌نویسیم:

• با حل شدن هر مول SO_3 در آب، بیشتر از یک مول H^+ و کم‌تر از یک مول SO_4^{2-} در مجموع کم‌تر از ۲ مول یون تولید می‌شود.

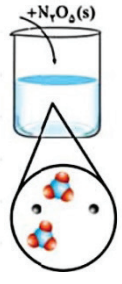


$$SO_3(g)+H_2O(l)\rightarrow 2H^+(aq)+SO_4^{2-}(aq)$$

$$H_2SO_4(aq)\rightarrow H^+(aq)+HSO_4^-(aq)$$

$$HSO_4^-(aq)\rightleftharpoons H^+(aq)+HSO_4^{2-}(aq)$$

• با حل شدن هر مول N_2O_5 در آب ۲ مول H^+ و ۲ مول NO_3^- (در مجموع ۴ مول یون) تولید می‌شود.



$$N_2O_5(s)+H_2O(l)\rightarrow \underbrace{2H^+(aq)+2NO_3^-(aq)}_{2HNO_3(aq)}$$

• با حل شدن هر مول اکسید فلز قلیایی در آب، ۲ مول کاتیون آن فلز و ۲ مول یون هیدروکسید (در مجموع ۴ مول یون) حاصل می‌شود.



$$Li_2O(s)+H_2O(l)\rightarrow \underbrace{2Li^+(aq)+2OH^-(aq)}_{2LiOH(aq)}$$

• با حل شدن هر مول اکسید فلز قلیایی خاکی در آب، ۱ مول کاتیون آن فلز و ۲ مول یون هیدروکسید (در مجموع ۳ مول یون) حاصل می‌شود.



$$BaO(s)+H_2O(l)\rightarrow \underbrace{Ba^{2+}(aq)+2OH^-(aq)}_{Ba(OH)_2(aq)}$$

حال بیایید گزینه‌ها را به ترتیب بررسی کنیم:

۱ بر اثر انحلال هر مول N_2O_5 در آب، دو مول یون هیدرونیوم (H^+) و دو مول یون نیترات (NO_3^-) (در مجموع ۴ مول یون) حاصل می‌شود:

$$0/25\,mol\,N_2O_5\times\frac{4\,mol\,\text{یون}}{1\,mol\,N_2O_5}=1\,mol\,\text{یون}$$

$$\text{غلظت مولی یون‌ها}=\frac{\text{مول}}{\text{حجم}}=\frac{1}{5}=0/2\,mol.L^{-1}$$

۲ بر اثر انحلال هر مول Li_2O در آب، دو مول یون هیدروکسید (OH^-) حاصل می‌شود.

$$0/8\,mol\,Li_2O\times\frac{2\,mol\,OH^-}{1\,mol\,Li_2O}=1/6\,mol\,OH^-$$

۳ بر اثر انحلال هر مول BaO در آب، دو مول یون هیدروکسید (OH^-) و یک مول یون باریم (Ba^{2+}) (در مجموع ۳ مول یون) حاصل می‌شود:

$$0/4\,mol\,BaO\times\frac{3\,mol\,\text{یون}}{1\,mol\,BaO}=1/2\,mol\,\text{یون}$$

۴ بر اثر انحلال هر مول SO_3، کم‌تر از ۲ مول یون هیدرونیوم (H^+) حاصل می‌شود در واقع شمار یون هیدرونیوم تولید شده کمی بیشتر از یک مول است:

$$\underbrace{\frac{0/04\times1}{5}}_{8\times10^{-3}}<\left[H_3O^+\right]<\underbrace{\frac{0/04\times2}{5}}_{16\times10^{-3}}=$$

موشکافی سولفوریک اسید دارای دو هیدروژن اسیدی است و می‌تواند طی دو مرحله یونش یابد که مرحله اول یونش آن، کامل و مرحله دوم آن، تعادلی است:

$$SO_3+H_2O\rightarrow H_2SO_4$$

$$\text{مرحله اول: } H_2SO_4\rightarrow HSO_4^-+H^+$$

$$\text{مرحله دوم: } HSO_4^-\rightleftharpoons SO_4^{2-}+H^+$$

در مرحله اول، ۱ مول H_2SO_4 به ۱ مول H^+ و ۱ مول HSO_4^- تبدیل می‌شود و در مرحله دوم، ۱ مول HSO_4^- حاصل از مرحله قبلی، کمی

تا قسمتی! به SO_4^{2-} و H^+ تبدیل می‌شود؛ یعنی از هر ۱ مول HSO_4^-، کم‌تر از ۱۲ مول یون به دست می‌آید. با این تفاسیر می‌توان نتیجه گرفت که بر اثر انحلال ۱ مول SO_3 در آب، کم‌تر از ۲ مول یون تولید می‌شود. همچنین بر اثر انحلال ۱ مول SO_3، بیشتر از ۱ مول H^+ حاصل می‌شود؛ بنابراین بر اثر انحلال ۰/۰۴ مول SO_3، بیشتر از ۰/۰۴ مول H^+ به دست آمده و غلظت مولی این یون در محلول حاصل، بیشتر از $[H^+]=\frac{0/04}{5}=8\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$ خواهد بود.

۱۰. کدام عبارت‌ها در ارتباط با واکنش زیر نادرست هستند؟

$NaAl(OH)_4$ + گاز X ← آب + مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید

آ) مخلوط موجود در واکنش‌دهنده‌ها، پودری شکل بوده و یک پاک‌کننده غیرصابونی جامد به‌شمار می‌رود.

ب) پس از موازنه معادله واکنش، ضریب آب، سه برابر ضریب فراورده یونی است.

پ) سطح انرژی فراورده‌های این واکنش، پایین‌تر از سطح انرژی واکنش‌دهنده‌هاست.

ت) گاز اکسیژن (X) تولید شده، می‌تواند موجب باز شدن مجاری مسدودشده شود.

۱) آ، ت ۲) آ، ب ۳) ب، پ ۴) پ، ت

پاسخ: گزینه ۱ ساده | حفظی

عبارت‌های «آ» و «ت» نادرست هستند.

گاز X همان گاز هیدروژن بوده و معادله موازنه شده واکنش به صورت مقابل است:

$$2Al+2NaOH+6H_2O \rightarrow 2NaAl(OH)_4+3H_2$$

بررسی همه عبارت‌ها:

آ همان‌طور که می‌دانید، این پاک‌کننده شامل مخلوط سدیم هیدروکسید (NaOH) و آلومینیم (Al) است که شامل **پودر** عرضه می‌شود، اما حواستان باشد که این پاک‌کننده، با آلاینده‌ها واکنش داده و نوعی **پاک‌کننده خورنده** محسوب می‌شود. از این پودر برای باز کردن لوله‌ها و مسیرهایی استفاده می‌شود که بر اثر ایجاد رسوب و تجمع چربی‌ها بسته شده‌اند.

موشکافی پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی تنها بر اساس برهم‌کنش بین ذره‌ها عمل می‌کنند اما پاک‌کننده‌های خورنده علاوه بر این برهم‌کنش‌ها، با آلاینده‌ها واکنش هم می‌دهند.

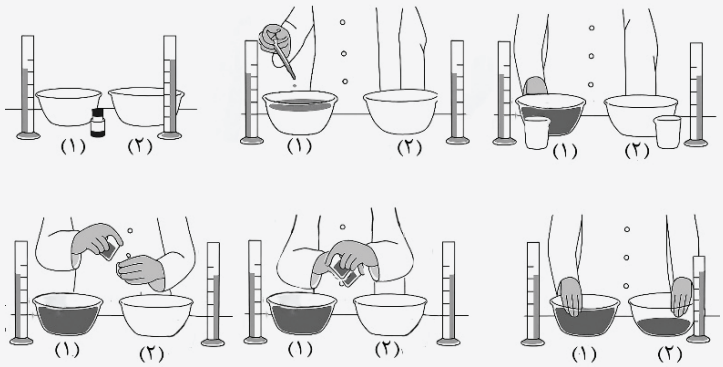
عملکرد پاک‌کننده‌ها { صابونی و غیرصابونی ← برهم‌کنش بین ذره‌ها
خورنده ← برهم‌کنش بین ذره‌ها و واکنش با آلاینده‌ها

ب با توجه به واکنش موازنه شده فوق می‌توان گفت که در این معادله، ضریب آب (H_2O) و فراورده یونی ($NaAl(OH)_4$) به ترتیب برابر با ۶ و ۲ و نسبت گفته شده، برابر با $\frac{6}{2}=3$ است.

پ واکنش موردنظر، گرماده است ($\Delta H<0$) و بر اثر انجام آن گرما آزاد می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که در این واکنش، سطح انرژی فراورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها بوده و فراورده‌ها پایدارتر از واکنش‌دهنده‌ها هستند.

ت همان‌طور که گفتیم، در این واکنش **گاز هیدروژن** (H_2)، آزاد شده و X، همان گاز هیدروژن است؛ نه گاز اکسیژن (O_2)!

۱ . مطابق شکل‌های زیر، ابتدا در ظرف (۱)، یک لیتر آب می‌ریزیم و چند قطره رنگ خوراکی به آن اضافه می‌کنیم. سپس با یک بشر ۱۰۰ میلی‌لیتری، محلول رنگی ظرف (۱) را برداشته و به ظرف (۲) منتقل می‌کنیم و هم‌زمان، با یک بشر ۵۰ میلی‌لیتری از محتویات ظرف (۲) (ظرف خالی)، به ظرف (۱) می‌ریزیم و این عمل را ادامه می‌دهیم. با ادامه جابه‌جایی محتویات دو ظرف، کدام موارد درباره این فرایند رخ خواهد داد؟



آ) مقدار محتویات ظرف (۲)، افزایش و مقدار محتویات ظرف (۱) کاهش می‌یابد.

ب) به تدریج، مقدار محتویات ظرف (۱) و (۲) به یک‌دیگر نزدیک شده و در نهایت با هم برابر خواهد شد.

پ) در نهایت، حجم محلول‌های جابه‌جا شده بین دو ظرف، با هم برابر نخواهد شد.

ت) به تدریج حجم محلول جابه‌جا شده از ظرف (۱) به ظرف (۲)، کاهش می‌یابد.

۱) آ، پ ۲) آ، ت ۳) ب، پ ۴) ب، ت

پاسخ: گزینه ۲ سخت | مفهومی

عبارت‌های «آ» و «ت» درست هستند.

بررسی همه عبارت‌ها:

آ در ابتدا، فقط در ظرف (۱) محلول وجود دارد و ظرف (۲) خالی است؛ سپس با انتقال محلول بین این دو ظرف، حجم محلول در ظرف (۱) به مرور کم و در ظرف (۲) به مرور زیاد می‌شود.

ب با توجه به این‌که حجم بشرهایی که برای انتقال محلول بین دو ظرف استفاده می‌شود، باهم متفاوت است، در هنگام تعادل، حجم محلول‌ها در دو ظرف باهم برابر نخواهد بود و چون برای انتقال محتویات از ظرف (۱) به (۲)، از بشری با حجم بیشتر استفاده کردیم، حجم آبی که به صورت خالص از ظرف (۱) به ظرف (۲) منتقل می‌شود، بیشتر بوده و در نتیجه می‌توان گفت که در نهایت حجم محلول در ظرف (۲) بیشتر خواهد بود.

پ و ت با گذشت زمان، بشر ۵۰mL پرتر و بشر ۱۰۰mL خالی‌تر می‌شود، زیرا مقدار محلول در ظرف (۱) به مرور کم شده و با گذشت زمان، دیگر نمی‌تواند بشر ۱۰۰mL را پر کند. همچنین مقدار محلول در ظرف (۲) به مرور بشتر شده و باعث می‌شود که با گذشت زمان، بشر ۵۰mL به تدریج پرتر شود.

با گذشت زمان، حجم محلول‌های جابه‌جا شده بین دو ظرف (حجم محلول در بشرهای ۱۰۰ و ۵۰ میلی‌لیتری) برابر می‌شود و مقدار محتویات هر ظرف ثابت خواهد ماند.

تذکر: از مرحله تعادل به بعد، اگر محتویات دو ظرف را به کمک بشرها جابه‌جا کنیم، تغییری در حجم آن‌ها ایجاد نمی‌شود.

۲ . به یک لیتر محلول هیدروکلریک اسید که در آن، غلظت مولی یون هیدرونیوم، $۲/۵\times۱۰^{-۱۱}$ برابر غلظت مولی یون هیدروکسید است، ۴ لیتر آب اضافه می‌کنیم و محلولی با $pH = A$ به دست می‌آید. اگر به این محلول، مقداری گاز HBr که حجم آن در شرایط STP برابر ۱۱۲۰mL است، اضافه شود، pH محلول به مقدار B می‌رسد. حاصل $A - B$ کدام است؟ (دما را ثابت و برابر $۲۵^{\circ}C$ در نظر بگیرید و از تغییرات حجم محلول در اثر افزودن HBr چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

گام اول) pH محلول اولیه هیدروکلریک اسید ($HCl(aq)$) را قبل از رقیق‌سازی به دست می‌آوریم:

$$[H^+]=۲/۵\times۱۰^{-۱۱}\times[OH^-] \Rightarrow [OH^-]=\frac{[H^+]}{۲/۵\times۱۰^{-۱۱}}$$

$$[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [H^+]\times\frac{[H^+]}{۲/۵\times۱۰^{-۱۱}}=۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [H^+]^۲=۲۵\times۱۰^{-۴} \Rightarrow [H^+]=۵\times۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱}$$

$$pH=-\log[H^+]=-\log(۵\times۱۰^{-۲})=۲-\log۵=۱/۳$$

گام دوم) pH محلول هیدروکلریک اسید را پس از افزودن ۴ لیتر آب و رسیدن حجم محلول به ۵ لیتر، محاسبه می‌کنیم:

نکته

تغییر pH بر اثر رقیق کردن محلول	الف) در رقیق کردن محلول اسیدهای قوی اگر حجم محلول را n برابر کنیم، (محلول را n مرتبه رقیق کنیم.):	غلظت محلول و در نتیجه غلظت H^+، $\frac{۱}{n}$ برابر می‌شود.
		غلظت OH^- این محلول n برابر می‌شود.
		pH این محلول به اندازه $\log n$ افزایش می‌یابد.
		$pH_{جدید}=pH_{اولیه}+\log n \rightarrow \Delta pH=\log n=\log\frac{V_۲}{V_۱}$
	ب) در رقیق کردن محلول بازهای قوی اگر حجم محلول را n برابر کنیم، (محلول را n مرتبه رقیق کنیم.):	غلظت محلول و در نتیجه غلظت OH^-، $\frac{۱}{n}$ برابر می‌شود.
		غلظت H^+ این محلول n بربر می‌شود.
		pH این محلول به اندازه $\log n$ کاهش می‌یابد.
		$pH_{جدید}=pH_{اولیه}-\log n \rightarrow \Delta pH=-\log n=-\log\frac{V_۲}{V_۱}$

بنابراین pH محلول حاصل (مقدار A) پس از رقیق‌سازی محلول با اضافه کردن ۴ لیتر آب برابر است با:

$$V_۲=V_۱+۴=۱+۴=۵L$$

$$pH_{جدید}=pH_{اولیه}+\log\frac{V_۲}{V_۱} \rightarrow pH_{جدید}=۱/۳+\log\frac{۵}{۱}=۱/۳+۰/۷=۲ \rightarrow A=۲$$

گام سوم) محاسبه می‌کنیم که با افزودن هیدروبرمیک اسید ($HBr(aq)$) به محلول هیدروکلریک اسید رقیق شده، pH محلول به چند می‌رسد:

نکته برای محاسبه pH محلول حاصل از اختلاط دو یا چند محلول اسید قوی، از الگوی زیر استفاده کنید:

حجم و غلظت مولی اسیدها داده شده است. $\xrightarrow{[H^+]_{نهایی}=\frac{M_{a_1}V_1+M_{a_2}V_2}{V_1+V_2+\cdots}}$ غلظت H^+ در محلول حاصل به دست می‌آید. $\xrightarrow{pH=-\log[H^+]}$ pH محلول حاصل محاسبه می‌شود.

حال اگر در مسئله‌ای به جای حجم و غلظت محلول اسیدهای قوی، حجم و pH آن‌ها داده شود، باید طبق الگوی زیر پیش بروید:

pH و حجم هریک از محلول‌های اسیدی داده شده است $\xrightarrow{[H^+]=10^{-pH}}$ غلظت H^+ در هریک از محلول‌ها محاسبه می‌شود.

$\xrightarrow{[H^+]_{نهایی}=\frac{[H^+]_1V_1+[H^+]_2V_2+\cdots}{V_1+V_2+\cdots}}$ غلظت H^+ در محلول حاصل به دست می‌آید. $\xrightarrow{pH=-\log[H^+]}$ pH محلول حاصل محاسبه می‌شود.

$$HCl(aq):[H^+]=10^{-pH}=10^{-2}\,mol.L^{-1}\rightarrow mol\,H^+=10^{-2}\,mol.L^{-1}\times 5L=0/05mol$$

$$HBr(aq):1120mL\,HBr(g)\times\frac{1L}{10^3\,mL}\times\frac{1mol\,HBr}{22/4L\,HBr(g)}=0/05mol\,HBr\rightarrow mol\,H^+=mol\,HBr=0/05mol$$

$$\rightarrow[H^+]_{نهایی}=\frac{\text{مجموع مول‌های }H^+}{\text{حجم}}=\frac{0/05+0/05}{5}=2\times10^{-2}\,mol.L^{-1}\rightarrow pH_{نهایی}=-\log(2\times10^{-2})=2-\log2=1/7\rightarrow B=1/7$$

گام چهارم) خواسته سوال را محاسبه می‌کنیم:

$$A-B=2-1/7=0/3$$

کنکورچی‌میگه؟ **اگر به محلول ۰/۰۰۲ مولار یک اسید قوی تک‌پروتون‌دار، ۹ برابر حجم آن آب مقطر اضافه شود، pH آن چند واحد تغییر می‌کند و درصد یونش محلول ۰/۰۰۱ مولار اسید ضعیف HA باید کدام عدد باشد تا pH نهایی آن برابر با pH اسید قوی برابر شود؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.)** (سراسری تجربی ۱۴۰۲ - نوبت اول)

۱) ۱، ۲۰ ۲) ۱/۵، ۲۰ ۳) ۱، ۴ ۴) ۱/۵، ۴

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

هنگامی که ۹ برابر حجم اولیه اسید به محلول آن، آب اضافه می‌کنیم، حجم محلول ۱۰ برابر می‌شود.

با ۱۰ برابر کردن حجم محلول اسید قوی، pH آن، ۱ واحد افزایش می‌یابد:

$$|\Delta pH|=\log\frac{V_2}{V_1}=\log10=1$$

برای محاسبه pH نهایی محلول اسید قوی، ابتدا باید pH اولیه محلول اسید را به دست آوریم:

$$pH_{اولیه}=-\log[H^+]=-\log(2\times10^{-3})=3-\log2=2/7$$

$$pH_{نهایی}=pH_{اولیه}+1=2/7+1=3/7$$

در ادامه با استفاده از pH محلول HA، غلظت یون هیدرونیوم آن را به دست می‌آوریم:

$$pH=3/7\Rightarrow[H^+]=10^{-pH}=10^{-3/7}=10^{-4}\times10^{0/3}=2\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

در نهایت، درصد یونش اسید ضعیف HA، را می‌توان به دست آورد:

$$\text{درصد یونش}=\frac{[H^+]}{M}\times100=\frac{2\times10^{-4}}{1\times10^{-3}}\times100=\%20$$

۳ . در ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۰۵ مولار اسید ضعیف HA، غلظت یون $A^-(aq)$ برابر با ۱۱/۸ میلی‌گرم بر لیتر است. اگر ۳۰۰ میلی‌لیتر آب مقطر به این محلول اضافه کنیم، درصد یونش اسید به تقریب چند برابر می‌شود؟ $(H=1, A=59: g.mol^{-1})$

۱) ۱/۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۲/۲

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

روش اول:

گام اول) غلظت مولی (مولار) یون $A^-(aq)$ را در محلول (بر حسب مول بر لیتر) محاسبه می‌کنیم:

$$[A^-]=11/8\frac{mg}{L}\times\frac{1g}{10^3 mg}\times\frac{1mol\,A}{59gA}=2\times10^{-4}\ mol.L^{-1}$$

گام دوم) درجه یونش و همچنین درصد یونش اسید HA را در محلول اولیه حساب می‌کنیم:

نکته در رابطه درجه یونش، به جای تعداد ذره‌ها، می‌توان غلظت مولار آن‌ها را نیز قرار داد.

$$\text{درجه یونش}(\alpha)=\frac{\text{غلظت مولار اسید یونیده شده}}{\text{غلظت مولار اسید حل شده}}=\frac{\text{غلظت مولار } H^+ \text{ یا آنیون اسید}}{\text{غلظت مولار (اولیه) اسید}}$$

اگر غلظت اولیه محلول را M مولار در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\alpha=\frac{[H^+]}{M}\ \text{یا}\ [H^+]=M\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha_1=\frac{[A^-]}{[HA]}=\frac{2\times10^{-4}}{5\times10^{-2}}=4\times10^{-3} \Rightarrow \%\alpha_1=\%0/4$$

گام سوم) با رقیق کردن یک محلول (اضافه کردن آب به آن)، تعداد مول ماده حل‌شونده تغییر نمی‌کند، بنابراین به هنگام رقیق کردن محلول‌های غلیظ می‌توان از رابطه روبه‌رو استفاده کرد:

$$M_{\text{غلیظ}}V_{\text{غلیظ}}=M_{\text{رقیق}}N_{\text{رقیق}}$$

$$\Rightarrow 0/05\times200=M_{\text{رقیق}}\times(200+300) \Rightarrow M_{\text{رقیق}}=0/02 mol.L^{-1}$$

گام چهارم) K_a در دمای ثابت، مقدار ثابتی است. حال مقدار K_a را برای محلول اولیه محاسبه کرده و با نوشتن رابطه K_a برای محلول رقیق نهایی، درجه یونش و همچنین درصد یونش محلول نهایی را به دست می‌آوریم:

آفرود اگر مقدار درجه یونش (α) کمتر از ۰/۰۵ یا مقدار $\frac{K_a}{M}$ کمتر از ۰/۰۰۲ باشد، می‌توانیم عبارت $1-\alpha$ را برابر ۱ فرض کنیم و از روابط زیر استفاده کنیم:

$$\text{در اسید ضعیف HA}\begin{cases}K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}\xrightarrow{\alpha<0/05\ \text{یا}\ \frac{K_a}{M}<0/002}K_a=M\alpha^2\\ [H^+]=\sqrt{M.K_a(1-\alpha)}\xrightarrow{\alpha<0/05\ \text{یا}\ \frac{K_a}{M}<0/002}[H^+]=\sqrt{M.K_a}\end{cases}$$

$$\text{محلول اولیه: } K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}\xrightarrow{\alpha<0/05}K_a=M_1\alpha_1^2=0/05\times(4\times10^{-3})^2=8\times10^{-7}$$

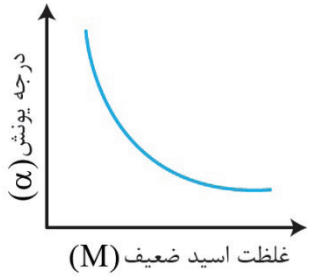
$$\text{محلول نهایی: } K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}\xrightarrow{\frac{K_a}{M}=4\times10^{-5}<0/002}K_a=M_2\alpha_2^2\rightarrow\alpha_2^2=4\times10^{-5}\rightarrow\alpha_2=\sqrt{4\times10^{-5}}\simeq6\times10^{-3}\rightarrow\%\alpha_2\simeq\%0/6$$

گام پنجم) نسبت درصد یونش اسید را در محلول محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\%\alpha_2}{\%\alpha_1}\simeq\frac{0/6}{0/4}=1/5$$

روش دوم: برای اسیدهای ضعیف، رابطه تقریبی $K_a \simeq M\alpha^2$ برقرار است. در دمای معین، K_a عدد ثابتی است، بنابراین از این رابطه نتیجه می‌گیریم که درجه یونش اسیدهای ضعیف با غلظت محلول آن‌ها رابطه وارونه دارد، یعنی هرچه محلول غلیظ‌تر باشد، درجه یونش اسید در آن کم‌تر است:

$$K_a \simeq M\alpha^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{K_a}{M}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ با } M \text{ رابطه وارونه دارد.} \\ \text{نمودار } \alpha \text{ بر حسب } M \text{ خطی نیست} \end{cases} \Rightarrow$$



با توجه به رابطه بالا، برای محاسبه نسبت درجه یونش یک اسید خیلی ضعیف در دو محلول با غلظت متفاوت، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \rightarrow \frac{\%\alpha_2}{\%\alpha_1} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{0/05}{0/02}} = \sqrt{2/5} \simeq 1/5$$

۴ . از انحلال ۱/۸ گرم اسید HX در ۲ لیتر آب خالص در دمای اتاق، محلولی با pH = ۲/۳ به دست می‌آید. اگر در این محلول به ازای هر ذره باردار، ۴ مولکول یونیده نشده از اسید HX وجود داشته باشد، جرم مولی HX چند گرم است؟ (log ۵ = ۰/۷)

۱) ۲۰ ۲) ۲۷ ۳) ۴۶ ۴) ۸۱

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

استراتژی ابتدا به کمک pH محلول حاصل، $[H^+]$ و همچنین (مجموع غلظت گونه‌های باردار) را در آن حساب کنید، سپس چون در محلول حاصل، به ازای هر ذره باردار، ۴ مولکول یونیده نشده از اسید HX وجود دارد، غلظت اسید یونیده نشده موجود در محلول و همچنین غلظت اولیه اسید را بیابید. در نهایت با استفاده از غلظت اسید اولیه و جرم اسید اولیه حل شده، جرم مولی آن را به دست آورید.

گام اول) با توجه به pH محلول حاصل از انحلال ۱/۸ گرم اسید HX در ۲ لیتر آب، غلظت یون هیدرونیوم و همچنین مجموع غلظت گونه‌های باردار را در این محلول محاسبه می‌کنیم:

$$pH = -\log[H^+] \rightarrow [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2/3} = 10^{-3} \times 10^{0/7} = 5 \times 10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

$$HX(aq) \rightarrow H^+(aq) + X^-(aq)$$

$$\rightarrow [\text{مجموع غلظت گونه‌های باردار}] = [H^+] + [X^-] = 2 \times 5 \times 10^{-3} = 10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

گام دوم) با توجه به این‌که در محلول حاصل، به ازای هر ذره باردار، ۴ مولکول یونیده نشده از اسید HX وجود دارد، غلظت اسید یونیده نشده و غلظت اولیه اسید را حساب می‌کنیم:

$$[HX]_{\text{یونیده نشده}} = 4 \times 10^{-2}\ mol.L^{-1} \rightarrow \text{غلظت اسید اولیه} = \text{غلظت اسید باقی‌مانده} + \underbrace{\text{غلظت اسید یونیده شده}}_{\text{غلظت } H^+ \text{ یا } A^-}$$

$$= (5 \times 10^{-3}) + (4 \times 10^{-2}) = 45 \times 10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

گام سوم) با استفاده از غلظت اسید اولیه و جرم اسید حل شده، جرم مولی آن را به دست می‌آوریم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}}{\text{حجم}} \rightarrow 45 \times 10^{-3} = \frac{\frac{1/8}{\text{جرم مولی}}}{2} \rightarrow \text{جرم مولی اسید HX} = \frac{1/8}{45 \times 10^{-3} \times 2} = 20\ g.mol^{-1}$$

۵ . در کدام گزینه مخلوط مواد اشاره شده از نوع ناهمگن و ناپایدار است؟

۱) آب، اتانول، شکر
۲) هگزان، آب، صابون
۳) سدیم کلرید، اوره، آب
۴) آب، آلومینیم هیدروکسید، منیزیم هیدروکسید

پاسخ: گزینه ۴ ساده | حفظی

به جدول زیر توجه کنید:

نوع مخلوط / ویژگی	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است / ته‌نشین می‌شود.	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.

منظور از مخلوط‌های ناهمگن و ناپایدار، **سوسپانسیون‌ها** هستند. آلومینیم هیدروکسید ($Al(OH)_3$) و منیزیم هیدروکسید ($Mg(OH)_2$) در آب حل نشده و ته‌نشین می‌شوند؛ در نتیجه می‌توان گفت که مخلوط آن‌ها با یکدیگر سوسپانسیون تشکیل می‌دهند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ مخلوط آب، اتانول، و شکر ← محلول

۲ مخلوط هگزان، آب و صابون ← کلوئید

۳ مخلوط سدیم کلرید، اوره و آب ← محلول

۶ . با توجه به مطالب کتاب درسی، کدام موارد در ارتباط با نوعی پاک‌کننده پودری که برای باز کردن مجاری مسدود شده در برخی وسایل و دستگاه‌های صنعتی استفاده می‌شود، درست است؟

آ) مخلوطی از آلومینیم هیدروکسید و سدیم است.

ب) نوعی پاک‌کننده خورنده با خاصیت بازی است.

پ) از واکنش آن با آب، یک ترکیب گازی‌شکل تشکیل می‌شود.

ت) آنتالپی واکنش آن با آب، کوچک‌تر از صفر است.

۱) پ، ت
۲) آ، ب
۳) ب، ت
۴) آ، پ

پاسخ: گزینه ۳ ساده | حفظی

درسنامه:

نوعی پاک‌کننده خورنده که به شکل پودر عرضه می‌شود، شامل مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم است. معادله نوشتاری واکنش این مخلوط با آب به صورت زیر است:

$$\boxed{\text{مخلوط پودری آلومینیم و سدیم هیدروکسید}} + \boxed{\text{آب}} \Rightarrow \boxed{\text{گاز هیدروژن}} + \boxed{\text{فراورده‌های دیگر}} \quad (\Delta H < 0)$$

از این پودر برای باز کردن لوله‌ها و مسیرهایی استفاده می‌شود که بر اثر ایجاد رسوب و تجمع چربی‌ها بسته شده‌اند؛ زیرا:

۱) سدیم هیدروکسید موجود دراین مخلوط می‌تواند با چربی‌ها واکنش داده و صابون تولید کند که باعث از بین رفتن بیشتر چربی می‌شود.

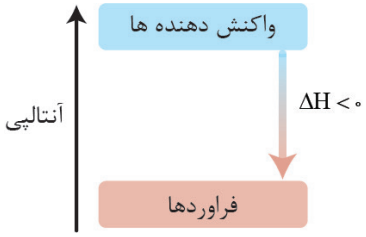
۲) از آن‌جا که این واکنش گرماده است، گرمای آزاد شده می‌تواند قدرت پاک‌کنندگی را افزایش دهد و باعث نرم یا ذوب شدن چربی‌ها و در نتیجه آسان‌تر باز شدن لوله‌ها شود.

۳) تولید گاز هیدروژن در این واکنش، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد، زیرا گاز با ایجاد فشار و ضربه به رسوب‌ها، باعث باز شدن آسان‌تر لوله‌های گرفته شده می‌شود.

SanjeshCloud

عبارت‌های «ب» و «ت» درست هستند.

بررسی همه عبارت‌ها:



آ) دقت کنید که این پاک‌کننده خورنده که به شکل پودری عرضه شود، مخلوطی از آلومینیم (Al) و سدیم هیدروکسید ($NaOH$) است، نه مخلوطی از سدیم (Na) و آلومینیم هیدروکسید ($Al(OH)_3$)!

ب) این مخلوط به دلیل وجود $NaOH$ خاصیت بازی دارد و در واکنش با چربی‌ها تولید صابون می‌کند که نوعی پاک‌کننده است؛ در نتیجه می‌توان از این پودر برای باز کردن لوله‌ها و مسیرهایی استفاده کرد که بر اثر ایجاد رسوب و تجمع چربی‌ها بسته شده‌اند.

پ) از واکنش این پودر با آب، گاز هیدروژن (H_2) تولید می‌شود که جزو عنصرهاست و ترکیب محسوب نمی‌شود!

ت) واکنش این مخلوط با آب، گرماده ($\Delta H<0$) است.

۷. غلظت یون نیتریت در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول مولار نیترواسید برابر با ۹۲۰ میلی‌گرم بر لیتر است. درصد یونش اسید و ثابت یونش آن به ترتیب کدام است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.) ($H=1, N=14, O=16 : g.mol^{-1}$)

۱) 4×10^{-4} ، ۲ ۲) 4×10^{-5} ، ۲ ۳) 4×10^{-4} ، ۴ ۴) 4×10^{-5} ، ۴

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

استراتژی ابتدا غلظت یون نیتریت (NO_2^-) را از $\frac{mg}{L}$ به $\frac{mol}{L}$ یا مولار تبدیل کنید، سپس با استفاده از غلظت مولی این یون و همچنین غلظت مولی اولیه اسید در محلول، درجه یونش (α) و همچنین درصد یونش ($\alpha\%$) اسید در محلول را به دست آورید. در نهایت با توجه به درجه یونش (α) و غلظت اولیه اسید (M)، ثابت یونش (K_a) آن را محاسبه کنید.

گام اول) غلظت یون نیتریت (NO_2^-) را بر حسب مولار (مول بر لیتر) حساب می‌کنیم:

$$۹۲۰\ \frac{mg\ NO_2^-}{L}\times\frac{1g}{10^3 mg}\times\frac{1mol\ NO_2^-}{46g\ NO_2^-}=2\times10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

گام دوم) درصد یونش نیتروسید (HNO_2) را در محلول محاسبه می‌کنیم:

آفرود در محلول اسیدهای تک‌پروتون‌دار داریم:

شمار یون (مول)های تولید شده آنیون اسید = شمار یون (مول)های تولید شده H^+ = شمار مولکول (مول)های یونیده شده اسید

در نتیجه می‌توان درجه یونش اسید در محلول را از رابطه مقابل استفاده کرد:

$$\text{درجه یونش}(\alpha)=\frac{\text{غلظت مولار اسید یونیده شده}}{\text{غلظت مولار اسید حل شده}}=\frac{\text{غلظت مولار } H^+ \text{ یا آنیون اسید}}{\text{غلظت مولار (اولیه) اسید}}$$

اگر غلظت اولیه محلول را M مولار در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\alpha=\frac{[H^+]}{M}\ \text{یا}\ [H^+]=M\alpha$$

$$\rightarrow \alpha=\frac{[NO_2^-]}{[HNO_2]}=\frac{2\times10^{-2}}{1}=2\times10^{-2}\rightarrow \%\alpha=\alpha\times100=(2\times10^{-2})\times100=2$$

گام سوم) با توجه به درجه یونش (α) و غلظت اولیه اسید (M)، ثابت یونش (K_a) آن را محاسبه می‌کنیم:

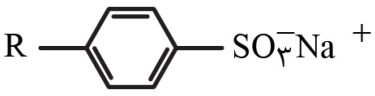
$$K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}\xrightarrow{\alpha<0/05} K_a=M\alpha^2=1\times(2\times10^{-2})^2=4\times10^{-4}$$

۸. در نوعی پاک‌کننده غیرصابونی با گروه SO_3^- و بدون شاخهٔ فرعی، شمار گروه‌های «$-CH$» برابر ۶ و شمار اتم‌های هیدروژن در آن برابر ۲۵ است. در این پاک‌کننده، شمار پیوندهای $C-C$، چند برابر شمار پیوندهای $C=C$ است؟ (در ساختار پاک‌کننده، پیوند سه گانه وجود ندارد.)

۱) ۳ ۲) ۳/۲۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۳/۷۵

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی

فرمول کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی به صورت مقابل است:



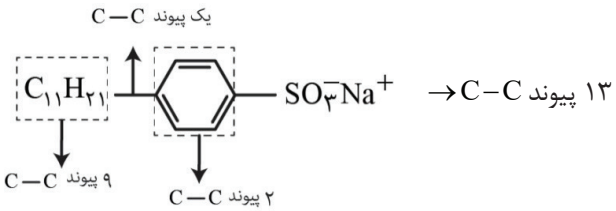
در ساختار حلقه بنزنی این پاک‌کننده، ۴ گروه «$-CH$» وجود دارد؛ پس ۲ گروه «$-CH$» نیز باید در زنجیر هیدروکربنی R وجود داشته باشد که به معنای وجود یک پیوند دوگانه «$-CH=CH-$» در ساختار زنجیر هیدروکربنی R این پاک‌کننده است؛ بنابراین این پاکننده در مجموع دارای ۴ پیوند دوگانه $C=C$ در ساختار خود می‌باشد، سه تا در حلقه بنزنی و یکی در گروه R!

از طرفی فرمول شیمیایی حلقه بنزنی به صورت «$-C_6H_4-$» است؛ پس در زنجیر هیدروکربنی R، باید ۲۱=۴−۲۵ اتم هیدروژن (H) وجود داشته باشد و با توجه به وجود یک پیوند دوگانه $C=C$ در این گروه، تعداد اتم‌های H، ۲ واحد از حالتی که گروه R سیرشده باشد، کم‌تر است؛ بنابراین داریم:

$$\text{زنجیر هیدروکربنی R}: (2n+1)-2=21 \rightarrow 2n+1=23 \rightarrow 2n=22 \rightarrow n=11$$

(به دلیل وجود یک پیوند $C=C$)

شمار پیوندهای کربن - کربن در ساختار گروه R، برابر با ۱۰ است که در این بین، یک پیوند به صورت دوگانه $(C=C)$ و ۹ پیوند به صورت یگانه $(C-C)$ است. ۳ پیوند $C-C$ نیز در ساختار حلقه بنزنی وجود دارد. همچنین یک پیوند $C-C$ نیز حلقه بنزنی را به گروه R متصل می‌کند؛ بنابراین داریم:



$\rightarrow$ ۱۳ پیوند $C-C$

در نهایت نسبت خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{شمار پیوندهای } C-C}{\text{شمار پیوندهای } C=C}=\frac{13}{4}=3/25$$

۹. با توجه به مدل آرنیوس، کدام مطلب درست است؟

۱) گاز کربن دی‌اکسید یک اسید آرنیوس به‌شمار می‌رود، زیرا با حل شدن در آب، موجب افزایش pH می‌شود.

۲) اگر در ساختار یک ماده، یون هیدروکسید وجود نداشته باشد، آن ماده به یقین نمی‌تواند باز آرنیوس باشد.

۳) با استفاده از مدل آرنیوس نمی‌توان قدرت اسیدی یا قدرت بازی دو محلول را باهم مقایسه کرد.

۴) مطابق مدل آرنیوس ، فقط یکی از ترکیب‌های «$Li_2O, N_2O_5, CH_3OH, CH_3COCH_3$» نه خاصیت اسیدی و نه خاصیت بازی دارد.

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی، حفظی

بر اساس مدل آرنیوس ، تنها می‌توان اسید یا باز بودن یک ماده را تشخیص داد، اما نمی‌توان درباره میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول اظهارنظر کرد؛ بنابراین امکان مقایسه قدرت اسیدی یا قدرت بازی دو محلول مختلف به کمک این مدل وجود ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ گاز کربن دی‌اکسید (CO_2)، یک اکسید نافلزی است که با آب واکنش می‌دهد. بر اثر انجام این واکنش، **یون H^+ آزاد می‌شود** که باعث **کاهش pH** می‌شود؛ نه افزایش pH!

$$CO_2(g)+H_2O(l) \rightleftharpoons H_2CO_3(aq) \rightleftharpoons H^+(aq)+HCO_3^-(aq)$$

۲ لزوماً در **ساختار همه بازهای آرنیوس، یون هیدروکسید** (OH^-) وجود ندارد. به عنوان مثال آمونیاک (NH_3) یک باز آرنیوس است که انحلال آن در آب سبب افزایش غلظت یون $OH^-(aq)$ می‌شود، در حالی‌که در ساختار آن یون OH^- وجود ندارد!

$$NH_3(aq)+H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq)+OH^-(aq)$$

تله‌تستی اسیدها و بازهای آرنیوس، لزوماً در ساختار خود، H یا OH ندارند. مثلاً CO_2 اسید آرنیوس است ولی H ندارد یا NH_3 ، باز آرنیوس است ولی OH ندارد. در تعریف آرنیوس، مهم این است که با **حل شدن در آب**، یون $H^+(aq)$ یا $OH^-(aq)$ پدید آید.

۴ Li_2O، اکسید یک فلز قلیایی و باز آرنیوس و N_2O_5، اکسید نافلزی و اسید آرنیوس است، اما حواستان باشد که CH_3OH (متانول) و CH_3COCH_3 (استون) به صورت **مولکولی** در آب حل شده و **یون ایجاد نمی‌کنند**؛ یعنی **نه باز آرنیوس هستند و نه اسید آرنیوس!**

کنکورچی‌میگه؟ **کدام مورد درست است؟** (سراسری تجربی خارج ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

۱) اگر انحلال یک ترکیب در آب، به صورت یونی باشد، محلول آن به یقین دارای رسانایی الکتریکی بالا است.

۲) در محلول اسیدهای ضعیف، نسبت شمار مولکول‌های یونیده شده، به یون‌های حاصل از یونش آن، پیوسته در حال تغییر است.

۳) مدل آرنیوس می‌تواند غلظت یون هیدرونیوم را در محلول‌های آبی جداگانه‌ای از NH_3 و HCl (با غلظت و دمای یکسان) مقایسه کند.

۴) مدل آرنیوس پیش‌بینی می‌کند که شمار اتم‌های هیدروژن در مولکول یک اسید، بیشتر از شمار اتم‌های هیدروژن در مولکول یک باز است.

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی، حفظی

طبق مدل آرنیوس، HCl اسید محسوب می‌شود، زیرا با حل شدن در آب، غلظت یون هیدرونیوم را افزایش می‌دهد و NH_3، باز محسوب می‌شود، زیرا با حل شدن در آب، غلظت یون هیدروکسید را افزایش می‌دهد؛ بنابراین با توجه به این‌که HCl، اسید و NH_3، باز است، می‌توان پیش‌بینی کرد که غلظت یون هیدرونیوم در محلول HCl بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ رسانایی یک محلول، به مجموع غلظت مولی یون‌های موجود در آن بستگی دارد. ممکن است انحلال یک ترکیب در آب به صورت یونی باشد اما غلظت یون‌های موجود در محلول آن کم باشد. مثلاً $AgCl$ به صورت یونی در آب حل می‌شود اما انحلال‌پذیری آن در آب، بسیار ناچیز بوده و غلظت یون‌های موجود در محلول آن کم است یا مثلاً محلولی با غلظت بسیار پایین از HCl، نمی‌تواند رسانای قوی جریان برق باشد.

۲ محلول اسیدهای ضعیف در آب، یک سامانه تعادلی است و غلظت گونه‌های موجود در محلول آن‌ها، ثابت و تغییری نمی‌کند.

۴ ممکن است در ساختار یک اسید آرنیوس، اصلاً اتم هیدروژنی وجود نداشته باشد. مثلاً SO_3 در حالی که هیدروژنی ندارد؛ اسید آرنیوس محسوب می‌شود، اما NH_3 که ۳ اتم هیدروژن دارد، یک باز آرنیوس است.

۱۰. اگر در دمای اتاق، pH سه محلول با حجم برابر نیتروواسید، فورمیک اسید و هیدروسیانیک اسید باهم برابر باشد، کدام مطلب درست است؟ (حجم سه محلول باهم برابر است.)

۱) شمار یون‌های سیانید در محلول هیدروسیانیک اسید با شمار یون‌های نیترات در محلول نیتروواسید برابر است.

۲) غلظت مولی محلول فورمیک اسید، بیشتر از غلظت مولی محلول هیدروسیانیک اسید است.

۳) بیشترین ثابت یونش در بین این سه اسید مربوط به اسیدی است که نسبت شمار اتم‌ها به شمار عنصرها در فرمول آن، بیشتر از دو اسید دیگر است.

۴) بر اثر واکنش کامل مقدار کافی فلز منیزیم با محلول هیدروسیانیک اسید، گاز بیشتری نسبت به واکنش فلز منیزیم کافی با محلول نیتروواسید تولید می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | مفهومی

نیتروواسید (HNO_2)، فورمیک اسید ($HCOOH$) و هیدروسیانیک اسید (HCN)، سه اسید ضعیف تک‌پروتون‌دار هستند که مقایسه قدرت اسیدی یا K_a آن‌ها به صورت زیر است:

$$\text{قدرت اسیدی } (K_a): \underset{\text{نیتروواسید}}{HNO_2} > \underset{\text{فورمیک اسید}}{HCOOH} > \underset{\text{هیدروسیانیک اسید}}{HCN}$$

با توجه به گفته سوال، pH سه محلول و در نتیجه $[H^+]$ در آن‌ها یکسان است؛ در نتیجه مقایسه غلظت مولی این محلول‌ها و همچنین شمار مول‌های اسید موجود در آن‌ها به صورت زیر است:

$$\text{شمار مول اسید: } \underset{\text{نیترو اسید}}{HNO_2} < \underset{\text{فورمیک اسید}}{HCOOH} < \underset{\text{هیدروسیانیک اسید}}{HCN} \xrightarrow{\text{حجم محلول‌ها یکسان است}} \text{غلظت مولی: } \underset{\text{نیترو اسید}}{HNO_2} < \underset{\text{فورمیک اسید}}{HCOOH} < \underset{\text{هیدروسیانیک اسید}}{HCN}$$

با توجه به واکنش‌های زیر، از واکنش ۲ مول از هر کدام از اسیدهای HCN، HNO_2 با فلز منیزیم، یک مول گاز هیدروژن (H_2) در پایان واکنش حاصل می‌شود:

$$Mg + 2HCN \rightarrow Mg(CN)_2 + H_2$$

$$Mg + 2HCOOH \rightarrow Mg(HCOO)_2 + H_2$$

بنابراین چون شمار مول‌های اسید در محلول $HCN(aq)$ بیشتر از محلول $HNO_2(aq)$ است؛ در نتیجه مقدار مول گاز H_2 تولید شده در واکنش محلول $HCN(aq)$ با فلز Mg نیز بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در محلول $HNO_2(aq)$، یون‌های هیدرونیوم (H^+) و نیتریت (NO_2^-) وجود دارند. دقت کنید که **نیترات با فرمول شیمیایی NO_3^-، در محلول این اسید وجود ندارد!**

۲ همان‌طور که گفتیم، در محلول این اسیدها با pH و در نتیجه $[H^+]$ یکسان، با توجه به مقایسه K_a اسیدها، غلظت مولی اسید در محلول $HCN(aq)$ بیشتر از محلول $HCOOH(aq)$ است.

۳

$$\text{نسبت} \frac{\text{تعداد اتم‌ها}}{\text{تعداد عنصرها}} \text{در فرمول شیمیایی اسیدها} \rightarrow \begin{cases} \text{هیدروسیانیک اسید } (HCN): \frac{3}{3} = 1 \\ \text{فورمیک اسید } (HCOOH): \frac{5}{3} \\ \text{نیتروواسید } (HNO_2): \frac{4}{3} \end{cases}$$

فورمیک اسید بالاترین نسبت شمار اتم‌ها به شمار عنصرها را در میان این سه اسید دارد، در حالی‌که بیشترین ثابت یونش میان این سه اسید، متعلق به نیتروواسید است.

آزمون‌های ماراتون

شیمی دوازدهم | ۱۵ آبان‌ماه ۱۴۰۴

۱ . به ۲۰۰ میلی‌لیتر از محلول پتاس سوزآور با pH = ۱۳، مقداری آب اضافه می‌شود و محلولی با pH = ۱۲/۱۵ به دست می‌آید. حجم آب اضافه شده چند میلی‌لیتر بوده و غلظت محلول نهایی چند گرم بر لیتر خواهد بود؟ (حجم محلول نهایی را برابر با حجم محلول اولیه و آب اضافه شده در نظر بگیرید $(H=1, O=16, K=39: g.mol^{-1})$.)

۱) ۱۰۰۰، ۰/۷ ۲) ۱۰۰۰، ۰/۸ ۳) ۱۲۰۰، ۰/۷ ۴) ۱۲۰۰، ۰/۸

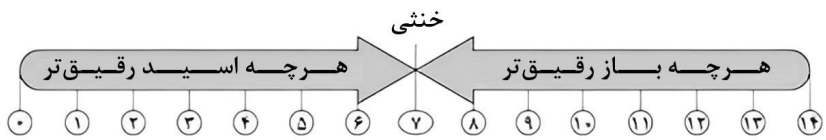
پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

نکته هرگاه محلول یک اسید را با اضافه کردن آب رقیق کنیم، خاصیت اسیدی محلول و غلظت یون H^+ در آن کاهش یافته و pH محلول افزایش می‌یابد. به همین ترتیب هرچه محلول یک باز را رقیق کنیم، خاصیت بازی محلول و غلظت یون OH^- در آن کاهش یافته و pH محلول کم‌تر می‌شود.

با توجه به این‌که pH، یک مقیاس لگاریتمی است، برای محلول اسیدها و بازهای قوی می‌توان نوشت: (V_1؛ حجم اولیه و V_2؛ حجم نهایی محلول است.)

$$\text{اسیدها و بازهای قوی: } |\Delta pH| = \log(\text{چند مرتبه رقیق شدن}) = \log\frac{V_2}{V_1}$$

پس در این سری از مسائل به کمک رابطه‌ی بالا، میزان تغییر pH محلول اسیدها و بازهای قوی را به دست می‌آوریم و با توجه به مفهوم محلول اسیدی و بازی، کم یا زیاد شدن pH محلول را اعلام می‌کنیم.



با افزودن آب به ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول باز قوی پتاس سوزآور (KOH)، pH محلول از ۱۳ به ۱۲/۱۵ می‌رسد؛ حال اگر بخواهیم آب اضافه شده را محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\Delta pH = \log\frac{V_2}{V_1} \xrightarrow{\Delta pH = 13 - 12/15 = 0/85} 0/85 = \log\frac{V_2}{200} \rightarrow \frac{V_2}{200} = 10^{0/85} = 7 \rightarrow V_2 = 1400\,mL$$

$$\rightarrow \text{حجم آب اضافه شده} = V_2 - V_1 = 1400 - 200 = 1200\,mL$$

بنابراین حجم آب اضافه شده، برابر با ۱۲۰۰ میلی‌لیتر است.

حال با توجه به pH محلول نهایی، غلظت این محلول را بر حسب $g.L^{-1}$ به دست می‌آوریم:

$$pH = 12/15 \rightarrow [H^+] = 10^{-12/15} = 10^{0/85} \times 10^{-13} = 7 \times 10^{-13}\ mol.L^{-1} \xrightarrow{[H^+].[OH^-] = 10^{-14}} [OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{7 \times 10^{-13}} = \frac{1}{7} \times 10^{-1}\ mol.L^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{باز قوی تک‌ظرفیتی}} [KOH] = [OH^-] = \frac{1}{7} \times 10^{-1}\ \frac{mol}{L} \times \frac{56\,g\,KOH}{1\,mol\,KOH} = 0/8\ g.L^{-1}$$

۲ . سامانه‌ی تعادلی محلول اسید ضعیف HA در آب، شامل مولکول‌های یونیده نشده‌ی این اسید و یون‌های هیدرونیوم و A^- است. اگر ثابت یونش این اسید 4×10^{-2} باشد، pH محلول ۰/۲ مولار این اسید به تقریب کدام است؟ $(\sqrt{21} \simeq 4/5)$

۱) ۱/۶۵ ۲) ۱/۱۵ ۳) ۱/۹۵ ۴) ۲/۳۵

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

درسنامه

اگر درجه‌ی یونش اسید ضعیف HX برابر α و غلظت اولیه‌ی اسید برابر M باشد، اسید به اندازه‌ی $M\alpha$ یونیده شده و غلظت تعادلی آن برابر با $M-M\alpha$ خواهد بود؛ پس می‌توان نوشت:

	HX	$\rightleftharpoons$	H^+	+	X^-
غلظت اولیه:	M		0		0
تغییر غلظت:	$-M\alpha$		$+M\alpha$		$+M\alpha$
غلظت تعادلی:	$M-M\alpha$		$M\alpha$		$M\alpha$

$$K_a=\frac{[H^+][X^-]}{[HX]}=\frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M-M\alpha}=\frac{M^2\alpha^2}{M(1-\alpha)}=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}\Rightarrow \boxed{K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}}\ ,\ \boxed{K_a=\frac{[H^+]^2}{M-[H^+]}}$$

حال اگر بخواهیم $[H^+]$ را بر حسب K_a و α به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}\xrightarrow{\alpha=\frac{[H^+]}{M}}K_a=\frac{M\times\frac{[H^+]^2}{M^2}}{1-\alpha}\Rightarrow K_a=\frac{[H^+]^2}{M(1-\alpha)}\Rightarrow \boxed{[H^+]=\sqrt{K_a.M(1-\alpha)}}$$

گام اول) معادله‌ی یونش اسید HA را می‌نویسیم:

$$HA(aq)\rightleftharpoons H^+(aq)+A^-(aq)\qquad K_a=0/04$$

گام دوم) با استفاده از مقدار ثابت یونش (K_a) و غلظت اولیه‌ی اسید (M)، غلظت یون هیدرونیوم (H^+) را در محلول حاصل محاسبه می‌کنیم:

$$K_a=\frac{[H^+]^2}{M-[H^+]}\xrightarrow{[H^+]=x}0/04=\frac{x^2}{0/2-x}\rightarrow x^2+0/04x-0/008=0$$

$$\rightarrow x=\frac{-0/04\pm\sqrt{(0/04)^2-4(-0/008)}}{2}\rightarrow x=\frac{-0/04\pm\sqrt{0/0336}}{2}=\frac{-0/04\pm\sqrt{21\times16\times10^{-4}}}{2}=\frac{-0/04\pm0/18}{2}$$

$$\rightarrow\begin{cases}x_1=0/07 & \checkmark\\ x_2=-0/11 & \times\end{cases}\Rightarrow [H^+]=0/07\,mol.L^{-1}$$

گام سوم) با استفاده از $[H^+]$، pH محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$pH=-\log[H^+]=-\log7\times10^{-2}=2-\log7=2-0/85=1/15$$

۳ . وقتی جوش شیرین را با استیک اسید (سرکه) مخلوط می‌کنیم یک واکنش شیمیایی انجام می‌شود. فراورده‌ی گازی این واکنش کدام است؟

۱) بخار آب ۲) گاز اکسیژن ۳) گاز هیدروژن ۴) گاز کربن دی‌اکسید

پاسخ: گزینه ۴ ساده | حفظی

جوش شیرین (سدیم هیدروژن کربنات) با فرمول شیمیایی $NaHCO_3$، یک نمک است که خاصیت بازی دارد. در اثر واکنش این ماده با اسیدها، ابتدا کربنیک اسید (H_2CO_3) به دست می‌آید، اما این اسید ناپایدار است و به سرعت به $H_2O(l)$ و $CO_2(g)$ تجزیه می‌شود. به عنوان مثال معادله‌ی واکنش این ماده با استیک اسید (CH_3COOH) به صورت زیر است:

$$NaHCO_3(s)+CH_3COOH(aq)\rightarrow CH_3COONa(aq)+CO_2(g)+H_2O(l)$$

$\downarrow$ تولید گاز کربن دی‌اکسید

۴. کدام مطلب در ارتباط با اسید معده درست است؟

۱) همانند نیتریک اسید جزو اسیدهای قوی بوده اما در شرایط یکسان مقدار K_a آن در مقایسه با نیتریک اسید بزرگ‌تر است.

۲) معده برای گوارش غذا به اسید نیاز دارد و بر اثر خوردن غذا، غده‌های موجود در دیواره معده، اسید معده (کلریک اسید) ترشح می‌کنند.

۳) در بدن انسان بالغ، روزانه چند لیتر شیره معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدود ۰/۳ مولار است.

۴) دیواره‌ی داخلی معده به‌طور طبیعی مقدار زیادی از یون‌های هیدرونیوم حاصل از اسید معده را جذب می‌کند.

پاسخ: گزینه ۱ ساده | حفظی

یاخته‌های دیواره‌ی معده با ورود مواد غذایی به آن، **هیدروکلریک اسید ((HCl(aq))** ترشح می‌کنند که همان اسید معده است.

این اسید نوعی اسید قوی با K_a بسیار بزرگ است. بر اساس کتاب درسی، K_a اسیدهای قوی، عددی بسیار بزرگ (مانند HCl, HBr, HI, H_2SO_4) یا بزرگ (مانند HNO_3) است.

آفرود

اسیدهای قوی	K_a بسیار بزرگ ←	H_2SO_4, HCl, HBr, HI
	K_a بزرگ ←	HNO_3

بنابراین می‌توان گفت که در شرایط یکسان، مقدار K_a هیدروکلریک اسید ((HCl(aq)) در مقایسه با نیتریک اسید (HNO_3) بزرگ‌تر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ خوردن غذا سبب می‌شود که غده‌ها و یاخته‌های موجود در دیواره‌ی معده، **هیدروکلریک اسید** (نه کلریک اسید!) ترشح کنند.

۳ در بدن انسان بالغ روزانه بین دو تا سه لیتر شیره‌ی معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدود $0/03 mol.L^{-1}$ است. در واقع درون معده یک محیط بسیار اسیدی است و حتی می‌تواند فلز روی را در خود حل کند.

۴ دیواره‌ی داخلی معده به‌طور طبیعی مقدار **کمی** (نه مقدار زیادی!) از یون‌های هیدرونیوم را دوباره جذب می‌کند که این جذب سبب نابودی سلول‌های سازنده‌ی دیواره‌ی معده می‌شود.

۵. ۴۰۰ میلی‌لیتر محلول استیک اسید با درجه‌ی یونش ۰/۰۲ با ۱۲۵ میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید به طور کامل خنثی می‌شود. pH این دو محلول چند واحد با هم اختلاف داشته است؟ (K_a (استیک‌اسید) $= 2 \times 10^{-5}$)

۱) ۹/۹ ۲) ۱۰/۵ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۰/۲

پاسخ: گزینه ۴ سخت | محاسباتی

استراتژی ابتدا با استفاده از ثابت یونش (K_a) و درجه‌ی یونش (α) استیک اسید، غلظت اولیه‌ی محلول (M) را محاسبه کنید، سپس با توجه به این‌که اسید و باز هم‌دیگر را به‌طور کامل خنثی کرده‌اند، غلظت مولی محلول باریم هیدروکسید را به دست آورید. در نهایت pH دو محلول را حساب کرده و تفاوت pH دو محلول را محاسبه کنید.

درسنامه

در مسائلی که در آن یک اسید و یک باز با هم واکنش داده و یک‌دیگر را به‌طور کامل خنثی می‌کنند، می‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$n_a . M_a . V_a = n_b . M_b . V_b$$

حجم باز × غلظت باز × ظرفیت باز = حجم اسید × غلظت اسید × ظرفیت اسید

منظور از ظرفیت (n) در اسیدها، تعداد هیدروژن اسیدی و برای بازها، تعداد OH^- است. در ضمن برای آمونیاک که هر مولکول آن می‌تواند یک یون OH^- در آب تولید کند، n را برابر ۱ در نظر می‌گیریم.

n_b	باز	n_a	اسید
۱	$NH_3, NaOH, KOH$	۱	$RCOOH, HNO_3, HBr, HCl$
۲	$Ba(OH)_2, Ca(OH), Mg(OH)_2$	۲	H_2CO_3, H_2SO_4
۳	$Al(OH)_3$	۳	H_3PO_4

توجه: هرچند که در واکنش خنثی شدن اسید و باز، در واقع یون‌های H^+ و OH^- با یک‌دیگر واکنش می‌دهند، اما حواستان باشد که در هر دو روش حل مسائل خنثی شدن اسید و باز، باید از غلظت اولیه‌ی اسید و باز (M) استفاده کنیم و نه غلظت یون‌های H^+ و OH^-!

گام اول) با توجه به ثابت یونش (K_a) و درجه‌ی یونش (α) استیک اسید، غلظت اولیه‌ی محلول (M) را محاسبه می‌کنیم:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{\alpha<0/05} K_a = M\alpha^2 \rightarrow 2\times10^{-5} = (2\times10^{-2})^2 \times M \rightarrow M = 0/05\,mol.L^{-1}$$

گام دوم) با استفاده از رابطه‌ی بالا و با توجه به خنثی شدن کامل اسید و باز، غلظت مولی باریم هیدروکسید را به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{n_a M_a V_a}_{CH_3COOH} = \underbrace{n_b M_b V_b}_{Ba(OH)_2} \rightarrow 1\times0/05\times400 = 2\times M_b \times 125 \rightarrow M_b = \frac{0/05\times400}{2\times125} = 0/08\,mol.L^{-1}$$

گام سوم) pH هریک از محلول‌ها را محاسبه کرده و تفاوت pH دو محلول را به دست می‌آوریم:

محلول استیک اسید (CH_3COOH): $[H^+] = M\alpha = 0/05\times0/02 = 0/001 = 10^{-3}\,mol.L^{-1} \rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log10^{-3} = 3$

محلول باریم هیدروکسید $(Ba(OH)_2)$: $[OH^-] = 2[Ba(OH)_2] = 0/16\,mol.L^{-1}$

$$\xrightarrow{[H^+].[OH^-]=10^{-14}} [H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{0/16} = \frac{1}{16}\times10^{-12}\,mol.L^{-1}$$

$$\rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log\frac{1}{16}\times10^{-12} = 12 - \log2^{-4} = 12 + 4\log2 = 12 + 4(0/3) = 13/2$$

$\rightarrow$ تفاوت pH دو محلول $= 13/2 - 3 = 10/2$

کنکورچی‌میگه؟ **با افزودن ۱۰ میلی‌لیتر از محلول یک ترکیب با خاصیت اسیدی قوی (HA) به ۹۰ میلی‌لیتر آب مقطر، pH محلول به ۲ کاهش می‌یابد. برای خنثی شدن کامل هر لیتر از محلول غلیظ اولیه‌ی این ترکیب اسیدی، چند گرم NaOH(s) لازم است؟ $(Na=23, O=16, H=1: g.mol^{-1})$** (سراسری تجربی ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

حجم محلول اسید با افزودن آب، از ۱۰mL به ۱۰۰mL رسیده، یعنی ۱۰ برابر شده است؛ بنابراین pH آن به اندازه‌ی $\log10$ یعنی ۱ واحد افزایش یافته است. با توجه به این‌که pH محلول نهایی برابر ۲ است، pH محلول اولیه‌ی اسید برابر ۱ بوده است:

$$[HA] = [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-1} = 0/1\,mol.L^{-1}$$

حالا از رابطه‌ی خنثی شدن استفاده می‌کنیم:

$$\underbrace{n_a M_a V_a}_{HA} = \underbrace{n_b \overbrace{M_b V_b}^{\text{مول باز}}}_{NaOH} \xrightarrow{\text{مول}=\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}} 1\times0/1\times1 = 1\times\frac{x}{40} \Rightarrow x = 4g\,NaOH$$

۶ . ۴۵ میلی‌لیتر محلول هیدروفلوئوریک اسید با $pH=۳/۴$ و درجه یونش ۰/۰۱ را به ۵ میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید با $pH=۱۳/۸$ اضافه می‌کنیم. جرم رسوب به دست آمده چند میلی‌گرم است؟ $(F=۱۹, Ba=۱۳۷: g.mol^{-1})$

$Ba(OH)_۲(aq)+HF(aq) \rightarrow BaF_۲(s)+H_۲O(l)$ (معادله موازنه شود.)

۱) ۴۴/۸ ۲) ۲۱۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۱۵۷/۵

پاسخ: گزینه ۴ سخت | محاسباتی

گام اول) معادله‌ی واکنش محلول باریم هیدروکسید ($Ba(OH)_۲$) با محلول هیدروفلوئوریک اسید (HF) را موازنه می‌کنیم:

$$Ba(OH)_۲(aq)+۲HF(aq) \rightarrow BaF_۲(s)+۲H_۲O(l)$$

گام دوم) با استفاده از اطلاعات داده شده، شمار مول‌های $Ba(OH)_۲$ و HF را حساب می‌کنیم:

$$\text{محلول هیدروفلوئوریک اسید (HF): } pH=۳/۴ \rightarrow [H^+]=۱۰^{-pH}=۱۰^{-۳/۴}=۱۰^{۰/۶}\times۱۰^{-۴}=(۱۰^{۰/۳})^۲\times۱۰^{-۴}=۴\times۱۰^{-۴}\ mol.L^{-۱}$$

$$\rightarrow [H^+]=M.\alpha \rightarrow ۴\times۱۰^{-۴}=M\times۰/۰۱ \rightarrow M=۰/۰۴ mol.L^{-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{غلظت مولی}=\frac{\text{مول}}{\text{حجم (لیتر)}}} ۰/۰۴=\frac{mol_{HF}}{۴۵\times۱۰^{-۳}} \rightarrow mol_{HF}=۰/۰۴\times۴۵\times۱۰^{-۳}=۱/۸\times۱۰^{-۳}\ mol$$

$$\text{محلول باریم هیدروکسید ($Ba(OH_۲)$): } pH=۱۳/۸$$

$$\rightarrow [H^+]=۱۰^{-pH}=۱۰^{-۱۳/۸}=۱۰^{-۰/۸}\times۱۰^{-۱۳}=(۱۰^{-۰/۳}\times۱۰^{-۰/۵})\times۱۰^{-۱۳}=\frac{۱}{۶}\times۱۰^{-۱۳}\ mol.L^{-۱}$$

$$\xrightarrow{[H^+].[OH^-]=۱۰^{-۱۴}} [OH^-]=\frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]}=\frac{۱۰^{-۱۴}}{\frac{۱}{۶}\times۱۰^{-۱۳}}=۰/۶ mol.L^{-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{غلظت مولی}=\frac{\text{مول}}{\text{حجم (لیتر)}}} ۰/۳=\frac{mol_{Ba(OH)_۲}}{۵\times۱۰^{-۳}} \rightarrow mol_{Ba(OH)_۲}=۰/۳\times۵\times۱۰^{-۳}=۱/۵\times۱۰^{-۳}\ mol$$

گام سوم) با توجه به معادله‌ی موازنه شده‌ی واکنش، هر مول $Ba(OH)_۲$ با ۲ مول HF واکنش می‌دهد، بنابراین می‌توان گفت که شمار مول‌های HF کم‌تر است و این ماده به‌طور کامل در واکنش مصرف می‌شود. حال جرم رسوب ($BaF_۲(s)$) تولید شده را بر حسب HF محاسبه می‌کنیم:

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$۱/۸\times۱۰^{-۳}\ mol\,HF\times\frac{۱\,mol\,BaF_۲}{۲\,mol\,HF}\times\frac{۱۷۵\,g\,BaF_۲}{۱\,mol\,BaF_۲}\times\frac{۱۰۰۰\,mg}{۱\,g}=۱۵۷/۵\,mg\,BaF_۲$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{mol_{HF}}{\text{ضریب}}=\frac{g\,BaF_۲}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}} \rightarrow \frac{۱/۸\times۱۰^{-۳}}{۲}=\frac{x}{۱\times۱۷۵} \rightarrow x=۰/۱۵۷۵\,g\,BaF_۲\times\frac{۱۰۰۰\,mg}{۱\,g}=۱۵۷/۵\,mg\,BaF_۲$$

۷ . در ارتباط با اسیدهای تک‌پروتون‌دار، کدام عبارت به یقین درست است؟

۱) اگر غلظت تعادلی مولکول‌های اسید A (قوی‌تر) و اسید B (ضعیف‌تر) با هم برابر باشد، با فرض حجم یکسان دو محلول، شمار گونه‌ها در محلول اسید A بیشتر است.

۲) اگر درجه‌ی یونش اسید Z بیشتر از اسید D باشد، رسانایی الکتریکی محلول Z بیشتر از محلول D است.

۳) اگر محلول دو اسید M و N با مقدار یکسانی فلز منیزیم به‌طور کامل واکنش دهند، pH دو محلول باهم برابر است.

۴) در دما و غلظت یکسان، اگر ثابت یونش اسید X بزرگ‌تر از ثابت یونش اسید Y باشد، حجم محلول سود موردنیاز برای خنثی کردن دو اسید باهم برابر است.

پاسخ: گزینه ۱ سخت | مفهومی

معادله ی یونش اسیدهای تک‌پروتون‌دار A (با فرمول کلی HA) و B (با فرمول کلی HB) به صورت زیر است:

	$HB \rightleftharpoons H^+ + B^-$		
غلظت اولیه :	M	۰	۰
تغییر غلظت :	$-M\alpha$	$+M\alpha$	$+M\alpha$
غلظت تعادلی :	$M-M\alpha$	$M\alpha$	$M\alpha$

	$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$		
غلظت اولیه :	M	۰	۰
تغییر غلظت :	$-M\alpha$	$+M\alpha$	$+M\alpha$
غلظت تعادلی :	$M-M\alpha$	$M\alpha$	$M\alpha$

بنابراین در محلول این دو اسید داریم:

$$\text{غلظت تعادلی اسید} = \text{غلظت اولیه‌ی اسید}(M) - [H^+] \xrightarrow[\text{غلظت تعادلی دو اسید برابر}]{[H^+]_A > [H^+]_B} M_A > M_B$$

$$\text{مجموع شمار گونه‌ها} = (M - M\alpha) + M\alpha + M\alpha = M + [H^+]$$

$$\xrightarrow[M_A > M_B]{[H^+]_A > [H^+]_B} \text{مجموع شمار گونه‌ها در محلول اسید A بیشتر از محلول اسید B است}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ دقت کنید که رسانایی الکتریکی محلول‌ها به مجموع غلظت یون‌ها در آن‌ها بستگی دارد که در اسیدهای تک‌پروتون‌دار برابر با $2M\alpha$ می‌باشد؛ در نتیجه رسانای الکتریکی محلول اسیدهای تک‌پروتون‌دار، علاوه بر درجه‌ی یونش (α)، به غلظت اولیه‌ی (M) محلول آن‌ها نیز وابسته است و صرفاً با داشتن α، نمی‌توان رسانایی الکتریکی محلول دو اسید را با هم مقایسه کرد.

تله‌تستی رسانایی الکتریکی به غلظت یون‌های موجود در محلول بستگی دارد. ممکن است غلظت محلول اسیدی که α آن بزرگ‌تر است، به قدری کم‌تر از محلول اسیدی با α کوچک‌تر باشد که باعث شود غلظت یون‌ها در محلول اسید قوی‌تر، کم‌تر شود. خلاصه این‌که فقط با مقایسه‌ی درجه‌ی یونش، نمی‌توان رسانایی الکتریکی محلول‌های اسیدی را با هم مقایسه کرد و باید غلظت محلول‌ها هم معلوم باشد.

۳ معادله‌ی واکنش فلز منیزیم با محلول اسیدهای تک‌پروتون‌دار را می‌توان به صورت $Mg + 2HA \rightarrow MgA_2 + H_2$ نشان داد. اگر مقدار منیزیم (Mg) مصرف شده در واکنش با محلول دو اسید تک‌پروتون‌دار M و N برابر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که مول اولیه‌ی اسیدهای M و N حل شده در محلول آن‌ها یکسان است، اما دقت کنید که pH محلول دو اسید الزاماً با هم برابر نیست و pH محلول اسیدی علاوه‌بر مقدار مول اسید به K_a و حجم محلول نیز بستگی دارد. هرچه $[H]^+$ در محلول یک اسید بیشتر باشد، pH آن کوچک‌تر است.

۴ با توجه به این‌که هر دو اسید X و Y تک‌پروتون‌دار (تک‌ظرفیتی) هستند، حجم باز موردنیاز برای خنثی کردن هر محلول اسیدی، به غلظت اسید (M) و همچنین به حجم آن (V) بستگی دارد. غلظت دو اسید X و Y یکسان است، اما چون حجم آن‌ها داده نشده است، نمی‌توان حجم محلول سود $(NaOH)$ موردنیاز برای خنثی کردن آن‌ها را با هم مقایسه کنیم.

تست‌درتست **با توجه به معادله‌ی یونش و مقدار ثابت یونش اسیدهای HX و HY، کدام مطلب نادرست است؟**

$$HX(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + X^-(aq) \qquad K_a = 1/2 \times 10^{-2}$$

$$HY(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + Y^-(aq) \qquad K_a = 7/2 \times 10^{-4}$$

۱) در دما و غلظت یکسان، غلظت یون هیدرونیوم در محلول HX از غلظت این یون در محلول هیدروکلریک اسید کم‌تر است.

۲) در شرایط یکسان، اسید HY برخلاف اسید HX، قدرت اسیدی کم‌تری از کلرواتانوئیک اسید $(K_a = 1/35 \times 10^{-3})$ دارد.

۳) در شرایط یکسان، سرعت واکنش نوار منیزیم با محلول HY از سرعت واکنش این فلز با محلول نیتریک اسید، کم‌تر است.

۴) در محلول ۱ مولار از این دو اسید با حجم‌های برابر، شمار مولکول‌های HX یونیده نشده، بیشتر از مولکول‌های HY یونیده نشده است.

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

۱ هیدروکلریک اسید (HCl) یک اسید قوی است و به‌طور کامل در آب یونیده می‌شود (K_a آن بزرگ است)، در حالی‌که HX اسید ضعیفی است و K_a کوچک‌تری نسبت به HCl دارد؛ پس در شایط یکسان، HX نسبت به HCl کم‌تر یونیده می‌شود. به همین دلیل غلظت H^+ در محلول آن کم‌تر است.

۲ ثابت یونش HY از ثابت یونش کلرواتانوئیک اسید کم‌تر و ثاب یونش HX از ثابت یونش کلرواتانوئیک اسید بیشتر است.

$$K_a: HX > \text{کلرواتانوئیک اسید} > HY \Rightarrow \text{قدرت اسیدی}: HX > \text{کلرواتانوئیک اسید} > HY$$

۳ HNO_3 نسبت به HY اسید قوی‌تری است؛ بنابراین سرعت واکنش نوار منیزیم با محلول HNO_3 از سرعت واکنش این فلز با محلول HY بیشتر می‌باشد.

۴ HX قدرت اسیدی بیشتری نسبت به HY دارد؛ پس در غلظت یکسان، HX بیشتر یونیده می‌شود. در نتیجه در حجم یکسان شمار مولکول‌های HX یونیده نشده، کم‌تر از شمار مولکول‌های HY یونیده نشده است.

۸ . یک مول از کدام ماده به عنوان داروی موثر در ضد اسیدها، مقدار بیشتری از اسید معده را خنثی می‌کند؟

۱) سدیم هیدروکسید ۲) جوش شیرین ۳) آلومینیم هیدروکسید ۴) منیزیم هیدروکسید

پاسخ: گزینه ۳ ساده | حفظی، مفهومی

بررسی همه‌ی گزینه‌ها:

۱ دقت کنید که **سدیم هیدروکسید ($NaOH$)، یک باز قوی است و به عنوان دارو قابل مصرف نیست**، اما از نظر استوکیومتری هر مول از آن می‌تواند یک مول اسید معده را خنثی کند.

۲ نام ترکیب $NaHCO_3$، سدیم هیدروژن کربنات یا همان جوش شیرین است. واکنش این ماده با اسید معده به صورت زیر است:

$$NaHCO_3(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + \underbrace{CO_2(g) + H_2O(l)}_{H_2CO_3}$$

همان‌طور که می‌بینید **یک مول جوش‌شیرین، یک مول اسید معده را خنثی می‌کند.**

۳ با توجه به معادله‌ی واکنش آلومینیم هیدروکسید ($Al(OH)_3$) با اسید معده، می‌توان گفت که **یک مول آلومینیم هیدروکسید، ۳ مول اسید معده را خنثی می‌کند:**

$$Al(OH)_3(s) + 3HCl(aq) \rightarrow AlCl_3(aq) + 3H_2O(l)$$

۴ با توجه به معادله‌ی واکنش منیزیم هیدروکسید ($Mg(OH)_2$) با اسید معده، می‌توان گفت که **یک مول منیزیم هیدروکسید، ۲ مول اسید معده را خنثی می‌کند:**

$$Mg(OH)_2(s) + 2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + 2H_2O(l)$$

بنابراین می‌توان گفت که یک مول آلومینیم هیدروکسید ($Al(OH)_3$) نسبت به سایر گزینه‌ها، می‌تواند مقدار بیشتری اسید معده را خنثی کند.

۹ . جرم‌های برابر از لیتیم اکسید و کلسیم اکسید را در دو ظرف جداگانه در آب حل کرده و سپس حجم هر کدام از دو محلول را با اضافه کردن آب به ۱۰۰ میلی‌لیتر می‌رسانیم. اگر با افزودن دو محلول به یک‌دیگر، محلولی با $pH = 13/1$ به دست آید، جرم هر کدام از اکسیدهای فلزی چند گرم بوده است؟ (حجم محلول نهایی را برابر با مجموع حجم دو محلول درنظر بگیرید.) $(Li = 7, O = 16, Ca = 40 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۳۲ ۳) ۰/۳۸ ۴) ۰/۴۵

پاسخ: گزینه ۱ سخت | محاسباتی

گام اول) با توجه به pH محلول نهایی، غلظت یون هیدروکسید (OH^-) را در محلول نهایی حساب می‌کنیم:

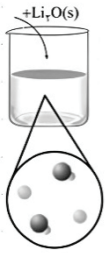
$$pH = 13/1 \rightarrow [H^+] = 10^{-13/1} = 10^{0/9} \times 10^{-14} = (10^{0/3})^3 \times 10^{-14} = 8 \times 10^{-14}\ mol.L^{-1}$$: محلول نهایی

$$\xrightarrow{[H^+].[OH^-]=10^{-14}} [OH^-]=\frac{10^{-14}}{[H^+]}=\frac{10^{-14}}{8\times10^{-14}}=\frac{1}{8}\,mol.L^{-1}$$

گام دوم) حجم هریک از محلول‌ها $100\,mL=0/1L$ است و چون محلول نهایی، در اثر افزودن دو محلول بازی حاصل از انحلال لیتیم اکسید (Li_2O) و کلسیم اکسید (CaO)، به یک‌دیگر به دست می‌آید، حجم محلول نهایی برابر با $100+100=200mL=0/2L$ خواهد بود. حال شمار مول‌های یون هیدروکسید (OH^-) را در محلول نهایی محاسبه می‌کنیم:

$$[OH^-]=\frac{\text{مول هیدروکسید}}{\text{حجم}}\rightarrow\frac{1}{8}=\frac{\text{مول هیدروکسید}}{0/2}\rightarrow\text{مول هیدروکسید}=\frac{1}{8}\times0/2=\frac{1}{40}=2/5\times10^{-2}\,mol\,OH^-$$

گام سوم) معادله‌ی انحلال لیتیم اکسید (Li_2O) و کلسیم اکسید (CaO) در آب را می‌نویسیم:



با حل شدن هر مول اکسید فلز قلیایی در آب، ۲ مول کاتیون آن فلز و ۲ مول یون هیدروکسید (در مجموع ۴ مول یون) حاصل می‌شود.

$$Li_2O(s)+H_2O(l)\rightarrow\underbrace{2Li^+(aq)+2OH^-(aq)}_{2LiOH(aq)}$$

$$1\,mol\,Li_2O\sim2\,mol\,OH^-$$

به طور کلی با حل شدن هر مول اکسید فلز قلیایی خاکی در آب، ۱ مول کاتیون آن فلز و ۲ مول یون هیدروکسید (در مجموع ۳ مول یون) حاصل می‌شود.



$$CaO(s)+H_2O(l)\rightarrow\underbrace{Ca^{2+}(aq)+2OH^-(aq)}_{Ca(OH)_2(aq)}$$

$$1\,mol\,CaO\sim2\,mol\,OH^-$$

بنابراین از انحلال یک مول از هر دو ترکیب Li_2O و CaO، دو مول یون OH^- حاصل می‌شود.

گام چهارم) اگر فرض کنیم x گرم از هر دو ترکیب Li_2O و CaO در محلول اولیه‌ی آن‌ها حل و در مجموع $2/5\times10^{-2}$ مول یون OH^- حاصل شده، مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}&x\,g\,Li_2O\times\frac{1\,mol\,Li_2O}{30\,g\,Li_2O}\times\frac{2\,mol\,OH^-}{1\,mol\,Li_2O}=\frac{x}{15}\,mol\,OH^-\\&x\,g\,CaO\times\frac{1\,mol\,CaO}{56\,g\,CaO}\times\frac{2\,mol\,OH^-}{1\,mol\,CaO}=\frac{x}{28}\,mol\,OH^-\end{aligned}\right\}\rightarrow\frac{x}{15}+\frac{x}{28}=2/5\times10^{-2}\rightarrow\frac{43x}{420}=2/5\times10^{-2}\rightarrow x\simeq0/24\,g$$

۱۰. در دمای ثابت، مقداری آب خالص به ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۶ مولار اسید ضعیف HA اضافه کرده و pH آن به ۱/۴ می‌رسد. اگر همین مقدار آب خالص را به ۵۵ میلی‌لیتر محلول سدیم هیدروکسید با pH = ۱۲ اضافه کنیم، pH محلول سود به چه عددی می‌رسد؟ (درصد یونش اسید HA با غلظت ۰/۶ مولار را ۴۰ در نظر بگیرید.)

۱) ۹/۶۵ ۲) ۱۰/۱۵ ۳) ۱۰/۶۵ ۴) ۱۱/۱۵

پاسخ: گزینه ۳ سخت | محاسباتی

استراتژی با توجه به این‌که اسید HA، یک اسید ضعیف است، در نتیجه ابتدا باید مقدار عددی K_a این اسید را محاسبه کنید، زیرا K_a تنها به دما وابسته است و با رقیق کردن محلول اسید، ثابت باقی می‌ماند. سپس غلظت نهایی محلول را با توجه به $[H^+]$ در محلول نهایی و K_a اسید حساب کنید.

در نهایت حجم آب اضافه شده به محلول اسید را به دست آورید و حساب کنید که با افزودن این مقدار آب به محلول باز قوی $NaOH$، pH نهایی محلول به چه عددی می‌رسد.

گام اول) ابتدا ثابت یونش (K_a) اسید ضعیف HA را محاسبه می‌کنیم.

$$K_a(HA)=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}=\frac{0/6\times 0/4^2}{1-0/4}=0/16$$

گام دوم) با توجه به این‌که با رقیق کردن محلول اسید HA، K_a آن ثابت می‌ماند، با استفاده از pH محلول نهایی، غلظت نهایی محلول اسید را (پس از رقیق شدن) به دست می‌آوریم:

$$[H^+]=10^{-pH}=10^{0/6}\times 10^{-2}=(10^{0/3})^2\times 10^{-2}=0/04\,mol.L^{-1}$$

$$K_a=\frac{[H^+]^2}{M-[H^+]}\rightarrow 0/16=\frac{(0/04)^2}{M-0/04}\rightarrow M-0/04=0/01\rightarrow M=0/05\,mol.L^{-1}$$

گام سوم) محلول غلیظ اولیه، با افزودن آب رقیق شده است؛ در نتیجه شمار مول‌های اسید حل شده در این فرایند ثابت مانده و می‌توان گفت که:

$$M_{غلیظ}V_{غلیظ}=M_{رقیق}V_{رقیق}\rightarrow 0/6\times 100=0/05\times V_{رقیق}\rightarrow V_{رقیق}=1200\,mL$$

در نهایت حجم آب اضافه شده را می‌توانیم به راحتی حساب کنیم:

$$V_{رقیق}=V_{غلیظ}+V_{آب}\rightarrow 1200=100+V_{آب}\rightarrow V_{آب}=1100\,mL$$

گام چهارم) محاسبه می‌کنیم که در اثر افزودن ۱۱۰۰ میلی‌لیتر آب به ۵۵ میلی‌لیتر محلول سدیم هیدروکسید ($NaOH$) با $pH=12$، pH نهایی محلول سود به چه عددی می‌رسد:

$$\Delta pH=\log\frac{V_2}{V_1}=\log\frac{55+1100}{55}=\log 21=\log 3+\log 7=0/5+0/85=1/35$$

بنابراین pH نهایی محلول باز برابر است با:

$$pH_{نهایی}=pH_{اولیه}-1/35=12-1/35=10/65$$

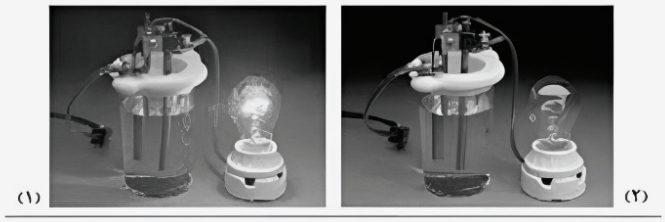
۱۱. کدام مطالب در ارتباط با بازها درست است؟

آ) بازها موادی تلخ‌مزه با خاصیت خورندگی هستند که برای زدودن رسوب‌های چربی مقاوم مناسب هستند.

ب) در دمای اتاق، pH محلول مولار بازهای قوی برابر با ۱۴ است.

پ) ترتیب «روده‌ی کوچک > خون > دهان > معده» را می‌توان به pH آن‌ها نسبت داد که دو مورد از آن‌ها همواره بازی هستند.

ت) شکل‌های (۱) و (۲) را به ترتیب می‌توان به وضعیت رسانایی الکتریکی محلول‌های لوله‌بازکن و شیشه‌پاک‌کن نسبت داد.



۱) آ، ب ۲) پ، ت ۳) آ، پ ۴) ب، ت

پاسخ: گزینه ۲ ساده | حفظی، مفهومی

عبارت‌های (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی همه‌ی عبارت‌ها:

آ) بازها نیز مانند اسیدها به دو دسته‌ی قوی و ضعیف تقسیم می‌شوند. سود سوزآور ($NaOH$) و پتاس سوزآور (KOH) از جمله بازهای قوی هستند و موادی خورنده به شمار می‌روند. از محلول این بازها می‌توان به عنوان لوله‌بازکن استفاده کرد. دقت کنید همان‌طور که گفتیم، همه‌ی بازها قوی نیستند و در نتیجه همه‌ی آن‌ها خورنده و فعال نیستند، زیرا **بازهایی مانند آمونیاک (NH_3) نیز وجود دارند که از جمله بازهای ضعیف محسوب شده و در نتیجه فاقد خاصیت خورندگی هستند.**

SanjeshCloud

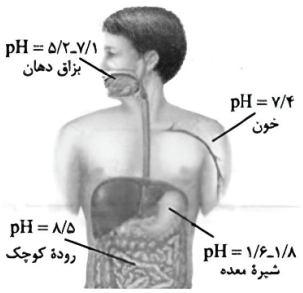
پ در صورتی‌که یک محلول بازی در دمای اتاق برابر ۱۴ باشد، داریم:

$$pH=14\rightarrow[H^+]=10^{-14}\xrightarrow{[H^+].[OH^-]=10^{-14}}[OH^-]=\frac{10^{-14}}{[H^+]}=\frac{10^{-14}}{10^{-14}}=1\,mol.L^{-1}$$

$$\rightarrow M.n.\alpha=1\xrightarrow[\text{باز قوی}:\alpha=1]{\text{محلول مولار}:M=1\,mol.L^{-1}}n=1$$

بنابراین تنها در صورتی که باز قوی مورد نظر **تک‌ظرفیتی** باشد، pH محلول مولار آن برابر با ۱۴ است، در حالی‌که اگر باز مورد نظر ۲ ظرفیتی باشد، pH محلول مولار آن بیشتر از ۱۴ خواهد بود.

پ با توجه به شکل صفحه‌ی ۲۴ کتاب درسی، باید pH محلول‌های زیر را بلد باشید:



سامانه	خون	محیط معده	محیط روده	بزاق
pH	۷/۴	۱/۶–۱/۸	۸/۵	۵/۲–۷/۱
خاصیت	بازی	اسیدی	بازی	بیشتر مواقع اسیدی
رنگ کاغذ pH	آبی	قرمز	آبی	بیشتر مواقع قرمز

با توجه به شکل و جدول بالا، مقایسه‌ی pH این ۴ محیط به صورت زیر است که در میان آن‌ها، «روده‌ی کوچک» و «خون» بازی هستند:

اسید معده<بزاق<خون<روده‌ی کوچک:مقایسه‌ی pH

ت در شکل (۱)، لامپ روشن و در شکل (۲)، لامپ نیمه‌روشن است؛ بنابراین محلول‌های موجود در شکل‌های (۱) و (۲)، به ترتیب حاوی الکترولیت‌های قوی و ضعیف هستند.

گفتیم که سود سوزآور (NaOH) و پتاس سوزآور (KOH) از جمله بازهای قوی (جزو الکترولیت‌های قوی) هستند، به طوری‌که خاصیت خورندگی دارند و از محلول آن‌ها می‌توان به عنوان لوله‌بازکن استفاده کرد، در حالی‌که آمونیاک (NH_3)، از جمله بازهای ضعیف (جزو الکترولیت‌های ضعیف) است و از محلول آن به عنوان شیشه‌پاک‌کن استفاده می‌شود، در نتیجه شکل‌های (۱) و (۲) را به ترتیب می‌توان به وضعیت رسانایی الکتریکی محلول‌های لوله‌بازکن و شیشه‌پاک‌کن نسبت داد.

۱۲ . در اثر انحلال کامل a مول از اسید HA و b مول از باز BOH در دو ظرف جداگانه با حجم‌های برابر از حلال، به ترتیب محلول‌هایی با pH = ۵/۵ و pH = ۱۰/۲ در دمای اتاق ایجاد می‌شود. اگر ثابت یونش اسید ضعیف HA و باز ضعیف BOH با هم برابر باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) 214×10^{-6} ۲) 324×10^{-6} ۳) 214×10^{-5} ۴) 324×10^{-5}

پاسخ: گزینه ۲ سخت | محاسباتی

ابتدا غلظت یون‌های H^+ و OH^- را در هریک از محلول‌ها محاسبه می‌کنیم:

$$\text{اسید HA}\begin{cases}pH=5/5\rightarrow[H^+]=10^{-5/5}=10^{-6}\times10^{0/5}=3\times10^{-6}\,mol.L^{-1}\\[OH^-]=\frac{10^{-14}}{[H^+]}=\frac{1}{3}\times10^{-8}\,mol.L^{-1}\end{cases}$$

$$\text{باز BOH}\begin{cases}pH=10/2\rightarrow[H^+]=10^{-10/2}=10^{-11}\times10^{0/8}=6\times10^{-11}\,mol.L^{-1}\\[OH^-]=\frac{10^{-14}}{6\times10^{-11}}=\frac{1}{6}\times10^{-3}\,mol.L^{-1}\end{cases}$$

$$K_a(A)=K_b(B)\Rightarrow \frac{[H^+]_A^2}{M_A}=\frac{[OH^-]_B^2}{M_B}\rightarrow \underbrace{\frac{M_A}{M_B}}_{\frac{a}{b}}=\left(\frac{[H^+]_A}{[OH^-]_B}\right)^2=\left(\frac{3\times10^{-6}}{\frac{1}{6}\times10^{-3}}\right)^2=324\times10^{-6}$$

۱۳. ۳۰۰ میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید با $pH=11/5$ را به ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول نیتریک اسید با غلظت 3×10^{-4} مولار اضافه می‌کنیم. پس از انجام واکنش، محلول باقی‌مانده با چند گرم از چربی ذخیره شده در کوهان شتر ($C_{57}H_{110}O_6$) به‌طور کامل مصرف می‌شود؟ ($H=1, C=12, O=16: g.mol^{-1}$, $\log 3\simeq 0/5$)

۱) ۰/۱۰ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۵۰ ۴) ۰/۷۵

پاسخ: گزینه ۲ سخت | محاسباتی

استراتژی ابتدا شمار مول یون‌های هیدروکسید (OH^-) و هیدرونیوم (H^+) را به ترتیب در محلول‌های بازی و اسیدی اولیه محاسبه و با هم مقایسه کنید. با توجه به بیشتر بودن شمار مول‌های یون OH^-، محلول حاصل همچنان خاصیت بازی دارد. پس معادله‌ی واکنش محلول باریم هیدروکسید ($Ba(OH)_2$) با چربی ذخیره شده در کوهان شتر ($C_{57}H_{110}O_6$) را نوشته و با توجه به شمار مول‌های یون OH^- در محلول، محاسبه کنید این محلول با چند گرم از چربی موردنظر به‌طور کامل واکنش می‌دهد.

گام اول) شمار مول‌های یون هیدروکسید (OH^-) را در محلول بازی باریم هیدروکسید ($Ba(OH)_2$) اولیه و شمار مول‌های یون هیدرونیوم (H^+) را در محلول اسیدی نیتریک اسید (HNO_3) اولیه محاسبه می‌کنیم:

$$\text{محلول باریم هیدروکسید } (Ba(OH)_2)\begin{cases} pH=11/5\rightarrow [H^+]=10^{-pH}=10^{-11/5} \\ \xrightarrow{[H^+].[OH^-]=10^{-14}} [OH^-]=\frac{10^{-14}}{[H^+]}=\frac{10^{-14}}{10^{-11/5}}=10^{-2/5}=10^{0/5}\times10^{-3}=3\times10^{-3}\ mol.L^{-1} \\ \xrightarrow{\text{غلظت}=\frac{\text{مول}}{\text{حجم (لیتر)}}} 3\times10^{-3}=\frac{mol_{OH^-}}{300mL\times\frac{1L}{1000m}}\rightarrow mol_{OH^-}=9\times10^{-4}\ mol \end{cases}$$

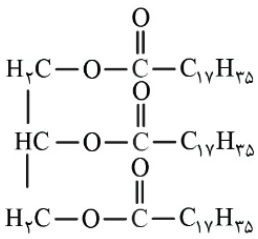
$$\text{محلول نیتریک اسید } (HNO_3)\begin{cases} [HNO_3]=[H^+]=3\times10^{-4}\ mol.L^{-1} \\ \xrightarrow{\text{غلظت}=\frac{\text{مول}}{\text{حجم (لیتر)}}} 3\times10^{-4}=\frac{mol_{H^+}}{200mL\times\frac{1L}{1000mL}}\rightarrow mol_{H^+}=6\times10^{-5}\ mol \end{cases}$$

گام دوم) با توجه به محاسبات بالا می‌توان دریافت که تمام نیتریک اسید اولیه مصرف و محلول به دست آمده، خاصیت بازی داشته و شمار مول‌های یون OH^- در آن برابر است با:

$$mol_{OH^-}\text{(باقی‌مانده)}=(9\times10^{-4})-(6\times10^{-5})=8/4\times10^{-4}\ mol$$

گام سوم) معادله‌ی واکنش محلول باریم هیدروکسید ($Ba(OH)_2$) با چربی ذخیره شده در کوهان شتر ($C_{57}H_{110}O_6$) را نوشته و محاسبه می‌کنیم که با توجه به شمار مول‌های یون OH^- موجود در محلول نهایی، این محلول با چند گرم از چربی موردنظر به‌طور کامل واکنش می‌دهد:

$$۳Ba(OH)_۲ + ۲C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶ \rightarrow ۲C_۳H_۵(OH)_۳ + ۳Ba(C_{۱۷}H_{۳۵}COO)_۲$$



$$mol_{Ba(OH)_۲} = \frac{mol_{OH^-}}{۲} = \frac{۸/۴\times۱۰^{-۴}}{۲} = ۴/۲\times۱۰^{-۴}\ mol$$

$$\frac{mol\,Ba(OH)_۲}{ضریب} = \frac{g\,C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶}{جرم\ مولی\times ضریب} \rightarrow \frac{۴/۲\times۱۰^{-۴}}{۳} = \frac{x}{۲\times۸۹۰} \rightarrow x \simeq ۰/۲۵g\,C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$$

۱۴. کدام گزینه درست است؟ $(H=۱, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) در محلول هیدروفلوئوریک اسید، غلظت تعادلی یون فلوئورید، بزرگ‌تر از جذر حاصل «ثابت یونش اسید ضرب‌در غلظت مولی اولیه‌ی اسید» است.

۲) در محلول فورمیک اسید، سرعت تولید یون فورمات برابر با سرعت تولید اسید است.

۳) خاکی که گل ادریسی در آن به رنگ سرخ شکوفا می‌شود، همانند عصاره‌ی گوجه‌فرنگی و آب سیب، دارای pH کوچک‌تر از ۷ است.

۴) اگر در دمای اتاق، درصد جرمی یون هیدرونیوم در یک محلول بازی، ۰/۱ درصد جرمی یون هیدروکسید باشد، pH تقریبی این محلول، بزرگ‌تر از pH محلول شیشه‌پاک‌کن است.

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی

تله‌تستی سرعت واکنش ($\overline{R}_{واکنش}$) حاصل تقسیم سرعت مصرف یا تولید یک ماده، بر ضریب استوکیومتری آن ماده است، از این‌رو اگرچه در هنگام تعادل، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت با یک‌دیگر برابر است، ولی نمی‌توان گفت که سرعت مصرف یا تولید هریک از واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها نیز با یک‌دیگر برابر است؛ زیرا سرعت مصرف یا تولید مواد شرکت‌کننده در واکنش به ضرایب استوکیومتری آن‌ها بستگی دارد به طوری‌که که هرچه ضریب استوکیومتری برای یک ماده بزرگ‌تر باشد، در لحظه‌ی تعادل، سرعت مصرف یا تولید شدن آن نیز بیشتر است. برای نمونه در واکنش $N_۲(g)+۳H_۲(g) \rightleftharpoons ۲NH_۳(g)$ در لحظه‌ی تعادل خواهیم داشت:

مقایسه‌ی سرعت مصرف یا تولید مواد: $\overline{R}(H_۲) > \overline{R}(NH_۳) > \overline{R}(N_۲)$ مقایسه‌ی سرعت واکنش: $\overline{R}_{رفت} = \overline{R}_{برگشت}$

محلول فورمیک اسید $(HCOOH)$ یک سامانه‌ی تعادلی به صورت مقابل است: $HCOOH \rightleftharpoons H^+ + HCOO^-$

در سامانه‌های تعادلی، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت با هم برابر است و چون ضرایب همه‌ی مواد در سامانه تعادلی حاوی محلول فورمیک اسید یکسان است؛ در نتیجه می‌توان گفت که سرعت تولید و مصرف همه‌ی آن‌ها نیز با هم برابر می‌باشد:

مقایسه‌ی سرعت مصرف یا تولید مواد: $\overline{R}(HCOOH) = \overline{R}(HCOO^-) = \overline{R}(H^+)$ مقایسه‌ی سرعت واکنش: $\overline{R}_{رفت} = \overline{R}_{برگشت}$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در محلول هیدروفلوئوریک اسید، اگر بخواهیم $[H^+]$ و $[F^-]$ را بر حسب K_a و α محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$K_a = \frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha} \xrightarrow{\alpha=\frac{[H^+]}{M}} K_a = \frac{M\times\frac{[H^+]^۲}{M^۲}}{۱-\alpha} \Rightarrow K_a = \frac{[H^+]^۲}{M(۱-\alpha)} \Rightarrow [H^+] = \sqrt{K_a.M(۱-\alpha)}$$

$$\xrightarrow{[F^-]=[H^+]} [F^-] = [H^+] = \sqrt{K_a.M(۱-\alpha)}$$

حال با توجه به این‌که $0<\alpha<1$ است، داریم:

$$[F^-]=\sqrt{K_a.\underbrace{M(1-\alpha)}_{\text{عددی بین صفر و یک}}}<\sqrt{K_a.M}$$

۳ عصاره‌ی گوجه‌فرنگی و آب سیب، محلول‌هایی **اسیدی** و دارای $pH<7$ هستند، اما دقت کنید که گل ادریسی در خاک‌های **بازی** به رنگ سرخ شکوفا می‌شود، نه اسیدی!

آفرود رنگ گل ادریسی در خاک‌های اسیدی و بازی برعکس رنگ کاغذ pH در محیط‌های اسیدی و بازی می‌باشد.

رنگ کاغذ pH ←	در محیط‌های اسیدی: سرخ در محیط‌های بازی: آبی

رنگ گل ادریسی ←	در خاک‌های اسیدی: آبی در خاک‌های بازی: سرخ

۴

$$\frac{\text{درصد جرمی یون هیدرونیوم}(H_3O^+)}{\text{درصد جرمی یون هیدروکسید}(OH^-)}=\frac{[H_3O^+]\times19}{[OH^-]\times17}=\frac{[H_3O^+]\times19}{\frac{10^{-14}}{[H_3O^+]}\times17}=0/1\rightarrow[H_3O^+]^2=\frac{17}{19}\times10^{-15}\simeq9\times10^{-16}$$

$$\rightarrow[H_3O^+]=\sqrt{9\times10^{-16}}=3\times10^{-8}\,mol.L^{-1}\rightarrow pH=-\log[H_3O^+]=-\log3\times10^{-8}=8-\log3=7/5$$

با توجه به محاسبات فوق، محلول موردنظر، یک محلول تقریباً خنثی با $pH=7/5$ است و pH آن از محلول شیشه‌پاک‌کن (محلول بازی آمونیاک (NH_3)) با $pH=10/7$ **کوچک‌تر** است.

۱۵. مقداری اسید HB را در ۹۰۰ میلی‌لیتر آب حل می‌کنیم و در نتیجه شمار ذره‌های باردار حاصل از یونش اسید به $3/6\times10^{-5}$ مول می‌رسد. اگر درجهٔ یونش اسید برابر ۰/۰۳ باشد، ثابت یونش اسید کدام است؟ (از تغییر حجم در اثر افزودن اسید، چشم‌پوشی کنید.)

۱) $3/6\times10^{-5}$ ۲) $3/6\times10^{-6}$ ۳) 6×10^{-7} ۴) 6×10^{-6}

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

استراتژی ابتدا با استفاده از شمار مول‌های ذره‌های باردار حاصل از یونش، تعداد مول‌های یون H^+ را حساب کنید و با توجه به حجم محلول، $[H^+]$ را در محلول این اسید به دست آورید. سپس با توجه به درجه‌ی یونش (α) اسید، غلظت اولیه‌ی (M) آن را محاسبه کنید. در نهایت ثابت یونش (K_a) اسید را به دست آورید.

گام اول) در اثر یونش هر مول اسید تک‌پروتون‌دار HB، یک مول یون H^+ و یک مول یون B^- (در مجموع دو مول یون) حاصل می‌شود؛ بنابراین با استفاده از شمار مول‌های ذره‌های باردار (یون‌های) حاصل از یونش اسید و همچنین حجم محلول، $[H^+]$ را در محلول حاصل حساب می‌کنیم:

$$HB\rightleftharpoons H^+ + B^-$$

$$mol_{H^+}=\frac{3/6\times10^{-5}}{2}=1/8\times10^{-5}\xrightarrow{\text{غلظت مولی}=\frac{\text{مول}}{\text{حجم (لیتر)}}}[H^+]=\frac{1/8\times10^{-5}}{900\,mL\times\frac{1}{1000\,mL}}=\frac{1/8\times10^{-5}}{0/9}=2\times10^{-5}\,mol.L^{-1}$$

گام دوم) با توجه به درجه‌ی یونش (α) اسید HB و همچنین $[H^+]$ در محلول این اسید، غلظت اولیه‌ی اسید (M) را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+]=M\alpha\rightarrow M=\frac{[H^+]}{\alpha}=\frac{2\times10^{-5}}{0/03}=\frac{2}{3}\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

گام سوم) ثابت یونش اسید (K_a) را محاسبه می‌کنیم:

روش اول:

$$K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha}\xrightarrow{\alpha<0/05}K_a=M\alpha^2=\frac{2}{3}\times10^{-3}\times(0/03)^2=6\times10^{-7}$$

روش دوم:

$$K_a=\frac{[H^+]^2}{M-[H^+]}\xrightarrow{\alpha<0/05}K_a=\frac{[H^+]^2}{M}=\frac{(2\times10^{-5})^2}{\frac{2}{3}\times10^{-3}}=6\times10^{-7}$$

آزمون‌های ماراتون

شیمی دوازدهم | ۲۹ آبان‌ماه ۱۴۰۴

۱. عنصر A دارای ۱۴ الکترون در لایه‌ی سوم اتم خود و عنصر B نیز دارای ۷ الکترون در لایه‌ی دوم اتم خود است. اگر این دو اتم با یک‌دیگر واکنش دهند، امکان تولید ..... وجود دارد و عنصر کاهنده در این واکنش، ..... است.

۱) $A-AB_2$ ۲) $A-AB$ ۳) $B-AB_2$ ۴) $B-AB$

پاسخ: گزینه ۱ ساده | مفهومی

نخست باید عنصرهای داده شده را شناسایی کنیم:

عنصر A: با توجه به آرایش الکترونی اتم عنصر A که به صورت زیر است، A همان عنصر آهن $(_{26}Fe)$ می‌باشد:

$$A: 1s^2/2s^2\,2p^6/\underbrace{3s^2\,3p^6\,3d^6}_{\text{۱۴ الکترون}}/4s^2 \Rightarrow (_{26}Fe)\ \text{عنصر آهن}$$

عنصر B: این عنصر همان عنصر فلوئور $(_9F)$ است که در لایه‌ی دوم اتم خود ۷ الکترون داشته و در گروه ۱۷ جدول دوره‌ای جای دارد:

$$B: 1s^2/\underbrace{2s^2\,2p^5}_{\text{۷ الکترون}} \Rightarrow (_9F)\ \text{عنصر فلوئور}$$

عنصر آهن دارای دو یون پایدار Fe^{2+} و Fe^{3+} می‌باشد، همچنین عنصر فلوئور نیز دارای یون پایدار F^- است؛ بنابراین این دو عنصر در واکنش با یک‌دیگر می‌توانند دو نوع ترکیب یونی FeF_2 و FeF_3 را تولید کنند که در هر دو ترکیب، چون عنصر آهن (عنصر A) الکترون از دست می‌دهد، عنصر کاهنده خواهد بود.

۲. کدام گزینه درباره‌ی سوختن منیزیم نادرست است؟

۱) نور خیره‌کننده‌ای تولید می‌کند و در گذشته به عنوان منبع نور برای عکاسی از آن استفاده می‌شد.

۲) فراورده‌ی واکنش یک ترکیب یونی است که در آن کاتیون و آنیون، هردو به آرایش الکترونی یک گاز نجیب رسیده‌اند.

۳) یک واکنش اکسایش – کاهش است که در آن فلز منیزیم، نقش کاهنده را دارد.

۴) معادله‌ی نیم‌واکنش کاهش آن را می‌توان به صورت $O_2(g)+4e^- \rightarrow 2O^{2-}(g)$ نوشت.

پاسخ: گزینه ۴ ساده | حفظی، مفهومی

بررسی گزینه‌ها:

۱ در گذشته، از نور خیره‌کننده‌ی حاصل از سوختن منیزیم، به عنوان منبع نور برای عکاسی استفاده می‌شد.

۲ معادله‌ی واکنش سوختن منیزیم به صورت $2Mg(s)+O_2(g) \rightarrow 2MgO(s)$ است. MgO از یون‌های $_{12}Mg^{2+}$ و $_8O^{2-}$ تشکیل شده است و هر دو یون به آرایش الکترونی **گاز نجیب نئون $(_{10}Ne)$ رسیده‌اند.**

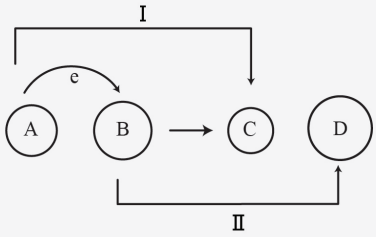
۳ در واکنش موردنظر، منیزیم، نقش کاهنده و اکسیژن، نقش اکسنده را به عهده دارند.

۴ معادله‌ی کلی واکنش انجام شده و معادله‌ی نیم‌واکنش‌های موردنظر به صورت زیر است:

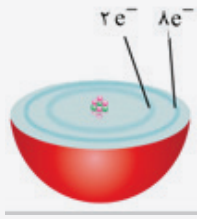
$$\overset{4e^-}{\curvearrowright}\quad 2\underset{\text{کاهنده}}{Mg} + \underset{\text{اکسنده}}{O_2} \rightarrow 2MgO \Rightarrow \begin{matrix} \text{نیم‌واکنش اکسایش: } Mg(s) \rightarrow Mg^{2+}(s)+2e^- \\ \text{نیم‌واکنش کاهش: } O_2(g)+4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s) \end{matrix}$$

حواستان باشد که حالت فیزیکی O^{2-} باید جامد باشد.

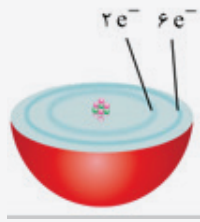
۳. با توجه به الگوی (الف) و شکل‌های (ب) و (پ)، کدام مورد درست است؟



(الف)



(ب)



(پ)

۱) A و B، به ترتیب کاهنده و اکسنده این واکنش اکسایش – کاهش هستند و در معادله‌ی نیم‌واکنش II، نماد الکترون کنار B قرار می‌گیرد.

۲) ضریب الکترون در نیم‌واکنش‌های I و II، پس از موازنه، با هم برابر است.

۳) اگر ساختار کاتیون C به به شکل (ب) باشد، در لایه‌ی ظرفیت اتم A، به یقین دو الکترون با عددهای کوانتومی یکسان دیده می‌شود.

۴) اگر ساختار اتم B به شکل (پ) باشد، A می‌تواند اتم هر فلز اصلی یا واسطه جدول تناوبی در نظر گرفته شود.

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | حفظی، مفهومی

فرایند (I)، از دست دادن الکترون توسط A را نشان می‌دهد؛ بنابراین نشان‌دهنده‌ی فرایند اکسایش است، در حالی‌که فرایند (II)، کاهش B (الکترون گرفتن B) را نشان می‌دهد:

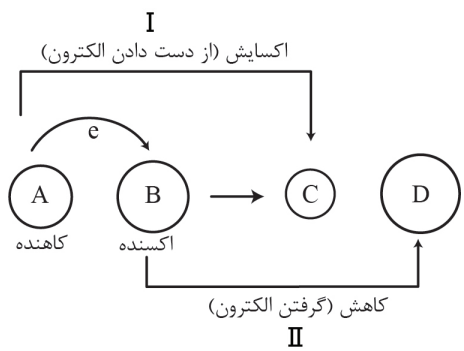
$$\underset{\text{کاهنده}}{A}\text{:اکسایش } A \rightarrow C + xe^- \qquad \underset{\text{اکسنده}}{B}\text{:کاهش } B + ye^- \rightarrow D$$

نکته

گونه‌ای که الکترون از دست می‌دهد. ← یعنی ← خودش اکسایش می‌یابد یا اکسید می‌شود. ← پس ← گونه‌ی دیگر را کاهش می‌دهد یا می‌کاهد. ← پس ← کاهنده (الکترون‌دهنده) است

گونه‌ای که الکترون می‌گیرد. ← یعنی ← خودش کاهش می‌یابد یا کاهیده می‌شود. ← پس ← گونه‌ی دیگر را اکسایش می‌دهد یا اکسید می‌کند. ← پس ← اکسنده (الکترون‌گیرنده) است

بدین‌ترتیب می‌توان گفت که A و B در این واکنش اکسایش – کاهش، به‌ترتیب نقش کاهنده و اکسنده را دارند، همچنین در معادله‌ی نیم‌واکنش کاهش (نیم‌واکنش (II))، نماد الکترون کنار B قرار می‌گیرد.



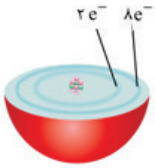
بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ لزوماً در نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش، شمار الکترون‌ها پس از موازنه یکسان نیست. به عنوان مثال، نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش را در واکنش کلی « $4Na(s) + O_2(g) \rightarrow 2Na_2O(s)$ » در نظر بگیرید:

نیم‌واکنش اکسایش: $Na(s) \rightarrow Na^+(s) + e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$

۳ شکل (ب) مربوط به گاز نجیب نئون ($_{10}Ne$) است:



$\rightarrow {}_{10}Ne: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6$

بنابراین اتم A می‌تواند سدیم (Na_{11})، منیزیم (Mg_{12}) و آلومینیم (Al_{13}) باشد، در حالی‌که عبارت مطرح شده در مورد اتم Na درست نیست، زیرا تنها یک الکترون ظرفیتی دارد:

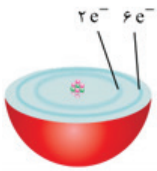
$_{11}Na: [_{10}Ne]\ \underline{3s^1}$ ← یک الکترون با $l=0$

$_{12}Mg: [_{10}Ne]\ \underline{3s^2}$ ← دو الکترون با $l=0$

$_{13}Al: [_{10}Ne]\ \underline{3s^2}\ \overline{3p^1}$ ← یک الکترون با $l=1$

← دو الکترون با $l=0$

۴ شکل (پ) مربوط به اکسیژن (O_8) است:



$\rightarrow {}_{8}O: 1s^2\ 2s^2\ 2p^4$

اکسیژن نافلزی فعال است که با اغلب فلزها واکنش می‌دهد و آن‌ها را به اکسید فلز تبدیل می‌کند، اما حواستان باشد که اکسیژن با برخی فلزها مانند طلا و پلاتین که هر دو آن‌های جزو فلزهای واسطه هستند، واکنش نمی‌دهد؛ بنابراین A لزوماً نمی‌تواند هر فلز اصلی یا واسطه‌ی جدول تناوبی باشد.

۴ . کدام موارد از عبارت‌های زیر در مورد الکتروشیمی و کاربردهای آن نادرست است؟

آ) در برخی از پدیده‌های طبیعی مثل آذرخش، پرکاربردترین شکل انرژی میان واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌های فرایندی هدفمند جاری می‌شود.

ب) باتری مولدی است که در آن واکنش‌های شیمیایی رخ می‌دهد تا تمام انرژی شیمیایی مواد موجود در آن به انرژی الکتریکی تبدیل شود.

پ) بهره‌گیری از انرژی ذخیره شده در فلزها، با ساخت نمونه‌ای از یک باتری لیمویی شامل لیمو و دو تیغه‌ی یکسان مثلاً از جنس مس امکان‌پذیر است.

ت) چراغ خورشیدی از لامپ LED، سلول خورشیدی و باتری قابل شارژ تشکیل شده است.

۱) آ، ب ۲) آ، ب، پ ۳) پ، ت ۴) ب، پ، ت

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | حفظی

عبارت‌های (آ)، (ب) و (پ) نادرست هستند.

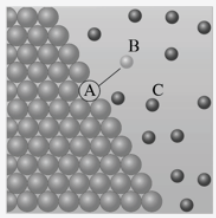
بررسی عبارت‌های نادرست:

آ حواستان باشد که در پدیده‌های طبیعی همچون تندر و آذرخش، انرژی به شکل انرژی الکتریکی (به عنوان پرکاربردترین شکل انرژی در زندگی روزانه)، میان **سامانه‌ی واکنش و محیط پیرامون** جاری می‌شود.

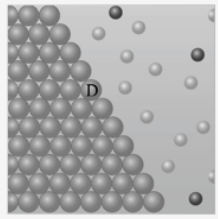
ب باتری مولدی است که در آن واکنش‌های شیمیایی با سفر الکترون رخ می‌دهد تا بخشی از انرژی شیمیایی مواد به انرژی الکتریکی تبدیل شود.

پ **هر دو تیغه نباید از یک جنس باشند**، زیرا نمی‌توانند منجر به مبادله‌ی الکترون و تولید انرژی الکتریکی شوند. با فرو بردن یک تیغه‌ی مسی و **تیغه‌ای از جنس دیگر** مانند روی در لیمو، می‌توان باتری لیمویی ساخت.

۵ . با توجه به شکل‌های مقابل که واکنش میان تیغه‌ای از یک فلز با محلول نمک فلز دیگری را با گذشت زمان نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟



شکل ۱



شکل ۲

۱) میان گونه‌های نشان داده شده، B و D به ترتیب قوی‌ترین اکسنده و کاهنده محسوب می‌شوند.

۲) اگر جرم مولی فلز D از جرم مولی فلز A بیشتر باشد، با گذشت زمان و فرض بازدهی کامل، جرم تیغه افزایش می‌یابد.

۳) اگر بدانیم یون نقره از هر دو کاتیون موجود، اکسنده‌تر باشد، انتقال محتویات سامانه در شکل (۲) به ظرفی از جنس نقره، منجر به تغییر دما نخواهد شد.

۴) با تغییر آنیون‌های ترکیب یونی حاوی C، شمار الکترون‌های مبادله شده در واکنش کلی ممکن است تغییر کند.

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | حفظی

درسنامه

در واکنش‌های اکسایش - کاهش که به‌طور طبیعی انجام می‌شوند، کاهنده‌ی قوی‌تر و اکسنده‌ی قوی‌تر باهم واکنش داده و به ترتیب اکسنده‌ی ضعیف‌تر و کاهنده‌ی ضعیف‌تر، تشکیل می‌شوند.

اکسایش

کاهنده‌ی قوی‌تر + اکسنده‌ی قوی‌تر → اکسنده‌ی ضعیف‌تر + کاهنده‌ی ضعیف‌تر

کاهش

از این نکته می‌توانیم برای مقایسه‌ی قدرت اکسندگی و کاهندگی گونه‌ها در واکنش‌هایی که معادله‌ی آن‌ها داده شده است، استفاده کنیم. در این موارد باید به صورت زیر عمل کنیم:

گام اول) گونه‌های اکسنده و کاهنده را در سمت چپ معادله مشخص می‌کنیم. گونه‌ای که الکترون از دست داده (بار الکتریکی آن، مثبت‌تر شده)، کاهنده و گونه‌ای که الکترون گرفته (بار الکتریکی آن منفی‌تر شده)، اکسنده است. گونه‌های حاصل از کاهنده و اکسنده‌ی سمت چپ معادله را به ترتیب به عنوان گونه‌های اکسنده و کاهنده سمت راست معادله در نظر می‌گیریم (یعنی به صورت برعکس!). مثلاً اگر در سمت چپ معادله، Zn کاهنده است، Zn^{2+} را به عنوان گونه‌ی اکسنده‌ی سمت راست معادله، در نظر می‌گیریم.

گام دوم) باتوجه‌به‌نکته‌ی‌بالا، اگر واکنش در جهت رفت به‌طور طبیعی انجام شده باشد (خودبه‌خودی باشد)، می‌گوییم کاهنده‌ی سمت چپ از سمت راست و همچنین اکسنده‌ی سمت چپ از سمت راست، قوی‌تر است. حواستان باشه که در واکنش‌های خودبه‌خودی، قوی‌ترها، هردو در سمت چپ معادله قرار دارند.

مثال: واکنش بین فلز روی با محلول مس (II) سولفات به‌طور طبیعی انجام می‌شود؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\underset{\text{کاهنده‌ی قوی‌تر}}{Zn} + \underset{\text{اکسنده‌ی قوی‌تر}}{Cu^{2+}} \rightarrow \underset{\text{اکسنده‌ی ضعیف‌تر}}{Zn^{2+}} + \underset{\text{کاهنده‌ی ضعیف‌تر}}{Cu} \Rightarrow \begin{matrix} \text{قدرت کاهندگی: } Zn > Cu \\ \text{قدرت اکسندگی: } Cu^{2+} > Zn^{2+} \end{matrix}$$

مثال: با توجه به واکنش خودبه‌خودی زیر می‌توان نوشت:

اکسایش

$$\underset{\text{کاهنده‌ی قوی‌تر}}{2Cr^{2+}} + \underset{\text{اکسنده‌ی قوی‌تر}}{Sn^{2+}} \rightarrow \underset{\text{اکسنده‌ی ضعیف‌تر}}{2Cr^{3+}} + \underset{\text{کاهنده‌ی ضعیف‌تر}}{Sn} \Rightarrow \begin{matrix} \text{قدرت کاهندگی: } Cr^{2+} > Sn \\ \text{قدرت اکسندگی: } Sn^{2+} > Cr^{3+} \end{matrix}$$

کاهش

اگر یون نقره (Ag^+) از هر دو گونه‌ی B و C اکسنده‌تر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که ترتیب قدرت کاهندگی فلزهای A، D و Ag به صورت زیر است:

مقایسه قدرت کاهندگی: $A > D > Ag$

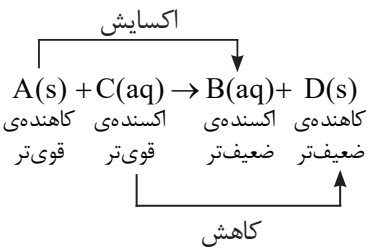
آفرود: **مقایسه‌ی قدرت اکسندگی کاتیون‌های دو فلز، برعکس مقایسه‌ی قدرت کاهندگی خود فلزها است.** به عبارت دیگر، هر چه فلزی قدرت کاهندگی بیشتری داشته باشد، کاتیون آن، تمایل کم‌تری برای گرفتن الکترون دارد:

قدرت کاهندگی: $A > B \Leftrightarrow$ قدرت اکسندگی: $A^{n+} < B^{m+}$

با توجه به این‌که قدرت کاهندگی فلز Ag، پایین‌تر از فلزهای A و D است؛ پس می‌توان گفت که با انتقال محتویات سامانه در شکل (۲) (و حتی شکل (۱)) به ظرفی از جنس فلز Ag، واکنش انجام نشده و در نتیجه دما نیز تغییر نخواهد کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ معادله‌ی کلی واکنش انجام شده به صورت مقابل است:



در نتیجه اتم A، قوی‌ترین کاهنده و کاتیون C، قوی‌ترین اکسنده در این شکل است.

۲ دقت کنید تا زمانی که ضرایب استوکیومتری $A(s)$ و $D(s)$ در معادله‌ی واکنش مشخص نباشد، نمی توانیم در مورد تغییر جرم تیغه اظهارنظر کنیم. با فرض این‌که بازده واکنش ۱۰۰٪ باشد، به ازای ضرایب در معادله‌ی موازنه شده‌ی این واکنش، تغییر جرم تیغه برابر است با:

تغییر جرم تیغه = (جرم مولی D × ضریب استوکیومتری D) − (جرم مولی A × ضریب استوکیومتری A)

۴ در این واکنش، آنیون‌های نمک محلول در آب نقش یون ناظر را دارند و در واکنش اکسایش - کاهش شرکت نمی‌کنند؛ پس تغییر آن‌ها در معادله‌ی نیم‌واکنش‌ها و در نتیجه شمار الکترون‌های مبادله شده در واکنش، تأثیری ندارد.

۶. در ارتباط با واکنش‌های اکسایش - کاهش، کدام عبارت از نظر درستی یا نادرستی با سایر عبارت‌ها متفاوت است؟

۱) این نوع از واکنش‌های شیمیایی همواره با حضور عنصر یا عنصرهای آزاد و سفر الکترون‌ها میان دو نوع گونه شناخته می‌شوند.

۲) در یک واکنش اکسایش – کاهش، دو نیم‌واکنش که برای انجام به هم وابسته‌اند، به‌طور هم‌زمان رخ می‌دهند.

۳) در واکنش اکسایش – کاهش میان فلزهای A و B، هرچه بار الکتریکی کاتیون‌های دو فلز بزرگ‌تر باشد، سرعت واکنش و مقدار گرمای آزاد شده بیشتر است.

۴) این نوع واکنش‌ها درون باتری‌ها انجام می‌شود اما بخشی از انرژی الکتریکی قابل تبدیل به انرژی شیمیایی نیست.

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | حفظی، مفهومی

در یک واکنش اکسایش – کاهش، فرایندهای از دست دادن و گرفتن الکترون **به‌طور هم‌زمان** رخ می‌دهند. شیمی‌دان‌ها هریک از این فرایندها را با یک نیم‌واکنش نشان می‌دهند. به نیم واکنشی که از دست دادن الکترون را نشان می‌دهد، «**نیم‌واکنش اکسایش**» و به نیم‌واکنشی که گرفتن الکترون را نشان می‌دهد، «**نیم‌واکنش کاهش**» می‌گویند. در نیم‌واکنش اکسایش، الکترون در سمت راست معادله و در نیم‌واکنش کاهش، الکترون در سمت چپ معادله قرار دارد.

گزینهٔ (۲) برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ اگر در یک طرف معادله‌ی واکنشی، یک عنصر به حالت آزاد وجود داشته باشد، می‌توانید به راحتی بگویید که آن واکنش از نوع اکسایش – کاهش است، اما این گفته به این معنی نیست که اگر در واکنشی عنصر آزاد وجود نداشته باشد، آن واکنش نمی‌تواند از نوع اکسایش – کاهش باشد.

در مثال‌های زیر، با این که در معادله‌ی واکنش‌ها، عنصر آزاد وجود ندارد، اما این واکنش‌ها از نوع اکسایش – کاهش هستند.

(۱)مثال: $K_۲SO_۳ + H_۲O_۲ \rightarrow K_۲SO_۴ + H_۲O$

(۲)مثال: $۳NO_۲(g) + H_۲O(g) \rightarrow ۲HNO_۳(g) + NO(g)$

۳ دقت کنید که در واکنش اکسایش – کاهش موردنظر، سرعت واکنش و میزان گرمای آزاد شده، به تفاوت قدرت کاهندگی دو فلز بستگی دارد؛ نه بار آن‌ها!

۴ در باتری‌ها و سلول‌های سوختی، با انجام واکنش‌های شیمیایی، الکتریسیته یا انرژی تولید می‌شود. در واقع، **باتری**، مولدی است که در آن بر اثر انجام واکنش‌های شیمیایی، **بخشی از انرژی شیمیایی مواد به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.**

۷ . تیغه‌ای از جنس فلز آلومینیم به جرم ۱۰۸ گرم را در محلولی از مس (II) سولفات به حجم ۳ لیتر و غلظت ۱/۵ مولار قرار می‌دهیم. به ازای هر سه اتم فلز تولید شده، دو اتم کف ظرف و اتم دیگر بر روی تیغه رسوب می‌کند. در لحظه‌ای که جرم تیغه به ۱۲۰/۵ گرم رسیده است، چه تعداد الکترون میان گونه‌ها مبادله شده است؟ (از تغییر حجم محلول صرف‌نظر کنید، $Al = ۲۷, Cu = ۶۴ : g.mol^{-۱}$)

۱) $۴/۵۱۵ \times ۱۰^{۲۴}$ ۲) $۴/۵۱۵ \times ۱۰^{۲۳}$ ۳) $۲/۷۰۹ \times ۱۰^{۲۴}$ ۴) $۲/۷۰۹ \times ۱۰^{۲۳}$

پاسخ: گزینه ۱ سخت | محاسباتی

استراتژی معادله‌ی واکنش $Al(s)$ با محلول $CuSO_۴(aq)$ را نوشته و موازنه کنید، سپس شمار الکترون‌های مبادله شده در واکنش بر اساس معادله‌ی موازنه شده آن را محاسبه کنید. در مرحله‌ی بعدی، تغییر جرم تیغه را بر اساس معادله‌ی واکنش و با توجه به این‌که $\frac{۱}{۳}$ اتم‌های فلز مس تولیدی بر روی تیغه رسوب می‌کنند، حساب کنید. در نهایت با استفاده از تغییر جرم ۱۲/۵ گرمی تیغه در این واکنش، شمار الکترون‌های مبادله شده در آن و همچنین تغییر غلظت محلول $CuSO_۴(aq)$ در طی واکنش را محاسبه کنید و با توجه به غلظت اولیه‌ی محلول $CuSO_۴(aq)$، غلظت نهایی آن را در پایان واکنش، به دست آورید.

گام اول) معادله‌ی واکنش فلز آلومینیم $(Al(s))$ با محلول مس (II) سولفات $(CuSO_۴(aq))$ را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$۲Al(s) + ۳CuSO_۴(aq) \rightarrow Al_۲(SO_۴)_۳(aq) + ۳Cu(s)$$

گام دوم) شمار الکترون‌های مبادله شده در واکنش بر اساس معادله‌ی موازنه شده‌ی آن را محاسبه می‌کنیم:

آفرود برای محاسبه‌ی شمار الکترون‌های مبادله شده در یک واکنش اکسایش – کاهش می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

تغییر بار الکتریکی اکسنده × ضریب اکسنده × شمار اتم‌های کاهش یافته در اکسنده = تعداد الکترون مبادله شده بر اساس معادله‌ی موازنه شده

تغییر بار الکتریکی کاهنده × ضریب کاهنده × شمار اتم‌های اکسایش یافته در کاهنده =

تعداد الکترون‌های مبادله شده در این واکنش، بر اساس معادله‌ی موازنه شده آن برابر است با:

$$\text{بر اساس کاهنده}(Al) = \underset{\text{تغییر بار الکتریکی}}{۳} \times \underset{\text{ضریب Al}}{۲} \times \underset{\text{اتم‌ها در Al}}{\text{شمار } ۱} = ۶e^-$$

$$\text{بر اساس اکسنده}(Cu^{۲+}) = \underset{\text{تغییر بار الکتریکی}}{۲} \times \underset{\text{ضریب } Cu^{۲+}}{۳} \times \underset{\text{در } Cu^{۲+}}{\text{شمار اتم‌ها } ۱} = ۶e^-$$

گام سوم) شمار الکترون‌های مبادله شده در واکنش را با توجه به تغییر جرم تیغه محاسبه می‌کنیم:

روش اول:

$$\text{تغییر جرم تیغه به ازای ضرایب واکنش} = [۳\,mol\,Cu \times \frac{۶۴\,g\,Cu}{۱\,mol\,Cu} \times \frac{۱}{۳}] - [۲\,mol\,Al \times \frac{۲۷\,g\,Al}{۱\,mol\,Al}] = ۱۰\,g \text{ افزایش جرم تیغه}$$

جرم اولیه‌ی تیغه‌ی آلومینیم، ۱۰۸ گرم و جرم نهایی آن ۱۲۰/۵ گرم است؛ بنابراین به جرم این تیغه، ۱۲/۵=۱۰۸−۱۲۰/۵ گرم افزوده شده است. این تغییر جرم ناشی از اختلاف جرم فلز مس (Cu) رسوب کرده بر روی تیغه، با جرم مصرفی فلز آلومینیم (Al) است؛ بنابراین داریم:

$$۱۲/۵\,g\text{ افزایش جرم تیغه} \times \frac{۶\,mol\,e^-}{۱۰\,g\text{ افزایش جرم تیغه}} \times \frac{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\,e^-}{۱\,mol\,e^-} = ۴/۵۱۵\times۱۰^{۲۴}\,e^-$$

روش دوم: در مسائل مربوط به تغییر جرم تیغه، می‌توانیم از کسر تناسب به شکل زیر استفاده کنیم:

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد}}{\text{عدد آووگادرو}\times\text{ضریب}} = \ldots = \frac{\text{تغییر جرم تیغه}}{(\text{جرم مولی فلز تیغه}\times\text{ضریب}) - (\frac{\text{درصد چسبیدن}}{۱۰۰}\times\text{جرم مولی فلز تولید شده}\times\text{ضریب})}$$

بنابراین با توجه به تغییر جرم ۱۲/۵ گرمی تیغه در این واکنش و همچنین با توجه به این‌که $\frac{۱}{۳}$ اتم‌های فلز مس تولیدی بر روی تیغه رسوب می‌کند، داریم:

$$\frac{mole^-}{\text{ضریب}} = \frac{\text{تغییر جرم تیغه}}{(\text{جرم مولی Cu}\times\text{ضریب Cu}\times\frac{۱}{۳}) - (\text{جرم مولی Al}\times\text{ضریب Al})} \rightarrow \frac{x}{۶} = \frac{۱۲/۵}{(۳\times۶۴\times\frac{۱}{۳}) - (۲\times۲۷)}$$

$$\rightarrow \frac{x}{۶} = \frac{۱۲/۵}{۱۰} \rightarrow x = ۷/۵\,mole^- \times \frac{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\,e^-}{۱\,mole^-} = ۴/۵۱۵\times۱۰^{۲۴}\,e^-$$

۸ . با توجه به نیم‌واکنش‌های مقابل، کدام مورد نادرست است؟ $(m<n)$

I) $X^{n+}(g) \rightarrow X^{m+}(g)$

II) $Y^{n-}(g) \rightarrow Y^{m-}(g)$

۱) برای موازنه‌ی بار الکتریکی در نیم‌واکنش (I)، باید تعدادی الکترون در سمت واکنش‌دهنده قرار داد.

۲) گونه‌ی X^{n+}، اکسنده و گونه‌ی Y^{n-}، کاهنده محسوب می‌شود.

۳) نیم‌واکنش (I)، می‌تواند تبدیل یون آهن در FeO به یون آهن در $Fe_۲O_۳$ باشد.

۴) X می‌تواند عنصری از دسته‌ی d جدول تناوبی باشد.

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی

نکته ویژگی‌های گونه کاهنده و اکسنده:

از دست دادن الکترون ← اکسایش یافتن ← کاهنده بودن

به دست آوردن الکترون ← کاهش یافتن ← اکسنده بودن

اکسنده	کاهنده
الکترون می‌گیرد	الکترون از دست می‌دهد
کاهش می‌یابد	اکسید می‌شود
گونه دیگر را اکسید می‌کند	گونه دیگر را کاهش می‌دهد

اگر بار الکتریکی یک گونه افزایش یابد، آن گونه اکسایش یافته و اگر بار الکتریکی یک گونه کم‌تر شود، آن گونه کاهش یافته است. با توجه به مقایسه‌ی داده شده در مورد اعداد m و n، نیم‌واکنش (I)، نیم‌واکنش کاهش و نیم‌واکنش دیگر، نیم‌واکنش اکسایش می‌باشد. در مورد واکنش (II) حواستان باشد که با اعداد منفی سروکار داریم؛ به عنوان مثال اگر $n=۲$ و $m=۱$ باشد، بار الکترون از ۲− به ۱− افزایش می‌یابد؛ بنابراین به همین دلیل است که گفتیم، نیم‌واکنش (II)، اکسایش را نشان می‌دهد.

یون آهن در FeO، Fe^{2+} و در Fe_2O_3، Fe^{3+} است. تبدیل Fe^{2+} به Fe^{3+} اکسایش است، در حالی که گفتیم که نیم‌واکنش (I)، مربوط به کاهش یون X^{n+} است.

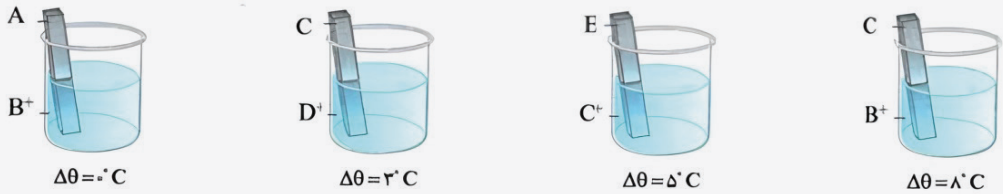
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در نیم‌واکنش کاهش، الکترون‌ها سمت واکنش‌دهنده‌ها قرار می‌گیرند.

۲ گفتیم که در نیم‌واکنش (I)، X^{n+} کاهش یافته و در نتیجه اکسنده است. همچنین در نیم‌واکنش (II)، Y^{n-} اکسایش یافته و در نتیجه کاهنده محسوب می‌شود.

۴ برخی از فلزهای واسطه، کاتیون‌هایی با بارهای الکتریکی متفاوت دارند؛ بنابراین نیم‌واکنش (I)، می‌تواند مربوط به کاهش Fe^{3+} به Fe^{2+} یا Cu^{2+} به Cu^{+} و ... باشد.

۹ . اگر تصاویر زیر نشان‌دهنده‌ی تغییر دما در ۴ آزمایش مختلف باشد، کدام مقایسه در ارتباط با تمایل اتم این فلزها برای از دست دادن الکترون، درست است؟ (نماد شیمیایی فلزها فرضی است.)



۱) $A<D<B<C$ ۲) $A<E<D<C$ ۳) $A<B<C<E$ ۴) $D<B<C<E$

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی

با توجه به این‌که در واکنش میان فلز A و محلول حاوی کاتیون‌های B^+، تغییر دما نداریم، می‌توان نتیجه گرفت که این واکنش انجام‌ناپذیر بوده و تمایل فلز A برای از دست دادن الکترون و در واقع واکنش‌پذیری فلز A، کم‌تر از فلز B می‌باشد. همچنین با توجه به این‌که فلز C توانسته با محلول‌های حاوی کاتیون‌های D^+ و B^+ واکنش دهد (با توجه به این‌که هر سه ظرف تغییر دما داده‌اند که نشانه‌ی انجام واکنش شیمیایی است)، می‌توان نتیجه گرفت که تمایل فلز C برای از دست دادن الکترون و در واقع واکنش‌پذیری فلز C، بیشتر از فلزهای B و D می‌باشد.

در نهایت با توجه به انجام‌پذیر بودن واکنش میان فلز E با محلول حاوی کاتیون‌های C^+، می‌توان گفت که تمایل فلز E برای از دست دادن الکترون و در واقع واکنش‌پذیری فلز E، بیشتر از فلز C می‌باشد.

پس فلز A کم‌ترین و فلز E بیشترین واکنش‌پذیری و تمایل به از دست دادن الکترون را در میان فلزهای داده شده دارند. به علاوه این‌که تغییر دما در واکنش میان فلز C با محلول‌های حاوی کاتیون‌های B^+، بیشتر از واکنش میان فلز C با محلول‌های حاوی کاتیون‌های D^+ می‌باشد، بنابراین شدت واکنش فلز C با محلول‌های حاوی کاتیون‌های B^+ بیشتر بوده و در واقع قدرت کاهندگی فلز D نسبت به فلز B، به فلز C نزدیک‌تر می‌باشد و بدین‌ترتیب می‌توان گفت که واکنش‌پذیری فلز D و در واقع تمایل فلز D برای از دست دادن الکترون، بیشتر از فلز B می‌باشد.

بنابراین مقایسه‌ی تمایل این فلزها برای از دست دادن الکترون به صورت مقابل است: $A<B<D<C<E$

کنکورچی‌میگه؟ با توجه به واکنش‌های زیر که به‌طور خودبه‌خودی در جهت رفت پیش می‌روند، کدام ترتیب قدرت اکسندگی کاتیون‌ها درست است؟ (سراسری تجربی داخل ۹۱)

$$Sn^{4+}(aq)+H_2(g)\rightarrow Sn^{2+}(aq)+2H^+(aq)$$

$$2H^+(aq)+Sn(s)\rightarrow H_2(g)+Sn^{2+}(aq)$$

$$2Fe^{3+}(aq)+Sn^{2+}(aq)\rightarrow 2Fe^{2+}(aq)+Sn^{4+}(aq)$$

۱) $Fe^{3+}<Sn^{2+}<H^+<Sn^{4+}$ ۲) $Fe^{3+}>Sn^{2+}>H^+>Sn^{4+}$

۳) $Fe^{3+}<Sn^{4+}<H^+<Sn^{2+}$ ۴) $Fe^{3+}>Sn^{4+}>H^+>Sn^{2+}$

پاسخ: گزینه ۴ ساده | مفهومی

با توجه به واکنش‌های انجام شده خواهیم داشت:

$Sn^{4+}(aq)+H_2(g)\rightarrow Sn^{2+}(aq)+2H^+(aq) \Rightarrow$ (کاهش یافتن) قدرت اکسندگی: $Sn^{4+} > H^+$

$2H^+(aq)+Sn(s)\rightarrow H_2(g)+Sn^{2+}(aq) \Rightarrow$ (کاهش یافتن) قدرت اکسندگی: $H^+ > Sn^{2+}$

$2Fe^{3+}(aq)+Sn^{2+}(aq)\rightarrow 2Fe^{2+}(aq)+Sn^{4+}(aq) \Rightarrow$ (کاهش یافتن) قدرت اکسندگی: $Fe^{3+} > Sn^{4+}$

قدرت اکسندگی: $Fe^{3+} > Sn^{4+} > H^+ > Sn^{2+}$

۱۰. کدام مطالب زیر درست است؟

آ) تولید انرژی الکتریکی به کمک الکتروشیمی، با جنبه‌های اقتصادی و زیست‌محیطی توسعه‌ی پایدار سازگار است.

ب) اگر در باتری لیمویی، به جای آبلیمو از محلول یک مولکول قطبی مانند استون استفاده کنیم، تغییری در کارکرد باتری ایجاد نمی‌شود.

پ) در بین عنصرهایی که عدد اتمی آن‌ها با شماره گروه آن‌ها در جدول تناوبی برابر است، فقط یک عنصر وجود دارد که اغلب به عنوان کاهنده شناخته می‌شود.

ت) در اثر انجام واکنش میان فلزهای دوره‌ی چهارم جدول تناوبی با گاز اکسیژن، تفاوت شعاع اتم‌های اکسنده و کاهنده کاهش می‌یابد.

۱) آ، ت ۲) ب، پ ۳) آ، پ، ت ۴) آ، ب، پ

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | حفظی، مفهومی

عبارت‌های (آ)، (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی همه‌ی عبارت‌ها:

آ) تولید انرژی الکتریکی پاک و ارزان، دستاوردی از دانش الکتروشیمی است که در سایه‌ی فناوری‌های پیشرفته، افزایش سطح رفاه و آسایش را در جهان به دنبال داشته است. الکتروشیمی افزون بر تهیه‌ی مواد جدید به کمک انرژی الکتریکی، می‌تواند در راستای **پیاده کردن اصول شیمی سبز (و در نتیجه جنبه‌های اقتصادی و زیست‌محیطی توسعه‌ی پایدار)** گام برداشته و با آن سازگار باشد.

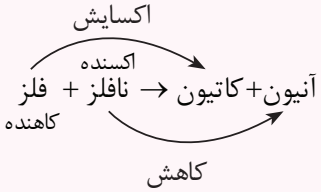
ب) استون ($CH_3-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-CH_3$)، یک ماده‌ی **غیرالکترولیت** است؛ در نتیجه به صورت **کاملاً مولکولی** در آب حل شده و **یونی تولید نمی‌کند.** چنین محلولی **نمی‌تواند** به عنوان محلول در یک باتری مورد استفاده قرار گیرد.

پ) در جدول تناوبی در ۷ عنصر با عددهای اتمی ۱ و ۱۳ تا ۱۸، عدد اتمی با شماره‌ی گروه آن‌ها برابر است:

آرگون($_{18}Ar$)، کلر($_{17}Cl$)، گوگرد($_{16}S$)، فسفر($_{15}P$)، سیلیسیم($_{14}Si$)، آلومینیم($_{13}Al$)، هیدروژن($_1H$)

نافلز — شبه‌فلز — فلز — نافلز

موشکافی اغلب فلزها، در واکنش با نافلزها تمایل دارند یک یا چند الکترون خود را به نافلزها داده و ضمن اکسایش، به کاتیون تبدیل شوند، در نتیجه این فلزها کاهنده‌اند. از طرفی نافلزها تمایل دارند که با گرفتن یک یا چند الکترون، کاهش یافته و به آنیون تبدیل شوند. به همین دلیل، نافلزها اکسنده‌اند.



فلزهایی که در واکنش‌های اکسایش – کاهش شرکت می‌کنند، **اغلب** کاهنده‌اند. بنابراین در میان عنصرهایی که عدد اتمی آن‌ها برابر با شماره‌ی گروه آن‌ها در جدول تناوبی است، تنها **آلومینیم ($_{13}Al$)** عنصر **فلزی** است و اغلب به عنوان کاهنده شناخته می‌شود.

ت در واکنش میان فلزهای دوره‌ی چهارم جدول تناوبی با گاز اکسیژن، اتم فلز، الکترون از دست داده، اکسایش یافته و نقش کاهنده را دارد، همچنین اکسیژن، الکترون گرفته، کاهش یافته و نقش اکسنده را دارد. شعاع **اتم فلز با از دست دادن الکترون و تبدیل شدن به کاتیون، کاهش یافته و شعاع اتم اکسیژن با گرفتن الکترون و تبدیل شدن به آنیون (O^{2-})، افزایش می‌یابد.** از آن‌جا که شعاع اتمی فلزهای دوره‌ی چهارم بیشتر از شعاع اتمی اکسیژن است؛ در نتیجه می‌توان گفت که در اثر انجام واکنش میان آن‌ها، تفاوت شعاع اتم‌های اکسنده و کاهنده **کاهش** می‌یابد. اگر نماد شیمیایی فلز موردنظر از دوره‌ی چهارم را A در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

در اثر انجام واکنش میان آن‌ها، تفاوت شعاع اتم‌های اکسنده و کاهنده کاهش می‌یابد. $\rightarrow$ مقایسه‌ی شعاع: $\overbrace{A > \underbrace{\cdots\cdots}_{A^{n+},O^{2-}} > O}^{\text{تفاوت شعاع اتمی O و A}}$

A^{n+},O^{2-} تفاوت شعاع یونی

آزمون‌های ماراتون

شیمی دوازدهم | ۱۳ آذرماه ۱۴۰۴

۱ . کدام عبارت در ارتباط با پاک‌کننده‌های غیرصابونی نادرست است؟ ($C=۱۲, O=۱۶, S=۳۲ : g.mol^{-۱}$)

۱) در ساختار این پاک‌کننده‌ها، ۸ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

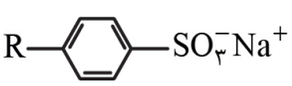
۲) این پاک‌کننده‌ها از بنزن و مواد پتروشیمی دیگر، طی واکنش‌های پیچیده تولید می‌شوند.

۳) در ساختار این پاک‌کننده‌ها، دست‌کم ۲ اتم کربن وجود دارد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند.

۴) تفاوت جرم بخش آب‌دوست این پاک‌کننده‌ها با بخش آب‌دوست صابون جامد برابر با ۳۶ گرم بر مول است.

پاسخ: گزینه ۱ ساده | حفظی، مفهومی

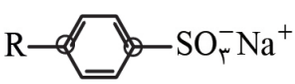
فرمول همگانی پاک‌کننده‌های غیرصابونی به صورت زیر است. در ساختار آن‌ها هر اتم اکسیژن، ۳ جفت الکترون ناپیوندی دارد، بنابراین هر واحد آن در مجموع دارای $۳ \times ۳ = ۹$ جفت الکترون ناپیوندی است.



بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ پاک‌کننده‌های غیرصابونی از بنزن و دیگر مواد اولیه صنایع پتروشیمی تولید می‌شوند. در واقع این پاک‌کننده‌ها از مواد پتروشیمیایی طی واکنش‌های پیچیده در صنعت تولید می‌شوند.

۳ دو اتم کربن مشخص شده در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی به هیچ اتم هیدروژنی اتصال ندارند.



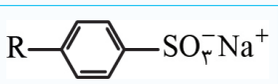
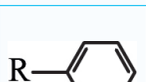
تذکر: اگر گروه R سیرنشده و دارای پیوندهای دوگانه و یا سه‌گانه باشد، در گروه R نیز ممکن است اتم‌های کربنی یافت شوند که به هیدروژن اتصال ندارند.

۴ بخش آب‌دوست و قطبی این پاک‌کننده‌ها، گروه $SO_۳^-$ و بخش آب‌دوست و قطبی پاک‌کننده‌های صابونی، گروه $CO_۲^-$ است. تفاوت جرم مولی این دو گروه برابر است با:

$$\begin{cases} \text{جرم مولی گروه } SO_۳^- = ۳۲+(۳\times۱۶)=۸۰\,g \\ \text{جرم مولی گروه } CO_۲^- = ۱۲+(۲\times۱۶)=۴۴\,g \end{cases} \Rightarrow \text{تفاوت} = ۸۰-۴۴=۳۶\,g$$

جمع‌بندی:

مقایسهٔ پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی

نوع پاک‌کننده	ساختار و فرمول شیمیایی	بخش آب‌دوست	بخش چربی‌دوست	قدرت پاک‌کنندگی	نیروی بین‌مولکولی غالب	مواد سازنده	نحوه عملکرد
صابونی	$RCOO^-X^+$ $X^+ : Na^+, K^+, NH_۴^+$	$CO_۲^-$	R	کم‌تر با یون‌های آب‌سخت واکنش می‌دهد.	وان‌دروالسی	چربی‌ها	برهم‌کنش بین ذره‌ای
غیرصابونی	 $(RC_۶H_۴SO_۳Na)$	$SO_۳^-$		بیشتر با یون‌های آب‌سخت واکنش نمی‌دهد.	وان‌دروالسی	مواد پتروشیمیایی	برهم‌کنش بین ذره‌ای

۲ . کم‌ترین مقدار باریم هیدروکسید جامد بر حسب مول که باید به ۸ لیتر محلول اسید فرضی HX اضافه کرد تا pH آن از ۳ به ۳/۹ افزایش یابد، کدام است؟

۱) ۷×۱۰^{-۳} ۲) $۳/۵\times۱۰^{-۳}$ ۳) ۹×۱۰^{-۳} ۴) $۴/۵\times۱۰^{-۳}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

سرنخ کم‌ترین مقدار موردنیاز از باریم هیدروکسید، هنگامی است که اسید HX ، قوی باشد.

ابتدا از روی تغییرات pH محلول اسید HX و با استفاده از حجم آن، مقدار مول مصرفی اسید HX را به دست آورده و سپس با توجه به معادلهٔ واکنش، مقدار مول مصرفی باریم هیدروکسید را محاسبه می‌کنیم:

گام اول: معادلهٔ موازنه شده واکنش خنثی شدن ناقص انجام شده به صورت مقابل است:

$$۲HX(aq)+Ba(OH)_۲(aq)\rightarrow BaX_۲(aq)+۲H_۲O(l)$$

گام دوم: تغییرات غلظت مولی یون H^+ را از روی تغییرات pH محلول به دست می‌آوریم:

$$[H^+]=۱۰^{-pH}\Rightarrow\begin{cases}\text{حالت اولیه}:[H^+]_۱=۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}\\ \text{حالت نهایی}:[H^+]_۲=۱۰^{-۳/۹}=\dfrac{۱۰^{-۳}}{۱۰^{۰/۹}}=\dfrac{۱}{۸}\times۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\Delta[H^+]=[H^+]_۱-[H^+]_۲\\ =۱۰^{-۳}-\dfrac{۱}{۸}\times۱۰^{-۳}=\dfrac{۷}{۸}\times۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}\end{matrix}$$

گام سوم: با توجه به این‌که فرض کردیم، اسید HX یک اسید قوی است، تغییرات غلظت یون H^+ با HX برابر خواهد بود $(\Delta M=\Delta[H^+])$.

بنابراین مقدار مول مصرفی HX یا Δn برابر است با:

$$\Delta n=\Delta M.V\Rightarrow n_{HX}=(\frac{۷}{۸}\times۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱})\times۸L=۷\times۱۰^{-۳}\ mol$$

گام چهارم: در نهایت با توجه به معادلهٔ واکنش، مقدار مول مصرف شدهٔ باریم هیدروکسید را محاسبه می‌کنیم:

$$۷\times۱۰^{-۳}\ mol\,HX\times\frac{۱mol\,Ba(OH)_۲}{۲\,mol\,HX}=۳/۵\times۱۰^{-۳}\ mol\,Ba(OH)_۲$$

مشاوره خنثی شدن ناقص اسید و باز از تیپ تست‌هایی است که در کنکورهای چند سال اخیر کم‌تر به آن توجه شده است، ممکنه! در کنکور ۱۴۰۵سروکله‌اش پیدا بشه! پس بهتره خیلی خوب یادش بگیری.

۳ . کدام مورد نادرست است؟

۱) شیشه‌پاک‌کن شامل محلول آبی یک باز ضعیف است.

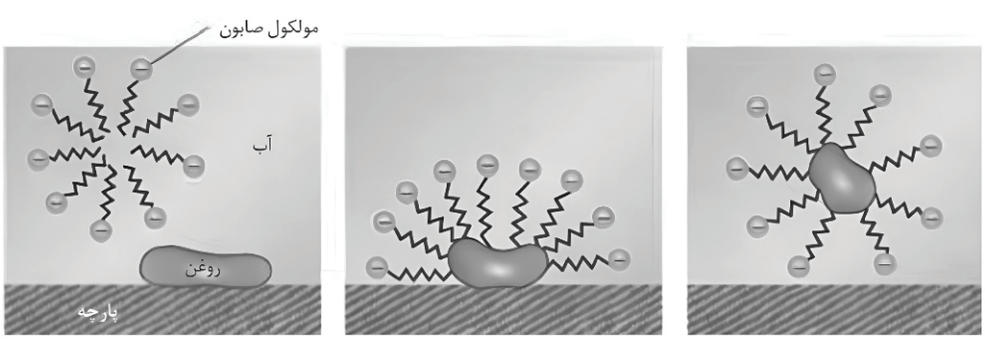
۲) سامانه‌ای که غلظت یون هیدرونیوم در آن برابر ۱×۱۰^{-۷} مول بر لیتر است، می‌تواند خنثی نباشد.

۳) نیروی بین مولکولی غالب در روغن زیتون از نوع وان‌دروالسی و در اوره از نوع پیوند هیدروژنی است.

۴) مولکول‌های صابون به کمک سر کاتیونی خود به مولکول‌های آب و از سمت زنجیر هیدروکربنی به مولکول‌های چربی متصل می‌شوند.

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | حفظی، مفهومی

مولکول‌های صابون از طریق گروه COO^- (نه بخش کاتیونی!) با مولکول‌های آب و به کمک زنجیر هیدروکربنی خود با مولکول‌های چربی اتصال برقرار می‌کنند و به این شکل باعث می‌شوند که مولکول‌های چربی در آب حل شده و از محیط پاک شوند.

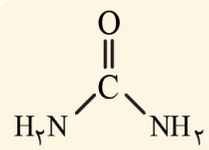


بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ شیشه‌پاک‌کن، محلول آبی آمونیاک است. آمونیاک از جمله بازهای ضعیف است به طوری‌که در محلول آن افزون بر مقدار کمی از یون‌های آب‌پوشیده، شمار بسیاری از مولکول‌های آمونیاک نیز یافت می‌شود.

۲ در دمای اتاق $(25^\circ C)$، محلول‌های خنثی دارای $pH = 7$ هستند و غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در آن‌ها یکسان و برابر 10^{-7} مول بر لیتر است.

تله‌تستی با تغییر دما، ثابت خود یونش آب که در دمای اتاق برابر $10^{-14}\,mol^2.L^{-2}$ است، تغییر می‌کند و به دنبال آن غلظت یون‌های H^+ و OH^- و در نتیجه pH در محلول‌های خنثی دچار تغییر می‌شود. بنابراین محیطی که غلظت یون H^+ در آن برابر $10^{-7}\,mol.L^{-1}$ است، الزاماً خنثی نیست. باید دمای محیط مشخص باشد که در این مورد بتوان اظهارنظر کرد.



۳ روغن زیتون با فرمول مولکولی $C_{57}H_{104}O_6$ یک ترکیب ناقطبی بوده که در آب حل نمی‌شود و نیروی بین‌مولکولی غالب در آن از نوع وان‌درواالسی است. در حالی‌که اوره با ساختار مقابل یک ترکیب قطبی است که در آب حل می‌شود و نوع نیروی بین‌مولکولی غالب در آن هیدروژنی است.

ترکیب مولکول اوره به دلیل داشتن پیوندهای $N-H$، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را با مولکول‌های خود و مولکول‌های آب دارد، به همین دلیل به خوبی در آب حل می‌شود و نوع نیروی بین‌مولکولی غالب در آن، هیدروژنی است.

۴. اگر غلظت مولی اسیدهای بسیار ضعیف HX و HY به ترتیب ۰/۹ و ۰/۱ مولار باشد، در محلول آن‌ها، غلظت مولی یون Y^- به تقریب چند برابر غلظت مولی یون X^- است؟ (میان ثابت یونش اسیدها رابطهٔ $K_a(HX) = 1/44\,K_a(HY)$ برقرار است.)

۱) ۰/۲۸ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۳۹ ۴) ۰/۴۷

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

سرنخ ابتدا با توجه به غلظت مولی دو اسید و نسبت ثابت یونش (K_a) آن‌ها، نسبت درجهٔ یونش دو اسید را به دست می‌آوریم. سپس با توجه به غلظت مولی و درجهٔ یونش آن‌ها، نسبت غلظت مولی یون Y^- به X^- را به دست می‌آوریم.

گام اول: با توجه به رابطهٔ زیر، نسبت درجهٔ یونش دو اسید را به دست می‌آوریم:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{\text{اسید بسیار ضعیف}} K_a = M\alpha^2 \Rightarrow \frac{K_a(HX)}{K_a(HY)} = \frac{M_{HX}.\alpha_{HX}^2}{M_{HY}.\alpha_{HY}^2} \Rightarrow 1/44 = \frac{0/9}{0/1} \times (\frac{\alpha_{HX}}{\alpha_{HY}})^2$$

$$\Rightarrow (\frac{\alpha_{HX}}{\alpha_{HY}})^2 = \frac{1/44}{9} \rightarrow \frac{\alpha_{HX}}{\alpha_{HY}} = \frac{1/2}{3} = 0/4 \quad \text{یا} \quad \frac{\alpha_{HY}}{\alpha_{HX}} = 2/5$$

گام دوم: با توجه به غلظت مولی دو اسید و نسبت درجهٔ یونش آن‌ها، مقدار $\frac{[Y^-]}{[X^-]}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = M.\alpha \xrightarrow[[H^+]_{HX}=[X^-]]{[H^+]_{HY}=[Y^-]} \frac{[Y^-]}{[X^-]} = \frac{M_{HY} \times \alpha_{HY}}{M_{HX} \times \alpha_{HX}} = \frac{0/1}{0/9} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{18} \simeq 0/28$$

آفرود می‌توانستیم با استفاده از رابطهٔ زیر، با سرعت بیشتری نسبت غلظت مولی Y^- به X^- را به دست بیاوریم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M} \xrightarrow[[H^+]_{HX}=[X^-]]{[H^+]_{HY}=[Y^-]} \frac{K_a(HY)}{K_a(HX)} = \frac{[Y^-]^2}{[X^-]^2} \times \frac{M_{HX}}{M_{HY}} \Rightarrow \frac{1}{1/44} = (\frac{[Y^-]}{[X^-]})^2 \times \frac{0/9}{0/1} \Rightarrow \frac{[Y^-]}{[X^-]} = \frac{5}{18} \simeq 0/28$$

نکته در محاسبات مربوط به ثابت یونش علاوه بر رابطهٔ اصلی می‌توان از رابطه‌های زیر نیز استفاده کرد:

$$K_a=\frac{[H^+]\times[A^-]}{[HA]_{\text{تعادلی}}}\rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{اگر M و }[H^+]\text{ داشتیم}} K_a=\dfrac{[H^+]^2}{M-[H^+]}\xrightarrow{\text{اسید بسیار ضعیف}} K_a=\dfrac{[H^+]^2}{M}\\ \xrightarrow{\text{اگر M و }\alpha\text{ داشتیم}} K_a=\dfrac{M.\alpha^2}{1-\alpha}\xrightarrow{\text{اسید بسیار ضعیف}} K_a=M.\alpha^2\\ \xrightarrow{\text{اگر }[H^+]\text{ و }\alpha\text{ داشتیم}} K_a=\dfrac{[H^+].\alpha}{1-\alpha}\xrightarrow{\text{اسید بسیار ضعیف}} K_a=[H^+].\alpha\end{cases}$$

۵ . کدام گزینه درست است؟

۱) شربت معده همانند شیر می‌تواند نور را پخش کند و ذره‌های سازنده‌ی هر دو ماده، توده‌های یونی یا مولکولی با اندازه‌های متفاوت هستند.

۲) مخلوط عسل و آب همانند گلاب، محلول آبی از چند ماده‌ی آلی است که می‌تواند نور را پخش کند.

۳) مخلوط آب، چربی و صابون از نظر پایداری مشابه مخلوط اتیلن گلیکول و آب است.

۴) رنگ‌های پوششی همانند مایونز جزو مخلوط‌های پایدار و همگن است.

پاسخ: گزینه ۳ ساده | حفظی

مخلوط آب، چربی و صابون نوعی کلوئید و مخلوط اتیلن گلیکول در آب، نوعی محلول است. کلوئیدها و محلول‌ها برخلاف سوسپانسیون‌ها، مخلوط‌های پایداری هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ شربت معده و شیر به ترتیب نوعی سوسپانسیون و کلوئید هستند و هر دو نور را پخش می‌کنند. سوسپانسیون‌ها از ذره‌های ریزماده و کلوئیدها از توده‌های یونی یا مولکولی با اندازه‌های متفاوت تشکیل شده‌اند.

۲ گلاب و مخلوط عسل در آب، محلول‌هایی از چند مادهٔ آلی در آب هستند. محلول‌ها نور را عبور می‌دهند و پخش نمی‌کنند.

۴ رنگ‌های پوششی و سس مایونز از جمله کلوئیدها هستند. کلوئیدها مخلوط‌هایی پایدار و ناهمگن هستند.

جمع بندی انواع مخلوط‌ها

مخلوط / ویژگی	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش نمی‌کند (عبور می‌دهد).
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار (ته‌نشین می‌شود.)	پایدار (ته‌نشین نمی‌شود.)	پایدار (ته‌نشین نمی‌شود.)
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریزماده	توده‌های یونی یا توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌ها
مثال‌ها	شربت خاکشیر - شربت معده	ژله - رنگ پوششی - شیر- سس مایونز	ید در هگزان - ضدیخ (اتیلن گلیکول در آب)

کنکورچی‌میگه؟ کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ (کنکور ریاضی ۱۴۰۰)

آ) شربت معده و شیر، مخلوط‌هایی ناهمگن از نوع سوسپانسیون‌اند.

ب) مخلوط آب و روغن با استفاده از صابون، به یک کلوئید پایدار تبدیل می‌شود.

پ) پخش کردن نور، ناهمگن بودن و ته‌نشین شدن، از ویژگی‌های کلوئیدها، به‌شمار می‌آید.

ت) ذرات سازندهٔ محلول‌ها، یون‌ها و مولکول‌ها اما ذرات سازندهٔ کلوئیدها، توده‌های مولکولی‌اند.

۱) آ و پ ۲) آ، ب، پ ۳) ب، ت ۴) ب، پ، ت

پاسخ: گزینه ۳

عبارت‌های (ب) و (ت) درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

آ شربت معده و شیر به ترتیب نوعی سوسپانسیون و کلوئید هستند.

ب مخلوط آب، روغن و صابون نوعی کلوئید است.

پ کلوئیدها، مخلوط‌هایی پایدار هستند و ته‌نشین نمی‌شوند.

ت کاملاً درسته!

۶. در دمای اتاق مقداری گاز هیدروژن کلرید را در دو لیتر محلول هیدروکلریک اسید با pH = ۳ حل می‌کنیم و در نتیجه pH محلول به میزان ۰/۸ تغییر می‌کند. حجم گاز هیدروژن کلرید مصرف شده در شرایط STP چند میلی‌لیتر است؟ (از تغییر حجم محلول در اثر حل شدن گاز، چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۱۱۲ ۲) ۱۱۲۰ ۳) ۲۲۴ ۴) ۲۲۴۰

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

سرنخ با حل شدن گاز HCl در محلول اسید، pH محلول ۰/۸ واحد کاهش می‌یابد.

از تغییرات pH محلول باید به مقدار مول هیدروژن کلرید اضافه شده و سپس به مقدارحجم آن برسیم:

گام اول: با افزودن گاز HCl به محلول اسید، pH محلول ۰/۸ واحد کم شده و به ۲/۲ می‌رسد. با توجه به این‌که HCl یک اسید قوی است، مقدار تغییرات غلظت یون H^+ و HCl را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+]=10^{-pH} \Rightarrow \begin{cases} \text{حالت اولیه}: [H^+]_1=10^{-3}\ mol.L^{-1} \\ \text{حالت نهایی}: [H^+]_2=10^{-2/2}=10^{0/8}\times10^{-3}\ mol.L^{-1}=6\times10^{-3}\ mol.L^{-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Delta[H^+]=\Delta[HCl]=6\times10^{-3}-10^{-3}=5\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

گام دوم: افزایش غلظت مولی HCl به دلیل افزودن گاز HCl به محلول است، بنابراین مقدار مول HCl اضافه شده برابر است با:

$$\Delta n=\Delta M.V \Rightarrow \Delta n=(5\times10^{-3}\ mol.L^{-1})\times2L=10^{-2}\ mol\,HCl$$

گام سوم: حجم 10^{-2} مول گاز HCl را در شرایط STP به دست می‌آوریم:

$$10^{-2}\ mol\,HCl\times\frac{22/4\,L\,HCl}{1\,mol\,HCl}\times\frac{1000\,mL}{1L}=224\,mL$$

۷. ۴۷ میلی‌گرم پتاسیم اکسید خالص را در ۵۰ میلی‌لیتر آب خالص حل کرده و سپس حجم محلول را با افزودن آب مقطر به ۲۵۰ میلی‌لیتر می‌رسانیم. pH محلول به دست آمده به تقریب چند برابر pH محلول ۰/۳۵ مولار هیدروکلریک اسید است؟ $(O=16, K=39: g.mol^{-1})$

۱) ۱۸/۸ ۲) ۲۵/۸ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۳۱/۱

پاسخ: گزینه ۲ سخت | محاسباتی

استراتژی ابتدا شمار مول K_2O حل شده و غلظت مولی آن را به دست آورده، سپس غلظت مولی KOH و pH محلول آن را حساب می‌کنیم. در قدم بعدی pH محلول HCl را محاسبه کرده و در نهایت نسبت pH دو محلول را به دست می‌آوریم.

گام اول: معادلهٔ واکنش حل شدن K_2O در آب به صورت مقابل است: $K_2O(s)+H_2O(l)\rightarrow 2KOH(aq)$

گام دوم: از روی جرم مصرفی K_2O، مقدار مول KOH تولید شده را حساب می‌کنیم:

روش اول: کسر تبدیل:

$$47\,mg\,K_2O\times\frac{1\,g}{1000\,mg}\times\frac{1\,mol\,K_2O}{94\,K_2O}\times\frac{2\,mol\,KOH}{1\,mol\,K_2O}=10^{-3}\,mol\,KOH$$

روش دوم: تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{K_2O}}=\frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{KOH}}\Rightarrow\frac{47\times10^{-3}}{1\times94}=\frac{x}{2}\rightarrow x=10^{-3}\,mol\,KOH$$

گام سوم: غلظت مولی محلول KOH را به دست می‌آوریم:

$$M=\frac{n}{V}\rightarrow M=\frac{10^{-3}\,mol}{0/25\,L}=4\times10^{-3}\,mol.L^{-1}\xrightarrow{\text{KOH باز قوی است.}}[KOH]=[OH^-]=4\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

گام چهارم: از روی غلظت مولی یون OH^-، غلظت یون H^+ را به دست آورده و pH را حساب می‌کنیم:

$$[H^+]\times[OH^-]=10^{-14}\rightarrow[H^+]\times4\times10^{-3}=10^{-14}\rightarrow[H^+]=25\times10^{-13}\,mol.L^{-1}$$

$$pH=-\log[H^+]\rightarrow pH=-\log(25\times10^{-13})=13-2\log5=13-2(0/7)=11/6$$

آفرود برای راحت‌تر شدن محاسبات، می‌توانیم از روابط زیر استفاده کنیم:

$$\begin{cases}pOH=-\log[OH^-]\\pH+pOH=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}pOH=-\log(4\times10^{-3})=3-2\log2=3-2(0/3)=2/4\\pH=14-pOH=14-2/4=11/6\end{cases}$$

گام پنجم: هیدروکلریک اسید (HCl) یک اسید قوی است، بنابراین خواهیم داشت:

$$[HCl]=[H^+]=0/35\,mol.L^{-1}\Rightarrow pH=-\log(35\times10^{-2})=2-\log5-\log7=2-0/7-0/85=0/45$$

گام ششم: نسبت pH محلول باز KOH به اسید HCl را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{pH\,\text{محلول KOH}}{pH\,\text{محلول HCl}}=\frac{11/6}{0/45}\simeq25/8$$

۸. با توجه به شکل مقابل که واکنش کامل دو اسید HA و HB با غلظت مولی، حجم و دمای یکسان با دو قطعه نوار منیزیم یکسان را نشان می‌دهد، کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟





۱) با پودر کردن نوار منیزیم موجود در ظرف حاوی محلول HB، تفاوت سرعت تولید گاز در دو واکنش افزایش می‌یابد.

۲) پیش از شروع واکنش، شمار مولکول‌های یونیده نشده در محلول HA، کم‌تر از محلول HB است.

۳) حجم نهایی گاز هیدروژن حاصل از دو محلول باهم برابر است.

۴) ثابت یونش اسید HA از اسید HB، بزرگ‌تر است.

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی

سرنخ در شرایط یکسان، ظرفی که در آن واکنش با شدت بیشتری انجام می‌شود. ← یعنی دارای اسید قوی‌تر با ثابت یونش بزرگ‌تری است.

باتوجه به شکل، واضح است که سرعت و شدت واکنش در محلول حاوی اسید HA از HB بیشتر است. با پودر کردن نوار منیزیم موجود در ظرف حاوی محلول HB، سطح تماس واکنش‌دهنده‌ها (فلز و اسید) بیشتر شده، در نتیجه سرعت واکنش و سرعت تولید گاز در ظرف محلول HB، افزایش می‌یابد. بنابراین تفاوت سرعت تولید گاز در دو واکنش کم می‌شود.

نکته شدت بالای انجام یک واکنش به معنای سرعت زیاد آن است. بنابراین با افزایش سرعت واکنش در ظرف حاوی محلول HB، سرعت متوسط تولید گاز در دو ظرف به یک‌دیگر نزدیک‌تر شده و تفاوت آن‌ها کم‌تر می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ شدت و سرعت واکنش اسید HA با فلز منیزیم بیشتر از اسید HB است، از این‌رو اسید HA قوی‌تر بوده و به مقدار بیشتری یونش یافته است، بنابراین شمار مولکول‌های یونیده نشده در محلول آن کم‌تر از محلول اسید HB است.

۳ از آن‌جایی که غلظت مولی و حجم محلول‌ها برابر است، می‌توان نتیجه گرفت شمار مول اسید موجود در دو ظرف نیز یکسان است. علاوه بر این دو قطعه نوار منیزیم نیز یکسان هستند، بنابراین قطعاً حجم نهایی گاز هیدروژن حاصل از دو ظرف برابر خواهد بود. واکنش‌های انجام شده به صورت زیر است:

$$Mg(s)+2HA(aq)\rightarrow MgA_2(aq)+H_2(g)$$

$$Mg(s)+2HB(aq)\rightarrow MgB_2(aq)+H_2(g)$$

۴ شدت واکنش منیزیم با اسید HA نسبت به اسید HB، بیشتر است، بنابراین اسید HA قوی‌تر بوده و ثابت یونش بزرگ‌تری دارد.

کنکورچی‌میگه؟ **در دمای ثابت، ۵/۴ گرم اسید ضعیف HX و ۳ گرم اسید ضعیف HY در دو ظرف جداگانه، به‌ترتیب در ۲ و ۱ لیتر آب مقطر حل می‌شوند. اگر $[X^-]$ با $[Y^-]$ برابر باشد، کدام مورد دربارهٔ آن‌ها، نادرست است؟** (کنکور تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

$(HX=60, HY=50: g.mol^{-1})$

۱) در واکنش مقدار کافی فلز منیزیم با محلول‌های اسیدی، حجم گاز هیدروژن تشکیل‌شده در محلول HY، کم‌تر است.

۲) pH و شمار یون‌های دو محلول، برابر و K_a برای اسید HX، بزرگ‌تر از K_a برای اسید HY است.

۳) غلظت مولکول‌ها در محلول اسید HX بیشتر از غلظت مولکول‌ها در محلول اسید HX، است.

۴) غلظت یون هیدروکسید در محلول HX، برابر غلظت همین یون در محلول HY است.

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مقدار مول و غلظت هر دو اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$HX=5/4\,g\,HX\times\frac{1\,mol\,HX}{60\,g\,HX}=0/09\,mol\rightarrow[HX]=\frac{0/09\,mol}{2\,L}=0/045\,mol.L^{-1}$$

$$HY=3\,g\,HY\times\frac{1\,mol\,HY}{60\,g\,HY}=0/06\,mol\rightarrow[HY]=\frac{0/06\,mol}{1\,L}=0/06\,mol.L^{-1}$$

با توجه به برابر بودن غلظت آنیون‌ها در دو محلول، غلظت یون هیدرونیوم نیز در دو محلول برابر و در نتیجه مجموع غلظت یون‌ها در آن‌ها یکسان است. اما به دلیل تفاوت حجم دو محلول، شمار یون‌ها در آن‌ها برابر نخواهد بود. با این‌که غلظت اولیهٔ HX کمتر است، اما غلظت یون H^+ تولید شده در دو محلول برابر است، بنابراین اسید HX نسبت به HY قوی‌تر بوده و K_a بزرگ‌تری دارد.

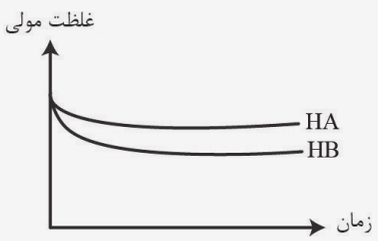
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ مقدار مول اولیه HY کمتر است، بنابراین حجم گاز H_2 تشکیل شده در محلول HY نسبت به HX کمتر خواهد بود.

۳ غلظت اولیه اسید HY بیشتر و غلظت آنیون در دو محلول برابر است، از این‌رو غلظت مولکول‌های یونیده شده در محلول HY از HX بیشتر است.

۴ با توجه به برابری غلظت یون H^+ در دو محلول، غلظت یون OH^- نیز در آن‌ها برابر خواهد بود.

۹. با توجه به نمودار زیر که تغییر غلظت مولی دو اسید بسیار ضعیف HA و HB پس از حل شدن در آب با دمای ۲۵°C، تا رسیدن به تعادل را نشان می‌دهد، کدام مطالب نادرست است؟



الف) درجه یونش اسید HB، کوچک‌تر از درجهٔ یونش اسید HA است.

ب) اگر غلظت مولی اولیه HA دو برابر شود، ثابت یونش آن تغییر نمی‌کند.

پ) ثابت یونش هر دو اسید در این دما، کوچک‌تر از ثابت یونش هیدرویدیک اسید است.

ت) اگر غلظت مولی اولیه HB را چهار برابر کنیم، درجه یونش اسید HA، به یقین بیشتر از دو برابر درجهٔ یونش اسید HB می‌شود.

۱) الف، ب ۲) الف ، ت ۳) ب، پ ۴) ب، ت

پاسخ: گزینه ۲ سخت | مفهومی

سرنخ با توجه به نمودار با دو اسید ضعیف سروکار داریم و اسید HA به نسبت HB ضعیف‌تر است.

عبارت‌های «الف» و «ت» نادرست هستند. با توجه به نمودار، غلظت اولیه هر دو اسید برابر است و اسید HA به نسبت اسید HB، کم‌تر یونش یافته و یون هیدرونیوم کم‌تری تولید کرده است. از این‌رو، طبق رابطهٔ $\alpha = \frac{[H^+]}{M}$، درجهٔ یونش اسید HA کم‌تر از درجهٔ یونش اسید HB است. (نادرستی مورد «الف»)

چون اسید HB خیلی ضعیف بوده و دما ثابت است، طبق رابطهٔ $K_a = M\alpha^2$، با ۴ برابر کردن غلظت اسید HB، درجهٔ یونش آن نصف خواهد شد. همچنین چون در ابتدا $\alpha_{HB} > \alpha_{HA}$ بود، با نصف شدن درجهٔ یونش اسید HB، ممکن است درجهٔ یونش HA همچنان از آن کم‌تر بماند، برابر و یا حتی بیشتر از آن شود. (نادرستی مورد «ت»)

مقایسه اسیدهای HA و HB (در شرایط یکسان دما و غلظت)

ویژگی / اسید	HA	HB
ثابت یونش (K_a)	کوچک‌تر	بزرگ‌تر
قدرت اسیدی (وابسته به K_a)	کمتر	بیشتر
غلظت یون‌ها در محلول	کمتر	بیشتر
رسانایی الکتریکی محلول	کمتر	بیشتر
خاصیت اسیدی (وابسته به $[H^+]$)	کمتر	بیشتر
سرعت واکنش فلزی مانند منیزیم	کمتر	بیشتر
غلظت مولکول‌های یونیده نشده	بیشتر	کمتر

بررسی سایر موارد:

ب ثابت یونش یک اسید فقط تابع دما است و با تغییر عوامل دیگر از جمله غلظت اولیه اسید، تغییر نخواهد کرد.

پ با توجه به نمودار هر دو اسید به صورت جزئی یونش یافته و اسید ضعیف به حساب می‌آیند. بنابراین هر دو اسید ثابت یونش کوچک‌تری به نسبت HI که یک اسید قوی است، دارند.

اسیدهای قوی	
تک پروتون‌دار	دو پروتون‌دار
$HI - HBr - HCl - HNO_3$	H_2SO_4

مشاوره مقایسهٔ ویژگی‌های مختلف دو اسید از جمله ثابت یونش، درجهٔ یونش، قدرت اسیدی و ... از مباحث موردعلاقه طراحان و پای ثابت کنکور است. سعی کن خوب خوب این بخش رو یاد بگیری!

۱۰. کدام گزینه از نظر درستی یا نادرستی مشابه جمله زیر است؟

«گاز حاصل از واکنش فلز منیزیم و محلول هیدروکلریک اسید را می‌توان از انحلال پودر خورندهٔ حاوی آلومینیم و سود در آب نیز تهیه کرد.»

۱) در فرایندی که در گذشته برای تأمین نور موردنیاز عکاسی انجام می‌شد، نیم‌واکنش کاهش به صورت زیر است:

آنیون‌های جامد حاصل از کاهش $\rightarrow$ $+4e^-$ + مولکول گازی اکسنده

۲) در جمع واکنش‌دهنده‌های یک واکنش اکسایش - کاهش، حضور حداقل دو مادهٔ متفاوت برای مبادلهٔ الکترون ضروری است.

۳) در واکنش‌های اکسایش - کاهش، اتم فلز، کاتیون فلز و اتم نافلز به ترتیب کاهنده، اکسنده و اکسنده در نظر گرفته می‌شوند.

۴) شمار الکترون‌های مبادله شده در یک واکنش اکسایش - کاهش را می‌توان از جمع ضریب الکترون در معادلهٔ موازنه شدهٔ نیم‌واکنش‌های آن به دست آورد.

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | حفظی، مفهومی

واکنش میان فلز منیزیم و محلول هیدروکلریک اسید به صورت مقابل است: $Mg(s)+2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq)+H_2(g)$

واکنش انحلال پودر خورندهٔ حاوی آلومینیم و سود در آب نیز به صورت زیر است:

$$2Al(s)+2NaOH(s)+6H_2O(l) \rightarrow 2NaAl(OH)_4(aq)+3H_2(g)$$

همان‌طور که مشخص است، فراوردهٔ مشترک این دو واکنش گاز هیدروژن بوده و این عبارت درست است.

تذکر: نیازی به حفظ واکنش انحلال پودر خورندهٔ حاوی آلومینیم و سود در آب، نیست، فقط کافی است بدانید که فراوردهٔ گازی این واکنش، هیدروژن است.

بررسی همهٔ گزینه‌ها:

۱ در گذشته برای عکاسی از سوختن منیزیم به عنوان منبع نور استفاده می‌شد. در این واکنش $Mg(s)$ با نور خیره‌کننده‌ای در $O_2(g)$ می‌سوزد و به $MgO(s)$ تبدیل می‌شود. واکنش کلی و نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش رخ داده به صورت زیر است:

$$\text{واکنش کلی: } \underbrace{2Mg(s)}_{\text{کاهنده}} + \underbrace{O_2(g)}_{\text{اکسنده}} \rightarrow 2MgO(s) \Rightarrow \begin{cases} \text{نیم‌واکنش اکسایش: } Mg(s) \rightarrow Mg^{2+}(s)+2e^- \\ \text{نیم‌واکنش کاهش: } O_2(g)+4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s) \end{cases}$$

۲ همیشه این‌طوری نیست! به‌طور مثال در واکنش اکسایش - کاهش زیر فقط یک ماده به عنوان واکنش‌دهنده حضور دارد و به تبادل الکترون می‌پردازد: $MgCl_2(l) \rightarrow Mg(s)+Cl_2(g)$

۳ اغلب فلزها در واکنش با نافلزها تمایل دارند یک یا چند الکترون خود را به نافلزها داده و ضمن اکسایش به کاتیون تبدیل شوند. نافلزها نیز با گرفتن یک یا چند الکترون کاهش یافته و به آنیون تبدیل می‌شوند. از این‌رو فلزها اغلب کاهنده و نافلزها اغلب اکسنده هستند.

۴ برای به دست آوردن واکنش کلی یک فرایند باید ضریب الکترون را در دو نیم‌واکنش اکسایش و کاهش برابر کرد و سپس با جمع دو نیم‌واکنش، واکنش کلی را نوشت. پیش از اعمال تغییر یاد شده، ضریب الکترون در هر نیم‌واکنش نشان‌دهندهٔ شمار الکترون‌های مبادله شده در واکنش اکسایش - کاهش است.

SanjeshCloud

۱۱ . با توجه به جدول مقابل که پتانسیل کاهشی استاندارد چند گونه را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

$(E^\circ (Zn^{2+}/Zn) = -0/76\,V)$

نیم‌واکنش کاهش	$E^\circ(V)$
$C^{3+}(aq)+e^- \rightarrow C^{2+}(aq)$	$-0/12$
$D^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow D(s)$	$-1/59$
$A^+(aq)+e^- \rightarrow A(s)$	$+1/33$
$B^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow B(s)$	$+0/87$

الف) قدرت کاهندگی فلز A از فلزهای B و D کم‌تر است.

ب) محلول آبی حاوی نمک‌های A و D را می‌توان در ظرفی از جنس فلز B نگهداری کرد.

پ) emf سلول گالوانی حاصل از فلز روی با فلز A از سلول گالوانی حاصل از فلز روی با فلز B بیشتر است.

ت) در سلول گالوانی $D-A$ به ازای مبادلهٔ ۰/۶ مول الکترون، حداکثر ۰/۴ مول از کاتیون $D^{3+}(aq)$ تولید می‌شود.

۱) الف و ت ۲) الف و پ ۳) ب و پ ۴) ب و ت

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی

عبارت‌های «الف» و «پ» درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

الف هرچه E° یک نیم‌سلول کوچک‌تر (منفی‌تر) باشد، قدرت کاهندگی گونهٔ سمت راست نیم‌واکنش کاهش بیشتر است، بنابراین مقایسه قدرت کاهندگی این گونه‌ها به صورت زیر است:

مقایسهٔ قدرت کاهندگی: $D > C^{2+} > B > A$

همچنین هرچه E° یک نیم‌سلول بزرگ‌تر (مثبت‌تر) باشد، قدرت اکسندگی گونهٔ سمت چپ نیم‌واکنش اکسایش بیشتر خواهد بود.

مقایسهٔ قدرت اکسندگی: $A^+ > B^{2+} > C^{3+} > D^{3+}$

ب E° نیم‌سلول B از E° نیم‌سلول A، کم‌تر و از E° نیم‌سلول D بیشتر است، بنابراین مقایسهٔ قدرت کاهندگی این سه فلز به صورت $D > B > A$ است. در نتیجه محلول نمک D را برخلاف محلول نمک A می‌توان در ظرفی از جنس B نگه‌داری کرد، زیرا فلز B با نمک فلز A برخلاف نمک فلز D واکنش می‌دهد.

نکته در سلول‌های گالوانی، آند نیم‌سلولی با E° کم‌تر (اتم فلزی کاهنده‌تر) و کاتد، نیم‌سلولی با E° بیشتر (یون فلزی اکسنده‌تر) است. همچنین ولتاژ سلول گالوانی یا همان نیروی الکتروموتوری (emf) نشان‌دهنده اختلاف E° آند و کاتد بوده و همواره عددی مثبت است.

پ نیروی الکتروموتوری (emf) را برای هر کدام از سلول‌های گالوانی تشکیل شده حساب می‌کنیم:

$$emf = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} \Rightarrow \begin{cases} \text{سلول گالوانی}(Zn-A)\ emf = 1/33-(-0/76) = 2/09\,V \\ \text{سلول گالوانی}(Zn-B)\ emf = 0/87-(-0/76) = 1/63\,V \end{cases}$$

بنابراین emf سلول گالوانی $(Zn-A)$ از سلول گالوانی $(Zn-B)$ بزرگ‌تر است.

آفرود اگر سری الکتروشیمیایی را برای سه فلز روی، A و B رسم کنیم، مشخص می‌شود که فاصله نیم‌واکنش کاهش Zn از A نسبت به B بیشتر است، بنابراین emf سلول گالوانی حاصل از Zn و A نسبت به سلول گالوانی حاصل از Zn و B بیشتر است.

$A^+(aq)+e^- \rightarrow A(s)$	$+1/33\,V$
$B^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow B(s)$	$+0/87\,V$
$Zn^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Zn(s)$	$-0/76\,V$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ت E° نیم‌سلول D کم‌تر از نیم‌سلول A بوده، بنابراین الکترود D، آند و الکترود A، کاتد سلول گالوانی است. واکنش انجام شده در سلول گالوانی $(D-A)$ به صورت زیر است:

$$\text{نیم‌واکنش اکسایش در آند: } D(s) \rightarrow D^{3+}(aq) + 3e^-$$
$$\text{نیم‌واکنش کاهش در کاتد: } A^+(aq) + e^- \rightarrow A(s)$$
$$\text{واکنش کلی سلول: } D(s) + 3A^+(aq) \rightarrow D^{3+}(aq) + 3A(s)$$

مطابق با نیم‌واکنش‌ها با فرض بازه ۱۰۰٪ با تولید هر مول D^{3+}، ۳ مول الکترون میان گونه‌های کاهنده و اکسنده مبادله می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$0/6 mole^- \times \frac{1 mol D^{3+}}{3 mole^-} = 0/2 mol D^{3+}$$

درسنامه:

هر چیزی از سلول گالوانی رو که باید بدونی، این زیر برات نوشتیم:

۱) سلول‌های گالوانی؛ سلول‌هایی هستند که در آن‌ها واکنش‌های اکسایش - کاهش به‌طور خودبه‌خودی انجام می‌شود و طی واکنش، بخشی از انرژی شیمیایی مواد به انرژی الکتریکی در دسترس تبدیل می‌شود و می‌توان به کمک آن لامپی را روشن کرد.

۲) محل انجام نیم‌واکنش اکسایش، نیم‌سلول آندی و الکترود موجود در آن را آند می‌نامند. در این نیم‌سلول، اتم‌های سازندهٔ الکترود فلزی با از دست دادن الکترون و تبدیل شدن به کاتیون، اکسایش می‌یابند. از این‌رو بار الکترود آند که محل زایش الکترون است، منفی می‌باشد. ضمناً با تبدیل اتم‌های الکترود آند به کاتیون، غلظت کاتیون‌ها در الکترولیت این نیم‌سلول افزایش و از جرم الکترود کاسته می‌شود و به اصطلاح الکترود لاغر می‌شود.

۳) محل انجام نیم‌واکنش کاهش، نیم‌سلول کاتدی و الکترود موجود در آن را کاتد می‌نامند. در این نیم‌سلول، کاتیون‌های فلزی با گرفتن الکترون و تبدیل شدن به اتم‌های خنثی، کاهش می‌یابند. از این‌رو بار الکترودی که محل مصرف الکترون است، مثبت می‌باشد. ضمناً با تبدیل کاتیون‌های فلزی به اتم‌های خنثی، غلظت کاتیون‌ها در الکترولیت این نیم‌سلول کاهش می‌یابد و به جرم الکترود افزوده می‌شود و به اصطلاح الکترود چاق می‌شود.

۴) جهت حرکت الکترون‌ها همواره از آند (الکترود منفی) به کاتد (الکترود مثبت) است.

۵) دو محلول الکترولیت توسط یک دیوارهٔ متخلخل از یک‌دیگر جدا می‌شوند. این دیواره دو وظیفهٔ اساسی دارد:

وظیفهٔ اول: از مخلوط شدن سریع و مستقیم دو الکترولیت جلوگیری می‌کند. زیرا اگر دو الکترولیت با یک‌دیگر مخلوط شوند، تبادل الکترون میان گونه‌های اکسنده و کاهنده به‌طور مستقیم صورت می‌گیرد و جریان الکتریکی ایجاد نمی‌شود.

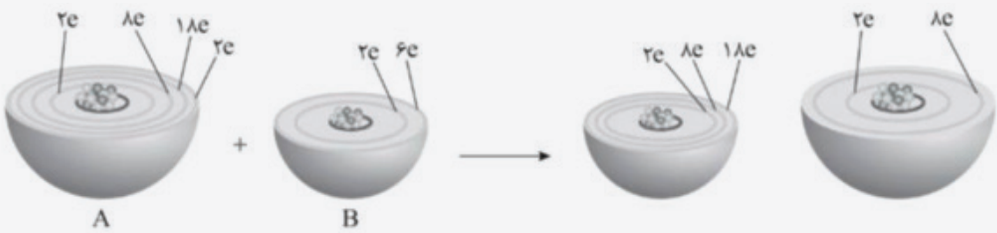
وظیفهٔ دوم: به منظور خنثی ماندن بار الکتریکی محلول‌های الکترولیت، به یون‌های موجود اجازهٔ عبور می‌دهد. زیرا در صورت عبور نکردن یون‌های موجود در محلول‌های الکترولیت، تجمع بار الکتریکی مثبت در الکترولیت نیم‌سلول آندی و تجمع بار الکتریکی منفی در الکترولیت نیم‌سلول کاتدی افزایش می‌یابد و تبادل الکترون میان الکترودها متوقف می‌شود.

۶) در سلول‌های گالوانی، کاتیون‌ها وارد نیم‌سلول کاتدی و آنیون‌ها وارد نیم‌سلول اندی می‌شوند، به عبارت دیگه، در این سلول‌ها، جهت حرکت کاتیون‌ها به سمت کاتد و جهت حرکت آنیون‌ها به سمت آند است.

در شکل زیر، مطالب مربوط به سلول‌های گالوانی به‌طور خلاصه ارائه شده است:



۱۲ . با توجه به شکل زیر، کدام مورد نادرست است؟



۱) B عنصری است که در شرایط معمول، با Al و Mn، برخلاف Au و Pt واکنش می‌دهد.

۲) بدون در نظر گرفتن حالت فیزیکی، نیم‌واکنش اکسایش انجام شده در این واکنش و در سلول گالوانی «روی - مس» مشابه است.

۳) گونهٔ کاهنده در این واکنش، فلزی واسطه از گروه ۱۲ جدول دوره‌ای است که با انجام واکنش به آرایش گاز نجیب نمی‌رسد.

۴) شکل، واکنش بین اتم‌های A و B را با مدل اتمی بور نشان می‌دهد و شمار الکترون‌ها با $l=1$ در اتم A، ۳ برابر شمار این الکترون‌ها در اتم B است.

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | مفهومی

اتم‌های A و B به ترتیب نشان‌دهندهٔ روی $(_{۳۰}Zn)$ و اکسیژن $(_{۸}O)$ هستند. آرایش الکترونی اتم‌های روی و اکسیژن به صورت زیر است:

$$_{۳۰}Zn: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۶\ ۳s^۲\ ۳p^۶\ ۳d^{۱۰}\ ۴s^۲$$

$$_{۸}O: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۴$$

همان‌طور که مشخص است شمار الکترون‌ها با $l=1$ (زیرلایهٔ p) در اتم روی (۱۲ تا)، ۳ برابر اتم اکسیژن (۴ تا) است.

تله‌تستی مدل بور فقط برای گونه‌های تک‌پروتونی مانند هیدروژن کاربرد دارد. شکل‌های مطرح شده در سوال نشان‌دهنده ساختار لایه‌ای اتم هستند.

بررسی سایر گزینه ها:

۱ گاز اکسیژن در شرایط معمول، $(O_۲)$ با فلزات نجیب مثل طلا و پلاتین واکنش نمی‌دهد.

۲ واکنش انجام شده میان Zn و $O_۲$ به صورت مقابل است:

$$\text{نیم‌واکنش اکسایش: } Zn(s) \rightarrow Zn^{۲+}(s) + ۲e^-$$
$$\text{نیم‌واکنش کاهش: } O_۲(g) + ۴e^- \rightarrow ۲O^{۲-}(s)$$
$$\text{واکنش کلی: } ۲Zn(s) + O_۲(g) \rightarrow ۲ZnO(s)$$

در سلول گالوانی «روی - مس»، الکترود روی آند و الکترود مس کاتد است، بنابراین واکنش رخ داده در سلول به صورت زیر است:

$$\text{نیم‌واکنش اکسایش در آند: } Zn(s) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + ۲e^-$$
$$\text{نیم‌واکنش کاهش در کاتد: } Cu^{۲+}(aq) + ۲e^- \rightarrow Cu(s)$$
$$\text{واکنش کلی: } Zn(s) + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + Cu(s)$$

در نتیجه نیم‌واکنش اکسایش انجام شده در دو فرایند مشابه است.

۳ در واکنش داده شده، فلز روی کاهنده و گاز اکسیژن اکسنده است. فلز روی عنصری واسطه از دورهٔ چهارم و گروه ۱۲ است که آرایش الکترونی کاتیون آن $(Zn^{۲+})$ شبیه هیچ‌یک از گازهای نجیب نیست:

$$Zn: [Ar]\,۳d^{۱۰}\ ۴s^۲ \rightarrow Zn^{۲+}: [Ar]\,۳d^{۱۰}$$

SanjeshCloud

۱۳. قدرمطلق پتانسیل کاهشی استاندارد برخی عنصرها به صورت زیر است. اگر سلول‌های گالوانی حاصل از اتصال نیم‌سلول A به نیم‌سلول‌های X و Y، به ترتیب بیشترین و کم‌ترین ولتاژ را بین همهٔ نیم‌سلول‌های ممکن داشته باشند، ترتیب E° گونه‌ها در کدام گزینه به درستی آمده است؟ (قدرت اکسندگی A^{3+} بیشتر از Y^+ است.)

$X^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow X(s) \quad , \quad |E^\circ|=0/8V$

$Y^+(aq)+e^- \rightarrow Y(s) \quad , \quad |E^\circ|=0/2V$

$A^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow A(s) \quad , \quad |E^\circ|=1/0V$

۱) $X>Y>A$ ۲) $A>Y>X$ ۳) $A>X>Y$ ۴) $Y>A>X$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی

برای این‌که سلول گالوانی حاصل از اتصال نیم‌سلول A به نیم‌سلول X، بیشترین ولتاژ را داشته باشد، باید E° نیم‌سلول‌های A و X بیشترین تفاوت را با یک‌دیگر داشته باشند که بدین منظور دو حالت پیش می‌آید:

حالت اول: $E^\circ(A^{3+}/A)=-1V \quad , \quad E^\circ(X^{2+}/X)=+0/8V$

حالت دوم: $E^\circ(A^{3+}/A)=+1V \quad , \quad E^\circ(X^{2+}/X)=-0/8V$

اگر حالت اول را در نظر بگیریم، ترتیب سری الکتروشیمیایی نیم‌سلول‌ها به صورت زیر خواهد شد. در این حالت ترتیب قدرت اکسندگی یون‌ها به صورت $A^{3+}<Y^+<X^{2+}$ است که با گفتهٔ سوال مطابقت ندارد. بنابراین حالت دوم مدنظر است.

$X^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow X(s)$	$+0/8V$
$Y^+(aq)+e^- \rightarrow Y(s)$	$\pm 0/2V$
$A^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow A(s)$	$-1V$

تذکر: با توجه به گزینه‌ها مشخص است که پاسخ سؤال گزینه ۲ بوده و فقط با تعیین نیم‌سلول‌های (A^{3+}/A) و (X^{2+}/X) به راحتی به پاسخ سؤال رسیدیم.

برای تعیین علامت E° نیم‌سلول Y دو حالت زیر وجود دارد:

حالت اول: $E^\circ(Y^+/Y)=-0/2V$، در این حالت emf سلول‌های قابل تشکیل به صورت زیر است:

$$emf=E^\circ_{\text{کاتد}}-E^\circ_{\text{آند}} \Rightarrow \begin{cases} \text{سلول گالوانی}(Y-A): emf=1-(-0/2)=1/2V \\ \text{سلول گالوانی}(X-A): emf=1-(-0/8)=1/8V \\ \text{سلول گالوانی}(X-Y): emf=-0/2-(-0/8)=0/6V \end{cases}$$

در این حالت ولتاژ سلول گالوانی $(Y-A)$، کم‌ترین مقدار بین ولتاژ سلول‌ها نیست و این حالت با گفتهٔ سوال مطابقت ندارد.

حالت دوم: $E^\circ(Y^+/Y)=+0/2V$، در این حالت emf سلول‌های قابل تشکیل به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \text{سلول گالوانی}(Y-A): emf=1-0/2=0/8V \\ \text{سلول گالوانی}(X-A): emf=1-(-0/8)=1/8V \\ \text{سلول گالوانی}(X-Y): emf=0/2-(-0/8)=1V \end{cases}$$

در این حالت ولتاژ سلول گالوانی $(Y-A)$ کم‌ترین مقدار است، بنابراین E° نیم‌سلول‌ها به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} E^\circ(A^{3+}/A)=+1V \\ E^\circ(Y^+/Y)=+0/2V \\ E^\circ(X^{2+}/X)=-0/8V \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مقایسه } E^\circ} A>Y>X$$

کنکورچی‌میگه؟ با توجه به اطلاعات زیر، که رفتار چهار فلز A، X، D و Z را در آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد، کدام مورد دربارهٔ مقایسهٔ قدرت کاهندگی آن‌ها در مقایسه با Cu درست است؟ (کنکور نوبت دوم تجربی ۱۴۰۴)

- قدرت اکسندگی X^{2+}، از قدرت اکسندگی Z^{2+}، بیشتر است.
- تنها سه فلز Z، D و X با محلول $CuCl_2(aq)$، واکنش می‌دهند.
- با قرار دادن تیغه‌ای از فلز D در محلول‌های جداگانهٔ دارای یون‌های Z^{2+}، A^{2+} و X^{2+}، فقط فلزهای A و X، رسوب می‌کنند.

۱) $X>D>Cu>Z>A$
۲) $Z>X>Cu>A>D$
۳) $X>Z>D>Cu>A$
۴) $Z>D>X>Cu>A$

پاسخ: گزینه ۴

هریک از موارد داده شده را تحلیل می‌کنیم:

مورد اول: قدرت کاهندگی فلز Z از X بیشتر است.

مورد دوم: فقط قدرت کاهندگی فلز A از Cu کمتر است.

مورد سوم: قدرت کاهندگی فلز D از A و X بیشتر و از Z کمتر است.

بنابراین مقایسهٔ قدرت کاهندگی این فلزها به صورت زیر است:

قدرت کاهندگی: $Z>D>X>Cu>A$

۱۴. تغییر جرم تیغهٔ کاتدی در سلول گالوانی «مس - نقره» در طول یک بازهٔ زمانی معین، برابر با تغییر جرم تیغهٔ آندی در سلول گالوانی «منیزیم - مس» است. در طول این بازهٔ زمانی، شمار الکترون‌های مبادله شده در سلول گالوانی «منیزیم - مس»، چند برابر شمار الکترون‌های مبادله شده در سلول گالوانی «مس - نقره» است؟ $(Mg=۲۴, Cu=۶۴, Ag=۱۰۸: g.mol^{-1})$

$E^\circ(Mg^{2+}/Mg)=-۲/۳۷V \quad , \quad E^\circ(Ag^+/Ag)=+۰/۸۰V \quad , \quad E^\circ(Cu^{2+}/Cu)=+۰/۳۴V$

۱) ۶/۷۵
۲) ۲/۲۵
۳) ۴/۵
۴) ۹

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

استراتژی ابتدا واکنش‌های انجام شده در هر سلول و شمار الکترون‌های مبادله شده را بنویس. سپس تغییر جرم گفته شده در دو سلول را برابر قرار بده و نسبت مول آن‌ها را به دست بیاور. در نهایت مقدار مول الکترون‌های مصرفی و نسبت آن‌ها را مشخص کن.

گام اول: معادلهٔ واکنش انجام شده در سلول گالوانی $(Cu-Ag)$ به صورت زیر است:

$$I)\ Cu(s)+۲Ag^+(aq)\rightarrow Cu^{2+}(aq)+۲Ag(s)$$

معادلهٔ واکنش رخ داده در سلول گالوانی $(Mg-Cu)$ نیز به صورت زیر است:

$$II)\ Mg(s)+Cu^{2+}(aq)\rightarrow Mg^{2+}(aq)+Cu(s)$$

گام دوم: در سلول اول، الکترود نقره، کاتد و در سلول دوم، الکترود منیزیم، آند است. فرض می‌کنیم در واکنش اول x مول نقره تولید و در واکنش دوم y مول منیزیم مصرف می‌شود. بنابراین تغییر جرم تیغهٔ کاتدی در واکنش اول برابر ۱۰۸x گرم و تغییر جرم تیغهٔ آندی در واکنش دوم برابر ۲۴y گرم است.

گام سوم: با توجه به این‌که مقدار تغییر جرم تیغه‌ها در دو سلول برابر است، نسبت بین x و y را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{تغییر جرم تیغهٔ نقره در واکنش اول}}{\text{تغییر جرم تیغهٔ منیزیم در واکنش دوم}}=\frac{۱۰۸x}{۲۴y}=۱ \Rightarrow y=۴/۵x$$

گام چهارم: با توجه به معادلهٔ واکنش، شمار مول الکترون‌های مبادله شده در هر سلول را محاسبه می‌کنیم:

سلول اول: به ازای تولید هر مول نقره، یک مول الکترون مبادله می‌شود، بنابراین با تولید x مول نقره، x مول الکترون مبادله خواهد شد.

سلول دوم: به ازای مصرف هر مول منیزیم، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود، بنابراین با مصرف y مول منیزیم، ۲y مول الکترون مبادله خواهد شد.

گام پنجم: نسبت شمار الکترون‌های مبادله شده در سلول گالوانی $(Mg-Cu)$ به سلول $(Cu-Ag)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{الکترون‌های مبادله شده در واکنش دوم}}{\text{الکترون‌های مبادله شده در واکنش اول}}=\frac{\text{تغییر مول Mg}\times ۲}{\text{تغییر مول Ag}\times ۱}=\frac{۲y}{x}\xrightarrow{y=۴/۵x}\frac{۲(۴/۵x)}{x}=۹$$

کنکورچی‌میگه؟ **اگر تغییر جرم آند، در سلول گالوانی استاندارد «منیزیم - نقره»، نصف تغییر جرم کاتد در سلول گالوانی استاندارد «منگنز - کروم» باشد و ۳/۲۴ گم به جرم کاتد در سلول «منیزیم - نقره» اضافه شود، به تقریب چند الکترون در سلول «منگنز - کروم» مبادله شده است؟ (بازه‌های زمانی انجام واکنش‌ها، متفاوت در نظر گرفته شود.)** (کنکور نوبت دوم تجربی ۱۴۰۴)

$$(Mg=۲۴, Cr=۵۲, Mn=۵۵, Ag=۱۰۸ : g.mol^{-۱})$$

$$E^\circ(Ag^+/Ag)=+۰/۸۰V \quad , \quad E^\circ(Cr^{۳+}/Cr)=-۰/۷۴V$$

$$E^\circ(Mn^{۲+}/Mn)=-۱/۱۸V \quad , \quad E^\circ(Mg^{۲+}/Mg)=-۲/۳۷V$$

۱) $۲/۵\times۱۰^{۲۲}$ ۲) $۱/۵\times۱۰^{۲۳}$ ۳) $۵/۰\times۱۰^{۲۲}$ ۴) $۲/۰\times۱۰^{۲۳}$

پاسخ: گزینه ۱

گام اول: واکنش‌های انجام شده در هر سلول به صورت زیر است:

$$Mg(s)+۲Ag^+(aq)\xrightarrow{۲e^-}Mg^{۲+}(aq)+۲Ag(s)$$

$$۳Mn(s)+۲Cr^{۳+}(aq)\xrightarrow{۶e^-}۳Mn^{۲+}\,|\,۲Cr$$

گام دوم: تغییر جرم منیزیم (آند) را در سلول «منیزیم - نقره» به دست می‌آوریم:

$$۳/۲۴g\,Ag\times\frac{۱mol\,Ag}{۱۰۸g\,Ag}\times\frac{۱mol\,Mg}{۲mol\,Ag}\times\frac{۲۴g\,Mg}{۱mol\,Mg}=۰/۳۶g\,Mg$$

گام سوم: تغییر جرم کروم (کاتد) در سلول «منگنز - کروم» برابر ۰/۷۲ گرم است. بنابراین شماره الکترون‌های مبادله شده برابر است با:

$$۰/۷۲g\,Cr\times\frac{۱mol\,Cr}{۵۲g\,Cr}\times\frac{۶mole^-}{۲mol\,Cr}\times\frac{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^-}{۱mole^-}\simeq۲/۵\times۱۰^{۲۲}e^-$$

---

۱۵. با توجه به اطلاعات زیر، کدام گزینه درست است؟ $(X=۲۷g.mol^{-۱})$

- **در سلول گالوانی حاصل از دو فلز X و Y، به مرور نسبت $\frac{[X^{۳+}]}{[Y^{۲+}]}$ افزایش می‌یابد.**
- **با اتصال قطب منفی ولت‌سنج به نیم‌سلول $(Z^+(aq)/Z(s))$ در سلول گالوانی استاندارد «SHE − Z»، عدد ۰/۸V- نمایش داده می‌شود.**
- **محلول آبی نمک $YSO_۴$ را می‌توان در ظرفی از فلز Z نگه‌داری کرد.**

۱) در سلول گالوانی استاندارد «SHE − Z» به تدریج، pH محلول الکترولیت نیم‌سلول هیدروژن، به یک می‌رسد.

۲) در سلول گالوانی «X − Z»، جهت حرکت الکترون‌ها و یون‌های $Z^+(aq)$ یکسان و به سمت قطب منفی سلول است.

۳) در سلول گالوانی «X − Y»، اگر نسبت تغییر اندازه جرم آند به کاتد برابر ۰/۳۲۱ باشد، جرم مولی Y حدود ۶۵ گرم است.

۴) در واکنش انجام شده در سلول گالوانی با نیم‌سلول‌های فلزی که بیشترین مقدار emf ممکن را دارد، مجموع ضریب گونه‌ها پس از موازنه برابر ۸ است.

پاسخ: گزینه ۴ دشوار | مفهومی، محاسباتی

مشاوره این‌جور سوالات خیلی در کنکور سراسری تکرار شده‌اند و همهٔ اطلاعات شما رو دربارهٔ سلول گالوانی می‌سنجن! پس سعی کن خیلی خوب یادش بگیری تا بتونی به سوالش در کنکور به راحتی جواب بدی!

ابتدا هریک از موارد داده شده را تحلیل می‌کنیم:

مورد اول: در یک سلول گالوانی استاندارد در ابتدا غلظت کاتیون‌ها در هر دو نیم‌سلول برابر یک مولار است. با توجه به این‌که نسبت $\frac{[X^{3+}]}{[Y^{2+}]}$ در حال افزایش است، می‌توان نتیجه گرفت که کاتیون X^{3+} در حال تولید و کاتیون Y^{2+} در حال مصرف است. همچنین می‌دانیم که در آند، اکسایش رخ داده و کاتیون تولید می‌شود، در حالی‌که در کاتد، کاهش رخ داده و کاتیون مصرف می‌شود، بنابراین می‌توان گفت فلز X، الکترود آند و فلز Y، الکترود کاتد است. در نتیجه قدرت کاهندگی فلز X از Y بیشتر و E° نیم‌سلول آن کوچک‌تر است.

مورد دوم:

نکته اگر قطب های هم‌نام ولت‌ســـنج و سلول گالوانی باید به یک‌دیگر متصل شوند، ولت‌سنج متصل به یک سلول گالوانی استاندارد، عددی مثبت و در غیر این‌صورت، ولت‌سنج عددی منفی را نشان می‌دهد.

با توجه به نکته بالا می‌توان گفت که نیم‌سلول $(Z^+(aq)/Z(s))$ قطب مثبت (کاتد) سلول گالوانی $(SHE-Z)$ است. با توجه به این‌که نیم‌سلول SHE آند این سلول بوده و E° آن برابر صفر است، می‌توان E° نیم‌واکنش کاتدی را به دست آورد:

$$emf: E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} \rightarrow +0/8 = E^\circ_{\text{کاتد}} - 0 \rightarrow E^\circ_{\text{کاتد}} = E^\circ(Z^+(aq)/Z(s)) = +0/8\,V$$

مورد سوم:

نکته هنگامی می‌توان محلول نمک یک فلز را در ظرفی از جنس یک فلز دیگر نگه داشت که قدرت کاهندگی فلز آزاد کم‌تر از فلز موجود در نمک باشد.

طبق نکته بالا، می‌توان نتیجه گرفت که قدرت کاهندگی فلز Z از فلز Y کم‌تر است.

در نهایت می‌توان قدرت کاهندگی این سه فلز را به صورت مقابل مقایسه کرد: $X > Y > Z$:قدرت‌کاهندگی

بررسی همهٔ گزینه‌ها:

۱ در سلول گالوانی $(SHE-Z)$ واکنش مقابل انجام می‌شود: $H_2(g)+2Z^+(aq) \rightarrow 2H^+(aq)+2Z(s)$

با گذشت زمان در نیم‌سلول SHE، یون H^+ تولید شده و سبب می‌شود که pH محلول کوچک‌تر شده و به مقادیر منفی برسد. البته با گذشت زمان، یون‌های H^+ تولید شده به سمت نیم‌سلول کاتد مهاجرت می‌کنند و سبب می‌شوند نیم‌سلول کاتدی نیز خاصیت اسیدی پیدا کند.

تذکر: در ابتدا غلظت محلول الکترولیت نیم سلول SHE که حاوی یون H^+ بوده بر ابر یک مولار است و pH محلول برابر صفر است. با تولید یون H^+ غلظت یون H^+ افزایش یافته و مقدار pH کوچک‌تر شده و به مقادیر منفی می‌رسد.

۲ در سلول گالوانی $(X-Z)$، الکترود X آند (قطب منفی) و الکترود Z کاتد (قطب مثبت)، کاتد است. در یک سل‌لول گالوانی، علاوه‌بر الکترون‌ها، کاتیون‌های تولید شده در آند (X^{3+}) نیز به سمت کاتد حرکت می‌کنند.

۳ واکنش کلی انجام شده در سلول گالوانی $(X-Y)$ به صورت مقابل است: $2X(s)+3Y^{2+}(aq) \rightarrow 2X^{3+}(aq)+3Y(s)$

در این سلول الکترود X، آند و الکترود Y، کاتد است. با توجه به معادلهٔ واکنش با مصرف ۲ مول X، ۳ مول از Y تولید می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\text{تغییر جرم آند}(X)}{\text{تغییر جرم کاتد}(Y)} = \frac{\text{جرم مولی X} \times \text{مول مصرفی X}}{\text{جرم مولی Y} \times \text{مول تولیدی Y}} = \frac{2\times 27}{3\times m_Y} = 0/321 \rightarrow m_Y \simeq 56\,g.mol^{-1}$$

۴ طبق توضیحات داده شده، سری الکتروشیمیایی مربوط به نیم‌واکنش‌های این سه فلز به صورت زیر است:

نیم‌واکنش کاهش	$E^\circ(V)$
$Z^+(aq)+e^- \rightarrow Z(s)$	$+0/8$
$Y^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Y(s)$	——
$X^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow X(s)$	——

بیشترین مقدار emf مربوط به سلول گالوانی حاصل از X و Z خواهد بود که در آن واکنش زیر رخ می‌دهد:

$$X(s)+۳Z^{+}(aq)\rightarrow X^{۳+}(aq)+۳Z(s)$$

مجموع ضرایب گونه‌ها در معادلهٔ موازنه شده این واکنش برابر با ۸ است.

۱۷ مهرماه
شیمی

۱- یک نمونه اتیلن‌گلیکول، در ساختار مولکولی خود دارای $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۳}$ اتم کربن است. با استفاده از این نمونه اتیلن‌گلیکول، چند میلی‌لیتر محلول آبی با درصد جرمی ۵٪ و چگالی $۱/۲۵\ g.mL^{-۱}$ می‌توان تهیه کرد؟ $(H = ۱ : g.mol^{-۱}, C = ۱۲, O = ۱۶)$

۱) ۶۲۰ ۲) ۴۹۶ ۳) ۳۱۰ ۴) ۲۴۸

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) محاسبه جرم اتیلن‌گلیکول با استفاده از داده‌های سؤال

۲) محاسبه جرم محلول تولید شده به کمک جرم اتیلن‌گلیکول

۳) به‌دست آوردن حجم محلول با استفاده از چگالی آن

اتیلن‌گلیکول $(C_۲H_۶O_۲)$ یک الکل دو عاملی با فرمول ساختاری زیر است:

$$HO-CH_۲-CH_۲-OH$$

در ساختار هر مولکول اتیلن‌گلیکول، ۲ اتم کربن وجود دارد. بر این اساس، جرم یک نمونه اتیلن‌گلیکول که در ساختار مولکولی خود دارای $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۳}$ اتم کربن است را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ g\ C_۲H_۶O_۲ = ۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۳}\ atom\ C \times \frac{۱\ mol\ C}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ atom\ C} \times \frac{۱\ mol\ C_۲H_۶O_۲}{۲\ mol\ C} \times \frac{۶۲\ g\ C_۲H_۶O_۲}{۱\ mol\ C_۲H_۶O_۲} = ۱۵/۵\ g$$

درصد جرمی محلول

هر محلول از دو قسمت حلال و حل‌شونده تشکیل شده است. غلظت، مؤلفه‌ای است که برای نشان دادن مقدار غلیظ و یا رقیق بودن محلول‌ها کاربرد دارد. درصد جرمی هر محلول، معادل با مقدار حل‌شونده موجود در ۱۰۰ گرم از آن محلول است. درصد جرمی حل‌شونده در یک محلول، با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم حل‌شونده+جرم حلال}} \times ۱۰۰ \quad \text{یا} \quad \text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰$$

در صورت و مخرج رابطه فوق، باید از یکای یکسان (مثل گرم، میلی‌گرم و یا کیلوگرم) استفاده شود. توجه داریم که درصد جرمی محلول‌ها را با نماد W/W یا a هم نشان می‌دهند.

در قدم بعد، جرم محلول ۵٪ جرمی از اتیلن‌گلیکول که قابل تولید است را محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که در هر ۱۰۰ گرم از این محلول آبی، ۵ گرم الکل وجود دارد. بر این اساس، داریم:

$$?\ g\ \text{محلول} = ۱۵/۵\ g\ C_۲H_۶O_۲ \times \frac{۱۰۰\ g\ \text{محلول}}{۵\ g\ C_۲H_۶O_۲} = ۳۱۰\ g$$

چگالی

چگالی، جرمی که یک حجم مشخص از یک ماده دارد را به ما نشان می‌دهد. برای مثال، چگالی ۲/۷ گرم بر سانتی‌متر مکعب، به ما نشان می‌دهد که هر سانتی‌متر مکعب (هر میلی‌لیتر) از یک ماده، چه جرمی دارد. برای نشان دادن چگالی یک ماده، از یکای گرم بر میلی‌لیتر یا کیلوگرم بر لیتر یا گرم بر لیتر استفاده می‌شود. برای محاسبه چگالی، داریم:

$$\text{چگالی} = \frac{\text{جرم نمونه}}{\text{حجم نمونه}} \Rightarrow \text{جرم نمونه} = \text{چگالی} \times \text{حجم نمونه}$$

بر این اساس، خواهیم داشت:

$$\text{جرم ماده} \underset{\div \text{چگالی}}{\overset{\times \text{چگالی}}{\rightleftarrows}} \text{حجم ماده}$$

در قدم آخر، حجم محلول اتیلن‌گلیکول تولید شده در این فرایند را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mL\ \text{محلول} = ۳۱۰\ g\ \text{محلول} \times \frac{۱\ mL\ \text{محلول}}{۱/۲۵\ g\ \text{محلول}} = ۲۴۸\ mL$$

کنکور شناسی

به‌طور کلی، سؤالات شیمی کنکور را به‌صورت زیر می‌توان دسته‌بندی کرد:

- انواع سوالات شیمی کنکور
  - سوالات حفظی
  - سوالات مفهومی
  - سوالات محاسباتی

یکی از مهم‌ترین و چالشی‌ترین بخش‌ها از سؤالات درس شیمی در کنکور سراسری، سؤالاتی است که در حیطه مسائل مطرح می‌شوند. در کنکور چند سال اخیر، در حدود ۵۰ درصد سؤالات شیمی کنکور از حیطه مسائل مطرح شده و این بخش، از جمله بخش‌های بسیار تأثیرگذار بر نتیجه نهایی داوطلبان کنکور بوده است. مهم‌ترین تیترهای مسائل شیمی کنکور و فصلی از کتاب درسی که سؤالات مورد نظر از آن طراحی می‌شوند، به شرح زیر است:

- حیطه‌های اصلی مسائل شیمی کنکور
  - استوکیومتری — فصل ۲ دهم و فصل ۱ یازدهم
  - مسائل غلظت و انحلال‌پذیری محلول — فصل ۳ دهم
  - مسائل شیمی آلی — فصل ۱، ۲ و ۳ یازدهم
  - مسائل ترمودینامیک(ترموشیمی) — فصل ۲ یازدهم
  - مسائل سینتیک — فصل ۲ یازدهم
  - مسائل اسید و باز — فصل ۱ دوازدهم
  - مسائل تعادل — فصل ۱ و ۴ دوازدهم

در سایر فصل‌های کتاب درسی، مسائل پراکنده‌ای وجود دارند که سهم کمتری از سؤالات کنکور را به خود اختصاص می‌دهند. برای حل مسائل شیمی کنکور و گرفتن درصد بالا از این حیطه، باید چند مرحله مهم در ذهن شما به‌صورت زنجیره‌وار انجام شود. این مراحل، به شرح زیر هستند:

۱) مطالعه درست متن(صورت) سؤال

۲) تحلیل اطلاعات ارائه شده در صورت سؤال

۳) پیدا کردن مبحثی که سؤال مربوط به آن است

۴) چیدن استراتژی درست برای حل سؤال

۵) نوشتن معادله واکنش‌های مورد نیاز برای حل سؤال

۶) انجام مراحل محاسباتی برای حل سؤال

برای مثال، فرض کنید در یک سؤال بسیار ساده، به شما گفته شده که در واکنش سوختن کامل مقداری از گاز متان، ۳۲ گرم گاز اکسیژن مصرف شده و در نهایت، جرم گاز کربن دی‌اکسید تولید شده در این واکنش از شما خواسته شده است. بعد از مطالعه متن سؤال، باید اطلاعات داده شده را تحلیل کرده و اطلاعات خواسته شده را مشخص کنید. برای مثال، در رابطه با این سؤال داریم:

جرم گاز کربن دی‌اکسید تولید شده : اطلاعات خواسته شده　　جرم اکسیژن مصرف شده : اطلاعات داده شده

با توجه به اطلاعات داده شده و خواسته شده در این سؤال، متوجه می‌شویم که این سؤال مربوط به مبحث استوکیومتری بوده و متعلق به تیپ جرمی-جرمی است. در سؤالات مربوط به این تیپ، ابتدا باید جرم ماده داده شده را به مول تبدیل کرده و پس از تبدیل مول مواد به یکدیگر، مقدار مول ماده تولید شده را به جرم آن تبدیل کنیم. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$CH_۴(g) + ۲O_۲(g) \rightarrow CO_۲(g) + ۲H_۲O(l)$$

با توجه به معادله این واکنش، استراتژی مربوط به حل سؤال را مشخص کرده و به‌صورت زیر می‌نویسیم:

جرم کربن دی‌اکسید $\xrightarrow{\text{ضرب در جرم مولی } CO_2}$ مول کربن دی‌اکسید $\xrightarrow{\text{نسبت بین ضرایب}}$ مول اکسیژن $\xrightarrow{\text{تقسیم بر جرم مولی اکسیژن}}$ جرم اکسیژن

با استفاده از استراتژی بالا، سؤال مورد نظر به سادگی قابل حل خواهد بود. در قدم آخر، با توجه به استراتژی چیده شده برای حل سؤال مورد نظر، محاسبات عددی خود را انجام می‌دهیم. برای مثال، مراحل حل سؤال گفته شده به‌صورت زیر است:

$$۳۲\ g\ O_2 \xrightarrow{\div ۳۲} ۱\ mol\ O_2 \xrightarrow{\times \frac{۱}{۲}} ۰/۵\ mol\ CO_2 \xrightarrow{\times ۴۴} ۲۲\ g\ CO_2$$

پس از مشخص کردن استراتژی حل سؤال، حتی با استفاده از روش ضریب تبدیل نیز می‌توان مقدار نهایی را محاسبه کرد. هر مرحله از استراتژی بالا، با استفاده از یک کسر تبدیل نیز قابل محاسبه خواهد بود. برای مثال، داریم:

$$?\ g\ CO_2 = ۳۲\ g\ O_2 \times \frac{۱\ mol\ O_2}{۳۲\ g\ O_2} \times \frac{۱\ mol\ CO_2}{۲\ mol\ O_2} \times \frac{۴۴\ g\ CO_2}{۱\ mol\ CO_2} = ۲۲\ g$$

برای حل همان سؤال به روش تناسب یا کسر پیش‌ساخته، داریم:

$$\frac{\text{جرم اکسیژن}}{\text{ضریب}\times\text{جرم مولی}} = \frac{\text{جرم کربن دی‌اکسید}}{\text{ضریب}\times\text{جرم مولی}} \Longrightarrow \frac{۳۲\ g\ O_2}{۳۲\times ۲} = \frac{x\ g\ CO_2}{۴۴\times ۱} \Longrightarrow x = ۲۲\ g$$

مراحل طی شده برای حل هر مسئله را به‌طور خلاصه می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

یافتن معادله واکنش‌ها	چیدن استراتژی برای حل سوال	مطالعه متن سوال
انجام مراحل محاسباتی	تشخیص تیپ سوال	تشخیص مبحث سوال
یافتن پاسخ نهایی سوال	پیدا کردن خواسته‌های سوال	پیدا کردن داده‌های سوال

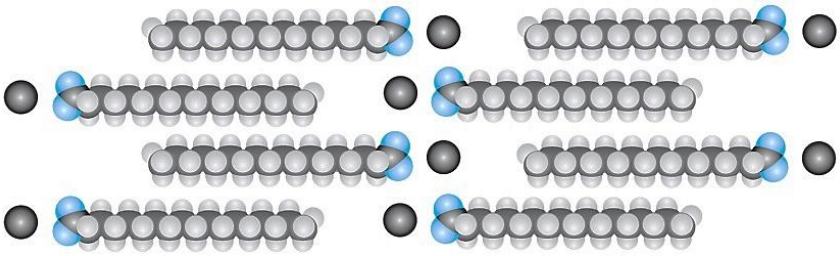
توجه داشته باشید که اگر استراتژی حل یک سؤال را به درستی درک کنید، برای حل مسائل شیمی دیگر درگیر انتخاب روش‌های مختلف از جمله تناسب، ضریب تبدیل، الگوریتمی و ... نبوده و مراحل حل هر سؤالی را به سادگی درک خواهید کرد. البته، دقت داشته باشید که برای حل سؤالات امتحان نهایی، فقط باید از روش ضریب تبدیل (زنجیره‌ای) استفاده کنید!

۲- نوع نیروی بین مولکولی غالب در یک نمونه صابون، از جنس ..... بوده و اگر کاتیون سدیم موجود در صابون مورد نظر را با کاتیون پتاسیم جایگزین کنیم، دمای ذوب این ماده ..... می‌یابد.

۱) جاذبه یونی ـ افزایش
۲) جاذبه یونی ـ کاهش
۳) نیروی وان‌درووالسی ـ افزایش
۴) نیروی وان‌درووالسی ـ کاهش

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶)

به نمک سدیم، پتاسیم و یا آمونیوم اسیدهای چرب دراز زنجیر، صابون گفته می‌شود. در واقع، صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب و صابون‌های جامد نیز نمک سدیم اسیدهای چرب هستند. در یک نمونه از صابون، اجزای آنیونی و کاتیونی به‌صورت زیر در کنار هم قرار می‌گیرند:



در این حالت، بین بخش قطبی ذرات صابون، نیروهایی از جنس پیوند یونی(جاذبه بین یون‌هایی با بار ناهمنام) و بین دم هیدروکربنی ذرات صابون نیز نیروی وان‌درووالسی برقرار می‌شود. چون دم هیدروکربنی در ساختار صابون خیلی بلند است، پس نوع نیروی بین ذره‌ای غالب در صابون را می‌توان نیروی وان‌درووالسی در نظر گرفت. از آنجا که صابون‌های جامد دمای ذوب بالاتری دارند، پس می‌توان گفت اگر یون Na^+ موجود در نوعی صابون را با K^+ جایگزین کنیم، دمای ذوب آن کاهش می‌یابد.

دمای ذوب

ذوب، معادل با تغییر حالت یک ماده از جامد به مایع بوده و انجماد، معادل با تغییر حالت یک ماده از مایع به جامد است. در این رابطه داریم:

$$\text{جامد} \xrightarrow{\text{انجماد}} \text{مایع} \qquad \text{مایع} \xrightarrow{\text{ذوب}} \text{جامد}$$

دمایی که در آن یک ماده بین حالت‌های مایع و جامد تغییر حالت می‌دهد را دمای ذوب یا انجماد می‌گویند. برای مثال، دمای ذوب یخ که معادل با همان دمای انجماد آب است، معادل با $0^\circ C$ می‌باشد. برای اینکه یک ماده از حالت جامد به حالت مایع در بیاید، باید نیروهای بین ذره‌ای در آن سست شود تا ذرات آن ماده بتوانند به آسانی روی یکدیگر جابه‌جا شوند. پس با افزایش قدرت نیروهای بین ذره‌ای، انرژی لازم برای سست کردن این نیروها بیشتر شده و دمای ذوب آن ماده افزایش پیدا می‌کند.

مثال

۳- کدام موارد از عبارت‌های زیر، در رابطه با محلول آبی از اوره، درست است؟

الف ـ میان ذرات حلال و حل‌شونده، پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.

ب ـ یک نمونه از آن، همانند شربت معده، پرتوهای نور را پخش می‌کند.

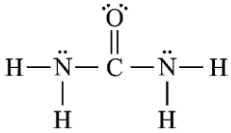
ج ـ در ساختار ذرات حل‌شونده موجود در این محلول، پیوند دوگانه وجود دارد.

د ـ گروه عاملی موجود در ساختار حل‌شونده موجود در این محلول، در ساختار ذرات عسل نیز وجود دارد.

۱) «الف» و «ب» ۲) «الف» و «ج» ۳) «ب» و «د» ۴) «ج» و «د»

پاسخ: گزینه ۲ **(متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷)**

اوره($CO(NH_2)_2$) یک ترکیب قطبی بوده و به همین خاطر، در حلال‌های ناقطبی حل نمی‌شود و محلول در مواد قطبی است. این ترکیب، از کنار هم قرار گرفتن اتم‌های کربن، نیتروژن، اکسیژن و هیدروژن تشکیل شده است. ساختار اوره به‌صورت زیر است:



در رابطه با محلول آبی اوره، عبارت‌های (الف) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) در تشکیل پیوندهای هیدروژنی، اتم‌های اکسیژن، نیتروژن و فلوئور و همچنین اتم‌های هیدروژن متصل به این اتم‌ها شرکت می‌کنند. چون در ساختار اوره، اتم هیدروژن متصل به نیتروژن وجود داشته و در ساختار آب نیز اتم هیدروژن متصل به اکسیژن وجود دارد، پس بین ذرات اوره و آب پیوندهای هیدروژنی برقرار می‌شود.

پیوند هیدروژنی

به برهم‌کنش‌های بین مولکول‌های سازنده یک ماده، نیروهای بین مولکولی گفته می‌شود که به دو دسته پیوند هیدروژنی و نیروهای واندروالسی تقسیم‌بندی می‌شود. اگر بین دو مولکول پیوند هیدروژنی برقرار نباشد، نیروی بین مولکولی آن‌ها از نوع واندروالسی است. برای ایجاد پیوند هیدروژنی بین دو مولکول، دو شرط لازم است:

شرط اول) در یکی از مولکول‌ها، اتم هیدروژن به‌طور مستقیم(با پیوند اشتراکی) به یکی از سه اتم F، O و یا N متصل باشد.

شرط دوم) مولکول دیگر، باید قطبی باشد و کافی است فقط یکی از سه اتم F، O و یا N در آن وجود داشته باشد.

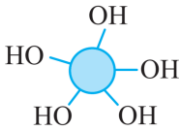
ب) تصویر زیر، نمایی از یک محلول همگن و یک کلوئید را نشان می‌دهد:



اگر پرتوی نوری از درون کلوئیدها یا سوسپانسیون‌ها بگذرد، توسط ذره‌های سازنده این مواد پخش شده و به چشم بازتابیده می‌شود و به همین خاطر است که مسیر عبور نور در کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها قابل مشاهده است. این در حالی است که ذرات سازنده محلول‌ها(مثل محلول اوره در آب) بسیار کوچک بوده و توانایی پخش کردن نور را ندارند.

ج) در ساختار مولکولی اوره، پیوند دوگانه کربن-اکسیژن یافت می‌شود.

د) اوره در ساختار خود دارای ۲ گروه عاملی آمیدی است. این در حالی است که عسل از مولکول‌های قطبی ساخته شده و در ساختار هر یک از مولکول‌های آن، شمار زیادی گروه هیدروکسیل وجود دارد. هنگامی که عسل وارد آب می‌شود، مولکول‌های سازنده آن با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کرده و در سرتاسر آن پخش می‌شوند. تصویر زیر، نمایی از ساختار یک مولکول سازنده عسل را نشان می‌دهد:



۴- چربی ذخیره شده در کوهان شتر، نوعی استر سنگین سه‌عاملی با فرمول شیمیایی $C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$ بوده و زنجیره‌های هیدروکربنی موجود در ساختار آن، کاملاً یکسان هستند. در رابطه با این ماده، کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

$(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) از واکنش این ماده با مقدار کافی آب، نوعی اسید چرب با فرمول $C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲$ طی فرایند آبکافت تولید می‌شود.

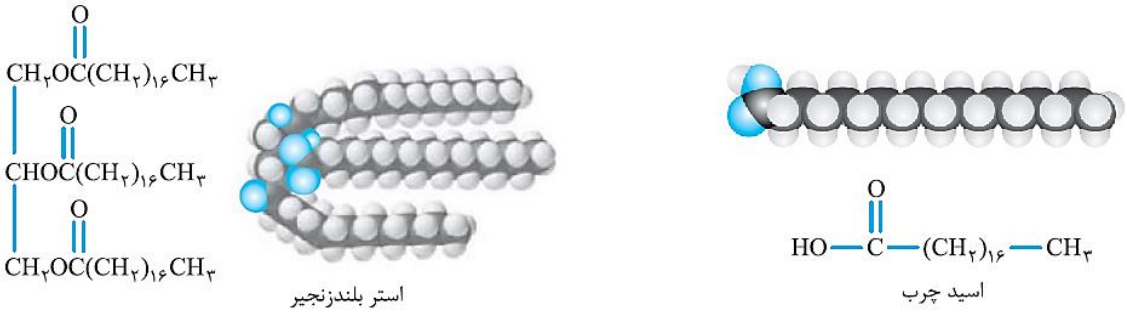
۲) این ماده، از ذرات ناقطبی ساخته شده و جرم مولی آن، بیش از ۱۵ برابر جرم مولی ذرات سازنده اوره است.

۳) در ساختار مولکولی این ماده، تعداد ۶ پیوند اشتراکی $C - O$ بین اتم‌ها برقرار شده است.

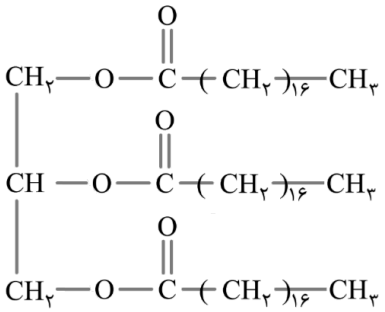
۴) در ساختار بخش قطبی ذرات سازنده این ماده، اتم‌هایی از ۳ عنصر مختلف وجود دارند.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵)

چربی‌ها، مخلوطی از اسیدهای چرب(کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی و جرم مولکولی زیاد) و استرهای بلندزنجیر(استرهایی با جرم مولی زیاد) هستند. همه ذرات موجود در یک نمونه از چربی‌ها، ناقطبی هستند. تصویر زیر، ساختار مولکولی انواع چربی‌ها را نشان می‌دهد:



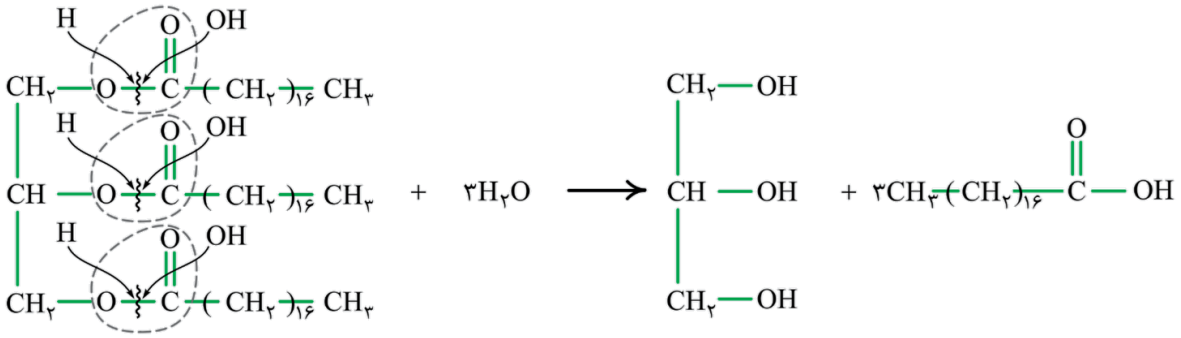
چربی ذخیره شده در کوهان شتر، نوعی استر سنگین سه‌عاملی با فرمول شیمیایی $C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$ است. ساختار مولکولی این ماده به‌صورت زیر خواهد بود:



در ساختار این ترکیب استری، ۳ اتم کربن در قسمت قطبی و مجموعاً ۵۴ اتم کربن در بخش‌های زنجیره‌ای مولکول وجود دارد. جرم مولی این ماده، برابر با ۸۹۰ گرم بر مول است در حالی که جرم مولی اوره برابر با ۶۰ گرم بر مول است. نسبت میان این دو عدد برابر با $\frac{۸۹۰}{۶۰} \simeq ۱۴/۸۳$ خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) گروه‌های عاملی استری موجود در ساختار چربی ذخیره شده در کوهان شتر، در واکنش با آب، تجزیه شده و طی این فرایند، سه اسید چرب و یک مولکول الکل سه‌عاملی به‌دست می‌آید. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:



در این فرایند، نوعی اسید چرب با فرمول $C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲$ تولید می‌شود.

آبکافت استرهای سنگین

استرهای سنگین، دارای ۳ گروه عاملی استری بوده و در واکنش آبکافت شرکت می‌کنند. در این فرایند، ۳ مولکول اسید چرب تولید می‌شود. توجه داریم که برای به‌دست آوردن اسیدهای چرب سازنده یک استر سنگین، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\text{فرمول شیمیایی اسید چرب سازنده} = \frac{\text{فرمول شیمیایی استر سنگین} - C_۳H_۵ + ۳H}{۳}$$

در واکنش آبکافت استرهای سنگین، علاوه بر سه اسید چرب، یک مولکول الکل سه‌عاملی نیز تولید می‌شود.

۳) در ساختار مولکولی استرهای سنگین، ۳ گروه عاملی استری وجود داشته و هر گروه استری نیز دارای ۲ پیوند اشتراکی $C-O$ است. بر این اساس، می‌توان گفت در ساختار مولکولی چربی ذخیره شده در کوهان شتر، تعداد ۶ پیوند اشتراکی $C-O$ بین اتم‌ها برقرار شده است.

۴) در ساختار بخش قطبی ذرات سازنده استر موجود در کوهان شتر، سه گروه استری وجود داشته و در ساختار این بخش‌ها، اتم‌هایی از ۳ عنصر مختلف(اکسیژن، کربن و هیدروژن) وجود دارند.

چربی‌ها

هر یک از مولکول‌های سازنده چربی‌ها(اسیدهای چرب و استرهای با جرم مولی زیاد)، از یک بخش قطبی(بخش آب‌دوست) و یک بخش ناقطبی(بخش چربی‌دوست و یا آب‌گریز) تشکیل شده است. از آن‌جا که بخش اعظم این مولکول‌ها ناقطبی است، پس بخش ناقطبی مولکول به راحتی بر بخش قطبی آن غلبه کرده و در نتیجه مولکول‌های چربی در مجموع، ناقطبی به حساب می‌آیند و در حلال‌های قطبی مانند آب حل نمی‌شوند. به خاطر نامحلول بودن چربی‌ها در حلال‌های قطبی، آب به تنهایی نمی‌تواند چربی‌های موجود بر روی پوست و لباس‌ها را پاک کند و به همین دلیل، برای پاک کردن چربی‌ها باید از سایر پاک‌کننده‌ها کمک بگیریم.

۵- مقداری صابون جامد را در آب حل می‌کنیم تا محلولی به جرم ۵ کیلوگرم و با غلظت $۴۶۰۰ppm$ از یون سدیم به‌دست بیاید. محلول مورد نظر، با چند گرم از منیزیم کلرید موجود در یک نمونه از آب سخت به‌صورت کامل واکنش می‌دهد؟

($Cl = ۳۵/۵ , Mg = ۲۴ , Na = ۲۳ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۴/۷۵ ۲) ۹/۵ ۳) ۹۵ ۴) ۴۷/۵

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) محاسبه جرم یون سدیم موجود در محلول

۲) محاسبه مقدار مول صابون با استفاده از جرم یون سدیم

۳) به‌دست آوردن جرم منیزیم کلرید مصرف شده در واکنش با صابون

قسمت در میلیون

مقیاس ppm، روشی برای بیان غلظت محلول‌ها و به ویژه محلول‌های خیلی رقیق است. غلظت ppm هر محلول، معادل با مقدار گرم حل‌شونده موجود در $۱۰^۶$ گرم از آن محلول است. غلظت ppm حل‌شونده در یک محلول، با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم حلال+جرم حل‌شونده}} \times ۱۰^۶ \quad \text{یا} \quad ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶$$

در صورت و مخرج رابطه فوق، باید از یکای جرمی یکسان استفاده شود. توجه داریم که اگر محلول مورد نظر خیلی رقیق بوده و جرم حل‌شونده آن در مقایسه با جرم حلال خیلی کوچک باشد(مثلاً ۰/۱ گرم در مقابل ۱۰ کیلوگرم)، در مخرج رابطه مورد نظر می‌توانیم فقط جرم حلال را آورده و از جرم حل‌شونده صرف‌نظر کنیم.

می‌دانیم که پس از ورود صابون به آب، اجزای آنیونی و کاتیونی این ماده از یکدیگر جدا شده و در محلول پخش می‌شوند. با توجه به غلظت یون سدیم در محلول، جرم این یون را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ \Longrightarrow ۴۶۰۰ = \frac{x\ g\ Na^+}{۵۰۰۰\ g\ \text{محلول}} \times ۱۰^۶ \Longrightarrow x = ۲۳\ g$$

صابون مورد نظر، پس از انحلال در آب، ۲۳ گرم یون سدیم را وارد محلول کرده است. فرمول شیمیایی صابون، به‌صورت $RCOONa$ بوده و بر این اساس، هر مول صابون در ساختار خود دارای ۱ مول کاتیون سدیم است. بر این اساس، مقدار مول صابون را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ mol\ RCOONa = ۲۳\ g\ Na^+ \times \frac{۱\ mol\ Na^+}{۲۳\ g\ Na^+} \times \frac{۱\ mol\ RCOONa}{۱\ mol\ Na^+} = ۱\ mol$$

با توجه به محاسبات بالا، یک مول صابون در اختیار داریم. معادله واکنش صابون‌ها با یون‌های منیزیم موجود در ساختار منیزیم کلرید به‌صورت زیر است:

$$۲RCOONa(aq) + MgCl_۲(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Mg(s) + ۲NaCl(aq)$$

آب سخت

نوع و میزان یون‌های موجود در آب، بر قدرت پاک‌کنندگی صابون‌ها تأثیر بسزایی دارد. در صورتی که آب مورد استفاده برای شست‌وشوی لباس‌ها، حاوی کاتیون‌های کلسیم و منیزیم باشد(به چنین آب‌هایی، به اصطلاح آب سخت گفته می‌شود)، قدرت پاک‌کنندگی صابون کاهش پیدا می‌کند؛ چرا که مولکول‌های صابون، براساس معادله‌های زیر با کاتیون‌های موجود در آب‌های سخت واکنش می‌دهند:

واکنش صابون با یون کلسیم: $۲RCOONa(aq) + Ca^{۲+}(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Ca(s) + ۲Na^+(aq)$

واکنش صابون با یون منیزیم: $۲RCOONa(aq) + Mg^{۲+}(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Mg(s) + ۲Na^+(aq)$

همان‌طور که مشخص است، مولکول‌های صابون در واکنش با کاتیون‌های موجود در آب‌های سخت، به رسوب تبدیل می‌شوند و نمی‌توانند به‌عنوان یک پاک‌کننده ایفای نقش کنند. آب دریاها و آب مناطق کویری، شور بوده و حاوی مقادیر چشمگیری از یون‌های کلسیم و منیزیم هستند. همان‌طور که گفتیم، چنین آب‌هایی به آب‌های سخت معروف هستند و صابون در آن‌ها به خوبی کف نمی‌کند و قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها کاهش پیدا می‌کند.

هر مول منیزیم کلرید، با ۲ مول صابون به‌طور کامل واکنش می‌دهد. بر این اساس، داریم:

$$?\ g\ MgCl_۲ = ۱\ mol\ RCOONa \times \frac{۱\ mol\ MgCl_۲}{۲\ mol\ RCOONa} \times \frac{۹۵\ g\ MgCl_۲}{۱\ mol\ MgCl_۲} = ۴۷/۵\ g$$

افزودن نمک فسفات به صابون

افزودن نمک‌های فسفات به مواد شوینده، موجب افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها در آب‌های سخت می‌شود. یون فسفات موجود در این دسته از شوینده‌ها، با یون‌های $Mg^{۲+}$ و $Ca^{۲+}$ براساس معادله‌های زیر واکنش می‌دهد:

$$۲PO_۴^{۳-}(aq) + ۳Ca^{۲+}(aq) \rightarrow Ca_۳(PO_۴)_۲(s) \quad , \quad ۲PO_۴^{۳-}(aq) + ۳Mg^{۲+}(aq) \rightarrow Mg_۳(PO_۴)_۲(s)$$

طی این واکنش‌ها، یون‌های $Mg^{۲+}$ و $Ca^{۲+}$ به شکل رسوب درآمده و از محلول خارج می‌شوند. با خارج‌شدن این کاتیون‌ها، دیگر اختلالی در کار مولکول‌های صابون ایجاد نمی‌شود و صابون به خوبی کف می‌کند. هر چند که اضافه‌کردن مواد افزودنی خواص ویژه‌ای را به شوینده‌ها می‌دهد، اما باید توجه داشت که هر چه شوینده‌ای مواد شیمیایی بیشتری به همراه خود داشته باشد، احتمال ایجاد عوارض جانبی توسط آن بیشتر می‌شود.

۶- چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ چند هزار سال پیش، انسان علاوه بر آب، از موادی شبیه به صابون امروزی برای نظافت و پاکیزگی استفاده می‌کرد.

ب ـ وبا به دلیل آلوده شدن آب و نبود بهداشت شیوع پیدا کرده و هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه تهدیدکننده باشد.

ج ـ صابون، دارای دو بخش قطبی و ناقطبی بوده و با افزایش استفاده از آن، مقدار میکروب‌ها در محیط کاهش یافت.

د ـ میانگین جهانی شاخص امید به زندگی، بیشتر از مقدار این شاخص در نواحی برخوردار جهان است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ حفظی و مفهومی ـ سریع ۱۰ ـ صفحهٔ ۶)

عبارت‌های (الف)، (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف حفاری‌های باستانی از شهر بابِل نشان می‌دهد که چند هزار سال پیش از میلاد، انسان‌ها به همراه آب از موادی شبیه به صابون امروزی برای نظافت و پاکیزگی استفاده می‌کردند.

نقش خاکستر در پاکیزگی

نیاکان ما به تجربه پی‌برده بودند که اگر ظرف‌های چرب را به خاکستر آغشته کرده و سپس با آب گرم شست‌وشو دهند، این ظروف آسان‌تر تمیز می‌شوند. در واقع، خاکستر حاوی برخی از فلزهای قلیایی بوده و خاصیت بازی دارد. با ورود خاکستر به محیط، این ماده در تماس با چربی‌ها، صابون تولید می‌کند. صابون تولید شده طی این فرایند، باعث پاک شدن سریع چربی‌ها می‌شود.

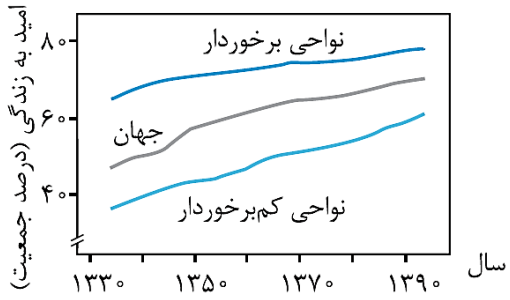
ب بیماری وبا یک بیماری واگیردار است و در طول تاریخ بارها در جهان همه‌گیر شده است و طی این فرایند جان میلیون‌ها انسان را گرفته است. این بیماری به دلیل آلوده شدن آب و نبود بهداشت شایع می‌شود. بیماری وبا، هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه تهدیدکننده باشد.

وبا در طول تاریخ

در طول زمان، استفاده از صابون و توجه به نظافت و بهداشت در جامعه گسترش یافت و سبب شد تا مقدار آلودگی‌ها، میکروب‌ها و عوامل بیماری‌زا در محیط‌های فردی و همگانی کاهش یافته و سطح بهداشت جامعه افزایش پیدا کند. بر این اساس، می‌توان گفت احتمال بروز وبا در طول زمان کاهش یافته است. البته، توجه داریم که این بیماری هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه‌ای تهدیدکننده باشد. ساده‌ترین و مؤثرترین راه پیشگیری از این بیماری، رعایت بهداشت فردی و همگانی است.

ج بخش آنیونی صابون، دارای دو قسمت قطبی و ناقطبی است. بخش باردار، قسمت قطبی و بخش هیدروکربنی، قسمت ناقطبی صابون را تشکیل می‌دهد. با افزایش استفاده از صابون، مقدار میکروب‌ها در محیط کاهش یافته است.

د نمودار زیر، روند تغییر شاخص امید به زندگی در مناطق مختلف جهان را نشان می‌دهد:



با توجه به داده‌های موجود در این نمودار، میانگین جهانی شاخص امید به زندگی حدوداً برابر با ۶۵ سال است؛ درحالی که شاخص امید به زندگی در مناطق برخوردار جهان بیشتر از ۷۵ سال است. بر این اساس، می‌توان گفت در حال حاضر میانگین جهانی شاخص امید به زندگی کمتر از مقدار این شاخص در نواحی برخوردار جهان است.

امید به زندگی

شاخص امید به زندگی نشان می‌دهد با توجه به خطراتی که انسان‌ها در طول زندگی با آن مواجه هستند، به‌طور میانگین چند سال در این جهان زندگی می‌کنند. امید به زندگی شاخصی است که در کشورهای گوناگون و حتی در شهرهای یک کشور نیز با هم تفاوت دارد، زیرا این شاخص به عوامل گوناگونی بستگی دارد. مقدار این شاخص در سطح جهان، در حال حاضر تقریباً برابر با ۶۵ سال است. در طول ۶۰ سال اخیر، میزان امید به زندگی هم برای مناطق برخوردار جهان و هم برای مناطق کم‌برخوردار جهان افزایش پیدا کرده است. هر چند که میزان این افزایش برای مناطق کم‌برخوردار، بیشتر از مناطق برخوردار بوده است، اما هنوز هم میزان امید به زندگی در نواحی برخوردار جهان در حدود ۲۰ سال بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است.

ماز

۷- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) هگزان، یک هیدروکربن بوده و از جمله مواد ناقطبی است و به‌عنوان پاک‌کننده، برای زدودن لکه‌های گریس کاربرد دارد.
۲) آب، یک حلال قطبی است و پاک‌کنندهٔ مناسبی برای لکه‌های شیرینی مانند آب قند و شربت آب‌لیمو به شمار می‌رود.
۳) شمار اتم‌های اکسیژن موجود در مولکول روغن زیتون، ۳ برابر شمار اتم‌های اکسیژن در مولکول اتیلن گلیکول است.
۴) هر ترکیب آلی که با استفاده از اتم‌های کربن، اکسیژن و هیدروژن ساخته شده باشد، به یقین محلول در آب است.

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵)

برخی از ترکیب‌های آلی مثل اسیدهای چرب و استرهای سنگین، هرچند که دارای قسمت‌های قطبی در مولکول خود هستند، اما چون به‌طور عمده از قسمت‌های ناقطبی(هیدروکربنی) ساخته شده‌اند، نامحلول در آب هستند. این مواد، با استفاده از اتم‌های کربن، اکسیژن و هیدروژن ساخته شده‌اند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) هگزان و گریس، هر دو ترکیب‌های ناقطبی بوده و از جمله آلکان‌ها به شمار می‌روند. این دو ترکیب، به ترتیب در ساختار خود دارای ۶ و ۱۸ اتم کربن هستند. چون مواد ناقطبی، مواد ناقطبی را در خود حل می‌کنند، از هگزان به‌عنوان یک پاک‌کننده می‌توان برای زدودن لکه‌های حاصل از مواد ناقطبی مثل گریس و وازلین استفاده کرد.

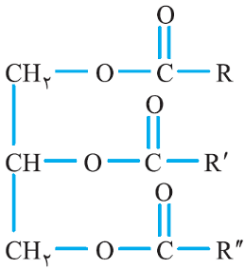
گریس در برابر وازلین: نبرد مولکولی برای چسبندگی و جوش

گریس و وازلین، هر دو از جمله مواد هیدروکربنی هستند که در دسته آلکان‌ها قرار می‌گیرند. فرمول مولکولی تقریبی وازلین به‌صورت $C_{۲۵}H_{۵۲}$ و فرمول مولکولی تقریبی گریس به‌صورت $C_{۱۸}H_{۳۸}$ است. چون وازلین تعداد اتم‌های کربن بیشتری دارد، چسبندگی یک نمونه از آن بیشتر از گریس خواهد بود. به طریق مشابه، چون وازلین تعداد اتم‌های کربن بیشتری دارد، دمای جوش یک نمونه از این ماده در مقایسه با دمای جوش یک نمونه گریس بیشتر است. خواص مختلف آلکان‌ها با توجه به تعداد اتم‌های کربن موجود در آن‌ها مطابق با نمودار زیر تغییر می‌کند:

افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌ها ← افزایش قدرت نیروهای وان‌دروالسی ← {افزایش دمای جوش (دمایی که یک مایع در آن می‌جوشد)، کاهش فراریت (تمایل برای تبدیل شدن به حالت گاز)، افزایش گران‌روی (مقاومت در برابر جاری شدن)}

۲) آب قند و شربت آب‌لیمو، حاوی مولکول‌های بسیار قطبی گلوکز($C_۶H_{۱۲}O_۶$) و شکر($C_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱}$) هستند که هریک حاوی چندین گروه عاملی هیدروکسیل هستند. گروه هیدروکسیل موجود در مولکول‌های سازنده این مواد، با ذرات آب پیوند هیدروژنی برقرار خواهد کرد؛ در نتیجه آب قند و شربت آب‌لیمو، همانند عسل به راحتی در آب حل می‌شوند.

۳) فرمول مولکولی روغن زیتون به‌صورت $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$ بوده و فرمول مولکولی اتیلن گلیکول نیز به‌صورت $C_۲H_۶O_۲$ است، بنابراین نسبت خواسته شده در رابطه با تعداد اتم اکسیژن برابر با سه است. ساختار کلی روغن زیتون به‌صورت زیر است:



۸- نمونه‌ای به جرم ۱/۳۹ گرم از اسید چرب $C_{۱۸}H_{۳۰}O_۲$ با $۲۰mL$ از محلول سود با درصد جرمی ۸٪ و چگالی $۱/۲۵g.mL^{-۱}$ به‌طور کامل واکنش می‌دهد. چند درصد از سود در واکنش شرکت کرده و غلظت مولی نهایی سود در محلول ایجاد شده چقدر خواهد بود؟ (از تغییر حجم محلول، صرف نظر شود. $g.mol^{-۱}$: $Na=۲۳, O=۱۶, C=۱۲, H=۱$)

$$C_{۱۷}H_{۲۹}COOH(s)+NaOH(aq)\rightarrow C_{۱۷}H_{۲۹}COONa(aq)+H_۲O(l)$$

۱) ۲/۲۵ ـ ۱۰ ۲) ۲/۲۵ ـ ۱۵ ۳) ۱/۷۵ ـ ۱۰ ۴) ۱/۷۵ ـ ۱۵

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمانبر ـ صفحهٔ ۵)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) محاسبه مقدار مول اسید چرب مصرف شده در این واکنش

۲) محاسبه مقدار مول سود(سدیم هیدروکسید) موجود در محلول

۳) به‌دست آوردن درصدی از سدیم هیدروکسید که مصرف شده است

۴) محاسبه غلظت سود باقیمانده در محلول

فرمول شیمیایی اسید چرب مورد نظر به‌صورت $C_{۱۸}H_{۳۰}O_۲$ بوده و جرم مولی این ماده برابر با ۲۷۸ گرم است. ابتدا تعداد مول اسید چرب شرکت‌کننده در واکنش را حساب می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$?\,mol\ \text{اسید چرب} = ۱/۳۹\ g\ \text{اسید چرب} \times \frac{۱\ mol\ \text{اسید چرب}}{۲۷۸\ g\ \text{اسید چرب}} = ۰/۰۰۵\ mol$$

تبدیل غلظت

برای محاسبه غلظت مولی یک محلول از روی درصد جرمی و چگالی آن محلول، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی محلول} = \frac{۱۰\times a\times d}{M}$$

توجه داریم که در این رابطه، a مقدار عددی درصد جرمی(برای مثال اگر درصد جرمی ۲۰٪ باشد، به‌جای a عدد ۲۰ می‌گذاریم)، d چگالی محلول مورد نظر برحسب $g.mL^{-۱}$ بوده و مقدار M نیز جرم مولی حل‌شونده بر حسب $g.mol^{-۱}$ است. از آن‌جا که درصد جرمی هر محلول، $۱۰^۴$ برابر غلظت ppm آن محلول است، می‌توانیم از فرمول زیر نیز برای تبدیل غلظت ppm به غلظت مولی استفاده کنیم:

$$\text{غلظت مولی محلول} = \frac{ppm\ \text{غلظت}\times d}{M\times ۱۰۰۰}$$

محلولی از سود(سدیم هیدروکسید) با درصد جرمی ۸٪ و چگالی $۱/۲۵g.mL^{-۱}$ در اختیار داریم. در رابطه با این محلول، داریم:

$$\text{غلظت مولی سود} = \frac{\text{چگالی}\times\text{درصد جرمی}\times ۱۰}{\text{جرم مولی}} = \frac{۱۰\times ۸\times ۱/۲۵}{۴۰} = ۲/۵\ mol.L^{-۱}$$

$$?\,mol\ \text{سود} = ۲/۵ mol.L^{-۱}\times\left(\frac{۲۰}{۱۰۰۰}\right)L = ۰/۰۵\ mol$$

هر مول اسید چرب، با یک مول سود واکنش می‌دهد، پس می‌توان گفت از ۰/۰۵ مول سود اولیه، ۰/۰۰۵ مول در واکنش شرکت کرده و ۰/۰۴۵ مول از آن باقی می‌ماند، بنابراین داریم:

$$\text{درصد شرکت کرده از سود در واکنش} = \left(\frac{۰/۰۰۵}{۰/۰۵}\right)\times ۱۰۰ = ۱۰\ \text{درصد}$$

در ادامه غلظت سود در محلول نهایی را حساب می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی نهایی سود} = \frac{۰/۰۴۵\ mol}{\left(\frac{۲۰}{۱۰۰۰}\right)L} = ۲/۲۵ mol.L^{-۱}$$

ماز

۹- در ساختار بخش آنیونی نوعی پاک‌کننده صابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، ۳۵ پیوند اشتراکی $C-H$ وجود دارد. به منظور تولید ۶۱/۲ گرم از این نوع صابون با استفاده از یک اسید چرب، به چند میلی‌لیتر محلول ۰/۴ مولار سود نیاز داریم؟ ($g.mol^{-۱}$: $Na=۲۳, O=۱۶, C=۱۲, H=۱$)

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۵۰۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵)

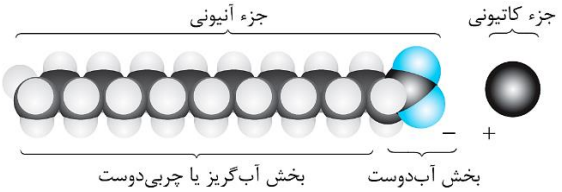
برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) تحلیل ساختار صابون تولید شده در این واکنش

۲) به‌دست آوردن فرمول شیمیایی صابون تولید شده

۳) محاسبه حجم محلول بازی مصرف شده در واکنش

صابون نمک سدیم، پتاسیم یا آمونیوم حاصل از اسیدهای چرب است. این ماده، در آب محلول بوده و به علت زنجیره هیدروکربنی بزرگ خود، در چربی نیز حل می‌شود. ساختار کلی صابون‌های جامد به‌صورت زیر است:



صابون‌های جامد، نمک سدیم اسیدهای چرب هستند و می‌توان آن‌ها را با فرمول کلی $RCOONa$ نشان داد که در آن، گروه R نشان‌دهندهٔ یک زنجیر هیدروکربنی بلند است. اگر بخش R در صابون‌ها معادل با زنجیر آلکیلی باشد، فرمول کلی این صابون‌ها $C_nH_{2n+1}COONa$ خواهد بود. در ساختار این ماده، هر اتم هیدروژن توسط یک پیوند $C-H$ به اتم کربن متصل است. طبق فرض سؤال، در ساختار بخش آنیونی پاک‌کننده صابونی مورد نظر، ۳۵ پیوند اشتراکی $C-H$ وجود دارد، پس می‌توان گفت این صابون دارای ۳۵ اتم هیدروژن است. بر این اساس، داریم:

$$\text{فرمول صابون}: C_nH_{2n+1}COONa \xrightarrow{\text{صابون دارای ۳۵ اتم هیدروژن است}} 2n+1=35 \Longrightarrow n=17$$

با توجه به مقدار n، فرمول شیمیایی صابون مورد نظر به‌صورت $C_{17}H_{35}COONa$ خواهد بود. واکنش تولید صابون مورد نظر با استفاده از یک اسید چرب، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\text{اسید چرب} + \text{سدیم هیدروکسید} \rightarrow \text{صابون} + \text{آب}$$

پس معادله دقیق این واکنش را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$C_{17}H_{35}COOH + NaOH \rightarrow C_{17}H_{35}COONa + H_2O$$

با توجه به معادله این واکنش، مقدار سود مورد نیاز برای تهیه ۶۱/۲ گرم صابون را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,L \text{ محلول سود} = 61/2\,g\,C_{17}H_{35}COONa \times \frac{1\,mol\,C_{17}H_{35}COONa}{306\,g\,C_{17}H_{35}COONa} \times \frac{1\,mol\,NaOH}{1\,mol\,C_{17}H_{35}COONa}$$

$$\times \frac{1\,L \text{ محلول سود}}{0/4\,mol\,NaOH} = 0/5\,L$$

طی این فرایند، ۰/۵ لیتر محلول سود که معادل با ۵۰۰ میلی‌لیتر از آن است، مصرف شده است.

۱۰- کدام‌یک از مطلب داده شده نادرست است؟

۱) پارچه‌های پلی‌استری به کمک الیاف مصنوعی ساخته شده و چسبندگی ذرات چربی روی آن‌ها بیشتر از پارچه نخی است.

۲) پاک‌کننده‌های غیرصابونی از جمله مواد آروماتیک بوده و با ایجاد نیروهای بین‌ذره‌ای مناسب، آلودگی‌ها را پاک می‌کنند.

۳) معروف‌ترین صابون سنتی ایران، حالت جامد داشته و به‌خاطر افزودنی‌های مناسب، در شستن موی چرب کاربرد دارد.

۴) نقطهٔ جوش اسیدهای چرب مختلف، از نقطهٔ جوش اسید آلی موجود در یک نمونه از محلول سرکه بیشتر است.

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحهٔ ۹)

صابون طبیعی معروف به صابون مراغه، معروف‌ترین صابون سنتی ایران است. برای تهیه این صابون، پیه گوسفند و سود سوزآور را در دیگ‌های بزرگ با آب برای چندین ساعت می‌جوشانند و پس از قالب‌گیری، آن‌ها را در آفتاب خشک می‌کنند. این صابون حالت جامد داشته و از آنجا که فاقد افزودنی شیمیایی بوده و خاصیت بازی مناسبی دارد، از آن برای شست و شوی موهای چرب استفاده می‌شود.

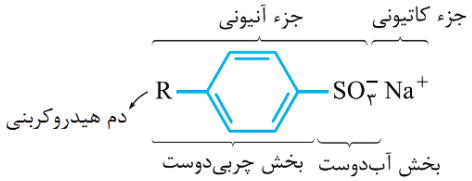
بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) در شرایط یکسان، پاک‌کننده‌های صابونی لکه‌های چربی روی پارچه‌های نخی را بهتر از پارچه‌های پلی‌استری پاک می‌کنند. بر این اساس، می‌توان گفت میزان چسبندگی لکه‌های چربی بر روی پارچه‌های پلی‌استری در مقایسه با پارچه‌های نخی بیشتر است.

عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون

۱	میزان سختی آب: صابون‌ها در مجاورت با آب سخت، با دو یون کلسیم و منیزیم موجود در این نمونه از آب، رسوب سفیدرنگی ایجاد می‌کنند که بر روی لباس دیده می‌شود. در این حالت، قدرت پاک‌کنندگی صابون به شدت کاهش می‌یابد.
۲	جنس پارچه: چسبندگی لکه‌های چربی بر روی لباس‌های نخی یا همان پنبه‌ای کمتر از پارچه‌های پلی‌استری است. بر این اساس، می‌توان گفت صابون بر روی لکه‌های ایجاد شده بر سطح پارچه‌های نخی اثر بیشتری دارد.
۳	آنزیم: آنزیم نوعی کاتالیزگر است که فرایندهای تجزیه مواد موجود در لکه‌ها را تسریع می‌بخشد و این مواد را به مواد ساده‌تر تبدیل می‌کند. اضافه کردن آنزیم به صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.
۴	دما: علاوه بر این که در دماهای بالاتر، ساختار چربی‌های موجود بر روی سطح لباس سست می‌شود، افزایش دما سرعت انجام هر واکنش یا برهم‌کنش شیمیایی را نیز افزایش می‌دهد. بر این اساس، می‌توان گفت افزایش دما نیز قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.
۵	افزودنی‌های شیمیایی: اضافه کردن جوش شیرین به صابون، موجب ایجاد خاصیت بازی و افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن می‌شود. افزودن نمک‌های فسفات به صابون نیز قدرت پاک‌کنندگی آن را در مواجهه با آب سخت افزایش می‌دهد.

(۲) پاک‌کننده‌های غیرصابونی، دارای یک حلقه بنزنی در ساختار بخش آنیونی خود بوده و از جمله مواد آروماتیک به شمار می‌روند. این مواد، همانند پاک‌کننده‌های صابونی، بر اساس برهم‌کنش میان ذره‌ها آلودگی‌ها را پاک می‌کنند. در نقطه مقابل، پاک‌کننده‌های خورنده افزون بر این برهم‌کنش‌ها، با آلاینده‌ها واکنش می‌دهند و از این طریق نیز سبب زدودن آن‌ها می‌شوند. ساختار کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی به‌صورت زیر است:



توجه داریم که حلقه بنزنی(آروماتیک)، دارای ۶ اتم کربن بوده و پیوندهای موجود در آن، یکی در میان دوگانه هستند.

پاک‌کننده‌های غیر صابونی

شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که علاوه بر قدرت پاک‌کنندگی بالا، بتوان آن‌ها را به میزان انبوه و با قیمت مناسب تولید کرد. با توجه به رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون‌ها، ساختاری دوگانه‌دوست (هم چربی‌دوست و هم آب‌دوست) داشته باشد. سرانجام آن‌ها توانستند با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه موجود در صنایع پتروشیمی، پاک‌کننده‌های جدیدی را تولید کنند. این مواد، به پاک‌کننده‌های غیرصابونی معروف بوده و فرمول همگانی آن‌ها به‌صورت $RC_6H_4SO_3Na$ است.

همان‌طور که مشخص است، پاک‌کننده‌های غیرصابونی نیز همانند پاک‌کننده‌های صابونی از یک بخش آب‌دوست و یک بخش چربی‌دوست (حلقه بنزنی و زنجیر هیدروکربنی) تشکیل شده‌اند. در هنگام استفاده از این پاک‌کننده‌ها، مولکول‌های چربی به زنجیرهٔ هیدروکربنی پاک‌کننده می‌چسبند و بخش آب‌دوست مولکول‌های پاک‌کننده نیز باعث پخش‌شدن چربی‌ها در آب می‌شود.

پاک‌کننده‌های غیرصابونی، برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی، طی واکنش‌های پیچیده و از مواد پتروشیمیایی تولید می‌شوند. این پاک‌کننده‌ها، همانند بنزن، نفتالن، بنزوئیک اسید، بنزآلدهید و ...، دارای یک حلقه کربنی آروماتیک(حلقه بنزنی) در ساختار خود هستند. پاک‌کننده‌های غیرصابونی، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری نسبت به پاک‌کننده‌های صابونی دارند.

(۴) اسیدهای چرب، کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیره کربنی بلند هستند. برای مثال، ترکیب با فرمول مولکولی $C_{17}H_{35}COOH$ یک اسید چرب با جرم مولی بالا است. نقطهٔ جوش اسیدهای چرب، از اسید آلی موجود در سرکه یعنی استیک اسید(CH_3COOH) بالاتر است. توجه داریم که در کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی، هر چه تعداد اتم کربن بیشتر باشد، نیروهای بین مولکولی در آن اسید بیشتر بوده و در نتیجه این مواد نقطهٔ جوش بالاتری دارند.

۱۱- کدام مطلب زیر درست است؟

۱) رسوب تشکیل شده بر روی دیواره کتری، لوله‌ها، آب‌راه‌ها و دیگ‌های بخار را می‌توان با استفاده از صابون‌ها پاک کرد.

۲) افزودن نمک فسفات به صابون، همانند استفاده از مواد غیرصابونی در سفر دریایی، از ایجاد رسوب صابون جلوگیری می‌کند.

۳) برای افزایش خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی صابون‌ها، به آن‌ها ماده شیمیایی گوگرددار اضافه می‌کنند.

۴) با افزودن صابون به مخلوط آب و روغن و هم‌زدن آن، نوعی مخلوط شفاف و به ظاهر همگن حاصل می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۲)

اضافه کردن یون فسفات به صابون‌ها، به منظور افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها در آب سخت است. در این حالت، با انحلال نمک‌های فسفات‌دار در آب، یون فسفات با یون کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت رسوب تشکیل می‌دهد و از تشکیل رسوب صابون با این کاتیون‌ها جلوگیری می‌کند. یون فسفات موجود در این دسته از شوینده‌ها، با یون‌های Mg^{2+} و Ca^{2+} براساس معادله‌های زیر واکنش می‌دهد:

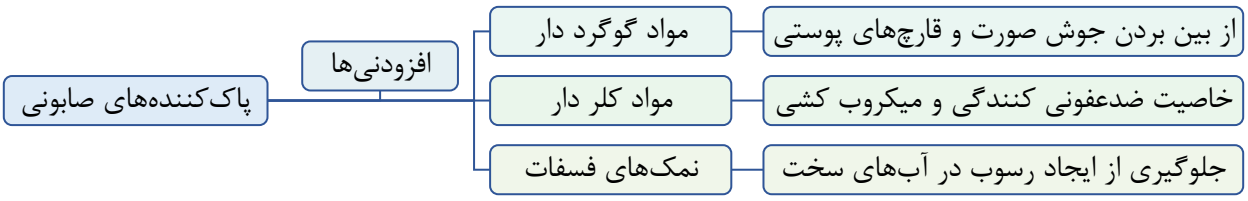
$$2PO_4^{3-}(aq) + 3Ca^{2+}(aq) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) \quad , \quad 2PO_4^{3-}(aq) + 3Mg^{2+}(aq) \rightarrow Mg_3(PO_4)_2(s)$$

همچنین یکی از مزیت‌هایی که پاک‌کننده غیرصابونی نسبت به صابون دارند، این است که با یون‌های موجود در آب سخت واکنش نداده و رسوب نمی‌کنند. در واقع این مواد در آب سخت نیز قدرت پاک‌کنندگی خود را حفظ خواهند کرد. با استفاده از این دو روش، می‌توان از شوینده‌ها در سفرهای دریایی و یا صنایعی که با آب سخت سروکار دارند، استفاده کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) رسوب تشکیل شده بر روی دیواره کتری، لوله‌ها، آب‌راه‌ها و دیگ‌های بخار، آن چنان به این سطوح می‌چسبند که با صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی زدوده نمی‌شوند. برای زدودن این رسوب‌ها، به پاک‌کننده‌هایی نیاز است که بتوانند با آن‌ها واکنش شیمیایی داده و آن‌ها را به فراورده‌هایی تبدیل کنند که با آب شسته شوند. موادی مانند هیدروکلریک اسید(جوهر نمک)، سدیم هیدروکسید(محلول سود) و سفیدکننده‌ها از جمله این پاک‌کننده‌ها هستند.

۳) نمودار زیر، نقش افزودنی‌های مختلف را در پاک‌کننده‌های صابونی نشان می‌دهد:



با توجه به نمودار بالا، به منظور افزایش خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی صابون‌ها، به آن‌ها ماده شیمیایی کلردار اضافه می‌کنند.

۴) مخلوط آب و روغن، ناهمگن بوده و با توجه به چگالی کمتر روغن، نمونه روغن بر روی سطح آب قرار می‌گیرد. با افزودن صابون به این مخلوط و هم زدن آن، برهم‌کنش مولکول‌ها و ذرات موجود در این مخلوط موجب پدید آمدن یک کلوئید می‌شود. در این مخلوط، توده‌هایی از مولکول‌های روغن و صابون تشکیل می‌شوند که در آب پخش‌شده و یک مخلوط ناهمگن پایدار تشکیل می‌دهد که در اثر ساکن ماندن، ته‌نشین نمی‌شوند. به مخلوط ناهمگن تولید شده طی این فرایند، کلوئید گفته می‌شود. توجه داریم که این کلوئید، ظاهر کدر داشته و شفاف نیست.

دنیای رنگارنگ کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها

مقایسهٔ اندازه ذرات سازنده مخلوط‌ها به‌صورت "محلول‌ها< کلوئیدها< سوسپانسیون‌ها" است. توجه داریم که اندازهٔ ذرات کلوئیدها به گونه‌ای است که این ذرات با گذشت زمان ته‌نشین نمی‌شوند؛ درنتیجه می‌توان گفت که کلوئیدها(همانند محلول‌ها) پایدار هستند. انواع رنگ‌ها(مانند رنگ‌های پوششی) و چسب‌ها، سرامیک‌ها، شیر، ژله و سس مایونز نمونه‌هایی از کلوئیدها و شربت معده و آب گل‌آلود نمونه‌هایی از سوسپانسیون‌ها هستند.

۱۲- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ کاتیون موجود در صابون، نقشی در حل کردن لکه‌های چربی در یک نمونه آب ندارد.

ب ـ در ساختار صابون‌ها، برخلاف پاک‌کننده‌های غیرصابونی، نسبت شمار آنیون به کاتیون برابر یک است.

ج ـ شربت معده، همانند مایونز، یک نوع مخلوط ناپایدار بوده و مسیر حرکت نور در یک نمونه از آن مشخص است.

د ـ در ساختار آنیون صابون، ۵ جفت الکترون ناپیوندی وجود داشته و بخش ناقطبی این ماده، می‌تواند بدون شاخه باشد.

۱) «الف» و «د» ۲) «الف» و «ج» ۳) «ب» و «د» ۴) «ب» و «ج»

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۸)

عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) نحوه عملکرد صابون‌ها به دو بخش قطبی و ناقطبی آن‌ها بستگی دارد که هر دو، در بخش آنیونی صابون قرار دارند. توجه داریم که کاتیون موجود در صابون، فقط بر حالت فیزیکی آن تأثیر دارد و تأثیری روی قدرت پاک‌کنندگی صابون ندارد.

ب) در ساختار همه صابون‌ها، کاتیون‌ها بار $+1$ و آنیون نیز بار -1 دارند؛ پس نسبت شمار آنیون به کاتیون در همه آن‌ها برابر یک است. همچنین در پاک‌کننده غیرصابونی، کاتیون Na^+ با بار $+1$ بوده و آنیون این ماده نیز بار -1 دارد.

صابون: از شیمی تا پاکیزگی

صابون‌ها نمک سدیم، پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب هستند. یعنی اگر به‌جای هیدروژن موجود در گروه کربوکسیل یکی از این یون‌ها قرار گیرد، صابون تشکیل می‌شود. آنیون صابون از دو بخش قطبی و ناقطبی تشکیل شده است. اگر کاتیون موجود در ساختار صابون، یون آمونیوم($RCOONH_4$) و یا یون پتاسیم($RCOOK$) باشد، صابون مایع و اگر کاتیون موجود در آن، یون سدیم($RCOONa$) باشد، صابون جامد است. صابون‌ها از واکنش میان بازها با اسیدهای چرب یا استرهای سنگین(مثل پیه یا روغن‌های زیتون و نارگیل) تشکیل می‌شوند. مکانیسم پاک‌کنندگی صابون، تولید کلوئید آب-پاک‌کننده-روغن است. بر این اساس، قسمت قطبی صابون به سمت آب و قسمت ناقطبی آن به سمت چربی یا روغن قرار گرفته و با تشکیل این کلوئید، موجب شسته‌شدن لکه‌های روغن و چربی می‌شود.

ج) جدول زیر، برخی از ویژگی‌های کلوئیدها و مخلوط‌های همگن و ناهمگن را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد.

ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلوئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
ظاهر	ناهمگن	همگن	همگن
همگن‌بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذره‌ها و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها

شربت معده، نوعی سوسپانسیون است. سوسپانسیون‌ها نمونه‌ای از مخلوط‌های ناپایدار بوده و مسیر حرکت نور در یک نمونه از آن‌ها مشخص است. توجه داریم که مایونز، نوعی کلوئید است و پایدار خواهد بود.

د) برای آن که اتم‌ها از قاعده هشت‌تایی پیروی کنند، ساختار لوویس بخش قطبی آنیون صابون به‌صورت مقابل است:



در ساختار این یون چند اتمی، تعداد ۵ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد که همه آن‌ها روی اتم‌های اکسیژن قرار گرفته‌اند. به‌طور کلی، اسیدهای چرب در ساختار خود بدون شاخه فرعی هستند. بر این اساس، می‌توان گفت صابون‌ها و استرهای سنگین که از اسیدهای چرب ساخته می‌شوند نیز اغلب در ساختار خود شاخه فرعی نخواهند داشت.

۱۳- نوعی پاک‌کننده غیرصابونی با زنجیره هیدروکربنی سیرشده، مجموعاً دارای ۱۸ اتم کربن است. درصد جرمی گوگرد در این ماده تقریباً چقدر بوده و در ساختار ۰/۲ مول از این ماده، چند اتم اکسیژن وجود دارد؟

$(S = ۳۲ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) $۱/۸۰۶ \times ۱۰^{۲۳}$ - ۱۸/۴

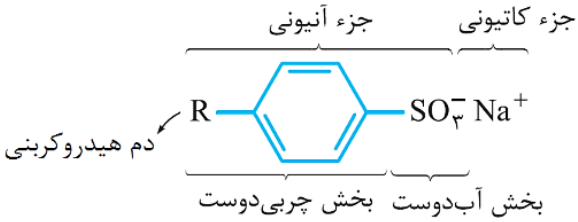
۲) $۳/۶۱۲ \times ۱۰^{۲۳}$ - ۱۸/۴

۳) $۱/۸۰۶ \times ۱۰^{۲۳}$ - ۹/۲

۴) $۳/۶۱۲ \times ۱۰^{۲۳}$ - ۹/۲

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱)

در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی یک حلقه بنزنی وجود دارد که به زنجیر آلکیل متصل است. ساختار کلی این مواد به‌صورت زیر است:



طبق فرض سؤال، در ساختار این ماده مجموعاً ۱۸ اتم کربن وجود دارد. از این تعداد اتم کربن، ۶ اتم آن در ساختار حلقه بنزنی قرار گرفته و ۱۲ مورد از آن‌ها در ساختار بخش R یا همان زنجیر آلکیل قرار گرفته‌اند. بر این اساس، داریم:

فرمول کلی غیرصابونی : $RC_۶H_۴SO_۳Na \xrightarrow{R : C_{۱۲}H_{۲۵}} C_{۱۸}H_{۲۹}SO_۳Na \longrightarrow$ جرم مولی $= ۳۴۸\ g.mol^{-۱}$

با توجه به فرمول شیمیایی این ماده، درصد جرمی گوگرد را در آن محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی گوگرد} = \frac{\text{جرم گوگرد}}{\text{جرم ترکیب}} \times ۱۰۰ = \frac{۳۲}{۳۴۸} \times ۱۰۰ \simeq ۹/۲ \text{ درصد}$$

هر مول از این ماده، دارای ۳ مول اتم اکسیژن در ساختار خود است. بر این اساس، داریم:

$$?\ atom\ O = ۰/۲\ mol\ C_{۱۸}H_{۲۹}SO_۳Na \times \frac{۳\ mol\ O}{۱\ mol\ C_{۱۸}H_{۲۹}SO_۳Na} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ atom\ O}{۱\ mol\ O}$$
$$= ۳/۶۱۲ \times ۱۰^{۲۳}\ atom$$

ماز

۱۴- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) گاز حاصل از واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سود با آب، در واکنش آلومینیم با هیدروکلریک اسید نیز تولید می‌شود.

۲) اسید معده، رنگ کاغذ pH را قرمز کرده و علاوه بر کشتن میکروب‌ها، آنزیم‌های گوارشی را نیز فعال می‌کند.

۳) شیمیدان‌ها پیش از آنکه هریک از واکنش‌های اسیدها و بازها شناخته شود، با ساختار ذره‌ای این مواد آشنا بودند.

۴) با استفاده از مدل آرنیوس نمی‌توان دربارهٔ میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول اظهارنظر کرد.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۴)

شواهد بسیاری در تاریخ علم وجود دارد که نشان می‌دهند پیش از آنکه ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی‌دان‌ها نه تنها ویژگی‌های اسیدها و بازها را می‌شناختند؛ بلکه با برخی واکنش‌های آن‌ها نیز آشنا بودند. برای مثال، واکنش خنثی شدن، نمونه‌ای از واکنش میان این مواد است. توجه کنید که انواع واکنش‌های اسیدها و بازها بسیار گسترده بوده و آشنایی با آن‌ها به تدریج صورت گرفته است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) معادلهٔ انجام شده به‌صورت زیر است و بر اثر انجام واکنش گاز هیدروژن تولید می‌شود:

$$۲Al(s) + ۲NaOH(s) + ۶H_۲O(l) \rightarrow ۲NaAl(OH)_۴(aq) + ۳H_۲(g)$$

در واکنش آلومینیم با هیدروکلریک اسید نیز گاز هیدروژن تولید می‌شود:

$$۲Al(s) + ۶HCl(aq) \rightarrow ۲AlCl_۳(aq) + ۳H_۲(g)$$

پاک‌کننده خورنده ویژه

نوعی پاک‌کننده که به شکل پودر عرضه می‌شود، شامل مخلوط جامدی از سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم است. این پاک‌کننده خورنده برای باز کردن مجاری مسدود شده در برخی وسایل و دستگاه‌های صنعتی استفاده می‌شود. در این واکنش، مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب واکنش داده و گاز هیدروژن تولید می‌شود. گاز هیدروژن تولید شده در این واکنش، با نفوذ به درون رسوب‌ها و خرد کردن آن‌ها، موجب افزایش قدرت پاک‌کنندگی این پودر می‌شود. گرمای حاصل از این واکنش نیز رسوب‌های ایجاد شده را سست کرده و موجب راحت‌تر پاک شدن آن‌ها از محیط می‌شود.

۲) معده برای گوارش غذا به اسید نیاز دارد. خوردن غذا سبب می‌شود که غده‌های موجود در دیواره معده، هیدروکلریک اسید ترشح کنند. این اسید افزون بر فعال کردن آنزیم‌ها برای تجزیه مواد غذایی، جانداران ذره‌بینی موجود در غذا را نیز از بین می‌برد. چون این ماده خاصیت اسیدی دارد، رنگ کاغذ pH را از زرد به قرمز تغییر می‌دهد. دلیل سوزش معده که درد شدیدی در ناحیه سینه ایجاد می‌کند، برگشت مقداری از محتویات اسیدی معده به لوله مری است.

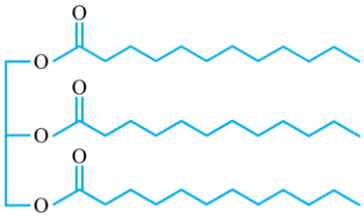
۴) با استفاده از مدل آرنیوس، تنها می‌توان تشخیص داد که کدام ترکیب اسید و کدام ترکیب باز است؛ ولی دربارهٔ میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول و غلظت یون‌های موجود در آن محلول نمی‌توان اظهارنظر کرد. توجه داریم که برای اندازه‌گیری میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول می‌توان از روش‌هایی مانند اندازه‌گیری رسانایی محلول استفاده کرد.

یون‌ها، ناجی‌های اسید و باز!

شواهد علمی نشان می‌دهند که پیش از شناخته‌شدن ساختار اسیدها و بازها، شیمی‌دان‌ها با ویژگی‌های هر کدام از این مواد و برخی(نه همه!) از واکنش‌های میان این گروه از مواد آشنا بودند؛ اما توجیه رفتار اسیدها و بازها در شرایط مختلف، به یک مبنای علمی نیاز داشت. آرنیوس در زمان خود طی پژوهش‌هایی که بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی انجام می‌داد، برای نخستین بار اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. براساس یافته‌های تجربی آرنیوس، هنگامی که اسیدها و بازها در آب حل می‌شوند، مقدار یون‌های موجود در آب را افزایش می‌دهند و به همین خاطر، محلول اسیدها و بازها رسانای جریان الکتریکی هستند.

مثال

۱۵- استر سنگین مقابل، در ساختار خود دارای ..... اتم هیدروژن بوده و طی واکنش ۱/۶ مول از آن با مقدار کافی محلول ..... ، مقدار ..... مول پاک‌کننده صابونی جامد به‌دست می‌آید.



۱) ۷۸ ـ هیدروکلریک اسید ـ ۴/۸

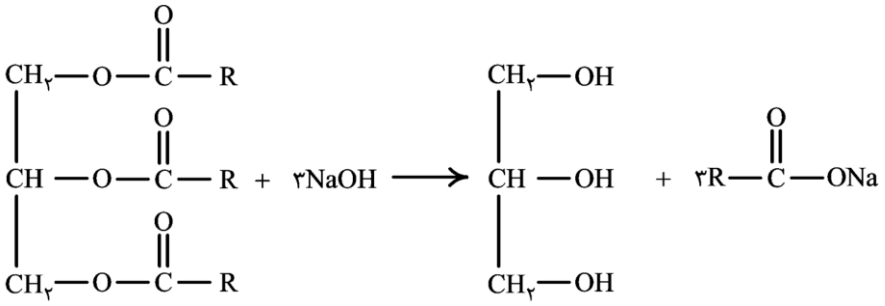
۲) ۷۴ ـ سدیم هیدروکسید ـ ۴/۸

۳) ۷۴ ـ هیدروکلریک اسید ـ ۳/۲

۴) ۷۸ ـ سدیم هیدروکسید ـ ۳/۲

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی و محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵)

استرهای سنگین(چربی‌ها یا روغن‌های گیاهی)، بخشی از مواد سازنده چربی‌ها هستند. این مواد، بر اساس معادله زیر با سدیم هیدروکسید واکنش داده و صابون‌ها را تولید می‌کنند:



به ازای مصرف هر مول استر در این واکنش، مقدار ۳ مول صابون تولید می‌شود. در این رابطه، داریم:

$$?\ mol\ \text{صابون} = ۱/۶\ mol\ \text{استر} \times \frac{۳\ mol\ \text{صابون}}{۱\ mol\ \text{استر}} = ۴/۸\ mol$$

استرهای سنگین، جزئی از چربی‌ها هستند که جرم مولی بالایی داشته و در ساختار آن‌ها، ۳ گروه عاملی استری وجود دارد. فرمول شیمیایی کلی این مواد به شرط سیرشده بودن زنجیرهای هیدروکربنی در آن‌ها، به‌صورت $C_nH_{2n-4}O_6$ است. توجه داریم که در ساختار استرهای سنگین، سه پیوند دوگانه $C=O$ وجود دارد. استر مورد نظر، دارای ۳۹ اتم کربن در ساختار خود است، پس در رابطه با آن داریم:

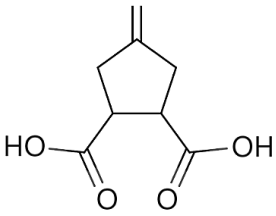
فرمول کلی استرهای سنگین : $C_nH_{2n-4}O_6 \xrightarrow{\text{استر مورد نظر دارای ۳۹ اتم کربن است}} C_{39}H_{74}O_6$

پس فرمول شیمیایی استر مورد نظر به‌صورت $C_{39}H_{74}O_6$ بوده و در ساختار آن ۷۴ اتم هیدروژن وجود دارد.

آزمون ماز

۱ آبان‌ماه
شیمی

۱- **کدام‌یک از عبارت‌های داده شده، نادرست است؟**



۱) ترکیب مقابل، نوعی اسید دو پروتون‌دار بوده و ۱۰ اتم هیدروژن در ساختار خود دارد.
۲) صابون‌های مایع را از گرم کردن مخلوط روغن‌های مایع با محلول سود تهیه می‌کنند.
۳) در بخش قطبی اسیدهای چرب، همانند استرهای سنگین، پیوند $C = O$ وجود دارد.
۴) صابون‌ها، همانند پاک‌کننده‌های غیرصابونی، هم در چربی و هم در آب پخش می‌شوند.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

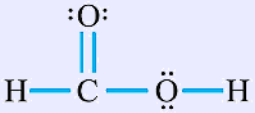
حالت فیزیکی صابون‌ها، ربطی به حالت فیزیکی مواد مصرف شده برای تولید آن‌ها نداشته و وابسته به نوع کاتیون موجود در ساختار آن‌ها است. در واقع، صابون جامد را از گرم کردن مخلوط روغن‌های گوناگون(استرهای سنگینی که حالت مایع دارند) یا چربی(استرهای سنگینی که حالت جامد دارند) مانند روغن زیتون، نارگیل و پیه با سدیم هیدروکسید تهیه می‌کنند. صابون‌های مایع نیز نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

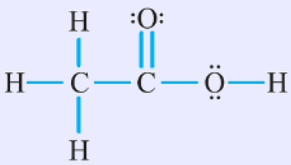
۱ ترکیب مورد نظر، در ساختار مولکولی خود دارای ۲ گروه عاملی کربوکسیل بوده و بر این اساس، یک اسید دو پروتون‌دار به شمار می‌رود. فرمول شیمیایی این ترکیب آلی به‌صورت $C_8H_{10}O_4$ است.

کربوکسیلیک اسیدها

کربوکسیلیک اسیدها، گروهی از ترکیب‌های آلی هستند که در ساختار آن‌ها یک یا چند گروه عاملی کربوکسیل($-COOH$) وجود دارد. فرمول کلی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی(مولکول‌هایی که فقط یک گروه عاملی کربوکسیل دارند) را می‌توان به‌صورت $R-COOH$ نشان داد که در آن R نشان‌دهنده یک اتم هیدروژن و یا یک زنجیره هیدروکربنی است. کربوکسیلیک اسیدها خاصیت اسیدی داشته و pH محلول آن‌ها کوچک‌تر از ۷ است. این ترکیب‌ها مزه ترش دارند به‌طوری‌که مزه ترش میوه‌هایی مانند ریواس، انگور، لیمو ترش، کیوی و گوجه‌سبز را به وجود چنین مولکول‌هایی در این میوه‌ها نسبت می‌دهند. متانوییک اسید یا همان فورمیک اسید با فرمول شیمیایی $HCOOH$، اولین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها است که بر اثر گزش مورچه سرخ وارد بدن شده و باعث سوزش و خارش در محل گزیدگی می‌شود. ساختار مولکول‌های این ماده به‌صورت زیر است:

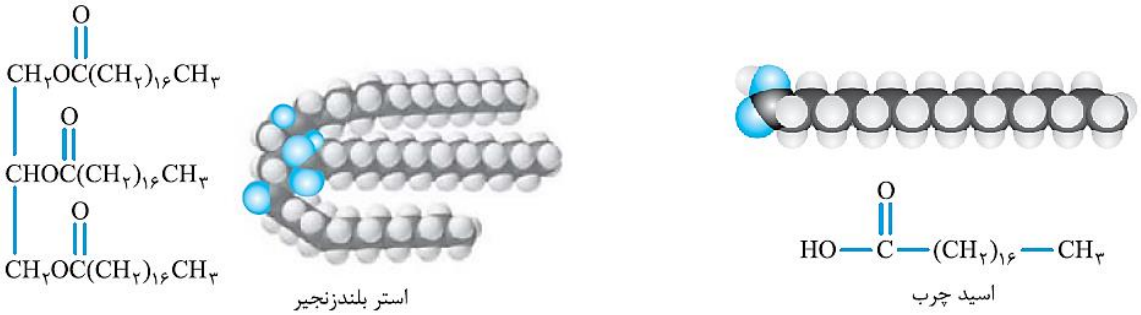


اتانوییک اسید یا همان استیک اسید با فرمول شیمیایی CH_3COOH، یک کربوکسیلیک اسید دوکربنی و دومین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها است. این ماده آشناترین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها بوده و یکی از پرکاربردترین اسیدها در زندگی روزمره است. به‌عنوان مثال، اسید موجود در سرکه همان استیک اسید است. ساختار مولکولی این ماده به‌صورت زیر است:



توجه داریم که فرمول شیمیایی کلی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی سیرشده به‌صورت $C_nH_{2n}O_2$ است.

۳ چربی‌ها، مخلوطی از اسیدهای چرب (کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی و جرم مولکولی زیاد) و استرهای بلندزنجیر (استرهایی با جرم مولی زیاد) هستند. تصویر زیر، ساختار مولکولی انواع چربی‌ها را نشان می‌دهد:

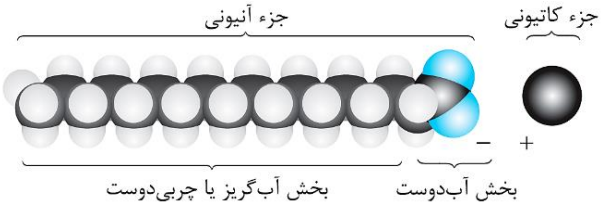


بخش قطبی مولکول چربی‌ها، دارای تعدادی اتم اکسیژن در ساختار خود است. همان‌طور که مشخص است، در ساختار بخش قطبی این دو ماده، پیوند $C=O$ یافت می‌شود.

چربی‌ها

هر یک از مولکول‌های سازنده چربی‌ها(اسیدهای چرب و استرهای با جرم مولی زیاد)، از یک بخش قطبی(بخش آب‌دوست) و یک بخش ناقطبی(بخش چربی‌دوست و یا آب‌گریز) تشکیل شده است. از آن‌جا که بخش اعظم این مولکول‌ها ناقطبی است، پس بخش ناقطبی مولکول به راحتی بر بخش قطبی آن غلبه کرده و در نتیجه مولکول‌های چربی در مجموع، ناقطبی به حساب می‌آیند و در حلال‌های قطبی مانند آب حل نمی‌شوند. به خاطر نامحلول بودن چربی‌ها در حلال‌های قطبی، آب به تنهایی نمی‌تواند چربی‌های موجود بر روی پوست و لباس‌ها را پاک کند و به همین دلیل، برای پاک کردن چربی‌ها باید از سایر پاک‌کننده‌ها کمک بگیریم.

۴ هم ساختار صابون و هم ساختار پاک‌کننده غیرصابونی از دو بخش قطبی و ناقطبی تشکیل می‌شوند. در این پاک‌کننده‌ها، هیچ یک از بخش‌ها بر دیگری غلبه ندارد و به همین علت، این مواد هم در آب و هم در چربی حل می‌شوند. در واقع به علت این که صابون نمک سدیم، پتاسیم یا آمونیوم حاصل از اسیدهای چرب است، در آب محلول بوده و به علت زنجیره هیدروکربنی بزرگ خود، در چربی نیز حل می‌شود. ساختار صابون‌های جامد به‌صورت زیر است:



توجه داریم که صابون‌های جامد، نمک سدیم اسیدهای چرب هستند و می‌توان آن‌ها را با فرمول کلی $RCOONa$ نشان داد که در آن، گروه R نشان‌دهندهٔ یک زنجیرهٔ هیدروکربنی بلند است. اگر بخش R در صابون‌ها معادل با زنجیر آلکیلی باشد، فرمول کلی این صابون‌ها $C_{n+1}H_{2n+1}O_2Na$ خواهد بود.

مثال

۲- ثابت یونش یک اسید در محلولی از آن با غلظت اولیه ۰/۲۵ مول بر لیتر، برابر با $1/25 \times 10^{-2}\ mol.L^{-1}$ است. تفاوت غلظت مولی یون هیدروژن با غلظت مولی ذرات اسید یونیده نشده باقیمانده در محلول، برابر با چند مول بر لیتر است؟

۱) ۰/۲۲۵ ۲) ۰/۱۲۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۱۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: محاسبه غلظت یون هیدروژن موجود در محلول نهایی

گام دوم: محاسبه غلظت اسید یونیده نشده در محلول

گام سوم: به‌دست آوردن تفاوت غلظت گونه‌ها

قدرت اسیدها

اسیدهای قوی به هنگام انحلال در آب به‌طور کامل یونیده می‌شوند در حالی که اسیدهای ضعیف طی یک فرایند تعادلی، به‌طور جزئی یونش پیدا می‌کنند و اندک یون‌های حاصل از یونش آن‌ها، با مولکول‌های اسید موجود در محلول، در حالت تعادل قرار می‌گیرند. به‌عنوان مثال، واکنش تعادلی یونش اسید ضعیف HA را در نظر بگیرید:

$$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq)$$

با قرار دادن غلظت تعادلی گونه‌های شرکت‌کننده در این واکنش در رابطه ثابت تعادل، مقدار K به‌دست می‌آید. برای این واکنش به ثابت تعادل فرایند یونش اسیدها(K_a)، به اصطلاح ثابت یونش اسیدی می‌گویند که یکای آن معادل با $mol.L^{-1}$ است.

اگر معادله یونش اسید فرضی HA را به‌صورت $HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq)$ در نظر بگیریم، در محلولی به غلظت M مولار و درجه یونش α از این اسید، غلظت‌های اولیه و تعادلی گونه‌های شرکت‌کننده در واکنش به‌صورت زیر خواهند بود:

گونه	$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq)$		
غلظت آغازی	M	صفر	صفر
تغییر غلظت	$-M\alpha$	$+M\alpha$	$+M\alpha$
غلظت تعادلی	$M(1-\alpha)$	$M\alpha$	$M\alpha$

مقدار ثابت یونش اسید مورد نظر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K_a = \frac{[H^+]\,[A^-]}{[HA]_{\text{تعادلی}}}$$

در محلول یک اسید تک‌پروتون‌دار، غلظت یون A^- با یون هیدروژن برابر است. از طرفی، غلظت اسید یونیده نشده(تعادلی) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$[HA]_{\text{تعادلی}} = [HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]$$

با توجه به غلظت انواع گونه‌ها، مقدار K_a این واکنش برابر می‌شود با:

$$K_a = \frac{[H^+]\,[A^-]}{[HA]_{\text{تعادلی}}} \Longrightarrow K_a = \frac{[H^+]^2}{[HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]}$$

طبق فرض سؤال، ثابت یونش یک اسید در محلولی از آن با غلظت اولیه ۰/۲۵ مول بر لیتر، برابر با $1/25 \times 10^{-2}\ mol.L^{-1}$ است. بر این اساس، داریم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{[HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]} \Longrightarrow 1/25 \times 10^{-2} = \frac{[H^+]^2}{0/25 - [H^+]} \Longrightarrow [H^+] = 0/05\ mol.L^{-1}$$

غلظت اولیه اسید برابر با ۰/۲۵ مول بر لیتر بوده است. مقدار ۰/۰۵ مول بر لیتر از این اسید یونیده شده و ۰/۲ مول بر لیتر از آن در محلول باقیمانده است. بر این اساس، داریم:

$$[HA]_{\text{تعادلی}} - [H^+] = 0/2 - 0/05 = 0/15\ mol.L^{-1}$$

۳- کدام‌یک از عبارت‌های داده‌شده، در رابطه با کلوئیدها درست است؟

۱) ذرات سازنده آن‌ها، همگی هم‌اندازه بوده و از ذرات سازنده سوسپانسیون‌ها کوچک‌تر است.

۲) شربت معده مثالی از مخلوط‌های ناهمگن از نوع کلوئید است که پایدار بوده و نور را پخش می‌کند.

۳) با انحلال کلسیم کلرید در کلوئیدی از آب، روغن و صابون، اجزای سازنده این مخلوط از یکدیگر جدا می‌شوند.

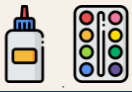
۴) سطح بیرونی قطره روغن که به وسیلهٔ مولکول‌های صابون به‌صورت کلوئید درآمده است، بار الکتریکی مثبت دارد.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷ ـ ۱۲۰۱)

مخلوط آب، صابون و روغن، یک کلوئید محسوب می‌شود. در این مخلوط، صابون نقش ماده پایدارکننده(کلوئیدساز) را دارد. توجه داریم که کلوئیدها انواعی از مخلوط‌های ناهمگن بوده و پس از تابانده نور، مسیر حرکت نور در آن‌ها مشخص خواهد بود.

ویژگی‌های کلوئیدها

جدول زیر، برخی از ویژگی‌های کلوئیدها را در مقایسه با سایر مخلوط‌ها نشان می‌دهد:

ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلوئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن بودن	ناهمگن است.	ناهمگن است.	همگن است.
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذره‌ها و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها
مثال‌ها	شربت معده مخلوط آب و روغن 	ژله، شیر، مایونز، چسب‌ها، سرامیک‌ها انواع رنگ‌ها، مخلوط آب و صابون و روغن 	محلول آب‌نمک محلول مس (II) سولفات در آب 

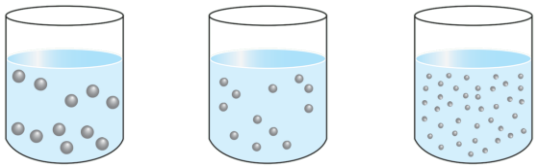
با انحلال مقداری کلسیم کلرید جامد در مخلوط آب، صابون و روغن، یون‌های کلسیم با مولکول‌های صابون واکنش داده و با تشکیل رسوب، آن‌ها را از درون مخلوط مورد نظر خارج می‌کنند. با خارج شدن مولکول‌های صابون، مخلوط آب و روغن نیز از یکدیگر جدا می‌شود. معادله واکنش پاک‌کننده‌های صابونی($RCOONa$) با یون‌های کلسیم و منیزیم به‌صورت زیر است:

واکنش صابون با یون کلسیم: $۲RCOONa(aq) + Ca^{۲+}(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Ca(s) + ۲Na^{+}(aq)$

واکنش صابون با یون منیزیم: $۲RCOONa(aq) + Mg^{۲+}(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Mg(s) + ۲Na^{+}(aq)$

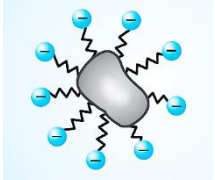
بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) کلوئیدها به ظاهر همگن بوده و در ساختار خود، حاوی توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت هستند. توجه داریم که اندازه ذرات سازنده کلوئیدها بزرگ‌تر از محلول‌ها و کوچک‌تر از سوسپانسیون‌ها است. تصویر زیر، از راست به چپ، به‌ترتیب اندازه ذرات سازنده محلول، کلوئید و سوسپانسیون را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد:



(۲) شربت معده یک نمونه از مخلوط‌های سوسپانسیون است. سوسپانسیون‌ها نمونه‌ای از یک مخلوط ناهمگن جامد در مایع هستند که اندازهٔ ذره‌های آن‌ها نسبت به کلوئیدها بزرگ‌تر است. با گذشت زمان ذره‌های مخلوط سوسپانسیون ته‌نشین می‌شوند، بنابراین مخلوط سوسپانسیون ناپایدار است. از طرفی، این مخلوط‌ها مانند کلوئیدها نور را پخش می‌کنند.

(۴) مولکول‌های صابون از طرف بخش ناقطبی خود(دم هیدروکربنی) با مولکول‌های روغن جاذبه برقرار می‌کنند؛ بنابراین بخش ناقطبی صابون داخل قطرهٔ روغن قرار دارد و بخش قطبی آن که بار منفی دارد، با مولکول‌های آب موجود در محیط اطراف جاذبه برقرار می‌کند و درنتیجه سطح بیرونی قطره دارای بار منفی است. ساختار این قطرات به‌صورت زیر خواهد بود:



۴- مقدار ۰/۶ مول از اسید HA را در یک نمونه آب حل کرده و حجم محلول($d = ۱g.mL^{-۱}$) را به یک لیتر می‌رسانیم. اگر درصد جرمی یون A^- در محلول حاصل از این فرایند برابر با ۰/۴۵٪ شود، ثابت یونش اسید در محلول مورد نظر کدام است؟ ($A = ۴۵\ g.mol^{-۱}$)

۱) ۰/۰۰۱ ۲) ۰/۰۰۲ ۳) ۰/۰۱ ۴) ۰/۰۲

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: محاسبه غلظت مولی آنیون حاصل از یونش اسید در آب

گام دوم: محاسبه غلظت اسید یونیده نشده در محلول

گام سوم: به‌دست آوردن مقدار ثابت یونش اسید در محلول

برای محاسبه غلظت مولی یک محلول با درصد جرمی a و چگالی d گرم بر میلی‌لیتر، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} \times ۱۰}{\text{جرم مولی}} = \frac{۱۰ \times a \times d}{\text{جرم مولی}}$$

طبق فرض سؤال، چگالی محلول برابر با ۱ گرم بر میلی‌لیتر است. بر این اساس، داریم:

$$[A^-] = \frac{۱۰ \times a \times d}{\text{جرم مولی}} = \frac{۱۰ \times ۰/۴۵ \times ۱}{۴۵} = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$$

غلظت اولیه اسید در محلول مورد نظر برابر با ۰/۶ مول بر لیتر بوده است. از این مقدار، ۰/۱ مول بر لیتر از اسید یونش یافته و باقی آن در محلول به‌صورت یونیده نشده باقیمانده است. بر این اساس، داریم:

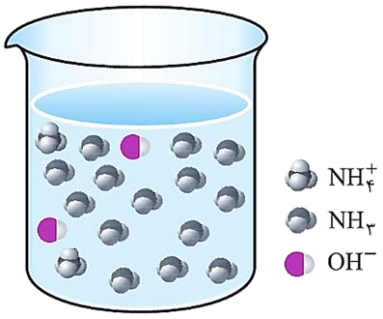
$$[HA]_{\text{تعادلی}} = [HA]_{\text{اولیه}} - [H^+] = ۰/۶ - ۰/۱ = ۰/۵\ mol.L^{-۱}$$

در محلول مورد نظر، غلظت یون‌های هیدروژن و A^- نیز با یکدیگر برابر است. از ثابت یونش، به‌عنوان معیار مناسبی برای مقایسه قدرت اسیدها و بازها استفاده می‌شود. هرچه که مقدار ثابت یونش برای یک ماده اسیدی یا بازی بزرگ‌تر باشد، آن ماده به هنگام انحلال در آب، به مقدار بیشتری یونش یافته و قدرت بالاتری دارد. مقدار ثابت یونش اسید مورد نظر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K_a = \frac{[H^+]\,[A^-]}{[HA]_{\text{تعادلی}}} = \frac{۰/۱ \times ۰/۱}{۰/۵} = ۰/۰۲\ mol.L^{-۱}$$

تاز

۵- تصویر مقابل، محلولی از آمونیاک به حجم ۵ لیتر را نشان می‌دهد. اگر هر ذره نشان داده شده معادل با ۰/۰۰۷ مول از آن گونه باشد، درصد یونش و ثابت یونش تقریبی باز در این محلول، به‌ترتیب از راست به چپ چقدر است؟



۱) ۴×۱۰^{-۴} - ۱۲/۵

۲) ۴×۱۰^{-۴} - ۱۴/۵

۳) ۸×۱۰^{-۴} - ۱۲/۵

۴) ۸×۱۰^{-۴} - ۱۴/۵

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمانبر ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

در تصویر نشان داده شده، ۱۴ مولکول آمونیاک، ۲ یون آمونیوم و ۲ یون هیدروکسید وجود دارد. بر این اساس، می‌توان گفت در ابتدای کار ۱۶ مولکول آمونیاک وجود داشته که ۲ تا از آن‌ها یونش یافته و ۱۴ تا از آن‌ها در محلول باقی مانده است. بر این اساس، درجه یونش مولکول‌های آمونیاک را در محلول مورد نظر محاسبه می‌کنیم.

$$\text{درجه یونش} = \frac{\text{تعداد مولکول یونیده شده}}{\text{تعداد کل مولکول‌های حل‌شده در محلول}} = \frac{\text{تعداد مولکول یونیده شده}}{\text{تعداد مولکول یونیده شده} + \text{تعداد مولکول یونیده نشده}} = \frac{۲}{۱۴ + ۲} = ۰/۱۲۵$$

درصد یونش هر ترکیب، معادل با ۱۰۰ برابر درجه یونش آن است. بر این اساس، داریم:

$$\text{درصد یونش} = \text{درجه یونش} \times ۱۰۰ = ۰/۱۲۵ \times ۱۰۰ = ۱۲/۵ \text{ درصد}$$

در محلول نهایی، ۲ یون هیدروکسید وجود داشته و هر ذره نیز معادل با ۰/۰۰۷ مول یون هیدروکسید است. بر این اساس، داریم:

$$?\,mol\ OH^- = ۲\ OH^-\ \text{ذره} \times \frac{۰/۰۰۷\ mol\ OH^-}{۱\ OH^-\ \text{ذره}} = ۰/۰۱۴\ mol$$

$$[OH^-] = \frac{\text{تعداد مول}\ OH^-}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۰/۰۱۴\ mol\ OH^-}{\text{محلول}\ ۵\ L} = ۰/۰۰۲۸\ mol.L^{-۱}$$

$$[OH^-] = \text{غلظت آمونیاک} \times \text{درجه یونش} \Longrightarrow ۰/۰۰۲۸\ mol.L^{-۱} = \text{غلظت آمونیاک} \times ۰/۱۲۵ \Longrightarrow \text{غلظت آمونیاک} = ۰/۰۲۲۴\ mol.L^{-۱}$$

در قدم بعد، با توجه به غلظت آمونیاک و درجه یونش این ماده، ثابت یونش آن را محاسبه می‌کنیم.

$$Kb = \frac{\alpha^۲ \times \text{غلظت اولیه باز}}{۱-\alpha} = \frac{(\frac{۱}{۸})^۲ \times ۰/۰۲۲۴}{۱-\frac{۱}{۸}} = ۴ \times ۱۰^{-۴}\ mol.L^{-۱}$$

مقیاس pH

خاصیت اسیدی یا بازی یک محلول، به وجود یون‌های H^+ و OH^- در محلول موردنظر نسبت داده شده و از مقیاس pH نیز برای مقایسه میزان اسیدی یا بازی بودن محلول‌های مختلف استفاده می‌شود. یکی از راه‌های به دست آوردن pH محلول‌های مختلف، استفاده از کاغذ pH است. این کاغذ در مجاورت با محلول‌های اسیدی یا بازی تغییر رنگ می‌دهد و این تغییر رنگ، معیاری برای تشخیص اسیدی یا بازی بودن محلول است. در واقع رنگی که این کاغذ در یک محلول به خود می‌گیرد، نشان‌دهنده pH تقریبی آن محلول است. این کاغذ در محلول‌هایی با خاصیت اسیدی(pH کم‌تر از ۷) به رنگ قرمز و در محلول‌هایی با خاصیت بازی(pH بزرگ‌تر از ۷) به رنگ آبی درمی‌آید. استفاده از pH سنج‌های دیجیتال نیز یکی از روش‌های دقیق به دست آوردن pH محلول‌ها است.

ماز

۶- **کدام موارد از عبارت‌های زیر، در رابطه با صابون‌ها و سایر پاک‌کننده‌ها درست هستند؟**

$(S = ۳۲ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

الف ـ افزودن آنزیم‌های مناسب، همانند افزایش دمای آب، موجب افزایش قدرت پاک‌کنندگی صابون‌ها می‌شود.

ب ـ محلول سود، برخلاف جوهر نمک، علاوه بر ایجاد برهمکنش، با آلاینده‌های موجود در محیط واکنش نیز می‌دهد.

ج ـ در واکنش پودر آلومینیم و سود با آب، گرمای مصرف شده باعث از بین‌رفتن چربی‌های رسوب کرده در لوله می‌شود.

د ـ اگر گروه R یک صابون جامد و یک پاک‌کننده غیرصابونی یکسان باشد، جرم مولی صابون به اندازه $۱۱۲g$ کمتر است.

۱) «الف» و «ج»　　۲) «الف» و «د»　　۳) «ب» و «ج»　　۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۲　　**(متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)**

عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) صابون‌های مختلف، همه لکه‌های موجود بر روی پارچه‌ها را به یک اندازه از بین نمی‌برند. در واقع، هر چقدر که یک پاک‌کننده صابونی بتواند مقدار بیشتری از آلاینده‌ها و چربی‌های روی لباس را بزداید، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری دارد. افزودن آنزیم‌های مناسب، استفاده از پارچه‌های نخی، افزایش دما، افزایش مقدار صابون و کاهش درجه سختی آب مورد استفاده برای شست‌وشو، از جمله عواملی هستند که موجب افزایش قدرت پاک‌کنندگی صابون‌ها می‌شوند.

قدرت صابون



عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون، به شرح زیر هستند:

آنزیم: آنزیم نوعی کاتالیزگر است که فرایندهای تجزیه مواد موجود در لکه‌ها را تسریع می‌بخشد و این مواد را به مواد ساده‌تر تبدیل می‌کند. اضافه کردن آنزیم به صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

جنس پارچه: چسبندگی لکه‌های چربی بر روی لباس‌های نخی یا همان پنبه‌ای کمتر از پارچه‌های پلی‌استری است. بر این اساس، می‌توان گفت صابون بر روی لکه‌های ایجادشده بر سطح پارچه‌های نخی اثر بیشتری دارد.

میزان سختی آب: صابون‌ها در مجاورت با آب سخت، با دو یون کلسیم و منیزیم موجود در این نمونه از آب رسوب سفیدرنگی ایجاد می‌کنند که بر روی لباس دیده می‌شود. در این حالت، قدرت پاک‌کنندگی صابون به شدت کاهش می‌یابد.

افزودنی‌های شیمیایی: اضافه کردن جوش شیرین به صابون، موجب ایجاد خاصیت بازی و افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن می‌شود. افزودن نمک‌های فسفات به صابون نیز قدرت پاک‌کنندگی آن را در مواجهه با آب سخت افزایش می‌دهد.

دما: علاوه بر این که در دمای بالاتر، ساختار چربی‌ها سست می‌شود، افزایش دما سرعت انجام هر واکنش شیمیایی را نیز افزایش می‌دهد. همچنین افزایش دما موجب تأمین‌شدن گرمای واکنش‌های انجام‌گرفته بر لکه می‌شود، پس افزایش دما نیز قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

ب) پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، با مولکول‌ها و ذرات سازنده آلودگی‌ها وارد واکنش شیمیایی نشده و فقط براساس برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای، سبب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند. گروه دیگری از پاک‌کننده‌ها نیز وجود دارند که با ذرات سازنده آلودگی‌ها وارد واکنش شیمیایی شده و در کنار برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای، از این طریق نیز سبب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند. به این دسته از انواع شوینده‌ها، به اصطلاح پاک‌کننده‌های خورنده گفته می‌شود. در واقع پاک‌کننده‌های خورنده، گروهی از پاک‌کننده‌ها هستند که بر مبنای واکنش میان اسیدها و بازها عمل می‌کنند. در هنگام استفاده از این مواد، شوینده موردنظر با آلودگی‌ها وارد واکنش شده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کند. شوینده‌های خورنده را بر مبنای کاربرد آن‌ها، می‌توان به دو دسته اسیدی و بازی تقسیم‌بندی کرد. سفیدکننده‌ها، جوهر نمک و محلول سود، انواعی از پاک‌کننده‌های خورنده هستند.

ج) واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید($NaOH$ یا سود) با آب گرماده است و گرمای آزاد شده می‌تواند چربی‌های جامد رسوب کرده را ذوب کند. معادله واکنش این مخلوط با آب به‌صورت زیر است:

مخلوط آلومینیوم و سدیم هیدروکسید + آب → گاز هیدروژن + فراورده‌های دیگر + Q

توجه داریم که در این واکنش، گرما تولید می‌شود، پس این فرایند به‌طور کلی گرماده است.

پاک‌کننده‌های خورنده

رسوب تشکیل شده بر روی دیواره کتری، لوله‌ها، آب‌راه‌ها و دیگ‌های بخار، آن چنان به این سطوح می‌چسبند که با صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی زدوده نمی‌شوند. برای زدودن این رسوب‌ها، به پاک‌کننده‌هایی نیاز است که بتوانند با آن‌ها واکنش شیمیایی داده و آن‌ها را به فراورده‌هایی تبدیل کنند که با آب شسته شوند. موادی مانند هیدروکلریک اسید(جوهر نمک)، سدیم هیدروکسید(محلول سود) و سفیدکننده‌ها از جمله این پاک‌کننده‌ها هستند.

د) پاک‌کننده‌های غیرصابونی، دارای یک حلقهٔ بنزنی در ساختار بخش آنیونی خود بوده و از جمله مواد آروماتیک به شمار می‌روند. این مواد، همانند پاک‌کننده‌های صابونی، بر اساس برهم‌کنش میان ذره‌ها آلودگی‌ها را پاک می‌کنند. فرمول کلی صابون جامد به‌صورت $RCOONa$ است؛ بنابراین تفاوت جرم مولی آن با پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با فرمول کلی $RC_6H_4SO_3Na$ با گروه آلکیل(R) یکسان برابر خواهد بود با:

$$\text{تفاوت جرم مولی} = \left(\text{جرم مولی } C_6H_4 + \text{جرم مولی } SO_3\right) - \text{جرم مولی } CO_2 = (76 + 80) - 44 = 112g$$

همانطور که مشخص است، جرم مولی پاک‌کننده غیرصابونی به اندازه ۱۱۲ گرم بر مول بیشتر است.

پاک‌کننده‌های غیرصابونی

شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که علاوه بر قدرت پاک‌کنندگی بالا، بتوان آن‌ها را به میزان انبوه و با قیمت مناسب تولید کرد. با توجه به رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون‌ها، ساختاری دوگانه‌دوست(هم چربی‌دوست و هم آب‌دوست) داشته باشد. سرانجام آن‌ها توانستند با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه موجود در صنایع پتروشیمی، پاک‌کننده‌های جدیدی را تولید کنند. این مواد، به پاک‌کننده‌های غیرصابونی معروف بوده و فرمول همگانی آن‌ها به‌صورت $RC_6H_4SO_3Na$ است.

همان‌طور که مشخص است، پاک‌کننده‌های غیرصابونی نیز همانند پاک‌کننده‌های صابونی از یک بخش آب‌دوست و یک بخش چربی‌دوست(حلقه بنزنی و زنجیر هیدروکربنی) تشکیل شده‌اند. در هنگام استفاده از این پاک‌کننده‌ها، مولکول‌های چربی به زنجیره هیدروکربنی پاک‌کننده می‌چسبند و بخش آب‌دوست مولکول‌های پاک‌کننده نیز باعث پخش‌شدن چربی‌ها در آب می‌شود. توجه داریم که پاک‌کننده‌های غیرصابونی، برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی، طی واکنش‌های پیچیده و از مواد پتروشیمیایی تولید می‌شوند. این پاک‌کننده‌ها، همانند بنزن، نفتالن، بنزوئیک اسید، بنزآلدهید و ...، دارای یک حلقه کربنی آروماتیک(حلقه بنزنی) در ساختار خود هستند. پاک‌کننده‌های غیرصابونی، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری نسبت به پاک‌کننده‌های صابونی دارند.

ماز

۷- چه تعداد از عبارت‌های زیر، درست هستند؟

الف ـ آرنیوس با تحقیق روی رسانایی محلول‌هایی با حلال آلی، یک مبنای علمی برای توصیف اسیدها و بازها ارائه کرد.

ب ـ اتانول، از جمله مواد غیرالکترولیت به شمار رفته و بین مولکول‌های آن و آب، پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.

ج ـ در شرایط یکسان، فورمیک اسید در مقایسه با استیک اسید با سرعت بیشتری با فلز لیتیم واکنش می‌دهد.

د ـ رسانایی الکتریکی محلول آبی مولار HF، در مقایسه با محلول نیم مولار پتاسیم هیدروکسید بیشتر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ **(متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ⑥ ـ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۲۰۱)**

عبارت‌های (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) سوانت آرنیوس، نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. آرنیوس با تحقیق بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی(نه محلول‌هایی با حلال‌های آلی) توانست یک مبنای علمی برای توصیف اسیدها و بازها ارائه کند. توجه داریم که محلول‌های آلی اغلب رسانایی الکتریکی ندارند و بر اساس مدل آرنیوس، نمی‌توان درباره آن‌ها اظهار نظر کرد.

نظریه آرنیوس

شواهد علمی نشان می‌دهند که پیش از شناخته‌شدن ساختار اسیدها و بازها، شیمی‌دان‌ها با ویژگی‌های هر کدام از این مواد و برخی از واکنش‌های میان آن‌ها آشنا بودند؛ اما توجیه رفتار اسیدها و بازها در شرایط مختلف، به یک مبنای علمی نیاز داشت. آرنیوس در زمان خود طی پژوهش‌هایی که بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی انجام می‌داد، برای نخستین بار اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. براساس یافته‌های تجربی آرنیوس، هنگامی که اسیدها و بازها در آب حل می‌شوند، مقدار یون‌های موجود در آب را افزایش می‌دهند و به همین خاطر، محلول اسیدها و بازها رسانای جریان الکتریکی هستند. براساس نظریه آرنیوس، اسید ماده‌ای است که در آب حل می‌شود و طی انحلال خود، غلظت یون هیدروژن را در محلول افزایش می‌دهد. به‌عنوان مثال، گاز هیدروژن کلرید یک اسید آرنیوس است؛ چرا که به هنگام انحلال در آب، سبب تولید یون هیدروژن شده و غلظت این یون را در محلول افزایش می‌دهد. در نظریه آرنیوس، باز ماده‌ای است که در آب حل می‌شود و طی انحلال خود، غلظت یون هیدروکسید را در محلول افزایش می‌دهد. به‌عنوان مثال، سدیم هیدروکسید جامد، یک باز آرنیوس به شمار می‌رود؛ چرا که به هنگام انحلال در آب، سبب آزادشدن یون هیدروکسید در محلول و افزایش غلظت آن می‌شود.

ب) چون اتانول به‌صورت مولکولی در آب حل شده و طی فرایند انحلال، ساختار مولکول‌های سازنده آن دچار تغییر نمی‌شود، پس می‌توان گفت این ماده از جمله مواد غیرالکترولیت به شمار رفته و بین مولکول‌های آن و آب، پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود. توجه داریم که در فرایند انحلال اتانول در آب، هیچ یونی در محلول تولید نمی‌شود.

انواع مواد الکترولیت

الکترولیت‌ها موادی هستند که به هنگام حل‌شدن در آب، یون تولید می‌کنند و محلول آن‌ها رسانای یونی جریان الکتریکی خواهد بود. این مواد به دو دسته ترکیبات یونی و مولکولی تبدیل می‌شوند:

مواد یونی: این مواد در آب تفکیک می‌شوند و یون‌های موجود در آن‌ها در محلول مورد نظر آزاد می‌شوند. همچنین این مواد در حالت مذاب نیز در خود یون‌های آزاد دارند. برای مثال، سدیم کلرید در این دسته قرار می‌گیرد.

مواد مولکولی: پس از انحلال این مواد در آب، تمام یا بخشی از آن‌ها یونش یافته و به یون‌هایی با بار متفاوت تبدیل می‌شوند. بسیاری از اسیدها و بازهای آرنیوس، از این دسته مواد هستند. برای مثال، گاز هیدروژن کلرید در این دسته قرار می‌گیرد.

مواد غیرالکترولیت نیز موادی مولکولی هستند که به‌طور کامل به‌صورت مولکولی در آب حل می‌شوند و هیچ یونی تولید نمی‌کنند. از این مواد می‌توان به الکل‌ها، کتون‌ها، اترها و شکر اشاره کرد. محلول این مواد در آب رسانای جریان الکتریکی نیست.

چون فورمیک اسید در مقایسه با استیک اسید دارای ثابت یونش اسیدی بزرگ‌تری است، در شرایط یکسان غلظت یون هیدروژن در محلول این اسید بیشتر از غلظت یون هیدروژن در محلول استیک اسید می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت در شرایط یکسان، فورمیک اسید در مقایسه با استیک اسید با سرعت بیشتری با فلزها واکنش می‌دهد.

فورمیک اسید

فورمیک اسید، یک اسید ضعیف با فرمول مولکولی $HCOOH$ است. اسیدهای ضعیف به‌طور جزئی یونش یافته و در محلول آن‌ها مقدار زیادی مولکول اسید یونیده نشده وجود دارد. محلول این مواد خاصیت اسیدی داشته و غلظت یون هیدروکسید نیز در آن بسیار کم است. با توجه به توضیحات داده شده، در محلول فورمیک اسید، مقایسه غلظت گونه‌ها به‌صورت $[OH^-] < [H^+] = [HCOO^-] < [HCOOH]$ است. توجه داریم که استیک اسید، ترکیب اسیدی دیگری با فرمول مولکولی CH_3COOH است که در ساختار خود ۲ اتم کربن دارد.

رسانایی هر محلول، به مجموع غلظت مولی یون‌ها در آن محلول بستگی دارد. چون هیدروفلوئوریک اسید، یک اسید خیلی ضعیف بوده و بر اثر یونش آن مقدار بسیار کمی یون در محلول ایجاد می‌شود، پس می‌توان گفت مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول یک مولار هیدروفلوئوریک اسید در مقایسه با محلول نیم مولار پتاسیم هیدروکسید کمتر بوده و بر این اساس، رسانایی الکتریکی محلول یک مولار هیدروفلوئوریک اسید نیز در مقایسه با محلول نیم مولار پتاسیم هیدروکسید کمتر است. توجه داریم که مجموع غلظت مولی یون‌های پتاسیم و هیدروکسید در محلول نیم مولار پتاسیم هیدروکسید، برابر با ۱ مول بر لیتر می‌شود.

مثال

۸- غلظت یون هیدروکسید در محلولی از سود، برابر با مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلولی از هیدروفلوئوریک اسید با غلظت ۰/۸ مول بر لیتر و درجه یونش ۰/۰۲۵ است. با استفاده از ۵ لیتر محلول سود، چند گرم از اسید چرب با فرمول شیمیایی $C_{15}H_{24}O_2$ را می‌توان به صابون تبدیل کرد؟ $(O = 16 , C = 12 , H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) ۴۹/۸ ۲) ۲۴/۹ ۳) ۴۷/۲ ۴) ۲۳/۶

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمانبر ۶ ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

معادله موازنه شده یونش هیدروفلوئوریک اسید به‌صورت زیر است:

$$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq)$$

بر اثر یونش هر مولکول هیدروفلوئوریک اسید در محلول، ۲ یون(یک یون فلوئورید و یک یون هیدروژن) تولید می‌شود. با توجه به درجه یونش اسید، غلظت یون هیدروژن را در محلول مورد نظر محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = \alpha \times \text{غلظت اسید} \Longrightarrow [H^+] = ۰/۰۲۵ \times ۰/۸ = ۰/۰۲\, mol.L^{-۱}$$

غلظت یون هیدروژن در این محلول برابر با ۰/۰۲ مول بر لیتر است، پس غلظت یون فلوئورید نیز برابر با ۰/۰۲ مول بر لیتر می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت مجموع غلظت مولی یون‌ها در این محلول برابر با ۰/۰۴ مول بر لیتر است. در این رابطه، داریم:

$$[H^+] + [A^-] = ۰/۰۲ + ۰/۰۲ = ۰/۰۴\, mol.L^{-۱}$$

با توجه به فرض سؤال، محلولی از سود با غلظت ۰/۰۴ مول بر لیتر در اختیار داریم. صابون‌ها را از واکنش میان اسیدهای چرب با محلول سدیم هیدروکسید می‌توان به‌دست آورد. معادله این واکنش به‌صورت زیر است:

$$RCOOH(s) + NaOH(aq) \rightarrow RCOONa(s) + H_2O(l)$$

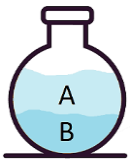
سدیم هیدروکسید موجود در این محلول، بر اساس معادله زیر با اسید چرب داده شده($C_{۱۵}H_{۲۴}O_۲$) واکنش می‌دهد و صابون تولید می‌کند:

$$C_{۱۵}H_{۲۴}O_۲(s) + NaOH(aq) \rightarrow C_{۱۵}H_{۲۳}O_۲Na(s) + H_۲O(l)$$

با توجه به معادله این واکنش، جرم اسید چرب مصرف شده در این فرایند را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ g\ C_{۱۵}H_{۲۴}O_۲ = ۵\ L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۰۴\ mol\ NaOH}{۱\ L\ \text{محلول}} \times \frac{۱\ mol\ C_{۱۵}H_{۲۴}O_۲}{۱\ mol\ NaOH} \times \frac{۲۳۶\ g\ C_{۱۵}H_{۲۴}O_۲}{۱\ mol\ C_{۱۵}H_{۲۴}O_۲} = ۴۷/۲\ g$$

۹- مقداری آب و روغن زیتون را به یکدیگر افزوده و در یک محیط ثابت قرار می‌دهیم تا به‌صورت مقابل در بیاید. کدام ماده زیر، در بخش A از این مخلوط حل می‌شود؟



۱) نقره کلرید
۲) اتیلن‌گلیکول
۳) نفتالن
۴) استیک اسید

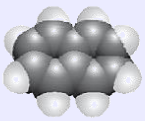
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷ ـ ۱۲۰۱)

مخلوط آب(یک ماده قطبی) و روغن(یک ماده ناقطبی)، ناهمگن بوده و با توجه به چگالی کمتر روغن، نمونه روغن بر روی سطح آب قرار می‌گیرد. بر این اساس، می‌توان گفت نمونه A معادل با روغن زیتون است. از میان مواد داده شده، اتیلن‌گلیکول و استیک اسید از جمله مواد شدیداً قطبی بوده و در آب حل می‌شوند در حالی که در روغن زیتون(یک حلال ناقطبی) حل نمی‌شوند. نقره کلرید نیز یک نمک نامحلول بوده و در آب یا روغن زیتون حل نمی‌شود. توجه داریم که نفتالن، نوعی هیدروکربن و یک ماده ناقطبی است، پس در روغن زیتون به عنوان یک حلال ناقطبی حل می‌شود.

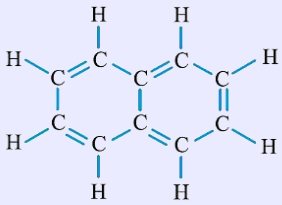
مواد آروماتیک

بنزن، سرگروه خانوادهٔ مهمی از مواد به نام ترکیب‌های آروماتیک(آروماتیک یعنی خوش بو و معطر) است. در ساختار مولکول‌های سازنده این گروه از مواد، یک یا چند حلقه شش‌ضلعی کربنی دیده می‌شود که پیوندهای کربن-کربن موجود در آن، به‌صورت یکی در میان، دوگانه هستند. نفتالن با فرمول شیمیایی $C_{۱۰}H_۸$ نیز یک ترکیب آروماتیک به شمار می‌رود. فرمول ساختاری نفتالن به‌صورت زیر است:

مدل فضاپرکن:



ساختار لوویس:



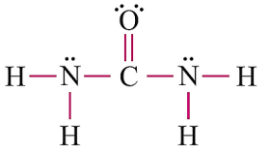
در ساختار هر مولکول نفتالن، ۵ پیوند $C=C$ و ۸ پیوند $C-H$ وجود دارد. این ماده، یک ترکیب جامد و سفیدرنگ است که مدت‌ها به عنوان ضد بید برای نگهداری فرش و لباس کاربرد داشته است.

۱۰- کدام‌یک از عبارت‌های داده شده، نادرست است؟

۱) اگر ظرف‌های چرب را به خاکستر آغشته کرده و سپس با آب گرم شست‌وشو بدهیم، این ظروف آسان‌تر تمیز می‌شوند.
۲) طی ۷۰ سال اخیر، شاخص امید به زندگی در جهان افزایش یافته و مقدار آن به نواحی برخوردار نزدیک‌تر شده است.
۳) مولکول عسل در ساختار خود گروه هیدروکسیل داشته و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارد.
۴) نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در اوره، با شمار عناصر موجود در اتیلن‌گلیکول یکسان است.

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

در ساختار اوره با فرمول شیمیایی $CO(NH_۲)_۲$، نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی و همچنین نسبت شمار اتم‌ها به شمار عناصر برابر $\frac{۸}{۴} = ۲$ است. شکل زیر، ساختار اوره را نشان می‌دهد:



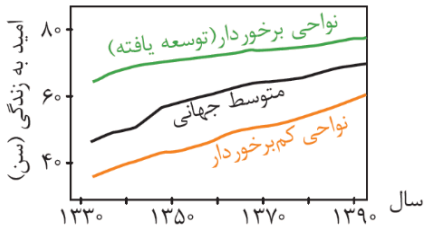
اوره از جمله مواد قطبی بوده و در آب حل می‌شود. توجه داریم که اتیلن‌گلیکول، نوعی ترکیب الکلی بوده و در ساختار خود دارای ۳ نوع عنصر(اکسیژن، کربن و هیدروژن) است. جدول زیر، اطلاعات مربوط به چند ترکیب مختلف را نشان می‌دهد:

نام ماده	فرمول شیمیایی	نوع ساختار ماده	محلول در آب	محلول در هگزان
اتیلن گلیکول (ضد یخ)	CH_2OHCH_2OH	قطبی (دارای پیوند هیدروژنی)	✓	×
نمک خوراکی	$NaCl$	یونی	✓	×
بنزین	C_8H_{18}	ناقطبی	×	✓
اوره	$CO(NH_2)_2$	قطبی (دارای پیوند هیدروژنی)	✓	×
روغن زیتون	$C_{57}H_{104}O_6$	ناقطبی	×	✓
وازلین	$C_{25}H_{52}$	ناقطبی	×	✓

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) خاکستر حاوی برخی از مواد قلیایی و اکسیدهای فلزی بوده و در واکنش با چربی‌ها، این مواد را به ترکیب‌های محلول در آب تبدیل می‌کند. بر این اساس، اگر ظرف‌های چرب را به خاکستر آغشته کرده و سپس با آب گرم شست‌وشو بدهیم، این ظروف آسان‌تر تمیز می‌شوند.

۲) در طول ۶۰ سال اخیر، میزان امید به زندگی هم برای مناطق برخوردار جهان و هم برای مناطق کم‌برخوردار جهان افزایش پیدا کرده است. هر چند که میزان این افزایش برای مناطق کم‌برخوردار، بیشتر از مناطق برخوردار بوده است، اما هنوز هم میزان امید به زندگی در نواحی برخوردار جهان در حدود ۲۰ سال بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است. نمودار زیر، روند تغییر امید به زندگی در جهان را نشان می‌دهد:



همانطور که مشخص است، شاخص امید به زندگی در جهان افزایش یافته و مقدار آن به نواحی برخوردار نزدیک‌تر شده است.

روند تغییر شاخص امید به زندگی

در طول ۶۰ سال اخیر، میزان امید به زندگی هم برای مناطق برخوردار جهان و هم برای مناطق کم‌برخوردار جهان افزایش پیدا کرده است. هر چند که میزان این افزایش برای مناطق کم‌برخوردار، بیشتر از مناطق برخوردار بوده است، اما هنوز هم میزان امید به زندگی در نواحی برخوردار جهان در حدود ۲۰ سال بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است.

۳) مولکول‌های عسل در ساختار خود شمار زیادی گروه هیدروکسیل داشته و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارند و به همین خاطر، عسل در آب حل می‌شود.

۱۱- اگر ۵/۶ لیتر گاز گوگرد تری‌اکسید را در شرایط *STP* به ۲۵۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار هیدروکلریک اسید اضافه کنیم، غلظت یون هیدروژن موجود در این محلول به چند مول بر لیتر می‌رسد؟ (از تغییر حجم ناشی از افزودن گاز گوگرد تری‌اکسید به محلول صرف‌نظر کنید.)

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۴

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

گاز SO_3 بر اثر حل شدن در آب به‌صورت زیر واکنش می‌دهد:

$$SO_3(g) + H_2O(l) \longrightarrow 2H^+(aq) + SO_4^{2-}(aq)$$

ابتدا شمار مول‌های هیدرونیوم ایجاد شده بر اثر حل شدن گاز SO_3 در محلول را حساب می‌کنیم:

$$?\,mol\,H^+ = 5/6\,L\,SO_3 \times \frac{1\,mol\,SO_3}{22/4\,L\,SO_3} \times \frac{2\,mol\,H^+}{1\,mol\,SO_3} = 0/5\,mol$$

در قدم بعدی شمار مول‌های یون هیدروژن موجود در محلول اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$?\,mol\,H^+ = ۲۵۰۰\,mL\ \text{محلول} \times \frac{۱\,L\ \text{محلول}}{۱۰۰۰\,mL\ \text{محلول}} \times \frac{۰/۱\,mol\,HCl}{۱\,L\ \text{محلول}} \times \frac{۱\,mol\,H^+}{۱\,mol\,HCl} = ۰/۲۵\,mol$$

در محلول اولیه، ۰/۲۵ مول یون هیدروژن وجود داشته و بر اثر افزودن گاز گوگرد تری‌اکسید، مقدار ۰/۵ مول یون هیدروژن جدید نیز به محلول اضافه شده است. بر این اساس، می‌توان گفت در محلول نهایی ۰/۷۵ مول یون هیدروژن وجود دارد. با توجه به مقدار مول یون هیدروژن، غلظت این یون را در محلول مورد نظر محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = \frac{\text{مول یون } H^+}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۰/۷۵\,mol\,H^+}{۲/۵\,L\ \text{محلول}} = ۰/۳\,mol.L^{-۱}$$

اکسیدهای اسیدی و بازی

اکسیدهای حاصل از برخی عناصر، با مولکول‌های آب وارد واکنش شده و pH آب را تغییر می‌دهند. این مواد، از جمله اسیدها و بازهای آرنیوس هستند. به‌طور کلی، اکسیدهای فلزی(مثل سدیم اکسید) را اکسیدهای بازی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروکسید شده و pH محلول را افزایش می‌دهند. باریم اکسید، لیتیم اکسید، سدیم اکسید و کلسیم اکسید(آهک)، در دسته اکسیدهای بازی قرار دارند و براساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

$$BaO(s) + H_۲O(l) \rightarrow Ba(OH)_۲(aq) \rightarrow Ba^{۲+}(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$Na_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲NaOH(aq) \rightarrow ۲Na^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$CaO(s) + H_۲O(l) \rightarrow Ca(OH)_۲(aq) \rightarrow Ca^{۲+}(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$Li_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲LiOH(aq) \rightarrow ۲Li^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$

اکسیدهای حاصل از فلزهای واسطه مثل اکسیدهای آهن، اکسیدهای مس و ... و آلومینیم اکسید، اصلاً با آب واکنش نداده و خاصیت بازی ندارند. در نقطه مقابل، اکسیدهای نافلزی(مثل گاز $SO_۳$) را اکسیدهای اسیدی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروژن شده و pH محلول را کاهش می‌دهند. دی‌نیتروژن پنتاکسید، کربن دی‌اکسید، گوگرد دی‌اکسید و گوگرد تری‌اکسید، در دسته اکسیدهای اسیدی قرار دارند و براساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

$$N_۲O_۵(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲HNO_۳(aq) \rightarrow ۲H^+(aq) + ۲NO_۳^-(aq)$$
$$CO_۲(g) + H_۲O(l) \rightarrow H_۲CO_۳(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCO_۳^-(aq)$$
$$SO_۳(g) + H_۲O(l) \rightarrow H_۲SO_۴(aq) \rightarrow ۲H^+(aq) + SO_۴^{۲-}(aq)$$
$$SO_۲(g) + H_۲O(l) \rightarrow H_۲SO_۳(aq) \rightleftharpoons ۲H^+(aq) + SO_۳^{۲-}(aq)$$

۱۲- کدام‌یک از عبارت‌های داده شده، درست است؟

۱) با انحلال مقداری گاز HCl در محلول هیدروفلوئوریک اسید، K_a هیدروفلوئوریک اسید کاهش می‌یابد.

۲) گرافیت، همانند مس، نوعی رسانای الکترونی بوده و قابلیت رسانایی آن به وسیله الکترون‌ها انجام می‌شود.

۳) همه اکسیدهای نافلزی حاصل از عناصر دوره دوم جدول تناوبی، اسید آرنیوس بوده و pH محیط را می‌کاهند.

۴) تعداد پیوند اشتراکی در آنیون چنداتمی حاصل از یونش نیتروااسید بیشتر از شمار این پیوندها در یون سیانید است.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

عناصر فلزی مثل مس، آهن و ...، همانند گرافیت، در دسته رساناهای الکترونی قرار می‌گیرند. قابلیت رسانایی این مواد، به وسیله الکترون‌های آزاد موجود در ساختار بلور آن‌ها انجام می‌شود. در نقطه مقابل، قابلیت رسانایی الکتریکی رساناهای یونی مثل محلول آب‌نمک، به وسیله یون‌های آزاد موجود در آن‌ها انجام می‌شود.

انواع رسانایی مواد

مواد رسانا، جریان الکتریسیته را از یک نقطه به نقطه دیگر عبور می‌دهند. رسانایی مواد مختلف، در یکی از دو گروه زیر قرار می‌گیرد:

- انواع مواد رسانا
  - رساناهای یونی
    - موادی که رسانایی آن‌ها به واسطه یون‌ها انجام می‌شود
      - نمک‌های مذاب
      - محلول انواع نمک‌ها
  - رساناهای الکترونی
    - موادی که رسانایی آن‌ها به واسطه الکترون‌های آزاد انجام می‌شود
      - گرافیت
      - عناصر فلزی

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) هرچند که با انحلال مقداری گاز HCl در محلول هیدروفلوئوریک اسید، غلظت یون هیدروژن در این محلول افزایش پیدا می‌کند، اما طی این فرایند مقدار K_a هیدروفلوئوریک اسید هیچ تغییری نمی‌کند، چراکه ثابت یونش اسیدی هر ماده، فقط تحت تأثیر دما بوده و در دمای ثابت، مقدار K_a برای یک اسید نیز همواره ثابت خواهد بود.

۳) اغلب اکسیدهای نافلزی بر اثر حل شدن در آب یون هیدرونیوم آزاد می‌کنند و اسید آرنیوس به شمار می‌روند، امّا برخی از این اکسیدها مانند گاز CO و یا نیتروژن مونوکسید، با آب واکنش نداده و از جمله اکسیدهای خنثی هستند و در هنگام حل شدن در آب هیچ یونی را در محلول ایجاد نمی‌کنند. توجه داریم که کربن، نافلزی از دوره دوم جدول تناوبی است.

۴) با توجه به ساختارهای زیر، در ساختار لوویس یون‌های چندتایی NO_2^- و CN^- که به‌ترتیب در محلول‌های نیتروواسید و هیدروسیانیک اسید وجود دارند، ۳ پیوند اشتراکی مشاهده می‌شود:

$$[:C\equiv N:]^- \qquad \left[:\ddot{O}=\ddot{N}-\ddot{O}:\right]^-$$

انواع اسیدها

به نکات زیر درباره اسیدهای قوی و ضعیف توجه کنید:

☆ نکتهٔ ۱: هیدرویدیک اسید$(HI(aq))$، هیدروبرمیک اسید$(HBr(aq))$، هیدروکلریک اسید$(HCl(aq))$ و سولفوریک اسید(H_2SO_4) اسیدهای قوی با ثابت یونش بسیار بزرگ هستند. بنابراین معادلهٔ یونش آن‌ها در آب یک‌طرفه است. این مواد بر اساس معادلات زیر در آب یونش پیدا می‌کنند:

$$HI(aq)\longrightarrow H^+(aq)+I^-(aq) \qquad HBr(aq)\longrightarrow H^+(aq)+Br^-(aq)$$
$$HCl(aq)\longrightarrow H^+(aq)+Cl^-(aq) \qquad H_2SO_4(aq)\longrightarrow H^+(aq)+HSO_4^-(aq)$$

☆ نکتهٔ ۲: نیتریک اسید برخلاف نیتروواسید، یک اسید قوی با ثابت یونش بزرگ است و معادلهٔ یونش آن در آب یک‌طرفه است:

$$HNO_3(aq)\longrightarrow H^+(aq)+NO_3^-(aq)$$

☆ نکتهٔ ۳: هیدروفلوئوریک اسید$(HF(aq))$، نیتروواسید$(HNO_2(aq))$، فورمیک اسید$(HCOOH(aq))$، استیک اسید$(CH_3COOH(aq))$، کربنیک اسید$(H_2CO_3(aq))$ و هیدروسیانیک اسید$(HCN(aq))$، اسیدهای ضعیف با ثابت یونش کوچک هستند و فرایند یونش آن‌ها در آب یک واکنش تعادلی است. این مواد بر اساس معادلات زیر در آب یونش پیدا می‌کنند:

$$HF(aq)\leftrightharpoons H^+(aq)+F^-(aq) \qquad HNO_2(aq)\leftrightharpoons H^+(aq)+NO_2^-(aq)$$
$$HCOOH(aq)\leftrightharpoons H^+(aq)+HCOO^-(aq) \qquad CH_3COOH(aq)\leftrightharpoons H^+(aq)+CH_3COO^-(aq)$$
$$H_2CO_3(aq)\leftrightharpoons H^+(aq)+HCO_3^-(aq) \qquad HCN(aq)\leftrightharpoons H^+(aq)+CN^-(aq)$$

مقایسهٔ مقابل را به خاطر بسپارید: قدرت اسیدی (K_a) : $HF > HNO_2 > HCOOH > CH_3COOH > H_2CO_3 > HCN$

☆ نکتهٔ ۴: در شرایط یکسان، هر چه قدرت اسیدی(ثابت یونش) یک اسید بزرگ‌تر باشد، غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول حاصل از آن اسید بیشتر و در نتیجه غلظت مولی یون هیدروکسید در آن محلول کمتر است. به علاوه در محلول اسید با ثابت یونش بزرگ‌تر، غلظت مولی یون‌ها و در نتیجه رسانایی الکتریکی محلول نیز بیشتر خواهد بود.

۱۳- برای از بین بردن سختی ۶۰ لیتر آب با چگالی $1g.mL^{-1}$ که درصد جرمی کلسیم کلرید و منیزیم کلرید در آن به‌ترتیب برابر با ۱/۱۱ و ۱/۹ درصد است، باید چند مول نمک آمونیوم فسفات را به محلول مورد نظر اضافه کنیم؟

$(Ca=40, Cl=35/5, Mg=24 : g.mol^{-1})$

۱) ۱/۲ ۲) ۱۲ ۳) ۱/۸ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

افزودن نمک‌های فسفات به شوینده، موجب افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها در آب‌های سخت می‌شود. یون فسفات موجود در این دسته از شوینده‌ها، با یون‌های Mg^{2+} و Ca^{2+} براساس معادله‌های زیر واکنش می‌دهد:

$$2PO_4^{3-}(aq)+3Ca^{2+}(aq)\rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) \quad , \quad 2PO_4^{3-}(aq)+3Mg^{2+}(aq)\rightarrow Mg_3(PO_4)_2(s)$$

طی این واکنش‌ها، یون‌های Mg^{2+} و Ca^{2+} به شکل رسوب درآمده و از محلول مورد نظر خارج می‌شوند. با خارج‌شدن این کاتیون‌های مزاحم، دیگر اختلالی در کار مولکول‌های صابون ایجاد نمی‌شود و صابون به خوبی کف می‌کند. به عبارت دیگر، می‌توان گفت از واکنش‌های بالا برای از بین بردن سختی آب استفاده می‌شود. در قدم اول، باید غلظت مولی یون‌های منیزیم و کلسیم را در محلول اولیه به‌دست بیاوریم:

$$\text{غلظت مولی : کلسیم کلرید} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} \times ۱۰}{\text{جرم مولی}} = \frac{۱۰ \times ۱/۱۱ \times ۱}{۱۱۱} = ۰/۱\ mol.L^{-۱} \rightarrow [Ca^{۲+}] = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$$

$$\text{غلظت مولی : منیزیم کلرید} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} \times ۱۰}{\text{جرم مولی}} = \frac{۱۰ \times ۱/۹ \times ۱}{۹۵} = ۰/۲\ mol.L^{-۱} \rightarrow [Mg^{۲+}] = ۰/۲\ mol.L^{-۱}$$

هر ۳ مول از کاتیون‌های منیزیم و یا کلسیم، با ۲ مول یون فسفات واکنش داده و از محلول خارج می‌شوند. بر این اساس، می‌توان گفت اگر نماد کلی این کاتیون‌ها را به‌صورت $X^{۲+}$ نشان بدهیم، هر ۳ مول کاتیون $X^{۲+}$ با ۲ مول یون فسفات واکنش داده و از محلول خارج می‌شود. از طرفی، می‌دانیم که مجموع غلظت مولی کاتیون‌های منیزیم و کلسیم در محلول مورد نظر برابر با ۰/۳ مول بر لیتر است. بر این اساس، داریم:

$$?\ mol\ PO_۴^{۳-} = ۶۰\ L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۳\ mol\ X^{۲+}}{۱\ L\ \text{محلول}} \times \frac{۲\ mol\ PO_۴^{۳-}}{۳\ mol\ X^{۲+}} = ۱۲\ mol$$

پس می‌توان گفت برای از بین بردن سختی نمونه ۶۰ لیتری از محلول مورد نظر، به ۱۲ مول یون فسفات نیاز داریم. این یون، در ساختار ترکیب آمونیوم فسفات وجود دارد، پس داریم:

$$?\ mol\ (NH_۴)_۳PO_۴ = ۱۲\ mol\ PO_۴^{۳-} \times \frac{۱\ mol\ (NH_۴)_۳PO_۴}{۱\ mol\ PO_۴^{۳-}} = ۱۲\ mol$$

ماز

۱۴- بر اثر سوزاندن کامل ۵۱/۳ گرم از یک اسید چرب یک عاملی، ۷۰/۵۶ لیتر گاز کربن دی‌اکسید به همراه ۳/۱۵ مول آب در شرایط استاندارد آزاد می‌شود. به‌تقریب چند درصد جرمی از این اسید چرب را اکسیژن تشکیل می‌دهد؟

$(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۳/۲۵ ۲) ۱۳/۵۵ ۳) ۱۲/۴۵ ۴) ۱۴/۰۵

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمانبر ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

در قدم اول، مقدار مول گاز کربن دی‌اکسید تولید شده در این فرایند را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ mol\ CO_۲ = ۷۰/۵۶\ L\ CO_۲ \times \frac{۱\ mol\ CO_۲}{۲۲/۴\ L\ CO_۲} = ۳/۱۵\ mol$$

در این فرایند، مقدار مول بخار آب و مقدار مول گاز $CO_۲$ تولید شده با هم برابر است. اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار بخار آب و اتم‌های کربن موجود در ساختار $CO_۲$ تولید شده، همگی از اسید چرب منشأ گرفته‌اند. بر این اساس، می‌توان گفت شمار اتم‌های هیدروژن در ساختار این اسید چرب ۲ برابر شمار اتم‌های کربن خواهد بود. فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدی با ویژگی‌های گفته شده، به‌صورت $C_nH_{۲n}O_۲$ است. بنابراین از سوختن کامل یک مول از این اسید، n مول گاز $CO_۲$ و n مول بخار آب آزاد می‌شود. جرم مولی این اسیدها برابر است با:

$$\text{جرم مولی } C_nH_{۲n}O_۲ = ۱۲n + ۲n + (۲ \times ۱۶) = ۱۴n + ۳۲$$

برای به‌دست آوردن مقدار n، می‌توان از مقدار آب یا کربن دی‌اکسید تولید شده استفاده کرد. با توجه به داده‌های صورت سؤال، داریم:

$$?\ g\ CO_۲ = ۵۱/۳\ g\ \text{اسیدچرب} \times \frac{۱\ mol\ \text{اسیدچرب}}{(۱۴n + ۳۲)g\ \text{اسیدچرب}} \times \frac{n\ mol\ CO_۲}{۱\ mol\ \text{اسیدچرب}} \times \frac{۲۲/۴\ L\ CO_۲}{۱\ mol\ CO_۲} = ۷۰/۵۶\ L\ CO_۲$$

$$\rightarrow \frac{۵۱/۳ \times n}{(۱۴n + ۳۲)} = \frac{۷۰/۵۶}{۲۲/۴} = ۳/۱۵ \rightarrow ۵۱/۳n = ۴۴/۱n + ۱۰۰/۸ \rightarrow ۷/۲n = ۱۰۰/۸ \rightarrow n = ۱۴$$

در نتیجه، فرمول شیمیایی این اسید چرب به‌صورت $C_{۱۴}H_{۲۸}O_۲$ است. در نهایت، درصد جرمی اکسیژن در این ماده را حساب می‌کنیم:

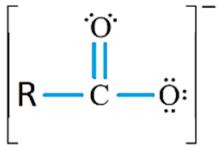
$$\text{درصد جرمی اکسیژن} = \frac{\text{مجموع جرم اتم‌های اکسیژن}}{\text{جرم مولی اسید چرب}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۶ \times ۲}{۲۲۸} \times ۱۰۰ \simeq ۱۴/۰۵\ \text{درصد}$$

۱۵- شمار پیوندهای اشتراکی موجود در ساختار بخش آنیونی یک صابون که بخش هیدروکربنی سیرشده و غیرحلقوی آن دارای ۱۶ اتم کربن است، چند برابر شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول SO_3 است؟

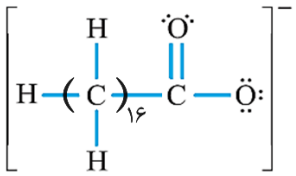
۱) ۱۱/۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

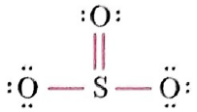
تصویر زیر، نمایی از ساختار بخش آنیونی یک نوع صابون را نشان می‌دهد:



فرض می‌کنیم که در ساختار بخش R(بخش هیدروکربنی) این نوع صابون، مجموعاً ۱۶ اتم کربن وجود داشته و در ساختار بخش باردار(بخش قطبی) آن نیز یک اتم کربن وجود دارد. در این حالت، فرمول شیمیایی صابون به‌صورت $C_{۱۶}H_{۳۳}COONa$ شده و ساختار بخش آنیونی آن به‌صورت زیر خواهد بود:



در ساختار قسمت تکرارشده در این ترکیب، ۲ پیوند اشتراکی $C-H$ کامل و ۲ نیم‌پیوند اشتراکی $C-C$ وجود دارد، پس در این بخش تکرارشده، مجموعاً ۳ پیوند دیده می‌شود. بر این اساس، در ۱۶ مورد تکرار شده از این بخش، مجموعاً ۴۸ پیوند اشتراکی یافت می‌شود. در خارج از بخش تکرار شده نیز یک نیم‌پیوند $C-H$ در سمت چپ ترکیب و یک نیم‌پیوند $C-C$، یک پیوند $C-O$ و یک پیوند $C=O$ در سمت راست آن دیده می‌شود. از آنجا که هر پیوند یگانه معادل با ۱ پیوند و هر پیوند دوگانه معادل با ۲ پیوند شمرده می‌شود، پس می‌توان گفت در این ترکیب مجموعاً ۵۲ پیوند اشتراکی وجود دارد. ساختار مولکول گوگرد تری‌اکسید(SO_3) به‌صورت زیر است:



در ساختار این مولکول نیز ۴ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها برقرار شده است. با توجه به توضیحات داده شده، نسبت میان شمار پیوندها در این دو ماده برابر با ۱۳ می‌شود.

۱۶- چه تعداد از عبارت‌های زیر، درست هستند؟

الف ـ تناوب هفتم جدول دوره‌ای، در ساختار خود ۳۲ عنصر جای داده و به عنصری با عدد اتمی ۱۱۸ ختم می‌شود.

ب ـ هلیم، دارای یک لایه پر از الکترون بوده و همانند گاز آرگون، تمایل به انجام واکنش‌های شیمیایی ندارد.

ج ـ در ۹ مورد از عناصر موجود در تناوب چهارم، بیرونی‌ترین زیرلایهٔ الکترونی کاملاً پر از الکترون است.

د ـ از بین زیرلایه‌های الکترونی که $n+l=۶$ دارند، زیرلایه $۵p$ دارای کمترین سطح انرژی است.

هـ ـ بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی در برخی از یون‌ها، برخلاف اتم‌های خنثی، می‌تواند زیرلایه d باشد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی ـ زمانبر ـ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۰۰۱)

عبارت‌های (الف)، (ب) و (هـ) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) تناوب هفتم جدول دوره‌ای، در ساختار خود ۳۲ عنصر جای داده و به عنصری با عدد اتمی ۱۱۸ ختم می‌شود. این عنصر، معادل با یک گاز نجیب بوده و در گروه ۱۸ قرار می‌گیرد. در واقع عدد اتمی عناصر موجود در تناوب هفتم، در بازه بین ۸۷ تا ۱۱۸ قرار می‌گیرد. عدد اتمی گازهای نجیب موجود در انتهای تناوب‌های مختلف به شرح نمودار زیر است:

شماره تناوب	عدد اتمی	گاز نجیب
۱	۲	هلیم
۲	۱۰	نئون
۳	۱۸	آرگون
۴	۳۶	کریپتون
۵	۵۴	زنون
۶	۸۶	رادون
۷	۱۱۸	اوگانسون

ب) هلیم، دارای یک لایه پر از الکترون با $n = ۱$ بوده و چون با گاز آرگون در یک گروه مشابه(گروه ۱۸ جدول دوره‌ای) قرار گرفته است، پس می‌توان گفت این عنصر نیز همانند گاز آرگون، تمایل به انجام واکنش شیمیایی ندارد. توجه داریم که تمایل کم عناصر گروه ۱۸ به انجام واکنش‌های شیمیایی، به‌خاطر پر بودن لایه ظرفیت اتم‌های سازنده این عناصر است.

ج) در ۱۰ مورد از عناصر موجود در تناوب چهارم جدول دوره‌ای، بیرونی‌ترین زیرلایهٔ الکترونی کاملاً پر از الکترون است. این عناصر شامل کلسیم، اسکاندیم، تیتانیم، وانادیم، منگنز، آهن، کبالت، نیکل، روی و کریپتون می‌شوند. بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی در همهٔ این عناصر به‌جز کریپتون، زیرلایه $۴s$ است و بیرونی‌ترین زیرلایهٔ الکترونی در کریپتون نیز زیرلایه $۴p$ است.

د) از بین زیرلایه‌هایی که $n + l = ۶$ دارند(زیرلایه‌های $۴d$، $۵p$ و $۶s$)، زیرلایه‌ای که دارای کوچک‌ترین عدد کوانتومی اصلی است (زیرلایه $۴d$) دارای کمترین سطح انرژی خواهد بود.

قاعدهٔ آفبا

قاعدهٔ آفبا ترتیب پر شدن زیرلایه‌ها را در اتم‌های گوناگون نشان می‌دهد. مطابق این قاعده، هنگام افزودن الکترون به زیرلایه‌ها، نخست زیرلایه‌های نزدیک‌تر به هسته پر می‌شوند که دارای انرژی کمتری هستند. به بیان کوانتومی، نخست زیرلایه‌هایی پر می‌شوند که مجموع $n + l$ کوچک‌تری داشته باشند. در چنین شرایطی، اگر مقدار مجموع $n + l$ برای چند زیرلایه یکسان باشد، لایه‌ای زودتر از الکترون پر می‌شود که عدد کوانتومی اصلی کوچک‌تری داشته باشد. به‌عنوان مثال، از میان زیرلایه‌هایی که $n + l$ برای آن‌ها برابر ۶ است، زیرلایهٔ $۴d$ زودتر از سایر زیرلایه‌ها از الکترون پر می‌شود. قاعدهٔ آفبا، آرایش الکترونی اتم اغلب عنصرها را پیش‌بینی می‌کند؛ اما برای اتم برخی عنصرهای جدول دوره‌ای مثل کروم و مس، نارسایی دارد. امروزه به کمک روش‌های طیف سنجی پیشرفته، آرایش الکترونی چنین اتم‌هایی را با دقت تعیین می‌کنند. در واقع، روش طیف‌سنجی می‌تواند آرایش الکترونی دقیق همه عناصر از جمله کروم و نیکل را به‌دست بیاورد. آرایش الکترونی دقیق کروم و مس که با استفاده از روش‌های طیف‌سنجی به‌دست آمده، به‌صورت زیر است:

$_{۲۴}Cr : [_{۱۸}Ar]\ ۳d^{۵}\ ۴s^{۱}$ $\qquad$ $_{۲۹}Cu : [_{۱۸}Ar]\ ۳d^{۱۰}\ ۴s^{۱}$

همانطور که مشخص است، در آرایش الکترونی این اتم‌ها یک الکترون از زیرلایه $۴s$ به زیرلایه $۳d$ منتقل شده است؛ پس این اتم‌ها از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کنند.

هـ) بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی در برخی از یون‌های حاصل از عناصر دسته p و d جدول تناوبی، می‌تواند زیرلایه d باشد؛ در حالی که بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی در اتم‌های خنثی تمام عناصر، یکی از زیرلایه‌های s یا p است. به‌عنوان مثال، آرایش الکترونی یون‌های $_{۳۱}Ga^{۳+}$ که از عناصر دسته p حاصل می‌شود و $_{۲۹}Cu^{۲+}$ که از عناصر دسته d حاصل می‌شود، به زیرلایه $۳d$ ختم می‌شود. آرایش الکترونی یون مس و یون گالیم به‌صورت زیر است:

$_{۲۹}Cu^{۲+}: ۱s^{۲}\ ۲s^{۲}\ ۲p^{۶}\ ۳s^{۲}\ ۳p^{۶}\ ۳d^{۹}$
$_{۳۱}Ga^{۳+}: ۱s^{۲}\ ۲s^{۲}\ ۲p^{۶}\ ۳s^{۲}\ ۳p^{۶}\ ۳d^{۱۰}$

توجه داریم که آرایش الکترونی هیچ اتم خنثایی نمی‌تواند به زیرلایه d ختم شود.

۱۷- شمار اتم‌های هیدروژن موجود در یک نمونه ۶۷/۵ لیتری از بخار آب با چگالی $۱/۶ g.L^{-۱}$، با شمار پیوندهای اشتراکی موجود در ساختار چند گرم گاز متان برابر خواهد بود؟ ($H = ۱ : g.mol^{-۱}$ و $C = ۱۲$ و $O = ۱۶$)

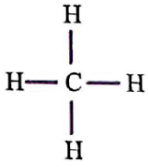
۱) ۳۲ ۲) ۸۰ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۰ ـ ۱۰۰۱)

همانطور که میدانیم، هر مول بخار آب $(H_۲O)$ دارای ۲ مول اتم هیدروژن در ساختار خود است. بنابراین ابتدا شمار مول اتم‌های هیدروژن در نمونه بخار آب را محاسبه می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$?\,mol\,H = ۶۷/۵\,L\,H_۲O \times \frac{۱/۶\,g\,H_۲O}{۱\,L\,H_۲O} \times \frac{۱\,mol\,H_۲O}{۱۸\,g\,H_۲O} \times \frac{۲\,mol\,H}{۱\,mol\,H_۲O} = ۱۲\,mol$$

با توجه به محاسبات انجام شده، نمونه بخار آب مورد نظر دارای ۱۲ مول اتم هیدروژن است. حال باید ببینیم در چند گرم گاز متان، ۱۲ مول پیوند اشتراکی دیده می‌شود. ساختار لوویس گاز متان به‌صورت زیر است و در هر مول از این گاز، ۴ مول پیوند اشتراکی وجود دارد:



با توجه به توضیحات داده شده، داریم:

$$?\,g\,CH_۴ = ۱۲\,mol\ \text{پیوند} \times \frac{۱\,mol\,CH_۴}{۴\,mol\ \text{پیوند}} \times \frac{۱۶\,g\,CH_۴}{۱\,mol\,CH_۴} = ۴۸\,g$$

توجه داریم که متان با فرمول مولکولی $CH_۴$، ساده‌ترین عضو از خانواده آلکان‌ها به شمار می‌رود. این گاز از مولکول‌های ناقطبی تشکیل شده و بخش عمده‌ای از گاز شهری را نیز تشکیل می‌دهد. متان برای اولین بار از سطح برخی از مرداب‌ها جمع‌آوری شده و به همین خاطر، به گاز مرداب نیز مشهور است.

آزمون ماز

۱۵ آبان‌ماه

شیمی

۱- کدام‌یک از مطالب زیر در رابطه با محلول هیدروسیانیک اسید درست است؟

۱) در ساختار هر مولکول از اسید حل شده در این محلول، ۳ پیوند اشتراکی و یک جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

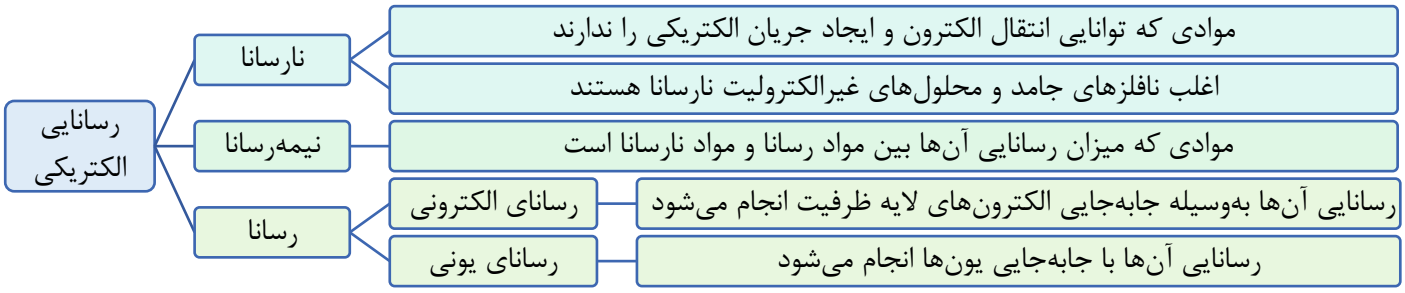
۲) در شرایط یکسان، رسانایی الکتریکی این محلول آبی در مقایسه با یک نمونه محلول هیدرویدیک اسید، کمتر است.

۳) پس از انحلال مقداری گاز HCN در آب، سرعت تولید یون $CN^-(aq)$ به‌تدریج در محلول، افزایش می‌یابد.

۴) در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، pH این محلول کمتر از محلول هیدروفلوئوریک اسید است.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

در رابطه با رسانایی انواع مواد، داریم:



در محلول‌ها، رسانایی الکتریکی تابعی از مجموع غلظت یون‌های موجود در محلول است. هیدروسیانیک اسید، یک اسید بسیار ضعیف بوده و در محلول آن، مقدار بسیار کمی یون وجود داشته و رسانایی آن بسیار ناچیز است. هیدرویدیک اسید نیز یک اسید قوی بوده و بر اثر یونش هر مول از آن، ۲ مول یون در محلول ایجاد می‌شود، پس می‌توان گفت مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول یک مولار این ماده، برابر با ۲ مول بر لیتر می‌شود. با توجه به توضیحات داده شده، مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول هیدرویدیک اسید، بیشتر از محلول دیگر بوده و این محلول رسانایی بالاتری دارد.

انواع رسانایی

فلزها و گرافیت (مغز مداد) رسانای جریان برق هستند. از آنجا که رسانایی آن‌ها به وسیلهٔ الکترون‌ها انجام می‌شود، به آن‌ها رسانای الکترونی می‌گویند. نوع دیگری از رسانایی نیز وجود دارد که به وسیلهٔ یون‌ها انجام می‌شود و به آن رسانای یونی می‌گویند. این رسانایی هنگامی ایجاد می‌شود که یون‌های موجود در یک ماده بتوانند آزادانه از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر جابه‌جا شوند، زیرا در این شرایط بارهای الکتریکی نیز جابه‌جا خواهند شد؛ مانند محلول سدیم کلرید و یا سدیم کلرید مذاب.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ساختار مولکول HCN به‌صورت زیر است:

$$H-C\equiv N:$$

در ساختار هر مولکول از این ترکیب اسیدی، ۴ پیوند اشتراکی و یک جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

۳) هیدروسیانیک اسید، از جمله اسیدهای بسیار ضعیف (اسیدهایی با ثابت یونش بسیار کوچک) بوده و طی یک فرایند تعادلی در محلول یونش پیدا می‌کند. بر این اساس، پس از انحلال مقداری از گاز HCN در آب، ابتدا واکنش رفت (فرایند یونش هیدروسیانیک اسید که منجر به تولید یون هیدروژن و یون CN^- در محلول می‌شود) با سرعت زیادی انجام شده و به تدریج، سرعت این واکنش کاهش پیدا می‌کند، پس می‌توان گفت در گذر زمان، سرعت تولید یون $CN^-(aq)$ به تدریج در محلول کاهش می‌یابد. در نهایت، سرعت تولید این ماده به صفر رسیده و غلظت آن در محلول ثابت باقی می‌ماند.

انواع واکنش‌ها

واکنش‌ها را به‌طور کلی به دو دسته برگشت‌ناپذیر و برگشت‌پذیر تقسیم‌بندی می‌کنند. در واکنش‌های برگشت‌ناپذیر، فقط واکنش‌دهنده‌ها می‌توانند به فراورده‌ها تبدیل شوند اما مسیر برگشت انجام نمی‌شود. برای مثال، واکنش سوختن متان از جمله واکنش‌های برگشت‌ناپذیر به حساب می‌آید. در نقطه مقابل، واکنش‌های برگشت‌پذیر وجود دارند که در آن‌ها امکان انجام‌شدن واکنش‌های رفت و برگشت به‌صورت هم‌زمان وجود دارد. برای مثال، واکنش تبدیل گاز اوزون به اکسیژن از واکنش‌های برگشت‌پذیر بوده و معادله آن به‌صورت $2O_3(g) \rightleftarrows 3O_2(g)$ است. اگر در واکنش‌های برگشت‌پذیر، واکنش‌های رفت و برگشت به‌صورت هم‌زمان و با سرعت برابر انجام شوند، مقدار فراورده‌ها و واکنش‌دهنده‌ها ثابت مانده و تعادل برقرار می‌شود. در لحظه برقراری تعادل، سرعت تولید هر ماده با سرعت مصرف آن برابر است و به همین خاطر، مقدار هر ماده ثابت می‌ماند. توجه داریم که در لحظه برقراری تعادل، غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌ماند، اما لزومی به یکسان بودن غلظت این مواد در لحظه تعادل وجود ندارد. در واقع در لحظه برقراری تعادل، غلظت فراورده‌ها می‌تواند بیشتر، برابر و یا کمتر از واکنش‌دهنده‌ها باشد.

۴) ثابت یونش هیدروسیانیک اسید (HCN)، کوچک‌تر از ثابت یونش هیدروفلوئوریک اسید است، پس می‌توان گفت هیدروسیانیک اسید، قدرت اسیدی کمتری داشته و در محلول خود به مقدار کمتری یونیده می‌شود. بر این اساس، در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت محلول‌ها، pH محلول هیدروسیانیک اسید، بیشتر از محلول هیدروفلوئوریک اسید است.

ثابت یونش اسیدی

اسیدهای قوی با انحلال در آب به‌طور کامل یونیده شده و هیچ ذره‌ای از آن‌ها به‌صورت دست‌نخورده باقی نمی‌ماند. برای مثال، درباره هیدروکلریک اسید داریم:

$$HCl(aq) \rightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

این در حالی است که اسیدهای ضعیف طی یک فرایند تعادلی، به‌طور جزئی یونش پیدا می‌کنند و اندک یون‌های حاصل از یونش آن‌ها، با مولکول‌های اسید یونیده نشده، در حالت تعادل قرار می‌گیرند. به‌عنوان مثال، واکنش تعادلی یونش هیدروفلوئوریک اسید را در نظر بگیرید:

$$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq)$$

با قراردادن غلظت تعادلی گونه‌ها در رابطه ثابت تعادل، مقدار K این واکنش به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$K = K_a = \frac{[F^-][H^+]}{[HF]} = \frac{\text{غلظت } H^+ \times \text{غلظت آنیون حاصل از یونش}}{\text{غلظت اسید یونیده نشده}}$$

به ثابت تعادل فرایند یونش اسیدها (K_a)، ثابت یونش اسیدی می‌گویند که یکای آن معادل با $mol.L^{-1}$ است. از ثابت یونش، به‌عنوان معیار مناسبی برای مقایسه قدرت اسیدها و بازها استفاده می‌شود. هرچه مقدار ثابت یونش برای یک ماده اسیدی یا بازی بزرگ‌تر باشد، آن ماده به هنگام انحلال در آب، به مقدار بیشتری یونش یافته و قدرت بالاتری دارد.

مثال

۲- در واکنش تولید ۵۲/۸ گرم از نوعی صابون با استفاده از یک اسید چرب، مقدار ۲ لیتر محلول سود با $pH = ۱۳$ مصرف شده است. جرم مولی صابون حاصل از این فرایند، برابر با چند گرم بر مول است؟

۱) ۵۲۸ ۲) ۲۶۴ ۳) ۵۵۶ ۴) ۲۷۸

پاسخ: گزینه ۲ **(آسان ـ مسئله ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۰ ـ ۱۲۰۱)**

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: محاسبه غلظت یون هیدروکسید موجود در محلول بازی

گام دوم: محاسبه مقدار مول باز مصرف شده

گام سوم: به‌دست آوردن جرم مولی صابون تولید شده

صابون‌ها ($RCOONa$) را از واکنش میان اسیدهای چرب با محلول سدیم هیدروکسید می‌توان به‌دست آورد. معادله این واکنش به‌صورت زیر است:

$$RCOOH(s) + NaOH(aq) \rightarrow RCOONa(s) + H_2O(l)$$

تولید صابون

به نمک سدیم اسیدهای چرب بلند زنجیر، صابون گفته می‌شود. در واقع اگر به جای اتم هیدروژن موجود در ساختار گروه کربوکسیل اسیدهای چرب، کاتیون Na^+ قرار داده شود، صابون جامد یا همان نمک سدیم اسیدهای چرب به‌دست می‌آید. صابون‌ها را بر اثر گرما دادن روغن‌های گیاهی یا جانوری مانند روغن زیتون، روغن نارگیل، دنبه و پیه گوسفند در حضور سدیم هیدروکسید (محلول سود) تهیه می‌کنند. به این فرایند، اصطلاحاً واکنش صابونی‌شدن گفته می‌شود. اسیدهای چرب نیز به طریق مشابه با محلول سدیم هیدروکسید واکنش داده و سبب تولید پاک‌کننده‌های صابونی و مولکول‌های آب می‌شوند. توجه داریم که پاک‌کننده‌های صابونی، خاصیت بازی دارند و به همین خاطر، pH مخلوط آب و صابون بیشتر از ۷ است. مزه تلخ صابون را هم می‌توان به همین خاصیت بازی آن نسبت داد.

مطابق با معادله این واکنش، به ازای مصرف هر مول سود $(NaOH)$، یک مول صابون به‌عنوان فراورده تولید می‌شود. در قدم اول، باید مقدار مول سود مصرف شده در این واکنش شیمیایی را محاسبه کنیم. برای محاسبه غلظت این محلول با استفاده از روش کتاب درسی، داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} \Longrightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱۳}\ mol.L^{-۱}$$

$$[H^+][OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Longrightarrow ۱۰^{-۱۳} \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Longrightarrow [OH^-] = ۱۰^{-۱} \Longrightarrow [NaOH] = ۱۰^{-۱}\ mol.L^{-۱}$$

البته، غلظت باز را به‌طور مستقیم نیز می‌توانیم محاسبه کنیم. در این رابطه، داریم:

$$[OH^-] = ۱۰^{pH-۱۴} = ۱۰^{۱۳-۱۴} = ۱۰^{-۱}\ mol.L^{-۱} \xrightarrow{\text{سود یک باز قوی بوده و درجه یونش آن برابر یک است}} [NaOH] = ۱۰^{-۱}\ mol.L^{-۱}$$

غلظت یون هیدروکسید در محلول‌های بازی

در محلول‌های بازی، غلظت یون هیدروکسید، بیشتر از یون هیدرونیوم است. برای محاسبه pH این محلول‌ها، ابتدا باید غلظت یون هیدروکسید را به‌دست بیاوریم و پس از آن، به کمک رابطه $K_W = [OH^-] \times [H^+]$، غلظت یون هیدروژن را محاسبه کنیم. در مرحله آخر نیز با توجه به غلظت یون هیدروژن، pH را محاسبه می‌کنیم. اگر محلول مربوط به یک باز قوی یک ظرفیتی باشد، مقدار α برای آن باز برابر یک بوده و غلظت یون هیدروکسید در این محلول، با غلظت باز حل‌شده(M) برابر است. بر این اساس، داریم:

$$[OH^-] = M$$

برای محاسبه غلظت OH^- در محلولی از یک باز ضعیف با غلظت مولی M و درجه یونش α، می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$[OH^-] = M.\alpha$$

به‌جز رابطه بالا، به کمک مفهوم pOH هم می‌توانیم مقدار pH محلول‌های بازی را محاسبه کنیم. در واقع، pOH مفهومی مشابه به pH داشته و برای محاسبه مقدار آن، کافی است از غلظت یون هیدروکسید در محلول، منفی لگاریتم بگیریم. داریم:

$$pOH = -\log[OH^-]$$

در قدم بعد، به راحتی pH محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$pH + pOH = ۱۴$$

با توجه به غلظت سدیم هیدروکسید (سود)، مقدار مول صابون تولید شده در این فرایند را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ mol\ RCOONa = ۲\ L\ \text{محلول سود} \times \frac{۰/۱\ mol\ NaOH}{۱\ L\ \text{محلول سود}} \times \frac{۱\ mol\ RCOONa}{۱\ mol\ NaOH} = ۰/۲\ mol$$

طی این فرایند، ۰/۲ مول صابون تولید شده است که جرم آن برابر با ۵۲/۸ گرم شده است. بر این اساس، می‌توان جرم مولی صابون را محاسبه کرد. در این رابطه، داریم:

$$\text{مقدار مول صابون} = \frac{\text{جرم صابون}}{\text{جرم مولی صابون}} \Longrightarrow ۰/۲\ mol\ RCOONa = \frac{۵۲/۸\ g\ RCOONa}{x\ g.mol^{-۱}} \Longrightarrow x = ۲۶۴\ g.mol^{-۱}$$

ماز

۳- پرکلریک اسید با فرمول شیمیایی $HClO_۴$، یکی از قوی‌ترین اسیدهای تک‌پروتون‌دار است. برای اینکه pH یک نمونه محلول استیک اسید با pH محلول ۲۰۱ میلی‌گرم بر لیتر پرکلریک اسید برابر شود، تقریباً باید چند مول استیک اسید را در ۸ لیتر محلول آن حل کنیم؟ (ثابت یونش استیک اسید برابر با ۲×۱۰^{-۵} مول بر لیتر است. $Cl = ۳۵/۵ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۸ ۴) ۱/۶

پاسخ: گزینه ۴ **(متوسط ـ محاسباتی ـ زمانبر ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)**

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

کام اول: محاسبه غلظت یون هیدروژن موجود در محلول پرکلریک اسید

کام دوم: محاسبه غلظت یون هیدروژن در محلول استیک اسید

کام سوم: به‌دست آوردن غلظت استیک اسید در محلول این ماده

کام چهارم: محاسبه مقدار مول استیک اسید در محلول

پرکلریک اسید با فرمول شیمیایی $HClO_4$، یکی از قوی‌ترین اسیدهای تک‌پروتون‌دار است، پس درجه یونش اسید در محلول این ماده برابر با یک بوده و تمام ذرات اسیدی وارد شده به محلول، به‌طور کامل یونش پیدا می‌کنند. در قدم اول، باید غلظت مولی این محلول را محاسبه کنیم. طبق فرض سؤال، محلول ۲۰۱ میلی‌گرم بر لیتر پرکلریک اسید را در اختیار داریم، پس در هر لیتر از این محلول ۲۰۱ میلی‌گرم اسید حل شده است. مقدار مول اسید حل شده در هر لیتر از این محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,HClO_4 = ۲۰۱\,mg\,HClO_4 \times \frac{۱\,g\,HClO_4}{۱۰۰۰\,mg\,HClO_4} \times \frac{۱\,mol\,HClO_4}{۱۰۰/۵\,g\,HClO_4} = ۰/۰۰۲\,mol$$

بنابراین در هر لیتر از این محلول، ۰/۰۰۲ مول اسید حل شده است، پس غلظت اسید برابر با ۰/۰۰۲ مول بر لیتر است. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] = M \times \alpha = (۲ \times ۱۰^{-۳}) \times ۱ = ۲ \times ۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱}$$

غلظت یون هیدروژن در محلول‌های اسیدی

در محلول اسیدهای قوی، کل مولکول‌های اسید یونش پیدا می‌کنند. برای مثال، در رابطه با محلول هیدروکلریک اسید داریم:

$$HCl(aq) \rightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq) \qquad \Rightarrow \qquad \left[H^+_{\text{در محلول نهایی}}\right] = \left[HCl_{\text{در محلول اولیه}}\right]$$

این در حالی است که در محلول اسیدهای ضعیف، فقط مقدار کمی از مولکول‌های حل‌شده یونش پیدا می‌کنند و شمار زیادی از مولکول‌ها، به‌صورت دست‌نخورده باقی می‌مانند. برای مثال، در رابطه با محلول هیدروفلوئوریک اسید داریم:

$$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq) \qquad \Rightarrow \qquad \left[H^+_{\text{در محلول نهایی}}\right] < \left[HF_{\text{در محلول اولیه}}\right]$$

اگر محلول موردنظر مربوط به یک اسید قوی باشد، مقدار α برای آن اسید برابر یک بوده و غلظت یون هیدروژن در این محلول، با غلظت اسید حل‌شده در آن (M) برابر است. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] = M$$

در نقطه مقابل، برای محاسبه غلظت یون هیدروژن در محلولی از یک اسید ضعیف تک‌پروتون‌دار با غلظت مولی M و درجه یونش α، می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$[H^+] = M.\alpha$$

طبق فرض سؤال، مقدار pH یک نمونه محلول استیک اسید با pH محلول پرکلریک اسید برابر شده است، پس غلظت یون هیدروژن در این دو محلول با یکدیگر برابر است. بر این اساس، غلظت محلول استیک اسید (M) را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} \Longrightarrow ۲ \times ۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱} = \sqrt{(۲ \times ۱۰^{-۵}) \times M} \Longrightarrow M = ۰/۲\,mol.L^{-۱}$$

غلظت محلول استیک اسید برابر با ۰/۲ مول بر لیتر است، پس در ۸ لیتر از این محلول اسیدی باید ۱/۶ مول اسید حل کنیم. در این رابطه داریم:

$$?\,mol\,CH_۳COOH = ۸\,L\,\text{محلول} \times \frac{۰/۲\,mol\,CH_۳COOH}{۱\,L\,\text{محلول}} = ۱/۶\,mol$$

اسیدهای آلی

دو عضو اول خانواده کربوکسیلیک اسیدها، فورمیک اسید و استیک اسید هستند. ثابت یونش و در نتیجه قدرت اسیدی فورمیک اسید بیشتر از استیک اسید می‌باشد. پس در محلول‌های این دو با غلظت اولیه برابر، مقدار بیشتری از فورمیک اسید (ساده‌ترین اسید آلی) یونش یافته و غلظت اسید یونش‌نیافته در محلول آن کمتر است. مقایسه قدرت اسیدهای مطرح‌شده در کتاب درسی به‌صورت زیر است:

$$HCN < H_۲CO_۳ < CH_۳COOH < HCOOH < HNO_۲ < HF << HNO_۳ < H_۲SO_۴ < HCl < HBr < HI$$

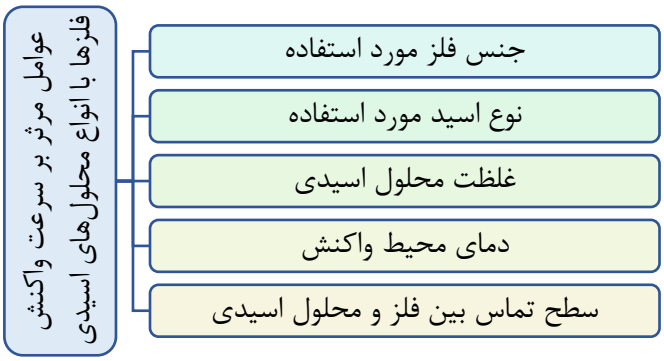
به‌طور کلی در میان کربوکسیلیک اسیدها، با افزایش شمار اتم‌های کربن، قدرت اسیدی کاهش می‌یابد.

۴- در دمای اتاق، محلولی از استیک اسید با غلظت ۰/۲ مول بر لیتر در اختیار داریم. با فرض اینکه با کاهش دما، ثابت یونش این اسید در محلول مورد نظر کاهش پیدا کند، کدام تغییر زیر منجر به افزایش سرعت واکنش محلول مورد نظر با فلز منیزیم می‌شود؟

۱) رساندن دمای محلول به ۱۰ درجه سلسیوس
۲) انحلال مقداری گاز هیدروژن کلرید در محلول
۳) استفاده از هیدروسیانیک اسید به‌جای استیک اسید
۴) افزودن مقداری آب خالص به محلول مورد نظر

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

سرعت واکنش فلزهای مختلف با محلول‌های اسیدی، به جنس فلز، نوع اسید، غلظت محلول اسیدی و دمای محیط واکنش بستگی دارد.



معادله واکنش یون هیدروژن موجود در محلول‌های اسیدی با فلز منیزیم به‌صورت زیر است:

$$۲H^+(aq) + Mg(s) \rightarrow H_۲(g) + Mg^{۲+}(aq)$$

غلظت، یکی از عوامل مؤثر بر سرعت واکنش‌ها است. با انحلال مقداری گاز هیدروژن کلرید در محلول استیک اسید اولیه، غلظت یون هیدروژن در محلول افزایش یافته و به دنبال آن، سرعت انجام این واکنش شیمیایی و سرعت تولید گاز هیدروژن افزایش پیدا می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) دمای اتاق، معادل با ۲۵ درجه سلسیوس است. با کاهش دما و رساندن دمای محلول به ۱۰ درجه سلسیوس، مقدار ثابت یونش اسید مورد نظر کاهش پیدا کرده و بر این اساس، غلظت یون هیدروژن در محلول کاهش پیدا می‌کند. با کاهش غلظت یون هیدروژن، سرعت انجام واکنش میان اسید با فلز منیزیم نیز کاهش پیدا خواهد کرد.

۳) هیدروسیانیک اسید، در مقایسه با استیک اسید، قدرت اسیدی کمتری داشته و غلظت یون هیدروژن در محلول آن کمتر از محلول استیک اسید است، پس با استفاده از هیدروسیانیک اسید به‌جای استیک اسید، سرعت انجام واکنش مورد نظر کاهش پیدا می‌کند.

۴) با افزودن مقداری آب خالص به محلول مورد نظر، غلظت اسید در این محلول کاهش یافته و بر این اساس، سرعت انجام واکنش میان اسید با فلز منیزیم نیز کاهش پیدا خواهد کرد.

ماز

۵- **کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟**

۱) سرکه، محلول آبی یک اسید ضعیف بوده و غلظت گونه‌های موجود در محلول این اسید، در شرایط معین، ثابت است.
۲) در شرایط استاندارد، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های OH^- و H^+ در محلول‌های آبی برابر $۱۰^{-۱۴}$ است.
۳) با انحلال مقداری از پاک‌کننده‌های صابونی در آب خالص، غلظت یون هیدروکسید در آب کاهش می‌یابد.
۴) آهک، نوعی ترکیب یونی بوده و برای افزایش میزان اسیدی بودن خاک، به آن آهک می‌افزایند.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

سرکه، محلولی از استیک اسید (اتانوئیک اسید) در آب است. به‌طور کلی، اسیدهای قوی را می‌توان محلولی شامل یون‌های آب پوشیده دانست، به‌طوری‌که در آن‌ها تقریباً مولکول‌های یونیده نشده یافت نمی‌شود. در نقطه مقابل، در محلول اسیدهای ضعیف افزون بر اندک یون‌های آب پوشیده، مولکول‌های اسید یونیده نشده نیز یافت می‌شوند. برای نمونه، در محلول سرکه شمار ناچیزی از یون‌های آب‌پوشیده (یون‌های استات و هیدروژن)، هم‌زمان با شمار زیادی از مولکول‌های استیک اسید یونیده نشده حضور دارند. یافته‌های تجربی نشان می‌دهند که در شرایط معین، غلظت همه گونه‌های موجود در محلول این اسید، همانند دیگر اسیدهای ضعیف ثابت است.

اسیدهای آلی

کربوکسیلیک اسیدها، گروهی از مواد آلی با گروه عاملی کربوکسیل هستند که در دسته اسیدهای ضعیف قرار می‌گیرند. به هنگام انحلال این مواد در آب، هیدروژن موجود در گروه کربوکسیل می‌تواند به شکل یون هیدرونیوم وارد محلول شود. با جدا شدن یون هیدروژن از کربوکسیلیک اسیدها، یک آنیون ایجاد می‌شود که نام آن بر وزن (آلکانوات) خواهد بود. توجه داریم که اسیدهای موجود در سرکه سیب، انگور، ریواس و مرکبات مانند پرتقال و لیمو از اسیدهای آلی خوراکی و ضعیف هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) در شرایط اتاق (دمای ۲۵°C که معادل با دمای ۲۹۸ کلوین است)، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های OH^- و H^+ در محلول‌های آبی برابر 10^{-14} است. این در حالی است که در شرایط استاندارد (دمای صفر درجهٔ سانتی‌گراد) و یا دمای بدن انسان (دمای ۳۷°C)، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های OH^- و H^+ برابر با 10^{-14} نمی‌شود.

۳) صابون‌ها از جمله مواد بازی بوده و موجب افزایش pH محلول می‌شوند. همانند صابون، پاک‌کننده‌های غیرصابونی نیز در آب از خود خاصیت بازی نشان می‌دهند و باز آرنیوس به شمار می‌روند. بر این اساس، می‌توان گفت با انحلال مقداری از پاک‌کننده‌های صابونی در آب خالص، غلظت یون هیدروکسید در آب افزایش و غلظت یون هیدروژن در آب کاهش می‌یابد.

۴) آهک یا همان کلسیم اکسید (CaO) با حل شدن در آب خصلت بازی از خود نشان می‌دهد، بنابراین می‌تواند برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک استفاده شود. به عبارت دیگر، می‌توان گفت کلسیم اکسید یک اکسید فلزی با خاصیت بازی است.

۶- اگر مجموع مقدار مول یون‌ها در محلول حاصل از حل کردن مقداری فورمیک اسید($K_a = ۱/۸ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$) در ۴۰۰ میلی‌لیتر آب در دمای معین برابر ۰/۰۱۲ مول باشد، pH محلول و جرم تقریبی فورمیک اسید حل شده در محلول به‌ترتیب کدام است؟ (از تغییر حجم محلول صرف‌نظر کنید. $g.mol^{-۱}$: $O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱$)

۱) ۲۹/۲ – ۱/۲ ۲) ۲۲/۷ – ۱/۲ ۳) ۲۹/۲ – ۱/۸ ۴) ۲۲/۷ – ۱/۸

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمانبر ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: محاسبه مجموع غلظت یون‌ها در محلول فورمیک اسید

گام دوم: محاسبه غلظت یون هیدروژن و به‌دست آوردن pH محلول

گام سوم: به‌دست آوردن غلظت فورمیک اسید با توجه به ثابت یونش آن

گام چهارم: محاسبه جرم فورمیک اسید حل شده در محلول

فورمیک اسید، یک اسید ضعیف به شمار می‌رود. این اسید، به هنگام گزش مورچه وارد بدن شده و سبب ایجاد حس سوزش می‌شود. واکنش یونش فورمیک اسید در آب به‌صورت زیر است:

$$HCOOH(aq) + H_۲O(l) \leftrightarrows H_۳O^+(aq) + HCOO^-(aq)$$

طبق فرض سؤال، مجموع مقدار مول یون‌ها در محلول حاصل از حل کردن اسید برابر با ۰/۰۱۲ مول و حجم محلول نیز برابر با ۴۰۰ میلی‌لیتر (معادل با ۰/۴ لیتر) است. بر این اساس، داریم:

$$\text{مجموع غلظت مولی یون‌ها} = \frac{\text{مجموع مقدار مول یون‌ها}}{\text{حجم محلول}} = \frac{۰/۰۱۲\ mol}{۰/۴\ L} = ۰/۰۳\ mol.L^{-۱}$$

طی این فرایند، دو یون ناهمنام با ضریب یکسان تولید شده است. بر این اساس، می‌توان گفت در محلول ایجاد شده طی این فرایند، غلظت مولی یون‌های $H_۳O^+$ و $HCOO^-$ با هم برابر است و با توجه به داده‌های سؤال، مجموع غلظت مولی این یون‌ها برابر با $۰/۰۳\ mol.L^{-۱}$ است؛ در نتیجه داریم:

$$[H_۳O^+] = \frac{۰/۰۳}{۲} mol.L^{-۱} = ۰/۰۱۵\ mol.L^{-۱}$$

$$pH = -log\ ۰/۰۱۵ = -log\ (۳ \times ۵ \times ۱۰^{-۳}) = -log\ ۳ - log\ ۵ + ۳ = -۰/۵ - ۰/۷ + ۳ = ۱/۸$$

با توجه به رابطهٔ ثابت یونش اسید مورد نظر، می‌توانیم بنویسیم:

$$K_a = \frac{[H_۳O^+][HCOO^-]}{[HCOOH]} = \frac{[H_۳O^+]^۲}{M - [H_۳O^+]} = \frac{(۰/۰۱۵)^۲}{M - ۰/۰۱۵} = ۱/۸ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\Rightarrow ۲۲۵ \times ۱۰^{-۶} = ۱/۸ \times ۱۰^{-۴} M - ۲/۷ \times ۱۰^{-۶}$$

$$\Rightarrow M = \frac{۲۲۵ \times ۱۰^{-۶} + ۲/۷ \times ۱۰^{-۶}}{۱/۸ \times ۱۰^{-۴}} \simeq ۱/۲۳۷\ mol.L^{-۱}$$

در نهایت جرم دقیق فورمیک اسید حل شده در محلول را به‌دست می‌آوریم:

$$?\ g\ HCOOH = ۴۰۰\ mL\ \text{محلول} \times \frac{۱\ L\ \text{محلول}}{۱۰۰۰\ mL\ \text{محلول}} \times \frac{۱/۲۳۷\ mol\ HCOOH}{۱\ L\ \text{محلول}} \times \frac{۴۶\ g\ HCOOH}{۱\ mol\ HCOOH} \simeq ۲۲/۷۷\ g$$

البته چون درجه یونش فورمیک اسید در محلول مورد نظر خیلی کوچک است، با استفاده از رابطه زیر نیز می‌توانستیم مقدار اسید حل شده در محلول را محاسبه کنیم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} \Longrightarrow ۰/۰۱۵ = \sqrt{۱/۸ \times ۱۰^{-۴} \times M} \Longrightarrow M = ۱/۲۵\ mol.L^{-۱}$$

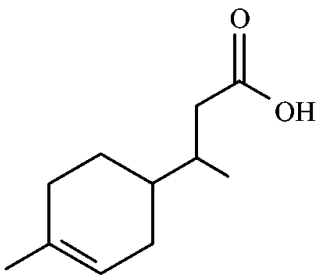
$$?\ g\ HCOOH = ۴۰۰\ mL\ \text{محلول} \times \frac{۱\ L\ \text{محلول}}{۱۰۰۰\ mL\ \text{محلول}} \times \frac{۱/۲۵\ mol\ HCOOH}{۱\ L\ \text{محلول}} \times \frac{۴۶\ g\ HCOOH}{۱\ mol\ HCOOH} = ۲۳\ g$$

توجه داریم که جرم اسید محاسبه شده با این روش، به‌صورت تقریبی است.

مثال

۷- **محلول ۱۵ لیتری از اسید مقابل با $pH = ۴$ در اختیار داریم. اگر ثابت یونش اسیدی این ماده برابر با ۲×۱۰^{-۷} باشد، برای اینکه مقدار pH محلول مورد نظر به اندازه ۰/۳ واحد کاهش پیدا کند، باید چند گرم از این ماده را در محلول حل کنیم؟ (از تغییر حجم محلول صرف‌نظر کنید.**

$(O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱})$



۱) ۲۰۴/۲۵
۲) ۴۰۹/۵
۳) ۴۰/۹۵
۴) ۸۱/۹

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمانبر ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

این سؤال، به سبک یکی از سؤالات کنکور چند سال اخیر تألیف شده است. برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: به‌دست آوردن غلظت یون هیدروژن در محلول اسیدی اولیه

گام دوم: محاسبه میزان تغییر غلظت اسید برای کاهش ۰/۳ واحد pH

گام سوم: به‌دست فرمول شیمیایی اسید مصرف شده در این فرایند

گام چهارم: محاسبه جرم اسید جدید حل شده در محلول ۱۵ لیتری

در قدم اول، با توجه به pH محلول، غلظت مولی یون هیدروژن را در ابتدای این فرایند محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۴} = ۱۰^{-۴}\ mol.L^{-۱}$$

روابط مهم اسید و باز

برای محاسبه غلظت یون هیدروژن در یک محلول اسیدی با ثابت یونش K_a، غلظت M مولار و درجه یونش α، می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$[H_۳O^+] = \sqrt{K_a.M.(۱-\alpha)}$$

اگر مقدار درجه یونش برای یک اسید کوچک‌تر از ۰/۰۵ باشد (اسید مورد نظر خیلی ضعیف باشد) و یا این‌که مقدار $\frac{K_a}{M}$ برای آن اسید کوچک‌تر از ۰/۰۰۲۵ باشد، می‌توانیم مقدار $۱-\alpha$ را با تقریب برابر با عدد ۱ در نظر بگیریم. در این شرایط، مقدار ثابت یونش و غلظت یون هیدروژن را می‌توانیم به کمک روابط زیر به‌دست آورد:

$$K_a = M.\alpha^۲ \qquad [H^+] = \sqrt{K_a.M}$$

با توجه به روابط بالا، برای اسیدهای ضعیفی که $\alpha < ۰/۰۵$ دارند، مقدار توان دوم درجه یونش اسید با مقدار ثابت یونش آن اسید رابطه مستقیم و با غلظت اسید، رابطه عکس دارد. پس داریم:

$$\alpha^۲ \propto K_a \propto \frac{۱}{M}$$

با توجه به غلظت یون هیدروژن، غلظت اسید را در محلول اولیه محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} \Longrightarrow ۱۰^{-۴}\, mol.L^{-۱} = \sqrt{(۲ \times ۱۰^{-۷}) \times M} \Longrightarrow M = ۰/۰۵\, mol.L^{-۱}$$

با افزودن اسید به محلول، مقدار pH به اندازه ۰/۳ واحد کاهش یافته و از ۴ به ۳/۷ رسیده است. بر این اساس، غلظت یون هیدروژن موجود در محلول نهایی را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۳/۷} = ۱۰^{۰/۳} \times ۱۰^{-۴} = ۲ \times ۱۰^{-۴}\, mol.L^{-۱}$$

با توجه به محاسبات بالا، طی این فرایند غلظت یون هیدروژن در محلول مورد نظر ۲ برابر شده است. غلظت اسید را در محلول نهایی حاصل از این فرایند، محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} \Longrightarrow ۲ \times ۱۰^{-۴}\, mol.L^{-۱} = \sqrt{(۲ \times ۱۰^{-۷}) \times M} \Longrightarrow M = ۰/۲\, mol.L^{-۱}$$

بر این اساس، می‌توان گفت طی این فرایند غلظت اسید از ۰/۰۵ مول بر لیتر، به اندازه ۰/۱۵ مول بر لیتر افزایش یافته و به ۰/۲ مول بر لیتر رسیده است. به عبارت دیگر، در هر لیتر از این محلول مقدار ۰/۱۵ مول اسید حل شده است. اسید مورد نظر، در ساختار مولکولی خود دارای ۱۱ اتم کربن، یک حلقه و دو پیوند اشتراکی دوگانه است. فرمول شیمیایی این ماده، به‌صورت $C_{۱۱}H_{۱۸}O_۲$ است. بر این اساس، داریم:

$$?\, g\, C_{۱۱}H_{۱۸}O_۲ = ۱۵\, L \text{ محلول} \times \frac{۰/۱۵\, mol\, C_{۱۱}H_{۱۸}O_۲}{۱\, L \text{ محلول}} \times \frac{۱۸۲\, g\, C_{۱۱}H_{۱۸}O_۲}{۱\, mol\, C_{۱۱}H_{۱۸}O_۲} = ۴۰۹/۵\, g$$

البته، این سؤال یک راه حل خیلی خفن دیگه هم داشت! به روابط زیر در رابطه با اسیدهای ضعیف دقت کنید:

$$[H^+] = M.\alpha \qquad K_a = M.\alpha^۲$$

می‌دانیم که مقدار ثابت یونش یک اسید، در دمای ثابت همواره یک عدد ثابت بوده و با تغییر غلظت اسید، دچار تغییر نمی‌شود. با توجه به دو رابطه بالا، اگر غلظت یک اسید ضعیف در محلول آن ۴ برابر شود، درجه یونش اسید $\frac{۱}{۲}$ برابر شده و بر این اساس، غلظت یون هیدروژن در محلول مورد نظر ۲ برابر می‌شود. با ۲ برابر شدن غلظت یون هیدروژن، pH محلول ۰/۳ واحد کاهش پیدا می‌کند. برای حل این سؤال، کافی بود جرم اولیه اسید حل شده در محلول را محاسبه کنیم. اگر ۳ برابر جرم اسید اولیه موجود در محلول، اسید جدید به آن اضافه کنیم، غلظت اسید ۴ برابر شده و pH محلول ۰/۳ واحد کاهش پیدا می‌کند.

ماز

۸- کدام موارد از عبارت‌های داده شده، درست هستند؟

الف ـ در شرایط یکسان، شمار یون‌های هیدروکسید در محلول هیدروسیانیک اسید از محلول آبی نیتروواسید کمتر است.

ب ـ باران اسیدی حاوی نیتریک اسید و سولفوریک اسید است، در حالی که باران‌های معمولی فاقد این مواد هستند.

ج ـ دی‌نیتروژن پنتاکسید در دمای اتاق حالت گاز داشته و با انحلال هر مول از آن در آب، ۴ مول یون تولید می‌شود.

د ـ یون هیدروکسید، یک یون چنداتمی بوده و خاصیت بازی محلول‌ها با غلظت آن رابطه مستقیم دارد.

۱) «الف» و «ج»　　۲) «الف» و «د»　　۳) «ب» و «ج»　　۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۴　　**(آسان ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۰ ـ ۱۲۰۱)**

عبارت‌های (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) ثابت یونش هر اسید، قدرت آن ماده برای یونش در محلول و تولید یون هیدروژن را نشان می‌دهد. ثابت یونش نیتروواسید، در مقایسه با هیدروسیانیک اسید بزرگ‌تر است؛ در نتیجه در شرایط یکسان از نظر دمای محیط و غلظت اسیدها، غلظت مولی یون هیدروکسید در محلول آبی هیدروسیانیک اسید بیشتر بوده و غلظت مولی یون هیدروژن در این محلول کمتر است.

اسیدهای قوی و ضعیف

به نکات زیر درباره اسیدهای قوی و ضعیف توجه کنید:

☆ نکتهٔ ۱: هیدرویدیک اسید($HI(aq)$)، هیدروبرمیک اسید($HBr(aq)$)، هیدروکلریک اسید($HCl(aq)$) و سولفوریک اسید($H_2SO_4(aq)$)، اسیدهای قوی با ثابت‌های یونش بسیار بزرگ هستند؛ بنابراین معادلهٔ یونش آن‌ها در آب یک‌طرفه است. به عبارت دیگر، این اسیدها درجه یونش برابر با ۱ دارند. معادله یونش این اسیدها به‌صورت زیر است:

$$HBr(aq) \longrightarrow H^+(aq) + Br^-(aq) \qquad HI(aq) \longrightarrow H^+(aq) + I^-(aq)$$
$$H_2SO_4(aq) \longrightarrow H^+(aq) + HSO_4^-(aq) \qquad HCl(aq) \longrightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

توجه داریم که هر دو مرحله یونش سولفوریک اسید در محلول این ماده، طبق شکل کتاب درسی باید کامل در نظر گرفته شود. بر این اساس، هر مول سولفوریک اسید، ۲ مول یون هیدروژن در محلول خود آزاد می‌کند.

☆ نکتهٔ ۲: نیتریک اسید برخلاف نیترواسید، یک اسید قوی با ثابت یونش بزرگ است و معادلهٔ یونش آن در آب یک‌طرفه است. معادله زیر، فرایند یونش این اسید را در آب نشان می‌دهد:

$$HNO_3(aq) \longrightarrow H^+(aq) + NO_3^-(aq)$$

☆ نکتهٔ ۳: هیدروفلوئوریک اسید($HF(aq)$)، نیترواسید($HNO_2(aq)$)، فورمیک اسید($HCOOH(aq)$)، استیک اسید($CH_3COOH(aq)$)، کربنیک اسید($H_2CO_3(aq)$) و هیدروسیانیک اسید($HCN(aq)$)، اسیدهای ضعیف با ثابت یونش کوچک هستند و فرایند یونش آن‌ها در آب یک واکنش تعادلی است. معادله یونش این اسیدها به‌صورت زیر است:

$$HNO_2(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + NO_2^-(aq) \qquad HF(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + F^-(aq)$$
$$CH_3COOH(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + CH_3COO^-(aq) \qquad HCOOH(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + HCOO^-(aq)$$
$$HCN(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + CN^-(aq) \qquad H_2CO_3(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + HCO_3^-(aq)$$

در رابطه با اسیدهای گفته شده، مقایسهٔ زیر را به خاطر بسپارید:

$$\text{قدرت اسیدی } (K_a): HF > HNO_2 > HCOOH > CH_3COOH > H_2CO_3 > HCN$$

☆ نکتهٔ ۴: در شرایط یکسان، هر چه قدرت اسیدی(ثابت یونش) یک اسید بزرگ‌تر باشد، غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول آبی آن اسید بیشتر و در نتیجه غلظت مولی یون هیدروکسید در محلول آن کمتر است. به علاوه در محلول اسید با ثابت یونش بزرگ‌تر، غلظت مولی یون‌ها و در نتیجه رسانایی الکتریکی محلول نیز بیشتر خواهد بود.

ب) بارانهای اسیدی حاوی نیتریک اسید و سولفوریک اسید هستند، در حالی که بارانهای معمولی حاوی کربنیک اسید هستند. هرچند که pH بارانهای اسیدی کمتر از بارانهای معمولی است، اما هر دو نمونه از آب این بارانها pH کوچک‌تر از ۷ دارند.

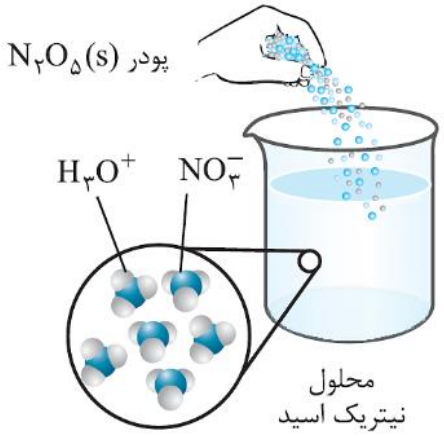
باران اسیدی

در آب باران معمولی، مقداری گاز CO_2 حل شده و کربنیک اسید(H_2CO_3) را به وجود می‌آورد. به خاطر وجود این ماده، آب باران معمولی خاصیت اسیدی پیدا می‌کند، اما میزان اسیدی‌بودن آن به حدی نیست که به جانداران آسیبی برساند. در مناطق صنعتی، مقداری از گازهای SO_3 و اکسیدهای نیتروژن در آب باران حل شده و سولفوریک اسید و نیتریک اسید تولید می‌شوند. به خاطر وجود این مواد، آب باران در مناطق صنعتی خاصیت اسیدی پیدا کرده و pH آن کم‌تر از ۷ است. این باران، به محیط زیست آسیب می‌رساند.

ج) حالت فیزیکی N_2O_5 در دمای اتاق، جامد است و از حل شدن یک مول از آن در آب، ۴ مول یون تولید می‌شود. معادله واکنش انجام شده به هنگام انحلال این ماده به‌صورت زیر است:

$$N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

تصویر زیر نیز نمایی از فرایند انحلال این ماده و تولید نیتریک اسید را نشان می‌دهد:



د) مواد و ترکیب‌هایی که با حل شدن در آب، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید را افزایش می‌دهند، به‌ترتیب اسید و باز آرنیوس هستند. در واقع رفتار اسید و باز آرنیوس را بر مبنای تغییر غلظت یون‌های هیدروژن و هیدروکسید توضیح می‌دهند. در چنین شرایطی، هرچه غلظت یون هیدروکسید در یک محلول بیشتر باشد، خاصیت بازی آن محلول نیز بیشتر خواهد بود.

ماز

۹- مقدار ۱۱/۲ لیتر گاز هیدروژن فلوئورید را در شرایط استاندارد در مقداری آب حل کرده و حجم محلول را به ۵ لیتر می‌رسانیم. اگر از هر ۵۰ مولکول اسیدی، یک مولکول یونش یافته باشد، pH این محلول چقدر می‌شود؟

۱) ۱/۳ ۲) ۲/۳ ۳) ۱/۷ ۴) ۲/۷

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: به‌دست آوردن مقدار مول گاز هیدروژن فلوئورید حل شده

گام دوم: محاسبه غلظت هیدروفلوئوریک اسید در محلول

گام سوم: به‌دست آوردن غلظت یون هیدروژن حاصل از یونش اسید در محلول

گام چهارم: محاسبه pH محلول نهایی

در شرایط استاندارد، حجم هر مول از یک ماده گازی معادل با ۲۲/۴ لیتر خواهد بود. در این رابطه، داریم:

حجم ماده گازی $\xleftarrow[\div\ ۲۲/۴]{\times\ ۲۲/۴}$ تعداد مول ماده گازی

طبیعی است که برای حل سؤالات مربوط به این قسمت، باید ضرایب مختلف و پرتکرار حجم مولی گازها در شرایط استاندارد را حفظ باشیم. در رابطه با این ضرایب عددی داریم:

۲/۸ ۵/۶ ۱۱/۲ ۲۲/۴ ۴۴/۸ ۸۹/۶

(÷۲ ÷۲ ÷۲ ×۲ ×۲)

در قدم اول، باید مقدار مول گاز هیدروژن فلوئورید حل شده در محلول را محاسبه کنیم. در این رابطه، داریم:

$$?\,mol\ HF = ۱۱/۲\ L\ HF \times \frac{۱\ mol\ HF}{۲۲/۴\ L\ HF} = ۰/۵\ mol$$

در محلول مورد نظر، ۰/۵ مول اسید حل شده است. بر این اساس، غلظت اسید و به دنبال آن، غلظت یون هیدروژن تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$[HF] = \frac{\text{مول } HF}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۰/۵\ mol\ HF}{۵\ L\ \text{محلول}} = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = M \times \alpha = ۰/۱ \times ۰/۰۲ = ۰/۰۰۲\ mol.L^{-۱}$$

در آخرین قدم، مقدار pH این محلول اسیدی را محاسبه می‌کنیم:

$$pH = -log[H^+] = -log\ (۰/۰۰۲) = ۲/۷$$

مقیاس pH

برای سنجش میزان اسیدی‌بودن محلول‌ها، باید غلظت یون هیدروژن موجود در آن‌ها را تعیین کنیم. از آن‌جا که غلظت یون H^+ اغلب بسیار کوچک بوده و کارکردن با آن پیچیده است، برای پرهیز از بیان غلظت‌های کم و بسیار کم یون هیدروژن، می‌توان از کمیت pH استفاده کرد. این مقیاس، اعدادی به مراتب ساده‌تر و قابل فهم‌تر ارائه می‌دهد. pH محلول‌های آبی در دمای اتاق، با اعدادی در گستره ۰ تا ۱۴ بیان می‌شود و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$pH = -log[H^+]$$

برای محاسبه pH محلول‌ها، حتماً باید قواعد لگاریتم که به شرح زیر هستند را بلد باشید:

- $log\ a^n = n.log\ a$
- $log\ a.b = log\ a + log\ b$
- $log\ \frac{a}{b} = log\ a - log\ b$

لگاریتم اعداد مهم نیز به شرح زیر است:

- $log\ ۲ = ۰/۳$
- $log\ ۳ = ۰/۴۸\ or\ ۰/۵$
- $log\ ۵ = ۰/۷$
- $log\ ۷ = ۰/۸۵$

لگاریتم اعداد داده شده را حتماً باید حفظ باشید!

۱۰- مقدار a میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار هیدروکلریک اسید و b میلی‌لیتر محلول ۰/۵ مولار هیدرویدیک اسید را با مقدار کافی آب خالص مخلوط می‌کنیم تا ۵ لیتر محلول اسیدی با $pH = ۱/۵$ به‌دست بیاید. مقدار $a + b$ برابر با چند میلی‌لیتر می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۹۰۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۶۰۰

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمانبر ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

این سؤال، به سبک یکی از سؤالات کنکور چند سال اخیر تألیف شده است. برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: به‌دست آوردن مقدار اسید موجود در محلول نهایی

گام دوم: محاسبه مقدار لازم از هر محلول اسیدی برای ایجاد محلول نهایی

گام سوم: به‌دست آوردن بازه $a + b$ و انتخاب گزینه نهایی

در قدم اول، باید مقدار یون هیدروژن موجود در محلول نهایی را با استفاده از اطلاعات داده شده محاسبه کنیم. در این رابطه، داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} \Longrightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱/۵} = ۰/۰۳\ mol.L^{-۱}$$

حجم محلول اسیدی، برابر با ۵ لیتر است. بر این اساس، مقدار مول یون هیدروژن موجود در این محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,H^+ = ۵\,L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۰۳\,mol\,H^+}{۱\,L\ \text{محلول}} = ۰/۱۵\,mol$$

در محلول نهایی، ۰/۱۵ مول یون هیدروژن بر اثر یونش هیدروکلریک اسید و هیدرویدیک اسید تولید شده است. چون این دو اسید قوی هستند، پس می‌توان گفت در محلول نهایی مجموعاً ۰/۱۵ مول اسید وجود داشته است. بر این اساس، در $a + b$ میلی‌لیتر از محلول اسیدی اول و محلول اسیدی دوم، مجموعاً ۰/۱۵ مول اسید وجود داشته است. در حالت اول، فرض می‌کنیم که فقط از محلول هیدروکلریک اسید استفاده کرده‌ایم و بر این اساس، حداکثر مقدار مؤلفه a را در حالتی که $b = ۰$ باشد، محاسبه می‌کنیم:

$$\text{فرض}: \begin{cases} b = ۰ \\ a \rightarrow \text{حداکثر مقدار ممکن} \end{cases} \Longrightarrow ?\ mL\ HCl\ \text{محلول}$$

$$= ۰/۱۵\,mol\,HCl \times \frac{۱\,L\,HCl\ \text{محلول}}{۰/۲\,mol\,HCl} \times \frac{۱۰۰۰\,mL\,HCl\ \text{محلول}}{۱\,L\,HCl\ \text{محلول}} = ۷۵۰\,mL$$

در حالت دوم، فرض می‌کنیم که فقط از محلول هیدرویدیک اسید استفاده کرده‌ایم و بر این اساس، حداکثر مقدار مؤلفه b را در حالتی که $a = ۰$ باشد، محاسبه می‌کنیم:

$$\text{فرض}: \begin{cases} a = ۰ \\ b \rightarrow \text{حداکثر مقدار ممکن} \end{cases} \Longrightarrow ?\ mL\ HI\ \text{محلول} = ۰/۱۵\,mol\,HI \times \frac{۱\,L\,HI\ \text{محلول}}{۰/۵\,mol\,HI} \times \frac{۱۰۰۰\,mL\,HI\ \text{محلول}}{۱\,L\,HI\ \text{محلول}} = ۳۰۰\,mL$$

اگر فقط از محلول هیدروکلریک اسید استفاده کنیم(حالت اول)، مقدار $a + b$ برابر با ۷۵۰ میلی‌لیتر شده و اگر فقط از محلول هیدرویدیک اسید استفاده کنیم(حالت دوم)، مقدار $a + b$ برابر با ۳۰۰ میلی‌لیتر می‌شود. در صورت سؤال، اشاره شده که از مخلوط این دو محلول استفاده شده است، پس مقدار $a + b$ باید عددی بین ۳۰۰ تا ۷۵۰ میلی‌لیتر باشد. از میان گزینه‌های داده شده، تنها عددی که در این بازه قرار می‌گیرد، مقدار ۶۰۰ میلی‌لیتر است. توجه داریم که ما مقدار دقیق $a + b$ را با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال، نمی‌توانیم به‌دست بیاوریم و فقط می‌توانیم بفهمیم که مقدار آن، معادل با عددی بین ۳۰۰ تا ۷۵۰ است.

۱۱- غلظت ppm یون آمونیوم در محلول ۲ مولار آمونیاک در آب با چگالی $۱/۲g.mL^{-۱}$، برابر با ۳۰۰ واحد است. ثابت یونش بازی آمونیاک در شرایط آزمایش چقدر خواهد بود؟ ($H = ۱$: $g.mol^{-۱}$ و $N = ۱۴$)

۱) $۱۰^{-۳}$ ۲) ۲×۱۰^{-۳} ۳) $۱۰^{-۴}$ ۴) ۲×۱۰^{-۴}

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

معادله یونش آمونیاک و عبارت ثابت تعادل این واکنش به‌صورت زیر است:

$$NH_3(aq)+H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq)+OH^-(aq)$$

$$K_b=\frac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_3]}=\frac{\text{غلظت کاتیون حاصل از یونش} \times OH^- \text{غلظت}}{\text{غلظت باز یونیده نشده}}$$

برای محاسبه ثابت یونش آمونیاک در محلول مورد نظر، ابتدا باید غلظت مولی یون آمونیوم(NH_4^+) را در این محلول محاسبه کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\text{غلظت مولی یون آمونیوم}=[NH_4^+]=\frac{ppm \times \text{چگالی}}{\text{جرم مولی} \times 1000}=\frac{300 \times 1/2}{1000 \times 18}=0/02\ mol.L^{-1}$$

در محلول آبی آمونیاک، غلظت یون هیدروکسید با غلظت یون آمونیوم برابر است. بر این اساس، داریم:

$$[NH_4^+]=[OH^-] \Longrightarrow [OH^-]=0/02\ mol.L^{-1}$$

آمونیاک، یک باز ضعیف است پس در رابطه با این ماده، داریم:

$$\alpha=\frac{[OH^-]}{\text{غلظت اولیه آمونیاک}}=\frac{0/02}{2}=0/01$$

در قدم آخر، ثابت یونش بازی آمونیاک را در محلول مورد نظر محاسبه می‌کنیم:

$$K_b=\alpha^2 \times M=(0/01)^2 \times 2=2 \times 10^{-4}\ mol.L^{-1}$$

با توجه به محاسبات بالا، ثابت یونش بازی آمونیاک برابر با 2×10^{-4} است.

کاربرد بازها

در محلول‌های بازی، غلظت یون هیدروکسید بیشتر از یون هیدرونیوم است. این مواد، به‌طور کلی مزه تلخ دارند. بازها کاربردهای گسترده‌ای در زندگی روزانه دارند که از جمله آن‌ها می‌توان به محلول شیشه پاک‌کن(محلول آبی آمونیاک در آب) و لوله بازکن(محلول آبی سدیم هیدروکسید در آب که نوعی پاک‌کننده خورنده قوی به شمار می‌رود) اشاره کرد. علاوه بر این، از بازها برای تولید انواع داروهای خنثی‌کننده اسید معده نیز استفاده می‌شود.

باز

۱۲- کدام موارد از عبارت‌های داده شده، درست هستند؟

الف ـ با انحلال هر مول باریم اکسید در ۵۰۰ میلی‌لیتر آب، محلولی با غلظت ۱ مول بر لیتر از یون هیدروکسید ایجاد می‌شود.

ب ـ اکسید عنصری که هر اتم از آن دارای ۱۷ الکترون با $l=1$ است، با انحلال در آب محلولی با $pH<7$ ایجاد می‌کند.

ج ـ آب خالص رسانایی ناچیزی دارد که به‌خاطر وجود مقدار بسیار کمی از یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید است.

د ـ در محلولی از اسید HA با درصد یونش ۲۰٪، غلظت مولی ذرات HA باقی‌مانده، پنج برابر غلظت مولی یون A^- است.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

عبارت‌های (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف معادله واکنش باریم اکسید(نوعی اکسید فلزی) با آب به‌صورت زیر است:

$$BaO(s)+H_2O(l) \rightarrow Ba(OH)_2(aq) \rightarrow Ba^{2+}(aq)+2OH^-(aq)$$

با انحلال هر مول باریم اکسید در آب، ۲ مول یون هیدروکسید در محلول تولید می‌شود؛ پس می‌توان گفت با انحلال هر مول باریم‌اکسید در ۵۰۰ میلی‌لیتر آب، محلولی با غلظت ۴ مول بر لیتر از یون هیدروکسید ایجاد می‌شود. در این رابطه، داریم:

$$[OH^-]=\frac{2\ mol\ OH^-}{\text{محلول } 0/5\ L}=4\ mol.L^{-1}$$

ب) برم، عنصری است که آرایش الکترونی آن به $4p^5$ ختم می‌شود و در آرایش الکترونی خود دارای ۱۷ الکترون با $l = 1$ است. این عنصر یک نافلز بوده و اکسیدهای حاصل از آن، خاصیت اسیدی دارند. با انحلال اکسیدهای اسیدی در آب، محلولی ایجاد می‌شود که pH آن کوچک‌تر از ۷ است.

ج) براساس آزمایش‌های انجام‌شده، نمونه‌ای از آب خالص که فاقد هر گونه حل‌شونده‌ای است، رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد که وجود آن را به حضور مقدار بسیار اندکی از یون‌های هیدروکسید و هیدروژن در آب خالص نسبت می‌دهند. یون‌های موردنظر، براساس واکنش تعادلی زیر در آب تولید می‌شوند:

$$H_2O(l) \rightleftharpoons H^+(aq) + OH^-(aq)$$

ثابت تعادل این واکنش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = K_W = [OH^-] \times [H^+]$$

آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد که مقدار K_W در دمای اتاق، برابر با $10^{-14} mol^2.L^{-2}$ است که این مقدار، همانند ثابت تعادل سایر واکنش‌ها، فقط و فقط تابع دما است.

د) اسیدها و بازهای گوناگون، به هنگام انحلال در آب، به مقدار متفاوتی یونش پیدا می‌کنند. برای مقایسه کمّی میزان یونیده‌شدن انواع اسیدها و بازها، می‌توان از درجه یونش استفاده کرد. درجه یونش یک ماده، عبارت است از نسبت تعداد مولکول‌های یونیده‌شده از یک ماده به تعداد کل مولکول‌های حل‌شده از آن ماده. توجه داریم که اگر درجه یونش یک ماده را در عدد ۱۰۰ ضرب کنیم، درصد یونش آن ماده به‌دست می‌آید. بر این اساس، داریم:

$$\text{درجه یونش}(\alpha) = \frac{\text{مقدار ذرات یونیده شده}}{\text{مقدار ذرات حل شده در محلول}} \qquad \text{درصد یونش} = \text{درجه یونش} \times 100$$

با توجه به روابط بالا، می‌توان گفت اگر در محلولی از اسید HA، درصد یونش برابر با ۲۰٪ باشد، به ازای هر ۱۰۰ مولکول اسید حل شده در محلول، ۲۰ یون A^- ایجاد شده و ۸۰ ذره HA نیز به‌صورت یونیده نشده باقی می‌ماند؛ بنابراین در چنین محلولی، غلظت مولی ذرات HA(ذرات اسید یونیده نشده)، چهار برابر غلظت مولی یون A^- است.

۱۳- اگر به حجم معینی از محلول ۱/۸ مولار باز BOH با درصد یونش ۲/۵٪، سه برابر حجم آن آب مقطر اضافه شود، pH این محلول از ..... به ..... می‌رسد. (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.)

۱) ۱۲/۱ – ۱۱/۸ ۲) ۱۲/۱ – ۱۱/۵ ۳) ۱۲/۷ – ۱۲/۴ ۴) ۱۲/۷ – ۱۲/۱

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: به‌دست آوردن غلظت یون هیدروکسید در محلول اولیه

گام دوم: محاسبه pH محلول اولیه

گام سوم: به‌دست مقدار تغییر pH محلول

یک باز ضعیف در اختیار داریم که به‌صورت جزئی در محلول خود یونش یافته است. ابتدا pH محلول باز اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$[OH^-]_1 = M \times \alpha \times n = 1/8 \times \frac{2/5}{100} \times 1 = 0/045\ mol.L^{-1} \Longrightarrow [H^+]_1 = \frac{10^{-14}}{0/045}$$

$$pH_1 = -log\left(\frac{10^{-14}}{0/045}\right) = -log 10^{-14} + log\,(0/045) = 14 + log\,(5 \times 3^2 \times 10^{-3})$$

$$= 14 + (log\,5 + 2\,log\,3 - 3) = 11 + (0/7 + 2 \times 0/5) = 12/7$$

اگر به محلول اولیه، ۳ برابر حجم آن آب مقطر اضافه کنیم، حجم آن ۴ برابر شده و غلظت باز در آن $\frac{۱}{۴}$ برابر حالت اولیه می‌شود. می‌دانیم که ثابت یونش بازی یک ماده در دمای ثابت، همواره مقدار ثابتی دارد. بر این اساس، داریم:

$$K_b = \alpha_۱^۲ \times M \xrightarrow{\text{مقدار ثابت یونش تغییر نکرده اما غلظت باز کمتر شده است}} K_b = \alpha_۲^۲ \times \frac{M}{۴} \Longrightarrow \alpha_۲ = ۲ \times \alpha_۱$$

با توجه به محاسبات بالا، طی این فرایند غلظت باز $\frac{۱}{۴}$ برابر شده و مقدار درجه یونش آن ۲ برابر شده است، پس غلظت یون هیدروکسید در محلول این باز $\frac{۱}{۲}$ برابر حالت اولیه می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$[OH^-]_۲ = \frac{[OH^-]_۱}{۲} \Longrightarrow [H^+]_۲ = ۲ \times [H^+]_۱ \Longrightarrow -log[H^+]_۲ = -log[H^+]_۱ - log\,۲$$
$$\Longrightarrow pH_۲ = pH_۱ - log^۲ = pH_۱ - ۰/۳ = ۱۲/۷ - ۰/۳ = ۱۲/۴$$

تغییر غلظت محلول‌های اسیدی و بازی

در رابطه با تغییر غلظت محلول‌های اسیدی و بازی، به نکات زیر توجه کنید:

- اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم(حجم محلول را با اضافه‌کردن آب خالص به آن، n برابر کنیم)، pH این محلول به اندازه $log\,n$ واحد به pH ناحیه خنثی $(pH = ۷)$ نزدیک‌تر می‌شود.
- اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه غلیظ کنیم(با افزایش مقدار اسید و باز و یا کاهش مقدار آب موجود در محلول)، pH این محلول به اندازه $log\,n$ واحد از pH ناحیه خنثی $(pH = ۷)$ دورتر می‌شود.
- اگر محلول یک اسید ضعیف(مثل هیدروفلوئوریک اسید و یا هیدروسیانیک اسید) و یا یک باز ضعیف(مثل آمونیاک) را n مرتبه رقیق کنیم، pH این محلول به اندازه کمتر از $log\,n$ واحد به pH ناحیه خنثی $(pH = ۷)$ نزدیک‌تر می‌شود.
- اگر محلول یک اسید ضعیف و یا یک باز ضعیف را به اندازه n مرتبه غلیظ کنیم، pH این محلول به اندازه کمتر از $log\,n$ واحد از مقدار pH ناحیه خنثی $(pH = ۷)$ دورتر می‌شود.

ماز

۱۴- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) pH محلولی که غلظت یون هیدروژن در آن ۲۵×۱۰^{-۶} برابر یون هیدروکسید است، برابر ۳/۳ می‌شود.
۲) با قرار دادن محلول HF در مسیر مدار الکتریکی، یونی با شعاع بزرگ‌تر، به سمت قطب مثبت حرکت می‌کند.
۳) یک قطعه کاغذ pH در محلولی که با انحلال گاز کربن دی‌اکسید در آب ایجاد می‌شود، به رنگ سرخ در می‌آید.
۴) محلولی از سولفوریک اسید با $pH = ۰$، برخلاف یک نمونه از آب خالص، فاقد یون هیدروکسید در ساختار خود است.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

در محلولی از سولفوریک اسید با $pH = ۰$، غلظت یون هیدروژن برابر با ۱ مول بر لیتر بوده و بر این اساس، غلظت مولی یون هیدروکسید برابر با $۱۰^{-۱۴}$ مول بر لیتر می‌شود. هرچند که غلظت یون هیدروکسید در این محلول خیلی کم است، اما باز هم یون‌های هیدروژن و هیدروکسید در این محلول در کنار هم قرار گرفته‌اند. در یک نمونه از آب خالص نیز یون‌های هیدروکسید و هیدروژن با غلظت برابر بوده و در کنار هم قرار دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

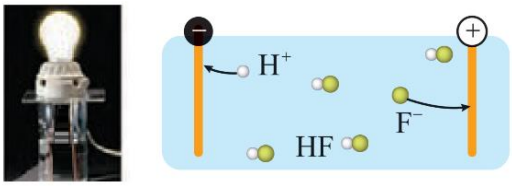
۱) در دمای $۲۵^\circ C$، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های هیدروژن و هیدروکسید در محلول‌های آبی برابر با $۱۰^{-۱۴}$ می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \xrightarrow{[H^+]=۲۵\times۱۰^{-۶}\times[OH^-]} ۲۵ \times ۱۰^{-۶} \times [OH^-] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Longrightarrow$$
$$[OH^-] = ۰/۲ \times ۱۰^{-۱۰}\ mol.L^{-۱} \Longrightarrow [H^+] = ۵ \times ۱۰^{-۴}\ mol.L^{-۱}$$

در قدم بعد، با توجه به غلظت یون هیدروژن، pH این محلول را محاسبه می‌کنیم.

$$pH = -log[H^+] = -log(۵ \times ۱۰^{-۴}) = ۴ - ۰/۷ = ۳/۳$$

۲) همانطور که می‌دانیم، یون‌های موجود در یک محلول به سمت قطب با بار مخالف حرکت می‌کنند. از طرفی شعاع یون فلوئورید (F^-) از شعاع یون هیدروژن (H^+) بزرگ‌تر است، بنابراین اگر محلول آبی هیدروفلوئوریک اسید در مسیر یک مدار الکتریکی قرار بگیرد، یون با اندازه بزرگ‌تر(یون فلوئورید) به سمت قطب با بار مخالف(قطب مثبت) حرکت می‌کند. تصویر زیر، نمایی از این محلول که در مسیر یک مدار الکتریکی قرار گرفته است را نشان می‌دهد:



۳) کربن دی‌اکسید، یک اکسید نافلزی با خاصیت اسیدی است و محلولی که طی انحلال آن در آب ایجاد می‌شود، خاصیت اسیدی دارد. محلول‌های اسیدی، رنگ یک قطعه کاغذ pH را قرمز می‌کنند.

شکل‌نامه

گل‌های ادریسی در خاک‌های بازی به رنگ قرمز و در خاک‌های اسیدی به رنگ آبی می‌رویند. در رابطه با این گل‌ها، به نمودار زیر توجه کنید:



در رابطه با گل‌های ادریسی، داریم:


محیط اسیدی


محیط بازی

ماز

۱۵- مقدار pH محلول ۰/۵ مولار اسید HA با ثابت یونش ۲×۱۰^{-۵} مول بر لیتر، ۲ برابر مقدار pH یک نمونه از محلول هیدرویدیک اسید است. در این شرایط، غلظت مولی محلول هیدرویدیک اسید برابر با چند $mol.L^{-۱}$ است؟

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۳ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۷

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

اسید HA بر اساس معادله زیر در آب یونش پیدا می‌کند.

$$HA \rightleftharpoons A^- + H^+$$

برای محاسبه غلظت یون هیدروژن در محلول اسیدهای ضعیف، از رابطه $[H^+] = \sqrt{K_a \times M}$ استفاده می‌کنیم. توجه داریم که در این رابطه، M معادل با غلظت مولی اسید مورد نظر است؛ پس داریم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} = \sqrt{۰/۲ \times ۱۰^{-۵} \times ۰/۵} = ۱۰^{-۳}$$

با توجه به غلظت یون هیدروژن در محلول اسید HA، مقدار pH این محلول را محاسبه می‌کنیم.

$$pH = -log[H^+] = -log(۱۰^{-۳}) = ۳$$

با توجه به مقدار pH محلول اسید HA، پی می‌بریم که مقدار pH محلول هیدرویدیک اسید برابر با ۱/۵ است؛ پس داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} \rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱/۵} = ۱۰^{۰/۵} \times ۱۰^{-۲} = ۳ \times ۱۰^{-۲} \quad mol.L^{-۱}$$

چون هیدرویدیک اسید، یک اسید قوی است، پس غلظت اسید حل شده در محلول آن با غلظت یون هیدروژن برابر است؛ پس می‌توان گفت غلظت مولی محلول هیدرویدیک اسید نیز برابر با ۰/۰۳ مول بر لیتر است.

آزمون ماز

۲۹ آبان‌ماه

شیمی

۱- در محلولی از هیدروبرمیک اسید، درصد جرمی یون برمید ($d = ۱/۲۵\ g.mL^{-۱}$) برابر با ۰/۶۴٪ است. مقدار pH این محلول چقدر بوده و ۲ لیتر از این محلول، با چند گرم پودر لیتیم اکسید واکنش می‌دهد؟($Br = ۸۰ , O = ۱۶ , Li = ۷ : g.mol^{-۱}$)

$$Li_۲O(s) + ۲HBr(aq) \rightarrow ۲LiBr(aq) + H_۲O(l)$$

۱) ۱/۳ - ۶ ۲) ۱/۳ - ۳ ۳) ۱ - ۶ ۴) ۱ - ۳

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۳۱ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: محاسبه غلظت مولی یون برمید در محلول اسیدی

گام دوم: محاسبه مقدار pH محلول اسیدی

گام سوم: به‌دست آوردن جرم لیتیم اکسید مصرف شده در واکنش خنثی‌شدن

هیدرویدیک اسید($HI(aq)$)، هیدروبرمیک اسید($HBr(aq)$)، هیدروکلریک اسید($HCl(aq)$) و سولفوریک اسید($H_۲SO_۴$) اسیدهای قوی با ثابت یونش بسیار بزرگ هستند؛ بنابراین معادلهٔ یونش آن‌ها در آب یک‌طرفه است. این مواد بر اساس معادلات زیر در آب یونش پیدا می‌کنند:

$$HBr(aq) \longrightarrow H^+(aq) + Br^-(aq) \qquad HI(aq) \longrightarrow H^+(aq) + I^-(aq)$$
$$H_۲SO_۴(aq) \longrightarrow H^+(aq) + HSO_۴^-(aq) \qquad HCl(aq) \longrightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

چون هیدروبرمیک اسید، یک اسید قوی است، به‌طور کامل در محلول خود یونش یافته و بر اثر یونش هر ذره از آن، یک یون برمید و یک یون هیدروژن وارد محلول می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت غلظت مولی یون هیدروژن و یون برمید در محلول این ماده با هم برابر است.

با توجه به درصد جرمی یون برمید در محلول، غلظت مولی این یون را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} \times ۱۰}{\text{جرم مولی}} = \frac{۱۰ \times a \times d}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow [Br^-] = \frac{۱۰ \times ۰/۶۴ \times ۱/۲۵}{۸۰} = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$$

بر این اساس، داریم:

$$[Br^-] = [H^+] = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$$

با توجه به غلظت یون H^+ در محلول نهایی، مقدار pH محلول برابر خواهد بود با:

$$pH = -log[H^+] = -log(۱۰^{-۱}) = ۱$$

اکسیدهای اسیدی و بازی

اکسیدهای حاصل از برخی عناصر، با مولکول‌های آب وارد واکنش شده و pH آب را تغییر می‌دهند. این مواد، از جمله اسیدها و بازهای آرنیوس هستند. به‌طور کلی، اکسیدهای فلزی (مثل سدیم اکسید) را اکسیدهای بازی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروکسید شده و pH محلول را افزایش می‌دهند. باریم اکسید، لیتیم اکسید، سدیم اکسید و کلسیم اکسید (آهک)، در دسته اکسیدهای بازی قرار دارند و بر اساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

$$BaO(s) + H_۲O(l) \rightarrow Ba(OH)_۲(aq) \rightarrow Ba^{۲+}(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$Na_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲NaOH(aq) \rightarrow ۲Na^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$CaO(s) + H_۲O(l) \rightarrow Ca(OH)_۲(aq) \rightarrow Ca^{۲+}(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$Li_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲LiOH(aq) \rightarrow ۲Li^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$

اکسیدهای حاصل از فلزهای واسطه مثل اکسیدهای آهن، اکسیدهای مس و ... و آلومینیم اکسید، اصلاً با آب واکنش نداده و خاصیت بازی ندارند. در نقطه مقابل، اکسیدهای نافلزی (مثل گاز SO_3) را اکسیدهای اسیدی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروژن شده و pH محلول را کاهش می‌دهند. دی‌نیتروژن پنتاکسید، کربن دی‌اکسید، گوگرد دی‌اکسید و گوگرد تری‌اکسید، در دسته اکسیدهای اسیدی قرار دارند و بر اساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

$$N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2HNO_3(aq) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$
$$CO_2(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2CO_3(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCO_3^-(aq)$$
$$SO_3(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2SO_4(aq) \rightarrow 2H^+(aq) + SO_4^{2-}(aq)$$
$$SO_2(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2SO_3(aq) \rightleftharpoons 2H^+(aq) + SO_3^{2-}(aq)$$

غلظت هیدروبرمیک اسید در محلول، برابر با ۰/۱ مولار بوده و این محلول طبق معادله $Li_2O(s) + 2HBr(aq) \rightarrow 2LiBr(aq) + H_2O(l)$ با لیتیم اکسید واکنش می‌دهد. با توجه به معادله واکنش مورد نظر، جرم لیتیم اکسید مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,Li_2O = 2\,L\ \text{محلول} \times \frac{0/1\,mol\,HBr}{1\,L\ \text{محلول}} \times \frac{1\,mol\,Li_2O}{2\,mol\,HBr} \times \frac{30\,g\,Li_2O}{1\,mol\,Li_2O} = 3\,g$$

۲- در رابطه با واکنش هیدروکلریک اسید با محلول جوش شیرین و فراورده گازی حاصل از آن، کدام مطلب درست است؟

۱) اگر از محلول نیتروواسید با غلظت برابر استفاده کنیم، سرعت تولید گاز مورد نظر افزایش می‌یابد.

۲) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار هر مولکول از این گاز، نصف شمار پیوندها در اوره است.

۳) با انحلال این گاز در آب خالص، محلول مورد نظر خاصیت بازی ملایمی پیدا خواهد کرد.

۴) اتم‌های سازنده فراورده گازی آن، همانند مولکول H_2O، روی یک خط راست قرار نگرفته‌اند.

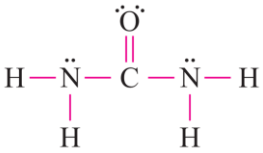
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحه ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

معادله واکنش جوش شیرین با محلول هیدروکلریک اسید(جوهر نمک) به‌صورت زیر است:

$$HCl(aq) + NaHCO_3(aq) \rightarrow NaCl(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

فراورده گازی تولید شده در این واکنش، گاز کربن دی‌اکسید است. ساختار این ماده به‌صورت زیر است:

ساختار مولکول اوره نیز به‌صورت زیر است:



در ساختار گاز کربن دی‌اکسید، ۴ پیوند و در ساختار اوره نیز ۸ پیوند اشتراکی وجود دارد.

جوش شیرین

از آن‌جا که اضافه‌کردن محلول سدیم هیدروژن کربنات به یک محلول دیگر، سبب کاهش غلظت یون هیدروژن در آن محلول می‌شود، می‌توان گفت که محلول سدیم هیدروژن کربنات یک محلول بازی با pH بزرگ‌تر از ۷ است. برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی چربی‌ها، به شوینده‌ها جوش شیرین (یا همان سدیم هیدروژن کربنات) می‌افزایند. اضافه‌کردن این ماده به شوینده‌ها، سبب افزایش خاصیت بازی آن‌ها می‌شود و قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها را افزایش می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) هیدروکلریک اسید یک اسید قوی است؛ درحالی‌که نیتروواسید در دسته اسیدهای ضعیف قرار می‌گیرد. چون ثابت یونش نیتروواسید(HNO_2) کمتر از هیدروکلریک اسید است، در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت محلول‌ها، غلظت یون هیدروژن در محلول نیتروواسید کمتر بوده و بر این اساس، محلول مورد نظر با سرعت کمتری با محلول جوش شیرین واکنش می‌دهد.

۳) در واکنش مورد نظر، گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود که یک اکسید نافلزی با خاصیت اسیدی است. با انحلال این گاز در آب، محلول مورد نظر خاصیت اسیدی ملایمی پیدا می‌کند.

۴) چون اتم مرکزی در مولکول کربن دی‌اکسید فاقد جفت الکترون ناپیوندی است، پس اتم‌های سازنده آن روی یک خط راست قرار گرفته‌اند؛ به عبارت دیگر، مولکول مورد نظر ساختار خطی داشته و خمیده نیست. تصویر زیر، نمایی از ساختار این ماده را نشان می‌دهد:



ماز

۳- مقدار ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول سود با غلظت مشخص، ۸۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱۲ مولار هیدروکلریک اسید و ۸ لیتر آب خالص را در یک ظرف ریخته و با هم مخلوط می‌کنیم. اگر pH مخلوط حاصل از این فرایند برابر با ۲ شود، pH محلول بازی مصرف شده در این فرایند چقدر بوده است؟

۱) ۱۱/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۲/۳ ۴) ۱۱/۷

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: محاسبه غلظت مولی یون هیدروژن در محلول نهایی

گام دوم: محاسبه مقدار باز موجود در محلول سدیم هیدروکسید

گام سوم: به‌دست آوردن pH محلول سدیم هیدروکسید مصرف شده

طبق فرض سؤال، مقداری محلول بازی(محلول سود) با مقداری محلول اسیدی(محلول HCl) مخلوط شده و پس از افزودن مقداری آب به این مخلوط، یک محلول اسیدی با $pH = ۲$ به‌دست آمده است. چون محلول نهایی خاصیت اسیدی دارد، پس می‌توان گفت مقداری از اسید موجود در محلول هیدروکلریک اسید، توسط محلول سود خنثی شده و الباقی اسید، در محلول باقیمانده است. در قدم اول، غلظت اسید در محلول نهایی را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲} = ۰/۰۱\ mol.L^{-۱}$$

طی این فرایند، ۸ لیتر آب خالص به همراه ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول سود و ۸۰۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید مخلوط شده‌اند، پس حجم محلول نهایی برابر با ۹ لیتر است. مقدار مول یون هیدروژن باقیمانده در این محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\ H^+ = ۹\ L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۰۱\ moL\ H^+}{۱\ L\ \text{محلول}} = ۰/۰۹\ mol$$

در قدم بعد، مقدار یون هیدروژن موجود در محلول ۸۰۰ میلی‌لیتری هیدروکلریک اسید را باید محاسبه کنیم. توجه داریم که هیدروکلریک اسید یک اسید قوی است، پس غلظت یون هیدروژن در محلول ۰/۱۲ مولار آن، برابر با ۰/۱۲ مول بر لیتر می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$?\,mol\ H^+ = ۸۰۰\ mL\ \text{محلول} \times \frac{۱\ L\ \text{محلول}}{۱۰۰۰\ mL\ \text{محلول}} \times \frac{۰/۱۲\ moL\ H^+}{۱\ L\ \text{محلول}} = ۰/۰۹۶\ mol$$

واکنش خنثی‌شدن

یکی از رفتارهای جالب و پرکاربرد اسیدها و بازها، واکنش‌هایی است که بین این دو دسته از مواد انجام می‌شود. به این گروه از واکنش‌ها، به اصطلاح واکنش‌های خنثی‌شدن یا همان تیتراسیون گفته می‌شود. طی واکنش‌های خنثی‌شدن، یون‌های هیدروکسید حاصل از بازها با یون‌های هیدرونیوم حاصل از اسیدها براساس معادله $OH^-(aq) + H_۳O^+(aq) \rightarrow ۲H_۲O(l)$ وارد واکنش شده و مولکول‌های آب را تولید می‌کنند.

در محلول اسیدی اولیه، ۰/۰۹۶ مول یون هیدروژن وجود داشته و از این مقدار، ۰/۰۹ مول در محلول نهایی باقیمانده است. بر این اساس، می‌توان گفت ۰/۰۰۶ مول از یون هیدروژن موجود در محلول اولیه، توسط یون هیدروکسید موجود در محلول سود خنثی شده است. در این رابطه، داریم:

$$\text{یون هیدروژن باقیمانده} = \text{یون هیدروژن در محلول اولیه} - \text{یون هیدروژن خنثی شده} \Rightarrow ۰/۰۹ = ۰/۰۹۶ - x \Rightarrow x = ۰/۰۰۶\ mol$$

در محلول ۲۰۰ میلی‌لیتر سود، مقدار ۰/۰۰۶ مول یون هیدروکسید وجود داشته است. بر این اساس، داریم:

$$[OH^-] = \frac{\text{مول } OH^-}{\text{حجم محلول}} = \frac{۰/۰۰۶\ mol\ OH^-}{۰/۲\ L} = ۰/۰۳\ mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[OH^-]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۰/۰۳} \simeq ۳ \times ۱۰^{-۱۳}\ mol.L^{-۱}$$
$$pH = -log(۳ \times ۱۰^{-۱۳}) = ۱۳ - \underbrace{log\ ۳}_{۰/۵} = ۱۲/۵$$

اگر می‌خواستیم pH محلول بازی را با استفاده از مفهوم pOH به‌دست بیاوریم، مقدار pOH این محلول برابر با ۱/۵ می‌شد، پس مقدار pH محلول در این حالت هم ۱۲/۵ به‌دست می‌آمد.

ماز

۴- چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ یکی از روش‌های تعیین غلظت یون هیدرونیوم در محلول‌ها، سنجش رسانایی الکتریکی این محلول‌ها است.

ب ـ در آب گوجه‌فرنگی، همانند شیر ترش‌شده، غلظت مولی یون هیدرونیوم بیشتر از یون هیدروکسید است.

ج ـ برای خنثی کردن مقداری از محتویات روده، می‌توان به مواد موجود در روده محلولی از سرکه اضافه کرد.

د ـ شیر منیزی، نوعی دارو است که به شکل یک کلوئید عرضه شده و قبل از مصرف باید تکان داده شود.

هـ ـ با انحلال آمونیاک در محلول سود، رسانایی الکتریکی محلول، برخلاف pH آن کاهش خواهد یافت.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ **(سخت ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحه ۳۴ ـ ۱۲۰۱)**

عبارت‌های (الف)، (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف یکی از روش‌هایی که برای تعیین غلظت یون هیدرونیوم می‌توان به کار برد، سنجش رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی است. با افزایش غلظت این یون در محلول‌های اسیدی، رسانایی الکتریکی محلول مورد نظر افزایش پیدا می‌کند.

غلظت یون هیدروژن

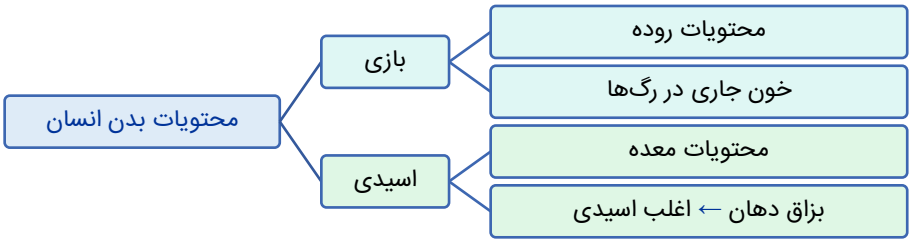
خوراکی‌ها، شوینده‌ها، داروها و مواد آرایشی شامل مقادیر متفاوتی از یون‌ها به ویژه یون هیدرونیوم هستند. این یون، به مقدار فراوان در انواع میوه‌ها از جمله مرکبات نیز یافت می‌شود. غلظت این یون بر روی ماندگاری این مواد و در نتیجه سلامتی تأثیر شایانی دارد. بر این اساس، می‌توان گفت در فرایند تولید مواد گوناگون اغلب تعیین و کنترل غلظت یون هیدرونیوم نقش مهمی دارد.

ب چون آب گوجه‌فرنگی و یک نمونه از شیر ترش‌شده، خاصیت اسیدی داشته و pH آن‌ها کمتر از ۷ است، پس می‌توان گفت در مقداری از آب گوجه‌فرنگی، همانند شیر ترش‌شده، غلظت مولی یون هیدرونیوم بیشتر از یون هیدروکسید است. علاوه بر شیر ترش‌شده و آب گوجه‌فرنگی، آب گازدار و آب مرکبات نیز از جمله سایر محلول‌های اسیدی معرفی شده در کتاب درسی هستند.

شیر ترش‌شده

شیر ترش‌شده، به واسطه حضور لاکتیک اسید، خصلت اسیدی و مزه ترش دارد. همان‌طور که می‌دانیم، با استفاده از این اسید می‌توان یک پلیمر سبز به نام پلی‌لاکتیک اسید تهیه کرد که از دسته پلیمرهای سبز است. پلیمرهای سبز از جمله پلی‌لاکتیک اسید را از فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر تهیه می‌کنند. به این منظور نخست نشاستهٔ موجود در این مواد را به لاکتیک اسید تبدیل کرده سپس از واکنش پلیمری شدن آن در شرایط مناسب، پلی‌لاکتیک اسید تولید می‌کنند. از پلی‌لاکتیک اسید انواع ظرف‌های پلاستیکی یک‌بار مصرف مانند وسایل آشپزخانه، سفره، سطل زباله، کیسهٔ پلاستیکی و ... تولید شده و کاربرد آن‌ها رو به گسترش است. این پلاستیک‌ها امکان تبدیل شدن به کود را دارند به همین دلیل ردپای کوچک‌تری در محیط زیست برجای می‌گذارند.

ج) عملکرد بخش‌های مختلف بدن انسان به میزان مواد بازی و اسیدی موجود در قسمت‌های مختلف آن بستگی دارد. چون محتویات روده انسان خاصیت بازی داشته و مقدار pH آن‌ها تقریباً برابر با ۸/۵ است، برای خنثی کردن مقداری از این مواد می‌توان به آن‌ها محلولی از یک ماده اسیدی مثل محلول سرکه (محلول رقیقی از استیک اسید در آب) را اضافه کرد. نمودار زیر، وضعیت اسیدی یا بازی بودن محتویات بدن انسان را نشان می‌دهد:



د) برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده افرادی که به بیماری‌های معده‌ای دچار هستند، از داروهایی به نام ضد اسید استفاده می‌کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی‌کردن اسید معده و افزایش pH محتویات معده می‌شوند. مواد مؤثر موجود در ضد اسیدهای مختلف، شامل منیزیم هیدروکسید، آلومینیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات (جوش‌شیرین) می‌شود. برای مثال، شیر منیزی یکی از رایج‌ترین ضد اسیدهای مورد استفاده به شمار می‌رود که ماده مؤثر موجود در آن، منیزیم هیدروکسید است. از آن‌جا که ماده موجود در این دارو انحلال‌پذیری بسیار کمی در آب دارد، شیر منیزی را می‌توان یک مخلوط ناهمگن و متعلق به دسته سوسپانسیون‌ها به حساب آورد. در این مخلوط، قطعات کوچکی از منیزیم هیدروکسید در یک محیط آبی قرار گرفته‌اند. جدول زیر، ویژگی‌های سوسپانسیون‌ها، کلوئیدها و محلول‌های همگن را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد:

ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلوئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
ظاهر	ناهمگن	همگن	همگن
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذرات ریز ماده و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها

هـ) آمونیاک یک باز ضعیف است و با ورود گاز آمونیاک به محلول باز قوی سدیم هیدروکسید، مقدار یون هیدروکسید افزایش یافته و در نتیجه مقدار pH محلول و همچنین رسانایی الکتریکی آن، افزایش پیدا خواهد کرد.

تست

۵- اگر pH محلولی از اسید HA با درصد یونش ۷٪، به اندازه ۲/۵ واحد کوچک‌تر از pH محلولی از اسید HB با درصد یونش ۱/۴٪ باشد، نسبت غلظت مولی اسید HA به غلظت مولی اسید HB و ثابت یونش اسید HB در محلولی از آن با غلظت ۱۰/۶ گرم بر لیتر، به‌ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟ (جرم مولی اسید HB برابر $53g$ است.)

۱) $3/92 \times 10^{-5}$ ـ ۵۰

۲) $3/92 \times 10^{-5}$ ـ ۶۰

۳) $2/88 \times 10^{-4}$ ـ ۵۰

۴) $2/88 \times 10^{-4}$ ـ ۶۰

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۲۶ ـ ۱۲۰۱)

طبق فرض سؤال، مقدار pH این دو محلول به اندازه ۲/۵ واحد فرق می‌کند. مقدار pH محلول اسید HA را برابر pH_1 و مقدار pH محلول اسید HB را برابر $(pH_1 + 2/5)$ در نظر می‌گیریم. غلظت یون هیدروژن در هر محلول اسیدی برابر است با:

$$HA: [H_3O^+] = 10^{-pH_1}$$
$$HB: [H_3O^+] = 10^{-(pH_1+2/5)}$$

هر دو اسید، از جمله اسیدهای ضعیف بوده و در رابطه با آن‌ها، داریم:

$$\alpha = \frac{[H_3O^+]}{\text{غلظت مولی اسید}}$$

با توجه به رابطهٔ درجهٔ یونش برای دو اسید HA و HB، می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_{HA} = \dfrac{[H_3O^+]}{M_{HA}} \Rightarrow M_{HA} = \dfrac{10^{-pH_1}}{\alpha_{HA}} \\ \alpha_{HB} = \dfrac{[H_3O^+]}{M_{HB}} \Rightarrow M_{HB} = \dfrac{10^{-(pH_1+2/5)}}{\alpha_{HB}}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{M_{HA}}{M_{HB}} = \frac{\frac{10^{-pH_1}}{0/07}}{\frac{10^{-(pH_1+2/5)}}{0/014}} \Rightarrow \frac{M_{HA}}{M_{HB}} = 0/2 \times 10^2 \times 10^{0/5} = 60$$

برای تبدیل غلظت گرم بر لیتر از یک حل‌شونده به غلظت مولی آن ماده، کافی است مقدار غلظت گرم بر لیتر را بر جرم مولی ماده مورد نظر، تقسیم کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{غلظت گرم بر لیتر}}{\text{جرم مولی}} \Longrightarrow HB \text{ غلظت مولی} = \frac{10/6}{53} = 0/2\ mol.L^{-1}$$

از آنجا که درصد یونش اسید HB کمتر از ۵٪ است، با استفاده از رابطهٔ $K_a \simeq M\alpha^2$، مقدار ثابت یونش آن را محاسبه می‌کنیم:

$$K_a \simeq M_{HB}\alpha_{HB}^2 = (0/2) \times \left(\frac{1/4}{100}\right)^2 = 0/2 \times 1/96 \times 10^{-4} = 3/92 \times 10^{-5}\ mol.L^{-1}$$

توجه داریم که اگر مقدار درجهٔ یونش کمتر از ۰/۰۵ باشد یا نسبت میان ثابت یونش اسید به غلظت آن کمتر از 2×10^{-3} باشد و یا اینکه در صورت سؤال، طراح ثابت یونش را به‌تقریب خواسته باشد، می‌توان مقدار ثابت یونش اسید را از رابطهٔ $K_a \simeq M\alpha^2$ به دست آورد.

انواع اسیدها

اسیدهای قوی: بر اثر حل شدن در آب، تقریباً به‌طور کامل یونش می‌یابند؛ به همین دلیل غلظت هر یک از یون‌ها در محلول اسیدهای قوی تک‌پروتون‌دار، با غلظت اولیهٔ اسید، برابر است و محلول اسیدهای قوی را می‌توان محلولی شامل یون‌های آبپوشیده دانست. از آنجا که اسیدهای قوی در آب تقریباً به‌طور کامل یونش می‌یابند، جزء الکترولیت‌های قوی به شمار می‌روند.

اسیدهای ضعیف: بر اثر حل شدن در آب به‌طور جزئی یونش می‌یابند؛ یعنی بیشتر مولکول‌های اسید در محلول باقی می‌مانند و فقط تعداد کمی از آن‌ها به یون تبدیل می‌شوند؛ بنابراین در محلول اسیدهای ضعیف، علاوه بر یون‌های آبپوشیده، مولکول‌های اسید نیز یافت می‌شوند. حواستان باشد که اسیدهای ضعیف، جزء الکترولیت‌های ضعیف بوده و رسانای ضعیف جریان برق به شمار می‌روند.

مثال

۶- برای حل کردن ۷/۲۶ گرم اسید چرب با فرمول شیمیایی $C_{14}H_{29}COOH$ که در یک لولهٔ آب رسوب کرده است، به چند میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید با $pH = 12/3$ نیاز داریم و طی این فرایند، چند گرم آب به‌عنوان فراورده تولید می‌شود؟

$(O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۷۲ – ۱۵۰۰ ۲) ۰/۷۲ – ۷۵۰ ۳) ۰/۵۴ – ۱۵۰۰ ۴) ۰/۵۴ – ۷۵۰

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۳۱ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: نوشتن معادله واکنش باریم هیدروکسید با اسید چرب

گام دوم: محاسبه جرم مولی اسید چرب مصرف شده

گام سوم: به‌دست آوردن حجم باز مصرف شده و جرم آب تولید شده

به‌طور کلی، بازهای مختلف با اسیدهای چرب واکنش داده و آن‌ها را به صابون و یا مواد شبیه به صابون تبدیل می‌کنند. در این واکنش، آب نیز تولید می‌شود. باریم هیدروکسید، یک باز دو ظرفیتی است. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$2C_{14}H_{29}COOH(s) + Ba(OH)_2(aq) \longrightarrow (C_{14}H_{29}COO)_2Ba(aq) + 2H_2O(l)$$

جرم مولی اسید چرب برابر است با:

$$\text{جرم مولی اسید چرب} = (۱۵ \times ۱۲) + (۲ \times ۱۶) + (۳۰ \times ۱) = ۲۴۲\ g.mol^{-۱}$$

ابتدا غلظت محلول $Ba(OH)_۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-۱۲/۳} = ۱۰^{-۱۳} \times ۱۰^{۰/۷} = ۵ \times ۱۰^{-۱۳} mol.L^{-۱}$$

$$[OH^-] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۵ \times ۱۰^{-۱۳}} = ۰/۰۲\ mol.L^{-۱}$$

$$[OH^-] = M \times \alpha \times n = M \times ۱ \times ۲ \Longrightarrow M = \frac{۰/۰۲}{۲} = ۰/۰۱\ mol.L^{-۱}$$

با توجه به محاسبات بالا، غلظت باریم هیدروکسید در محلول مصرف شده از آن برابر با ۰/۰۱ مول بر لیتر است. در نهایت حجم محلول بازی مورد نیاز و جرم آب تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mL \text{ محلول} = ۷/۲۶\ g \text{ اسیدچرب} \times \frac{۱\ mol \text{ اسیدچرب}}{۲۴۲\ g \text{ اسیدچرب}} \times \frac{۱\ mol\ Ba(OH)_۲}{۲\ mol \text{ اسیدچرب}} \times \frac{۱\ L \text{ محلول}}{۰/۰۱\ mol\ Ba(OH)_۲} \times \frac{۱۰^۳\ mL}{۱\ L} = ۱۵۰۰\ mL \text{ محلول}$$

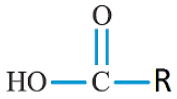
$$?\ g\ H_۲O = ۷/۲۶\ g \text{ اسیدچرب} \times \frac{۱\ mol \text{ اسیدچرب}}{۲۴۲\ g \text{ اسیدچرب}} \times \frac{۲\ mol\ H_۲O}{۲\ mol \text{ اسیدچرب}} \times \frac{۱۸\ g\ H_۲O}{۱\ mol\ H_۲O} = ۰/۵۴\ g$$

۷- بوتانوئیک اسید، در مقایسه با استیک اسید، انحلال‌پذیری ..... در آب داشته و در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، مقدار pH محلول این ماده در مقایسه با محلول استیک اسید، ..... است.

۱) بیشتری ـ بیشتر ۲) بیشتری ـ کمتر ۳) کمتری ـ بیشتر ۴) کمتری ـ کمتر

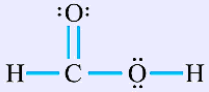
پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحه ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

کربوکسیلیک اسیدها، انواعی از اسیدهای ضعیف بوده و K_a کوچکی دارند. از آنجا که قدرت اسیدی فورمیک اسید در مقایسه با استیک اسید بیشتر است، پس می‌توان گفت که با افزایش تعداد اتم‌های کربن موجود در ساختار این مواد، قدرت اسیدی آن‌ها کاهش پیدا می‌کند. ساختار گروه عاملی موجود در کربوکسیلیک اسیدها به‌صورت زیر است:

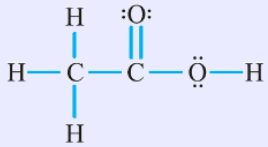


اعضای خانواده کربوکسیلیک اسیدها

کربوکسیلیک اسیدها، گروهی از ترکیب‌های آلی هستند که در ساختار آن‌ها یک یا چند گروه عاملی کربوکسیل($-COOH$) وجود دارد. فرمول کلی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی(مولکول‌هایی که فقط یک گروه عاملی کربوکسیل دارند) را می‌توان به‌صورت $R-COOH$ نشان داد که در آن R نشان‌دهنده یک اتم هیدروژن و یا یک زنجیره هیدروکربنی است. کربوکسیلیک اسیدها خاصیت اسیدی داشته و pH محلول آن‌ها کوچک‌تر از ۷ است. این ترکیب‌ها مزه‌ی ترش دارند به‌طوری‌که مزه‌ی ترش میوه‌هایی مانند ریواس، انگور، لیمو ترش، کیوی و گوجه سبز را به وجود چنین مولکول‌هایی در این میوه‌ها نسبت می‌دهند. متانوییک اسید یا همان فورمیک اسید به فرمول شیمیایی $HCOOH$، اولین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها است که بر اثر گزش مورچه سرخ وارد بدن شده و باعث سوزش و خارش در محل گزیدگی می‌شود. ساختار مولکول‌های این ماده به‌صورت زیر است:



اتانوییک اسید یا همان استیک اسید با فرمول شیمیایی $CH_۳COOH$، یک کربوکسیلیک اسید دوکربنی و دومین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها است. این ماده آشناترین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها بوده و یکی از پرکاربردترین اسیدها در زندگی روزمره است. به‌عنوان مثال، اسید موجود در سرکه همان استیک اسید است. ساختار مولکولی این ماده به‌صورت زیر است:



توجه داریم که فرمول شیمیایی کلی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی سیرشده به‌صورت $C_nH_{۲n}O_۲$ است.

با توجه به توضیحات داده شده، در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، بوتانوئیک اسید دارای قدرت اسیدی کمتری بوده و چون در محلول خود به مقدار کمتری یونش پیدا می‌کند پس می‌توان گفت مقدار pH محلول این ماده در مقایسه با محلول استیک اسید، بیشتر است. چون بوتانوئیک اسید در مقایسه با استیک اسید دارای قسمت ناقطبی بزرگ‌تری است، پس انحلال‌پذیری این ماده در آب نیز کمتر از استیک اسید خواهد بود.

انحلال مواد آلی در آب

مولکول‌های سازنده برخی از ترکیب‌ها از جمله الکل‌ها، اسیدها و آمین‌ها، از دو بخش قطبی (گروه عاملی) و ناقطبی (بخش هیدروکربنی) تشکیل شده است. در این گروه از مواد، بین بخش قطبی و ناقطبی رقابت ایجاد شده و رفتارهای کلی مولکول‌های سازنده به میزان قدرت هر بخش بستگی دارد. به همین خاطر است که در الکل‌های کوچک (الکل‌های یک کربنه تا الکل‌های پنج کربنه)، بخش قطبی بر ناقطبی غلبه داشته و الکل در آب محلول است. به دیگر سخن نیروی بین مولکولی غالب در الکل‌ها تا پنج کربن از نوع هیدروژنی بوده و به همین دلیل، این الکل‌ها به خوبی در آب حل می‌شوند. با افزایش شمار اتم‌های کربن، بخش ناقطبی مولکول الکل‌ها بزرگ‌تر شده و میزان قطبیت مولکول کاهش می‌یابد. این روند سبب می‌شود که الکل‌های بزرگ‌تر در آب نامحلول بوده و در چربی حل شوند. به همین دلیل است که می‌توان گفت در کربوکسیلیک اسیدها نیز با افزایش طول زنجیره کربنی، مقدار انحلال‌پذیری در آب کاهش پیدا می‌کند.

مثال

۸- چند میلی‌لیتر محلول هیدروسیانیک اسید با $pH = ۲/۵$ که در دمای $۲۵^\circ C$ به میزان ۱/۵٪ یونش یافته است، می‌تواند ۲۵ میلی‌لیتر محلول ۰/۴ مولار باریم هیدروکسید را به‌طور کامل خنثی کند؟

$HCN(aq) + Ba(OH)_۲(aq) \rightarrow Ba(CN)_۲(aq) + H_۲O(l)$ **(معادله را موازنه کنید.)**

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینه ۲ **(متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحه ۳۱ ـ ۱۲۰۱)**

ابتدا معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$۲HCN(aq) + Ba(OH)_۲(aq) \longrightarrow Ba(CN)_۲(aq) + ۲H_۲O(l)$$

یکی از رفتارهای جالب و پرکاربرد اسیدها و بازها، واکنش‌هایی است که بین این دو دسته از مواد انجام می‌شود. به این گروه از واکنش‌ها، به اصطلاح واکنش‌های خنثی‌شدن گفته می‌شود. طی واکنش‌های خنثی‌شدن، یون‌های هیدروکسید حاصل از بازها با یون‌های هیدرونیوم حاصل از ترکیب‌های اسیدی براساس معادله $OH^-(aq) + H_۳O^+(aq) \rightarrow ۲H_۲O(l)$ وارد واکنش شده و مولکول‌های آب را تولید می‌کنند. توجه داریم که هیدروسیانیک اسید، ضعیف‌ترین اسیدی است که در کتاب درسی به آن اشاره شده است. غلظت مولی محلول هیدروسیانیک اسید را با توجه به اطلاعات داده شده از آن به‌دست می‌آوریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-۲/۵} = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۰/۵} = ۳ \times ۱۰^{-۳} mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = M \times \alpha \Longrightarrow M = \frac{[H^+]}{\alpha} = \frac{۳ \times ۱۰^{-۳}}{\frac{۱/۵}{۱۰۰}} = \frac{۰/۳}{۱/۵} = ۰/۲\ mol.L^{-۱}$$

همان‌طور که می‌دانید، باریم هیدروکسید یک باز دو ظرفیتی است. در نهایت حجم محلول هیدروسیانیک اسید موردنیاز را حساب می‌کنیم:

$$\underbrace{M_۱ \times n_۱ \times V_۱}_{\text{هیدروسیانیک اسید}} = \underbrace{M_۲ \times n_۲ \times V_۲}_{\text{باریم هیدروکسید}} \Longrightarrow ۰/۲ \times ۱ \times V_۱ = ۰/۴ \times ۲ \times ۲۵ \Longrightarrow V_۱ = ۱۰۰\ mL$$

واکنش خنثی شدن

هرگاه حجم V_a از محلول اسیدی با غلظت M_a و ظرفیت n_a با حجم V_b از محلول بازی با غلظت مولی M_b و ظرفیت n_b به‌طور کامل واکنش بدهد، به‌طوری‌که هر دو محلول کاملاً مصرف شوند، رابطه زیر میان این دو محلول برقرار می‌شود.

$M_a \times V_a \times n_a = M_b \times V_b \times n_b$

با استفاده از رابطه بالا، می‌توانیم بدون نیاز به محاسبات استوکیومتری، حجم محلول اسیدی/ بازی مورد نیاز را محاسبه کنیم.

مثال

۹- محلولی از هیدروکلریک اسید با $pH = ۲/۳$ و حجم ۴۰۰ میلی‌لیتر در اختیار داریم. برای افزایش pH این محلول به اندازه ۰/۷ واحد، به چند لیتر آب خالص نیاز داشته و هر لیتر از محلول ایجاد شده، با چند میلی‌گرم سود به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟

($Na = ۲۳$ و $O = ۱۶$ و $H = ۱$: $g.mol^{-۱}$)

۱) ۲۰ - ۱/۲ ۲) ۴۰ - ۱/۲ ۳) ۲۰ - ۱/۶ ۴) ۴۰ - ۱/۶

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحه ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

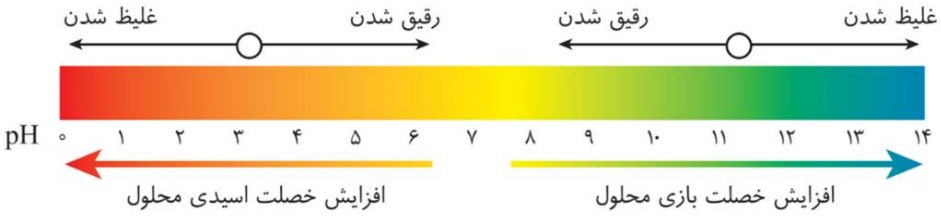
برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول محاسبه مقدار pH محلول جدید تولید شده

گام دوم محاسبه غلظت یون هیدروژن در محلول جدید ایجاد شده

گام سوم به‌دست آوردن مقدار سدیم هیدروکسید شرکت کرده در واکنش خنثی‌شدن

اگر محلول یک اسید را با افزودن آب خالص به آن رقیق‌تر کنیم، غلظت یون هیدروژن در آن کاهش یافته و pH محلول افزایش پیدا می‌کند(به عدد ۷ نزدیک‌تر می‌شود) و به همین ترتیب، اگر محلول یک باز را با اضافه‌کردن آب خالص به آن رقیق‌تر کنیم، غلظت یون هیدروکسید در محلول کاهش یافته و pH محلول نیز کم‌تر می‌شود(به عدد ۷ نزدیک‌تر می‌شود.). در چنین شرایطی می‌توان گفت اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم(حجم محلول را با اضافه‌کردن آب خالص به آن، n برابر کنیم)، pH این محلول به اندازه $log\ (n)$ واحد به pH ناحیه خنثی$(pH = ۷)$ نزدیک‌تر می‌شود. در این رابطه، داریم:



طبق داده‌های سؤال، pH محلول از ۲/۳ به ۳ رسیده و ۰/۷ واحد تغییر کرده است، پس داریم:

$$log(n) = ۰/۷ \Longrightarrow n = ۱۰^{۰/۷} = ۵$$ برابر

محلول مورد نظر ۵ برابر رقیق‌تر شده است(غلظت آن $\frac{۱}{۵}$ برابر شده است)، پس می‌توان گفت طی این فرایند حجم محلول با استفاده از آب خالص ۵ برابر شده است. اگر حجم اولیه محلول برابر با V لیتر بوده است، طی این فرایند با استفاده از $۴V$ لیتر آب خالص، حجم محلول به $۵V$ لیتر رسیده است. بر این اساس، داریم:

$\Longrightarrow$ طی این فرایند حجم محلول به ۲۰۰۰ میلی‌لیتر(۲ لیتر) رسیده است $\Longrightarrow$ حجم محلول اولیه برابر با ۴۰۰ میلی‌لیتر بوده است

حجم آب مورد نیاز برابر با ۱/۶ لیتر بوده است $\Longrightarrow$ به محلول ۴۰۰ میلی‌لیتری اولیه، ۱۶۰۰ میلی‌لیتر آب خالص اضافه شده است

تغییر غلظت اسیدها و بازها

اسیدهای قوی به‌طور کامل یونش یافته$(\alpha = ۱)$ و با تغییر غلظت محلول آن‌ها، تغییری در درجه یونش این مواد ایجاد نمی‌شود. بر این اساس، داریم:

- اگر محلول یک اسید قوی مثل هیدروکلریک اسید را n مرتبه رقیق کنیم(حجم محلول را n برابر کنیم)، غلظت اسید و به دنبال آن غلظت یون هیدروژن $\frac{۱}{n}$ برابر شده و pH به اندازه $log\ n$ واحد به pH خنثی$(pH = ۷)$ نزدیک می‌شود.
- اگر محلول یک اسید قوی را n مرتبه غلیظ کنیم(حجم محلول را با تبخیر کردن آب، $\frac{۱}{n}$ برابر کنیم و یا مقدار اسید موجود در محلول را n برابر کنیم)، غلظت اسید و به دنبال آن غلظت یون هیدروژن در محلول مورد نظر n برابر شده و pH به اندازه $log\ n$ از pH خنثی$(pH = ۷)$ دورتر می‌شود.

بازهای قوی به‌طور کامل یونش یافته$(\alpha = ۱)$ و با تغییر غلظت محلول آن‌ها، تغییری در درجه یونش این مواد ایجاد نمی‌شود. بر این اساس، داریم:

- اگر محلول یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم(حجم محلول را n برابر کنیم)، غلظت باز و به دنبال آن غلظت یون هیدروکسید $\frac{۱}{n}$ برابر شده و pH محلول به اندازه $log\ n$ واحد کاهش یافته و به pH ناحیه خنثی$(pH = ۷)$ نزدیک می‌شود.
- اگر محلول یک باز قوی را n مرتبه غلیظ کنیم(حجم محلول را با تبخیر کردن آب از آن، $\frac{۱}{n}$ برابر کنیم و یا مقدار باز موجود در محلول را n برابر کنیم)، غلظت باز و به دنبال آن غلظت یون هیدروکسید در محلول n برابر شده و pH این محلول به اندازه $log\ n$ واحد افزایش یافته و از pH ناحیه خنثی$(pH = ۷)$ دورتر می‌شود.

مقدار pH محلول نهایی برابر با ۳ است، پس داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

هیدروکلریک اسید بر اساس معادله زیر با پودر سدیم هیدروکسید واکنش می‌دهد:

$$NaOH(s) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_۲O(l)$$

بر این اساس، داریم:

$$?\,mg\ NaOH = ۱\ L\ \text{محلول اسیدی} \times \frac{۱۰^{-۳}\ mol\ HCl}{۱\ L\ \text{محلول اسیدی}} \times \frac{۱\ mol\ NaOH}{۱\ mol\ HCl} \times \frac{۴۰\ g\ NaOH}{۱\ mol\ NaOH} \times \frac{۱۰۰۰\ mg\ NaOH}{۱\ g\ NaOH} = ۴۰\ mg$$

همان‌طور که مشخص است، طی این فرایند ۴۰ میلی‌گرم سود مصرف شده است.

ماز

۱۰- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ در شرایط یکسان، رسانایی یک نمونه از محلول لوله‌بازکن در مقایسه با محلول شیشه‌پاک‌کن کمتر خواهد بود.

ب ـ در شرایط استاندارد، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های هیدروکسید و هیدروژن در آب برابر $۱۰^{-۱۴}$ است.

ج ـ جوش شیرین موجب افزایش خاصیت پاک‌کنندگی صابون‌ها شده و در واحد فرمول آن ۶ اتم وجود دارد.

د ـ در واکنش محلول سود با محلول هیدروکلریک اسید، یون‌های Na^+ و Cl^- در واکنش شرکت نمی‌کنند.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینه ۳ **(متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحه ۲۹ ـ ۱۲۰۱)**

عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، رسانایی الکتریکی هر محلول اسیدی یا بازی، وابسته به قدرت اسید یا باز حل شده در آن محلول است. چون سدیم هیدروکسید یک باز قوی و آمونیاک یک باز ضعیف است، پس می‌توان گفت در شرایط یکسان، رسانایی یک نمونه از محلول لوله بازکن(محلول سود) در مقایسه با محلول شیشه‌پاک‌کن(محلول آمونیاک) بیشتر است.

ب) در شرایط STP(دمای صفر درجه سلسیوس و فشار ۱ اتمسفر)، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های هیدروکسید و هیدروژن در آب و یا سایر محلول‌های آبی کمتر از $۱۰^{-۱۴}$ می‌شود؛ درحالی که حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های هیدروکسید و هیدروژن در آب در شرایط اتاق(دمای ۲۵ درجه سلسیوس و فشار ۱ اتمسفر) برابر با $۱۰^{-۱۴}$ می‌شود.

ج) از آن‌جا که اضافه‌کردن محلول سدیم هیدروژن کربنات ($NaHCO_۳$) به یک محلول دیگر، سبب کاهش غلظت یون هیدروژن در آن محلول می‌شود، می‌توان گفت که محلول سدیم هیدروژن کربنات یک محلول بازی با pH بزرگ‌تر از ۷ است. برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی چربی‌ها، به شوینده‌ها جوش‌شیرین(یا همان سدیم هیدروژن کربنات) می‌افزایند. اضافه‌کردن این ماده به شوینده‌ها، سبب افزایش خاصیت بازی آن‌ها می‌شود و قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها را افزایش می‌دهد.

ضد اسیدها

پزشکان برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده، از داروهایی به نام ضد اسید(آنتی‌اسید) استفاده می‌کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی کردن اسید معده و افزایش pH محتویات معده می‌شوند. مواد مؤثر موجود در ضد اسیدهای مختلف، شامل منیزیم هیدروکسید($Mg(OH)_۲$)، آلومینیم هیدروکسید($Al(OH)_۳$) و سدیم هیدروژن کربنات(جوش‌شیرین یا $NaHCO_۳$) می‌شود. این مواد براساس معادله‌های زیر با اسید معده واکنش می‌دهند:

$$Mg(OH)_۲ \xrightarrow{\text{واکنش}} Mg(OH)_۲(aq) + ۲HCl(aq) \rightarrow MgCl_۲(aq) + ۲H_۲O(l)$$

$$Al(OH)_۳ \xrightarrow{\text{واکنش}} Al(OH)_۳(aq) + ۳HCl(aq) \rightarrow AlCl_۳(aq) + ۳H_۲O(l)$$

$$NaHCO_۳ \xrightarrow{\text{واکنش}} NaHCO_۳(aq) + HCl(aq) \rightarrow H_۲O(l) + CO_۲(g) + NaCl(aq)$$

همان‌طور که مشخص است، در ساختار جوش شیرین یون هیدروکسید وجود نداشته و این ماده به هنگام انحلال در آب، یون هیدروکسید ایجاد می‌کند.

د) معادله واکنش مورد نظر به‌صورت $NaOH(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_۲O(l)$ است. طی این واکنش، یون هیدروکسید از محلول سود با یون هیدروژن از محلول هیدروکلریک اسید خنثی می‌شود. همان‌طور که مشخص است، یون‌های Na^+ و Cl^- در واکنش شرکت نکرده و به‌صورت دست‌نخورده باقی می‌مانند.

۱۱- نوعی شربت ضد اسید دارای ۱۳٪ جرمی آلومینیم هیدروکسید و ۲۵/۲٪ جرمی سدیم هیدروژن کربنات است. چند گرم از این شربت برای تغییر pH یک نمونه ۷۵۰ میلی‌لیتری اسید معده از ۰/۳ به ۱/۷ نیاز است؟

$(Al = ۲۷ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

$$Al(OH)_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow AlCl_۳(aq) + H_۲O(l)$$

$$NaHCO_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$$

معادله واکنش‌ها موازنه شود.

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۴۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۳۲ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا غلظت یون هیدرونیوم در محلول‌هایی با pH برابر ۰/۳ و ۱/۷ را حساب می‌کنیم:

$$pH = -log[H^+] \rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} \rightarrow \begin{cases} [H_۱^+] = ۱۰^{-۰/۳} = ۵ \times ۱۰^{-۱}\ mol.L^{-۱} \\ [H_۲^+] = ۱۰^{-۱/۷} = ۲ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱} \end{cases}$$

برای اینکه pH محلول مورد نظر از ۰/۳ به ۱/۷ برسد، باید غلظت یون هیدرونیوم موجود در این محلول از ۰/۵ مول بر لیتر به ۰/۰۲ مول بر لیتر برسد. در این رابطه، داریم:

$$\text{غلظت اسید خنثی شده} = \text{غلظت اولیه اسید} - \text{غلظت نهایی اسید} = ۰/۵ - ۰/۰۲ = ۰/۴۸\ mol.L^{-۱}$$

حجم محلول اسیدی برابر با ۷۵۰ میلی‌لیتر است، بنابراین مقدار یون هیدرونیوم موجود در این محلول باید از ۰/۳۷۵ مول به ۰/۰۱۵ مول رسیده و مقدار ۰/۳۶ مول از آن خنثی شود. آلومینیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات موجود در محلول ضد اسید، بر مبنای معادله‌های زیر با اسید معده واکنش می‌دهند:

$$Al(OH)_۳(s) + ۳HCl(aq) \rightarrow AlCl_۳(aq) + ۳H_۲O(l)$$

$$NaHCO_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$$

آسیب معده

دیواره داخلی معده، به‌طور طبیعی مقدار اندکی از یون‌های هیدرونیوم ترشح‌شده در معده را مجدداً جذب می‌کند. این فرایند، سبب نابودی برخی از سلول‌های سازنده دیواره معده می‌شود. در این شرایط، اگر مقدار اسید موجود در معده به هر دلیلی بیش از اندازه باشد، مقدار یون‌های هیدرونیوم جذب‌شده توسط دیواره معده بیشتر شده و مقدار بیشتری از سلول‌های دیواره معده آسیب می‌بینند. پزشکان برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده بیماران مبتلا به بیماری‌های معده‌ای، از داروهایی به نام ضد اسید یا همان آنتی‌اسید استفاده می‌کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی کردن اسید معده(هیدروکلریک اسید) و افزایش مقدار pH محتویات معده می‌شوند.

با استفاده از معادله واکنش‌های بالا، باید ۰/۳۶ مول از هیدروکلریک اسید موجود در معده خنثی شود. توجه داریم که در هر ۱۰۰ گرم از این ضد اسید، مقدار ۱۳ گرم آلومینیم هیدروکسید و مقدار ۲۵/۲ گرم سدیم هیدروژن کربنات وجود دارد. مقدار هیدروکلریک اسیدی که با این ۱۰۰ گرم از این ضد اسید واکنش می‌دهد را حساب می‌کنیم:

$$?\ mol\ HCl = ۱۳\ g\ Al(OH)_۳ \times \frac{۱\ mol\ Al(OH)_۳}{۷۸\ g\ Al(OH)_۳} \times \frac{۳\ mol\ HCl}{۱\ mol\ Al(OH)_۳} = ۰/۵\ mol$$

$$?\ mol\ HCl = ۲۵/۲\ g\ NaHCO_۳ \times \frac{۱\ mol\ NaHCO_۳}{۸۴\ g\ NaHCO_۳} \times \frac{۱\ mol\ HCl}{۱\ mol\ NaHCO_۳} = ۰/۳\ mol$$

$$\text{مقدار کل اسید} = ۰/۵ + ۰/۳ = ۰/۸\ mol\ HCl$$

بنابراین، مقدار ۱۰۰ گرم از این ضد اسید با ۰/۸ مول هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد. در پایان مقدار ضد اسید مورد نیاز برای خنثی‌سازی ۰/۳۶ مول از اسید موجود در معده را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$?\ g\ \text{ضد اسید} = ۰/۳۶\ mol\ HCl \times \frac{۱۰۰\ g\ \text{ضد اسید}}{۰/۸\ mol\ HCl} = ۴۵\ g$$

۱۲- کدام عبارت داده شده نادرست است؟

۱) تولید مواد، یکی از قلمروهای الکتروشیمی است که در آن از فرایندهای آبکاری و برقکافت استفاده می‌شود.

۲) همهٔ فلزها، هنگامی که در معرض هوا قرار می‌گیرند، با گاز اکسیژن واکنش داده و به شکل اکسید درمی‌آیند.

۳) تولید انرژی الکتریکی پاک و ارزان، دستاوردی از الکتروشیمی است که در سایه فناوری‌های پیشرفته محقق می‌شود.

۴) با فرو بردن دو تیغه از جنس مس و روی در یک لیمو، می‌توان بخشی از انرژی شیمیایی را به انرژی الکتریکی تبدیل کرد.

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی و حفظی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۳۹ ـ ۱۲۰۲)

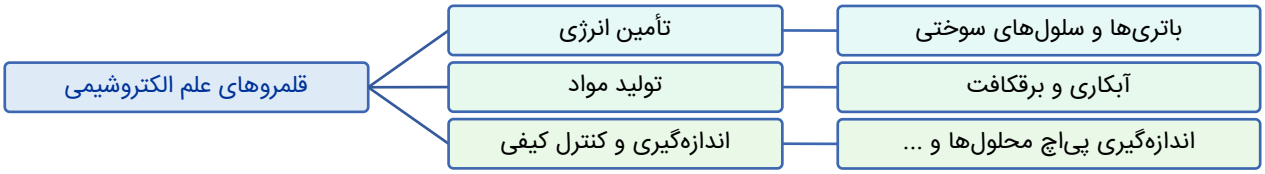
فلزهای نجیب مانند طلا و پلاتین با اکسیژن هوا واکنش نمی‌دهند، بنابراین باید گفت که اغلب فلزها هنگامی که در معرض هوا قرار می‌گیرند، با اکسیژن واکنش داده و به شکل اکسید درمی‌آیند. در این فرایند، اتم‌های فلزی اکسایش یافته و ذرات اکسیژن کاهش پیدا می‌کنند.

واکنش‌های اکسایش-کاهش

در محیط پیرامون ما واکنش‌های اکسایش-کاهش زیادی مانند سیاه شدن وسایل نقره‌ای، خوردگی آهن و سایر فلزات، فساد مواد غذایی و ... در حال انجام شدن هستند که مطلوب ما نبوده و گاهی زیان‌هایی را به دنبال دارند. برای مثال، سالانه صدها میلیون تن از فلزهای گوناگون برای ساختن اسکله نفتی، اسکلت ساختمان‌ها و پل‌ها، کشتی، لوکوموتیو و راه‌آهن و ... مصرف می‌شود. هنگامی که فلزها در مجاورت با اکسیژن هوا قرار می‌گیرند، اغلب اکسایش یافته و به شکل اکسید درمی‌آیند. خوردگی به فرایند تردشدن، خردشدن و فروریختن فلزها بر اثر واکنش‌های اکسایش-کاهش گفته می‌شود. زنگ‌زدن آهن، تیره‌شدن نقره و زنگار سبز ایجادشده بر سطح مس، نمونه‌هایی از فرایند خوردگی هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) تولید مواد جدید، یکی از قلمروهای دانش الکتروشیمی است که در آن فرایندهای آبکاری و برقکافت استفاده می‌شود. نمودار زیر، قلمروهای کلی دانش الکتروشیمی را نشان می‌دهد.

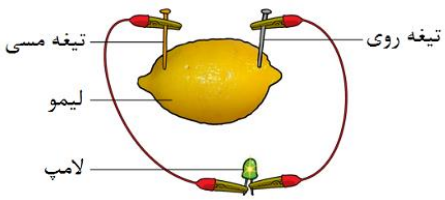


۳) آن‌چه که شیمی و الکتریسیته را به یکدیگر پیوند داده و علم الکتروشیمی را ایجاد می‌کند، الکترون است. به عبارتی، الکتروشیمی علم استفاده از انرژی الکتریکی برای ایجاد یک تغییر شیمیایی و یا تولید انرژی الکتریکی به کمک انجام واکنش‌های شیمیایی است. تولید انرژی پاک و ارزان، دستاوردی از دانش الکتروشیمی است که در سایه فناوری‌های پیشرفته موجب افزایش سطح رفاه و آسایش مردم جهان شده است.

نقش الکتروشیمی در زندگی

رشد دانش و پیشرفت فناوری، موجب آسان‌ترشدن انجام فعالیت‌های فردی، اقتصادی و صنعتی شده و افزایش سطح آسایش و رفاه در جامعه را به دنبال داشته است. تأمین روشنایی، گرمایش و سرمایش آسان‌تر، حمل و نقل سریع‌تر و ایمن‌تر، درمان و کاهش اثرات نقص عضو و انتقال ایمن آب آشامیدنی از نقطه‌ای به نقطه دیگر، نمونه‌هایی از افزایش سطح رفاه و آسایش در جامعه را نشان می‌دهند. دو رکن اساسی در تحقق این فناوری‌ها، دستیابی به مواد مناسب و تأمین انرژی موردنیاز است.

۴) باتری لیمویی، نوع ساده‌ای از یک سلول الکتروشیمیایی است که با فروبردن یک تیغه از جنس فلز مس و یک تیغه از جنس فلز روی در یک لیمو ساخته می‌شود. توجه داریم که جنس دو تیغه فرو رفته در لیمو باید متفاوت از هم باشند. به کمک این نوع باتری می‌توان یک لامپ LED را روشن کرد. تصویر زیر، نمایی از این نوع باتری را نشان می‌دهد:



همان‌طور که مشخص است، لیمو در نقش الکترولیت بوده و باعث برقراری جریان الکتریکی در مدار خارجی می‌شود.

۱۳- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ واکنش میان منیزیم و گاز O_2 با تولید نور سفید همراه بوده و در فراورده آن، آرایش الکترونی یون‌ها مشابه هم است.

ب ـ باتری از فراورده‌های مهم صنعتی است که در محل مورد نیاز، با انجام واکنش‌های شیمیایی، الکتریسیته تولید می‌کند.

ج ـ در واکنش فلز آلومینیم با محلول مس(II) سولفات، تغییر بار الکتریکی گونه اکسنده، ۱/۵ برابر گونه کاهنده است.

د ـ در واکنش $3Mg(s) + N_2(g) \rightarrow Mg_3N_2(s)$، با تولید یک مول فراورده، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینه ۱ **(متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحه ۴۲ ـ ۱۲۰۲)**

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) اغلب فلزها در واکنش با نافلزها تمایل دارند یک یا چند الکترون خود را به اتم‌های نافلزی داده و ضمن اکسایش، به کاتیون تبدیل شوند. نافلزها نیز با گرفتن یک یا چند الکترون، کاهش یافته و به آنیون تبدیل می‌شوند. بر این اساس، فلزها اغلب کاهنده و نافلزها اغلب اکسنده هستند. منیزیم(یک عنصر فلزی) در واکنش با اکسیژن(یک عنصر نافلزی) هوا اکسید شده و الکترون‌های خود را به اتم‌های اکسیژن انتقال می‌دهد. معادله نیم‌واکنش‌های انجام شده در این واکنش شیمیایی به‌صورت زیر است:

نیم‌واکنش اکسایش: $Mg(s) \rightarrow 2e^- + Mg^{2+}(s)$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$

واکنش انجام‌شده به‌صورت $2Mg(s) + O_2(g) \rightarrow 2MgO(s)$ است که در آن اتم‌های Mg و مولکول‌های اکسیژن به‌ترتیب در نقش گونه‌های کاهنده و اکسنده ظاهر می‌شوند. فراورده‌های تولید شده در این نیم‌واکنش‌ها، هر دو دارای ۱۰ الکترون بوده و آرایش الکترونی مشابهی دارند. همان‌طور که مشخص است، طی این واکنش هر اتم منیزیم دو الکترون از دست داده و یک لایه الکترونی از اتم‌های آن کاسته می‌شود و به همین خاطر، شعاع اتم‌های این عنصر طی فرایند اکسایش، کوچک‌تر می‌شود. در گذشته از واکنش سوختن منیزیم به‌عنوان منبع نور در هنگام عکاسی استفاده می‌شد. طی این فرایند، فلز منیزیم با تولید نور خیره‌کننده‌ای در حضور اکسیژن می‌سوخت و به منیزیم اکسید تبدیل می‌شد.

اکسایش و کاهش

در واکنش‌های اکسایش-کاهش، الکترون از یک گونه به گونه دیگر منتقل می‌شود. در این واکنش‌ها، ماده‌ای که با گرفتن الکترون کاهش پیدا کرده و سبب اکسایش گونه دیگر می‌شود، اکسنده نام دارد. در نقطه مقابل، ماده‌ای که با از دست دادن الکترون اکسایش پیدا کرده و سبب کاهش گونه دیگر می‌شود، کاهنده نام دارد. در رابطه با این دو گروه از مواد داریم:

گونه کاهنده است ← سبب کاهش گونه دیگر می‌شود ← گونه‌ای که اکسایش پیدا می‌کند

گونه اکسنده است ← سبب اکسایش گونه دیگر می‌شود ← گونه‌ای که کاهش پیدا می‌کند

بر این اساس، می‌توان گفت:

الکترون می‌دهد ← گونه کاهنده الکترون می‌گیرد ← گونه اکسنده

ب) یکی از کاربردهای واکنش‌های اکسایش-کاهش، استفاده از آن‌ها در ساختن انواع باتری‌ها است. باتری از فراورده‌های مهم صنعتی است که در محل مورد نیاز، با انجام واکنش‌های شیمیایی، بخشی از انرژی شیمیایی ذخیره شده در خود را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کند. ساختار و ویژگی‌های هر باتری متناسب با کارکرد ویژه‌ای است که آن باتری دارد. با رشد و پیشرفت صنایع گوناگون، نیاز و تقاضا برای ساختن باتری‌هایی با ویژگی‌های گوناگون و کاربرد معین افزایش پیدا کرده است.

ج) واکنش فلز آلومینیم با محلول مس(II) سولفات، به‌صورت زیر است:

$$2Al(s) + 3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3Cu(s)$$

با توجه به معادله‌ی نوشته شده برای این واکنش شیمیایی، تغییر بار الکتریکی گونه کاهنده(فلز آلومینیم)، ۱/۵ برابر گونه اکسنده(یون مس) است. توجه داریم که با انجام این واکنش، از شدت رنگ آبی محلول کاسته می‌شود.

در فراورده واکنش، یون‌های Mg^{2+} و N^{3-} وجود دارند؛ بنابراین به ازای تولید یک مول ترکیب Mg_3N_2، مقدار $3 \times 2 = 6$ مول الکترون مبادله می‌شود. نام ترکیب تولید شده طی این فرایند منیزیم نیترید است. برای محاسبه تعداد الکترون مبادله شده در این واکنش‌ها، باید از رابطه زیر استفاده کرد:

زیروند × تغییر بار الکتریکی × ضریب ماده در معادله واکنش = تعداد الکترون مبادله شده

۱۴- طی واکنش محلول هیدروکلریک اسید با یک قطعه فلز روی، $3/01 \times 10^{22}$ الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده مبادله شده است. طی این فرایند، چند میلی‌لیتر فراورده گازی در شرایطی که حجم مولی گازها برابر با ۴۴/۸ لیتر است، به‌دست می‌آید؟

۱) ۲۸۰ ۲) ۵۶۰ ۳) ۸۴۰ ۴) ۱۱۲۰

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحه ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

واکنش میان فلز روی و محلول هیدروکلریک اسید به‌صورت زیر است:

$$Zn(s) + 2HCl(aq) \rightarrow ZnCl_2(aq) + H_2(g)$$

با توجه به معادله این واکنش، به ازای مبادله شدن ۲ مول الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده، ۱ مول گاز هیدروژن تولید می‌شود. بر این اساس، حجم گاز هیدروژن تولید شده را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,mL\,H_2 = 3/01 \times 10^{22}\,e \times \frac{1\,mol\,e}{6/02 \times 10^{23}\,e} \times \frac{1\,mol\,H_2}{2\,mol\,e} \times \frac{44/8\,L\,H_2}{1\,mol\,H_2} \times \frac{1000\,mL\,H_2}{1\,L\,H_2} = 1120\,mL$$

با توجه به محاسبات انجام شده، طی این فرایند ۱۱۲۰ میلی‌لیتر گاز هیدروژن تولید شده است.

واکنش فلزها با اسیدها

به‌جز عناصر طلا، پلاتین، جیوه، نقره و مس، سایر فلزها با یون هیدروژن موجود در محلول‌های اسیدی واکنش داده و گاز H_2 آزاد می‌کنند. طی این فرایند، فلز الکترون از دست داده و به‌صورت کاتیون وارد محلول می‌شود. برای مثال، سدیم براساس معادله $2Na(s) + 2HCl(aq) \rightarrow 2NaCl(aq) + H_2(g)$ با هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد. معادله واکنش کلی انجام شده بین عناصر فلزی با هیدروکلریک اسید به‌صورت زیر است:

$$M(s) + xHCl(aq) \rightarrow MCl_x + \frac{x}{2}H_2$$

فلزهای موجود در گروه اول (لیتیم، سدیم، پتاسیم و ...)، در قالب کاتیون‌هایی با بار ۱+ وارد محلول می‌شوند. فلزهای موجود در گروه دوم (منیزیم، کلسیم، استرانسیم و ...)، در قالب کاتیون‌هایی با بار ۲+ وارد محلول می‌شوند. فلزهای موجود در گروه ۱۳ (آلومینیم و گالیم) نیز در قالب کاتیون‌هایی با بار ۳+ وارد محلول می‌شوند. توجه داریم که با افزایش واکنش‌پذیری فلز، افزایش غلظت حل‌شونده در محلول اسیدی و یا افزایش قدرت اسید (K_a) موجود در محلول، سرعت واکنش میان فلز با اسید افزایش یافته و گاز هیدروژن با سرعت بیشتری تولید خواهد شد.

۱۵- اطلاعات داده شده در جدول زیر، مربوط به قرار گرفتن تیغه‌های فلزی مختلف در محلول آهن(II) سولفات است:

جنس تیغه فلزی	آهن	روی	منیزیم	نقره
دمای اولیه	۳۰°C	۲۰°C	۲۰°C	۳۰°C
دمای نهایی	۳۰°C	۲۴°C	۲۶°C	۳۰°C

از میان فلزهای داده شده، فلز ..... بیشترین میل به از دست دادن الکترون را داشته و در صورت قرار دادن یک تیغه از جنس روی در محلول نقره نیترات، دمای محلول ..... .

۱) منیزیم ـ افزایش می‌یابد ۲) منیزیم ـ ثابت باقی می‌ماند

۳) نقره ـ افزایش می‌یابد ۴) نقره ـ ثابت باقی می‌ماند

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحه ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

در یک واکنش اکسایش-کاهش، فلزی که قدرت کاهندگی بیشتری(تمایل بیشتر به از دست دادن الکترون) دارد، می‌تواند با کاتیون‌های فلزی حاصل از عناصری که قدرت کاهندگی کم‌تری دارند وارد واکنش شده و آن‌ها را به اتم‌های فلزی بکاهد. برای مقایسه تمایل فلزهای

مختلف به از دست دادن الکترون، می‌توانیم از واکنش این عناصر با یک محلول خاص در شرایط یکسان استفاده کنیم. هر فلزی که با محلول موردنظر با شدت بیشتری واکنش داده و دما را بیشتر افزایش دهد، تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون دارد. در این رابطه، داریم:

افزایش دمای محلول به مقدار بیشتر ← افزایش تمایل اتم فلزی به از دست دادن الکترون(قدرت کاهندگی)

توجه داریم که اگر یک فلز، دمای محلول مورد نظر را افزایش ندهد، یعنی در مقایسه با فلزی که کاتیون آن در محلول وجود دارد، واکنش‌پذیری کمتری دارد.

مبادله انرژی در الکتروشیمی

هر واکنش شیمیایی، با گرفتن و یا دادن مقداری انرژی به محیط اطراف خود همراه است. در برخی از واکنش‌های اکسایش-کاهش، به هنگام دادوستد الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده، مقداری انرژی نیز آزاد می‌شود. به‌عنوان مثال، در هنگام سوختن عناصر فلزی مثل سدیم و منیزیم، اتم‌های فلزی اکسایش پیدا کرده و الکترون‌های خود را به اتم‌های اکسیژن منتقل می‌کنند. همان‌طور که می‌دانیم، انجام‌شدن این واکنش‌ها با آزادشدن مقداری انرژی به‌صورت نور و گرما همراه است. علاوه بر واکنش سوختن عناصر فلزی، برخی دیگر از انواع واکنش‌های اکسایش-کاهش نیز با آزادشدن گرما همراه هستند. به‌عنوان مثال، واکنش یک تیغه فلزی با محلول فلزی که واکنش‌پذیری کمتری دارد، از جمله واکنش‌های اکسایش-کاهش گرماده است.

طبق فرض سؤال، فلزهای روی و منیزیم دمای محلول مورد نظر را افزایش داده‌اند، پس این دو فلز در مقایسه با آهن واکنش‌پذیرتر هستند. چون منیزیم دمای محلول را به مقدار بیشتری افزایش داده است، پس می‌توان گفت این فلز در مقایسه با روی واکنش‌پذیرتر است. در این رابطه، داریم:

$$\text{واکنش‌پذیری} : Mg > Zn > Fe$$

چون فلز نقره دمای محلول را افزایش نداده است، پس می‌توان گفت نقره در مقایسه با آهن واکنش‌پذیری کمتری داد. اگر فلز نقره را به مقایسه قبلی اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$\text{واکنش‌پذیری} : Mg > Zn > Fe > Ag$$

منیزیم، واکنش‌پذیرترین فلز از میان فلزهای داده شده است، پس این فلز بیشترین میل به از دست دادن الکترون را دارد. چون فلز روی از نقره واکنش‌پذیرتر است، در صورت قرار دادن یک تیغه از جنس روی در محلول نقره نیترات، واکنش زیر انجام می‌شود:

$$۲Ag^{+}(aq) + Zn(s) \rightarrow ۲Ag(s) + Zn^{۲+}(aq)$$

چون این واکنش گرماده است، دمای محلول افزایش پیدا می‌کند.

واکنش بین تیغه و محلول

کاتیون‌های فلزی موجود در یک محلول، در واکنش با اتم‌های یک عنصر فلزی دیگر که واکنش‌پذیری بیشتری دارند، یک یا چند الکترون از آن‌ها گرفته و کاهش پیدا می‌کنند. به‌عنوان مثال، هرگاه تیغه‌ای از جنس فلز روی را در محلولی از مس(II) سولفات قرار بدهیم، اتم‌های خنثای روی با از دست دادن دو الکترون به یون‌های روی اکسایش یافته و هم‌زمان با آن، هر یون مس(II) با دریافت همان دو الکترون، به اتم Cu کاهش می‌یابد. از آن‌جا که رنگ آبی محلول مس(II) سولفات به خاطر وجود یون‌های $Cu^{۲+}(aq)$ در این محلول است، با گذشت زمان و کاهش غلظت این یون در محلول موردنظر، به‌تدریج از شدت رنگ محلول کاسته می‌شود.

آزمون ماز

۱۳ آذرماه

شیمی

۱- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ مخلوط آب و روغن، ناپایدار بوده و با قرار دادن آن در یک محیط ثابت، آب بر روی روغن قرار می‌گیرد.

ب ـ در رسوب ایجاد شده روی لباس هنگام شستن آن‌ها با آب سخت و صابون، شمار کاتیون‌ها نصف آنیون‌ها است.

ج ـ دو مورد از اتم‌های کربن موجود در حلقهٔ بنزنی از پاک‌کننده‌های غیر صابونی، فقط به اتم‌های کربن متصل شده‌اند.

د ـ اوره، همانند اتیلن گلیکول، گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر داشته و با ذرات خود پیوند هیدروژنی تشکیل می‌دهد.

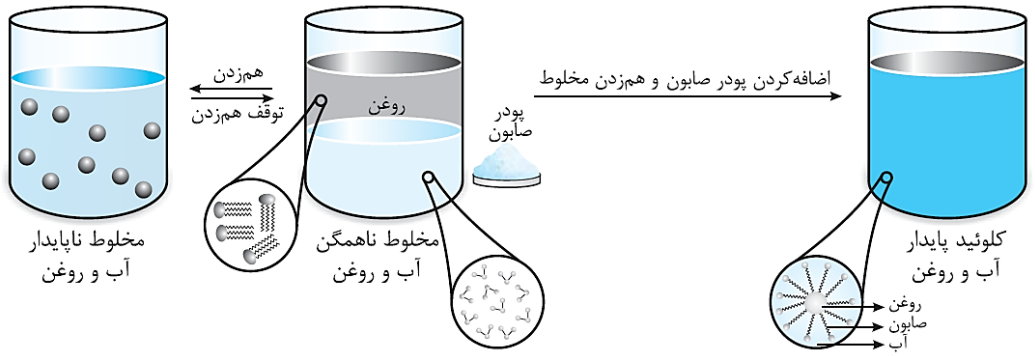
۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۴ **(متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحه ۱۱ ـ ۱۲۰۱)**

عبارت‌های (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

(الف) مخلوط آب و روغن، در نبود صابون ناپایدار بوده و اگر این مخلوط را برای مدتی در یک مکان ثابت قرار بدهیم، آب و روغن موجود در آن از یکدیگر جدا شده و دو لایه مجزا تشکیل می‌شود. در چنین شرایطی، چون آب چگالی بیشتری دارد، این ماده در ته ظرف قرار گرفته و روغن روی آن را می‌پوشاند. تصویر زیر، مخلوطی از آب و روغن را نشان می‌دهد:



انحلال مواد

در هر ماده خالص، بین ذرات نیروی بین مولکولی برقرار شده است. در این حالت، ذرات سازنده آن ماده در کنار هم قرار گرفته‌اند. با مخلوط کردن دو ماده، آن دو ماده به شرطی در یکدیگر حل می‌شوند که بین ذرات آن‌ها نیروی بین مولکولی مناسب برقرار شود. در غیر این صورت، دو ماده جدا از هم باقی می‌مانند. مراحل حل شدن دو ماده در یکدیگر را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

۱- شکستن پیوندهای موجود بین ذرات حل‌شونده

۲- شکستن پیوندهای موجود بین ذرات حلال

۳- پخش شدن ذرات حل‌شونده بین حلال و برقراری جاذبه مناسب بین ذرات

آزمایش‌ها نشان می‌دهند که فرایند انحلال هنگامی منجر به تشکیل محلول می‌شود که قدرت جاذبه‌های برقرار شده میان ذرات حل‌شونده با حلال در محلول، بیشتر از میانگین جاذبه‌ها در حلال خالص و حل‌شونده خالص باشد.

(ب) مولکول‌های صابون، براساس معادله‌های زیر با کاتیون‌های موجود در آب‌های سخت واکنش می‌دهند:

واکنش صابون با یون کلسیم: $۲RCOONa(aq) + Ca^{۲+}(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Ca(s) + ۲Na^{+}(aq)$

واکنش صابون با یون منیزیم: $۲RCOONa(aq) + Mg^{۲+}(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Mg(s) + ۲Na^{+}(aq)$

رسوب‌های تولید شده در این واکنش‌ها، سفید رنگ بوده و رد آن‌ها بر روی لباس‌ها باقی می‌ماند. همان‌طور که مشخص است، نسبت شمار آنیون‌ها به شمار کاتیون‌ها در این رسوب‌ها برابر با ۲ خواهد بود.

قدرت پاک‌کنندگی

عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون، به شرح زیر هستند:

۱- میزان سختی آب: صابون‌ها در مجاورت با آب سخت، با دو یون کلسیم و منیزیم موجود در این نمونه از آب رسوب سفیدرنگی ایجاد می‌کنند که بر روی لباس دیده می‌شود. در این حالت، قدرت پاک‌کنندگی صابون به‌شدت کاهش می‌یابد.

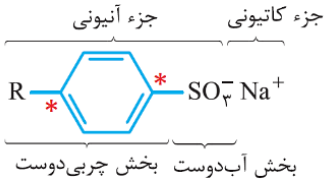
۲- جنس پارچه: چسبندگی لکه‌های چربی بر روی لباس‌های نخی (یا همان پنبه‌ای) کمتر از پارچه‌های پلی‌استری است. بر این اساس، می‌توان گفت صابون بر روی لکه‌های ایجاد شده بر سطح پارچه‌های نخی اثر بیشتری دارد.

۳- آنزیم: آنزیم نوعی کاتالیزگر است که فرایندهای تجزیه مواد موجود در لکه‌ها را تسریع می‌بخشد و این مواد را به مواد ساده‌تر تبدیل می‌کند. اضافه کردن آنزیم به صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

۴- دما: علاوه بر این که در دماهای بالاتر، ساختار چربی‌های موجود بر روی سطح لباس سست می‌شود، افزایش دما سرعت انجام هر فرآیندی را نیز افزایش می‌دهد. همچنین افزایش دما موجب تأمین‌شدن گرمای واکنش‌های انجام‌گرفته بر لکه می‌شود، پس افزایش دما نیز قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

۵- افزودنی‌های شیمیایی: اضافه کردن جوش شیرین به صابون، موجب ایجاد خاصیت بازی و افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن می‌شود. افزودن نمک‌های فسفات به صابون نیز قدرت پاک‌کنندگی آن را در مواجهه با آب سخت افزایش می‌دهد.

ج) ساختار کلی پاک‌کننده‌های غیر صابونی به‌صورت زیر است:



اتم‌های کربنی از بخش آنیونی این پاک‌کننده‌ها (۲ اتم کربن) که با ستاره مشخص شده‌اند، به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند. اتم کربن سمت راست، به ۲ اتم کربن و یک اتم گوگرد متصل بوده و اتم کربن سمت چپ، فقط به ۳ اتم کربن متصل شده است.

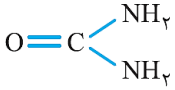
پاک‌کننده‌های غیر صابونی

شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که علاوه بر قدرت پاک‌کنندگی بالا، بتوان آن‌ها را به میزان انبوه و با قیمت مناسب تولید کرد. با توجه به رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون‌ها، ساختاری دوگانه‌دوست (هم چربی‌دوست و هم آب‌دوست) داشته باشند. سرانجام آن‌ها توانستند با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه موجود در صنایع پتروشیمی، پاک‌کننده‌های جدیدی را تولید کنند. این مواد، به پاک‌کننده‌های غیر صابونی معروف بوده و فرمول همگانی آن‌ها به‌صورت $RC_6H_4SO_3Na$ است.

همان‌طور که مشخص است، پاک‌کننده‌های غیر صابونی نیز همانند پاک‌کننده‌های صابونی از یک بخش آب‌دوست و یک بخش چربی‌دوست (حلقه بنزنی و زنجیر هیدروکربنی) تشکیل شده‌اند. در هنگام استفاده از این پاک‌کننده‌ها، مولکول‌های چربی به زنجیرهٔ هیدروکربنی پاک‌کننده می‌چسبند و بخش آب‌دوست مولکول‌های پاک‌کننده نیز باعث پخش‌شدن چربی‌ها در آب می‌شود.

پاک‌کننده‌های غیر صابونی، برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی، طی واکنش‌های پیچیده و از مواد پتروشیمیایی تولید می‌شوند. این پاک‌کننده‌ها، همانند بنزن، نفتالن، بنزوئیک اسید، بنزآلدهید و ...، دارای یک حلقه کربنی آروماتیک (حلقه بنزنی) در ساختار خود هستند. پاک‌کننده‌های غیر صابونی، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری نسبت به پاک‌کننده‌های صابونی دارند.

د) دو ترکیب اوره و اتیلن گلیکول، قطبی بوده و درنتیجه گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر دارند. به‌علاوه به علت حضور پیوند اشتراکی $N-H$ در ساختار اوره و پیوند اشتراکی $O-H$ در ساختار اتیلن گلیکول، این دو ترکیب توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود و همچنین با مولکول‌های آب را دارند. ساختار اوره به‌صورت زیر است:



۲- **برای تهیهٔ نوعی صابون مایع، ۳۴۰/۸ گرم از اسید چرب سیرشده با فرمول $CH_3(CH_2)_{16}COOH$ را در شرایط مناسب در مجاورت با محلول پتاسیم هیدروکسید قرار می‌دهند. در این واکنش، به‌تقریب چند درصد جرمی از فراورده‌های تولید شده را صابون تشکیل می‌دهد؟** $(K = 39 , O = 16 , C = 12 , H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) ۹۰/۴ ۲) ۹۲/۲ ۳) ۹۴/۷ ۴) ۹۶

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحه ۶ ـ ۱۲۰۱)

اسیدهای چرب، در شرایط مناسب با محلول‌های بازی واکنش داده و اتم هیدروژن موجود در گروه کربوکسیل آن‌ها با یک کاتیون جایگزین می‌شود. در این حالت، نوعی ترکیب با خاصیت صابونی به دست می‌آید. ابتدا معادله واکنش انجام شده را می‌نویسیم:

$$CH_3(CH_2)_{16}COOH + KOH \longrightarrow CH_3(CH_2)_{16}COOK + H_2O$$

جرم مولی آب برابر $18 g.mol^{-1}$ است و جرم مولی صابون مایع حاصل از این واکنش نیز برابر است با:

$$\text{جرم مولی صابون} = (18 \times 12) + (35 \times 1) + (2 \times 16) + 39 = 322 g.mol^{-1}$$

طی این فرایند، به ازای مصرف هر مول اسید چرب، یک مول صابون (۳۲۲ گرم صابون) و یک مول آب (۱۸ گرم آب) به دست می‌آید. در نهایت درصد جرمی صابون را در فراورده‌ها حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی صابون در فراورده‌ها} = \frac{\text{جرم مولی صابون}}{\text{مجموع جرم مولی کل فراورده‌ها}} \times 100 = \frac{322}{322 + 18} \times 100 = \frac{32200}{340} \simeq 94/7 \text{ درصد}$$

توجه داریم که جرم اسید چرب مصرف شده در این سؤال، اصلاً اهمیتی ندارد و با استفاده از معادله موازنه شده واکنش به تنهایی، می‌توانیم درصد جرمی صابون را محاسبه کنیم.

تاز

۳- **محلول ۵ لیتری از سود با $pH = 13/5$، با ۱۲۸ گرم از اسید چرب با فرمول شیمیایی $C_{16}H_{32}O_2$ واکنش می‌دهد. باز باقیمانده در این محلول، با چند گرم هیدرازین بر اساس معادلهٔ زیر و در حضور مقدار کافی فلز روی واکنش داده و طی این فرایند، چند گرم آمونیاک تولید می‌شود؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.** $(O = 16 , N = 14 , C = 12 , H = 1 : g.mol^{-1})$

$$N_2H_4(g) + Zn(s) + NaOH(aq) \rightarrow Na_2ZnO_2(aq) + NH_3(aq)$$

۱) ۸ - ۱۷ ۲) ۱۶ - ۱۷ ۳) ۸ - ۳۴ ۴) ۱۶ - ۳۴

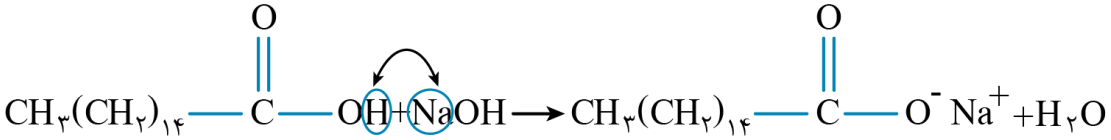
پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۶ ـ ۱۲۰۱)

طی این فرایند، محلول ۵ لیتری از سود با $pH = 13/5$ مصرف شده است. بر این اساس، غلظت سدیم هیدروکسید موجود در این محلول را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$[OH^-] = 10^{pH-14} \Longrightarrow [OH^-] = 10^{13/5-14} = 10^{-0/5} = 10^{0/5} \times 10^{-1} = 0/3\ mol.L^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{سدیم هیدروکسید یک باز قوی است، پس غلظت اولیه باز با غلظت یون هیدروکسید برابر است}} [NaOH] = [OH^-] = 0/3\ mol.L^{-1}$$

محلول مورد نظر، ۵ لیتر حجم داشته و غلظت سود در آن برابر با ۰/۳ مول بر لیتر است، پس در کل این محلول ۱/۵ مول سدیم هیدروکسید وجود دارد. معادله واکنش تولید صابون‌ها با استفاده از اسیدهای چرب به‌صورت زیر است:



ابتدا معادله واکنش انجام شده بین محلول سود و اسید چرب را می‌نویسیم:

$$C_{16}H_{32}O_2 + NaOH \longrightarrow C_{16}H_{31}O_2Na + H_2O$$

طی این فرایند، نوعی صابون با فرمول شیمیایی $C_{16}H_{31}O_2Na$ تولید شده است. با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال، مقداری از محلول سود صرف واکنش با اسید چرب شده است. با توجه به جرم اسید چرب، مقدار سود مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ mol\ NaOH = 128\ g\ C_{16}H_{32}O_2 \times \frac{1\ mol\ C_{16}H_{32}O_2}{256\ g\ C_{16}H_{32}O_2} \times \frac{1\ mol\ NaOH}{1\ mol\ C_{16}H_{32}O_2} = 0/5\ mol$$

در محلول اولیه، ۱/۵ مول سدیم هیدروکسید وجود داشته و ۰/۵ مول از این ماده در واکنش با اسید چرب مصرف شده است. بر این اساس، می‌توان گفت ۱ مول سدیم هیدروکسید در محلول باقی مانده است. معادله واکنش دوم انجام شده به‌صورت زیر است:

$$N_۲H_۴(g) + Zn(s) + ۲NaOH(aq) \rightarrow Na_۲ZnO_۲(aq) + ۲NH_۳(aq)$$

با توجه به معادله این واکنش، جرم هیدرازین مصرف شده و جرم آمونیاک تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,N_۲H_۴ = ۱\,mol\,NaOH \times \frac{۱\,mol\,N_۲H_۴}{۲\,mol\,NaOH} \times \frac{۳۲\,g\,N_۲H_۴}{۱\,mol\,N_۲H_۴} = ۱۶\,g$$

$$?\,g\,NH_۳ = ۱\,mol\,NaOH \times \frac{۲\,mol\,NH_۳}{۲\,mol\,NaOH} \times \frac{۱۷\,g\,NH_۳}{۱\,mol\,NH_۳} = ۱۷\,g$$

انواع پاک‌کننده‌های خورنده

پاک‌کننده‌های خورنده، موادی با خاصیت اسیدی یا بازی قوی هستند. در رابطه با این نوع از پاک‌کننده‌ها داریم:

۱- شوینده‌های خورنده بازی: از این شوینده‌ها برای پاک کردن رسوب‌ها و آلودگی‌هایی با خاصیت اسیدی استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر مسیر لوله‌ای با مخلوط اسیدهای چرب (نوعی ماده اسیدی) مسدود شده باشد، برای باز کردن راه آن می‌توان از محلول سدیم هیدروکسید استفاده کرد. بر این اساس، محلول غلیظ سدیم هیدروکسید، به‌عنوان لوله‌بازکن کاربرد دارد. محلول سدیم هیدروکسید براساس معادله زیر با این آلودگی‌ها واکنش می‌دهد:

$$RCOOH(s) + NaOH(aq) \rightarrow RCOONa(aq) + H_۲O(l)$$

یکی از فراورده‌های این واکنش، صابون است. صابون حاصل از این واکنش، در آب حل شده و می‌تواند چربی‌های اضافی را بزداید.

۲- شوینده‌های خورنده اسیدی: از این پاک‌کننده‌ها برای زدودن آلودگی‌هایی با خاصیت بازی استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر مسیر لوله‌ای با رسوب کلسیم کربنات بسته شده باشد، برای باز کردن راه آن می‌توان از محلول هیدروکلریک اسید (HCl) استفاده کرد.

ماز

۴- کدام‌یک از مطالب داده شده نادرست است؟

۱) برای جلوگیری از تشکیل رسوب صابون در زمان استفاده از آب سخت، به برخی از صابون‌ها نمک‌های فسفات اضافه می‌کنند.

۲) پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف صابون‌ها با آلودگی‌ها واکنش داده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند.

۳) پاک‌کننده ساخته شده از مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم، در هنگام واکنش با آب گرما آزاد می‌کند.

۴) از واکنش میان پودر جامد دی‌نیتروژن پنتاکسید با آب، نوعی پاک‌کننده خورنده با خاصیت بازی ایجاد می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحه ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

اکسیدهای حاصل از برخی عناصر، با مولکول‌های آب وارد واکنش شده و pH آب را تغییر می‌دهند. دی‌نیتروژن پنتاکسید، کربن دی‌اکسید، گوگرد دی‌اکسید و گوگرد تری‌اکسید، در دسته اکسیدهای اسیدی قرار دارند و براساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

$$N_۲O_۵(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲HNO_۳(aq) \rightarrow ۲H^+(aq) + ۲NO_۳^-(aq)$$
$$CO_۲(g) + H_۲O(l) \rightarrow H_۲CO_۳(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCO_۳^-(aq)$$
$$SO_۳(g) + H_۲O(l) \rightarrow H_۲SO_۴(aq) \rightarrow ۲H^+(aq) + SO_۴^{۲-}(aq)$$
$$SO_۲(g) + H_۲O(l) \rightarrow H_۲SO_۳(aq) \rightleftharpoons ۲H^+(aq) + SO_۳^{۲-}(aq)$$

در واکنش دی‌نیتروژن پنتاکسید با آب، نیتریک اسید تولید می‌شود. این ماده، یک اسید قوی است و در شرایط مناسب، به‌عنوان نوعی پاک‌کننده خورنده اسیدی برای پاک کردن آلودگی‌هایی با خاصیت بازی کاربرد دارد.

اکسیدهای بازی

به‌طور کلی، اکسیدهای فلزی (مثل سدیم اکسید) را اکسیدهای بازی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروکسید شده و pH محلول را افزایش می‌دهند. باریم اکسید، لیتیم اکسید، سدیم اکسید و کلسیم اکسید (آهک)، در دسته اکسیدهای بازی قرار دارند و براساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

$$BaO(s) + H_۲O(l) \rightarrow Ba(OH)_۲(aq) \rightarrow Ba^{۲+}(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$Na_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲NaOH(aq) \rightarrow ۲Na^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$CaO(s) + H_۲O(l) \rightarrow Ca(OH)_۲(aq) \rightarrow Ca^{۲+}(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$Li_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲LiOH(aq) \rightarrow ۲Li^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$

توجه داریم که اکسیدهای حاصل از فلزهای واسطه مثل اکسیدهای آهن، اکسیدهای مس و ... و آلومینیم اکسید، اصلاً با آب واکنش نداده و خاصیت بازی ندارند.

بررسی گزینه‌ها:

۱) نمک‌های فسفات برای جلوگیری از تشکیل رسوب صابون با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت، به صابون اضافه می‌شوند. در این حالت، به‌جای صابون، این نمک‌های فسفات هستند که با یون‌های کلسیم و منیزیم واکنش می‌دهند و به‌صورت رسوب درمی‌آیند.

۲) پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف صابون‌ها با آلودگی‌ها واکنش داده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند؛ درحالی‌که صابون‌ها فقط به کمک برهم‌کنش‌های بین مولکولی موجب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند.

۳) واکنش انجام شده بین پاک‌کننده‌های ساخته شده از مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم با آب به‌صورت زیر است:

$$\text{مخلوط سدیم هیدروکسید و آلومینیم} + \text{آب} \rightarrow \text{گاز هیدروژن} + \text{گرما} + \text{فراورده‌های دیگر}$$

این پاک‌کننده‌ها به شکل پودر عرضه می‌شوند. همان‌طور که مشخص است، واکنش میان این پاک‌کننده‌ها و آب گرماده بوده و با آزاد شدن گرما همراه است. گرمای حاصل از این واکنش موجب سست شدن آلودگی‌ها شده و قدرت نفوذ پاک‌کننده به درون آلودگی‌ها را افزایش می‌دهد و در نتیجهٔ آن، قدرت پاک‌کنندگی این نوع پاک‌کننده افزایش می‌یابد.

ماز

۵- با اضافه کردن چند میلی‌لیتر آب مقطر به $40\ mL$ محلول HCl با $pH = 1/3$، می‌توان محلولی ساخت که pH آن با pH محلول ۲ مول بر لیتر اسید HX با $K_a = 5 \times 10^{-5}$ برابر شود؟

۱) ۴۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۶۰

پاسخ: گزینه ۴ **(متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحه ۲۵ ـ ۱۲۰۱)**

مراحل حل این سؤال، به‌صورت خلاصه به شرح زیر هستند:

گام اول: محاسبه pH محلول اسید HX

گام دوم: محاسبه میزان تغییر pH محلول هیدروکلریک اسید

گام سوم: به‌دست آوردن مقدار آب مقطر لازم برای تغییر pH محلول

ابتدا مقدار pH محلول اسید HX را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$K_a = M\alpha^2 \Longrightarrow 5 \times 10^{-5} = 2 \times \alpha^2 \Longrightarrow \alpha^2 = 2/5 \times 10^{-5} = 25 \times 10^{-6} \Longrightarrow \alpha = 5 \times 10^{-3}$$
$$[H^+] = M \times \alpha \times n = 2 \times 5 \times 10^{-3} \times 1 = 10^{-2}\ mol.L^{-1}$$
$$pH = -log[H^+] = -log\ (10^{-2}) = 2$$

برای محاسبه غلظت یون هیدروژن در محلول اسید ضعیف HX، از رابطه زیر هم می‌توانستیم استفاده کنیم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} = \sqrt{5 \times 10^{-5} \times 2} = \sqrt{10^{-4}} = 10^{-2}\ mol.L^{-1}$$
$$pH = -log[H^+] = -log\ (10^{-2}) = 2$$

طبق فرض سؤال، می‌خواهیم مقدار pH محلول هیدروکلریک اسید را از ۱/۳ به ۲ برسانیم. اگر محلول یک اسید قوی مثل هیدروکلریک اسید و یا یک باز قوی مثل سدیم هیدروکسید را n مرتبه رقیق کنیم (حجم محلول را با اضافه‌کردن آب خالص به آن، n برابر کنیم)، مقدار pH این محلول به اندازه $log(n)$ واحد به pH ناحیه خنثی $(pH = 7)$ نزدیک‌تر می‌شود. طی این فرایند، pH محلول به اندازه ۰/۷ واحد تغییر کرده است، پس داریم:

$$log\ n = 0/7 \Longrightarrow n = 10^{0/7} = 5$$

با توجه به محاسبات بالا، حجم محلول مورد نظر با استفاده از آب خالص ۵ برابر شده و از ۴۰ میلی‌لیتر به ۲۰۰ میلی‌لیتر رسیده است، پس حجم آب مورد نیاز برای انجام این فرایند برابر با ۱۶۰ میلی‌لیتر خواهد بود.

تغییر غلظت محلول‌های اسیدی و بازی

در رابطه با تغییر غلظت محلول‌های اسیدی و بازی، به نکات زیر توجه کنید:

- اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم (حجم محلول را با اضافه‌کردن آب خالص به آن، n برابر کنیم)، pH این محلول به اندازه $\log n$ واحد به pH ناحیه خنثی ($pH = ۷$) نزدیک‌تر می‌شود.
- اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه غلیظ کنیم (با افزایش مقدار اسید و یا کاهش مقدار آب موجود در محلول)، pH این محلول به اندازه $\log n$ واحد از pH ناحیه خنثی ($pH = ۷$) دورتر می‌شود.
- اگر محلول یک اسید ضعیف (مثل هیدروفلوئوریک اسید و یا هیدروسیانیک اسید) و یا یک باز ضعیف (مثل آمونیاک) را n مرتبه رقیق کنیم، pH این محلول به اندازه کم‌تر از $\log n$ واحد به pH ناحیه خنثی ($pH = ۷$) نزدیک‌تر می‌شود.
- اگر محلول یک اسید ضعیف و یا یک باز ضعیف را به اندازه n مرتبه غلیظ کنیم، pH این محلول به اندازه کم‌تر از $\log n$ واحد از مقدار pH ناحیه خنثی ($pH = ۷$) دورتر می‌شود.

۶- مقدار ۲/۴ گرم از یک اکسید گوگرد را در آب حل می‌کنیم تا ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول سولفوریک اسید تولید شود. اگر این محلول اسیدی با ۰/۰۲ مول هیدروکسید فلز M به‌طور کامل خنثی شود، نسبت شمار آنیون به کاتیون در نمک حاصل از این واکنش کدام است؟ ($S = ۳۲ , O = ۱۶ : g.mol^{-1}$)

(معادله واکنش را موازنه کنید.) $H_۲SO_۴(aq) + M(OH)_n \rightarrow M_۲(SO_۴)_n + H_۲O(l)$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۰/۵ ۴) ۱/۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحه ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

گوگرد تری‌اکسید، از جمله اکسیدهای اسیدی نافلزی بوده و در هنگام انحلال در آب، با تولید سولفوریک اسید در محلول، غلظت یون هیدروژن موجود در محلول مورد نظر را افزایش می‌دهد. این ماده، از مولکول‌های ناقطبی تشکیل شده است. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$SO_۳(g) + H_۲O(l) \rightarrow H_۲SO_۴(aq)$$

ابتدا تعداد مول $H_۲SO_۴$ تولید شده در این واکنش را حساب می‌کنیم:

$$?\,mol\,H_۲SO_۴ = ۲/۴\,g\,SO_۳ \times \frac{۱\,mol\,SO_۳}{۸۰\,g\,SO_۳} \times \frac{۱\,mol\,H_۲SO_۴}{۱\,mol\,SO_۳} = ۰/۰۳\,mol$$

سولفوریک اسید، بر اساس معادله زیر با یک هیدروکسید فلزی واکنش داده است:

$$nH_۲SO_۴ + ۲M(OH)_n \rightarrow M_۲(SO_۴)_n + ۲nH_۲O$$

در ادامه، تعداد مول $M(OH)_n$ مصرف شده در واکنش دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,M(OH)_n = ۰/۰۳\,mol\,H_۲SO_۴ \times \frac{۲\,mol\,M(OH)_n}{n\,mol\,H_۲SO_۴} = ۰/۰۲\,mol\,M(OH)_n \Longrightarrow n = \frac{۰/۰۳ \times ۲}{۰/۰۲} = ۳$$

بنابراین نسبت شمار آنیون به کاتیون در نمک حاصل یعنی $M_۲(SO_۴)_۳$ برابر $۱/۵ = \frac{۳}{۲}$ است.

۷- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ اگر در دمای ثابت غلظت یون هیدروکسید در یک محلول اسیدی ۲ برابر شود، pH این محلول یک واحد افزایش پیدا می‌کند.

ب ـ در شرایط یکسان، مقداری محلول شیشه‌پاک‌کن جریان الکتریسیته را کمتر از محلول لوله‌بازکن عبور می‌دهد.

ج ـ منیزیم هیدروکسید، از مواد موجود در ضد اسیدها بوده و هر مول از آن، یک مول اسید معده را خنثی می‌کند.

د ـ دیواره داخلی معده انسان، به‌طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم موجود در معده را جذب می‌کند.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحه ۳۲ ـ ۱۲۰۱)

عبارت‌های (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) غلظت یون هیدروکسید در محلول اسیدی ۲ برابر شده است. با توجه به ثابت بودن حاصل‌ضرب غلظت یون‌های هیدروژن و هیدروکسید ($[H^+][OH^-]$) در دمای ثابت در یک محلول، می‌توان گفت غلظت یون هیدروژن (H^+) در این محلول ۰/۵ برابر شده است. اگر غلظت اسید یا باز موجود در یک محلول را افزایش دهیم، pH محلول موردنظر از عدد ۷ دورتر می‌شود و اگر غلظت اسید یا باز موجود در یک محلول را کاهش دهیم، pH محلول موردنظر به عدد ۷ نزدیک‌تر می‌شود. چون غلظت یون هیدروژن در این محلول اسیدی کاهش یافته است، پس می‌توان گفت طی این فرایند pH محلول مورد نظر به ۷ نزدیک‌تر شده و افزایش یافته است. به‌طورکلی، اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم، pH این محلول به اندازه $|log\ (n)|$ واحد به pH ناحیه خنثی ($pH = ۷$) نزدیک‌تر می‌شود. غلظت اسید مورد نظر ۰/۵ برابر شده پس pH این اسید به اندازه $|log\ (۰/۵)| = ۰/۳$ واحد افزایش یافته است.

خودیونش آب

بر اساس مشاهدات تجربی، نمونه‌ای از آب خالص، رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد که وجود آن را به حضور مقدار بسیار اندکی از یون‌های هیدروکسید و هیدروژن (یا همان هیدرونیوم) در آب خالص نسبت می‌دهند. یون‌های موردنظر، براساس واکنش $H_۲O(l) \rightleftharpoons H^+(aq) + OH^-(aq)$ در آب تولید می‌شوند. ثابت تعادل این واکنش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H_۲O(l) \rightleftharpoons OH^-(aq) + H^+(aq) \qquad K = K_W = [OH^-]\ [H^+]$$

آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد که مقدار K_W در دمای اتاق (۲۵ درجه سانتی‌گراد)، برابر با $۱۰^{-۱۴} mol^۲.L^{-۲}$ است که این مقدار، همانند ثابت تعادل سایر واکنش‌ها، فقط و فقط تابع دما است. از آن‌جا که در آب خالص، همواره غلظت یون‌های هیدروژن و هیدروکسید با هم برابر هستند، خواهیم داشت:

$$K_W = [H^+][OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \xrightarrow{[H^+]=[OH^-]} ۱۰^{-۱۴} = [H^+]^۲ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۷} mol.L^{-۱}$$

ب) در شیشه‌پاک‌کن از محلول آمونیاک و در لوله بازکن از محلول سود استفاده می‌شود. چون محلول سود ثابت یونش بازی بالاتر و غلظت یون‌های محلول بیشتری دارد، پس می‌توان گفت در شرایط یکسان، یک نمونه از محلول شیشه‌پاک‌کن جریان الکتریسیته را کمتر از محلول لوله‌بازکن عبور می‌دهد.

ج) منیزیم هیدروکسید، یکی از مواد موجود در ضد اسیدها است. هر مول از این ماده با ۲ مول اسید معده (هیدروکلریک اسید) واکنش داده و آن را خنثی می‌کند. واکنش انجام شده طی این فرایند به‌صورت زیر است:

$$Mg(OH)_۲(s) + ۲HCl(aq) \rightarrow MgCl_۲(aq) + ۲H_۲O(l)$$

ضد اسیدهای معده

برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده افرادی که به بیماری‌های معده‌ای دچار هستند، از داروهایی به نام ضد اسید استفاده می‌کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی کردن اسید معده و افزایش pH محتویات معده می‌شوند. مواد مؤثر موجود در ضد اسیدهای مختلف، شامل منیزیم هیدروکسید، آلومینیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات (جوش‌شیرین) می‌شوند. برای مثال، شیر منیزی یکی از رایج‌ترین ضد اسیدهای مورد استفاده به شمار می‌رود که ماده مؤثر موجود در آن، منیزیم هیدروکسید است. از آن‌جا که ماده موجود در این دارو انحلال‌پذیری بسیار کمی در آب دارد، شیر منیزی را می‌توان یک مخلوط ناهمگن و متعلق به دسته سوسپانسیون‌ها به حساب آورد.

د) درون معده، یک محیط بسیار اسیدی است که حتی می‌تواند فلز روی را در خود حل کند! دیواره داخلی معده به‌طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم را دوباره جذب می‌کند. این جذب سبب نابودی سلول‌های سازنده دیواره معده می‌شود. حال اگر مقدار اسید معده به هر دلیل بیش از اندازه باشد، شمار یون‌های جذب شده افزایش یافته و سبب درد، التهاب و گاهی خونریزی معده می‌شود.

۸- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) پرکاربردترین شکل انرژی در استفاده از فناوری‌هایی مثل فناوری مربوط به گرمایش آسان‌تر، انرژی الکتریکی است.
۲) اکسیژن یکی از نافلزهای فعال است که به‌عنوان عامل اکسنده تمایل دارد با اغلب عناصر فلزی واکنش دهد.
۳) گونه اکسنده مصرف شده در واکنش فلز کلسیم و گاز $O_۲$، دارای ۸ الکترون با $n = ۳$ در اتم خود است.
۴) با قرار دادن قطعه آهن در محلول مس (II) سولفات، با گذشت زمان رنگ محلول مورد نظر تغییر می‌کند.

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحه ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

معادله واکنش انجام شده به‌صورت $۲Ca(s) + O_۲(g) \rightarrow ۲CaO(s)$ است. گونه کاهنده (گونه‌ای که اکسید شده و یک ماده دیگر را می‌کاهد) مصرف شده در این واکنش، معادل با فلز کلسیم است. فلز کلسیم دارای ۸ الکترون با $n = ۳$ در هر اتم خود است. توجه داریم که در این واکنش، اکسیژن معادل با گونه اکسنده بوده و در لایه الکترونی سوم آن، هیچ الکترونی وجود ندارد.

اکسایش و کاهش

الکترون، یکی از ذرات زیراتمی است. این ذره، بار الکتریکی نسبی ۱- داشته و در اطراف هسته اتم در حال گردش است. این ذره زیراتمی، علم شیمی و الکتریسیته را به یکدیگر پیوند داده است. در واقع، واکنش‌های الکتروشیمیایی نوعی از واکنش‌ها هستند که در آن‌ها الکترون از یک گونه به گونه دیگر منتقل می‌شود. در واکنش‌های الکتروشیمیایی، اکسایش (اکسید شدن) به معنای از دست دادن الکترون توسط یک گونه و کاهش (کاهش یافتن) به معنای گرفتن الکترون توسط یک گونه است. در یک واکنش الکتروشیمیایی (یا همان واکنش اکسایش-کاهش)، یک گونه اکسید شده و الکترون‌های خود را به گونه دیگر می‌دهد تا آن گونه کاهش پیدا کند. بدیهی است که در این فرایندها، گونه اکسید شده و کاهش یافته باید به‌صورت هم‌زمان وجود داشته باشند.

بررسی گزینه‌ها:

۱) انرژی الکتریکی، پرکاربردترین شکل انرژی مورد نیاز برای استفاده از فناوری‌های مختلف بوده و الکتروشیمی شاخه‌ای از علم شیمی است که در بهبود خواص مواد و تأمین انرژی نقش بسزایی دارد.

۲) اغلب فلزها، در واکنش با نافلزها تمایل دارند یک یا چند الکترون از دست داده و اکسید شوند. اکسیژن یکی از نافلزهای فعال است که به‌عنوان اکسنده با اغلب فلزها واکنش می‌دهد. توجه داریم که اکسیژن با برخی فلزها که واکنش‌پذیری پایینی دارند، مانند طلا و پلاتین، واکنش نمی‌دهد.

طلا

طلا، یکی از فلزهای نجیب است که معادلهٔ نیم‌واکنش کاهشی آن به‌صورت زیر است:

$Au^{۳+}(aq) + ۳e^- \rightarrow Au(s) \quad ; \quad E^\circ = ۱/۵۰\ V$

از آن‌جا که E° این نیم‌واکنش بزرگ‌تر از E° نیم‌واکنش کاهش اکسیژن است، مولکول‌های اکسیژن نمی‌توانند اتم‌های طلا را اکسید کنند و به همین علت، با گذشت زمان فلز طلا در هوای مرطوب و حتی در اعماق دریاها همچنان درخشان باقی می‌ماند و زنگ نمی‌زند. فلز پلاتین نیز همانند طلا در دسته فلزهای نجیب قرار دارد و حتی در محیط‌های اسیدی نیز دچار خوردگی نمی‌شود.

۴) با قرار دادن یک قطعه آهن در محلول مس (II) سولفات، با گذشت زمان واکنش زیر انجام می‌شود:

$$Fe(s) + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Fe^{۲+}(aq) + Cu(s)$$

با انجام شدن این واکنش، یون‌های آبی‌رنگ مس به‌صورت رسوب درآمده و از محلول خارج می‌شوند، اما یون‌های سبزرنگ آهن (II) تولید شده و وارد محلول می‌شوند، پس می‌توان گفت طی این فرایند، یک محلول سبزرنگ ایجاد می‌شود. توجه داریم که یون‌های آهن (II) و آهن (III)، در محلول‌های آبی به‌ترتیب رنگ‌های سبز و زرد را ایجاد می‌کنند.

۹- کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) در واکنش هیدروکلریک اسید با فلزها، یون کلرید نقشی در فرایند اکسایش-کاهش ندارد.

۲) فلز آهن، در مقایسه با فلز آلومینیم، دمای محلول مس (II) سولفات را به مقدار بیشتری افزایش می‌دهد.

۳) در سلول روی-مس، آنیون‌های موجود در الکترولیت از خلال دیواره متخلخل به سمت نیم‌سلول مس مهاجرت می‌کنند.

۴) ضریب الکترون در نیم‌واکنش تبدیل یون $Sn^{۴+}$ به $Sn^{۲+}$، دو برابر ضریب الکترون در نیم‌واکنش اکسایش یون F^- است.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحه ۴۵ ـ ۱۲۰۲)

واکنش فلزها با هیدروکلریک اسید به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$M + nHCl \longrightarrow MCl_n + \frac{n}{۲}H_۲$$

در این واکنش، فلزهایی که چند ظرفیت مختلف دارند، با کمترین ظرفیت خود در واکنش شرکت می‌کنند. برای مثال، آهن دارای ظرفیت‌های ۲+ و ۳+ است، پس در واکنش با اسیدها با ظرفیت ۲+ خود وارد محلول می‌شود. در این واکنش، یون H^+ کاهش یافته و فلز اکسایش می‌یابد؛ بنابراین در این فرایند یون کلرید اکسایش یا کاهش نمی‌یابد و در واکنش شرکت نمی‌کند. می‌توان این واکنش را به‌صورت زیر نوشت:

$$M + nH^+ \longrightarrow M^{n+} + \frac{n}{۲}H_۲$$

واکنش فلزها با اسیدها

به‌جز عناصر طلا، پلاتین، جیوه، نقره و مس، سایر فلزها با یون هیدروژن موجود در محلول‌های اسیدی واکنش داده و گاز H_2 آزاد می‌کنند. طی این فرایند، اتم‌های فلزی الکترون از دست داده و به‌صورت کاتیون‌ها وارد محلول می‌شوند. به‌عنوان مثال، سدیم طبق معادله زیر با هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد:

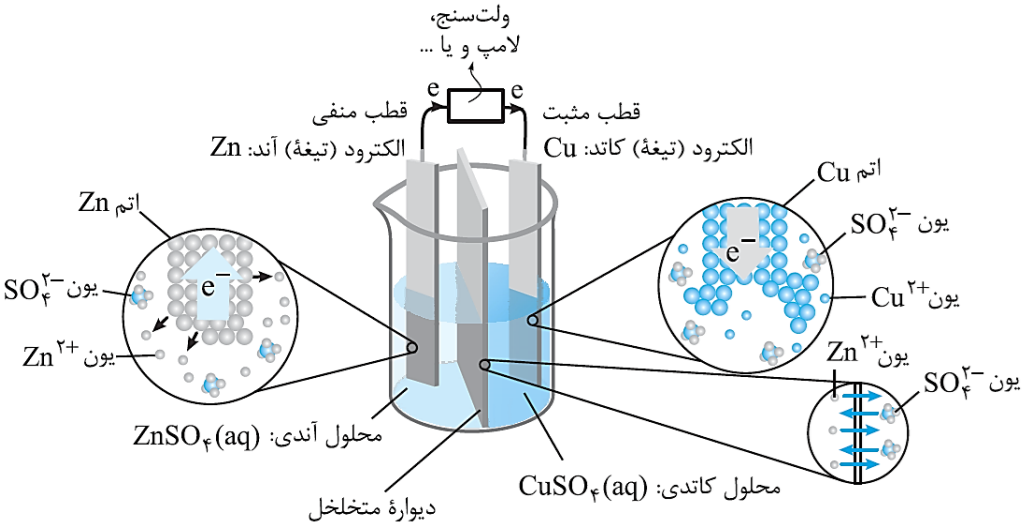
$$2Na(s) + 2HCl(aq) \rightarrow 2NaCl(aq) + H_2(g)$$

توجه داریم که فلزهای موجود در گروه اول (لیتیم، سدیم، پتاسیم و ...)، در قالب کاتیون‌هایی با بار ۱+ وارد محلول می‌شوند. فلزهای موجود در گروه دوم (منیزیم، کلسیم، استرانسیم و ...)، در قالب کاتیون‌هایی با بار ۲+ وارد محلول می‌شوند. فلزهای موجود در گروه ۱۳(آلومینیم و گالیم) نیز در قالب کاتیون‌هایی با بار ۳+ وارد محلول می‌شوند. با افزایش واکنش‌پذیری فلز، افزایش غلظت حل‌شونده در محلول اسیدی و یا افزایش قدرت اسید (K_a) موجود در محلول، سرعت واکنش میان فلز با اسید افزایش یافته و گاز هیدروژن با سرعت بیشتری تولید خواهد شد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ فلز آهن، در مقایسه با یک قطعه فلز آلومینیم، قدرت کاهندگی (تمایل به اکسید شدن) کمتری داشته و با شدت کمتری در واکنش‌های شیمیایی شرکت می‌کند. بر این اساس، می‌توان گفت فلز آلومینیم دمای محلول مس (II) سولفات را به مقدار بیشتری افزایش می‌دهد.

۳ در سلول روی-مس، نیم‌سلول روی در نقش آند بوده و می‌دانیم که در سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، آنیون‌ها به سمت تیغه آندی حرکت می‌کنند. بر این اساس، می‌توان گفت در سلول مورد نظر آنیون‌های موجود در الکترولیت از خلال دیواره متخلخل به سمت نیم‌سلول روی مهاجرت می‌کنند. تصویر زیر، نمایی از سلول گالوانی روی-مس را نشان می‌دهد:



واکنش انجام‌شده در سلول گالوانی روی-مس، مشابه همان واکنشی است که با واردکردن تیغه‌ای از جنس فلز روی به محلول دارای یون‌های مس (II) انجام می‌شود. تنها تفاوت فرایندهای انجام‌شده در آن است که به کمک سلول گالوانی، واکنش موردنظر در یک شرایط کنترل‌شده انجام می‌شود و از جریان الکتریکی ایجادشده در آن می‌توانیم به‌عنوان منبع تولید الکتریسیته استفاده کنیم.

دیواره متخلخل

در یک سلول گالوانی، کاتیون‌ها در سمت آند تولید شده و به‌مرور زمان در الکترولیت آندی تجمع پیدا می‌کنند و این محلول بار مثبت پیدا می‌کند. تجمع بار مثبت در این نیم‌سلول، الکترون‌ها را به سمت خود جذب کرده و از حرکت آن‌ها در مدار خارجی جلوگیری می‌کند. در نیم‌سلول کاتدی نیز به‌مرور زمان غلظت کاتیون‌ها کاهش پیدا کرده و از تعداد آن‌ها کاسته می‌شود. با ادامه این فرایند، تعداد آنیون‌های موجود در محلول کاتدی بیشتر از تعداد کاتیون‌ها شده و این محلول بار منفی پیدا می‌کند. تجمع بار منفی در نیم‌سلول کاتدی، از تمایل این نیم‌سلول به جذب الکترون کاسته و از حرکت آن‌ها در مدار جلوگیری می‌کند. در این موقعیت، دیواره متخلخل وارد میدان شده و مانع قطع‌شدن جریان الکتریکی می‌شود. وظایف دیواره متخلخل عبارت هستند از:

۱ـ جلوگیری از مخلوط‌شدن سریع و مستقیم الکترولیت‌ها

۲ـ ایجاد توازن بار الکتریکی بین نیم‌سلول‌ها

دیواره متخلخل به کاتیون‌های موجود در الکترولیت آندی اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت کاتدی مهاجرت کنند و به آنیون‌های موجود در الکترولیت کاتدی نیز اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت آندی مهاجرت کنند. به این ترتیب، دیواره متخلخل با به جریان انداختن گونه‌های باردار میان محلول‌های موجود در هر نیم‌سلول، سبب خنثی‌کردن بار الکتریکی آن‌ها می‌شود.

۴) نیم‌واکنش تبدیل یون Sn^{4+} به یون Sn^{2+} به‌صورت مقابل است:

$$Sn^{4+}(aq) + 2e \rightarrow Sn^{2+}(aq)$$

نیم‌واکنش اکسایش یون F^- که منجر به تولید گاز فلوئور می‌شود نیز به‌صورت مقابل است:

$$2F^-(aq) \rightarrow F_2(g) + 2e$$

همان‌طور که مشخص است، ضریب الکترون در این نیم‌واکنش‌ها برابر با یکدیگر بوده و معادل با ۲ است.

ماز

۱۰- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن-نقره، بیشتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن-نقره است.

ب ـ اندازه‌گیری پتانسیل هر نیم‌سلول به‌طور جداگانه ممکن نبوده و این کمیت، باید به‌طور نسبی اندازه‌گیری شود.

ج ـ هر مول از گاز هیدروژن وارد شده به نیم‌سلول استاندارد هیدروژن، بیشتر از ۲۲/۴ لیتر حجم را اشغال می‌کند.

د ـ علامت E° فلزهایی که کاهنده‌تر از H_2 هستند، در سری الکتروشیمیایی با نماد مثبت مشخص می‌شود.

۱) «الف» و «ج»　　۲) «الف» و «د»　　۳) «ب» و «ج»　　۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۳　　**(سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحه ۴۷ ـ ۱۲۰۲)**

عبارت‌های (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) نیروی الکتروموتوری (emf) در یک سلول گالوانی، حداکثر اختلاف پتانسیلی است که سلول می‌تواند به وجود بیاورد. مقدار این اختلاف پتانسیل را با نماد E° نیز نشان می‌دهند. برای پیداکردن مقدار emf یک سلول گالوانی، از روش‌های زیر می‌توان کمک گرفت:

✓ نیم‌سلول‌های سازنده سلول را به یکدیگر متصل کرده و مقدار emf را به کمک ولت‌سنج اندازه‌گیری می‌کنیم.

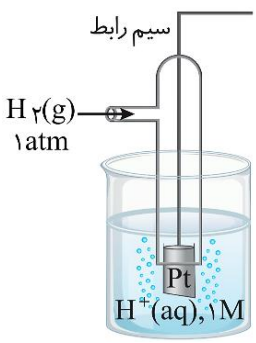
✓ ابتدا آند و کاتد سلول گالوانی موردنظر را پیدا کرده و پس از آن E° آند را از E° کاتد کم می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا، اگر کاتد دو سلول گالوانی یکسان باشد، سلولی که E° آند آن کوچک‌تر است، نیروی الکتروموتوری بیشتری نیز خواهد داشت. چون آهن در مقایسه با هیدروژن پتانسیل کاهشی کوچک‌تری دارد، پس می‌توان گفت نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن-نقره، بیشتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن-نقره است.

نیروی الکتروموتوری

سلول‌های گالوانی، مثل باتری عمل کرده و هر سلول، با توجه به ساختار خود دارای یک ولتاژ خروجی معین است که به آن، نیروی الکتروموتوری گفته می‌شود. توجه داریم که مقدار emf برای سلول‌های گالوانی همواره مقداری مثبت است. چنانچه ولت‌سنج مقدار E° یک سلول را با عددی منفی نشان داد و یا این که پس از محاسبه emf سلول، یک عدد منفی به دست آوردید، فقط به این معناست که موقعیت آند و کاتد سلول را به اشتباه تشخیص داده و قطب‌های ناهم‌نام سلول گالوانی و ولت‌سنج را به یکدیگر وصل کرده‌اید.

ب) اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم‌سلول به‌طور جداگانه ممکن نبوده و باید این کمیت به‌طور نسبی اندازه‌گیری شود. شیمی‌دان‌ها برای دستیابی به این هدف، نیم سلول استاندارد هیدروژن (SHE) را به‌عنوان مبنا انتخاب کرده و پتانسیل آن را برابر با صفر ولت در نظر گرفتند. تصویر زیر، نمایی از این نیم‌سلول را نشان می‌دهد:



نیم‌سلول استاندارد هیدروژن

در نیم‌سلول استاندارد هیدروژن، محلولی با $pH = ۰$ (محلولی که غلظت مولی یون هیدروژن در آن برابر با ۱ مول بر لیتر است) قرار داشته و گاز هیدروژن با فشار ۱ اتمسفر بر روی این محلول دمیده می‌شود. شیمی‌دان‌ها با تشکیل سلول گالوانی از هر نیم‌سلول با نیم‌سلول استاندارد هیدروژن، توانستند پتانسیل الکتریکی بسیاری از نیم‌سلول‌ها را اندازه‌گیری کرده و در جدولی به نام سری الکتروشیمیایی ثبت کنند.

ج) حجم مواد گازی با دمای آن‌ها رابطه مستقیم دارد. با افزایش دما، حجم نمونه‌های گازی افزایش پیدا می‌کند. پتانسیل الکتریکی نیم‌سلول استاندارد هیدروژن در دمای $۲۵^{\circ}C$ و فشار ۱ اتمسفر اندازه‌گیری می‌شود. در شرایط STP(دمای $۰^{\circ}C$ و فشار ۱ اتمسفر) حجم هر مول از گازها برابر ۲۲/۴ لیتر می‌شود؛ پس می‌توان گفت در دمای $۲۵^{\circ}C$ و فشار ۱ اتمسفر، حجم هر مول از مواد گازی بیشتر از ۲۲/۴ لیتر می‌شود.

د) هر فلزی که کاهنده‌تر از هیدروژن باشد (در مقایسه با هیدروژن تمایل بیشتری به اکسید شدن (از دست دادن الکترون) داشته باشد)، در سری الکتروشیمیایی در موقعیت پایین‌تری در مقایسه با هیدروژن قرار می‌گیرد.

سری الکتروشیمیایی

پتانسیل کاهشی استاندارد فلزهایی که در سری الکتروشیمیایی در مقایسه با هیدروژن در موقعیت پایین‌تری قرار دارند، منفی است. در نقطه‌ی مقابل، فلزهایی که در مقایسه با هیدروژن قدرت کاهندگی کمتری دارند (طلا، پلاتین، نقره و مس)، در سری الکتروشیمیایی در مقایسه با هیدروژن در موقعیت بالاتری قرار داشته و پتانسیل کاهشی آن‌ها نیز بزرگ‌تر از صفر است. توجه داریم که در سری الکتروشیمیایی، نیم‌واکنش‌ها به شکل کاهشی نوشته شده‌اند و این پیشنهاد آیوپاک، برای هماهنگی در همه منابع علمی معتبر به کار گرفته می‌شود. در هر نیم‌واکنش، گونه کاهنده (گونه‌ای که الکترون داده و اکسید می‌شود) در سمت راست و گونه اکسنده در سمت چپ نوشته می‌شود.

مثال

۱۱- درصد جرمی مس در آلیاژی از منگنز و مس، برابر ۶۰٪ است. اگر بر اثر واکنش کامل این قطعه با محلول هیدروبرمیک اسید، $۸/۹۶L$ گاز در شرایط استاندارد تولید شود، جرم این قطعه برابر با چند گرم است؟ $(Cu = ۶۴ , Mn = ۵۵ : g.mol^{-۱})$

$E^{\circ}(Cu^{۲+}/Cu) = +۰/۳۴\ V$ $\quad$ $E^{\circ}(Mn^{۲+}/Mn) = -۱/۱۸\ V$

۱) ۳۸/۵ $\quad$ ۲) ۲۷/۵ $\quad$ ۳) ۷۷ $\quad$ ۴) ۵۵

پاسخ: گزینه ۴ $\quad$ **(آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحه ۴۲ ـ ۱۲۰۲)**

از آنجا که E° فلزهای منگنز (Mn) و مس (Cu) به‌ترتیب منفی و مثبت است، بنابراین تنها فلز منگنز (Mn) با اسید واکنش می‌دهد و فلز مس بدون تغییر باقی می‌ماند. معادله این واکنش به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} Mn(s) + ۲HBr(aq) \rightarrow MnBr_۲(aq) + H_۲(g) \\ Cu(s) + HBr(aq) \rightarrow \quad \text{واکنش نمی‌دهد} \end{cases}$$

با استفاده از حجم گاز $H_۲$ آزاد شده، جرم Mn مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{جرم } Mn \text{ مصرف شده} = ۸/۹۶\ L\ H_۲ \times \frac{۱\ mol\ H_۲}{۲۲/۴\ L\ H_۲} \times \frac{۱\ mol\ Mn}{۱\ mol\ H_۲} \times \frac{۵۵\ g\ Mn}{۱\ mol\ Mn} = ۲۲\ g$$

طبق فرض سؤال، درصد جرمی مس در آلیاژ داده شده برابر با ۶۰٪ است. بر این اساس، می‌توان گفت درصد جرمی منگنز در آلیاژ برابر با $۱۰۰ - ۶۰ = ۴۰$ درصد است، بنابراین داریم:

$$\text{درصد جرمی منگنز} = \frac{\text{جرم منگنز}}{\text{جرم آلیاژ}} \times ۱۰۰ \Longrightarrow \text{جرم آلیاژ} = \frac{\text{جرم منگنز}}{\text{درصد جرمی منگنز}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۲}{۴۰} \times ۱۰۰ = ۵۵\ g$$

فلزات کاهنده‌تر از هیدروژن

تصویر زیر، بخشی از سری الکتروشیمیایی که در آن تعدادی از فلزهای کاهنده‌تر از هیدروژن مشخص شده‌اند را نشان می‌دهد:

E°(V)	نیم‌واکنش کاهش		
ولتاژ	گونهٔ کاهنده	الکترون	گونهٔ اکسنده
۰/۰۰	$H_2(g)$	$+2e^- \rightarrow$	$2H^+(aq)$
-۰/۴۴	$Fe(s)$	$+2e^- \rightarrow$	$Fe^{2+}(aq)$
-۰/۷۶	$Zn(s)$	$+2e^- \rightarrow$	$Zn^{2+}(aq)$
-۱/۱۸	$Mn(s)$	$+2e^- \rightarrow$	$Mn^{2+}(aq)$
-۱/۶۶	$Al(s)$	$+3e^- \rightarrow$	$Al^{3+}(aq)$
-۲/۳۷	$Mg(s)$	$+2e^- \rightarrow$	$Mg^{2+}(aq)$

کاهندهٔ قوی‌تر ↓ — اکسندهٔ قوی‌تر ↑

تاز

۱۲- کدام‌یک از مطالب داده شده نادرست است؟ ($Zn = ۶۵ , Ag = ۱۰۸ : g.mol^{-1}$)

۱) با قرار گرفتن یک تیغه از جنس روی در محلولی از نقره نیترات، جرم این تیغه فلزی کاهش پیدا می‌کند.

۲) با کاهش قدرت کاهندگی فلز به‌کار رفته در آند یک سلول گالوانی، مقدار emf سلول کاهش پیدا می‌کند.

۳) دیواره متخلخل سلول‌های گالوانی، کمک می‌کند تا محلول‌های آندی و کاتدی از نظر بار الکتریکی خنثی بمانند.

۴) مقایسه قدرت اکسندگی یون‌های لیتیم، روی، مس و هیدروژن به‌صورت $Li^+ < Zn^{2+} < H^+ < Cu^{2+}$ است.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحه ۴۷ ـ ۱۲۰۲)

چون فلز روی در مقایسه با نقره کاهنده‌تر بوده و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون دارد، با قرار گرفتن یک تیغه از جنس روی در محلول نقره نیترات، واکنش زیر در محلول انجام می‌شود:

$$Zn(s) + 2Ag^+(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2Ag(s)$$

با توجه به معادله این واکنش، به ازای مصرف شدن ۱ مول از اتم‌های روی موجود بر روی تیغه(معادل با ۶۵ گرم روی)، ۲ مول الکترون در سطح تیغه مبادله شده و ۲ مول اتم نقره (معادل با ۲۱۶ گرم نقره) نیز بر روی سطح تیغه رسوب می‌کند. بر این اساس، می‌توان گفت به ازای مبادله هر ۲ مول الکترون در این واکنش، جرم تیغه فلزی به اندازه ۱۵۱ = ۶۵ − ۲۱۶ گرم افزایش پیدا می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) نیروی الکتروموتوری در یک سلول گالوانی، حداکثر اختلاف پتانسیلی است که یک سلول می‌تواند به وجود بیاورد. برای افزایش مقدار emf یک سلول گالوانی، باید از الکترودهایی استفاده کنیم که مقدار E° آن‌ها بیشترین مقدار تفاوت ممکن را با یکدیگر داشته باشد. در واقع هر چه‌قدر که E° کاتد سازنده یک سلول گالوانی بیشتر و E° آند سازنده آن کم‌تر باشد، مقدار emf آن سلول بیشتر می‌شود. با کاهش قدرت کاهندگی (افزایش مقدار E°) نیم‌سلول آندی در یک سلول، مقدار emf آن سلول کاهش پیدا می‌کند.

مقدار emf سلول گالوانی

برای پیداکردن مقدار emf یک سلول گالوانی، از روش‌های زیر می‌توان کمک گرفت:

۱- نیم‌سلول‌های سازنده سلول را به یکدیگر متصل کرده و مقدار emf را به کمک ولت‌سنج اندازه‌گیری می‌کنیم. مقدار emf به‌دست آمده از این روش، مقدار عملی emf سلول را نشان می‌دهد. در این رابطه داریم:

emf عملی = emf نظری × بازده درصدی سلول

۲- ابتدا آند و کاتد سلول گالوانی موردنظر را پیدا کرده و پس از آن E° آند (الکترودی که E° کوچک‌تری دارد) را از E° کاتد (الکترودی که E° بزرگ‌تری دارد) کم می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند})$$

توجه داریم که مقدار emf برای سلول‌های گالوانی همواره مقداری مثبت است.

۳) در یک سلول گالوانی، به‌مرور زمان کاتیون‌ها در الکترولیت آندی تجمع پیدا کرده و این محلول بار مثبت پیدا می‌کند. با انجام شدن نیم‌واکنش کاهش در سمت کاتد، تعداد آنیون‌های موجود در محلول کاتدی نیز بیشتر از تعداد کاتیون‌های موجود در آن شده و این محلول بار منفی پیدا می‌کند. دیواره متخلخل به کاتیون‌های موجود در الکترولیت آندی اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت کاتدی مهاجرت کنند و به آنیون‌های موجود در الکترولیت کاتدی نیز اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت آندی مهاجرت کنند. به این ترتیب، دیواره متخلخل سبب خنثی‌کردن بار الکتریکی آن‌ها شده و از تجمع بار الکتریکی در این نیم‌سلول‌ها جلوگیری می‌کند.

۴) پتانسیل کاهشی یون مس بیشتر از هیدروژن و پتانسیل کاهش یون‌های روی و لیتیم کمتر از هیدروژن است. برای مقایسه میان یون‌های لیتیم و روی نیز می‌دانیم که خاصیت فلزی لیتیم از سایر فلزات بیشتر بوده (پتانسیل کاهشی لیتیم از سایر فلزات کمتر است) و این عنصر، پتانسیل کاهشی کوچک‌تری نسبت به سایر عناصر فلزی دارد. بر این اساس، مقایسه قدرت اکسندگی یون‌های لیتیم، روی، مس و هیدروژن به‌صورت $Li^+ < Zn^{2+} < H^+ < Cu^{2+}$ است.

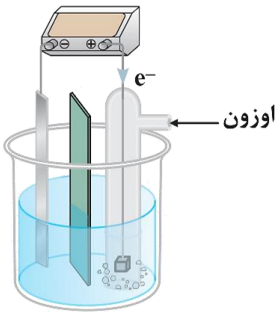
لیتیم

لیتیم یک فلز اصلی از دسته s جدول تناوبی بوده و مقدار پتانسیل کاهشی استاندارد آن در مقایسه با سایر عناصر فلزی کمتر است. علاوه بر این، چگالی لیتیم نیز نسبت به سایر عناصر فلزی کمتر است. با توجه به ویژگی‌های گفته شده، از فلز لیتیم برای ساخت باتری‌های سبک‌تر، کوچک‌تر و با توانایی ذخیره بیشتر انرژی استفاده می‌شود. باتری‌های لیتیمی می‌توانند به شکل دگمه‌ای باشند که در شکل‌ها و اندازه‌های گوناگون به‌کار می‌روند. با افزایش تقاضا برای باتری‌های لیتیمی، این فلز جایگاه ممتازی را در تأمین انرژی جهان پیدا کرده است، به‌طوری‌که سالانه از میلیاردها باتری لیتیمی برای ساختن دستگاه‌های الکترونیکی استفاده می‌شود. این دستگاه‌ها سرانجام به همراه باتری‌های به‌کاررفته در ساختار آن‌ها دور ریخته می‌شوند و به این ترتیب، حجم بزرگی از پسماندهای الکترونیکی تولید می‌شود. این پسماندها به دلیل داشتن مواد شیمیایی گوناگون، سمی بوده و رها کردن آن‌ها در طبیعت موجب آلودگی محیط زیست می‌شود. از طرف دیگر، در برخی از این پسماندها مقدار قابل توجهی از مواد و فلزهای ارزشمند و گران‌قیمت وجود دارد که آن‌ها را به منبع مناسبی برای بازیافت تبدیل می‌کند.

مثال

۱۳- در یک سمت از سلول گالوانی مقابل، نیم‌واکنش موازنه نشده زیر انجام می‌شود:

$$O_2(g) + H^+(aq) + e^- \rightarrow H_2O(l) + O_2(g) \quad ; \quad E^\circ = +2/1\,V$$



اگر تیغه دیگر این سلول از جنس فلز روی باشد، به ازای مصرف ۶/۵ گرم از این فلز، چند الکترون در مدار خارجی سلول جاری شده و تفاوت جرم گاز تولید و مصرف شده در سمت کاتد برابر با چند گرم می‌شود؟ $(Zn = 65 , O = 16 : g.mol^{-1})$

۱) $1/6 - 1/204 \times 10^{23}$

۲) $3/2 - 1/204 \times 10^{23}$

۳) $1/6 - 2/408 \times 10^{23}$

۴) $3/2 - 2/408 \times 10^{23}$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۴۵ ـ ۱۲۰۲)

مراحل حل این سؤال، به‌صورت خلاصه به شرح زیر هستند:

گام اول: محاسبه تعداد الکترون تولید شده در نیم‌واکنش آندی بر اثر اکسایش فلز روی

گام دوم: محاسبه جرم گاز اوزون مصرف شده و جرم گاز اکسیژن تولید شده

گام سوم: به‌دست آوردن تفاوت جرم گازها در نیم‌واکنش کاتدی

چون پتانسیل کاهشی روی کمتر از اوزون است، پس می‌توان گفت گاز اوزون در سمت کاتد مصرف شده و فلز روی، در سمت آند مصرف می‌شود. طبق فرض سؤال، در سمت کاتد این سلول گاز اوزون مصرف شده و گاز اکسیژن تولید می‌شود. معادله نیم‌واکنش کاتدی این سلول به‌صورت زیر است:

$$O_3(g) + 2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow H_2O(l) + O_2(g) \quad ; \quad E^\circ = +2/1\,V$$

در سمت آند این سلول، فلز روی اکسایش پیدا کرده و الکترون تولید می‌کند. معادله نیم‌واکنش آندی انجام شده در این سلول به‌صورت زیر است:

$$Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$$

طبق فرض سؤال، در سمت آند این سلول ۶/۵ گرم فلز روی مصرف شده است. بر این اساس، مقدار الکترون تولید شده در سمت آند این سلول که وارد مدار خارجی شده است را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,e^- \text{ شمار} = ۶/۵\ g\ Zn \times \frac{۱\ mol\ Zn}{۶۵\ g\ Zn} \times \frac{۲\ mol\ e^-}{۱\ mol\ Zn} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ e^-}{۱\ mol\ e^-} = ۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۳}\ e^-$$

با توجه به معادله نیم‌واکنش کاتدی این سلول، به ازای هر ۲ مول الکترون مصرف شده، یک مول اوزون مصرف شده و یک مول گاز اکسیژن تولید می‌شود. بر این اساس، جرم اوزون مصرف شده و جرم اکسیژن تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

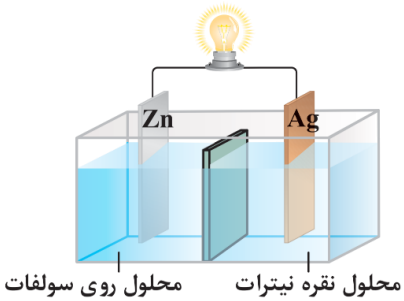
$$?\,g\ O_۳ = ۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۳}\ e^- \times \frac{۱\ mol\ e^-}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ e^-} \times \frac{۱\ mol\ O_۳}{۲\ mol\ e^-} \times \frac{۴۸\ g\ O_۳}{۱\ mol\ O_۳} = ۴/۸\ g$$

$$?\,g\ O_۲ = ۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۳}\ e^- \times \frac{۱\ mol\ e^-}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ e^-} \times \frac{۱\ mol\ O_۲}{۲\ mol\ e^-} \times \frac{۳۲\ g\ O_۲}{۱\ mol\ O_۲} = ۳/۲\ g$$

با توجه به محاسبات فوق، تفاوت جرم گاز اوزون مصرف شده و جرم گاز اکسیژن تولید شده برابر با ۱/۶ گرم است.

ماز

۱۴- در سلول مقابل، آنیون‌های موجود در محلول الکترولیت به سمت تیغه ..... جابه‌جا شده و اگر نیم‌سلول نقره را با نیم‌سلولی از جنس ..... جایگزین کنیم، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی برعکس می‌شود.



۱) نقره ـ آهن
۲) روی ـ آهن
۳) نقره ـ منیزیم
۴) روی ـ منیزیم

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحه ۴۶ ـ ۱۲۰۲)

در یک سلول گالوانی، آنیون‌های موجود در محلول الکترولیت به سمت تیغه آندی و کاتیون‌های موجود در محلول الکترولیت به سمت تیغه کاتدی حرکت می‌کنند. چون پتانسیل کاهشی استاندارد فلز نقره بیشتر از روی است، پس تیغه نقره در نقش کاتد (قطب مثبت) و تیغه روی در نقش آند(قطب منفی) است و آنیون‌های موجود در محلول نیز به سمت تیغه روی حرکت می‌کنند. مقایسه مقدار پتانسیل کاهشی استاندارد فلزهای داده شده در سؤال، به‌صورت زیر است:

پتانسیل کاهشی استاندارد : $Ag > Fe > Zn > Mg$

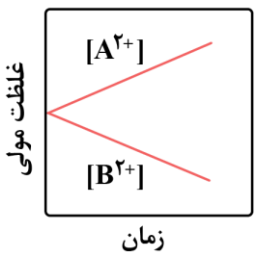
با توجه به مقایسه بالا، اگر بجای نیم‌سلول نقره، نیم‌سلول منیزیم را قرار بدهیم، جای آند و کاتد این سلول برعکس شده و تیغه روی در نقش کاتد قرار می‌گیرد. با انجام این کار، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی برعکس می‌شود.

نیم‌سلول

برای اینکه بتوانیم نیم‌واکنش‌های کاهش و یا اکسایش مربوط به یک عنصر را در یک محیط مستقل انجام بدهیم، باید یک نیم‌سلول را ایجاد کنیم. با قراردادن یک تیغه فلزی در محلولی که حاوی کاتیون‌های آب‌پوشیده آن فلز باشد، یک نیم‌سلول ایجاد می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر یک تیغه مس را در محلول مس(II) سولفات قرار بدهیم، نیم‌سلولی از مس ایجاد می‌شود.

ماز

۱۵- با توجه به نمودار مقابل که تغییر غلظت یون‌ها در یک سلول گالوانی را نشان می‌دهد، کدام‌یک از مطالب داده شده نادرست است؟



۱) در این سلول، الکترودهای A و B می‌توانند به‌ترتیب روی و مس باشند.
۲) جهت حرکت آنیون‌ها در این سلول، از سمت نیم‌سلول B به سمت نیم‌سلول A است.
۳) در این سلول با گذشت زمان، مجموع شمار کاتیون‌ها در محلول‌ها افزایش پیدا می‌کند.
۴) قدرت اکسندگی کاتیون‌های $A^{۲+}$ کمتر از قدرت اکسندگی کاتیون‌های $B^{۲+}$ است.

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحه ۴۷ ـ ۱۲۰۲)

در سمت آند سلول گالوانی، نیم‌واکنش اکسایش انجام شده و غلظت کاتیون در محلول موجود در نیم‌سلول آندی به‌تدریج افزایش پیدا می‌کند. در نقطه مقابل، در سمت کاتد این سلول‌ها نیم‌واکنش کاهش انجام شده و غلظت کاتیون در محلول کاتدی به‌تدریج کاهش پیدا می‌کند. با توجه به نمودار داده شده، کاتیون حاصل از فلز A در حال تولید شدن بوده و کاتیون حاصل از فلز B نیز در حال مصرف شدن است. بر این اساس، می‌توان گفت یون‌های B^{2+} و A^{2+} به‌ترتیب در سمت چپ و راست واکنش کلی سلول قرار دارند و ضرایب استوکیومتری آن‌ها نیز یکسان است. با توجه به توضیحات داده شده، واکنش کلی سلول به‌صورت زیر می‌شود:

$$B^{2+}(aq) + A(s) \rightarrow A^{2+}(aq) + B(s)$$

فرض کنید که غلظت اولیه کاتیون‌های A^{2+} و B^{2+} به‌ترتیب n و m باشد. بر این اساس، داریم:

واکنش کلی سلول گالوانی	$B^{2+}(aq)$	$+$	$A(s)$	$\rightarrow$	$B(s)$	$+$	$A^{2+}(aq)$
مقدار مول اولیه یون‌ها	m		-		-		n
مقدار مول یون‌ها پس از انجام واکنش	$m-x$		-		-		$n+x$

بنابراین مجموع مقدار مول کاتیون‌ها در ابتدا و انتهای واکنش سلول ثابت و برابر با $m+n$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در این سلول، تیغه فلزی A آند و تیغه فلزی B کاتد است و بار کاتیون‌های آن‌ها ۲+ است. در سلول روی-مس نیز فلز روی در نقش آند و فلز مس در نقش کاتد است و بار کاتیون‌های آن‌ها به‌ترتیب برابر با ۲+ و ۲+ است.

۲) جهت حرکت آنیون‌ها از سمت نیم‌سلول کاتدی (نیم‌سلول B) به سمت نیم‌سلول آندی (نیم‌سلول A) است.

۴) در واکنش کلی سلول، یون B^{2+} کاهش یافته و اتم A اکسایش می‌یابد؛ بنابراین قدرت اکسندگی کاتیون‌های A^{2+} کمتر از قدرت اکسندگی کاتیون‌های B^{2+} است.

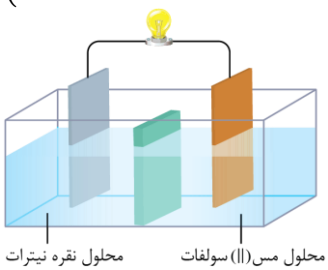
آزمون ماز

۹/۲۹

شیمی

۱- **شکل زیر ساختار یک سلول گالوانی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل، کدام عبارت نادرست است؟**

$\left(E^{\circ}(Ag^{+}/Ag) = +۰/۷۸\,V \quad و \quad E^{\circ}(Cu^{۲+}/Cu) = +۰/۳۴\,V\right)$



۱) عدد اکسایش اتم مرکزی در آنیون گذرنده از دیواره متخلخل این سلول، برابر ۵+ است.
۲) آرایش الکترونی اتم کاهنده در این سلول، برخلاف اتم کلسیم، از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند.
۳) اگر به جای الکترود نقره از الکترود پلاتین استفاده کنیم، روشنایی لامپ افزایش می‌یابد.
۴) در نیم‌سلولی که به‌تدریج جرم تیغه فلزی در آن افزایش می‌یابد، الکترون‌ها آزاد می‌شوند.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

سلول گالوانی داده شده از نیم‌سلول‌های مس و نقره ساخته شده است. پتانسیل کاهشی استاندارد مس، منفی‌تر(کمتر) از پتانسیل کاهشی استاندارد نقره است؛ درنتیجه فلز مس، **کاهنده قوی‌تری** نسبت به نقره بوده، نقش **آند** را در سلول ایفا می‌کند و نیم‌واکنش **اکسایش** در آن انجام می‌شود. نمودار زیر، ترتیب پتانسیل کاهشی استاندارد برخی از عناصر را نشان می‌دهد:

پتانسیل بیشتر ← طلا ← پلاتین ← جیوه ← نقره ← مس ← پتانسیل کمتر

واکنش اصلی سلول گالوانی مس-نقره به‌صورت زیر است:

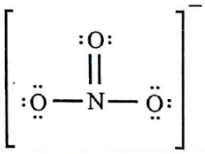
$$\underbrace{Cu}_{\text{کاهنده}}(s) + ۲\underbrace{Ag^{+}}_{\text{اکسنده}}(aq) \rightarrow Cu^{۲+}(aq) + ۲Ag(s)$$

در سلول‌های گالوانی، به مرور زمان از جرم **آند کاسته** شده و به جرم **کاتد افزوده** می‌شود؛ درنتیجه نیم سلولی که به‌تدریج جرم الکترود آن افزایش می‌یابد، نیم‌سلول کاتدی است. در نیم‌سلول کاتدی، نیم‌واکنش کاهش انجام می‌پذیرد؛ درنتیجه در این نیم‌سلول الکترون‌ها **مصرف شده** و **آزاد نمی‌شوند**. نیم‌واکنش کاهش در سلول داده شده به‌صورت زیر است:

$$Ag^{+}(aq) + e^{-} \rightarrow Ag(s)$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در دیواره متخلخل، **آنیون‌ها به سمت آند** و **کاتیون‌ها به سمت کاتد** حرکت می‌کنند. آنیون گذرنده از دیواره متخلخل، آنیونی است که از نیم‌سلول کاتدی به سمت نیم‌سلول آندی حرکت کند. یون نیترات($NO_{۳}^{-}$)، آنیون گذرنده از دیواره متخلخل است. اتم مرکزی در یون نیترات، اتم نیتروژن است. شکل زیر ساختار لوویس یون نیترات را نمایش می‌دهد:



مجموع عدد اکسایش اتم‌های موجود در ساختار یک یون چنداتمی، برابر با بار یون مورد نظر است. بر این اساس می‌توان عدد اکسایش اتم نیتروژن را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$NO_{۳}^{-} \Longrightarrow N + ۳(-۲) = -۱ \Longrightarrow N = +۵$$

۲ اتم کاهنده(اتمی که خود اکسید شده و الکترون‌های خود را به گونه دیگر می‌دهد) در این سلول، اتم مس است. آرایش الکترونی اتم‌های مس($_{29}Cu$) و کروم($_{24}Cr$) از **قاعده آفبا پیروی نمی‌کند** و با روش طیف سنجی پیشرفته می‌توان آرایش الکترونی آن‌ها را تعیین کرد. در این اتم‌ها، زیرلایه $4s$ فقط دارای یک الکترون خواهد بود.

۳ هرچه اختلاف پتانسیل بین دو الکترود آند و کاتد بیشتر باشد، ولتاژ سلول بیشتر بوده و روشنایی لامپ نیز بیشتر است. اختلاف پتانسیل یک سلول گالوانی که به نیروی الکتروموتوری(emf) نیز شهرت دارد به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$emf = E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}}$$

چون پلاتین در مقایسه با نقره دارای **پتانسیل کاهشی استاندارد بزرگ‌تری است**، پس می‌توان گفت اختلاف پتانسیل سلول گالوانی $Cu - Pt$ **بیشتر** از اختلاف پتانسیل سلول گالوانی $Cu - Ag$ است؛ درنتیجه روشنایی لامپ در سلول گالوانی متشکل از مس و پلاتین در شرایط یکسان، بیشتر از روشنایی لامپ در سلول گالوانی دیگر است.

مقدار emf برای سلول‌های گالوانی **همواره** مقداری **مثبت** است. چنان‌چه ولت‌سنج مقدار E° یک سلول را با عددی منفی نشان داد و یا این که پس از محاسبه مقدار emf سلول، یک عدد منفی به‌دست آوردید، فقط به این معناست که موقعیت آند و کاتد سلول را به اشتباه تشخیص داده و قطب‌های ناهم‌نام سلول گالوانی و ولت‌سنج را به یکدیگر وصل کرده‌اید.

گروه آموزشی ماز

۲- **چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟**

الف: سوختن هیدروژن در سلول سوختی، منجر به تولید بخار آب شده و این فرایند، بازدهی نزدیک به ۶۰٪ دارد.

ب: از سلول‌های گالوانی، برخلاف سلول‌های الکترولیتی، برای تولید انرژی الکتریکی استفاده می‌شود.

پ: در سلول گالوانی قلع-نقره، در محل الکترود قلع، کاتیون حاصل از فلز قلع مصرف می‌شود.

ت: در هر واکنش اکسایش-کاهش، شمار الکترون‌های ظرفیت اتم‌ها دچار تغییر می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

موارد (الف)، (پ) و (ت) نادرست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: **دقت** داریم که واکنش **سوختن** با واکنش اکسایش متفاوت است. سوختن، واکنش **سریع** مواد با اکسیژن است و بازدهی این واکنش برای گاز هیدروژن در موتورهای درون‌سوز، نزدیک به **۲۰ درصد** است. **اکسایش** هیدروژن به **آرامی** و در شرایط کنترل شده در سلول سوختی بازدهی نزدیک به **۶۰ درصد** (۳ برابر موتورهای درون‌سوز) دارد. طی این فرایند، سوخت به آرامی مصرف شده و انرژی حاصل از آن، قابل استفاده خواهد بود. البته، توجه داریم که **معادله کلی** واکنش در دو حالت **یکسان** است. سوختن گاز هیدروژن، دارای دو کاتالیزگر پلاتین و روی است. استفاده از این دو کاتالیزگر، سرعت واکنش سوختن را به مقدار بسیار زیادی افزایش می‌دهد.

«ب»: واکنش انجام شده در سلول **گالوانی**، برخلاف واکنش انجام شده در سلول‌های الکترولیتی، با **تولید انرژی** همراه است. در این نوع از سلول‌های الکتروشیمیایی، یک واکنش در جهت طبیعی به پیش رانده می‌شود. جدول زیر ویژگی‌های مربوط به سلول‌های گالوانی و الکترولیتی را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد:

ویژگی	سلول گالوانی	سلول الکترولیتی
نیاز به منبع انرژی خارجی	ندارد	دارد
دیواره متخلخل	دارد	ندارد
جهت واکنش	در جهت طبیعی(خودبه‌خود)	در خلاف جهت طبیعی(غیر خودبه‌خود)
تبدیل انرژی	شیمیایی به الکتریکی	الکتریکی به شیمیایی
محل اکسایش	در آند	در آند
محل کاهش	در کاتد	در کاتد
قطب منفی	آند	کاتد
قطب مثبت	کاتد	آند
جهت حرکت الکترون	از آند به کاتد	از آند به کاتد
جهت حرکت کاتیون‌ها	به سمت کاتد	به سمت کاتد
جهت حرکت آنیون‌ها	به سمت آند	به سمت آند
پتانسیل سلول	$E^\circ > 0$	$E^\circ < 0$
کاربرد	تولید باتری و سلول سوختی	برقکافت و آبکاری

«پ»: در سلول گالوانی قلع-نقره، فلز قلع در آند(قطب منفی) و نقره در **کاتد** (**قطب مثبت**) جای دارد. در سلول مورد نظر، در محل الکترود قلع، نیم‌واکنش شیمیایی $Sn(s) \rightarrow ۲e^- + Sn^{۲+}(aq)$ انجام می‌شود. طی این فرایند، کاتیون حاصل از فلز قلع **تولید می‌شود**.

«ت»: در **برخی** از واکنش‌های اکسایش-کاهش، بار الکتریکی یون‌ها تغییر کرده و تعداد الکترون‌های ظرفیتی گونه‌ها نیز تغییر خواهد کرد. برای مثال، در نیم‌واکنش شیمیایی $Mg(s) \rightarrow ۲e^- + Mg^{۲+}(aq)$، شمار الکترون‌های ظرفیتی منیزیم دچار تغییر شده است. این در حالی است که در برخی از واکنش‌ها مثل فرایند سوختن گاز متان، تعداد الکترون‌های ظرفیتی اتم‌ها تغییر نمی‌کند.

گروه آموزشی ماز

۳- در مدار خارجی سلول گالوانی آلومینیم-آهن که با استفاده از دو نیم‌سلول استاندارد ساخته شده، تعداد $۳/۶۱۲ \times ۱۰^{۲۳}$ الکترون جاری شده است. اگر حجم هریک از الکترولیت‌های آندی و کاتدی در سلول برابر ۲ لیتر باشد، تفاوت غلظت کاتیون در دو محلول در پایان این فرایند چقدر خواهد شد؟ (دیواره متخلخل سلول فقط به آنیون‌ها اجازه عبور می‌دهد.)

$\left(E^\circ(Fe^{۲+}/Fe) = -۰/۴۴V \quad و \quad E^\circ(Al^{۳+}/Al) = -۱/۶۶V\right)$

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مسئله ـ ۱۲۰۲)

ابتدا واکنش کلی سلول و نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی تشکیل‌دهنده آن را می‌نویسیم:

نیم‌واکنش آندی : $Al(s) \longrightarrow Al^{۳+}(aq) + ۳e^-$

نیم‌واکنش کاتدی : $Fe^{۲+}(aq) + ۲e^- \longrightarrow Fe(s)$

واکنش کلی سلول : $۳Fe^{۲+}(aq) + ۲Al(s) \longrightarrow ۳Fe(s) + ۲Al^{۳+}(aq)$

در این واکنش شیمیایی، به ازای مبادله ۶ مول الکترون بین گونه اکسنده(یون $Fe^{۲+}$) و کاهنده(فلز Al)، مقدار ۲ مول یون آلومینیم تولید شده و ۳ مول یون آهن مصرف می‌شود. بر این اساس، غلظت یون آلومینیم افزایش یافته و غلظت یون آهن نیز کاهش پیدا خواهد کرد. ابتدا شمار مول الکترون مبادله‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\text{شمار مول الکترون مبادله‌شده} = ۳/۶۱۲ \times ۱۰^{۲۳}\ e^- \times \frac{۱\ mol\ e^-}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ e^-} = ۰/۶\ mol$$

بنابراین مقدار یون $Al^{۳+}$ تولیدشده در نیم‌سلول آندی و مقدار یون $Fe^{۲+}$ مصرف‌شده در نیم‌سلول کاتدی برابر است با:

$$?\ mol\ Al^{۳+} = ۰/۶\ mol\ e^- \times \frac{۲\ mol\ Al^{۳+}}{۶\ mol\ e^-} = ۰/۲\ mol$$

$$?\ mol\ Fe^{۲+} = ۰/۶\ mol\ e^- \times \frac{۳\ mol\ Fe^{۲+}}{۶\ mol\ e^-} = ۰/۳\ mol$$

در ابتدای فرایند، غلظت محلول موجود در نیم‌سلول کاتدی و آندی برابر با ۱ مولار است و همچنین می‌دانیم حجم هر محلول نیز برابر با ۲ لیتر است، در نتیجه مقدار مول اولیه یون آلومینیم و یون آهن در هر یک از این محلول‌ها برابر با ۲ مول بوده است. با توجه به اینکه در ابتدا ۲ مول یون $Al^{۳+}$ و ۲ مول یون $Fe^{۲+}$ در محلول وجود داشته و ۰/۲ مول یون $Al^{۳+}$ دیگر تولید شده؛ بنابراین مقدار مول یون آلومینیم در پایان این فرایند برابر با ۲/۲ مول است. همچنین مقدار ۰/۳ مول یون $Fe^{۲+}$ از محلول موجود در نیم‌سلول کاتدی مصرف شده و مقدار مول یون آهن در پایان این فرایند به ۱/۷ مول می‌رسد. اکنون غلظت مولی این دو کاتیون در محلول‌های آندی و کاتدی را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}\ (L)} \Longrightarrow \begin{cases} M(Al^{۳+}) = \frac{۲/۲}{۲} = ۱/۱\ mol.L^{-۱} \\ M(Fe^{۲+}) = \frac{۱/۷}{۲} = ۰/۸۵\ mol.L^{-۱} \end{cases}$$

با توجه به محاسبات بالا، نتیجه می‌گیریم که تفاوت غلظت کاتیون در دو محلول در پایان این فرایند برابر با ۰/۲۵ مول بر لیتر خواهد شد.

گروه آموزشی ماز

۴- در واکنش سوختن کامل یک نمونه از پروپان، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن به اندازه چند واحد تغییر می‌کند؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

عدد اکسایش یک اتم، بار الکتریکی مثبت یا منفی است که به‌طور **واقعی** یا **ظاهری** به آن اتم نسبت داده می‌شود. در واکنش‌های اکسایش-کاهش، عدد اکسایش **برخی** از اتم‌های شرکت‌کننده در واکنش تغییر می‌کند. در این شرایط، هر عنصری که عدد اکسایش آن **افزایش** پیدا کند، **اکسایش** یافته و هر عنصری که عدد اکسایش آن **کم‌تر** شود نیز **کاهش** یافته است. به واکنش شیمیایی زیر توجه کنید:



همان‌طور که مشخص است، عدد اکسایش اتم‌های منگنز در این واکنش ۲ درجه کاهش پیدا کرده است، پس MnO_2 اکسنده است. از طرفی، عدد اکسایش اتم‌های کلر نیز یک درجه افزایش پیدا کرده است، پس HCl در این واکنش گونه کاهنده است. معادله واکنش سوختن پروپان نیز به‌صورت زیر است:

$$C_3H_8(g) + 5O_2(g) \rightarrow 3CO_2(g) + 4H_2O(l)$$

در این واکنش، ۳ اتم کربن در ساختار پروپان(C_3H_8) قرار گرفته که مجموع عدد اکسایش آن‌ها برابر با ۸- است. با سوختن گاز پروپان، ۳ مولکول CO_2 تولید شده که عدد اکسایش هر اتم کربن در ساختار آن‌ها برابر با ۴+ است، پس مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در ساختار ۳ مولکول CO_2 برابر با ۱۲+ می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت طی این فرایند مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن به اندازه ۲۰ واحد تغییر کرده و از ۸- در پروپان به ۱۲+ در مولکول‌های CO_2 رسیده است.

گروه آموزشی ماز

۵- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) از محلول یک مولار نیتروسید، می‌توان به‌عنوان الکترولیت موجود در نیم‌سلول استاندارد هیدروژن استفاده کرد.
۲) بر اثر قرار دادن تیغه آهن در محلول نقره نیترات، دمای مخلوط کمتر از هنگام استفاده از تیغه روی افزایش می‌یابد.
۳) اغلب عناصر فلزی که در دسته d قرار می‌گیرند، همانند گوگرد، اعداد اکسایش گوناگونی در ترکیب‌های خود دارند.
۴) در کاتد سلول مس-نقره، همانند کاتد باتری‌های دگمه‌ای روی-نقره، ذرات نقره در نیم‌واکنش کاهش شرکت می‌کنند.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

اسیدهای ضعیف، به‌طور کامل یونش نیافته و غلظت یون هیدروژن در محلول آن‌ها، کمتر از غلظت اولیه اسید خواهد بود. چون نیتروسید(HNO_2) یک اسید **تک پروتون‌دار ضعیف با Ka کوچک است**، پس به‌صورت **جزئی** در محلول خود یونش یافته و بر این اساس، غلظت یون هیدروژن در محلول یک مولار آن کمتر از ۱ مول بر لیتر بوده و به همین خاطر، از محلول یک مولار این اسید نمی‌توانیم به‌عنوان محلول الکترولیت موجود در نیم‌سلول استاندارد هیدروژن(SHE) استفاده کنیم.

اندازه‌گیری پتانسیل نیم‌سلول‌ها

اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم‌سلول، به‌طور جداگانه ممکن نیست و این کمیت باید به‌طور **نسبی** اندازه‌گیری شود. شیمی‌دان‌ها برای دستیابی به این هدف، تصمیم گرفتند نیم‌سلول استاندارد هیدروژن(SHE) را به‌عنوان یک **مبنا** برای مقایسهٔ پتانسیل الکترودی سایر نیم‌سلول‌ها انتخاب کرده و پتانسیل آن را برابر با **صفر** در نظر بگیرند. الکترود یا نیم‌سلول هیدروژن، شامل یک الکترود فلزی از جنس پلاتین می‌شود که در محلولی با غلظت یک مولار از یون هیدروژن در دمای ۲۵ درجه‌ی سانتی‌گراد فروبرده شده است و گاز هیدروژن با فشار ۱ اتمسفر از روی آن عبور داده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ واکنش‌پذیری فلز روی بیشتر از فلز آهن است و بر اثر قرار دادن تیغه فلز روی در محلول نقره نیترات، دمای مخلوط واکنش نسبت به هنگام استفاده از تیغه فلز آهن، بالاتر می‌رود. توجه داریم که هر دو فلز روی و آهن در سری الکتروشیمیایی، **پایین‌تر** از فلز نقره قرار دارند و بنابراین می‌توانند یون‌های نقره را کاهش داده و از محلول آن خارج کنند.

مبادلهٔ الکترون در کاتیون‌های فلزی

کاتیون‌های فلزی موجود در یک محلول، در واکنش با اتم‌های یک عنصر فلزی دیگر که واکنش‌پذیری بیشتری دارند، یک یا چند الکترون از آن‌ها گرفته و کاهش پیدا می‌کنند. به‌عنوان مثال، هرگاه تیغه‌ای از جنس فلز روی را در محلولی از مس(II) سولفات قرار بدهیم، اتم‌های خنثای روی با از دست دادن دو الکترون به یون‌های روی اکسایش یافته و هم‌زمان با آن، هر یون مس(II) با دریافت همان دو الکترون، به اتم Cu کاهش می‌یابد. از آن‌جا که رنگ آبی محلول مس(II) سولفات به خاطر وجود یون‌های $Cu^{2+}(aq)$ در این محلول است، با گذشت زمان و کاهش غلظت این یون در محلول مورد نظر، به‌تدریج از شدت رنگ محلول کاسته می‌شود.

۳ اغلب عناصر نافلزی مثل کلر، اکسیژن، گوگرد و فسفر، اعداد اکسایش گوناگونی در ترکیب‌های خود دارند. علاوه بر این، **اغلب** عناصر فلزی که در دسته d قرار می‌گیرند(**عناصر واسطه**) مثل آهن، مس و کروم نیز دارای **اعداد اکسایش متفاوتی** در ترکیب‌های خود خواهند بود. البته، برخی از فلزهای واسطه مثل اسکاندیم و روی، فقط با یک **عدد اکسایش خاص** در ترکیب‌های خود ظاهر شده و فاقد اعداد اکسایش متنوع هستند.

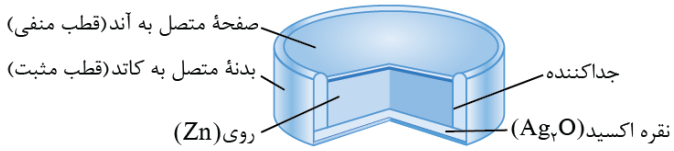
دامنه تغییرات اعداد اکسایش

عدد اکسایش اتم‌های هر عنصر، در یک دامنه خاص تغییر می‌کند. جدول زیر، دامنه تغییرات عدد اکسایش عناصر موجود در برخی از گروه‌های جدول تناوبی را نشان می‌دهد:

شماره گروه	۱	۲	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	عناصر استثنا			عناصر واسطه مهم			
							اکسیژن	فلوئور	هیدروژن	آهن	منگنز	مس	نقره
کم‌ترین عدد اکسایش	۰	۰	-۴	-۳	-۲	-۱	-۲	-۱	-۱	۰	۰	۰	۰
بالاترین عدد اکسایش	+۱	+۲	+۴	+۵	+۶	+۷	+۲	۰	+۱	+۳	+۷	+۲	+۱

بر اساس داده‌های موجود در این جدول، گونه‌های شیمیایی در **بالاترین حالت اکسایش** خود، فقط می‌توانند **گیرنده الکترون** باشند و دیگر توانایی از دست دادن الکترون را نخواهند داشت. در نقطه مقابل، گونه‌های شیمیایی در **پایین‌ترین حالت اکسایش** خود، فقط می‌توانند **دهنده الکترون** باشند و دیگر توانایی جذب الکترون را ندارند.

۴ چون پتانسیل کاهشی استاندارد نقره بیشتر از مس است، در سلول گالوانی مس-نقره، فلز **نقره** در نقش **کاتد** خواهد بود. در سمت کاتد این سلول گالوانی، یون نقره در نیم‌واکنش کاهش شرکت می‌کند و فلز نقره را تولید می‌کند. باتری‌های روی-نقره، نوعی از باتری‌های **دگمه‌ای** به شمار می‌روند. ساختار این باتری‌ها نیز به‌صورت زیر است:



$$Zn(s) + \underset{\text{گونه اکسنده}}{Ag_2O(s)} \rightarrow ZnO(s) + 2Ag(s)$$
گونه کاهنده

توجه داریم که این باتری‌ها، انواعی از سلول‌های **گالوانی** به شمار رفته و در آن‌ها نیز نقره اکسید در نقش عامل اکسنده مصرف شده و فلز نقره به‌عنوان **فراورده** واکنش تولید می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۶- **کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟**

الف: در نیروگاه‌های حرارتی، بخار آب حاصل از سوزاندن سوخت، توربین را حرکت داده و برق تولید می‌کند.

ب: اکسیژن در واکنش با نافلزها، ترکیب‌های مولکولی را تولید کرده و عدد اکسایش آن همواره کاهش می‌یابد.

پ: کاتد سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، در ساختار خود حاوی کاتالیزگر بوده و بخار آب از آن خارج می‌شود.

ت: سلول‌های سوختی، نوعی سلول گالوانی بوده و برخلاف باتری‌ها، توانایی ذخیره کردن انرژی شیمیایی را ندارند.

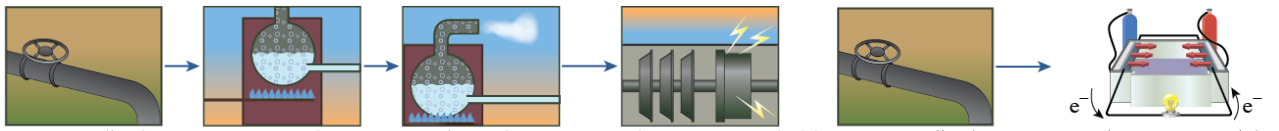
۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «پ» ۳) «الف» و «ت» ۴) «پ» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

عبارت‌های (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: یکی از روش‌های تبدیل انرژی شیمیایی سوخت‌ها به انرژی الکتریکی، استفاده از **سلول‌های سوختی** است. در این روش، سوخت مورد نظر به‌طور **مستقیم** وارد سلول‌های سوختی شده و انرژی شیمیایی ذخیره‌شده در آن، مستقیماً به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. از آن‌جا که در سلول‌های سوختی، انرژی شیمیایی سوخت‌ها به‌طور مستقیم به انرژی الکتریکی تبدیل شده و برخلاف نیروگاه‌ها، در این روش چند مرحله متوالی از تبدیل انرژی صورت نمی‌گیرد، **اتلاف انرژی** به‌صورت گرما در این روش **کمتر** است و درصد بیشتری از انرژی شیمیایی ذخیره‌شده در سوخت به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. مراحل تبدیل انرژی در سلول سوختی و نیروگاه‌های حرارتی به شرح زیر است:



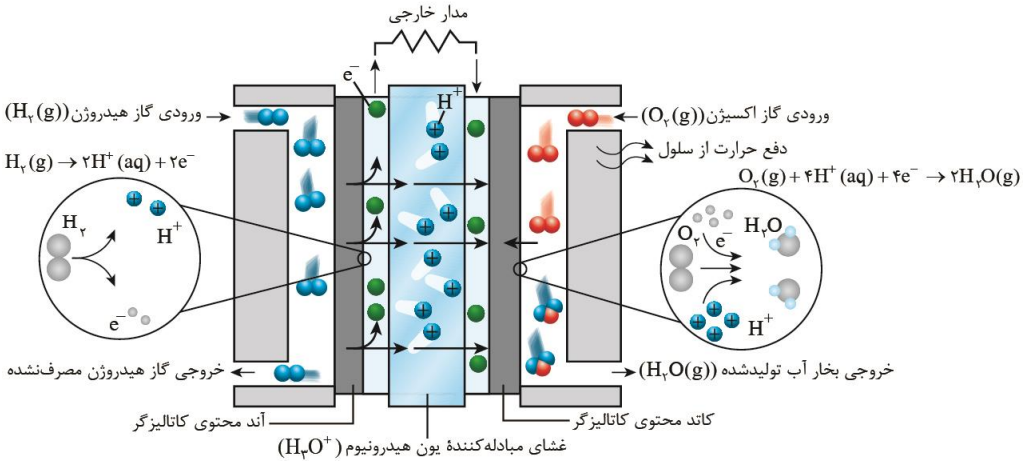
توجه داریم که در نیروگاه‌های حرارتی، **انرژی شیمیایی** موجود در سوخت موردنظر پس از سوختن به **انرژی گرمایی** تبدیل شده و با **تبخیر آب** موجود در یک مخزن(نه آب تولید شده در واکنش سوختن!)، سبب تولید بخار می‌شود. همان‌طور که گفتیم، این بخار آب در یک محفظه جداگانه تولید شده و مجزا از بخار آب حاصل از سوزاندن سوخت است. در مرحله بعد، بخار تولیدشده سبب راه‌اندازی توربین شده و **انرژی گرمایی به انرژی مکانیکی** تبدیل می‌شود. انرژی مکانیکی تولیدشده توسط توربین نیز توسط ژنراتور(دینام) به **انرژی الکتریکی** تبدیل می‌شود.

«ب»: اکسیژن یک نافلز بوده و بر این اساس، در واکنش با سایر نافلزها **ترکیب‌های مولکولی** را تولید می‌کند. بعد از فلوئور، اکسیژن نافلزترین عنصر موجود در جدول تناوبی است؛ پس به‌جز فلوئور، عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن در ترکیب با سایر عناصر موجود در جدول دوره‌ای برابر ۲- است. البته، چون خاصیت نافلزی فلوئور بیشتر از اکسیژن است، در **ترکیب‌های حاصل از واکنش میان گاز فلوئور و اکسیژن**، عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن **بزرگ‌تر از صفر** خواهد شد. جدول زیر، یون‌ها و ترکیب‌هایی را نشان می‌دهد که در آن‌ها عدد اکسایش اکسیژن بزرگ‌تر از ۲- است.

گونهٔ شیمیایی	OF_2	O_2F_2	HOF	O_2^-	O_2^{2-}	H_2O_2
عدد اکسایش O	+۲	+۱	۰	-۰/۵	-۱	-۱

«پ»: در تیغه‌های آندی و کاتدی سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، یک **کاتالیزگر مناسب** قرار داده شده است. به‌طور کلی، کاتالیزگرها انرژی فعال‌سازی واکنش‌ها را کاهش داده و باعث افزایش سرعت واکنش می‌شوند. البته، توجه داریم که استفاده از کاتالیزگرها هیچ تغییری در مقدار تغییر آنتالپی واکنش‌ها ایجاد نمی‌کنند. معادله نیم‌واکنش کاهش در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن به‌صورت $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(g)$ بوده و بخار آب از سمت کاتد(قطب مثبت این سلول) این سلول خارج می‌شود.

تصویر زیر، نمایی از این سلول را نشان می‌دهد:



توجه داریم که از آند این سلول نیز گاز هیدروژن اضافی(گاز هیدروژن واکنش نداده) خارج می‌شود. این گاز هیدروژن، مجدداً وارد ساختار سلول سوختی شده و به مصرف می‌رسد.

«ت»: برای تأمین انرژی الکتریکی، می‌توان از واکنش‌های اکسایش-کاهش در سلول‌های گالوانی مانند باتری‌ها و سلول‌های سوختی بهره برد. سلول سوختی، واکنش‌دهنده‌های مصرف شده در خود را در ساختار خود **ذخیره نکرده است**. بر این اساس، می‌توان گفت هرچند که سلول‌های سوختی برخلاف باتری‌ها، انرژی شیمیایی را ذخیره نمی‌کنند، اما در آن‌ها نیز **پیوسته** سوخت در شرایط کنترل شده به مصرف رسیده و جریان الکتریکی برقرار می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۷- کدام مطلب زیر درست است؟

۱) اتم کلر موجود در ساختار $HClO_4$، می‌تواند نقش اکسنده یا کاهنده را در واکنش‌ها ایفا کند.

۲) اگر مخلوط آهن(II) کلرید و منیزیم برمید مذاب را برقکافت کنیم، گازی زرد رنگ در سمت آند تولید می‌شود.

۳) به‌خاطر رسانایی ناچیز آب خالص، برای برقکافت این ماده باید مقدار کمی الکترولیت مثل سدیم کلرید به آن اضافه کرد.

۴) چون اتم سدیم پایدارتر از یون سدیم است، این فلز در طبیعت به حالت آزاد یافت نشده و فقط به‌صورت یون وجود دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ حفظی / مفهومی ـ ۱۴۰۲)

به‌خاطر **رسانایی ناچیز آب خالص**، برای برقکافت این ماده باید مقدار کمی از یک ماده الکترولیت مثل سدیم کلرید را به آن اضافه کرد. طی این فرایند، **رسانایی محلول افزایش یافته** و سرعت برقکافت بیشتر می‌شود. البته، باید توجه داشته باشیم که آنیون‌ها و کاتیون‌های موجود در ماده الکترولیت وارد شده به محلول مورد نظر، نباید در رقابت‌های آندی و کاتدی بر آب پیروز شوند چرا که در این صورت، از فرایند برقکافت گازهای هیدروژن و اکسیژن تولید نشده و مولکول‌های آب تجزیه نمی‌شوند.

رقابت کاتدی و آندی

اگر در یک سلول الکترولیتی، بیشتر از یک نوع گونه اکسنده(گونه‌ای که قابل کاهیده‌شدن باشد، مثل کاتیون‌های موجود در محلول) وجود داشته باشد، میان گونه‌های اکسنده موجود در محلول برای به‌دست آوردن الکترون رقابت ایجاد می‌شود. به رقابت مورد نظر، به اصطلاح **رقابت کاتدی** گفته می‌شود و در آن گونه‌ای برنده می‌شود که تمایل بیشتری برای گرفتن الکترون داشته باشد؛ به عبارت دیگر، گونه‌ای که E° بزرگ‌تری داشته باشد و موقعیت آن در سری الکتروشیمیایی بالاتر باشد، در رقابت کاتدی پیروز شده و الکترون به‌دست می‌آورد. در نقطه مقابل، اگر در یک سلول الکترولیتی، بیشتر از یک نوع گونه کاهنده(گونه‌ای که قابل اکسیدشدن باشد، مثل آنیون‌های موجود در محلول) وجود داشته باشد، میان گونه‌های کاهنده موجود در محلول برای از دست دادن الکترون رقابت ایجاد می‌شود. به رقابت موردنظر، به اصطلاح **رقابت آندی** گفته می‌شود و در آن گونه‌ای برنده می‌شود که تمایل بیشتری برای از دست دادن الکترون داشته باشد؛ به عبارت دیگر، گونه‌ای که E° کوچک‌تری داشته باشد و موقعیت آن در جدول پتانسیل‌های کاهش پایین‌تر باشد، در رقابت آندی پیروز شده و الکترون از دست می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ عدد اکسایش هیدروژن در ترکیب با نافلزها برابر با ۱+ و در ترکیب با فلزها نیز برابر با ۱- است. بر این اساس، عدد اکسایش اتم کلر در ترکیب داده شده به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$HClO_4 \Longrightarrow 1 + Cl + 4(-2) = 0 \Longrightarrow Cl = 7$$

محدوده عدد اکسایش کلر، در بازه بین اعداد ۱- تا ۷+ است. اتم هر عنصر در حالتی با **بیشترین عدد اکسایش** خود، **فقط** می‌تواند **کاهش** پیدا کند و فقط نقش اکسنده را در واکنش‌های مختلف دارد؛ درنتیجه چون اتم کلر با بیشترین مقدار عدد اکسایش خود در ترکیب $HClO_4$ شرکت کرده است، فقط می‌تواند نقش اکسنده را داشته باشد.

۲ اگر مخلوطی از آهن(II) کلرید و منیزیم برمید مذاب را وارد سلول برقکافت کنیم، آنیون‌های موجود در مخلوط مذاب به سمت تیغه آندی حرکت کرده و برای اکسید شدن با هم رقابت می‌کنند. چون **کلر در مقایسه با برم خاصیت نافلزی**(تمایل به گرفتن الکترون و تشکیل آنیون) **بیشتری** داشته و

آنیون حاصل از آن پایدارتر از آنیون برمید است، پس یون‌های برمید در نیم‌واکنش اکسایش شرکت کرده و الکترون‌های خود را از دست می‌دهند. با شرکت کردن یون‌های برمید در نیم‌واکنش اکسایش، این یون‌ها به **بخار قرمز رنگ برم** تبدیل شده و از سلول خارج می‌شوند.

۴ با توجه به پایداری بالای یون سدیم، برای تهیه فلز سدیم با استفاده از ترکیب‌های حاوی این عنصر باید انرژی زیادی مصرف کرد. در واقع، فلز سدیم یک کاهنده قوی است که در طبیعت به حالت آزاد یافت نمی‌شود. این عنصر فلزی در ترکیب‌های طبیعی و گوناگون خود تنها به شکل یون سدیم (یون Na^+) وجود دارد. این واقعیت نشان می‌دهد که **یون‌های سدیم بسیار پایدارتر از اتم‌های آن هستند.**

گروه آموزشی ماز

۸- در مدار خارجی یک سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، $۱/۵۰۵ \times ۱۰^{۲۵}$ الکترون مبادله شده است. در این سلول، چند لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP مصرف شده و با استفاده از آب تولید شده در این سلول، چند گرم محلول ۲۸٪ جرمی منیزیم کلرید می‌توان تولید کرد؟

($O = ۱۶$ و $H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۱۴۰ ـ ۳۱۲/۵ ۲) ۱۴۰ ـ ۶۲۵ ۳) ۲۸۰ ـ ۳۱۲/۵ ۴) ۲۸۰ ـ ۶۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مسئله ـ ۱۴۰۲)

در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، گازهای اکسیژن و هیدروژن مصرف شده و بخار آب تولید می‌شود. معادله نیم‌واکنش کاتدی در سلول مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$O_۲(g) + ۴H^+(aq) + ۴e^- \rightarrow ۲H_۲O(l)$$

با توجه به معادله نیم‌واکنش کاتدی انجام شده در این سلول، حجم گاز اکسیژن مصرف شده و جرم آب تولید شده در آن را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,L\,O_۲ = ۱/۵۰۵ \times ۱۰^{۲۵}\ e\ \text{تعداد} \times \frac{۱\ mol\ e}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ e\ \text{تعداد}} \times \frac{۱\ mol\ O_۲}{۴\ mol\ e} \times \frac{۲۲/۴\ L\ O_۲}{۱\ mol\ O_۲} = ۱۴۰\ L$$

$$?\,g\,H_۲O = ۱/۵۰۵ \times ۱۰^{۲۵}\ e\ \text{تعداد} \times \frac{۱\ mol\ e}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ e\ \text{تعداد}} \times \frac{۲\ mol\ H_۲O}{۴\ mol\ e} \times \frac{۱۸\ g\ H_۲O}{۱\ mol\ H_۲O} = ۲۲۵\ g$$

در سلول مورد نظر، ۲۲۵ گرم آب تولید شده است. برای تهیه یک نمونه ۱۰۰ گرمی از محلول ۲۸٪ جرمی منیزیم سولفات، باید ۷۲ گرم آب خالص را با ۲۸ گرم از این نمک مخلوط کنیم. بر این اساس داریم:

$$?\,g\ \text{محلول} = ۲۲۵\ g\ H_۲O \times \frac{۱۰۰\ g\ \text{محلول}}{۷۲\ g\ H_۲O} = ۳۱۲/۵\ g$$

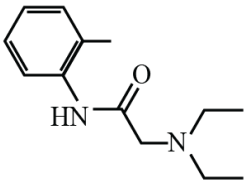
با توجه به محاسبات انجام شده، طی این فرایند ۳۱۲/۵ گرم محلول تولید می‌شود.

سلول‌های سوختی

در سلول‌های سوختی، یک واکنش شیمیایی در شرایط کنترل‌شده انجام می‌شود. هرچند که در رایج‌ترین نوع از سلول‌های سوختی، گاز هیدروژن به‌عنوان سوخت مصرف می‌شود، اما در برخی از انواع این سلول‌ها از سایر مواد از جمله متان نیز به‌عنوان سوخت استفاده می‌شود. طی این فرایند، عدد اکسایش اتم‌های کربن افزایش یافته و عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن کاهش پیدا می‌کند. توجه داریم که این سلول‌ها با کارکرد خود، نوعی گاز آلاینده(گاز کربن دی‌اکسید) تولید کرده و وارد هواکره می‌کنند.

گروه آموزشی ماز

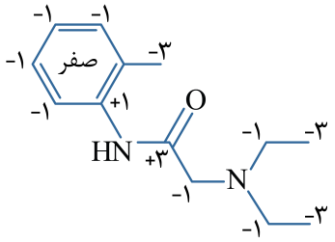
۹- شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش منفی در ساختار مولکول مقابل، چند برابر شمار این اتم‌های کربن در ساختار الکل معمولی است؟



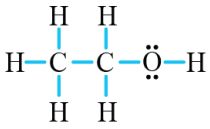
۱) ۵
۲) ۵/۵
۳) ۴
۴) ۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

ساختار ترکیب مورد نظر و عدد اکسایش اتم‌های کربن موجود در ساختار آن، به‌صورت زیر است:



در ساختار این ترکیب آلی، ۱۰ اتم کربن با عدد اکسایش منفی وجود دارد. این ماده در ساختار خود دارای یک حلقه بنزنی، یک گروه عاملی آمیدی و یک گروه عاملی آمینی است. اتانول یا الکل معمولی، یک ترکیب آلی دو کربنی است. ساختار این مولکول به‌صورت زیر است:



در ساختار این ترکیب، ۲ اتم کربن (هر دو با عدد اکسایش منفی) و یک گروه عاملی هیدروکسیل(الکلی) وجود دارد. پس نسبت خواسته شده برابر است با: $\frac{۱۰}{۲} = ۵$

تخمیر بی‌هوازی گلوکز

اتانول($C_۲H_۵OH$)، یک سوخت سبز محسوب می‌شود. یکی از راه‌های تهیه این ترکیب، استفاده از واکنش بی‌هوازی تخمیر گلوکز است. معادله این واکنش به‌صورت زیر است:

$$C_۶H_{۱۲}O_۶(aq) \rightarrow ۲C_۲H_۵OH(aq) + ۲CO_۲(g)$$

این فرایند، با استفاده از بقایای گیاهانی مانند نیشکر، سیب زمینی و ذرت انجام می‌شود. به همین خاطر است که امروزه مزارع زیادی را برای تهیه سوخت سبز، روغن و خوراک دام به کشت ذرت اختصاص می‌دهند.

گروه آموزشی ماز

۱۰- با توجه به نیم‌واکنش‌های کاهشی زیر که مربوط به نمونه‌ای از سلول‌های نور الکتروشیمیایی است، چند مورد از مطالب داده شده نادرست هستند؟ (نیم‌واکنش‌ها موازنه نشده‌اند. $Si = ۲۸ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱}$)

$$SiO_۲(s) + H^+(aq) + e^- \rightarrow Si(s) + H_۲O(l) \quad ; \quad E^\circ = -۰/۸۴V$$
$$H_۲O(l) + e^- \rightarrow H_۲(g) + OH^-(aq) \quad ; \quad E^\circ = -۰/۸۳V$$

الف: در این سلول، یک شبه‌فلز نقش کاهنده و $H_۲O$ نقش اکسنده را ایفا می‌کند.

ب: سوخت رایج‌ترین نوع از سلول‌های سوختی، به کمک این سلول قابل تهیه است.

پ: در محلول اطراف آند این سلول، برخلاف محلول اطراف کاتد سلول برقکافت آب، $[OH^-]$ به مرور کاهش می‌یابد.

ت: بر اثر افزایش جرم آند این سلول به مقدار ۵/۶ گرم، ۷/۸۴ لیتر گاز $H_۲$ با حجم مولی ۲۸ لیتر بر مول آزاد می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

از میان عبارت‌های داده شده، فقط عبارت (ت) نادرست است.

بررسی موارد:

«الف»: واکنش کلی این سلول به‌صورت $Si(s) + ۲H_۲O(l) \rightarrow SiO_۲(s) + ۲H_۲(g)$ است؛ بنابراین در این سلول، Si در نقش **کاهنده** بوده و $H_۲O$ نقش **اکسنده** را ایفا می‌کند. سیلیسیم، یک عنصر شبه‌فلزی بوده و در گروه ۱۴ جدول دوره‌ای قرار گرفته است.

Emf سلول نور الکتروشیمیایی

مقدار emf سلول نور الکتروشیمیایی برابر است با: $emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = -۰/۸۳ - (-۰/۸۴) = ۰/۰۱V$

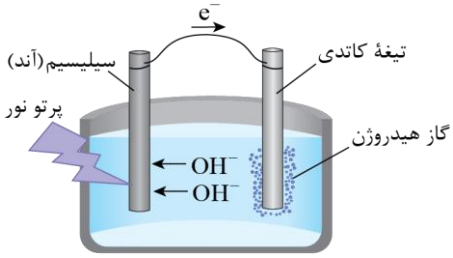
بنابراین emf این سلول ناچیز است. توجه داریم که بازده و سرعت واکنش اکسایش-کاهش این سلول نیز پایین است و به همین دلیل، با استفاده از این سلول نمی‌توان مقدار زیادی گاز هیدروژن تولید کرد.

«ب»: **رایج‌ترین** سلول سوختی، سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن بوده و سوخت مصرف شده در این سلول نیز گاز $H_۲$ است که در سلول نور الکتروشیمیایی به‌عنوان **فراورده** در سمت کاتد تولید می‌شود.

«پ»: در برقکافت آب، نیم‌واکنش **کاتدی** به‌صورت زیر است:

$$۴H_۲O(l) + ۴e^- \rightarrow ۲H_۲(g) + ۴OH^-(aq)$$

بنابراین با گذشت زمان مقداری یون هیدروکسید تولید شده و pH محلول اطراف **کاتد** سلول **افزایش** پیدا می‌کند. این در حالی است که در سلول نور الکتروشیمیایی داده شده، با توجه به نیم‌واکنش **آندی** با معادله $Si(s) + ۲H_۲O(l) \rightarrow SiO_۲(s) + ۴H^+(aq) + ۴e^-$، مقداری یون هیدروژن تولید شده و pH محلول اطراف آند کاهش می‌یابد. با افزایش غلظت یون هیدروژن در یک محلول، غلظت یون هیدروکسید در آن محلول کاهش پیدا می‌کند. تصویر زیر، نمایی از سلول مورد نظر را نشان می‌دهد:



«ت»: باید جرم سیلیسیم مصرف شده در آند و جرم سیلیس(SiO_2) تولید شده در این الکترود را محاسبه کنیم تا ببینیم به ازای تولید ۷/۸۴ لیتر گاز هیدروژن، جرم تیغه آندی چگونه تغییر می‌کند. با توجه به واکنش کلی سلول مورد نظر که معادله آن به‌صورت $Si(s) + 2H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + 2H_2(g)$ است، جرم سیلیسیم مصرف شده در آند و جرم سیلیس(SiO_2) تولید شده در این نیم‌سلول را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,Si = \underbrace{7/84\,L\,H_2 \times \frac{1\,mol\,H_2}{28\,L\,H_2}}_{0/28\,mol\,H_2} \times \frac{1\,mol\,Si}{2\,mol\,H_2} \times \frac{28\,g\,Si}{1\,mol\,Si} = 3/92\,g$$

$$?\,g\,SiO_2 = 0/28\,mol\,H_2 \times \frac{1\,mol\,SiO_2}{2\,mol\,H_2} \times \frac{60\,g\,SiO_2}{1\,mol\,SiO_2} = 8/4\,g$$

بر اثر انجام واکنش سلول، بخشی از آند سیلیسیمی به SiO_2 تبدیل می‌شود. در واقع، طی این فرایند **سیلیسیم مصرف شده** و **سیلیس تولید می‌شود**؛ بنابراین تغییر جرم تیغهٔ آندی برابر خواهد بود با:

$$\text{تغییر جرم تیغه آندی} = 8/4 - 3/92 = 4/48\,g$$

همان‌طور که مشخص است، طی این فرایند جرم تیغه آندی به اندازه ۴/۴۸ گرم **افزایش** یافته است که با داده‌های سؤال همخوانی ندارد.

گروه آموزشی ماز

۱۱- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) در مراحل استخراج فلز منیزیم از آب دریا، ابتدا از یک محلول بازی و پس از آن، از یک محلول اسیدی استفاده می‌شود.

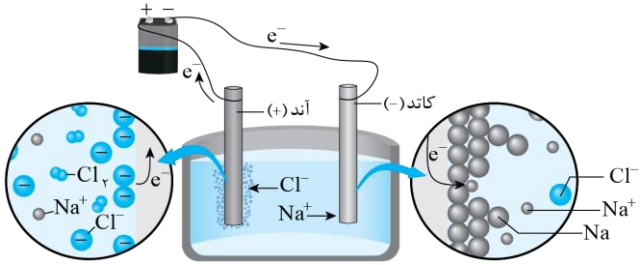
۲) در برقکافت آب، نیم‌واکنش $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$ در سطح الکترود مثبت انجام می‌شود.

۳) برخلاف سلول گالوانی و سلول‌های سوختی، در سلول‌های الکترولیتی نیازی به استفاده از دیوارهٔ متخلخل نیست.

۴) در سلول برقکافت $NaCl(l)$، یون با آرایش الکترونی گاز نجیب دوره سوم، به سمت کاتد حرکت می‌کند.

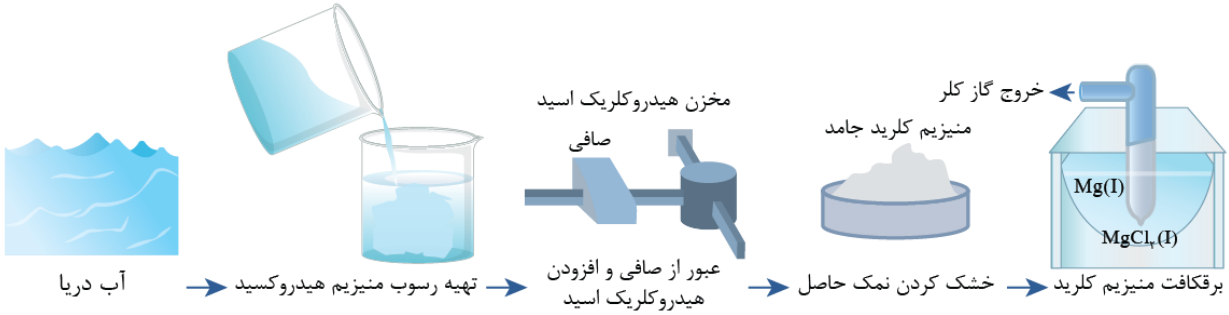
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

یون‌های Na^+ و Cl^- به‌ترتیب آرایش الکترونی گازهای نجیب دوره‌های دوم و سوم جدول تناوبی را دارند. در سلول مورد نظر، یون با آرایش الکترونی گاز نجیب دورهٔ سوم(یعنی یون Cl^-) به سمت **آند** حرکت می‌کند. **کاتیون‌های** موجود در الکترولیت نیز به سمت تیغه **کاتدی** حرکت می‌کنند. تصویر زیر، نمایی از این سلول را نشان می‌دهد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ فرایند تولید فلز منیزیم از آب دریا به‌صورت زیر است:

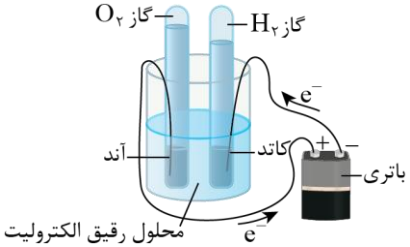


با توجه به روند نشان داده شده، در مراحل استخراج فلز منیزیم از آب دریا، **ابتدا** یک محلول **بازی** که حاوی یون هیدروکسید باشد را به آب دریا اضافه می‌کنند تا یون‌های منیزیم موجود در آب دریا در قالب **رسوب منیزیم هیدروکسید** از آن خارج شوند. پس از به‌دست آمدن منیزیم هیدروکسید جامد، در این فرایند از یک محلول **اسیدی** مثل **هیدروکلریک اسید** استفاده می‌شود. با افزودن هیدروکلریک اسید به منیزیم هیدروکسید تولید شده، **محلولی از منیزیم کلرید** به‌دست می‌آید. در مرحله بعد، منیزیم کلرید را با استفاده از روش تبلور از محلول استخراج کرده و آن را به حالت مذاب، وارد سلول برقکافت می‌کنند. با برقکافت منیزیم کلرید مذاب، فلز منیزیم به‌دست می‌آید.

۲ در سلول برقکافت آب، الکترود با **بار مثبت**، معادل با **آند** است که در سطح آن نیم‌واکنش اکسایش انجام می‌شود:

$$۲H_۲O(l) \rightarrow O_۲(g) + ۴H^+(aq) + ۴e^-$$

تصویر مقابل، نمایی از سلول برقکافت آب را نشان می‌دهد:



۳ در سلول گالوانی، هر دو الکترود در **محلول جداگانه** قرار می‌گیرند و دو محلول با استفاده از دیوارهٔ متخلخل به هم متصل می‌شوند. دیواره متخلخل، از مخلوط شدن سریع دو محلول جلوگیری می‌کند. این در حالی است که در سلول الکترولیتی، هر دو الکترود کاتد و آند **درون یک محلول** الکترولیت قرار می‌گیرند و **نیازی به استفاده از دیوارهٔ متخلخل نیست**.

گروه آموزشی ماز

۱۲- در فرایند خوردگی یک قطعه آهنی، ۱۶۸۰ میلی‌لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP مصرف شده و زنگ آهن نیز پس از تولید، فرو ریخته است. طی این فرایند، جرم تیغه آهنی به اندازه چند گرم کاسته شده است؟ ($Fe = ۵۶\ g.mol^{-۱}$)

۱) ۵/۶ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۸/۴ ۴) ۱۶/۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مسئله ـ ۱۴۰۲)

معادله واکنش خوردگی آهن به‌صورت زیر است:

$$۴Fe(s) + ۳O_۲(g) + ۶H_۲O(l) \rightarrow ۴Fe(OH)_۳(s)$$

با توجه به معادله این واکنش، جرم آهن مصرف شده در فرایند مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

$$?\ g\ Fe = ۱۶۸۰\ mL\ O_۲ \times \frac{۱\ L\ O_۲}{۱۰۰۰\ mL\ O_۲} \times \frac{۱\ mol\ O_۲}{۲۲/۴\ L\ O_۲} \times \frac{۴\ mol\ Fe}{۳\ mol\ O_۲} \times \frac{۵۶\ g\ Fe}{۱\ mol\ Fe} = ۵/۶\ g$$

توجه داریم که واکنش خوردگی آهن، طی یک فرایند دو مرحله‌ای انجام می‌شود. در مرحله اول این فرایند، اتم‌های آهن دو الکترون از دست داده و به یون $Fe^{۲+}$ تبدیل می‌شوند. چون گاز اکسیژن یک اکسنده بسیار قوی است، در مرحله بعد، هر یون $Fe^{۲+}$ مجدداً یک الکترون از دست داده و به یون $Fe^{۳+}$ تبدیل می‌شود. در واکنش‌های انجام شده، گاز اکسیژن در نقش عامل اکسنده است. معادله نیم‌واکنش کاهش اکسیژن به‌صورت زیر است:

نیم‌واکنش کاهش اکسیژن در محیط خنثی: $O_۲(g) + ۲H_۲O(l) + ۴e^- \rightarrow ۴OH^-(aq)\ ;\ E^\circ = +۰/۴۰V$

نیم‌واکنش کاهش اکسیژن در محیط اسیدی: $O_۲(g) + ۴H^+(aq) + ۴e^- \rightarrow ۲H_۲O(l)\ ;\ E^\circ = +۱/۲۳V$

همان‌طور که مشخص است، پتانسیل کاهشی گاز اکسیژن در محیط‌های اسیدی **مثبت‌تر** از محیط‌های خنثی است و به همین خاطر، واکنش خوردگی آهن در محیط‌های اسیدی در مقایسه با محیط‌های خنثی با سرعت بسیار بیشتری انجام می‌شود. برای جلوگیری از خوردگی یک نمونه از فلز آهن، از روش‌های زیر می‌توان استفاده کرد:

راه‌های جلوگیری از خوردگی آهن:
- ایجاد یک پوشش سطحی کمک قلع، قیر، رنگ و ... → به‌طور کامل جلوی خوردگی آهن را نمی‌گیرد.
- محافظت کاتدی به کمک برخی از فلزها → به‌طور کامل جلوی خوردگی آهن را می‌گیرد.

از آنجا که **آهن پرمصرف‌ترین فلز در جهان است**، خوردگی آن خسارت‌های هنگفتی به اقتصاد کشورها وارد می‌کند؛ به‌طوری که **سالانه** حدود **۲۰** درصد از آهن تولیدی برای **جایگزینی** قطعه‌های خورده شده مصرف می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۱۳- الکتریستهٔ حاصل از اکسید شدن ۳ گرم منیزیم در سلول گالوانی منیزیم-آلومینیم، چند گرم نقره را در یک سلول آبکاری نقره، به جسم مورد نظر می‌تواند انتقال دهد؟

($Ag = ۱۰۸$ و $Mg = ۲۴ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۱۸ ۲) ۲۷ ۳) ۳۶ ۴) ۵۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مسئله ـ ۱۴۰۲)

واکنش کلی در سلول منیزیم-آلومینیم به‌صورت مقابل است:

$$۳Mg(s) + ۲Al^{۳+}(aq) \rightarrow ۳Mg^{۲+}(aq) + ۲Al(s)$$

یعنی به ازای اکسید شدن ۳ مول Mg در این سلول، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود، پس داریم:

$$?\ mol\ e^- = ۳\ g\ Mg \times \frac{۱\ mol\ Mg}{۲۴\ g\ Mg} \times \frac{۶\ mol\ e^-}{۳\ mol\ Mg} = ۰/۲۵\ mol$$

در سلول آبکاری نقره، نیم‌واکنش زیر در کاتد انجام می‌شود:

$$Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s)$$

حال جرم نقره منتقل شده را حساب می‌کنیم:

$$?\ g\ Ag = ۰/۲۵\ mol\ e^- \times \frac{۱\ mol\ Ag}{۱\ mol\ e^-} \times \frac{۱۰۸\ g\ Ag}{۱\ mol\ Ag} = ۲۷\ g$$

آبکاری فلزات

وسایل آشپزخانه، شیرآلات ساختمان‌ها و دستگیره‌های درب، از جمله وسایلی هستند که فلز اصلی سازنده آن‌ها **آهن** یا **مس** است. با قرار گرفتن فلزهای آهن و مس در مجاورت رطوبت هوا، این فلزها دچار **خوردگی** می‌شوند. خوردگی این فلزها از یک‌سو سبب از بین رفتن زیبایی وسیله مورد نظر می‌شود و از سوی دیگر به سلامتی بدن آسیب می‌رساند. با پوشاندن سطح این فلزها با فلزهایی مثل نقره، کروم، نیکل و طلا، می‌توانیم از خوردگی آن‌ها جلوگیری کنیم. این فلزها در مقابل خوردگی **مقاوم** بوده و از فلز زیرین خود **محافظت** می‌کنند. به پوشاندن سطح یک فلز با لایه نازکی از فلزهای ارزشمند و مقاوم در برابر خوردگی توسط سلول‌های الکترولیتی، **آبکاری** گفته می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۱۴- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف: ترتیب قدرت اکسندگی یون‌های آهن(II)، قلع(II) و منیزیم به‌صورت $Mg^{2+} > Sn^{2+} > Fe^{2+}$ است.

ب: با قرار دادن یک قطعه آهن در محلول موجود در اطراف آند سلول برقکافت آب، تیغه آهنی خورده می‌شود.

پ: اگر یک قطعه منیزیمی را در تماس با یک جسم مسی قرار بدهیم، جسم مسی در برابر خوردگی محافظت می‌شود.

ت: از ورقه‌های آهنی که سطح آن‌ها با لایه‌ی نازک سرب پوشانده شده است، برای ساختن قوطی کنسرو استفاده می‌شود.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «پ» ۳) «پ» و «ت» ۴) «الف» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

عبارت‌های (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: فلز منیزیم، کاهنده قوی‌تری نسبت به آهن بوده و فلز آهن نیز کاهنده قوی‌تری نسبت قلع است. **هرچه یک فلز کاهنده قوی‌تری باشد، یون مربوط** به آن اکسنده **ضعیف‌تری** است؛ درنتیجه ترتیب اکسندگی یون‌ها به‌صورت $Mg^{2+} > Fe^{2+} > Sn^{2+}$ خواهد بود. قدرت اکسندگی Sn^{2+} بیشتر از Fe^{2+} است، یعنی یون Sn^{2+} نسبت به یون Fe^{2+}، آسان‌تر الکترون گرفته و کاهش می‌یابد.

«ب»: در آند سلول مربوط به برقکافت آب، نیم‌واکنش اکسایش زیر انجام می‌شود:

$$2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$$

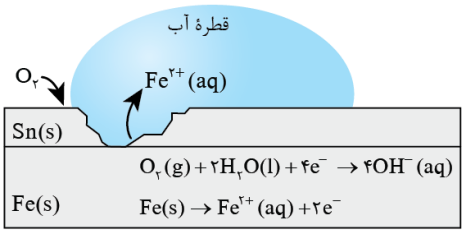
با تولید شدن یون هیدروژن یا هیدرونیوم در این نیم‌واکنش، می‌توان گفت که اطراف آند خاصیت **اسیدی** پیدا می‌کند. با قرار دادن فلز آهن در محیط اسیدی، این فلز دچار **خوردگی** می‌شود.

«پ»: چون E° فلز منیزیم کمتر از فلز مس است، اگر یک جسم مسی را در تماس با یک قطعه از فلز منیزیم قرار بدهیم، اتم‌های منیزیم در رقابت با اتم‌های مس برای اکسایش یافتن پیروز شده و جسم مسی در برابر خوردگی **محافظت** می‌شود؛ درحالی که اتم‌های منیزیم اکسایش یافته و به مرور زمان از جرم این فلز کاسته می‌شود.

حفاظت کاتدی

وسایل آهنی در هوای مرطوب زنگ زده و پس از آن دچار خوردگی می‌شوند. این فرایند، یک واکنش اکسایش-کاهش نامطلوب و ناخواسته است که در شهرهای بندری و ساحلی به مقدار بیشتری انجام می‌شود. یکی از روش‌های جلوگیری از خوردگی آهن، محافظت کاتدی است. در این روش، فلزی که قرار است در برابر خوردگی محافظت شود را در تماس با یک فلز دیگری قرار می‌دهند که E° کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد. در این شرایط، فلزهای مورد نظر برای از دست دادن الکترون و اکسایش‌یافتن با یکدیگر رقابت می‌کنند. در چنین شرایطی، فلزی که E° کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد در نقش آند اکسید می‌شود، اما فلزی که E° بزرگ‌تری دارد در نقش کاتد ظاهر شده و در برابر خوردگی محافظت می‌شود. چون پتانسیل کاهشی منیزیم کمتر از آهن است، با اتصال آهن و منیزیم به یکدیگر در هوای مرطوب، منیزیم نقش آند را ایفا کرده و اکسید می‌شود.

«ت»: از ورقه‌های **حلبی** برای ساختن **قوطی کنسرو و قوطی‌های روغن نباتی** استفاده می‌شود. در ساختار این ورقه‌ها، سطح فلز آهن با لایه‌ی نازکی از فلز **قلع(Sn)** پوشانده شده است. توجه داریم که در اثر ایجاد خراش در سطح این نوع آهن، فلز قلع(فلزی که پتانسیل کاهشی بزرگ‌تری دارد و قدرت کاهندگی کمتری دارد) از خوردگی محافظت شده و آهن(فلزی که پتانسیل کاهشی کوچک‌تری دارد و قدرت کاهندگی بیشتری دارد) دچار خوردگی می‌شود. تصویر زیر، یک قطعه حلبی در حال خوردگی را نشان می‌دهد:



گروه آموزشی ماز

۱۵- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) با توجه به مقاومت آلومینیم در برابر خوردگی، از این فلز در ساخت لوازم خانگی، هواپیما و کشتی استفاده می‌شود.
۲) اگر در سلول مربوط به آبکاری فلزها با نقره، جنس آند از نقره باشد، غلظت یون نقره در محلول ثابت می‌ماند.
۳) به مرور زمان، جرم تیغه‌های آندی وارد شده به الکترولیت موجود در سلول الکترولیتی هال، کاهش می‌یابد.
۴) فلز نقره با محلول هیدروکلریک اسید، همانند گاز اکسیژن موجود در هوای اطراف، واکنش نخواهد داد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ ۱۲۰۲)

فلزهایی که پتانسیل استاندارد کاهشی آن‌ها بیشتر از صفر است، با محلول **اسیدها** به‌طور طبیعی **واکنش نمی‌دهند**. مس، نقره، پلاتین و طلا در سری الکتروشیمیایی بالاتر از هیدروژن قرار داشته و E° آن‌ها مثبت است. پس این فلزها با یون هیدروژن موجود در محلول اسیدها واکنش نخواهند داد. از میان این ۴ فلز، فلزهای **مس** و **نقره** با **گاز اکسیژن** موجود در هوا **واکنش می‌دهند** به گونه‌ای که فلز **مس زنگار سبزرنگ و فلز نقره اکسید تیره رنگی دارد**.

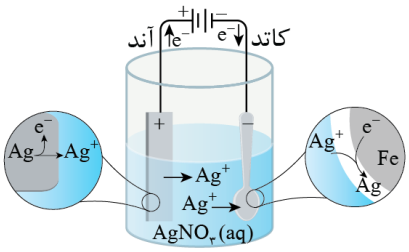
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ برخی از عناصر فلزی مثل آلومینیم، در حضور اکسیژن **اکسایش پیدا می‌کنند اما خورده نمی‌شوند**. از این فلزها می‌توان برای ساختن وسایل گوناگونی بهره برد که برای مدت طولانی‌تری استحکام خود را حفظ می‌کنند. به‌عنوان مثال، از آلومینیم در ساخت لوازم خانگی، هواپیما، کشتی و ... استفاده می‌شود. بر این اساس، **آلومینیم** نقش کلیدی در صنایع گوناگون دارد و فناوری تولید آن بسیار ارزشمند است.

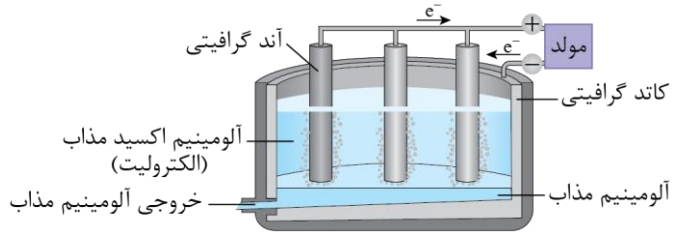
رفتار عناصر فلزی در برابر اکسیژن

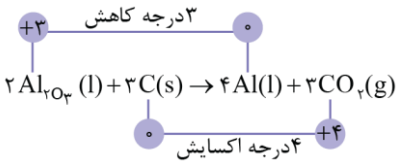
رفتار همه عناصر فلزی در برابر مولکول‌های اکسیژن یکسان نبوده و برخی از این عناصر در برابر خوردگی با اکسیژن مقاوم هستند. به‌عنوان مثال، با این که فلز آلومینیم E° بسیار کوچکی داشته و به سرعت با اکسیژن هوا واکنش می‌دهد و به Al_2O_3 تبدیل می‌شود، اما در برابر خوردگی مقاوم است. علت این موضوع آن است که آلومینیم اکسید تولیدشده لایه‌ای چسبنده و متراکم را در سطح فلز باقی‌مانده ایجاد می‌کند که باعث جلوگیری از نفوذ اکسیژن و رطوبت به لایه‌های زیرین شده و از زنگ‌زدن لایه‌های درونی آلومینیم جلوگیری می‌کند. فلزات قلع و روی نیز به طریق مشابه در برابر خوردگی مقاوم هستند. به خاطر وجود این ویژگی، از فلزهای مورد نظر می‌توان برای ایجاد یک لایه محافظ بر روی سطح دیگر عناصر فلزی از جمله آهن استفاده کرد.

۲ اگر در سلول الکترولیتی مربوط به آبکاری اجسام فلزی با فلز نقره، جنس تیغه آندی از نقره باشد، به ازای کاهش هر یون نقره در محل کاتد، یک اتم نقره در سمت آند اکسایش پیدا می‌کند و به همین خاطر، غلظت یون نقره در محلول موجود در این سلول ثابت می‌ماند. تصویر زیر، سلول مورد استفاده برای آبکاری یک قاشق فلزی با نقره را نشان می‌دهد:



۳ در سلول الکترولیتی مربوط به سلول هال، جرم الکترود گرافیتی مربوط به آند کاهش می‌یابد. شکل زیر، سلول هال را نمایش می‌دهد:





مطابق این تصویر، **۳ میله گرافیتی** وارد شده به الکترولیت، به قطب مثبت باتری متصل شده‌اند و نقش آند را در این سلول ایفا می‌کنند. به مرور زمان جرم این سه تیغه گرافیتی در سلول هال **کاسته می‌شود** و **کربن** موجود در ساختار این میله‌ها نیز در واکنش کلی سلول مورد نظر شرکت می‌کند. بدنه و کف ظرف نیز به قطب منفی باتری شده‌اند و نقش کاتد سلول را ایفا می‌کنند. **جرم گرافیت‌های مربوط به کاتد** در سلول هال، **ثابت** بوده و تغییر نمی‌کند. در واقع، این قسمت از سلول هال در واکنش کلی سلول **شرکت نمی‌کند**.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir