آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله چهاردهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۴۰۳/اسفند/۲۴

دفترچه شماره یک

حسابان و ریاضیات پایه	هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	بودجه‌بندی دروس
حسابان (۲) فصل ۴ و فصل ۵ صفحهٔ ۷۱ تا ۱۴۴	هندسه (۳) فصل ۲ (درس ۳) و فصل ۳ صفحهٔ ۴۷ تا ۸۶	ریاضیات گسسته فصل ۲ (درس ۲) و فصل ۳ صفحهٔ ۴۳ تا ۸۴	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۵ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

جمع‌بندی نیم‌سال دوم دوازدهم

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱- تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۳ & ; \quad x\le ۲\\ x^۲+[-x] & ; \quad x>۲\end{cases}$ مفروض است. حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(۲+h)-f(۲+|h|)}{h}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) -۱
۳) -۲
۴) ۶

۲- مقدار ماکزیمم نسبی تابع $y=x^۳+۳x^۲-۹x+۱$، چه‌قدر است؟

۱) -۴
۲) ۲۸
۳) ۴۶
۴) -۲۶

۳- هرگاه $g(x)=f(\sqrt{x})$ و $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$، مقدار $g''(۳)$ چه‌قدر است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۳۲}$
۲) $-\dfrac{۱}{۱۶}$
۳) $-\dfrac{۱}{۸}$
۴) $-\dfrac{۱}{۴}$

۴- اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{۲}+b\cos\dfrac{\pi x}{۳}+۲ & ; \quad x>۰\\ bx^۲-ax-۱ & ; \quad x\le ۰\end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f(\dfrac{۲ab}{\pi})$ برابر کدام است؟

۱) -۲
۲) $\dfrac{۳}{۲}$
۳) $\dfrac{۷}{۲}$
۴) ۴

۵- اگر $g(x)=f(\tan^۲x+\sqrt{۲}\sin x)$ باشد، به طوری که $g'(\dfrac{۳\pi}{۴})=۱۰$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱۰}{۳}$
۲) $-\dfrac{۵}{۳}$
۳) -۲
۴) -۵

۶- خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^۳+mx^۲+nx+۱$ در نقطهٔ $A(۱,۴)$، در این نقطه از منحنی عبور می‌کند. مقدار $m-n$ کدام است؟

۱) -۸
۲) -۴
۳) -۲
۴) ۴

۷- اگر $x=۲$ طول نقطهٔ بحرانی تابع $y=(x+a)\sqrt[۳]{x^۲}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۵
۲) -۳
۳) -۲
۴) -۱

۸- در یک استوانه مجموع ارتفاع و قطر قاعده برابر ۱۲ است. اگر حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن باشد، اندازهٔ ارتفاع آن کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹- در نقطهٔ تلاقی نمودارهای دو تابع $f(x)=۲\cos^۲ x$ و $g(x)=۳\sin x$ در بازهٔ $(۰\,,\frac{\pi}{۲})$، خط مماس بر نمودار تابع g، محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۳}-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}-\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}-\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۳}-۳$

۱۰- اگر $f(x)=\sqrt{۴x^۲+۵}-۲x$ و $g(x)=\sqrt{۴x^۲+۵}+۲x$، آن‌گاه حاصل $f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) $-\frac{۲۰}{۳}$

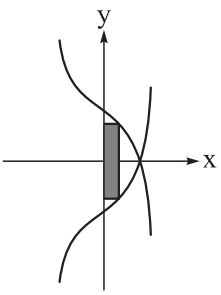
۱۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۳+kx^۲$ بر خط به معادلهٔ $y=-۱۶$ مماس است. طول نقطهٔ عطف تابع f کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲- تابع $f(x)=x\sqrt{۳-|x|}$ روی بازهٔ $(-a\,,a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

۱۳- نمودار توابع $f(x)=x^۳-۴$ و $g(x)=-f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. بیشترین مساحت ممکن برای مستطیل سایه زده‌شده، چه‌قدر است؟

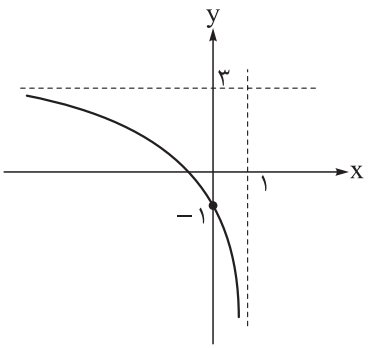


۱) ۱۲
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۴

۱۴- هرگاه $f(x)=\frac{\cos^۳ x-۲۷}{۹-\cos^۲ x}$ و $g(x)=\frac{۳}{۳+\cos x}$، آن‌گاه مقدار $f''(\frac{\pi}{۳})+۳g''(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۵- بخشی از نمودار تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx-۱}$ در شکل زیر رسم شده است. اختلاف طول‌های نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $g(x)=xf(x)$، کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶- جهت تقعر تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}$ روی بازهٔ $(a\,,b)$ رو به بالاست. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) صفر

۱۷- اگر امتداد نیم‌مماس راست بر نمودار تابع $f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{۲x+a}$، در نقطهٔ گوشه‌ای آن، نیمساز ناحیهٔ اول را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند، معادلهٔ مماس قائم بر نمودار f کدام است؟

۱) $x=\frac{۳}{۲}$ ۲) $x=-\frac{۳}{۲}$

۳) $x=\frac{۵}{۲}$ ۴) $x=-\frac{۵}{۲}$

۱۸- تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}\sin^۳ x+\frac{۳}{۴}\sin ۲x+\frac{۳}{۲}x$ با دامنهٔ $[۰\,,۲\pi]$ مفروض است. بیشترین اختلاف طول‌های دو نقطهٔ اکسترمم نسبی متوالی تابع f، کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹- زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=۲\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{k}$ و $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}$ چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

۲۰- اگر $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}+m\vec{k}$ و $\vec{b}=(۳,۲m,۱)$، آن‌گاه به‌ازای کدام مقدار m، تساوی $(۲\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})=۰$ برقرار است؟

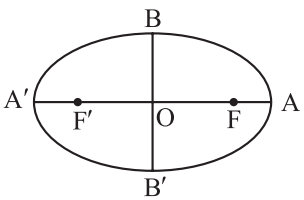
۱) $m=۷$ ۲) $m=\frac{۷}{۲}$

۳) $m=-۷$ ۴) همهٔ مقادیر حقیقی m

۲۱- روی کدام‌یک از خط‌های زیر، نقطه‌ای وجود ندارد که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطهٔ (۱۰,۵) و (۲,۵−) برابر ۱۳ باشد؟

۱) $y=۷/۵$ ۲) $y=۲$ ۳) $x=۳$ ۴) $x=۱۰/۵$

۲۲- مطابق شکل، اگر خروج از مرکز بیضی برابر e باشد، آن‌گاه نسبت مساحت چهارضلعی $ABF'B'$ به مساحت چهارضلعی $BFB'F'$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{e}+۱$ ۲) $e+۱$

۳) $\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{e}+۱)$ ۴) $\frac{۱}{۲}(e+۱)$

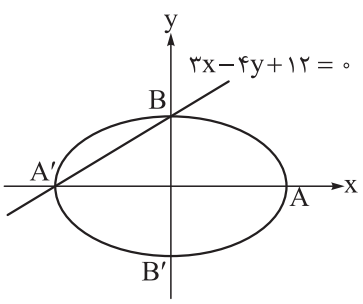
۲۳- از نقطهٔ F، کانون سهمی به معادلهٔ $x^۲-y-۴x+۲=۰$، عمودی بر خط هادی آن وارد کرده و پای عمود را A می‌نامیم. اگر خطی که در F بر محور تقارن این سهمی عمود می‌شود، سهمی را در نقاط B و C قطع کند، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۱

۲۴- آینهٔ سهمی‌شکل، به معادلهٔ $y^۲+y+۲x=۱$ مفروض است. با قراردادن منبع نور در کدام نقطه می‌توانیم به وسیلهٔ این آینه، نور بالا ایجاد کنیم؟

۱) $(\frac{۱}{۸},-۱)$ ۲) $(\frac{۱}{۸},۰)$ ۳) $(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ ۴) $(۰,-\frac{۱}{۲})$

۲۵- مطابق شکل AA' و BB' به ترتیب بلندترین و کوتاه‌ترین قطر بیضی هستند. اگر کانون‌های این بیضی، رأس و کانون یک سهمی باشند، طول وتری که این سهمی از محور yها جدا می‌کند، کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۱۴}$

۲) $۲\sqrt{۱۴}$

۳) $۴\sqrt{۷}$

۴) $۸\sqrt{۷}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۶- از نقطهٔ $A(۲,-۱,۳)$، سه صفحه به موازات صفحه‌های مختصات می‌گذرانیم. این سه صفحه، به همراه صفحه‌های مختصات، وجه‌های یک مکعب مستطیل هستند. کدام نقطه روی دقیقاً یکی از وجه‌های این مکعب مستطیل واقع است؟

۱) $(۲,-\frac{۱}{۲},۳)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},-۱,۲)$ ۳) $(۱,-\frac{۱}{۲},۲)$ ۴) $(۲,۰,۳)$

۲۷- دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند. اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ هم‌اندازه باشند، کدام دو بردار لزوماً بر هم عمودند؟

۱) $\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ ۲) $\vec{b}$ و $۲\vec{a}+\vec{b}$ ۳) $\vec{b}$ و $\vec{a}-۲\vec{b}$ ۴) $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$

۲۸- تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۲,۳,-۵)$ را بر امتداد دو بردار عمود بر هم $\vec{b}=(۱,۲,-۲)$ و $\vec{c}$ به ترتیب $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نامیده‌ایم. بردار $\vec{v}$ کدام است؟

۱) $(۲,۰,۱)$ ۲) $(۰,-۲,۳)$ ۳) $(۴,۰,۲)$ ۴) $(۰,-۱,-۱)$

۲۹- نقاط $A(۳,۱,-۱)$، $B(۰,-۱,۱)$ و $C(۲,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. فاصلهٔ رأس B از میانهٔ AM کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۳۰- اگر نقطهٔ $M(۴,m,m)$ بر صفحهٔ گذرنده از نقاط $A(۱,۲,۰)$، $B(۲,-۱,-۵)$ و $C(۱,۱,-۲)$ واقع باشد، آن‌گاه فاصلهٔ M از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) $۲\sqrt{۳}$

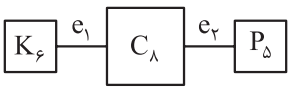
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱- در گراف G، داریم $p(G) = ۵$ و $\gamma(G) = ۱$. اگر این گراف فاقد دور باشد، دارای چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

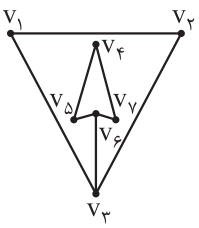
۳۲- شکل زیر، گراف G را نشان می‌دهد. گراف از سه بخش تشکیل شده که دو یال $e_۱$ و $e_۲$ این بخش‌ها را مطابق شکل به هم وصل کرده‌اند و بین رأس‌های یال $e_۱$ و یال $e_۲$، مسیری با طول کم‌تر از ۴ وجود ندارد. عدد احاطه‌گری برای این گراف، کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۳۳- گراف شکل مقابل، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟



۱) ۸

۲) ۱۲

۳) ۱۶

۴) ۲۴

۳۴- با حروف کلمهٔ «MOHAMMAD» چند کلمهٔ ۷حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۲۷۳۰ ۲) ۳۳۶۰

۳) ۵۴۶۰ ۴) ۶۷۲۰

۳۵- به چند طریق می‌توان ۱۰ کبوتر را در ۴ لانه قرار داد، به طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟ (کبوترها با هم فرقی ندارند و فقط تعداد کبوترها در هر لانه مهم است).

۱) ۸۴ ۲) ۱۲۰

۳) ۲۲۰ ۴) ۲۸۶

۳۶- از مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به مجموعهٔ $B = \{۱,۲,۳\}$، چند تابع پوشا می‌توان نوشت، به شرط آن‌که فقط مؤلفهٔ دوم دو زوج مرتب در این توابع، عدد ۳ باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۷- n حداقل چند باشد، تا مطمئن شوید در یک زیرمجموعهٔ n عضوی از مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی، حداقل سه عضو وجود دارد که میانگین آن‌ها برابر ۵ شود؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۳۸- مربع لاتین زیر را به چند طریق می‌توان کامل کرد؟

	۲		
۱			
			۴
		۳	

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۱۲

۳۹- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰۰ وجود دارد که مضرب ۵ باشند، ولی نه مضرب ۳ باشند و نه مضرب ۷؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

۴۰- در فضای $\mathbb{R}^3$، در ناحیهٔ محصور بین صفحه‌های مختصات و صفحه‌های $x = 7$، $y = 7$ و $z = 7$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد که مجموع مؤلفه‌های آن برابر ۱۳ باشد؟ (نقاط روی صفحه‌های گفته‌شده قابل قبول نیستند.)

۱) ۶۶ ۲) ۵۱ ۳) ۳۶ ۴) ۲۱

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله چهاردهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۲۴/اسفند/۱۴۰۳

دفترچه شماره دو

فیزیک	شیمی
فیزیک (۳) فصل ۳ (از ابتدای موج و انواع آن) تا فصل ۶ صفحهٔ ۶۹ تا ۱۵۶	شیمی (۳) فصل ۳ و فصل ۴ صفحهٔ ۶۷ تا ۱۲۳

بودجه‌بندی دروس

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۸۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	
مجموع	۶۵ سؤال			۸۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

جمع‌بندی نیم‌سال دوم دوازدهم

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

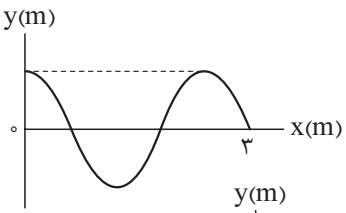
۴۱- اندازهٔ نیروی کشش طناب A، ۴ برابر اندازهٔ نیروی کشش طناب B و قطر مقطع طناب A، ۳ برابر قطر مقطع طناب B است. اگر چگالی دو طناب یکسان باشد، تندی انتشار موج عرضی در طناب A، چند برابر تندی انتشار موج عرضی در طناب B است؟

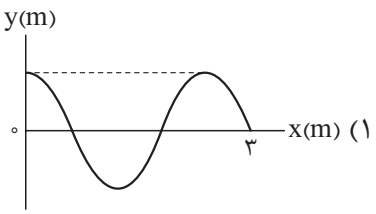
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۶

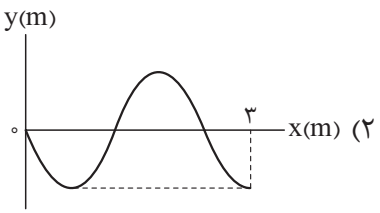
۴۲- در یک طناب کشیده موج عرضی در حال انتشار است. اگر تندی بیشینهٔ ذره‌های طناب در حین نوسان، $\frac{۵\pi}{۶}$ برابر تندی انتشار موج در این طناب باشد، فاصلهٔ یک قله از سومین درهٔ بعد از خود، چند برابر دامنهٔ موج است؟

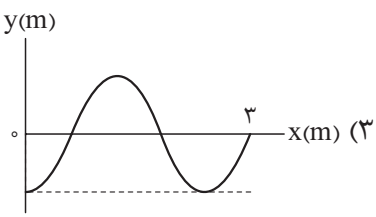
۱) ۶ ۲) $\frac{۲۴}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۴}$

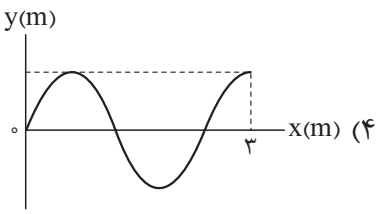
۴۳- نقش موج عرضی منتشرشده در طنابی در مبدأ زمان به شکل زیر است. اگر سرعت انتشار موج در طناب $\vec{v} = (-۱۲\ m/s)\vec{i}$ باشد، نقش موج منتشرشده در طناب در لحظهٔ $t = ۰/۲۵\ s$ به صورت کدام شکل است؟



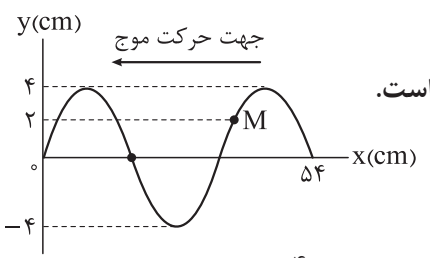
۱)


۲)


۳)


۴)


۴۴- شکل زیر، تصویر یک موج عرضی سینوسی را در یک ریسمان کشیده‌شده، در مبدأ زمان نشان می‌دهد. اگر تندی متوسط ذرهٔ M در بازهٔ زمانی صفر تا $t = ۰/۰۵\ s$ برابر $۱/۲\ m/s$ باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟ $(\pi = ۳)$



الف) تندی انتشار موج $۲/۴\ m/s$ است.

ب) اندازهٔ سرعت متوسط ذرهٔ M در بازهٔ زمانی صفر تا t، برابر $۴۰\ cm/s$ است.

پ) تندی بیشینهٔ ذرهٔ M، $۲\ m/s$ است.

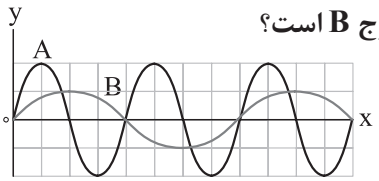
ت) اندازهٔ شتاب بیشینهٔ ذرهٔ M، $۶۴\ m/s^۲$ است.

۱) الف و ب ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) پ و ت

محل انجام محاسبات

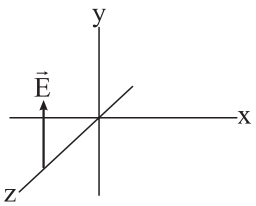
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵- نمودار جابه‌جایی ـ مکان دو موج مکانیکی سینوسی A و B که در یک محیط منتشر شده‌اند، به شکل زیر است. آهنگ متوسط انتقال انرژی در موج A چند برابر آهنگ متوسط انتقال انرژی در موج B است؟



۱) ۱
۲) ۴
۳) ۱۶
۴) ۶۴

۴۶- میدان الکتریکی یک موج رادیویی با طول موج ۶ Mm در نقطه‌ای معین و دور از چشمه، در لحظهٔ t_1 به شکل زیر است. موج، انرژی را در خلاف جهت محور z انتقال می‌دهد. میدان مغناطیسی موج در این نقطه و در لحظهٔ $t_1 + \frac{1}{100}s$ در چه جهتی است؟ (موج در خلأ منتشر شده است و $c = 3\times10^8 \ m/s$.)



۱) در جهت محور x
۲) در خلاف جهت محور x
۳) در جهت محور z
۴) در خلاف جهت محور z

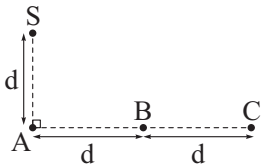
۴۷- شخصی در فاصلهٔ ۱۰۰متری یک بلندگو با توان ۳۶ W قرار دارد. اگر ۹۰ درصد انرژی صوتی حاصل از بلندگو توسط محیط جذب شده باشد، در هر دقیقه چند نانوژول انرژی به پردهٔ گوش او به مساحت ۸۰ mm^2 می‌رسد؟ ($\pi = 3$)

۱) ۴/۸
۲) ۱۴/۴
۳) ۴۸
۴) ۱۴۴

۴۸- توان یک منبع صوت ۱۲۰ W است. شنونده‌ای صوت حاصل از منبع را با تراز ۹۰ dB دریافت می‌کند. شخص ۸۰ m به منبع نزدیک می‌شود. توان منبع چند وات تغییر کند تا تراز شدت صوت دریافتی شخص ثابت بماند؟ ($\pi = 3$، $I_0 = 10^{-12} \ W/m^2$ و از جذب انرژی توسط هوا چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۱۱۶/۲
۲) ۱۱۵/۲
۳) ۵/۸
۴) ۴/۸

۴۹- در شکل زیر، یک چشمهٔ صوتی در نقطهٔ S قرار دارد. اگر تراز شدت صوت در نقطه‌های A و B به ترتیب β و $\frac{2}{3}\beta$ باشد، تراز شدت صوت در نقطهٔ C، چند دسی‌بل است؟ ($\log 2 = 0/3$ و از جذب انرژی صوت توسط محیط صرف نظر کنید.)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۹
۴) ۱۶

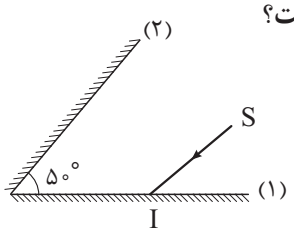
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰- وال عنبر یکی از جانورانی است که با استفاده از پژواک امواج فراصوتی، مکان‌یابی می‌کند. بسامد امواج فراصوتی‌ای که این وال تولید می‌کند $75\ kHz$ است. به ترتیب از راست به چپ، زمان رفت و برگشت موج گسیل‌شده توسط وال برای جسمی که در فاصلهٔ $90\ m$ از آن قرار گرفته، چند ثانیه است و اندازهٔ این جسم حداقل حدود چند سانتی‌متر باشد تا وال آن را تشخیص دهد؟ (تندی انتشار صوت در آب $1500\ m/s$ است.)

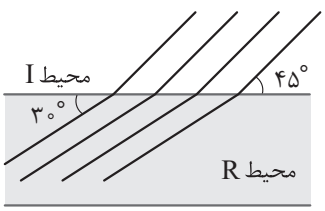
۱) ۰/۱۲ ، ۲
۲) ۰/۱۲ ، ۰/۲
۳) ۰/۰۶ ، ۲
۴) ۰/۰۶ ، ۰/۲

۵۱- در شکل زیر، پرتو نور SI پس از بازتاب از آینهٔ تخت (۱) به آینهٔ تخت (۲) می‌تابد. اگر پرتو نور، پس از دومین بازتاب از آینهٔ (۱)، موازی آینهٔ (۲) شود، زاویهٔ تابش آن در اولین برخورد به آینهٔ (۱) چند درجه است؟



۱) ۳۰
۲) ۴۰
۳) ۵۰
۴) ۶۰

۵۲- جبهه‌های موج تختی در مرز دو محیط I و R به شکل زیر است. به ترتیب از راست به چپ، طول موج این موج در محیط R چند برابر طول موج آن در محیط I و بسامد این موج در محیط R چند برابر بسامد آن در محیط I است؟



۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ۱
۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sqrt{2}$
۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ، ۱
۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ، $\sqrt{2}$

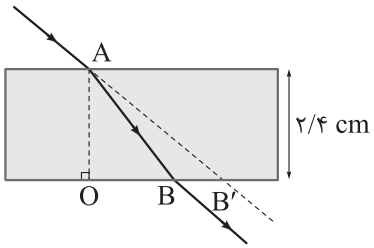
۵۳- پرتو نور تک‌رنگی از هوا به محیط شفافی به ضریب شکست ۱/۶ می‌تابد. بخشی از پرتو تابیده، بازتاب شده و بخش دیگر آن وارد محیط شفاف می‌شود. اگر زاویهٔ شکست، نصف زاویهٔ تابش باشد، زاویهٔ بین پرتو بازتابش و پرتو شکست چند درجه است؟ ($\sin 37^\circ = 0/6$)

۱) ۶۹
۲) ۷۴
۳) ۱۰۶
۴) ۱۱۱

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴- در شکل زیر، پرتو نور تک‌رنگی از هوا وارد تیغهٔ متوازی‌السطوحی شده و در نقطهٔ B از آن خارج می‌شود. امتداد پرتو تابش در نقطهٔ B' از تیغه خارج شده است. اگر $OB = ۱\,cm$ و $BB' = ۰/۸\,cm$ باشد، ضریب شکست تیغه کدام است؟ ($\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$)



۱) ۱/۵۶
۲) ۱/۸
۳) ۲/۰۸
۴) ۲/۲۵

۵۵- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) در بازتاب موج از یک مانع، برای هر وضعیت مانع و همهٔ انواع موج، زاویهٔ بازتابش برابر با زاویهٔ تابش است.

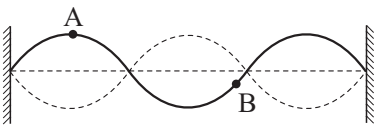
ب) در سونوگرافی و دستگاه سونار، از امواج الکترومغناطیسی برای مکان‌یابی پژواکی استفاده می‌شود.

پ) با افزایش دمای هوا، چگالی آن کاهش و ضریب شکست آن افزایش می‌یابد.

ت) ضریب شکست یک محیط مادی معین، برای نور قرمزرنگ بیشتر از ضریب شکست آن محیط برای نور آبی‌رنگ است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۶- در یک طناب، موج ایستاده‌ای به شکل زیر تشکیل شده است. کدام کمیت‌های فیزیکی ذرهٔ A با همان کمیت فیزیکی متعلق به ذرهٔ B برابر است؟



الف) دورهٔ تناوب

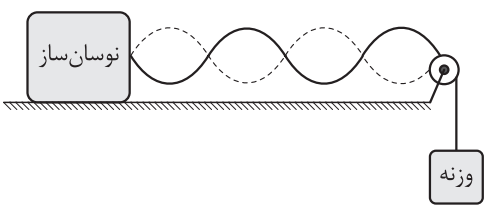
ب) دامنهٔ نوسان

پ) تندی ذره هنگام عبور از وضع تعادل

ت) اندازهٔ شتاب ذره هنگام عبور از وضع تعادل

۱) الف و پ
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) ب و ت

۵۷- در شکل زیر، نوسان‌ساز، تار را با بسامد معینی به ارتعاش درمی‌آورد و در طول تار ۵ گره به وجود می‌آورد. جرم وزنه چند درصد و چگونه تغییر کند تا در طول تار ۶ گره تشکیل شود؟



۱) ۲۰، کاهش یابد.
۲) ۲۵، افزایش یابد.
۳) ۳۶، کاهش یابد.
۴) ۴۴، افزایش یابد.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸- با ورود پرتو نور تک‌رنگی از خلأ به محیط شفافی به ضریب شکست $\frac{۴}{۳}$، طول موج آن ۱۵۵ nm تغییر می‌کند. انرژی هر یک از فوتون‌های مربوط به این نور در محیط شفاف چند الکترون‌ولت است؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm)$

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۵۹- در یک نیروگاه خورشیدی به سطح یک پنل خورشیدی با ابعاد $۱/۵\ m \times ۲\ m$ در هر دقیقه، ۲×۱۰^{۲۳} فوتون با طول موج متوسط ۵۵۰ nm برخورد می‌کند. شدت تابشی متوسط خورشید در محل این پنل، چند وات بر متر مربع است؟ $(h = ۶/۶\times ۱۰^{-۳۴} J.s$ و $c = ۳\times ۱۰^{۸}\ m/s)$

۱) ۲۵۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۵۰۰

۶۰- لامپ A با توان ۲۰۰ W نور تک‌رنگی با طول موج ۴۰۰ nm و لامپ B با توان ۱۰۰ W نور تک‌رنگی با طول موج λ_B تابش می‌کنند. اگر در هر ثانیه، تعداد فوتون‌های تابش‌شده از لامپ A، $۱۰^{۲۰}$ فوتون بیشتر از تعداد فوتون‌های تابش‌شده از لامپ B باشد، λ_B چند نانومتر است؟ $(c = ۳\times ۱۰^{۸}\ m/s$ و $h = ۶/۶\times ۱۰^{-۳۴} J.s)$

۱) ۲۹۹ ۲) ۵۹۸ ۳) ۶۰۲ ۴) ۷۰۱

۶۱- در آزمایش فوتوالکتریک، انرژی هر یک از فوتون‌های نور تابیده به سطح فلز، ۲۰ درصد بیشتر از تابع کار فلز است. اگر بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از سطح فلز ۰/۸ eV باشد، طول موج آستانهٔ فلز به‌کاررفته در آزمایش چند نانومتر است؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm)$

۱) ۱۲۴ ۲) ۳۱۰ ۳) ۳۷۲ ۴) ۶۲۰

۶۲- تابع کار فلزی ۴eV است. نوری با بسامد f به سطح این فلز تابیده می‌شود و فوتوالکترون‌ها با بیشینهٔ تندی v از سطح فلز جدا می‌شوند. اگر بسامد نور تابیده به سطح فلز $۱۰^{۱۵}$ Hz افزایش یابد، بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌ها $۱۰^{۵}\ m/s$ تغییر می‌کند. v برحسب متر بر ثانیه کدام است؟ $(e = ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹} C$، $h = ۴\times ۱۰^{-۱۵} eV.s$ و جرم الکترون را $۱۰^{-۳۰} kg$ در نظر بگیرید.)

۱) $۶/۳۵\times ۱۰^{۶}$ ۲) $۶/۳۵\times ۱۰^{۵}$ ۳) $۱۲/۷\times ۱۰^{۵}$ ۴) $۱۲/۷\times ۱۰^{۶}$

۶۳- بنابر دیدگاه فیزیک کلاسیک در مدل اتمی رادرفورد، با فرض حرکت الکترون به دور هسته، انرژی الکترون و بسامد موج الکترومغناطیسی گسیلی آن، به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کند؟

۱) به طور پیوسته افزایش می‌یابد، به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

۲) به طور پیوسته افزایش می‌یابد، به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

۳) به طور پیوسته کاهش می‌یابد، به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

۴) به طور پیوسته کاهش می‌یابد، به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۴- در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، الکترون در تراز $n = 2$ قرار دارد. این الکترون چند ریدبرگ انرژی دریافت کند تا شعاع مدار آن ۴ برابر شود؟

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۶۵- الکترونی در سومین حالت برانگیختهٔ اتم هیدروژن قرار دارد. اگر الکترون از این حالت به حالت پایه جهش کند، طول موج فوتون گسیل‌شده چند نانومتر است؟ ($E_R = 13/6\ eV$ و $hc = 1224\ eV.nm$)

۱) ۹۶ ۲) ۱۰۱/۲۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

۶۶- در طیف گسیلی اتم هیدروژن، بلندترین طول موج فوتون فرابنفش، چند برابر کوتاه‌ترین طول موج فوتون فروسرخ است؟

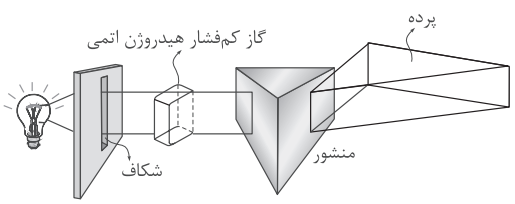
۱) $\frac{4}{27}$ ۲) $\frac{196}{405}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{7}{108}$

۶۷- بسامد سومین خط طیف اتم هیدروژن در کدام رشته ۲۷۵ THz است؟ ($R = 0/011\ nm^{-1}$ و $c = 3\times10^8\ m/s$)

۱) بالمر $(n' = 2)$ ۲) پاشن $(n' = 3)$

۳) براکت $(n' = 4)$ ۴) پفوند $(n' = 5)$

۶۸- شکل زیر، وسیلهٔ آزمایشی را به صورت طرح‌وار نشان می‌دهد. کدام موارد زیر دربارهٔ این آزمایش درست است؟



الف) در این آزمایش طیف جذبی گاز هیدروژن تشکیل می‌شود.

ب) در این آزمایش طیف گسیلی گاز هیدروژن تشکیل می‌شود.

پ) در این آزمایش روی پرده یک طیف پیوسته با خط‌های تاریک درون آن، مشاهده می‌شود.

ت) در این آزمایش روی پرده یک نوار تاریک با چند خط رنگی مشاهده می‌شود.

۱) الف و پ ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

۶۹- کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

۱) اندازهٔ نیروی ربایشی هسته‌ای بین دو پروتون مجاور، از اندازهٔ نیروی ربایشی هسته‌ای بین دو نوترون مجاور کم‌تر است.

۲) درون هسته، جاذبهٔ حاصل از نیروی گرانشی بین نوکلئون‌ها، با دافعهٔ حاصل از نیروی الکترواستاتیکی بین پروتون‌ها، موازنه می‌شود.

۳) از آن‌جایی‌که ایزوتوپ‌ها، تعداد پروتون متفاوت و تعداد نوترون یکسان دارند، خواص شیمیایی آن‌ها یکسان است.

۴) اختلاف بین ترازهای انرژی نوکلئون‌ها در هسته از اختلاف بین ترازهای انرژی الکترون‌ها در اتم، بیشتر است.

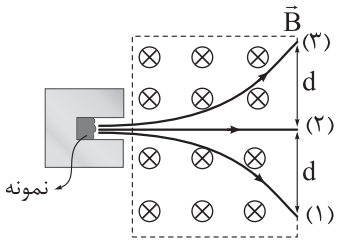
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰- اگر نسبت عدد جرمی به عدد اتمی در ایزوتوپ‌های پایدار سبک برابر k و در ایزوتوپ‌های پایدار سنگین برابر k' باشد، کدام درست است؟

۱) $k \simeq ۱ ، ۱ < k' < ۲$
۲) $k \simeq ۱ ، k' > ۲$
۳) $k \simeq ۲ ، ۱ < k' < ۲$
۴) $k \simeq ۲ ، k' > ۲$

۷۱- مسیر حرکت برخی پرتوهای گسیل‌شده از نمونه‌ای شامل دو مادهٔ پرتوزای جدا از هم در میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحهٔ $\vec{B}$ به شکل زیر است. مسیرهای (۱)، (۲) و (۳) به‌ترتیب از راست به چپ، مسیر حرکت کدام‌یک از ذره‌ها می‌توانند باشند؟



۱) الکترون، گاما و آلفا
۲) پوزیترون، گاما و الکترون
۳) الکترون، گاما و پوزیترون
۴) آلفا، گاما و الکترون

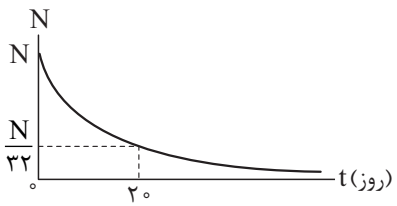
۷۲- یک هستهٔ مادر پرتوزا با گسیل a ذرهٔ α و b ذرهٔ β^- به هستهٔ دختر تبدیل شده است. اگر تعداد نوترون‌های هستهٔ مادر ۳ واحد بیشتر از تعداد نوترون‌های هستهٔ دختر باشد، a و b به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟

۱) ۲، ۱
۲) ۱، ۲
۳) ۴، ۲
۴) ۱، ۱

۷۳- در لحظهٔ $t = ۰$ نمونه‌ای از یک مادهٔ پرتوزا با نیمه‌عمر $۴\,min$ شروع به واپاشی می‌کند. اگر در ۴ دقیقهٔ سوم، $۴۰\,g$ از این نمونه دچار واپاشی شود، در لحظهٔ $t_۱ = ۲۰\,min$ چند گرم از این نمونه به صورت فعال باقی می‌ماند؟

۱) ۱۰
۲) ۵
۳) ۲/۵
۴) ۱/۲۵

۷۴- نمودار تعداد هسته‌های فعال یک مادهٔ پرتوزا برحسب زمان به شکل زیر است. پس از گذشت ۱۲ روز چند درصد از جرم نمونه‌ای از این ماده دچار واپاشی می‌شود؟



۱) ۶/۲۵
۲) ۱۲/۵
۳) ۹۳/۷۵
۴) ۸۷/۵

۷۵- در هر واکنش گداخت $_۲^۳He + n \rightarrow {}_۱^۲D + {}_۱^۲D$، حدود $۳/۲\,MeV$ انرژی آزاد می‌شود. برای تولید $۱\,J$ انرژی، تقریباً چند نانوگرم دوتریم باید وارد این فرایند گداخت شود؟ ($e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\,C$، جرم مولی دوتریم $۲\,g/mol$ و عدد آووگادرو $۶/۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}$ است.)

۱) $۶/۵ \times ۱۰^{-۳}$
۲) $۱/۳ \times ۱۰^{-۲}$
۳) $۱/۶۵ \times ۱۰^{-۲}$
۴) $۳/۳ \times ۱۰^{-۲}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶- جدول زیر، درصد جرمی مواد سازندهٔ نوعی خاک رس را نشان می‌دهد. اگر درصد جرمی سیلیس، پس از پخت سفالینهٔ تهیه‌شده از این نمونه خاک رس، ۱۰ درصد افزایش یابد، درصد جرمی سدیم موجود در این خاک رس چند درصد خواهد شد؟ $(Na = ۲۳, O = ۱۶ : g.mol^{-1})$

ماده	$SiO_۲$	$Al_۲O_۳$	$H_۲O$	$Fe_۲O_۳$	$Na_۲O$	ناخالصی‌های دیگر
درصد جرمی	۴۰	۵	۲۵	۲۳/۱	۶/۲	۰/۷

۱) ۵/۷۵ ۲) ۸/۶۲۵ ۳) ۱۱/۵ ۴) ۱۷/۲۵

۷۷- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- **اگر شمار اتم‌های کربن در یک نمونهٔ الماس و گرافیت با یکدیگر برابر باشد، حجم نمونهٔ گرافیتی بیشتر از الماس خواهد بود.**
- **در ساختار یخ خشک، هر اتم اکسیژن به دو اتم هیدروژن با پیوند اشتراکی و به دو اتم هیدروژن با پیوند هیدروژنی متصل است.**
- **کوارتز از جمله نمونه‌های خالص سیلیس به شمار می‌رود و در ساختار آن، هر اتم عنصر شبه‌فلزی به دو اتم عنصر نافلزی متصل است.**
- **در مولکول‌های خطی سه‌اتمی، هستهٔ اتم‌ها بر روی یک خط راست قرار دارد و این مولکول‌ها در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۸- کدام مورد درست است؟

۱) اگر در یک مادهٔ مولکولی، اتم کربن با چهار پیوند کووالانسی به چهار اتم متصل باشد، مولکول حاصل در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

۲) در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول‌های خمیدهٔ اکسیژن دی‌فلوئورید و آب، اتم یکسانی به رنگ سرخ نمایش داده می‌شود.

۳) آنتالپی پیوندهای موجود در الماس، از آنتالپی پیوندهای موجود در مادهٔ مورد استفاده در تهیهٔ سنباده، کم‌تر است.

۴) تفاوت شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم نخستین و دومین عنصر فراوان در پوستهٔ جامد زمین، برابر با ۲ است.

۷۹- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

الف) شکل زیر می‌تواند مربوط به مدل فضاپرکن نیتروژن تری‌فلوئورید باشد و علامت بار جزئی اتم مرکزی در آن با مولکول آمونیاک، متفاوت است.



ب) توزیع الکترون‌ها در ساختار دی‌متیل اتر، برخلاف پروپان، نامتقارن و غیریکنواخت است و هر دو ماده در دما و فشار اتاق، مایع هستند.

پ) حضور جفت‌الکترون‌های ناپیوندی روی اتم‌های اطراف در مولکول‌های چنداتمی، توزیع یکنواخت بارهای الکتریکی را به هم می‌زند.

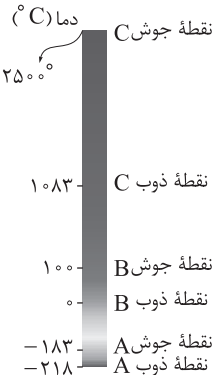
ت) در مولکول گوگرد تری‌اکسید همانند مولکول نیتروژن دی‌اکسید، اتم مرکزی دارای بار جزئی مثبت است.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) پ ـ ت

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰- با توجه به نمودار زیر که نقطه‌های ذوب و جوش چند ماده و گسترهٔ دمایی مایع‌بودن آن‌ها را در فشار یک اتمسفر نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟



۱) در دما و فشار اتاق، مواد A، B و C به ترتیب گاز، مایع و جامد هستند.

۲) برای توجیه برخی از رفتارهای فیزیکی مادهٔ C، می‌توان از مدل دریای الکترونی استفاده کرد.

۳) مادهٔ B برخلاف گاز نیتروژن، دارای نیروی بین مولکولی هیدروژنی است؛ بنابراین گسترهٔ دمایی مایع‌بودن آن از گاز نیتروژن بیشتر است.

۴) گسترهٔ دمایی مایع‌بودن شاره‌ای که در فناوری تولید برق از پرتوهای خورشیدی باعث تولید بخار داغ می‌شود، نسبت به مادهٔ C، بیشتر است.

۸۱- چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ یون‌های سولفات، فسفات و سیلیکات، درست است؟

- **اتم مرکزی در این یون‌ها، نافلزهایی از دورهٔ سوم هستند.**
- **در آن‌ها، اتم مرکزی نمی‌تواند کاهنده باشد.**
- **در هر سه یون، ۳۲ الکترون ظرفیتی وجود دارد.**
- **در هر واحد فرمولی ترکیب حاصل از آن‌ها با یون آمونیوم، شمار پیوندهای اشتراکی یکسان است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۲- کدام موارد زیر، در مورد پرتوهای خورشیدی و استفاده از این پرتوها برای تولید برق به کمک شاره‌ها، درست است؟

الف) شارهٔ بسیار داغ، قبل از تبادل گرمایی با شارهٔ مولکولی، وارد منبع ذخیرهٔ انرژی الکتریکی می‌شود.

ب) دمای شاره‌ای که گسترهٔ دمایی مایع کم‌تری دارد، در سردکننده تا نقطهٔ ذوب پایین می‌آید.

پ) در این فرآیند، تغییر شیمیایی وجود ندارد و به کمک خورشید که بزرگ‌ترین منبع انرژی برای زمین است، حتی در روزهای ابری و شب‌هنگام نیز، برق تولید می‌شود.

ت) شارهٔ یونی برخلاف شارهٔ مولکولی، در این فرآیند همواره به حالت مایع است.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ پ ۳) پ ـ ت ۴) ب ـ ت

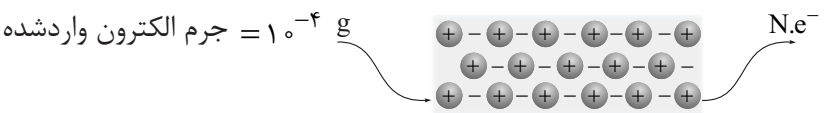
۸۳- اگر شمار الکترون‌های خارج‌شده از دریای الکترونی $(N.e^-)$، با شمار الکترون‌های مبادله‌شده هنگام تشکیل ترکیب یونی منیزیم فلوئورید برابر باشد، برای فروپاشی این مقدار از منیزیم فلوئورید، به تقریب چند کیلوژول گرما لازم است؟ ($\Delta H_{\text{فروپاشی}}(MgF_2(s)) = ۳۰۰۰\ kJ.mol^{-1}$، جرم هر الکترون $۰/۰۰۰۵\ amu$ و هر amu را معادل $۱/۶۶\times۱۰^{-۲۴}$ گرم در نظر بگیرید.)

۱) ۶۰۰ kJ

۲) ۳۰۰ kJ

۳) ۱۵۰ kJ

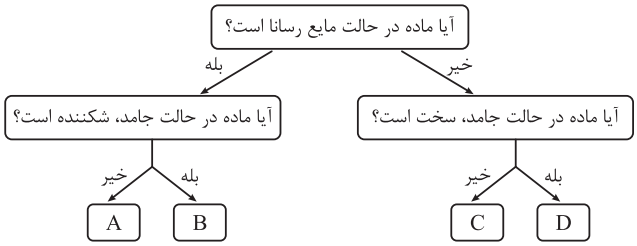
۴) ۷۵ kJ



محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۴- با توجه به نمودار زیر، کدام مطلب درست است؟



۱) هیچ عنصری در دستهٔ A یا B، قرار نمی‌گیرد.

۲) در مواد D همانند مواد C، آنتالپی پیوند، می‌تواند تعیین‌کنندهٔ آنتالپی تبخیر و نقطهٔ جوش باشد.

۳) در مواد A و B، یون‌های مثبت و منفی وجود دارد که چگالی بار آن‌ها، تعیین‌کنندهٔ نقطهٔ ذوب این مواد است.

۴) در میان عناصر واکنش‌پذیر دورهٔ سوم جدول تناوبی، به ترتیب یک و چهار عنصر در دسته‌های D و C قرار می‌گیرد.

۸۵- اگر به محلول آمونیوم وانادات (NH_4VO_3)، مقدار زیادی فلز قلع به همراه مقدار کافی از هیدروکلریک اسید بیفزاییم، در نهایت محلول حاصل چه رنگی خواهد شد؟ (محلول دارای کاتیون‌های قلع، بی‌رنگ و شفاف است.)

$$VO_3^-(aq) + 4H^+(aq) + e^- \rightarrow VO^{2+}(aq) + 2H_2O(l) \quad E^\circ = 1/00\,V$$

$$VO^{2+}(aq) + 2H^+(aq) + e^- \rightarrow V^{3+}(aq) + H_2O(l) \quad E^\circ = 0/34\,V$$

$$V^{3+}(aq) + e^- \rightarrow V^{2+}(aq) \quad E^\circ = -0/26\,V$$

$$Sn^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Sn(s) \quad E^\circ = -0/13\,V$$

۱) زرد ۲) سبز ۳) آبی ۴) بنفش

۸۶- تفاوت آنتالپی فروپاشی کدام دو ترکیب یونی از بقیه، بیشتر است؟

۱) KF و RbI ۲) Na_2O و K_2S ۳) $MgCl_2$ و $CaCl_2$ ۴) AlF_3 و Al_2O_3

۸۷- با توجه به جدول داده‌شده، با طی یک کیلومتر مسافت، درصد کاهش جرم C_8H_{18} به واسطهٔ استفاده از کاتالیزگر، به تقریب کدام است و کدام آلایندهٔ تولیدشده توسط وسایل نقلیه، کم‌ترین کاهش مقدار مول را با به‌کارگیری کاتالیزگر دارد؟

$(H = 1, C = 12, N = 14, O = 16 : g.mol^{-1})$

فرمول شیمیایی آلاینده		CO	C_8H_{18}	NO
مقدار گرم آلاینده به ازای طی یک کیلومتر مسافت	بدون کاتالیزگر	۵/۹۹	۱/۶۷	۱/۰۴
	با کاتالیزگر	۰/۶۱	۰/۰۷	۰/۰۴

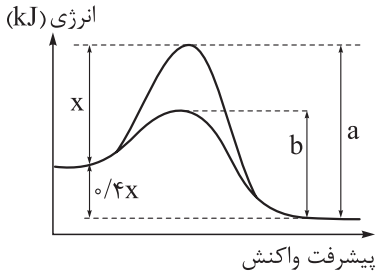
۱) NO ـ ۹۵/۸ ۲) NO ـ ۸۹/۸

۳) C_8H_{18} ـ ۸۹/۸ ۴) C_8H_{18} ـ ۹۵/۸

محل انجام محاسبات

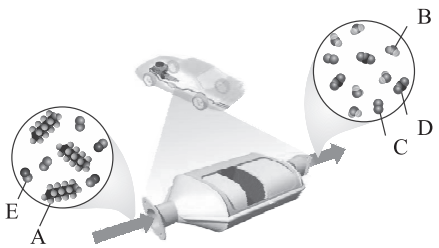
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۸- شکل مقابل، نمودار انرژی ـ پیشرفت را برای یک واکنش در دو حالت، بدون حضور و در حضور کاتالیزگر، نمایش می‌دهد. اگر کاتالیزگر، انرژی فعال‌سازی واکنش (رفت) را به میزان ۷۰ درصد کاهش دهد، نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۳}$
۲) ۲
۳) $\frac{۷}{۴}$
۴) ۱/۵

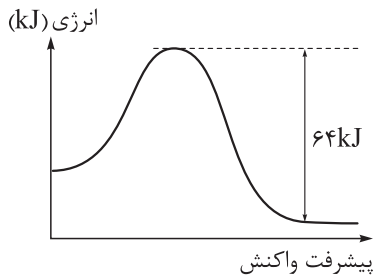
۸۹- چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ مولکول‌های نشان داده‌شده در شکل، نادرست است؟



- در هر دو واکنش حذف آلاینده‌های A و E، اتم‌های کربن کاهش پیدا می‌کنند.
- در میان مولکول‌های خارج‌شده از مبدل، برخلاف مولکول‌های واردشده، یک مولکول دارای پیوند سه‌گانه در ساختار خود است.
- در میان سه واکنش مربوط به حذف آلاینده‌ها در مبدل، مولکول‌های اکسیژن در دو واکنش به عنوان واکنش‌دهنده و مولکول‌های D در دو واکنش به عنوان فراورده شرکت می‌کنند.
- مولکول‌های B، برخلاف مولکول‌های C و D، در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.
- درون مبدل، قطعهٔ سرامیکی به شکل توری وجود دارد که بر روی آن فلزهای واسطهٔ پلاتین، پالادیم و روبیدیم با قطر ۲ تا ۱۰ نانومتر نشانده می‌شود.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۹۰- اگر در واکنش $H_۲(g) + I_۲(g) \rightarrow ۲HI(g)$، انرژی فعال‌سازی (E_a) واکنش، ۲/۲ برابر مقدار عددی آنتالپی واکنش (ΔH) آن باشد، با توجه به نمودار زیر، به ازای تولید ۰/۵ مول HI در این واکنش، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟



۱) ۲۰
۲) ۵
۳) ۱۰
۴) ۷/۵

۹۱- کدام مورد در ارتباط با مبدل‌های کاتالیستی خودروهای دیزلی، نادرست است؟

۱) مولکول $H_۲O$ در واکنش‌های انجام‌شده در هر دو محفظهٔ این مبدل‌ها، تولید می‌شود.
۲) در محفظهٔ دوم این مبدل کاتالیستی، می‌توان فراوردهٔ واکنش هابر را یافت.
۳) در این مبدل‌ها، واکنشی که فراوردهٔ آن یک مولکول دواتمی است، در محفظهٔ اول صورت می‌گیرد.
۴) در مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی برخلاف مبدل‌های کاتالیستی دیزلی، همهٔ واکنش‌ها در یک محفظه انجام می‌شود.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۲- کدام مورد، نادرست است؟

۱) گیاهان با جوی سرشار از گاز نیتروژن احاطه شده‌اند، ولی می‌توانند این عنصر ضروری را از خاک جذب کنند.

۲) عنصر نیتروژن به شکل ترکیبات نیتروژن‌دار از جمله آمونیاک و اوره، برای گیاهان استفاده می‌شود.

۳) برخی کشورها برای افزایش بازده فراورده‌های کشاورزی، گاز آمونیاک را به طور مستقیم به خاک تزریق می‌کنند.

۴) گیاهان برای رشد خود افزون بر عنصرهایی مانند K, P, N, S و ...، به برخی ترکیبات نیز نیاز دارند.

۹۳- ۰/۳ مول گاز آمونیاک وارد ظرف ۲لیتری دربسته می‌شود. اگر در شرایط مناسب، با انجام واکنش، کاهش جرم واکنش‌دهنده تا رسیدن به تعادل گازی $2NH_3(g) \rightleftharpoons N_2(g) + 3H_2(g)$، برابر ۳/۴ گرم باشد، ثابت تعادل واکنش بر حسب $mol^2.L^{-2}$ کدام است؟ $(N = 14, H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) $2/7 \times 10^{-2}$ ۲) $6/75 \times 10^{-1}$ ۳) $2/7 \times 10^{-1}$ ۴) $6/75 \times 10^{-2}$

۹۴- ۱/۰۲گرم آمونیوم هیدروژن سولفید (NH_4HS)، در ظرفی به حجم ۵ لیتر بر اساس معادلهٔ واکنش زیر، تجزیه می‌شود. تعداد مولکول آمونیاک در ظرف واکنش در لحظهٔ تعادل، کدام است؟ $(S = 32, N = 14, H = 1 : g.mol^{-1})$

$$NH_4HS(s) \rightleftharpoons NH_3(g) + H_2S(g),\ K = 1/6 \times 10^{-5}$$

۱) $1/204 \times 10^{21}$ ۲) $2/408 \times 10^{21}$ ۳) $1/204 \times 10^{22}$ ۴) $2/408 \times 10^{22}$

۹۵- چند مورد از عوامل زیر، سبب افزایش شدت رنگ در مخلوط تعادلی $N_2O_4(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$ می‌شود؟

- **انتقال به ظرفی با حجم کم‌تر**
- **افزودن مقداری N_2O_4**
- **افزایش دما**
- **افزودن مقداری NO_2**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۶- واکنش‌های تعادلی زیر در دو ظرف جداگانهٔ دربسته و در دمای ثابت انجام‌شده‌اند. کدام مورد دربارهٔ آن‌ها، نادرست است؟

I) $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g) \quad \Delta H < 0$

II) $2HI(g) \rightleftharpoons H_2(g) + I_2(g) \quad \Delta H > 0$

۱) افزایش حجم ظرف در واکنش (I)، همانند کاهش غلظت $H_2(g)$ در واکنش (II)، غلظت مواد واکنش‌دهنده را کاهش می‌دهد.

۲) افزایش فشار ناشی از کاهش حجم، غلظت گاز هیدروژن را در واکنش (I) برخلاف واکنش (II)، افزایش می‌دهد.

۳) کاهش دما در واکنش (I)، همانند افزودن HI در تعادل (II)، تعداد مول فراورده‌ها را افزایش می‌دهد.

۴) با افزایش دما، ثابت تعادل واکنش (I)، برخلاف ثابت تعادل واکنش (II)، کاهش می‌یابد.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۷- در واکنش تعادلی $\Delta H < 0$، $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$، چند مورد از عوامل زیر، سرعت تعادلی واکنش‌های رفت و برگشت را نسبت به تعادل اولیه، افزایش می‌دهد؟

- **افزایش فشار**
- **افزایش دما**
- **افزودن کاتالیزگر**
- **افزودن مقداری NH_3**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۸- اگر در واکنش تعادلی فرضی $2A_2(g) + B_2(g) \rightleftharpoons 2BA_2(g)$، ثابت تعادل واکنش در دماهای $20^\circ C$ و $60^\circ C$ به ترتیب برابر 4×10^{-5} و 2×10^{-4} باشد، چند مورد از مطالب داده‌شده درست است؟

- **مجموع آنتالپی فراورده‌ها، بیشتر از مجموع آنتالپی واکنش‌دهنده‌ها است.**
- **در شرایط یکسان، سرعت واکنش رفت بیشتر از واکنش برگشت است.**
- **مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها، کم‌تر از مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها است.**
- **در دمای $60^\circ C$، به دلیل بیشتربودن ثابت تعادل، واکنش با سرعت بیشتری انجام می‌شود.**

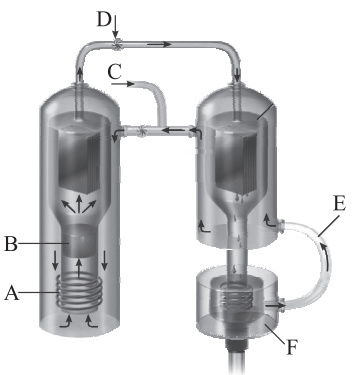
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۹- کدام‌یک از گزینه‌های داده‌شده، عبارت زیر را به درستی کامل می‌کند؟

هابر، واکنش: $N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$ را در دماهای بالاتر بررسی کرد، دماهایی که در آن واکنش با سرعت ..... و پیشرفت ..... به تعادل می‌رسید و هر چه دما را بالاتر می‌برد، درصد مولی آمونیاک ..... می‌یافت.

۱) بالا ـ کمی ـ افزایش
۲) بالا ـ کمی ـ کاهش
۳) کم ـ زیادی ـ کاهش
۴) کم ـ زیادی ـ افزایش

۱۰۰- با توجه به شکل زیر که نمایی از فناوری تولید آمونیاک به روش هابر را نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



- **نوع گازهای تشکیل‌دهندهٔ نقاط C و E، یکسان است.**
- **در نقطهٔ D، مخلوط سه گاز وجود دارد.**
- **A و B، به ترتیب از راست به چپ مربوط به کاتالیزگر و گرم‌کننده است.**
- **دما در نقطهٔ F، برابر $-200^\circ C$ است.**

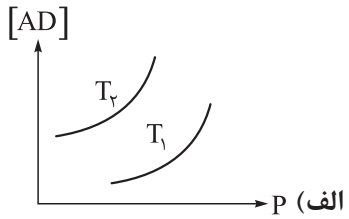
۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

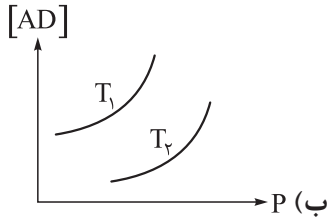
محل انجام محاسبات

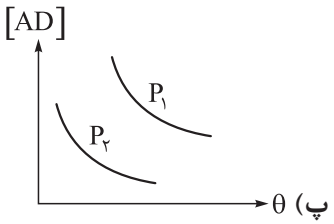
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

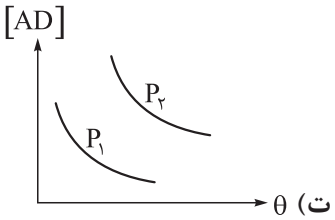
۱۰۱- کدام‌یک از نمودارهای داده‌شده برای واکنش تعادلی $A(g)+D(g) \rightleftharpoons AD(g)$ ، $\Delta H<0$ ، به درستی ترسیم شده است؟

$(P_2 > P_1 , T_2 > T_1)$

الف)


ب)


پ)


ت)


۱) الف ـ ب ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) ب ـ ت

۱۰۲- کدام مورد درست است؟

۱) فراورده‌های پتروشیمیایی حاصل از پالایش نفت خام، همواره مواد آلی هستند که می‌توان به قیمت بالاتری آن‌ها را به فروش رساند.

۲) مس (I) سولفید را به عنوان مادهٔ اولیهٔ مهم و پرکاربرد می‌توان پس از صرف انرژی، آب، فناوری شیمیایی و نیروی انسانی، به فلز مس با خلوص بالا تبدیل کرد.

۳) افزایش درصد خلوص مواد شیمیایی، نیاز به فناوری‌های پیشرفته و گران‌قیمت، اما در عین حال درآمدزا دارد.

۴) تبدیل مواد آلی به یکدیگر، از جمله واکنش‌های شیمیایی آسان و پربازده است که از تولیدات صنایع شیمیایی به شمار می‌رود.

۱۰۳- چند مورد زیر، جزء ویژگی پلاستیک‌ها هستند؟

- **چگالی کم**
- **نفوذپذیری نسبت به آب و هوا**
- **زیست‌تخریب‌ناپذیری**
- **مقاومت در برابر خوردگی**
- **واکنش‌ناپذیری**

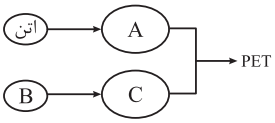
۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۴- با توجه به نمودار زیر که فرایند کلی سنتز PET را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟

$(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$



۱) در تبدیل ۵۳ گرم مادهٔ B با خلوص ۴۰ درصد به C، ۰/۱ مول مادهٔ C تولید می‌شود.

۲) شمار پیوندهای دوگانه در C، برابر با تعداد اتم‌های کربنی است که در ساختار آن عدد اکسایش منفی دارند.

۳) مادهٔ A در اثر واکنش گاز اتن در حضور کاتالیزگر پتاسیم منگنات رقیق در شرایط مناسب تولید می‌شود.

۴) اگر در فرمول PET حاصل، ۱۲۰۰ عامل استری وجود داشته باشد، شمار واحد تکرارشوندهٔ آن، ۹/۶ برابر درصد جرمی کربن در آن است.

۱۰۵- کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ ساده‌ترین الکل درست است؟

الف) برای تولید آن، اکسید قطبی کربن را در مجاورت کاتالیزگر می‌سوزانند.

ب) در مرحلهٔ اول روش غیرمستقیم تهیهٔ آن از گاز مرداب، عدد اکسایش کربن، ۶ درجه افزایش می‌یابد.

پ) از آن برای سنتز الکل دوعاملی موجود در مونومرهای سازندهٔ PET استفاده می‌شود.

ت) در روش تولید مستقیم آن از گاز مرداب، کاتالیزگر مورد استفاده با کاهش ΔH واکنش، سرعت تولید را افزایش می‌دهد.

۱) الف ـ ب
۲) پ ـ ت
۳) فقط ب
۴) الف ـ ت

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله چهاردهم

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳ | تاریخ برگزاری: ۲۴/اسفند/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان ـ نوید مجیدی
هندسه	محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ حمید گلزاری ـ محسن میراسلامی ـ حسین نادری ـ حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف‌خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
فیزیک	امین امینی ـ یاشار انگوتی ـ علیرضا جباری ـ مجید ساکی ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی ـ علیرضا عبداللهی حسین عبدوی‌نژاد ـ احسان محمدی ـ حامد نبی‌منصور ـ محمد نوکنده ـ محمدرضا یاری
شیمی	عباس سرمایه ـ حسین شرانلو ـ محمدرضا طهرانچی ـ سروش عبادی ـ وحید فارسیان ـ پارسا فراهانی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	نوید مجیدی	محمدسجاد نقیه محمد گودرزی عادل حسینی	سعید خان‌بابائی محمدرضا راسخ منصور زرکش اصفهانی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی فرزانه خاکپاش منصور زرکش اصفهانی
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی مریم نظری	فرزانه خاکپاش منصور زرکش اصفهانی علیرضا کاظمی‌بقا
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	مجید توکلی علیرضا جباری مریم گلی حسن‌لو علیرضا عبداللهی	امین امینی	مسعود خندانی مدیا عیدی احسان محمدی امیر محمودی انزابی محمدمهدی یوسفی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	هومن زندی سروش عبادی	محمد مرادی وحید فارسیان	رامین آزادی احسان رحیمی متین قنبری آرمین عظیمی پارسا مرادی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

جمع‌بندی نیم‌سال دوم دوازدهم

Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ راضیه سادات خلدی‌نسب زهرا صفری ـ فاطمه علی اکبری ـ محیا غنی‌فرد زهرا فرهادی‌مهر ـ محمد محمودی ـ مریم مسلمی‌زاده نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	صدف امام ـ مریم حسین‌زاده سپیده سخایی ـ الهام سهرابی ـ طاهره صادق نژاد مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته ـ مهدیه گل‌پور دریا لطفی ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱ تابع $f(x)=\begin{cases}2x-3 & ; \quad x\le 2\\ x^2+[-x] & ; \quad x>2\end{cases}$ مفروض است. حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2+h)-f(2+|h|)}{h}$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱−

۳) ۲−

۴) ۶

مشاوره محاسبهٔ مشتق تابع‌ها به کمک تعریف، یکی از الگوهای رایج در سؤال‌های آزمون سراسری است و معمولاً به طور متوالی و یا با فاصله‌های کم در آزمون سراسری از آن سؤالی طرح می‌شود؛ بنابراین توجه به این تعریف، هم برای یادگیری مفهوم مشتق و هم پاسخ به سؤال‌های آزمون سراسری، الزامی است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اگر f یک تابع باشد، آن‌گاه در نقطهٔ $x=x_0$، به شرط وجود یکی از دو حد زیر، می‌گوییم f در x_0 مشتق‌پذیر است (حدهای زیر را به عنوان تعریف مشتق f در نقطهٔ x_0 در نظر می‌گیریم):

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

در صورتی که هر یک از حدهای بالا به طور یک‌طرفه موجود باشد ($h\to 0^+$ یا $h\to 0^-$، آن‌گاه $x\to x_0^+$ یا $x\to x_0^-$)، می‌گوییم f دارای مشتق چپ یا راست در نقطه‌ای به طول x_0 است.

- مشتق هر تابع به صورت $f(x)=ax^n$ که $a\neq 0$، به صورت $f'(x)=anx^{n-1}$ است.
- مشتق هر تابع ثابت به صورت $f(x)=c$، برابر با $f'(x)=0$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نخست توجه کنید که اگر $h\to 0^-$، آن‌گاه h عددی منفی است و $|h|=-h$. از طرفی داریم $-h\to 0^+$.

گام دوم: بنابراین با اضافه و کم کردن جملهٔ $f(2)$ به صورت کسر در حد، خواهیم داشت:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2+|h|)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2-h)-f(2)+f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)-(f(2-h)-f(2))}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{-h} \quad (*)$$

بدیهی است که حد اول در سمت راست برابری (*) مربوط به مشتق چپ f در $x=2$ و حد دوم در سمت راست برابری (*) مربوط به مشتق راست f در $x=2$ است.

گام سوم: به کمک ضابطهٔ f و این‌که $[-x]$ همواره یک عدد است و در نتیجه مشتق آن صفر است، در برابری (*) داریم $(2x)'=2$ و $((x^2)'=2x$):

$$f'_-(2)+f'_+(2)=2+(2\times 2)=2+4=6$$

گول نخوری

مراقب باش که در (*) دو حد را برابر با هم فرض نکنی! در این صورت به تفاضل دو حد یکسان می‌رسی و جواب را صفر به دست خواهی آورد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲ مقدار ماکزیمم نسبی تابع $y = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x + ۱$، چه‌قدر است؟

۱) -۴

۲) ۲۸

۳) ۴۶

۴) -۲۶

مشاوره یافتن نقاط ماکزیمم یا مینیمم نسبی توابع، یکی از مباحث پرتکرار در آزمون‌های سراسری است. روش یافتن این نقاط، ساده است اما هم به دلیل سؤال‌خیزی و هم کاربردشان در حل برخی مسئله‌ها، یادگیری عمیق این مبحث بسیار ضروری است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

تعریف: گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول $c \in D_f$ ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

آزمون مشتق اول: فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای باز مانند $I \subseteq D_f$ پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. هرگاه f بر این بازه (به‌جز احتمالاً در نقطهٔ c) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

الف) اگر به ازای همهٔ مقادیر x در بازه‌ای مانند (a, c) داشته باشیم $f'(x) > ۰$ و به ازای همهٔ مقادیر x در بازه‌ای مانند (c, b) داشته باشیم $f'(x) < ۰$؛ یعنی f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر به ازای همهٔ مقادیر x در بازه‌ای مانند (a, c) داشته باشیم $f'(x) < ۰$ و f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی تابع f است.

پ) اگر f' در $x = c$ تغییر علامت ندهد (f' در هر دو طرف، $x = c$ مثبت یا منفی باشد)، آن‌گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی است و نه ماکزیمم نسبی.

مثال: نقطهٔ $x = ۰$، نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^۴}{۴} + \frac{x^۲}{۲}$ است، زیرا $f'(x) = \frac{۴}{۴}x^۳ + \frac{۲}{۲}x = x^۳ + x$ و در نتیجه $f'(x) = x(x^۲ + ۱)$. با توجه به این‌که $x^۲ + ۱$ یک عبارت همیشه مثبت است، پس برای $x < ۰$ علامت f' منفی و برای $x > ۰$ علامت f' مثبت است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: بنابر قانون‌های مشتق‌گیری داریم:

$$y = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x + ۱ \Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۶x - ۹ = ۳(x^۲ + ۲x - ۳) = ۳(x + ۳)(x - ۱)$$

گام دوم: حال y' را برابر صفر قرار می‌دهیم (ریشه‌های y' را می‌یابیم)، که $y' = ۰$ نتیجه می‌دهد $x = ۱$ یا $x = -۳$.

با تعیین علامت y'، جدول زیر را خواهیم داشت که نشان می‌دهد:

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗	

گام سوم: در نقطهٔ $x = -۳$ تابع دارای ماکزیمم نسبی است؛ پس با فرض $y = f(x)$، مقدار ماکزیمم نسبی برابر می‌شود با:

$$f(-۳) = (-۳)^۳ + ۳(-۳)^۲ - ۹(-۳) + ۱ = -۲۷ + ۲۷ + ۲۷ + ۱ = ۲۸$$

یه‌جور دیگه

در آغاز، آزمون مشتق دوم را بیان می‌کنیم که به شرح زیر است:

آزمون مشتق دوم: فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم باشد و $f''(x)$ به ازای هر نقطهٔ x از بازهٔ باز I موجود باشد. در این صورت:

الف) اگر به ازای هر $x \in I$، $f''(x) > ۰$ آن‌گاه نمودار f روی بازهٔ I دارای تقعر رو به بالاست.

ب) اگر به ازای هر $x \in I$، $f''(x) < ۰$ آن‌گاه نمودار f روی بازهٔ I دارای تقعر رو به پایین است.

پ) اگر به ازای هر $x \in I$، $f''(x) = ۰$ آن‌گاه آزمون مشتق دوم بی‌نتیجه است.با توجه به این‌که $y' = ۳x^۲ + ۶x - ۹$؛ پس $y'' = ۶x + ۶ = ۶(x + ۱)$. بنابراین برای ریشه‌های $y' = ۰$، یعنی $x = -۳$ و $x = ۱$، می‌بینیم که در همسایگی $x = ۱$ علامت y'' همواره مثبت است (زیرا $۶(x + ۱)$ در همسایگی $x = ۱$ مثبت است) و نمودار تابع دارای تقعر رو به بالا به فرم $\cup$ است و در همسایگی $x = -۳$ علامت y'' همواره منفی است و از این‌رو، نمودار تابع دارای تقعر رو به پایین به فرم $\cap$ است که نشان می‌دهد در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد و در روش اول هم دیدیم که مقدار ماکزیمم نسبی در $x = -۳$ برابر ۲۸ می‌باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳ هرگاه $g(x)=f(\sqrt{x})$ و $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$، مقدار $g''(3)$ چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{1}{32}$

۲) $-\frac{1}{16}$

۳) $-\frac{1}{8}$

۴) $-\frac{1}{4}$

مشاوره مشتق تابع مرکب یا همان قاعدهٔ زنجیری، یکی از دستورهای مهم و سودمند در حل بخشی از مسائل مشتق است. در برخی مسائل که ظاهراً توابع ارتباط چندانی با هم ندارند و یا داده‌های مسئله، اندک به نظر می‌آیند، بهره‌گیری از این دستور می‌تواند راهگشا باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع $\frac{f}{g}$ که $g(a)\neq 0$، نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$$

- اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog نیز مشتق‌پذیر است و داریم:

$(fog)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$ قاعدهٔ زنجیری

توجه کنید که اگر f تابعی برحسب u و u تابعی برحسب x باشد، آن‌گاه می‌توانیم قاعدهٔ زنجیری را به صورت زیر نیز بیان کنیم:

$$g(x)=f(u(x)) \Rightarrow g'(x)=u'(x)f'(u(x))$$

- اگر f تابعی مشتق‌پذیر و تابع مشتق نیز مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f را از مرتبهٔ دوم مشتق‌پذیر می‌گوییم و مشتق مرتبهٔ دوم f را با f'' نمایش می‌دهیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بنابر قاعدهٔ زنجیری و فرض سؤال داریم:

$$g'(x)=(f(\sqrt{x}))'=(\sqrt{x})'f'(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

گام دوم: حال برای یافتن g'' از دستور مشتق تابع کسری استفاده می‌کنیم:

$$g''(x)=\frac{0\times 2\sqrt{1+x}-1\times(2\sqrt{1+x})'}{(2\sqrt{1+x})^2}=\frac{0-\frac{2}{2\sqrt{1+x}}}{4(1+x)}=\frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow g''(3)=\frac{-1}{4(1+3)\sqrt{1+3}}=\frac{-1}{4\times 4\times 2}=-\frac{1}{32}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{۲}+b\cos\frac{\pi x}{۳}+۲ & ; \quad x>۰\\ bx^{۲}-ax-۱ & ; \quad x\le ۰\end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f(\frac{۲ab}{\pi})$ برابر کدام است؟

۱) -۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint پیوستگی f بر $\mathbb{R}$، برای مشتق‌پذیری آن بر $\mathbb{R}$، لازم است.

درس Box اگر $y=\cos x$، آن‌گاه $y'=-\sin x$ و اگر $y=\sin x$، آن‌گاه $y'=\cos x$.

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a پیوسته است. به عبارت دیگر، از این قضیه می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر f در $x=a$ پیوسته نباشد، در a مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نخست شرط پیوستگی f در نقطهٔ $x=۰$ را بررسی می‌کنیم. باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=\sin\frac{\pi\times ۰}{۲}+b\cos\frac{\pi\times ۰}{۳}+۲=۰+b\cos ۰+۲=b\times ۱+۲=b+۲ \quad (*)\\ \lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=f(۰)\xrightarrow{f(۰)=-۱} b\times ۰^{۲}-a\times ۰-۱=-۱ \Rightarrow -۱=-۱ \quad (**)\end{cases}$$

برابری عبارت‌های (*) و (**) :شرط پیوستگی $\Rightarrow b+۲=-۱ \Rightarrow b=-۲-۱=-۳$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در ضابطهٔ } f} f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{۲}-۳\cos\frac{\pi x}{۳}+۲ & ; \quad x>۰\\ -۳x^{۲}-ax-۱ & ; \quad x\le ۰\end{cases}$$

گام دوم: با توجه به این‌که تابع چندجمله‌ای $-۳x^{۲}-ax-۱$ و تابع مثلثاتی $\sin\frac{\pi x}{۲}-۳\cos\frac{\pi x}{۳}+۲$، به ترتیب در دامنهٔ $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ مشتق‌پذیرند، کافی است برای مشتق‌پذیری f روی $(-\infty,+\infty)$؛ یعنی بر $\mathbb{R}$، شرط مشتق‌پذیری f در $x=۰$ را بررسی کنیم. پس باید داشته باشیم $f'_{-}(۰)=f'_{+}(۰)$. داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}-۳\times\frac{\pi}{۳}(-\sin\frac{\pi x}{۳}) & ; \quad x>۰\\ -۶x-a & ; \quad x<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}+\pi\sin\frac{\pi x}{۳} & ; \quad x>۰\\ -۶x-a & ; \quad x<۰\end{cases}$$

$$f'_{-}(۰)=f'_{+}(۰) \Rightarrow -۶\times ۰-a=\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi\times ۰}{۲}+\pi\sin\frac{\pi\times ۰}{۳}$$

$$\Rightarrow -a=\frac{\pi}{۲}\cos ۰+\pi\sin ۰$$

$$\Rightarrow -a=\frac{\pi}{۲}\times ۱+\pi\times ۰ \Rightarrow -a=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow a=-\frac{\pi}{۲}$$

گام سوم: بنابر تساوی $\frac{۲ab}{\pi}=\frac{۲\times\frac{-\pi}{۲}\times(-۳)}{\pi}=۳$ و داریم:

$$f(\frac{۲ab}{\pi})=f(۳)=\sin\frac{۳\pi}{۲}-۳\cos\pi+۲=-۱-۳\times -۱+۲=-۱+۳+۲=-۱+۵=۴$$

گول نخوری اگر علامت $-$ در کنار $\sin\frac{\pi x}{۳}$ را در تابع مشتق، فراموش کنی یا خطای محاسباتی دیگری بکنی، به گزینه‌های دیگر می‌رسی.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵ اگر $g(x)=f(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\sin x)$ باشد، به طوری که $g'(\frac{۳\pi}{۴})=۱۰$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $-\frac{۵}{۳}$ ۳) -۲ ۴) -۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint از قاعدهٔ زنجیری برای مشتق‌گیری استفاده کنید.

درس Box

- اگر $y=\tan x$، آن‌گاه $y'=۱+\tan^۲ x$.
- اگر $y=\sin x$، آن‌گاه $y'=\cos x$.
- اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع fg نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بنابر قاعدهٔ زنجیری و مطالب درس‌باکس، خواهیم داشت:

$$g'(x)=(f(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\sin x))'=(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\sin x)'\cdot f'(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\sin x)$$

$$\Rightarrow g'(x)=(۲\tan x(۱+\tan^۲ x)+\sqrt{۲}\cos x)\cdot f'(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\sin x)$$

گام دوم: $x=\frac{۳\pi}{۴}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$g'(\tfrac{۳\pi}{۴})=(۲\tan\tfrac{۳\pi}{۴}(۱+\tan^۲\tfrac{۳\pi}{۴})+\sqrt{۲}\cos\tfrac{۳\pi}{۴})\cdot f'(\tan^۲\tfrac{۳\pi}{۴}+\sqrt{۲}\sin\tfrac{۳\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow g'(\tfrac{۳\pi}{۴})=(۲\times -۱(۱+(-۱)^۲)+\sqrt{۲}\times\tfrac{-\sqrt{۲}}{۲})\cdot f'((-۱)^۲+\sqrt{۲}\times\tfrac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$\Rightarrow g'(\tfrac{۳\pi}{۴})=(-۲\times ۲-\tfrac{۲}{۲})\cdot f'(۱+\tfrac{۲}{۲}) \Rightarrow g'(\tfrac{۳\pi}{۴})=-۵f'(۲) \quad (*)$$

گام سوم: بنابر فرض $g'(\frac{۳\pi}{۴})=۱۰$، در نتیجه از $(*)$ داریم:

$$۱۰=-۵f'(۲) \Rightarrow f'(۲)=\frac{۱۰}{-۵}=-۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶ خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^۳+mx^۲+nx+۱$ در نقطهٔ $A(۱,۴)$، در این نقطه از منحنی عبور می‌کند. مقدار $m-n$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۴

۳) -۲ ۴) ۴

مشاوره مبحث «نقطهٔ عطف» و «جهت تقعر» از جمله مباحث کلیدی کاربرد مشتق است و بدون استثنا هر سال سؤالی از آن در آزمون سراسری مطرح می‌شود.

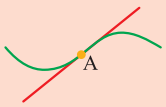
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint چون مماس بر نمودار تابع از این نمودار می‌گذرد، پس جهت تقعر تابع در این نقطه عوض می‌شود.

درس Box **تعریف**: فرض کنیم تابع f در نقطهٔ $x=c$ پیوسته باشد. در این صورت نقطهٔ $(c,f(c))$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه هم نمودار f در نقطهٔ $(c,f(c))$ دارای خط مماس باشد و هم جهت تقعر f در نقطهٔ یادشده تغییر کند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: چون نقطهٔ $A(۱,۴)$ روی نمودار f است، مختصات A در ضابطهٔ f صدق می‌کند:

$$f(۱)=۴ \Rightarrow ۱^۳+m(۱)^۲+n(۱)+۱=۴ \Rightarrow ۱+m+n+۱=۴ \Rightarrow m+n=۲ \quad (۱)$$



گام دوم: از سوی دیگر چون خط مماس بر نمودار، از نمودار عبور می‌کند، پس بخشی از نمودار تابع f به صورت است و A نقطهٔ عطف تابع است. (جهت تقعر f در نقطهٔ A تغییر می‌کند) و داریم:

$$f'(x)=۳x^۲+۲mx+n \Rightarrow f''(x)=۶x+۲m$$

گام سوم: مشتق دوم تابع در نقطهٔ عطف برابر صفر است.

$$f''(A)=۰ \Rightarrow f''(۱)=۰ \Rightarrow ۶(۱)+۲m=۰ \Rightarrow ۲m=-۶ \Rightarrow m=-۳$$

با جای‌گذاری مقدار m در رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود $-۳+n=۲$ یا $n=۲+۳=۵$ و بنابراین $m-n=-۳-۵=-۸$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷ اگر $x=۲$ طول نقطهٔ بحرانی تابع $y=(x+a)\sqrt[۳]{x^۲}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

مشاوره هر سال در آزمون سراسری، به طور مستقیم سؤالی دربارهٔ یافتن نقاط بحرانی و یا تعداد نقاط بحرانی مطرح می‌شود. از این‌رو باید این بخش از مبحث مشتق را خوب بلد باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

تعریف: نقطه‌ای به طول $x=c$ از دامنهٔ تابع f را یک نقطهٔ بحرانی برای این تابع می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

- اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x}$، آن‌گاه $f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$ و به طور کلی اگر $f(u)=\sqrt[۳]{u}$، آن‌گاه بنابر قاعدهٔ زنجیری داریم:

$$f'(u)=\frac{u'}{۳\sqrt[۳]{u^۲}}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بنابر قاعده‌های مشتق‌گیری، داریم:

$$y'=(x+a)'\sqrt[۳]{x^۲}+(x+a)(\sqrt[۳]{x^۲})'=۱\times\sqrt[۳]{x^۲}+(x+a)\times\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲)^۲}}$$

$$=\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{(x+a)\times۲x}{۳\sqrt[۳]{x^۴}}=\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{(x+a)\times۲\cancel{x}}{۳\cancel{x}\sqrt[۳]{x}}=\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{۲(x+a)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

گام دوم: با توجه به این‌که y' در هر نقطهٔ $x\neq۰$ موجود است، تنها حالت ممکن این است که $y'(۲)=۰$ باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$y'(۲)=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{۲^۲}+\frac{۲(۲+a)}{۳\sqrt[۳]{۲}}=۰\Rightarrow\frac{۲(۲+a)}{۳\sqrt[۳]{۲}}=-\sqrt[۳]{۴}$$

$$۲(۲+a)=-۳\sqrt[۳]{۸}=-۶\Rightarrow ۲+a=-۳\Rightarrow a=-۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

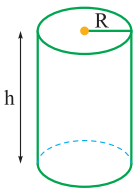
۸ در یک استوانه، مجموع ارتفاع و قطر قاعده برابر ۱۲ است. اگر حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن باشد، اندازهٔ ارتفاع آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در مسائل بهینه‌سازی باید سعی کنیم تا تابعی یک‌متغیره پدید آوریم و سپس با یافتن نقاط بحرانی آن تابع، بیشترین یا کم‌ترین مقدار تابع (ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق) را به دست آوریم. بنابر فرض، در این مسئله داریم:



$$\text{حجم استوانه} = V = \pi R^2 \times h = \pi R^2(12-2R) \Rightarrow V(R) = 12\pi R^2 - 2\pi R^3 \quad , \quad h+2R=12$$

گام دوم: نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

$$V'(R) = 24\pi R - 6\pi R^2 = 6\pi(4R - R^2)$$

$$V'(R) = 0 \Rightarrow 6\pi(4R-R^2) = 0 \Rightarrow 4R - R^2 = R(4-R) = 0 \quad (*)$$

چون شعاع R همواره ناصفر است، پس در معادلهٔ (*) باید $4-R=0$ یا $R=4$ باشد.

گام سوم: در نتیجه با جای‌گذاری در رابطهٔ داده‌شدهٔ اولیه، خواهیم داشت:

$$h+2R=12 \xrightarrow{R=4} h+2\times 4=12 \Rightarrow h=12-8=4$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ در نقطهٔ تلاقی نمودارهای دو تابع $f(x)=۲\cos^۲ x$ و $g(x)=۳\sin x$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$، خط مماس بر نمودار تابع g، محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۳}-\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۳}{۲}-\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}$

۳) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}-\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۳}-۳$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

- بنابر روابط مثلثاتی داریم: $۱-\cos^۲ x=\sin^۲ x$.
- اگر $y=\cos x$، آن‌گاه $y'=-\sin x$ و اگر $y=\sin x$، آن‌گاه $y'=\cos x$.
- شیب خط مماس بر نمودار یک تابع، برابر مشتق تابع به ازای طول نقطهٔ مماس است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نخست نقطهٔ برخورد (تلاقی) دو نمودار را به دست می‌آوریم. داریم:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow ۲\cos^۲ x=۳\sin x \Rightarrow ۲(۱-\sin^۲ x)=۳\sin x$$

$$\Rightarrow ۲-۲\sin^۲ x=۳\sin x \Rightarrow ۲\sin^۲ x+۳\sin x-۲=۰ \quad (*)$$

گام دوم: برای حل معادلهٔ (*) فرض می‌کنیم $t=\sin x$؛ در نتیجه خواهیم داشت:

$$۲t^۲+۳t-۲=۰ \xrightarrow{\Delta=۳^۲-۴(۲)(-۲)=۲۵} t=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۵}}{۲\times۲}=\frac{-۳\pm۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=-۲ \text{ غ.ق.ق. } (-۱\le t=\sin x\le ۱ \text{ زیرا}) \\ t=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{x\in(۰,\frac{\pi}{۲})} x=\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

گام سوم: با جای‌گذاری $x=\frac{\pi}{۶}$ در ضابطهٔ g، مختصات نقطهٔ برخورد (آن را A می‌نامیم) به دست می‌آید:

$$g(\frac{\pi}{۶})=۳\sin\frac{\pi}{۶}=۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow A(\frac{\pi}{۶},\frac{۳}{۲})$$

گام چهارم: اگر m را شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ A بگیریم، داریم:

$$m=g'(A), g'(x)=۳\cos x \Rightarrow m=g'(\frac{\pi}{۶})=۳\cos\frac{\pi}{۶}=۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ خط مماس در } A: y-\frac{۳}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(x-\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow y=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}x-\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}+\frac{۳}{۲}$$

اگر قرار دهیم $x=۰$، عرض نقطهٔ برخورد خط مماس با محور yها، مقدار $-\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}+\frac{۳}{۲}$ خواهد شد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰ اگر $f(x)=\sqrt{۴x^۲+۵}-۲x$ و $g(x)=\sqrt{۴x^۲+۵}+۲x$، آن‌گاه حاصل $f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) $-\frac{۲۰}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint دو تابع f و g مزدوج یکدیگرند. حاصل‌ضرب fg را به دست آورید و جملهٔ $-۲g'(x)f(x)$ را به آن اضافه کنید.
نسبت $\frac{f(x)}{g(x)}$ را تشکیل دهید و از آن مشتق بگیرید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** چون f و g مزدوج یکدیگرند، ابتدا تابع fg را می‌یابیم. داریم:

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=(\sqrt{۴x^۲+۵}-۲x)(\sqrt{۴x^۲+۵}+۲x)=(\sqrt{۴x^۲+۵})^۲-(۲x)^۲=۴x^۲+۵-۴x^۲$$

$$(fg)(x)=۵ \Rightarrow (fg)'=۰ \quad (*)$$

گام دوم: از آن‌جاکه $f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)=f'(۱)g(۱)+g'(۱)f(۱)-۲g'(۱)f(۱)=(fg)'(۱)-۲g'(۱)f(۱)$، پس خواهیم داشت:

$$f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱) \underset{\text{بنابر}(*)}{=} ۰-۲g'(۱)f(۱)=-۲g'(۱)f(۱) \quad (**)$$

گام سوم: از طرفی $g'(x)=\frac{۸x}{۲\sqrt{۴x^۲+۵}}+۲=\frac{۴x}{\sqrt{۴x^۲+۵}}+۲$؛ بنابراین داریم:

$$g'(۱)=\frac{۴\times ۱}{\sqrt{۴\times ۱^۲+۵}}+۲=\frac{۴}{۳}+۲=\frac{۴+۶}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$$

$$f(۱)=\sqrt{۴\times ۱^۲+۵}-۲\times ۱=\sqrt{۹}-۲=۳-۲=۱$$

گام چهارم: پس با جای‌گذاری این مقادیر در (**) نتیجه می‌گیریم:

$$f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)=-۲g'(۱)f(۱)=-۲\times\frac{۱۰}{۳}\times ۱=-\frac{۲۰}{۳}$$

یه‌جور دیگه عبارت $f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)$ ما را یاد صورت کسر تابع مشتق در تابع $\frac{f}{g}$ می‌اندازد. پس می‌توانیم تابع $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ را بسازیم و از h مشتق بگیریم؛ البته این روش طولانی است و محاسبات پرحجم دارد. داریم:

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{۴x^۲+۵}-۲x}{\sqrt{۴x^۲+۵}+۲x} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم}} h(x)=\frac{\sqrt{۴x^۲+۵}-۲x}{\sqrt{۴x^۲+۵}+۲x}\times\frac{\sqrt{۴x^۲+۵}-۲x}{\sqrt{۴x^۲+۵}-۲x}$$

$$\xrightarrow{(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲\text{ بنابر اتحاد مزدوج}} h(x)=\frac{(\sqrt{۴x^۲+۵}-۲x)^۲}{(\sqrt{۴x^۲+۵})^۲-(۲x)^۲}=\frac{۴x^۲+۵+۴x^۲-۴x\sqrt{۴x^۲+۵}}{۴x^۲+۵-۴x^۲}$$

$$\Rightarrow h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۸x^۲+۵-۴x\sqrt{۴x^۲+۵}}{۵}$$

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^۲} \Rightarrow h'(x)=\frac{(\frac{۸x}{۲\sqrt{۴x^۲+۵}}-۲)(\sqrt{۴x^۲+۵}+۲x)-(\frac{۸x}{۲\sqrt{۴x^۲+۵}}+۲)(\sqrt{۴x^۲+۵}-۲x)}{(\sqrt{۴x^۲+۵}+۲x)^۲}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{۴x+\frac{۸x^۲}{\sqrt{۴x^۲+۵}}-۲\sqrt{۴x^۲+۵}-۴x-(۴x-\frac{۸x^۲}{\sqrt{۴x^۲+۵}}+۲\sqrt{۴x^۲+۵}-۴x)}{(\sqrt{۴x^۲+۵}+۲x)^۲}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{\frac{۱۶x^۲}{\sqrt{۴x^۲+۵}}-۴\sqrt{۴x^۲+۵}}{(\sqrt{۴x^۲+۵}+۲x)^۲} \Rightarrow h'(۱)=\frac{\frac{۱۶\times ۱}{\sqrt{۹}}-۴\sqrt{۹}}{(\sqrt{۹}+۲)^۲}=\frac{\frac{۱۶}{۳}-۱۲}{۲۵}$$

$$\Rightarrow h'(۱)=\frac{\frac{۱۶}{۳}-\frac{۳۶}{۳}}{۲۵} \Rightarrow \text{خواستهٔ سوال} = \text{صورت کسر}=\frac{۱۶-۳۶}{۳}=\frac{-۲۰}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱ نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۳+kx^۲$ بر خط به معادلهٔ $y=-۱۶$ مماس است. طول نقطهٔ عطف تابع f کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint چون $y=-۱۶$ خطی افقی است و شیب آن صفر است، پس مشتق تابع در نقطهٔ تماس، برابر صفر است.

درس Box

تعریف: فرض کنیم تابع f در نقطهٔ $x=c$ پیوسته است. در این صورت نقطهٔ $(c,f(c))$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه هم نمودار f در نقطهٔ $(c,f(c))$ دارای خط مماس باشد و هم جهت تقعر f در نقطهٔ یادشده تغییر کند.

مثال: اگر $f(x)=x^۳+۱$، آن‌گاه $f'(x)=۳x^۲$ و $f''(x)=۶x$ است. در نتیجه نقطهٔ به طول $x=۰$، یعنی $(۰,f(۰))=(۰,۱)$ نقطهٔ عطف تابع f است، زیرا برای $x>۰$ داریم $f''(x)>۰$ و برای $x<۰$، $f''(x)<۰$.

- اگر تابع f در نقطهٔ به طول c دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c)=۰$. به بیان دیگر، هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f، یک نقطهٔ بحرانی آن است.
- شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=c$، همان مقدار مشتق تابع f در $x=c$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: چون خط افقی $y=-۱۶$ بر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۳+kx^۲$ مماس است، پس f در نقطه‌ای به عرض -۱۶ دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی است و f' در این نقطه باید برابر صفر باشد. داریم:

$$f'(x)=\frac{۳}{۲}x^۲+۲kx\ ,\ f'(x)=۰ \Rightarrow x(\frac{۳}{۲}x+۲k)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰ \text{ یا } \frac{۳}{۲}x+۲k=۰ \Rightarrow x=\frac{-۲k}{\frac{۳}{۲}}=-\frac{۴k}{۳}$$

گام دوم: چون $f(۰)=۰$، پس حتماً $f(-\frac{۴k}{۳})=-۱۶$ است و خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}(\frac{-۴k}{۳})^۳+k(-\frac{۴k}{۳})^۲=-۱۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{-۶۴k^۳}{۲۷}+k\times\frac{۱۶k^۲}{۹}=-۱۶$$

$$\Rightarrow -k^۳=۲۷ \Rightarrow k^۳=-۲۷=(-۳)^۳ \Rightarrow k=-۳$$

گام سوم: بنابراین $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۳-۳x^۲$ و طول نقطهٔ عطف f به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f'(x)=\frac{۳}{۲}x^۲-۶x \Rightarrow f''(x)=۳x-۶$$

$$f''(x)=۰ \Rightarrow ۳x-۶=۰ \Rightarrow x=\frac{۶}{۳}=۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲ تابع $f(x)=x\sqrt{۳-|x|}$ روی بازهٔ $(-a\,,\,a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۱

مشاوره مبحث یکنوایی تابع‌ها از مباحث کلیدی در آزمون سراسری و تسلط بر آن، بسیار مهم است. هر سال از این مبحث که از جمله کاربردهای مشتق نیز می‌باشد، سؤال طرح می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

قضیه: فرض کنیم تابع f بر بازهٔ $[a\,,\,b]$ پیوسته و بر بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

الف) اگر برای هر x در (a,b) داشته باشیم $f'(x)>۰$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,\,b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر برای هر x در (a,b) داشته باشیم $f'(x)<۰$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,\,b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر برای هر x در $(a\,,\,b)$ داشته باشیم $f'(x)=۰$، آن‌گاه تابع f بر $[a\,,\,b]$ یک تابع ثابت است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: پیش از هر چیز باید دامنهٔ تابع $f(x)=x\sqrt{۳-|x|}$ را بیابیم. باید داشته باشیم:

$$۳-|x|\geq ۰ \Rightarrow |x|\leq ۳ \Rightarrow -۳\leq x\leq ۳ \Rightarrow D_f=[-۳\,,\,۳]$$

بنابر تعریف قدرمطلق، داریم:

$$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{۳-x} & ;\ ۰\leq x\leq ۳ \\ x\sqrt{۳+x} & ;\ -۳\leq x<۰ \end{cases}$$

گام دوم: بنابراین:

$$f'(x)=\begin{cases} ۱\times\sqrt{۳-x}+x\times\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}} & ;\ ۰<x<۳ \\ ۱\times\sqrt{۳+x}+x\times\frac{۱}{۲\sqrt{۳+x}} & ;\ -۳<x<۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \sqrt{۳-x}-\frac{x}{۲\sqrt{۳-x}} & ;\ ۰<x<۳ \\ \sqrt{۳+x}+\frac{x}{۲\sqrt{۳+x}} & ;\ -۳<x<۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{با گرفتن مخرج مشترک}} f'(x)=\begin{cases} \frac{۶-۳x}{۲\sqrt{۳-x}} & ;\ ۰<x<۳ \\ \frac{۶+۳x}{۲\sqrt{۳+x}} & ;\ -۳<x<۰ \end{cases}$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۶-۳x=۰ \text{ یا } ۶+۳x=۰ \Rightarrow x=۲ \text{ یا } x=-۲$$

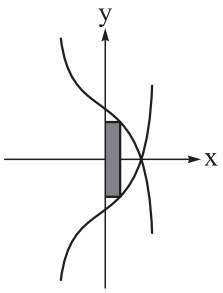
گام سوم: جدول تعیین علامت f' به صورت زیر است که نشان می‌دهد در بازهٔ $[-۲,۲]$ تابع f صعودی اکید است و در نتیجه بیشترین مقدار a برابر ۲ است. توجه کنید که برای تعیین علامت، برای مقادیر $x>۰$ از ضابطهٔ بالایی f' و برای مقادیر $x<۰$ از ضابطهٔ پایین f' باید بهره بگیریم.

x	-۳		-۲		۰		۲		۳
f'		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
f		↘		↗		↗		↘	

گام چهارم: با توجه به جدول بالا، تابع f روی بازهٔ $(-۲,۲)$ اکیداً صعودی است، پس بیشترین مقدار a، برابر ۲ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳ نمودار توابع $f(x)=x^3-4$ و $g(x)=-f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. بیشترین مساحت ممکن برای مستطیل سایه زده‌شده، چه‌قدر است؟

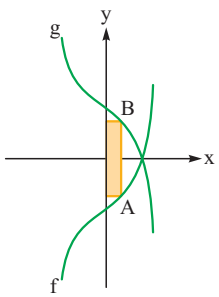


۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: هر نقطه روی نمودار f با مختصات $A(x\ ,\ x^3-4)$ است و در نتیجه هر نقطه روی نمودار $-f$ با مختصات $B(x\ ,\ 4-x^3)$ است. پس مساحت هر مستطیل سایه زده‌شده که از سمت چپ به محور yها محدود است، از تابع زیر به دست می‌آید (O مبدأ است):



$$S(x)=AB\times x_{A,B}=|x^3-4-(4-x^3)|\times x=|2x^3-8|\times x=|2x^4-8x|$$

گام دوم: حال بنابر روند حل مسائل بهینه‌سازی، نقاط بحرانی تابع تک‌متغیرهٔ S را می‌یابیم و به ازای طول (طول‌های) نقاط بحرانی، مقادیر بیشینه و کمینهٔ تابع را به دست می‌آوریم. داریم:

$$S'(x)=8x^3-8\ ,\ S'(x)=0 \Rightarrow 8(x^3-1)=0 \Rightarrow x^3-1=0$$

$$\Rightarrow x^3=1 \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم می‌گیریم}} x=1$$

$$\Rightarrow S(1)=|2\times 1^4-8\times 1|=|2-8|=|-6|=6$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴ هرگاه $f(x)=\frac{\cos^۳ x-۲۷}{۹-\cos^۲ x}$ و $g(x)=\frac{۳}{۳+\cos x}$، آن‌گاه مقدار $f''(\frac{\pi}{۳})+۳g''(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ضابطهٔ f را ساده کنید و سپس محاسبات را انجام دهید.

درس Box اگر f و g تابع‌هایی مشتق‌پذیر در $x=a$ باشند، آن‌گاه $f+g$ نیز تابعی مشتق‌پذیر در a است. به همین ترتیب، اگر تابع‌های مشتق f' و g' در $x=a$ موجود باشند، آن‌گاه تابع $f'+g'$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به اتحادهای مزدوج (در مخرج ضابطهٔ f) و اتحاد مکعب (در صورت ضابطهٔ f)، نخست ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم. داریم:

$$f(x)=\frac{\cos^۳ x-۲۷}{۹-\cos^۲ x}=\frac{(\cos x-۳)(\cos^۲ x+۳\cos x+۹)}{(۳-\cos x)(۳+\cos x)}=\frac{-(\cos^۲ x+۳\cos x+۹)}{۳+\cos x}$$

گام دوم: چون $f''(x)+۳g''(x)$ مشتق دوم تابع $f(x)+۳g(x)$ است، خواهیم داشت:

$$f(x)+۳g(x)=\frac{-(\cos^۲ x+۳\cos x+۹)}{۳+\cos x}+\frac{۳\times ۳}{۳+\cos x}=\frac{-\cos^۲ x-۳\cos x-۹+۹}{۳+\cos x}$$

$$\Rightarrow f(x)+۳g(x)=\frac{-\cos^۲ x-۳\cos x}{۳+\cos x}=\frac{-\cos x\,(\cos x+۳)}{(۳+\cos x)}=-\cos x$$

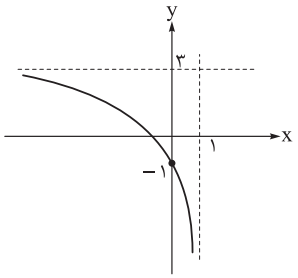
$$\Rightarrow (f(x)+۳g(x))'=-(-\sin x)=\sin x$$

$$\Rightarrow (f(x)+۳g(x))''=f''(x)+۳g''(x)=(\sin x)'=\cos x$$

$$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{۳})+۳g''(\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵ بخشی از نمودار تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx-1}$ در شکل زیر رسم شده است. اختلاف طول‌های نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $g(x)=xf(x)$، کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

مشاوره تسلط بر مباحث حد و تعریف مجانب‌های افقی و قائم، بخش بزرگی از راه‌حل مسئله‌های مربوط به مشتق و رسم نمودار تابع‌ها را برای شما آسان خواهد کرد. این مباحث یکی از مباحث پُرسؤال در آزمون سراسری است و باید آن را جدی بگیرید.

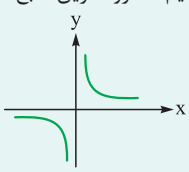
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

- خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می‌نامیم، هرگاه حداقل یکی از دو شرط زیر رخ دهد:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty \quad ; \quad \lim_{x\to a^-}=\pm\infty \quad \text{یا}$$

- تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq ۰$ است، تابع هموگرافیک می‌نامیم. معروف‌ترین تابع هموگرافیک، همان است که $a=d=۰$ و $b=c=۱$ باشد؛ یعنی $f(x)=\frac{۱}{x}$ که نمودارش به فرم



است و بقیهٔ نمودارهای هموگرافیک به کمک انتقال این نمودار یا انبساط و انقباض آن به دست می‌آیند.

- تعریف: گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول $c\in D_f$ مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی c مانند $I\subset D_f$ که هر $x\in I$ داشته باشیم $f(c)\leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم تابع f می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بنابر نمودار تابع f، خط $x=۱$ مجانب قائم و خط $y=۳$ مجانب افقی است. پس داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{ax+b}{cx-1}=-\infty \xrightarrow{x=۱\text{ ریشه مخرج است}} c\times ۱-۱=۰ \Rightarrow c=۱$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{ax+b}{cx-1}=۳ \Rightarrow \frac{a}{c}=۳ \xrightarrow{c=۱} \frac{a}{۱}=۳ \Rightarrow a=۳$$

گام دوم: از طرفی نقطهٔ $(۰,-۱)$ روی نمودار f است، پس $f(۰)=-۱$ و داریم:

$$f(x)=\frac{۳x+b}{x-1} \Rightarrow f(۰)=\frac{۳\times ۰+b}{۰-1}=-۱ \Rightarrow \frac{b}{-1}=-۱ \Rightarrow b=۱ \Rightarrow f(x)=\frac{۳x+۱}{x-1}$$

گام سوم: در نتیجه ضابطهٔ g برابر $g(x)=xf(x)=x\times\frac{۳x+۱}{x-1}=\frac{۳x^۲+x}{x-1}$ است. برای یافتن نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی g، $g'(x)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$g'(x)=\frac{(۶x+۱)(x-1)-۱\times(۳x^۲+x)}{(x-1)^۲}=\frac{۶x^۲-۵x-۱-۳x^۲-x}{(x-1)^۲}=\frac{۳x^۲-۶x-۱}{(x-1)^۲}$$

$$g'(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۶x-۱=۰ \xrightarrow{\Delta=(-۶)^۲-۴(۳)(-۱)=۴۸} x=\begin{cases}\frac{۶+\sqrt{۴۸}}{۶}\\ \frac{۶-\sqrt{۴۸}}{۶}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\begin{cases}۱+\frac{۴\sqrt{۳}}{۶}=۱+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\\ ۱-\frac{۴\sqrt{۳}}{۶}=۱-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف طول‌های نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی}=۱+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}-(۱-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳})=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

توجه کنید که g' در هر نقطهٔ $x \neq 1$ تعریف شده است و به همین خاطر کافی است طول نقاطی که از معادلهٔ $g'(x)=0$ به دست می‌آیند را برای نقاط بحرانی تابع g در نظر بگیریم.

یه‌جور دیگه

پس از یافتن $g'(x)=\frac{3x^2-6x-1}{(x-1)^2}$، برای محاسبهٔ اختلاف طول‌های ریشه‌های معادلهٔ $g'(x)=0$، یعنی ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-6x-1=0$، از رابطهٔ $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ که x_1 و x_2 ریشه‌ها و a ضریب جملهٔ x^2 است هم می‌توانید کمک بگیرید و بنویسید:

اختلاف طول‌های نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی $|=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{48}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶ جهت تقعر تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$ روی بازهٔ (a,b) رو به بالاست. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: باید مشتق دوم تابع f را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{0-2\times3\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(3\sqrt[3]{x})^2}-\frac{0-3\times\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}}{(3\sqrt[3]{x^2})^2}$$

$$=\frac{\frac{-2}{\sqrt[3]{x^2}}}{9\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\frac{2}{\sqrt[3]{x}}}{9\sqrt[3]{x^4}}=\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=\frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2\sqrt[3]{x}+2}{9x\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2(1-\sqrt[3]{x})}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 1-\sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}=1 \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم}} x=1$$

از طرفی $x=0$ مخرج ضابطهٔ f'' را صفر می‌کند، پس f'' در $x=0$ موجود نیست.

گام دوم: در نتیجه جدول تعیین علامت به صورت زیر است که نشان می‌دهد تقعر f در بازهٔ $(0,1)$، بنابر علامت مثبت f''، رو به بالاست. در نتیجه حداکثر مقدار $b-a$ برابر $1-0=1$ است.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f''	$-$	$+$	0	$-$
f	∩	∪	∩	

توجه: اگر فرض کنیم $x>1$، آن‌گاه $\sqrt[3]{x}>\sqrt[3]{1}=1$ یا به عبارتی $\sqrt[3]{x}-1>0$، که از این مطلب برای تعیین علامت f'' در بازهٔ $(1,+\infty)$ بهره برده‌ایم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷ اگر امتداد نیم‌مماس راست بر نمودار تابع $f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{۲x+a}$، در نقطهٔ گوشه‌ای آن، نیمساز ناحیهٔ اول را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند، معادلهٔ مماس قائم بر نمودار f کدام است؟

۱) $x=\frac{۳}{۲}$ ۲) $x=-\frac{۳}{۲}$

۳) $x=\frac{۵}{۲}$ ۴) $x=-\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اگر تابع f در $x=a$ هر یک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت در این نقطه، مشتق‌پذیر نیست:

۱) f در a پیوسته نباشد.

۲) f در a پیوسته باشد ولی مشتق راست و چپ f در $x=a$:

الف) هر دو موجود و متناهی باشند ولی نابرابر باشند (نقطهٔ گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطهٔ گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

مثال: اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x}$، آن‌گاه $f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$ و در نتیجه $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ هر دو نامتناهی‌اند (موجود نیستند). در این حالت خط مماس بر نمودار f در $x=۰$ قائم است (یعنی در این نقطه پیوسته است و مشتق چپ و راست نامتناهی دارد).

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ریشهٔ درون قدرمطلق، یعنی $x=۲$، برای تابع $f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{۲x+a}$ یک نقطهٔ گوشه است، زیرا:

$$f(x)=\begin{cases}(x-۲)\sqrt[۳]{۲x+a} & ; \quad x\geq ۲\\ (۲-x)\sqrt[۳]{۲x+a} & ; \quad x<۲\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۱\times\sqrt[۳]{۲x+a}+(x-۲)\times\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{(۲x+a)^۲}} & ; \quad x>۲\\ -۱\times\sqrt[۳]{۲x+a}+(۲-x)\times\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{(۲x+a)^۲}} & ; \quad x<۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(۲)=\sqrt[۳]{۴+a}+۰,\ f'_-(۲)=-\sqrt[۳]{۴+a}+۰ \Rightarrow$$ $f'_+(۲)$ و $f'_-(۲)$ هر دو موجود ولی نابرابرند.

گام دوم: از طرفی $f(۲)=|۲-۲|\sqrt[۳]{۲\times۲+a}=۰$، پس نقطهٔ $A(۲,۰)$ همان نقطهٔ گوشه‌ای است. با توجه به ضابطهٔ f'، یعنی:

$$f'(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{۲x+a}+\frac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{(۲x+a)^۲}} & ; \quad x>۲\\ -\sqrt[۳]{۲x+a}+\frac{۲(۲-x)}{۳\sqrt[۳]{(۲x+a)^۲}} & ; \quad x<۲\end{cases}$$

ریشهٔ زیر رادیکال یعنی $x=\frac{-a}{۲}$ نقطه‌ای است که مماس بر نمودار f، قائم است. در نتیجه معادلات خط‌های مماس به صورت زیر هستند:

معادلهٔ مماس راست در $A(۲,۰)$: $y-۰=f'_+(۲)(x-۲) \Rightarrow y=\sqrt[۳]{۴+a}(x-۲)$

و

معادلهٔ قائم مماس: $x=\frac{-a}{۲}$

گام سوم: اگر امتداد مماس راست و خط $y=x$ در نقطهٔ به طول $x=۱$ با یکدیگر برخورد کنند، داریم:

$$۱=\sqrt[۳]{۴+a}(۱-۲) \Rightarrow ۱=\sqrt[۳]{۴+a}(-۱) \Rightarrow \sqrt[۳]{۴+a}=-۱ \xrightarrow[\text{توان ۳ می‌رسانیم}]{\text{دو طرف را به}} ۴+a=-۱$$

$$\Rightarrow a=-۴-۱=-۵ \Rightarrow \text{معادلهٔ مماس قائم}: x=\frac{-(-۵)}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸ تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}\sin^۳ x+\frac{۳}{۴}\sin ۲x+\frac{۳}{۲}x$ با دامنهٔ $[۰, ۲\pi]$ مفروض است. بیشترین اختلاف طول‌های دو نقطهٔ اکسترمم نسبی متوالی تابع f، کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

- بنابر اتحاد مثلثاتی $\cos^۲ x+\sin^۲ x=۱$، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x=۲\cos^۲ x-۱$.

توجه کنید که:

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

- می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول $c\in D_f$ دارای اکسترمم نسبی است، هرگاه در این نقطه دارای مینیمم یا ماکزیمم نسبی باشد.
- اگر $y=\sin(u)$، که u تابعی از x است، آن‌گاه $y'=u'\cos(u)$.
- اگر $y=\sin^n(u)$، که $n\in\mathbb{N}$ و u تابعی از x است، آن‌گاه $y'=nu'\sin^{n-۱}(u)\cos(u)$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نخست مشتق f را می‌یابیم و سپس ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$f'(x)=\frac{۲}{۳}\times ۳\sin^۲ x\times\cos x+\frac{۳}{۴}\times ۲\cos ۲x+\frac{۳}{۲}\Rightarrow f'(x)=۲\sin^۲ x\cos x+\frac{۳}{۲}\cos ۲x+\frac{۳}{۲}$$

با جای‌گذاری $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$ و $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$، نتیجه می‌گیریم:

$$f'(x)=۲(۱-\cos^۲ x)\cos x+\frac{۳}{۲}(۲\cos^۲ x-۱)+\frac{۳}{۲}=۲\cos x-۲\cos^۳ x+۳\cos^۲ x-\frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۲}=۲\cos x-۲\cos^۳ x+۳\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\cos x(۲\cos^۲ x-۳\cos x-۲)$$

گام دوم: ریشه‌های f' را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۰\xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]}x=\frac{\pi}{۲}\quad\text{یا}\quad x=\frac{۳\pi}{۲}\\ \text{یا}\\ ۲\cos^۲ x-۳\cos x-۲=۰\xrightarrow{t=\cos x\ \text{با فرض}}۲t^۲-۳t-۲=۰\quad(*)\end{cases}$$

در معادلهٔ (*) داریم $\Delta=(-۳)^۲-۴(۲)(-۲)=۹+۱۶=۲۵$ و در نتیجه:

$$\begin{cases}t=\frac{۳+\sqrt{۲۵}}{۲\times ۲}=\frac{۳+۵}{۴}=۲\ \text{غ. ق. ق.}\ (-۱\le t=\cos x\le ۱\ \text{زیرا})\\ \text{یا}\\ t=\frac{۳-\sqrt{۲۵}}{۲\times ۲}=\frac{۳-۵}{۴}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos x=-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]}x=\frac{۲\pi}{۳}\ \text{یا}\ x=\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}$$

گام سوم: با توجه به جدول تعیین علامت f'، نقاط به طول $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۴\pi}{۳}$، نقاط ماکزیمم نسبی و نقاط به طول $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و $x=\frac{۲\pi}{۳}$، نقاط مینیمم نسبی تابع f هستند.

x	۰	$\pi/۲$	$۲\pi/۳$	$۴\pi/۳$	$۳\pi/۲$	۲π
f'	+	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+
f		max ↗	↘ min	↗ max	↘ min	↗			

گام چهارم: پس بیشترین اختلاف طول‌های نقاط اکسترمم نسبی متوالی تابع f برابر با $\frac{۴\pi}{۳}-\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}$ است و اختلاف طول‌های دیگر عبارت‌اند از:

$$\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۴\pi}{۳}=\frac{\pi}{۶},\ \frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۶}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}$ چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) با استفاده از روابط بین بردارها به‌سادگی می‌توان نشان داد که هر بردار مانند $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ به صورت ترکیبی از بردارهای واحد $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ قابل بیان است. در واقع داریم:

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)=a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

۲) اندازهٔ بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ که با نماد $|\vec{a}|$ نمایش داده می‌شود، برابر است با:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

۳) ضرب داخلی دو بردار:

تعریف: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند؛ در این صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

می‌توان نشان داد که اگر $0\le\theta\le\pi$ زاویهٔ بین دو بردار ناصفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ باشد، آن‌گاه:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ $|\vec{a}|$، $|\vec{b}|$ و $\vec{a}.\vec{b}$):

$$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=(2,-1,2)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$$

$$\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}\Rightarrow\vec{b}=(-1,1,0)\Rightarrow|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2\times-1)+(-1\times1)+(2\times0)=-2-1=-3$$

گام دوم (محاسبهٔ زاویهٔ بین دو بردار): طبق فرمول ضرب داخلی داریم:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

پس:

$$\begin{cases}\vec{a}=(2,-1,2)\\ \vec{b}=(-1,1,0)\end{cases}\Rightarrow\cos\theta=\frac{-3}{3\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=135^\circ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰ اگر $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}+m\vec{k}$ و $\vec{b}=(۳,۲m,۱)$، آن‌گاه به ازای کدام مقدار m، تساوی $(\vec{a}\times\vec{b}).(۲\vec{a}+\vec{b})=۰$ برقرار است؟

۱) $m=۷$

۲) $m=\frac{۷}{۲}$

۳) $m=-۷$

۴) همهٔ مقادیر حقیقی m

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، پس $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=۰$

۲) ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابه‌جایی دارد: $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

۳) ضرب داخلی نسبت به اعمال جمع و تفریق بردارها دارای خاصیت پخشی است:

$$\vec{a}.(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}\pm\vec{a}.\vec{c}$$

۴) دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند، اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به آن‌چه در درس Box گفتیم، داریم:

$$(۲\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})=\underbrace{۲\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})}_{۰}+\underbrace{\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})}_{۰}=۰ \Rightarrow$$

همواره برقرار است.

یعنی m هرچه باشد، تساوی $(۲\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})=۰$ برقرار است.

یه جور دیگه

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر باشند، بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و در نتیجه بر صفحهٔ شامل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. از طرفی اگر r و s دو عدد حقیقی دلخواه باشند، $r\vec{a}+s\vec{b}$ در صفحهٔ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ واقع است، پس همواره $\vec{a}\times\vec{b}$ بر $r\vec{a}+s\vec{b}$ عمود است و در نتیجه، حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها صفر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱ روی کدام‌یک از خط‌های زیر، نقطه‌ای وجود ندارد که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطهٔ $(۱۰,۵)$ و $(-۲,۵)$ برابر ۱۳ باشد؟

۱) $y = ۷/۵$ ۲) $y = ۲$

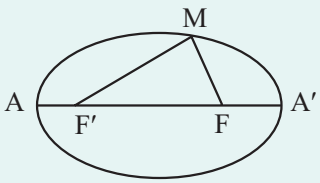
۳) $x = ۳$ ۴) $x = ۱۰/۵$

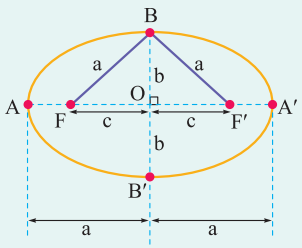
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) هر نقطه روی بیضی این ویژگی را دارد که مجموع فواصل آن تا دو نقطهٔ ثابت F و F' (کانون‌های بیضی) برابر با طول قطر بزرگ بیضی است و بالعکس. یعنی اگر مجموع فاصله‌های نقطه‌ای از دو نقطهٔ F و F' برابر با $۲a$ باشد، این نقطه روی یک بیضی با کانون‌های F و F' و طول قطر بزرگ $۲a$ قرار دارد.

$$MF + MF' = AA' = ۲a$$





۲) در شکل رسم‌شده F و F' کانون‌های بیضی و O مرکز آن است. نقاط A و A' رأس‌های کانونی و B و B' رأس‌های غیرکانونی نامیده می‌شوند. AA' بلندترین و BB' کوتاه‌ترین قطر بیضی است و طول پاره‌خط‌ها بر حسب پارامترهای a، b و c مشخص شده‌اند. همچنین توجه داشته باشید که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BOF می‌توان نتیجه گرفت $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (تحلیل سؤال):

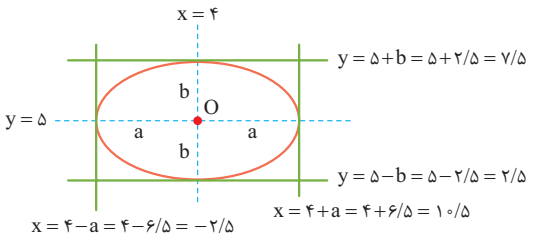
نقاطی که مجموع فاصلهٔ آن‌ها از دو نقطهٔ $F(۱۰,۵)$ و $F'(-۲,۵)$ یکسان است، روی یک بیضی با کانون‌های $(۱۰,۵)$ و $(-۲,۵)$ قرار دارند و از آن جایی که این فاصله برابر ۱۳ است پس طول قطر بزرگ بیضی ۱۳ است. داریم:

$$\begin{cases} FF' = ۲c = ۱۲ \\ ۲a = ۱۳ \end{cases} \Rightarrow b^۲ + c^۲ = a^۲ \text{ چون در هر بیضی داریم } \Rightarrow ۲b = ۵$$

و مرکز بیضی نقطهٔ وسط پاره‌خط واصل کانون‌های آن است:

$$O = \frac{۱}{۲}(F + F') \Rightarrow O(۴,۵)$$

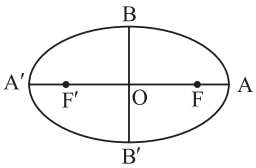
گام دوم (رسم بیضی): ابتدا توجه کنید که این بیضی افقی است، زیرا $y_F = y_{F'} = ۵$، از طرفی خطوط عمودی و افقی که از مرکز بیضی می‌گذرد $x = ۴$ و $y = ۵$ می‌باشند (زیرا مختصات مرکز بیضی $O(۴,۵)$ است) با توجه به مقادیر $a = ۶/۵$ و $b = ۲/۵$ خطوط مماس بر بیضی را در رأس‌های آن به دست می‌آوریم و نمودار بیضی را رسم می‌کنیم:



گام سوم (یافتن پاسخ سؤال): با توجه به شکل گام قبل، خط $y = ۲$ این بیضی را قطع نمی‌کند، پس روی این خط، نقطه‌ای وجود ندارد که مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ $(۵ ,۱۰)$ و $(۵ ,-۲)$ برابر با ۱۳ باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲ مطابق شکل، اگر خروج از مرکز بیضی برابر e باشد، آن‌گاه نسبت مساحت چهارضلعی $ABF'B'$ به مساحت چهارضلعی $BFB'F'$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{e}+۱$

۲) $e+۱$

۳) $\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{e}+۱)$

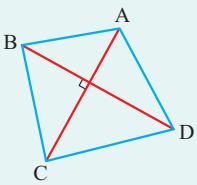
۴) $\frac{۱}{۲}(e+۱)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) اگر دو قطر یک چهارضلعی محدّب بر هم عمود باشند، مساحت آن چهارضلعی برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول‌های دو قطر

$$S_{ABCD}=\frac{AC\times BD}{۲}$$



۲) میزان کشیدگی یا بازشدگی بیضی با پارامتری به نام خروج از مرکز (e) سنجیده می‌شود و بنابه تعریف داریم $e=\frac{c}{a}$. خروج از مرکز بیضی همیشه عددی بین صفر و یک است.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به درس‌باکس داریم:

$$\frac{\text{مساحت } ABF'B'}{\text{مساحت } BFB'F'}=\frac{\frac{۱}{۲}\times BB'\times AF'}{\frac{۱}{۲}\times BB'\times FF'}=\frac{AF'}{FF'}=\frac{AO+OF'}{FF'}=\frac{a+c}{۲c}=\frac{a}{۲c}+\frac{c}{۲c}=\frac{۱}{۲}(\frac{a}{c}+۱)=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{e}+۱)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

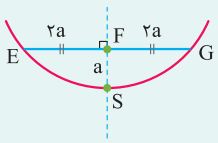
۲۳ از نقطهٔ F، کانون سهمی به معادلهٔ $x^۲ - y - ۴x + ۲ = ۰$، عمودی بر خط هادی آن وارد کرده و پای عمود را A می‌نامیم. اگر خطی که در F بر محور تقارن این سهمی عمود می‌شود، سهمی را در نقاط B و C قطع کند، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) از کانون سهمی خطی عمود بر محور کانونی رسم می‌کنیم. این خط سهمی را در دو نقطهٔ E و G قطع کرده است. به پاره‌خط EG وتر کانونی سهمی گویند که طول آن برابر با ۴a (چهاربرابر فاصلهٔ کانونی) است.



۲) معادلهٔ گستردهٔ سهمی‌های افقی و قائم به یکی از دو حالت زیر است:

$\begin{cases} Ax^۲ + Bx + Cy + D = ۰ & \text{معادلهٔ گستردهٔ سهمی قائم} \\ Ay^۲ + By + Cx + D = ۰ & \text{معادلهٔ گستردهٔ سهمی افقی} \end{cases}$

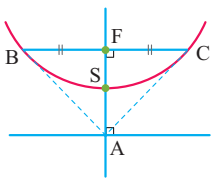
برای به دست آوردن پارامتر a (فاصلهٔ کانونی سهمی) از روی معادلهٔ گسترده، می‌توان از رابطهٔ روبه‌رو استفاده کرد:

$$a = \left|\frac{C}{۴A}\right|$$

۳) در معادلهٔ گسترده، علامت A.C جهت دهانهٔ سهمی را نشان می‌دهد. اگر مقداری منفی باشد، سهمی رو به بالا / راست است و اگر مثبت باشد، سهمی رو به پایین / چپ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم شکل): این سهمی قائم و رو به بالا است. شکل حدودی مسأله را رسم می‌کنیم:



گام دوم (محاسبهٔ مساحت مثلث ABC برحسب a): مساحت مثلث را بر حسب a می‌نویسیم.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AF \cdot BC = \frac{۱}{۲}(۲a)(۴a) = ۴a^۲$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طبق درس‌نامه می‌دانیم که مقدار a را از طریق معادلهٔ گستردهٔ سهمی می‌توانیم با فرمول $a = \left|\frac{C}{۴A}\right|$ به دست بیاوریم:

$$x^۲ - ۴x - y + ۲ = ۰ \Rightarrow a = \left|\frac{-۱}{۴ \times ۱}\right| = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = ۴\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۴ آینهٔ سهمی‌شکل، به معادلهٔ $y^۲ + y + ۲x = ۱$ مفروض است. با قراردادن منبع نور در کدام نقطه می‌توانیم به وسیلهٔ این آینه، نور بالا ایجاد کنیم؟

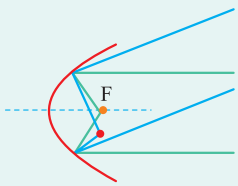
۱) $(\frac{۱}{۸}, -۱)$ ۲) $(\frac{۱}{۸}, ۰)$

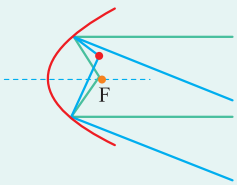
۳) $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ ۴) $(۰, -\frac{۱}{۲})$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اگر یک آینه، به شکل سهمی افقی باشد، با قراردادن منبع نور در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی (بالاتر یا پایین‌تر از آن)، شعاع‌های نور کماکان موازی با هم (نه موازی با محور) اما رو به بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می‌کنند.





سهمی‌های افقی در دستگاه مختصات

رأس سهمی: $S(h,k)$

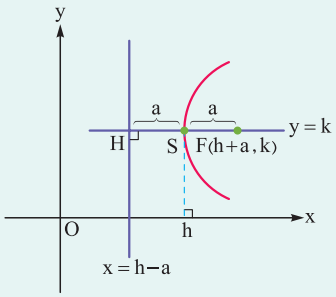
معادلهٔ استاندارد سهمی: $(y-k)^۲ = ۴a(x-h)$

محور تقارن سهمی خط: $y = k$

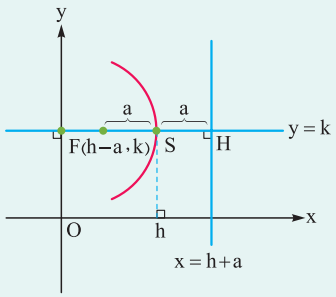
خط هادی: $x = h - a$

کانون: $F(h+a,k)$

اگر دهانهٔ سهمی به راست باز شود.



اگر دهانهٔ سهمی به چپ باز شود.



رأس سهمی: $S(h,k)$

معادلهٔ استاندارد سهمی: $(y-k)^۲ = -۴a(x-h)$

محور تقارن سهمی: $y = k$

خط هادی: $x = h + a$

کانون: $F(h-a,k)$

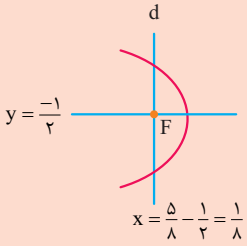
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (رسم سهمی): معادلهٔ گستردهٔ سهمی را به معادلهٔ استاندارد تبدیل می‌کنیم.

$$y^۲ + y + ۲x = ۱ \Rightarrow y^۲ + y + \frac{۱}{۴} = ۱ - ۲x + \frac{۱}{۴} \Rightarrow (y + \frac{۱}{۲})^۲ = -۲(x - \frac{۵}{۸})$$

در نتیجه سهمی افقی، رو به چپ و با مختصات رأس $(\frac{۵}{۸}, -\frac{۱}{۲})$ است و $a = \frac{۱}{۲}$.

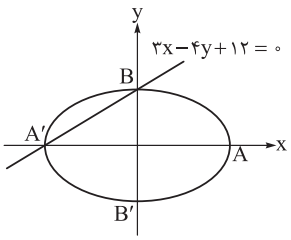
بنابراین مختصات کانون به صورت $F(\frac{۵}{۸} - \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۸}, -\frac{۱}{۲})$ و سهمی به شکل مقابل است:



گام دوم (یافتن پاسخ مسأله): طبق درس Box می‌دانیم منبع نور باید روی خط d، پایین F قرار بگیرد. پس طول این نقطه $\frac{۱}{۸}$ و عرض آن کوچک‌تر از $-\frac{۱}{۲}$ است و گزینهٔ (۱) صحیح است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵ مطابق شکل AA' و BB' به ترتیب بلندترین و کوتاه‌ترین قطر بیضی هستند. اگر کانون‌های این بیضی، رأس و کانون یک سهمی باشند، طول وتری که این سهمی از محور yها جدا می‌کند، کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۱۴}$

۲) $۲\sqrt{۱۴}$

۳) $۴\sqrt{۷}$

۴) $۸\sqrt{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ‌خیلی‌تشریحی ✔ **گام اول (محاسبهٔ a، b و c در بیضی):**

با توجه به شکل سؤال، مختصات نقاط A' و B را به دست می‌آوریم:

$$۳x-۴y+۱۲=۰ \xrightarrow{x=۰} y=\frac{-۱۲}{-۴}=۳ \Rightarrow B(۰,۳) \Rightarrow b=OB=۳$$

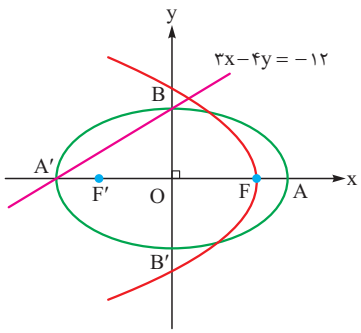
$$۳x-۴y+۱۲=۰ \xrightarrow{y=۰} x=-\frac{۱۲}{۳}=-۴ \Rightarrow A'(-۴,۰) \Rightarrow a=OA'=۴$$

و از طرفی می‌دانیم در هر بیضی $a^۲=b^۲+c^۲$ پس c را به دست می‌آوریم و مختصات F و F' را می‌نویسیم.

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۴^۲=۳^۲+c^۲ \Rightarrow c=\sqrt{۷} \Rightarrow F(\sqrt{۷},۰), F'(-\sqrt{۷},۰)$$

گام دوم (نوشتن معادلهٔ سهمی): معادلهٔ سهمی به رأس F و کانون F' را به دست می‌آوریم:

معادلهٔ سهمی به رأس F و کانون F': $(y-۰)^۲=-۸\sqrt{۷}(x-\sqrt{۷})$ ⇐ فاصلهٔ کانونی سهمی: $p=FF'=۲\sqrt{۷}$



گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): در معادلهٔ سهمی، $x=۰$ را جای‌گذاری می‌کنیم تا عرض نقاط برخورد سهمی با محور yها به دست بیاید و سپس طول وتر ایجادشده را محاسبه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=۰} y^۲=۸\times۷ \Rightarrow y=\pm۲\sqrt{۱۴} \Rightarrow \text{طول وتر}=۴\sqrt{۱۴}$$

تذکر: اگر F' و F را به ترتیب رأس و کانون سهمی در نظر بگیرید، باز هم همین نتیجه حاصل می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۶ از نقطهٔ $A(۲,-۱,۳)$، سه صفحه به موازات صفحه‌های مختصات می‌گذرانیم. این سه صفحه، به همراه صفحه‌های مختصات، وجه‌های یک مکعب مستطیل هستند. کدام نقطه روی دقیقاً یکی از وجه‌های این مکعب مستطیل واقع است؟

۱) $(۲,-\frac{۱}{۲},۳)$

۲) $(\frac{۱}{۲},-۱,۲)$

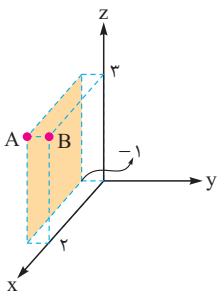
۳) $(۱,-\frac{۱}{۲},۲)$

۴) $(۲,۰,۳)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم شکل مسأله): ابتدا نقطهٔ A را در دستگاه مختصات پیدا می‌کنیم. از این نقطه ۳ صفحه به موازات صفحات xy، zy و xz رسم می‌کنیم تا ۳ وجه مکعب مستطیل پیدا شود. هم‌چنین طبق صورت سؤال ۳ وجه دیگر آن دقیقاً منطبق بر صفحات مختصات است، پس شکل آن به صورت زیر است:



گام دوم (بررسی گزینه‌ها):

گزینهٔ (۱): نقطهٔ $(۲,-\frac{۱}{۲},۳)$ روی یال AB واقع است، پس بر دو وجه این مکعب‌مستطیل قرار دارد.

گزینهٔ (۲): نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},-۱,۲)$ روی وجه سایه‌خورده در شکل گام اول واقع است.

گزینهٔ (۳): نقطهٔ $(۱,-\frac{۱}{۲},۲)$ داخل این مکعب‌مستطیل واقع است، پس بر هیچ‌کدام از وجه‌های آن واقع نیست.

گزینهٔ (۴): نقطهٔ $(۲,۰,۳)$ مختصات رأس B است، پس بر سه وجه این مکعب‌مستطیل واقع است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۷ دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند. اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ هم‌اندازه باشند، کدام دو بردار لزوماً بر هم عمودند؟

۱) $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{b}$

۲) $۲\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{b}$

۳) $\vec{a}-۲\vec{b}$ و $\vec{b}$

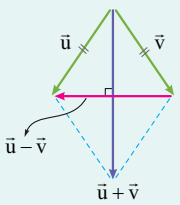
۴) $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر دو بردار هم‌اندازه باشند، مجموع و تفاضل آن‌ها بر هم عمودند.

$$|\vec{u}|=|\vec{v}| \Rightarrow (\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$$



پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس، $\vec{a}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ هم‌اندازه هستند، پس داریم:

$$\begin{cases} \text{مجموع این دو بردار}: (\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}=۲\vec{a}+\vec{b} \\ \text{تفاضل این دو بردار}: (\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=\vec{b} \end{cases} \Rightarrow (۲\vec{a}+\vec{b}) \perp \vec{b}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۸ تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۲,۳,-۵)$ را بر امتداد دو بردار عمود بر هم $\vec{b}=(۱,۲,-۲)$ و $\vec{c}$ به ترتیب $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نامیده‌ایم. بردار $\vec{v}$ کدام است؟

۱) $(۲,۰,۱)$

۲) $(۰,-۲,۳)$

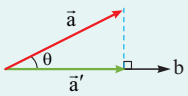
۳) $(۴,۰,۲)$

۴) $(۰,-۱,-۱)$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

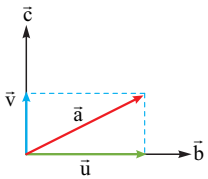
تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$: دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را در نظر می‌گیریم. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ که با $\vec{a}'$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\Rightarrow \vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم شکل مناسب): تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد دو بردار عمود بر هم $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب $\vec{u}$ و $\vec{v}$ است پس مطابق شکل داریم: $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$



گام دوم (محاسبهٔ تصویر بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$):

طبق درس Box داریم:

$$\vec{u}=\frac{a\cdot b}{|b|^{۲}}\vec{b}=\frac{۲+۶+۱۰}{۱+۴+۴}(۱,۲,-۲)=\frac{۱۸}{۹}(۱,۲,-۲)=(۲,۴,-۴)$$

گام سوم (محاسبهٔ بردار $\vec{v}$): در گام اول گفتیم که $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$ پس:

$$\vec{v}=\vec{a}-\vec{u}=(۲,۳,-۵)-(۲,۴,-۴)=(۰,-۱,-۱)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۹ نقاط $A(۳,۱,-۱)$ ، $B(۰,-۱,۱)$ و $C(۲,-۱,۱)$ سه رأس مثلث **ABC** هستند. فاصلهٔ رأس **B** از میانهٔ **AM** کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) اگر نقاط A ، B و C سه رأس مثلث ABC باشند، آن‌گاه مساحت این مثلث از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}|$$

۲) **فاصلهٔ بین دو نقطه (اندازهٔ پاره‌خط) در فضا:** هرگاه $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند، فاصلهٔ بین آن‌ها (اندازه پاره‌خط) برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$$

۳) **مختصات نقطهٔ وسط یک پاره‌خط:** اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند، مختصات نقطهٔ M وسط AB به صورت زیر است:

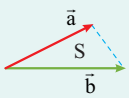
$$M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲},\frac{z_۱+z_۲}{۲})$$

۴) اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$، آن‌گاه حاصل‌ضرب خارجی $\vec{a}\times\vec{b}$ یک بردار است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_۱&a_۲&a_۳\\b_۱&b_۲&b_۳\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_۲&a_۳\\b_۲&b_۳\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_۱&a_۳\\b_۱&b_۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_۱&a_۲\\b_۱&b_۲\end{vmatrix}\right)$$

۵) مساحت مثلثی که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابراست با:

$$S=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|$$



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ مختصات نقطهٔ M):

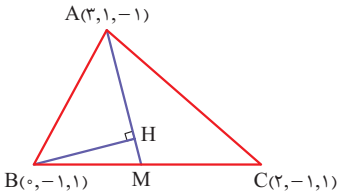
نقطه M وسط ضلع BC است، پس مختصات آن برابر است با:

$$M=\frac{B+C}{۲}=\frac{(۰,-۱,۱)+(۲,-۱,۱)}{۲}=(۱,-۱,۱)$$

گام دوم (محاسبهٔ طول AM): با توجه به مختصات نقاط A و M طول AM برابر است با:

$$AM=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۱+۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

گام سوم (محاسبهٔ BH): به وسیلهٔ مختصات نقاط A ، M و B ، بردارهای $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BM}$ را به دست می‌آوریم، می‌دانیم مساحت مثلث ABM از طریق ضرب خارجی این بردارها برابر با $\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BM}|$ و با استفاده از طول ارتفاع و قاعده‌اش نیز برابر $\frac{۱}{۲}BH\times AM$ است، بنابراین داریم:



$$\overrightarrow{BA}=(۳-۰,۱-(-۱),-۱-۱)=(۳,۲,-۲)$$

$$\overrightarrow{BM}=(۱-۰,-۱-(-۱),۱-۱)=(۱,۰,۰)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$$S_{\Delta ABM} = \frac{۱}{۲}BH.AM \Rightarrow \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BM}| = \frac{۱}{۲}BH.AM$$

$$\Rightarrow BH = \frac{|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BM}|}{AM}, \overrightarrow{BA} = (۳,۲,-۲), \overrightarrow{BM} = (۱,۰,۰)$$

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BM} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = (۰,-۲,-۲) \Rightarrow |\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BM}| = \sqrt{۴+۴} = ۲\sqrt{۲}$$

$$BH = \frac{|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BM}|}{AM} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰ اگر نقطهٔ $M(۴,m,m)$ بر صفحهٔ گذرنده از نقاط $A(۱,۲,۰)$ ، $B(۲,-۱,-۵)$ و $C(۱,۱,-۲)$ واقع باشد، آن‌گاه فاصلهٔ M از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۴

۳) ۱۲ ۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

ضرب مختلط عددی (ضرب سه‌گانه عددی): فرض کنید $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار در فضا باشند. در این صورت $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ را ضرب مختلط (سه‌گانه) عددی سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ می‌نامند و داریم:

$$\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)\ ,\ \vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳),\vec{c}=(c_۱,c_۲,c_۳)\Rightarrow \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳\\ b_۱ & b_۲ & b_۳\\ c_۱ & c_۲ & c_۳\end{vmatrix}$$

نکته سه بردار غیر صفر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه واقع‌اند، اگر و تنها اگر $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (تحلیل سؤال و محاسبه $\overrightarrow{AM}$، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$):

اگر نقاط M، A، B و C در یک صفحه باشند آن‌گاه بردارهای $\overrightarrow{AM}$، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نیز در یک صفحه قرار می‌گیرند، پس باید

$$\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=۰$$

ابتدا بردارهای $\overrightarrow{AM}$، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را به دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{AM}=(۴-۱,m-۲,m-۰)=(۳,m-۲,m)$$

$$\overrightarrow{AB}=(۲-۱,-۱-۲,-۵-۰)=(۱,-۳,-۵)$$

$$\overrightarrow{AC}=(۱-۱,۱-۲,-۲-۰)=(۰,-۱,-۲)$$

گام دوم (محاسبهٔ مختصات M): با توجه به درس‌باکس باید:

$$\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=۰\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} ۳ & m-۲ & m\\ ۱ & -۳ & -۵\\ ۰ & -۱ & -۲\end{vmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow ۳((-۳\times-۲)-(-۵\times-۱))+(m-۲)((-۵\times۰)-(-۲\times۱))+m((-۱\times۱)-(-۳\times۰))=۰\Rightarrow m=۱$$

گام سوم (محاسبهٔ OM): مختصات نقطهٔ M را پیدا کرده و طول بردار پاره‌خط OM را به دست می‌آوریم:

$$m=۱\ \Rightarrow\ M(۴,۱,۱)\ \Rightarrow\ OM=\sqrt{۱۶+۱+۱}=۳\sqrt{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱ در گراف G، داریم $p(G)=۵$ و $\gamma(G)=۱$. اگر این گراف فاقد دور باشد، دارای چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

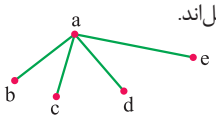
درس Box

یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

دور: دنبالهٔ $v_۱v_۲v_۳\cdots v_n v_۱$ $(n\geq ۳)$ از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در گراف G، $\gamma(G)=۱$. پس در گراف G رأسی مانند a وجود دارد که همهٔ رئوس به آن متصل‌اند.



گام دوم: گراف G فاقد دور است، بنابراین رئوس b، c، d و e نمی‌توانند به هم متصل باشند.

گام سوم: رأس a به همهٔ رئوس متصل است، پس به تنهایی احاطه‌گر مینیمال است.

$$D_۱=\{a\}$$

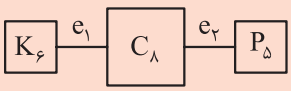
گام چهارم: اگر رأس a عضوی از مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال نباشد، برای این‌که همهٔ رئوس پوشش داده شوند باید هر چهار رأس d، e، c و b در مجموعه باشند؛ پس:

$$D_۲=\{b,c,d,e\}$$

بنابراین گراف G، تنها دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۲ شکل زیر، گراف G را نشان می‌دهد. گراف از سه بخش تشکیل شده که دو یال e_1 و e_2 این بخش‌ها را مطابق شکل به هم وصل کرده‌اند و بین رأس‌های یال e_1 و یال e_2، مسیری با طول کم‌تر از ۴ وجود ندارد. عدد احاطه‌گری برای این گراف، کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

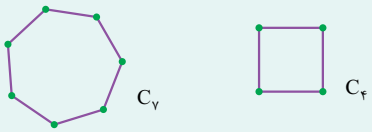
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

- گرافی را که تنها از یک مسیر nرأسی تشکیل شده باشد با P_n نمایش می‌دهیم.



- گرافی را که تنها از یک دورِ nرأسی تشکیل شده باشد با C_n نمایش می‌دهیم.

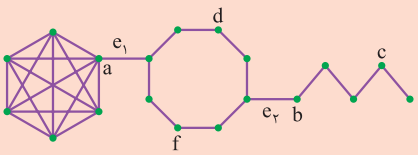


- **گراف کامل**: گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر، مجاور باشد گراف کامل می‌نامیم. گراف کامل nرأسی را با K_n نمایش می‌دهیم.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: بین رأس‌های یال e_1 و یال e_2 نباید مسیری با طول کم‌تر از ۴ وجود داشته باشد، پس تنها حالت ممکن برای گراف به‌صورت زیر است.



گام دوم: در گراف کامل K_6، همهٔ رئوس با هم مجاورند؛ پس با انتخاب یک رأس، گراف K_6 پوشش داده می‌شود، اما بهتر است رأسی را انتخاب کنیم که به یال e_1 متصل است تا یک رأس از گراف C_8 احاطه شود (رأس a).

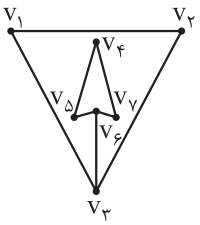
گام سوم: گراف P_5، با دو رأس احاطه می‌شود؛ ابتدا یکی از رئوسی که به یال e_2 متصل است انتخاب می‌کنیم (رأس b) و سپس رأس دیگر را (رأس c).

گام چهارم: حال در گراف C_8، دو رأس توسط رأس‌های a و b احاطه می‌شوند، پس گراف C_8 با دو رأس d و f به طور کامل احاطه می‌شود.

گام پنجم: بنابراین در گراف G مجموعهٔ $\{a,b,c,d,f\}$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است؛ پس $\gamma(c) = 5$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۳ گراف شکل مقابل، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟



۱) ۸

۲) ۱۲

۳) ۱۶

۴) ۲۴

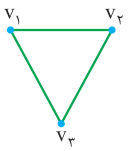
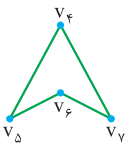
پاسخ: گزینهٔ ۳

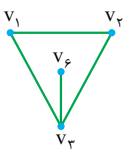
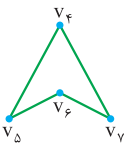
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در گراف G، $p = ۷$ و $\Delta = ۳$؛ پس رأسی از درجهٔ فول $(p-۱)$ که با تمام رئوس دیگر مجاور باشد وجود ندارد؛ در نتیجه این گراف مجموعهٔ احاطه‌گر تک‌عضوی ندارد.

گام دوم: مجموعهٔ $\{V_۳, V_۴\}$ تنها مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و در نتیجه مینیمال دوعضوی است، زیرا با حذف هر یک از رئوس $V_۳$ یا $V_۴$ مجموعهٔ دیگر احاطه‌گر نیست.

گام سوم: برای مجموعه‌های احاطه‌گر سه‌عضوی، دو حالت داریم:

۱) انتخاب یک رأس از بین رئوس $V_۱$ و $V_۲$ برای احاطهٔ  و دو رأس از بین چهار رأس $V_۴$، $V_۵$، $V_۶$ و $V_۷$ برای احاطهٔ  از گراف G.

۲) انتخاب رأس $V_۳$ برای احاطهٔ  و دو رأس از بین رئوس $V_۵$، $V_۶$ و $V_۷$ برای احاطهٔ  از گراف G.

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال سه‌عضوی $= \binom{۲}{۱}\binom{۴}{۲} + \binom{۱}{۱}\binom{۳}{۲} = ۱۵$

$\binom{۲}{۱}$ ↓ $V_۲, V_۱$ ، $\binom{۴}{۲}$ ↓ $V_۴, V_۵, V_۶, V_۷$ ، $\binom{۱}{۱}$ ↓ $V_۳$ ، $\binom{۳}{۲}$ ↓ $V_۶, V_۵, V_۷$

با انتخاب $V_۳$ در صورتی‌که $V_۴$ از بین $V_۴$، $V_۵$ و $V_۷$ انتخاب شود، دیگر نیاز به انتخاب رأس دیگری نیست. در واقع مجموعه‌های $\{V_۳, V_۴, V_۵\}$ و $\{V_۳, V_۴, V_۷\}$ احاطه‌گر مینیمال نیستند ولی مجموعه‌های $\{V_۳, V_۵, V_۶\}$ و $\{V_۳, V_۶, V_۷\}$ احاطه‌گر مینیمال هستند.

گام چهارم: پس در مجموع گراف G، ۱۶ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۴ با حروف کلمهٔ «MOHAMMAD» چند کلمهٔ ۷حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۲۷۳۰ ۲) ۳۳۶۰

۳) ۵۴۶۰ ۴) ۶۷۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint تعداد جایگشت‌های $n-1$ تایی n شیء با تعداد جایگشت‌های nتایی آن برابر است.

درس Box **قضیه جایگشت با تکرار:** اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن‌ها از نوع kام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** دنبال جایگشت‌های ۷حرفی از حروف کلمهٔ «MOHAMMAD» هستیم، این کلمه ۸ حرف دارد. اگر حرف اضافی هشتم حروف O ، H و D باشند تعداد جایگشت‌های ۷ حرف باقی‌مانده برابر است با:

$$\frac{7!}{\underset{\text{تکرار M}}{3!}\quad\underset{\text{تکرار A}}{2!}}$$

گام دوم: اگر حرف اضافی یکی از حروف A باشد، سه حرف تکراری M می‌ماند؛ بنابراین تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{7!}{\underset{\text{تکرار M}}{3!}}$$

گام سوم: اگر حرف اضافی یکی از حروف M باشد، آن‌گاه:

$$\frac{7!}{\underset{\text{تکرار M}}{2!}\quad\underset{\text{تکرار A}}{2!}}$$

گام چهارم: بنابراین تعداد جایگشت‌های ۷حرفی کلمهٔ «MOHAMMAD» برابر است با:

$$3\times\frac{7!}{3!\times 2!}+\frac{7!}{3!}+\frac{7!}{2!2!}=3\times 420+840+1260=3360$$

یه‌جور دیگه تعداد جایگشت‌های ۷حرفی یک کلمهٔ ۸حرفی برابر است با تعداد جایگشت‌های ۸حرفی آن کلمه؛ پس داریم:

$$\frac{8!}{\underset{\text{تکرار M}}{3!}\quad\underset{\text{تکرار A}}{2!}}=3360$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۵ به چند طریق می‌توان ۱۰ کبوتر را در ۴ لانه قرار داد، به طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟ (کبوترها با هم فرقی ندارند و فقط تعداد کبوترها در هر لانه مهم است).

۱) ۸۴ ۲) ۱۲۰

۳) ۲۲۰ ۴) ۲۸۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint دقت کنید این سؤال ربطی به اصل لانهٔ کبوتری نداره و شبیه سؤال‌های انتخاب چند شاخه گل از بین چند نوع گل است.

درس Box تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** چهار لانه را x_1، x_2، x_3 و x_4 در نظر می‌گیریم. چون کبوترها با هم فرقی ندارند و هم‌چنین می‌خواهیم هیچ لانه‌ای خالی نماند، پس دنبال جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ هستیم.

گام دوم: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$؛ پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$n = 10$$

$$k = 4$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶ از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به مجموعهٔ $B=\{۱,۲,۳\}$، چند تابع پوشا می‌توان نوشت، به شرط آن‌که فقط مؤلفهٔ دوم دو زوج مرتب در این توابع، عدد ۳ باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ mعضوی به مجموعهٔ ۲عضوی برابر است با:

$$۲^m-۲$$

تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ mعضوی به مجموعهٔ ۳عضوی برابر است با:

$$۳^m-(۳\times ۲^m-۳)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مؤلفهٔ دوم دو زوج مرتب عدد ۳ است، برای آن‌که مؤلفهٔ دومشان عدد ۳ باشد، دو عضو از ۵ عضو مجموعهٔ A را به $\binom{۵}{۲}$ حالت انتخاب می‌کنیم.

گام دوم: سه عضو از مجموعهٔ A باقی‌مانده که باید دو عضو باقی‌مانده از مجموعهٔ B را پوشش بدهند. یعنی تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ ۳عضوی A به مجموعهٔ ۲عضوی B که برابر است با: $۲^m-۲=۲^۳-۲=۶$.

گام سوم: بنابراین تعداد توابع پوشا با شرط سؤال، برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\substack{\text{مجموعهٔ A به ۳ بروند}\\ \text{کدام دو عضو}}}\times\underbrace{۶}_{\substack{\text{تعداد توابع پوشا از}\\ \text{سه عضو A به دو عضو B}}}=۶۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۷ **n** حداقل چند باشد، تا مطمئن شوید در یک زیرمجموعهٔ **n**عضوی از مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی، حداقل سه عضو وجود دارد که میانگین آن‌ها برابر ۵ شود؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اصل لانهٔ کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای آن‌که میانگین سه عدد برابر ۵ باشد، باید مجموع این سه عدد ۱۵ شود.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} \Rightarrow \text{مجموع} = \text{تعداد} \times \text{میانگین}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = ۵ \times ۳ = ۱۵$$

گام دوم: مجموعهٔ سه‌تایی‌هایی از اعداد طبیعی یک‌رقمی را که مجموع آن‌ها ۱۵ می‌شود، می‌یابیم.

$\{۱,۵,۹\}$ $\{۲,۴,۹\}$ $\{۳,۴,۸\}$ $\{۴,۵,۶\}$ $\{۱,۶,۸\}$ $\{۲,۵,۸\}$ $\{۳,۵,۷\}$ $\{۲,۶,۷\}$

گام سوم: در بدترین حالت اگر $\{۱,۲,۳,۷,۸,۹\}$ را انتخاب کنیم، با انتخاب عدد هفتم، قطعاً سه عدد وجود دارد که میانگین آن‌ها برابر ۵ می‌شود؛ پس $n \geq ۷$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸ مربع لاتین زیر را به چند طریق می‌توان کامل کرد؟

	۲		
۱			
			۴
		۳	

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۶

۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده است و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین» می‌نامیم. به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** درایهٔ a_{11} یعنی درایهٔ واقع در سطر اول و ستون اول نمی‌تواند ۱ و ۲ باشد؛ پس دو حالت دارد: ۴ یا ۳ = a_{11}. هر حالت را بررسی می‌کنیم.

گام دوم: با ۳ = a_{11} جدول را کامل می‌کنیم:

۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳
۲	۳	۱	۴
۴	۱	۳	۲

با ۳ = a_{11} تمام خانه‌ها پر شد و هیچ انتخاب دیگری نداشتیم.

گام سوم: با ۴ = a_{11} جدول را کامل می‌کنیم:

۴	۲	۱	۳
۱	۳	۴	۲
۳	۱	۲	۴
۲	۴	۳	۱

با ۴ = a_{11} تمام خانه‌ها پر شد و انتخاب دیگری نداشتیم؛ پس مربع لاتین سؤال را به دو حالت می‌توان تکمیل کرد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹ چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰۰ وجود دارد که مضرب ۵ باشند، ولی نه مضرب ۳ باشند و نه مضرب ۷؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اگر S مجموعهٔ مرجع و متناهی و A و B زیرمجموعه‌های S باشند، در این‌صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ‌یک از مجموعه‌های A و B قرار ندارند، برابر است با:

$$|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مجموعهٔ S برابر مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰۰ است که مضرب ۵ باشند:

$$|S|=\left[\frac{۲۹۹}{۵}\right]=۵۹$$

گام دوم: مجموعهٔ A برابر اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰۰ مضرب ۵ که مضرب ۳ نیز باشند.

$$|A|=\left[\frac{۲۹۹}{۱۵}\right]=۱۹$$

گام سوم: مجموعهٔ B برابر اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰۰ مضرب ۵ که مضرب ۷ نیز باشند.

$$|B|=\left[\frac{۲۹۹}{۳۵}\right]=۸$$

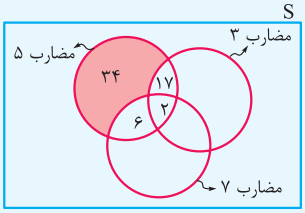
گام چهارم: مجموعهٔ $A\cap B$ برابر اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰۰ مضرب ۵ که مضرب ۷ و ۳ باشند.

$$|A\cap B|=\left[\frac{۲۹۹}{۳\times۵\times۷}\right]=\left[\frac{۲۹۹}{۱۰۵}\right]=۲$$

گام پنجم: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰۰ که مضرب ۵ باشند، ولی نه مضرب ۳ باشند و نه مضرب ۷ برابر است با:

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B| \Rightarrow |\overline{A}\cap\overline{B}|=۵۹-۱۹-۸+۲=۳۴$$

یه‌جور دیگه



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۰ در فضای $\mathbb{R}^3$، در ناحیهٔ محصور بین صفحه‌های مختصات و صفحه‌های $x=۷$، $y=۷$ و $z=۷$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد که مجموع مؤلفه‌های آن برابر ۱۳ باشد؟ (نقاط روی صفحه‌های گفته‌شده قابل قبول نیستند.)

۱) ۶۶ ۲) ۵۱ ۳) ۳۶ ۴) ۲۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint با توجه به تعریف متمم، برو سراغ حل مسئله.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ناحیهٔ محصور بین صفحه‌های مختصات و صفحه‌های $x=۷$، $y=۷$ و $z=۷$ داریم:

$۰ < x,y,z < ۷$ و چون مجموع مؤلفه‌ها برابر ۱۳ است؛ پس $x+y+z=۱۳$.

گام دوم: کافی است جواب‌های معادلهٔ $x+y+z=۱۳\ ;\ x,y,z>۰$ را به دست آوریم و سپس جواب‌های معادلهٔ $x+y+z=۱۳\ ;\ x,y,z>۶$ را از آن کم کنیم.

گام سوم:

$$x+y+z=۱۳\ ,\ x,y,z>۰$$

$$\text{جواب‌های مطلوب} = \binom{۱۲}{۲} = ۶۶$$

گام چهارم: فرض کنیم یکی از مؤلفه‌ها مثل $x>۶$ باشد؛ در این صورت:

$$x+y+z=۱۳\ ;\ x>۶, y,z>۰ \quad (\underbrace{x-۶}_{x'}>۰)$$

$$\Rightarrow\ x'+y+z=۷\ ,\ x'>۰\ ,\ y,z>۰$$

$$\text{تعداد جواب‌های مطلوب} = \binom{۶}{۲} = ۱۵$$

گام پنجم: اگر دو مؤلفه مثلاً $x,y>۶$ باشند، در این صورت معادله جواب ندارد.

گام ششم: تعداد جواب‌های مسئله برابر است با:

$$\binom{۱۲}{۲} - \underset{\substack{x>۶\\ y>۶\\ z>۶}}{\overset{\downarrow}{۳}} \times \binom{۶}{۲} = ۶۶ - ۳\times ۱۵ = ۲۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱ اندازهٔ نیروی کشش طناب **A**، ۴ برابر اندازهٔ نیروی کشش طناب **B** و قطر مقطع طناب **A**، ۳ برابر قطر مقطع طناب **B** است. اگر چگالی دو طناب یکسان باشد، تندی انتشار موج عرضی در طناب **A**، چند برابر تندی انتشار موج عرضی در طناب **B** است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۶

مشاوره ترکیب چگالی با مباحثی مثل: ۱) انتشار موج در طناب ۲) گرانش ۳) مقاومت الکتریکی، یکم دردسرساز می‌شه. پس یه چند تا سؤال از مباحثی که گفتیم و ترکیبشون با چگالی بیشتر حل کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) چگالی خطی جرم

جرم یک متر از ریسمان:

$$\mu = \frac{m}{L}$$

m: جرم ریسمان برحسب کیلوگرم (kg)

L: طول ریسمان برحسب متر (m)

μ: چگالی خطی جرم برحسب کیلوگرم بر متر (kg/m)

۲) تندی انتشار امواج عرضی در ریسمان

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F.L}{m}}$$

F: نیروی کشش ریسمان برحسب نیوتون (N)

v: تندی برحسب متر بر ثانیه (m/s)

۳) چگالی

$$\rho = \frac{m}{V}$$

m: جرم بر حسب کیلوگرم (kg)

V: حجم برحسب متر مکعب $(m^۳)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر قطر طناب را با d نشان دهیم، مساحت مقطع طناب از رابطهٔ $A = \frac{\pi d^۲}{۴}$ به دست می‌آید و نسبت مساحت مقطع طناب A به مساحت مقطع طناب B برابر می‌شود با:

$$\frac{A_A}{A_B} = \frac{\frac{\pi d_A^۲}{۴}}{\frac{\pi d_B^۲}{۴}} = (\frac{d_A}{d_B})^۲ \xrightarrow{d_A = ۳d_B} \frac{A_A}{A_B} = (\frac{۳d_B}{d_B})^۲ = ۹$$

گام دوم: از برابر قراردادن چگالی طناب‌ها، نسبت چگالی خطی جرم A به چگالی خطی جرم B برابر می‌شود با:

$$\rho_A = \rho_B \xrightarrow{\rho=\frac{m}{V}} \frac{m_A}{V_A} = \frac{m_B}{V_B} \xrightarrow{V=AL} \frac{m_A}{A_A L_A} = \frac{m_B}{A_B L_B} \xrightarrow{\mu=\frac{m}{L}} \frac{\mu_A}{A_A} = \frac{\mu_B}{A_B}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_A}{\mu_B} = \frac{A_A}{A_B} = ۹$$

گام سوم: از رابطهٔ $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ نسبت تندی انتشار موج عرضی در طناب A به تندی انتشار موج عرضی در طناب B برابر می‌شود با:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{\frac{F_A}{\mu_A}}}{\sqrt{\frac{F_B}{\mu_B}}} = \sqrt{\frac{F_A}{F_B}} \times \sqrt{\frac{\mu_B}{\mu_A}} = \sqrt{۴} \times \sqrt{\frac{۱}{۹}} = \frac{۲}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۲ در یک طناب کشیده موج عرضی در حال انتشار است. اگر تندی بیشینهٔ ذره‌های طناب در حین نوسان، $\frac{۵\pi}{۶}$ برابر تندی انتشار موج در این طناب باشد، فاصلهٔ یک قله از سومین درهٔ بعد از خود، چند برابر دامنهٔ موج است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{۲۴}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

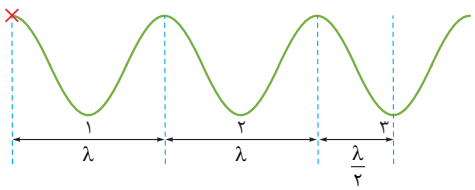
Hint از روی تندی انتشار موج و بیشینهٔ تندی هر ذره، رابطه‌ای بین طول موج (λ) و دامنه (A) پیدا کنید، بعد فاصلهٔ یه قله تا «nاُمین» درهٔ بعدش می‌شه:

$$x = (۲n-۱)\frac{\lambda}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** بیشینهٔ تندی نوسان هر ذره از رابطهٔ $v_{max} = A\omega$ و تندی انتشار موج از رابطهٔ $v = \frac{\lambda}{T}$ به دست می‌آید، پس می‌توان گفت:

$$v_{max} = \frac{۵}{۶}\pi v \Rightarrow A\omega = \frac{۵}{۶}\pi\frac{\lambda}{T} \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} A\times\frac{۲\pi}{T} = \frac{۵}{۶}\pi\frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = \frac{۱۲}{۵}A$$

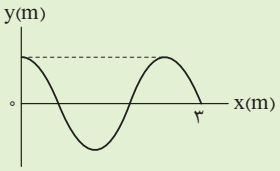
گام دوم: مطابق شکل زیر، فاصلهٔ یک قله تا سومین درهٔ بعد از خود برابر می‌شود با:

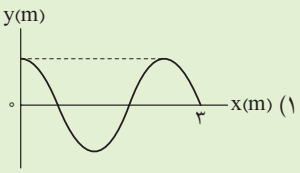


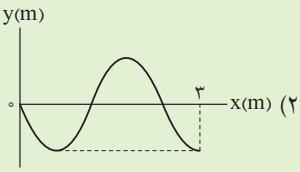
$$x = ۲/۵\lambda \xrightarrow{\lambda=\frac{۱۲}{۵}A} x = ۲/۵\times\frac{۱۲}{۵}A = \frac{۳۰}{۵}A = ۶A \Rightarrow \frac{x}{A} = ۶$$

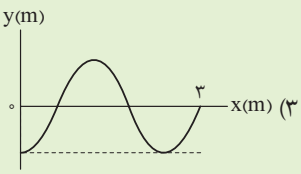
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

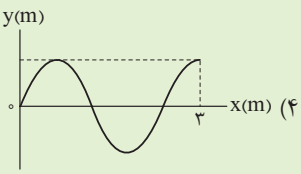
۴۳ نقش موج عرضی منتشرشده در طنابی در مبدأ زمان به شکل زیر است. اگر سرعت انتشار موج در طناب $\vec{v} = (-۱۲\ m/s)\vec{i}$ باشد، نقش موج منتشرشده در طناب در لحظهٔ $t = ۰/۲۵\ s$ به صورت کدام شکل است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۲

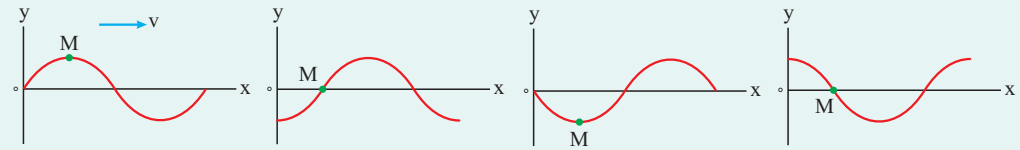
Hint باید بفهمی Δt برحسب دوره چه‌قدر می‌شه.

درس Box

۱) نقش موج:

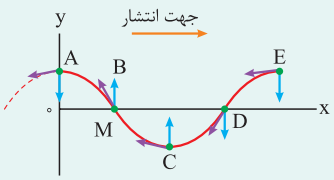
تصویر موج در یک لحظهٔ مشخص را نقش موج می‌گوییم.

برای مثال، نقش یک موج در چهار زمان معروف به صورت زیر رسم شده است:



۲) جهت حرکت ذرات:

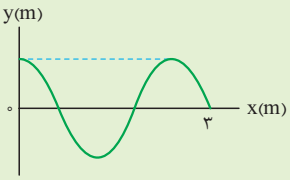
هر ذره، حرکت ذرهٔ قبل از خود را تقلید می‌کند. *(اگر می‌خوای ببینی هر ذره حرکت بعدیش چیه، برعکس جهت انتشار پیش برو!!!)*



A، D و E ← می‌رن پایین

B و C ← می‌رن بالا

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با استفاده از نقش موج در لحظهٔ $t = ۰$، طول موج برابر می‌شود با:



$$\frac{۵\lambda}{۴} = ۳ \Rightarrow \lambda = \frac{۱۲}{۵}\ m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

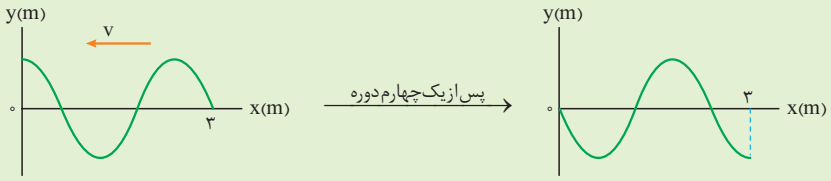
گام دوم: تندی انتشار موج از رابطهٔ $v = \frac{\lambda}{T}$ به دست می‌آید، پس دورهٔ تناوب موج برابر می‌شود با:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{\frac{۱۲}{۵}}{۱۲} = \frac{۱}{۵}s$$

گام سوم: نسبت زمان $t = ۰/۲۵\ s$ به دوره برابر می‌شود با:

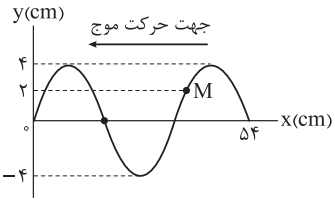
$$\frac{t}{T} = \frac{۰/۲۵}{\frac{۱}{۵}} = ۱/۲۵ = ۱\frac{۱}{۴} \Rightarrow t = T + \frac{T}{۴}$$

عدد بالا به این معنی است که ذرات موج یک دورهٔ کامل و یک‌چهارم از یک دوره را نوسان می‌کنند. پس از یک دورهٔ کامل نقش موج به مانند نقش آن در $t = ۰$ می‌شود. پس کافی است نقش موج را پس از یک‌چهارم دوره رسم کنیم. (به منفی بودنِ علامتِ سرعتِ انتشار توجه کنید.)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۴ شکل زیر، تصویر یک موج عرضی سینوسی را در یک ریسمان کشیده‌شده، در مبدأ زمان نشان می‌دهد. اگر تندی متوسط ذرهٔ **M** در بازهٔ زمانی صفر تا $t = ۰/۰۵\ s$ برابر $۱/۲\ m/s$ باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟ $(\pi = ۳)$



الف) تندی انتشار موج $۲/۴\ m/s$ است.

ب) اندازهٔ سرعت متوسط ذرهٔ **M** در بازهٔ زمانی صفر تا **t**، برابر $۴۰\ cm/s$ است.

پ) تندی بیشینهٔ ذرهٔ **M**، $۲\ m/s$ است.

ت) اندازهٔ شتاب بیشینهٔ ذرهٔ **M**، $۶۴\ m/s^۲$ است.

۱) الف و ب
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) پ و ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) بیشینهٔ تندی هر ذره:

$$v_{max} = A\omega$$

۲) شتاب هر ذره:

$$a = -x\omega^۲$$

ω: بسامد زاویه‌ای برحسب رادیان بر ثانیه (rad/s)

x: مکان برحسب متر (m)

a: شتاب برحسب متر بر مربع ثانیه $(m/s^۲)$

نکته اندازهٔ بیشینهٔ شتاب از رابطهٔ $a = A\omega^۲$ به دست می‌آید.

۳) تندی انتشار موج (v)

نسبت طول موج (λ) به دورهٔ تناوب (T):

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

پاسخ خیلی تشریحی

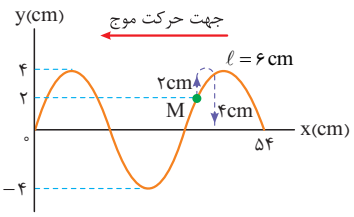
گام اول: با توجه به نقش موج، طول موج برابر می‌شود با:

$$۳\frac{\lambda}{۲} = ۵۴ \Rightarrow \lambda = ۳۶\ cm$$

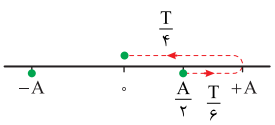
گام دوم: مسافتی که ذرهٔ M در مدت $t = ۰/۰۵\ s$ طی می‌کند را محاسبه می‌کنیم:

$$l = s_{av} \times t = ۱/۲ \times ۰/۰۵ = ۰/۰۶\ m = ۶\ cm$$

حالا از روی جهت انتشار موج، نحوهٔ نوسان ذرهٔ M مطابق شکل زیر می‌شود:



دورهٔ تناوب به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$t = \frac{T}{۴} + \frac{T}{۶} = \frac{۵T}{۱۲} \xrightarrow{t=۰/۰۵\ s} ۰/۰۵ = \frac{۵T}{۱۲} \Rightarrow T = ۰/۱۲\ s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

بسامد زاویه‌ای نیز از روی دوره قابل محاسبه است و داریم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3}{0/12} = 50\ \mathrm{rad/s}$$

حال به بررسی موارد می‌پردازیم:

الف) تندی انتشار موج برابر است با:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{36}{0/12} = 300\ \mathrm{cm/s} = 3\ \mathrm{m/s}$$

مورد «الف» غلط است.

ب) با توجه به نحوهٔ نوسان ذرهٔ M، اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر ۲ cm است، پس اندازهٔ سرعت متوسط برابر می‌شود با:

$$|v_{av}| = \frac{|d|}{t} = \frac{2}{0/05} = 40\ \mathrm{cm/s}$$

مورد «ب» درست است.

پ) تندی بیشینهٔ ذرهٔ M برابر است با:

$$v_{max} = A\omega = 0/04\times 50 = 2\ \mathrm{m/s}$$

مورد «پ» درست است.

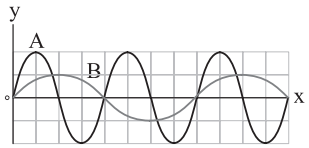
ت) اندازهٔ شتاب بیشینهٔ ذرهٔ M برابر است با:

$$|a_{max}| = A\omega^2 = 0/04\times 50^2 = 100\ \mathrm{m/s^2}$$

مورد «ت» نادرست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵ نمودار جابه‌جایی ـ مکان دو موج مکانیکی سینوسی **A** و **B** که در یک محیط منتشر شده‌اند، به شکل زیر است. آهنگ متوسط انتقال انرژی در موج **A** چند برابر آهنگ متوسط انتقال انرژی در موج **B** است؟



۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint با استفاده از نقش موج، رابطهٔ بین بسامدها و دامنه‌ها رو پیدا کنید، بعد آهنگ انتقال انرژی (توان) رو از روی درس‌باکس حساب کنید.

درس Box

توان متوسط (P)

متوسط آهنگ انتقال انرژی

توجه: توان متوسط انتقال انرژی در یک موج سینوسی برای همهٔ امواج مکانیکی با **مربع دامنه** (A^2) و **نیز مربع بسامد** (f^2) موج متناسب است:

$$P \propto A^2 f^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طول موج B دو برابر طول موج A است و با توجه به ثابت بودنِ تندی انتشار امواج، بسامد موج A نسبت به بسامد موج B برابر می‌شود با:

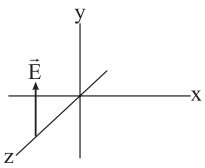
$$\frac{f_A}{f_B} = \frac{\frac{v}{\lambda_A}}{\frac{v}{\lambda_B}} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = ۲$$

گام دوم: دامنهٔ موج A دو برابر دامنهٔ موج B است؛ پس آهنگ انتقال انرژی موج A نسبت به آهنگ انتقال انرژی موج B برابر می‌شود با:

$$\frac{P_A}{P_B} = (\frac{f_A}{f_B})^2 \times (\frac{A_A}{A_B})^2 = ۲^2 \times ۲^2 = ۱۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۶ میدان الکتریکی یک موج رادیویی با طول موج ۶ Mm در نقطه‌ای معین و دور از چشمه، در لحظهٔ t_1 به شکل زیر است. موج، انرژی را در خلاف جهت محور z انتقال می‌دهد. میدان مغناطیسی موج در این نقطه و در لحظهٔ $t_1+\frac{1}{100}s$ در چه جهتی است؟ (موج در خلأ منتشر شده است و $c=3\times10^8\ m/s$.)



۱) در جهت محور x

۲) در خلاف جهت محور x

۳) در جهت محور z

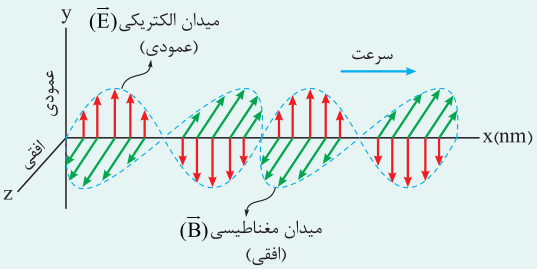
۴) در خلاف جهت محور z

مشاوره در سؤالاتی که وضعیت موج بعد از گذشت زمان Δt مورد بررسی قرار می‌گیرد، غالباً نیاز به محاسبهٔ دوره (T) و مقایسهٔ آن با Δt است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

شکل زیر نحوهٔ تغییر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را نشان می‌دهد.

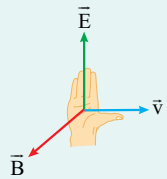


جهت سرعت موج (v) مطابق شکل زیر از **قاعدهٔ دست راست** به دست می‌آید:

۴ انگشت: $\vec{E}$

کف دست: $\vec{B}$

انگشت شست: $\vec{v}$



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: دورهٔ تناوب موج برابر می‌شود با:

$$T=\frac{\lambda}{c}=\frac{6\times10^6}{3\times10^8}=0/02\ s$$

گام دوم: پس از سپری‌شدن $\Delta t=\frac{1}{100}s$ می‌توان گفت این زمان برابر $\frac{T}{2}$ است، یعنی جهت میدان مغناطیسی در $t_1+\frac{1}{100}s$ قرینهٔ جهت میدان مغناطیسی در t_1 است؛ پس با استفاده از قاعدهٔ دست راست، ابتدا جهت میدان مغناطیسی در t_1 را مشخص می‌کنیم:

$$+x \leftarrow (\vec{B})\ \text{کف‌دست} \begin{cases} (+y) \leftarrow (\vec{E})\ \text{۴ انگشت} \\ (-z) \leftarrow (\vec{v})\ \text{شست} \end{cases}$$

با قرینه‌کردن جهت B می‌توان گفت میدان مغناطیسی در لحظهٔ $t_1+\frac{1}{100}s$ در خلاف جهت محور x است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۷ شخصی در فاصلهٔ ۱۰۰متری یک بلندگو با توان ۳۶ W قرار دارد. اگر ۹۰ درصد انرژی صوتی حاصل از بلندگو توسط محیط جذب شده باشد، در هر دقیقه چند نانوژول انرژی به پردهٔ گوش او به مساحت $۸۰\ mm^۲$ می‌رسد؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۴/۸ ۲) ۱۴/۴ ۳) ۴۸ ۴) ۱۴۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا از رابطهٔ $(I = \frac{P}{A})$ شدت صوت حاصل را به دست آورید و سپس از رابطهٔ $(I = \frac{E}{At})$ انرژی موج صوتی که به پردهٔ گوش می‌خواهد برسد را محاسبه کرده که البته باید ۱۰ درصد آن که توسط محیط جذب نمی‌شود را به دست آورد.

درس Box آهنگ متوسط انرژی که توسط صوت به واحد سطح، عمود بر راستای انتشار صوت می‌رسد و یا از آن عبور می‌کند، شدت صوت نام دارد و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$I = \frac{P_{av}}{A}$$

P_{av}: توان متوسط منبع صوت (W)

A: مساحت جانبی کره $(m^۲)$

I: شدت صوت $(W/m^۲)$

با توجه به رابطهٔ توان $(P_{av} = \frac{E}{t})$ رابطهٔ فوق را به صورت زیر نیز می‌توان بازنویسی کرد:

$$I = \frac{E}{A.t}$$

E: انرژی صوت (J)

t: مدت‌زمان (s)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا شدت صوت تولیدی توسط منبع صوت را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow I = \frac{۳۶}{۴\times۳\times(۱۰۰)^۲} \Rightarrow I = \frac{۳۶}{۱۲\times۱۰^۴} \Rightarrow I = ۳\times۱۰^{-۴}\ W/m^۲$$

گام دوم: حال انرژی که در هر دقیقه به پردهٔ گوش می‌رسد را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{E}{At} \Rightarrow E = I.A.t \Rightarrow E = ۳\times۱۰^{-۴}\times۸۰\times۱۰^{-۶}\times۶۰ \Rightarrow E = ۱۴۴\times۱۰^{-۸}\ J = ۱۴۴۰\ nJ$$

با توجه به‌این که ۹۰ درصد انرژی صوتی حاصل از بلندگو توسط محیط جذب می‌شود؛ بنابراین فقط ۱۰ درصد از آن به پردهٔ گوش شخص می‌رسد:

$$E = ۱۴۴۰\times\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow E = ۱۴۴\ nJ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۸ توان یک منبع صوت ۱۲۰ W است. شنونده‌ای صوت حاصل از منبع را با تراز ۹۰ dB دریافت می‌کند. شخص ۸۰ m به منبع نزدیک می‌شود. توان منبع چند وات تغییر کند تا تراز شدت صوت دریافتی شخص ثابت بماند؟ ($\pi = ۳$ ، $I_۰ = ۱۰^{-۱۲}\ W/m^۲$ و از جذب انرژی توسط هوا چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۱۱۶/۲ ۲) ۱۱۵/۲ ۳) ۵/۸ ۴) ۴/۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا از رابطهٔ $(\beta = ۱۰\log\frac{I}{I_۰})$ شدت صوت حاصل را به دست آورید و سپس با کمک رابطهٔ $(I = \frac{P}{۴\pi r^۲})$ فاصله از منبع را به دست آورده و فاصلهٔ جدید را $(r_۲ = r_۱ - ۸۰)$ تعیین کنید. حال شدت صوت اولیه و ثانویه را برابر قرار دهید تا توان جدید به دست آید و تغییرات توان را محاسبه کنید.

درس Box تراز شدت صوت، لگاریتم نسبت شدت یک صوت به شدت صوت مبنا است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\beta = k\log\frac{I}{I_۰}$$

β: تراز شدت صوت
- $k = ۱$ ⇐ یکا: بل (B)
- $k = ۱۰$ ⇐ یکا: دسی‌بل (dB)

I: شدت صوت منبع $W/m^۲$

$I_۰$: شدت صوت مرجع $W/m^۲$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به تراز شدت صوت، شدت صوت و فاصله تا منبع را به دست می‌آوریم:

$$\beta = ۱۰\log\frac{I}{I_۰} \Rightarrow ۹۰ = ۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}} \Rightarrow \log ۱۰^۹ = \log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}} \Rightarrow I = ۱۰^{-۳}\ W/m^۲$$

$$I = \frac{P}{۴\pi r^۲} \Rightarrow ۱۰^{-۳} = \frac{۱۲۰}{۴(۳)r^۲} \Rightarrow r^۲ = \frac{۱۲۰}{۱۲\times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow r^۲ = ۱۰^۴ \Rightarrow r = ۱۰۰\ m$$

گام دوم: اگر ۸۰ متر به منبع نزدیک شویم، فاصله ۲۰ متر خواهد شد.

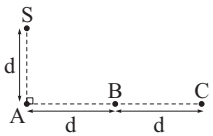
$$I_۱ = I_۲ \Rightarrow \frac{P_۱}{۴\pi r_۱^۲} = \frac{P_۲}{۴\pi r_۲^۲} \Rightarrow \frac{۱۲۰}{۱۰۰^۲} = \frac{P_۲}{۲۰^۲} \Rightarrow P_۲ = \frac{۱۲۰\times ۴۰۰}{۱۰۰۰۰} \Rightarrow P_۲ = ۴/۸\ W$$

$$\Delta P = P_۲ - P_۱ \Rightarrow \Delta P = ۴/۸ - ۱۲۰ = -۱۱۵/۲\ W$$

بنابراین توان منبع باید ۱۱۵/۲ وات کاهش یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹ در شکل زیر، یک چشمهٔ صوتی در نقطهٔ S قرار دارد. اگر تراز شدت صوت در نقطه‌های A و B به ترتیب β و $\frac{۲}{۳}\beta$ باشد، تراز شدت صوت در نقطهٔ C، چند دسی‌بل است؟ ($\log ۲ = ۰/۳$ و از جذب انرژی صوت توسط محیط صرف نظر کنید.)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۹
۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر شدت صوت منبع A برابر I_A و شدت صوت منبع B برابر I_B باشد، اختلاف تراز شدت صوت‌های A و B برحسب دسی‌بل برابر است با:

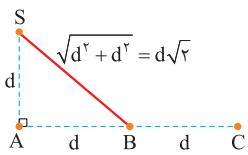
$$\beta_A - \beta_B = ۱۰\log\frac{I_A}{I_B}$$

و با توجه به این‌که $I = \frac{P}{۴\pi r^۲}$:

$$\frac{I_A}{I_B} = (\frac{r_B}{r_A})^۲ \Rightarrow \beta_A - \beta_B = ۱۰\log(\frac{r_B}{r_A})^۲ \Rightarrow \beta_A - \beta_B = ۲۰\log\frac{r_B}{r_A}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

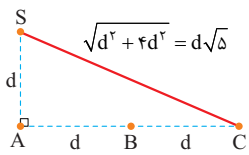
گام اول: ابتدا اختلاف تراز شدت صوت بین A و B را محاسبه می‌کنیم:



$$\beta_A - \beta_B = \beta - \frac{۲}{۳}\beta = \frac{۱}{۳}\beta = ۲۰\log\frac{r_B}{r_A} \Rightarrow \frac{۱}{۳}\beta = ۲۰\log\frac{d\sqrt{۲}}{d} \Rightarrow \frac{۱}{۳}\beta = ۲۰\log ۲^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}\beta = ۱۰\underbrace{\log ۲}_{۰/۳} \Rightarrow \beta = ۹\ dB$$

گام دوم: حال با محاسبهٔ اختلاف تراز شدت صوت‌های A و C می‌توانیم تراز شدت صوت C را به دست آوریم:



$$\beta_A - \beta_C = ۲۰\log\frac{r_C}{r_A} \Rightarrow ۹ - \beta_C = ۲۰\log\frac{d\sqrt{۵}}{d}$$

$$\Rightarrow ۹ - \beta_C = ۲۰\log ۵^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۹ - \beta_C = ۱۰\log ۵ = ۱۰\log\frac{۱۰}{۲}$$

$$= ۱۰(\underbrace{\log ۱۰}_{۱} - \underbrace{\log ۲}_{۰/۳}) = ۱۰ \times ۰/۷ \Rightarrow ۹ - \beta_C = ۷ \Rightarrow \beta_C = ۲\ dB$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰ وال عنبر یکی از جانورانی است که با استفاده از پژواک امواج فراصوتی، مکان‌یابی می‌کند. بسامد امواج فراصوتی‌ای که این وال تولید می‌کند $75\ kHz$ است. به ترتیب از راست به چپ، زمان رفت و برگشت موج گسیل‌شده توسط وال برای جسمی که در فاصلهٔ $90\ m$ از آن قرار گرفته، چند ثانیه است و اندازهٔ این جسم حداقل حدود چند سانتی‌متر باشد تا وال آن را تشخیص دهد؟ (تندی انتشار صوت در آب $1500\ m/s$ است.)

۱) ۲ ،۰/۱۲

۲) ۰/۲ ،۰/۱۲

۳) ۲ ،۰/۰۶

۴) ۰/۲ ،۰/۰۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

رابطهٔ بین تندی انتشار صوت، طول موج و بسامد صوت به صورت زیر است:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

v : تندی انتشار صوت (m/s)

f : بسامد صوت (Hz)

λ : طول موج (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به تندی انتشار صوت، مدت‌زمان رفت و برگشت موج را به دست می‌آوریم:

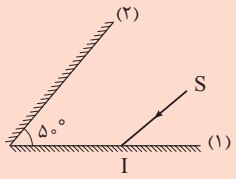
$$v = \frac{2l}{t} \Rightarrow t = \frac{2l}{v} \Rightarrow t = \frac{180}{1500} \Rightarrow t = 0/12\ s$$

برای تشخیص یک جسم توسط وال، اندازهٔ آن باید در حدود طول موج به‌کاررفته یا بزرگ‌تر از آن باشد:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{1500}{75\times10^{3}} \Rightarrow \lambda = 2\times10^{-2}\ m \Rightarrow \lambda = 2\ cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۱ در شکل زیر، پرتو نور SI پس از بازتاب از آینهٔ تخت (۱) به آینهٔ تخت (۲) می‌تابد. اگر پرتو نور، پس از دومین بازتاب از آینهٔ (۱)، موازی آینهٔ (۲) شود، زاویهٔ تابش آن در اولین برخورد به آینهٔ (۱) چند درجه است؟



۱) ۳۰

۲) ۴۰

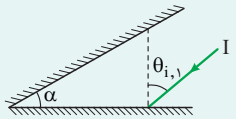
۳) ۵۰

۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

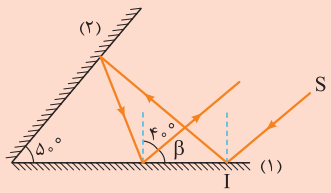
هرگاه مانند شکل زیر پرتوی اولیه در جهت ورود به دو آینه متقاطع باشد و زاویهٔ بین دو آینه را α و زاویهٔ تابش به آینهٔ (۱) را $\theta_{i,1}$ بنامیم، زاویهٔ تابش یا بازتابش در برخورد nام از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:



$$\theta_{i,n} = |(n-1)\alpha - \theta_{i,1}|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا مسیر پرتوها را تا دومین برخورد پرتو به آینهٔ (۱) رسم می‌کنیم:



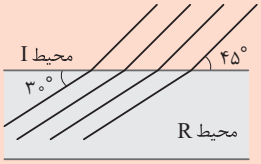
با توجه به این‌که دومین بازتاب از آینهٔ (۱) و آینهٔ (۲) موازی هستند، طبق قضیهٔ خطوط موازی، زاویهٔ β برابر با ۵۰ درجه خواهد بود، پس زاویهٔ بازتاب دوم از آینهٔ (۱)، ۴۰ درجه است.

گام دوم: حال با استفاده از رابطه‌ای که در قسمت درس‌باکس توضیح دادیم، می‌توانیم زاویهٔ تابش اولیه به آینهٔ (۱) را به دست آوریم:

$$\theta_{i,n} = |(n-1)\alpha - \theta_{i,1}| \Rightarrow ۴۰^\circ = (۳-1)۵۰^\circ - \theta_{i,1} \Rightarrow -۶۰^\circ = -\theta_{i,1} \Rightarrow \theta_{i,1} = ۶۰^\circ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۲ جبهه‌های موج تختی در مرز دو محیط **I** و **R** به شکل زیر است. به ترتیب از راست به چپ، طول موج این موج در محیط **R** چند برابر طول موج آن در محیط **I** و بسامد این موج در محیط **R** چند برابر بسامد آن در محیط **I** است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، ۱

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، $\sqrt{۲}$

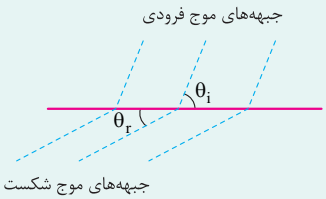
۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ، ۱

۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ، $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

در مدل رسم جبهه‌های موج، زاویه‌ای که جبههٔ موج فرودی با مرز دو محیط می‌سازد، برابر زاویهٔ تابش (θ_i) و زاویه‌ای که جبههٔ موج شکست با مرز محیط می‌سازد، برابر زاویهٔ شکست (θ_r) است.



قانون شکست عمومی:

اگر تندی موج فرودی، $v_۱$ و تندی موج شکسته شده $v_۲$ باشد، همواره:

$$\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}=\frac{v_۱}{v_۲}$$

با توجه به فرمول $\lambda=\frac{v}{f}$ و این‌که در شکست موج بسامد تغییر نمی‌کند، می‌توانیم بگوییم که:

$$\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}=\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ براساس قانون شکست عمومی:

$$\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}=\frac{v_۱}{v_۲}\xrightarrow{\lambda=\frac{v}{f}}\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}=\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}\Rightarrow\frac{\sin ۳۰^\circ}{\sin ۴۵^\circ}=\frac{\lambda_R}{\lambda_I}\Rightarrow\frac{\lambda_R}{\lambda_I}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\Rightarrow\frac{\lambda_R}{\lambda_I}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

و از آن‌جایی که در عبور موج از یک محیط به محیط دیگر بسامد که از ویژگی‌های چشمه است، ثابت می‌ماند و تغییر نمی‌کند:

$$\frac{f_R}{f_I}=۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳ پرتو نور تک‌رنگی از هوا به محیط شفافی به ضریب شکست ۱/۶ می‌تابد. بخشی از پرتو تابیده، بازتاب شده و بخش دیگر آن وارد محیط شفاف می‌شود. اگر زاویهٔ شکست، نصف زاویهٔ تابش باشد، زاویهٔ بین پرتو بازتابش و پرتو شکست چند درجه است؟ ($\sin 37^\circ = 0/6$)

۱) ۶۹ ۲) ۷۴

۳) ۱۰۶ ۴) ۱۱۱

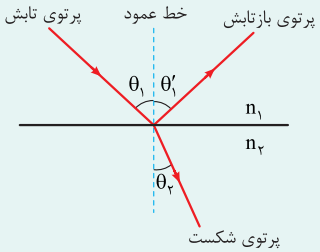
مشاوره در حل تست‌های مربوط به بازتاب و شکست امواج، باید روی مفاهیم اولیهٔ هندسه و مثلثات تسلط داشته باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint مسیر پرتوها را روی یک شکل نشان‌دهید. سپس به کمک رابطهٔ اسنل و روابط هندسه و رابطهٔ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ در مثلثات، مسئله را حل کنید.

درس Box

۱) قانون شکست اسنل برای موج‌های نورانی به صورت زیر به کار می‌رود:



$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

n_1: ضریب شکست محیط اول

n_2: ضریب شکست محیط دوم

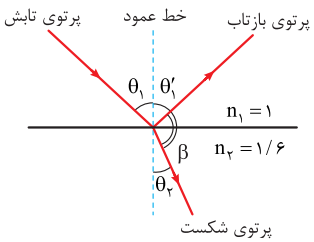
θ_1: زاویهٔ تابش

θ_2: زاویهٔ شکست

۲) قانون بازتاب عمومی: برای هر وضعیت مانع و همهٔ انواع موج، همواره زاویهٔ تابش، برابر با زاویهٔ بازتابش است؛ یعنی:

$$\theta_1 = \theta'_1$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مسیر پرتوهای بازتاب و شکست نور را روی یک شکل نشان می‌دهیم و رابطهٔ اسنل را برای این شکل به کار می‌بریم:



$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \xrightarrow[\theta_2 = \frac{\theta_1}{2}]{n_1=1,\ n_2=1/6} 1\sin\theta_1 = 1/6 \sin\frac{\theta_1}{2}$$

$$\xrightarrow{\sin\theta_1 = 2\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}} 2\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} = 1/6\sin\frac{\theta_1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\theta_1}{2} = 0/8 \Rightarrow \frac{\theta_1}{2} = 37^\circ$$

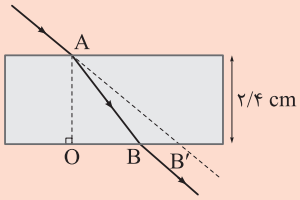
گام دوم: مجموع زاویه‌های بازتابش و شکست و β برابر با 180° است؛ بنابراین داریم:

$$\theta'_1 + \beta + \theta_2 = 180^\circ \xrightarrow[\theta_2 = \frac{\theta_1}{2}]{\theta'_1 = \theta_1} \theta_1 + \beta + \frac{\theta_1}{2} = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - \frac{3\theta_1}{2} \xrightarrow{\frac{\theta_1}{2} = 37^\circ} \beta = 180^\circ - 3(37^\circ)$$

$$\Rightarrow \beta = 180^\circ - 111^\circ = 69^\circ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴ در شکل زیر، پرتو نور تک‌رنگی از هوا وارد تیغهٔ متوازی‌السطوحی شده و در نقطهٔ **B** از آن خارج می‌شود. امتداد پرتو تابش در نقطهٔ **B′** از تیغه خارج شده است. اگر $OB = ۱\ cm$ و $BB' = ۰/۸\ cm$ باشد، ضریب شکست تیغه کدام است؟ ($\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$)



۱) ۱/۵۶

۲) ۱/۸

۳) ۲/۰۸

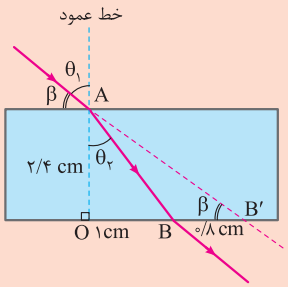
۴) ۲/۲۵

مشاوره این سؤال با یکی از تست‌های کنکور خارج از کشور رشتهٔ ریاضی سال ۱۳۹۹ تشابه مفهومی دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا به کمک روابط هندسی طول پاره‌خط AB را به دست آورید، سپس به کمک آن زاویهٔ شکست پرتو درون تیغه را پیدا کنید. در پایان نیز به کمک رابطهٔ اسنل، ضریب شکست را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** زاویه‌های لازم برای حل سؤال را روی شکل نشان می‌دهیم و با استفاده از روابط هندسی، طول مسیر AB و زاویهٔ β را به دست می‌آوریم:



$$AB = \sqrt{(AO)^۲ + (OB)^۲} = \sqrt{(۲/۴)^۲ + ۱^۲} = ۲/۶\ cm$$

$$\tan\beta = \frac{OA}{OB'} = \frac{۲/۴}{۱/۸} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \beta = ۵۳^\circ$$

گام دوم: دو زاویهٔ $\theta_۱$ و $\sin\theta_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\beta + \theta_۱ = ۹۰^\circ \xrightarrow{\beta = ۵۳^\circ} ۵۳^\circ + \theta_۱ = ۹۰^\circ \Rightarrow \theta_۱ = ۳۷^\circ$$

$$\sin\theta_۲ = \frac{OB}{AB} = \frac{۱}{۲/۶}$$

گام سوم: رابطهٔ اسنل را می‌نویسیم و ضریب شکست $n_۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$n_۱\sin\theta_۱ = n_۲\sin\theta_۲ \Rightarrow ۱\times\sin ۳۷^\circ = n_۲ \times \frac{۱}{۲/۶} \xrightarrow{\sin ۳۷^\circ = ۰/۶} ۰/۶ = \frac{n_۲}{۲/۶} \Rightarrow n_۲ = ۱/۵۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵ چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) در بازتاب موج از یک مانع، برای هر وضعیت مانع و همهٔ انواع موج، زاویهٔ بازتابش برابر با زاویهٔ تابش است.

ب) در سونوگرافی و دستگاه سونار، از امواج الکترومغناطیسی برای مکان‌یابی پژواکی استفاده می‌شود.

پ) با افزایش دمای هوا، چگالی آن کاهش و ضریب شکست آن افزایش می‌یابد.

ت) ضریب شکست یک محیط مادی معین، برای نور قرمزرنگ بیشتر از ضریب شکست آن محیط برای نور آبی‌رنگ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره مفاهیم و تعاریف کتاب درسی را به دقت مطالعه کنید، زیرا از فعالیت‌ها و تصاویر کتاب و حتی قسمت‌های فناوری و کاربرد نیز تست‌هایی می‌تواند مطرح شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های داده‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) درست است. این عبارت، همان قانون عمومی بازتاب را بیان می‌کند.

ب) نادرست است. در سونوگرافی و دستگاه سونار، از امواج مکانیکی برای مکان‌یابی پژواکی استفاده می‌شود.

پ) نادرست است. با افزایش دمای هوا، چگالی آن کاهش می‌یابد که این سبب کاهش ضریب شکست نیز می‌شود.

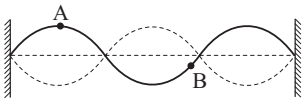
ت) نادرست است. ضریب شکست در یک محیط مادی معین، با طول موج رنگ‌های مختلف نور مرئی، نسبت وارون دارد؛ بنابراین ضریب شکست محیط برای نور قرمز، کم‌تر از نور آبی است:

$$\lambda_{\text{قرمز}} > \lambda_{\text{آبی}} \Rightarrow n_{\text{قرمز}} < n_{\text{آبی}}$$

در نتیجه، فقط یک مورد از عبارت‌های داده‌شده درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶ در یک طناب، موج ایستاده‌ای به شکل زیر تشکیل شده است. کدام کمیت‌های فیزیکی ذرهٔ **A** با همان کمیت فیزیکی متعلق به ذرهٔ **B** برابر است؟



الف) دورهٔ تناوب

ب) دامنهٔ نوسان

پ) تندی ذره هنگام عبور از وضع تعادل

ت) اندازهٔ شتاب ذره هنگام عبور از وضع تعادل

۱) الف و پ ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

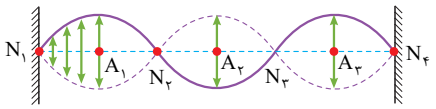
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر یک انتهای طنابی را ثابت نگه داریم و انتهای دیگر آن را به نوسان درآوریم، موج بازتابیده از انتهای ثابت، با موج تابیده، ترکیب شده و موجی برایند ایجاد می‌کنند که موج ایستاده نام دارد. هرگاه به یک سیم یا طناب که بین دو نقطه بسته شده نیز ضربه‌ای بزنیم، به ارتعاش درمی‌آید و در آن موج ایستاده تشکیل می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های داده‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

گام اول: در یک موج ایستاده، تمام نقاط محیط دورهٔ یکسانی دارند، اما با دامنه‌های متفاوتی حول نقطهٔ تعادل خود، نوسان می‌کنند. دامنهٔ ارتعاش نقاط گره (N) برابر صفر و دامنهٔ ارتعاش نقاط شکم (A) بیشینه است. سایر نقاط محیط نیز با دامنه‌های متفاوتی، بین صفر تا بیشینه، نوسان می‌کنند، بنابراین عبارت «الف» درست و عبارت «ب» نادرست است.

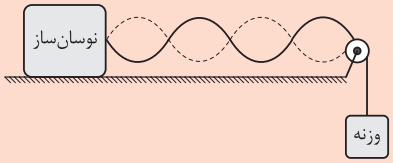


گام دوم: تندی نقاط مختلف از محیط، هنگام عبور از وضع تعادل خود بیشینه است و از رابطهٔ $A\omega$ یا $\frac{A2\pi}{T}$ به دست می‌آید. همهٔ این نقاط دارای دورهٔ یکسانی هستند، اما چون دامنه‌های متفاوتی دارند، تندی آن‌ها هنگام عبور از وضع تعادل، یکسان نیست، یعنی عبارت «پ» نادرست است.

گام سوم: شتاب همهٔ نقاط طناب هنگام عبور از وضع تعادل خود، برابر صفر است، بنابراین عبارت «ت» درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۷ در شکل زیر، نوسان‌ساز، تار را با بسامد معینی به ارتعاش درمی‌آورد و در طول تار ۵ گره به وجود می‌آورد. جرم وزنه چند درصد و چگونه تغییر کند تا در طول تار ۶ گره تشکیل شود؟



۱) ۲۰، کاهش یابد.

۲) ۲۵، افزایش یابد.

۳) ۳۶، کاهش یابد.

۴) ۴۴، افزایش یابد.

مشاوره این تست با یکی از سؤال‌های کنکور سراسری ریاضی سال ۱۳۹۶ تشابه مفهومی دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint با توجه به ثابت‌بودن بسامد نوسان‌ساز، نسبت تغییرات تندی تار در دو حالت و سپس نسبت تغییر نیروی کشش تار یا همان تغییر وزن جسم آویخته به تار را به دست آورید.

درس Box

۱) تندی انتشار موج در یک سیم یا تار که بین دو نقطه کشیده شده است از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

v: تندی انتشار موج (m/s)

F: نیروی کشش تار (N)

μ: چگالی خطی جرم تار (kg/m)

۲) در یک سیم یا تار مرتعش که بین دو نقطه بسته شده و موج ایستاده در آن تشکیل شده است، بسامدهای تشدیدی تار از رابطهٔ زیر به دست می‌آیند:

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

f_n: بسامد هماهنگ nام (Hz)

n: شمارهٔ هماهنگ = تعداد شکم = ۱ − تعدادگره

v: تندی انتشار موج در تار (m/s)

L: طول تار (m)

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به این‌که بسامد نوسان‌ساز در هر دو حالت، یکسان است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$f_n = f_{n'} \Rightarrow \frac{nv}{2L} = \frac{n'v'}{2L} \Rightarrow nv = n'v' \xrightarrow[n'=6-1=5]{n=5-1=4} 4v = 5v'$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow{\mu \text{ ثابت}} \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{F'}{F}} \xrightarrow{v'=\frac{4}{5}v} \frac{4}{5} = \sqrt{\frac{m'g}{mg}} \Rightarrow \frac{16}{25} = \frac{m'}{m}$$

$$m' - m = \frac{16}{25}m - m = -\frac{9}{25}m = -0/36\ m$$

$$\Rightarrow \frac{m'-m}{m} \times 100 = -0/36 \times 100 = -\%36$$

یعنی جرم وزنه باید ۳۶ درصد کاهش یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸ با ورود پرتو نور تک‌رنگی از خلأ به محیط شفافی به ضریب شکست $\frac{۴}{۳}$، طول موج آن ۱۵۵ nm تغییر می‌کند. انرژی هر یک از فوتون‌های مربوط به این نور در محیط شفاف چند الکترون‌ولت است؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm)$

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

نسبت طول موج نور در دو محیط را پیدا کنید، سپس به کمک اختلاف آن‌ها، هر یک از طول موج‌ها در دو محیط را به دست آورید. در مرحلهٔ آخر با استفاده از رابطهٔ $E = \frac{hc}{\lambda}$ انرژی هر فوتون را در خلأ محاسبه کنید. این انرژی در هر دو محیط، یکسان است.

درس Box

۱) وقتی موجی از یک محیط وارد محیط دیگر می‌شود، بسامد آن ثابت می‌ماند، اما تندی و طول موج آن، به یک نسبت تغییر می‌کنند:

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{\text{ثابت } f} \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{v_۲}{v_۱} \xrightarrow{\frac{v_۲}{v_۱} = \frac{n_۱}{n_۲}} \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{n_۱}{n_۲}$$

λ: طول موج (m)

v: تندی انتشار موج (m / s)

f: بسامد (Hz)

n: ضریب شکست

۲) انرژی هر فوتون در خلأ و هوا از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

E: انرژی (eV)

h: ثابت پلانک $= ۴/۱۴ \times ۱۰^{-۱۵}\ eV.s$

c: تندی نور در هوا و خلأ $= ۳ \times ۱۰^{۸}\ m/s$

f: بسامد موج (Hz)

λ: طول موج در خلأ یا هوا (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نسبت طول موج پرتو نور در محیط شفاف $(\lambda_۲)$ به طول موج پرتو نور در خلأ $(\lambda_۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{n_۱}{n_۲} \xrightarrow[n_۲ = \frac{۴}{۳}]{\text{خلأ: } n_۱ = ۱} \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{۱}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

گام دوم: با توجه به معلوم‌بودن اختلاف طول موج در دو محیط، اندازهٔ هر یک از طول موج‌های $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$\lambda_۱ - \lambda_۲ = ۱۵۵ \xrightarrow{\lambda_۲ = \frac{۳}{۴}\lambda_۱} \lambda_۱ - \frac{۳}{۴}\lambda_۱ = ۱۵۵ \Rightarrow \frac{۱}{۴}\lambda_۱ = ۱۵۵ \Rightarrow \lambda_۱ = ۶۲۰\ nm$$

گام سوم: انرژی هر فوتون، در دو محیط، یکسان است، بنابراین کافی است انرژی فوتون در محیط اول (خلأ) را حساب کنیم:

$$E_۱ = \frac{hc}{\lambda_۱} \xrightarrow[\lambda_۱ = ۶۲۰\ nm]{hc = ۱۲۴۰\ eV.nm} E_۱ = \frac{۱۲۴۰}{۶۲۰} = ۲\ eV \xrightarrow{E_۱ = E_۲} E_۲ = ۲\ eV$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹ در یک نیروگاه خورشیدی به سطح یک پنل خورشیدی با ابعاد $۱/۵\ m \times ۲\ m$ در هر دقیقه، ۲×۱۰^{۲۳} فوتون با طول موج متوسط $۵۵۰\ nm$ برخورد می‌کند. شدت تابشی متوسط خورشید در محل این پنل، چند وات بر متر مربع است؟ $(h = ۶/۶\times ۱۰^{-۳۴}\ J.s$ و $c = ۳\times ۱۰^{۸}\ m/s)$

۱) ۲۵۰ ۲) ۳۰۰

۳) ۴۰۰ ۴) ۵۰۰

مشاوره این تست با یکی از پرسش‌های دوره‌ای آخر فصل ۵ کتاب فیزیک (۳) رشتهٔ ریاضی و فصل ۴ فیزیک (۳) رشتهٔ تجربی، تشابه مفهومی دارد. تمرین‌های کتاب را به دقت مطالعه کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا به کمک رابطهٔ $E = \frac{nhc}{\lambda}$، انرژی فوتون‌های داده‌شده را به دست آورید، سپس با معلوم‌بودن زمان و مساحت تابش، توان تابشی و شدت تابشی را حساب کنید.

درس Box شدت تابشی حاصل از یک چشمهٔ موج، با استفاده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$I = \frac{P}{A} \xrightarrow{P=\frac{E}{\Delta t}} I = \frac{E}{A\Delta t}$$

P: توان تابشی (W)

I: شدت تابشی $(W/m^۲)$

E: انرژی تابشی (J)

A: مساحت سطح $(m^۲)$

Δt: بازهٔ زمانی تابش (s)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: با اطلاعات داده‌شده در متن سؤال، انرژی فوتون‌های تابشی را حساب می‌کنیم:

$$E = \frac{nhc}{\lambda} \xrightarrow[\lambda=۵۵۰nm=۵۵۰\times ۱۰^{-۹}m]{n=۲\times ۱۰^{۲۳}} E = \frac{۲\times ۱۰^{۲۳}\times ۶/۶\times ۱۰^{-۳۴}\times ۳\times ۱۰^{۸}}{۵۵۰\times ۱۰^{-۹}} = \frac{۲\times ۶/۶\times ۳\times ۱۰^{-۳}}{۵/۵\times ۱۰^{-۷}} = \frac{۳۶}{۵}\times ۱۰^{۴}\ J$$

گام دوم: با معلوم‌بودن زمان تابش و مساحتی که تابش را دریافت می‌کند، شدت تابشی را پیدا می‌کنیم:

$$I = \frac{E}{A\Delta t} \xrightarrow[A=۱/۵\times ۲=۳m^۲,\ \Delta t=۱\ min=۶۰\ s]{E=\frac{۳۶}{۵}\times ۱۰^{۴}\ J} I = \frac{\frac{۳۶}{۵}\times ۱۰^{۴}}{۳\times ۶۰} = \frac{۳۶}{۹۰۰}\times ۱۰^{۴} = ۴۰۰\ W/m^۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۰ لامپ **A** با توان **۲۰۰ W** نور تک‌رنگی با طول موج **۴۰۰ nm** و لامپ **B** با توان **۱۰۰ W** نور تک‌رنگی با طول موج λ_B تابش می‌کنند. اگر در هر ثانیه، تعداد فوتون‌های تابش‌شده از لامپ **A**، 10^{20} فوتون بیشتر از تعداد فوتون‌های تابش‌شده از لامپ **B** باشد، λ_B چند نانومتر است؟ ($h = 6/6\times10^{-34}\ J.s$ و $c = 3\times10^{8}\ m/s$)

۱) ۲۹۹ ۲) ۵۹۸ ۳) ۶۰۲ ۴) ۷۰۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا برای تعداد فوتون‌ها، رابطه‌ای برحسب سایر کمیت‌های داده‌شده به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{nhc}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{E\lambda}{hc} \xrightarrow{E=P\Delta t} n = \frac{(P\Delta t)\lambda}{hc}$$

گام دوم: رابطهٔ به‌دست‌آمده در گام اول را برای دو لامپ **A** و **B** می‌نویسیم و اختلاف آن‌ها را برابر با 10^{20} قرار می‌دهیم:

$$n_A - n_B = \frac{(P_A\Delta t)\lambda_A}{hc} - \frac{(P_B\Delta t)\lambda_B}{hc} \xrightarrow[P_B=100\,W,\ n_A-n_B=10^{20}]{\Delta t=1\,s,\ P_A=200\,W} 10^{20} = \frac{200\times1\times\lambda_A}{hc} - \frac{100\times1\times\lambda_B}{hc}$$

$$\xrightarrow[h=6/6\times10^{-34}\,J.s,\ c=3\times10^{8}\,m/s]{\lambda_A=400\,nm=400\times10^{-9}\,m} 10^{20} = \frac{200\times400\times10^{-9} - 100\lambda_B}{6/6\times10^{-34}\times3\times10^{8}} \Rightarrow 19/8\times10^{-6} = 8\times10^{-5} - 100\lambda_B$$

$$\Rightarrow 100\lambda_B = 8\times10^{-5} - 1/98\times10^{-5} \Rightarrow 100\lambda_B = 6/02\times10^{-5} \Rightarrow \lambda_B = 6/02\times10^{-7}\ m = 602\times10^{-9}\ m = 602\ nm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۱ در آزمایش فوتوالکتریک، انرژی هر یک از فوتون‌های نور تابیده به سطح فلز، ۲۰ درصد بیشتر از تابع کار فلز است. اگر بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از سطح فلز $0/8\ eV$ باشد، طول موج آستانهٔ فلز به‌کاررفته در آزمایش چند نانومتر است؟ $(hc = 1240\ eV.nm)$

۱) ۱۲۴ ۲) ۳۱۰ ۳) ۳۷۲ ۴) ۶۲۰

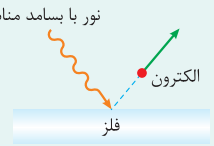
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

در رابطهٔ $K_{max} = hf - W_\circ$، انرژی فوتون را برحسب تابع کار بنویسید و با معلوم‌بودن K_{max}، تابع کار $(W_\circ)$ را به دست آورید، سپس با استفاده از رابطهٔ $W_\circ = \frac{hc}{\lambda_\circ}$، طول موج آستانه $(\lambda_\circ)$ را حساب کنید.

درس Box

۱) وقتی نوری با بسامد مناسب به سطحی از فلز بتابد، الکترون‌هایی از آن گسیل می‌شوند. این پدیدهٔ فیزیکی را اثر فوتوالکتریک و الکترون‌های جداشده از سطح فلز را فوتوالکترون می‌نامند.



۲) معادلهٔ فوتوالکتریک:

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_\circ$$

K_{max}: انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون گسیل‌شده از یک فلز خاص (eV)

h: ثابت پلانک $= 4/14\times10^{-15}\ eV.s$

c: تندی نور در هوا و خلأ $= 3\times10^{8}\ m/s = 3\times10^{17}\ nm/s$

λ: طول موج نور (nm)

$W_\circ$: تابع کار فلز (eV)

۳) کم‌ترین کار لازم، برای خارج‌کردن یک الکترون از سطح فلز معین را تابع کار آن فلز می‌گوییم و به جنس فلز بستگی دارد.

$\lambda_\circ$: طول موج آستانه (nm)

$$W_\circ = \frac{hc}{\lambda_\circ}$$

طول موج آستانه $(\lambda_\circ)$، بیشترین طول موجی است که پدیدهٔ فوتوالکتریک به ازای آن رخ می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از معادلهٔ فوتوالکتریک، تابع کار فلز را به دست می‌آوریم:

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_\circ \xrightarrow{\frac{hc}{\lambda} = W_\circ + 0/2W_\circ = 1/2W_\circ} K_{max} = 1/2W_\circ - W_\circ$$

$$\Rightarrow K_{max} = 0/2W_\circ \xrightarrow{K_{max} = 0/8\ eV} 0/8 = 0/2W_\circ$$

$$\Rightarrow W_\circ = 4\ eV$$

گام دوم: رابطهٔ $W_\circ$ برحسب طول موج آستانه را می‌نویسیم و از آن‌جا مقدار $\lambda_\circ$ را به دست می‌آوریم:

$$W_\circ = \frac{hc}{\lambda_\circ} \Rightarrow \lambda_\circ = \frac{hc}{W_\circ} = \frac{1240}{4} = 310\ nm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۲ تابع کار فلزی $۴eV$ است. نوری با بسامد f به سطح این فلز تابیده می‌شود و فوتوالکترون‌ها با بیشینهٔ تندی v از سطح فلز جدا می‌شوند. اگر بسامد نور تابیده به سطح فلز $۱۰^{۱۵}Hz$ افزایش یابد، بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌ها $۱۰^{۵}\ m/s$ تغییر می‌کند. v برحسب متر بر ثانیه کدام است؟ ($e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C$ ، $h = ۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s$ و جرم الکترون را $۱۰^{-۳۰}kg$ در نظر بگیرید.)

۱) $۶/۳۵\times۱۰^{۶}$
۲) $۶/۳۵\times۱۰^{۵}$
۳) $۱۲/۷\times۱۰^{۵}$
۴) $۱۲/۷\times۱۰^{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint معادلهٔ فوتوالکتریک را در دو حالت بنویسید و این دو معادله را از هم کم کنید. به جای انرژی جنبشی رابطهٔ آن ($K = \frac{۱}{۲}mv^{۲}$) را قرار دهید و مقدار v را حساب کنید.

درس Box انرژی جنبشی یک ذره به جرم m که با تندی v حرکت می‌کند، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲}$$

K: انرژی جنبشی (J)

m: جرم (kg)

v: تندی (m/s)

۲) رابطه تبدیل یکاهای انرژی J و eV به صورت زیر است:

$$۱eV = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** معادلهٔ فوتوالکتریک را در هر دو حالت می‌نویسیم و در این معادله انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را برحسب جرم و تندی آن‌ها قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} K_{max} = \frac{۱}{۲}mv_{max}^{۲} \\ K_{max} = hf - W_{۰} \end{array}\right\} \Rightarrow hf - W_{۰} = \frac{۱}{۲}mv_{max}^{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} hf' - W_{۰} = \frac{۱}{۲}mv_{max}'^{۲} \\ hf - W_{۰} = \frac{۱}{۲}mv_{max}^{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم.}} h(f'-f) = \frac{۱}{۲}m(v_{max}'^{۲} - v_{max}^{۲})$$

$$\xrightarrow[m=۱۰^{-۳۰}kg\ ,\ ۱eV=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J\ ,\ v'_{max}=v']{f'-f=۱۰^{۱۵}Hz\ ,\ h=۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s\ ,\ v_{max}=v} ۴\times\cancel{۱۰^{-۱۵}}\times\cancel{۱۰^{۱۵}}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹} = \frac{۱}{۲}\times۱۰^{-۳۰}(v'-v)(v'+v)$$

$$\xrightarrow{v'-v=۱۰^{۵}m/s} ۱۲/۸\times۱۰^{۱۱} = ۱۰^{۵}(v'+v) \Rightarrow v'+v = ۱۲/۸\times۱۰^{۶}$$

$$\left.\begin{array}{l} v'+v = ۱۲/۸\times۱۰^{۶} \\ v'-v = ۱۰^{۵} = ۰/۱\times۱۰^{۶} \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} ۲v' = ۱۲/۹\times۱۰^{۶} \Rightarrow v' = ۶/۴۵\times۱۰^{۶}\ m/s$$

$$\Rightarrow v = ۱۲/۸\times۱۰^{۶} - ۶/۴۵\times۱۰^{۶} = ۶/۳۵\times۱۰^{۶}\ m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳ بنابر دیدگاه فیزیک کلاسیک در مدل اتمی رادرفورد، با فرض حرکت الکترون به دور هسته، انرژی الکترون و بسامد موج الکترومغناطیسی گسیلی آن، به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کند؟

۱) به طور پیوسته افزایش می‌یابد، به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

۲) به طور پیوسته افزایش می‌یابد، به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

۳) به طور پیوسته کاهش می‌یابد، به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

۴) به طور پیوسته کاهش می‌یابد، به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

بنا بر دیدگاه فیزیک کلاسیک در مدل اتمی رادرفورد، حرکت الکترون به دور هستهٔ اتم، یک حرکت شتابدار است و چون الکترون بار الکتریکی دارد، از خود، موج الکترومغناطیسی تابش می‌کند و از انرژی آن کاسته می‌شود. پس شعاع مدار الکترون به دور هسته کوچک‌تر و بسامد حرکت آن بیشتر می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به متن درس‌باکس، گزینهٔ (۳) درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۴ در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، الکترون در تراز $n = ۲$ قرار دارد. این الکترون چند ریدبرگ انرژی دریافت کند تا شعاع مدار آن ۴ برابر شود؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا شمارهٔ مدار در حالت دوم را به دست آورید، سپس انرژی الکترون در مدار اولیه و ثانویه را حساب کرده و از هم کم کنید.

درس Box

۱) در مدل اتمی بور، مدارها و انرژی‌های الکترون در اتم هیدروژن کوانتیده‌اند، یعنی فقط مدارها و انرژی‌های گسستهٔ معینی می‌توانند مجاز باشند.

۲) شعاع مدارهای الکترون برای اتم هیدروژن:

$$r_n = n^۲ r_۱$$

r_n: شعاع مدار nام

$r_۱$ یا $a_۰$: شعاع کوچکترین مدار در اتم هیدروژن

n: عدد کوانتومی (شمارهٔ مدار)

۳) ترازهای انرژی الکترون در اتم هیدروژن:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^۲}$$

E_n: انرژی الکترون در مدار nام اتم هیدروژن

E_R: انرژی یک ریدبرگ $= ۱۳/۶\ eV$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** شمارهٔ مدار در حالت دوم را به دست می‌آوریم:

$$r_n = n^۲ r_۱ \Rightarrow \frac{r_{n'}}{r_n} = (\frac{n'}{n})^۲ \xrightarrow[n=۲]{r_{n'}=۴r_n} \frac{۴r_n}{r_n} = (\frac{n'}{۲})^۲ \Rightarrow ۲ = \frac{n'}{۲} \Rightarrow n' = ۴$$

یعنی باید الکترون از مدار دوم به مدار چهارم برود.

گام دوم: اختلاف انرژی الکترون در دو مدار $n = ۲$ و $n' = ۴$ را به دست می‌آوریم:

$$E_{n'} - E_n = -\frac{E_R}{n'^۲} - (-\frac{E_R}{n^۲}) = E_R(\frac{۱}{n^۲} - \frac{۱}{n'^۲}) \Rightarrow E_۴ - E_۲ = E_R(\frac{۱}{۲^۲} - \frac{۱}{۴^۲}) \Rightarrow E_۴ - E_۲ = \frac{۳}{۱۶}E_R$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۵ الکترونی در سومین حالت برانگیختهٔ اتم هیدروژن قرار دارد. اگر الکترون از این حالت به حالت پایه جهش کند، طول موج فوتون گسیل‌شده چند نانومتر است؟ ($hc = ۱۲۲۴\ eV.nm$ و $E_R = ۱۳/۶\ eV$)

۱) ۹۶ ۲) ۱۰۱/۲۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint باتوجه‌به‌این‌که‌الکترون‌از‌سومین‌حالت‌برانگیخته $(n = ۴)$ به‌حالت‌پایه $(n' = ۱)$ جهش‌انجام‌داده،‌از‌رابطهٔ $\Delta E = E_R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲})$ انرژی فوتون گسیلی را به دست آورده و سپس به کمک رابطهٔ $E_{\text{فوتون}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{فوتون}}}$، طول موج فوتون گسیلی را محاسبه کنید.

درس Box مقدار انرژی هر فوتون با بسامد نور تابیده‌شده رابطهٔ مستقیم دارد و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$E = hf \xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}} E = \frac{h\ c}{\lambda}$$

ثابت پلانک $(eV.s)$ — تندی نور در خلأ (m/s) — انرژی هر فوتون (eV) — طول موج (m)

طبق فرضیهٔ بور، الکترون فقط روی مدارهای خاصی می‌تواند گردش کند و فقط مقدارهای معینی از انرژی را می‌تواند داشته باشد، انرژی الکترون در مدار nام از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^۲}$$

در رابطهٔ بالا E_R مقدار انرژی در حالت پایه $(n = ۱)$ است که برابر با $۱۳/۶\ eV$ می‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی حالت پایه، یعنی $n = ۱$ و سومین حالت برانگیخته، یعنی $n = ۴$؛ بنابراین:

$$\Delta E(۴ \to ۱) = E_۱ - E_۴ = \frac{-E_R}{۱^۲} - \frac{-E_R}{۴^۲} = -E_R(\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۱۶}) \Rightarrow \Delta E = -۱۳/۶(\frac{۱۵}{۱۶})\ eV$$

از طرفی $E = \frac{hc}{\lambda}$ است؛ پس:

$$۱۳/۶(\frac{۱۵}{۱۶}) = \frac{۱۲۲۴}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{۱۲۲۴ \times ۱۶}{۱۳/۶ \times ۱۵} = ۹۶\ nm$$

گول نخوری اگه سومین حالت برانگیخته را $n = ۳$ در نظر بگیری به گزینهٔ اشتباه (۲) می‌رسی. دقت کنید حالت پایه $n = ۱$ است و حالت‌های برانگیخته از $n = ۲$ شروع می‌شوند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶ در طیف گسیلی اتم هیدروژن، بلندترین طول موج فوتون فرابنفش، چند برابر کوتاه‌ترین طول موج فوتون فروسرخ است؟

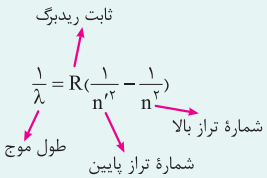
۱) $\frac{۴}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۹۶}{۴۰۵}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۱۰۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint رشته‌ای که طول موج آن در ناحیهٔ فروسرخ و فرابنفش قرار دارد را پیدا کنید و سپس کوتاه‌ترین طول موج و بلندترین طول موج هر رشته را به کمک رابطهٔ ریدبرگ محاسبه کنید.

درس Box

۱) طول موج‌های طیف‌های اتمی هیدروژن را دانشمندی به نام ریدبرگ به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:



در هر رشته کوتاه‌ترین طول موج مربوط به $n=\infty$ و بلندترین طول موج مربوط به $n=n'+۱$ است.

۲) در معادلهٔ ریدبرگ با قراردادن n'های متفاوت به رشته‌های خاصی می‌رسیم که در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

نام طیف	تاریخ کشف	مقدار n'	رابطهٔ ریدبرگ مربوط به رشته	مقدارهای n	ناحیهٔ طیف
لیمان	۱۹۰۶ ـ ۱۹۱۴	۱	$\frac{۱}{\lambda_{min}}=R\left(\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right)$	... و ۴ و ۳ و ۲	فرابنفش
بالمر	۱۸۸۵	۲	$\frac{۱}{\lambda_{min}}=R\left(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right)$	... و ۵ و ۴ و ۳	فرابنفش و مرئی
پاشن	۱۹۰۸	۳	$\frac{۱}{\lambda_{min}}=R\left(\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right)$	... و ۶ و ۵ و ۴	فروسرخ
براکت	۱۹۲۲	۴	$\frac{۱}{\lambda_{min}}=R\left(\frac{۱}{۴^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right)$	... و ۷ و ۶ و ۵	فروسرخ
پفوند	۱۹۲۴	۵	$\frac{۱}{\lambda_{min}}=R\left(\frac{۱}{۵^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right)$	... و ۸ و ۷ و ۶	فروسرخ

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بلندترین طول موج فوتون فرابنفش در گذار اتم از تراز $n=۷$ به تراز $n'=۲$ رخ می‌دهد. طبق رابطهٔ ریدبرگ داریم:

$$\frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}) \Rightarrow \frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۷^۲})=R(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴۹})=R(\frac{۴۹-۴}{۱۹۶}) \Rightarrow \lambda_{max}=\frac{۱۹۶}{۴۵R}$$

گام دوم: کوتاه‌ترین طول موج فوتون فروسرخ در گذار اتم از تراز $n=\infty$ به تراز $n'=۳$ رخ می‌دهد؛ بنابراین:

$$\frac{۱}{\lambda_{min}}=R(\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{\infty})=\frac{R}{۹} \Rightarrow \lambda_{min}=\frac{۹}{R}$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال نسبت $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ است؛ پس:

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}=\frac{\frac{۱۹۶}{۴۵R}}{\frac{۹}{R}}=\frac{۱۹۶}{۴۰۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۷ بسامد سومین خط طیف اتم هیدروژن در کدام رشته ۲۷۵ THz است؟ ($R = ۰/۰۱۱\ nm^{-۱}$ و $c = ۳\times۱۰^{۸}\ m/s$)

۱) بالمر $(n' = ۲)$
۲) پاشن $(n' = ۳)$
۳) براکت $(n' = ۴)$
۴) پفوند $(n' = ۵)$

مشاوره این سؤال مشابه تست‌های کنکورهای تجربی داخل و خارج ۱۴۰۰ و کنکور ریاضی داخل ۹۶ است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint در رابطهٔ معادلهٔ ریدبرگ، داده‌ها را طبق یکای SI جای‌گذاری کنید.

پاسخ خیلی تشریحی سومین خط یعنی الکترون از تراز $n = n' + ۳$ به تراز n' رفته؛ پس:

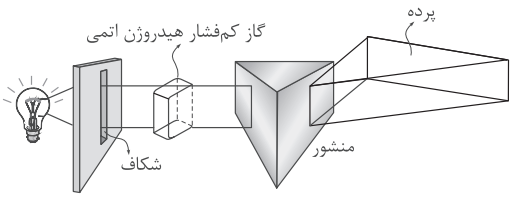
$$\frac{۱}{\lambda} = R\left(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}}\right) \xrightarrow{\lambda = \frac{c}{f}} \frac{f}{c} = R\left(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{(n'+۳)^{۲}}\right) \Rightarrow \frac{۲۷۵\times۱۰^{۱۲}}{۳\times۱۰^{۸}} = ۰/۰۱۱\times \underbrace{۱۰^{۹}}_{\substack{\text{تبدیل} \\ \frac{۱}{m} \text{ به } \frac{۱}{nm}}} \left(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{(n'+۳)^{۲}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{(n'+۳)^{۲}} = \frac{۲۷۵\times۱۰^{۱۲}}{۳\times۱۰^{۸}\times۰/۰۱۱\times۱۰^{۹}} = \frac{۲/۷۵}{۳\times۱۱} = \frac{۱۱}{۳\times۱۱\times۴} \Rightarrow \frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{(n'+۳)^{۲}} = \frac{۱}{۱۲}$$

با جای‌گذاری گزینه‌ها در رابطهٔ بالا می‌بینیم که به ازای $n' = ۳$، به جواب می‌رسیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۸ شکل زیر، وسیلهٔ آزمایشی را به صورت طرح‌وار نشان می‌دهد. کدام موارد زیر دربارهٔ این آزمایش درست است؟



الف) در این آزمایش طیف جذبی گاز هیدروژن تشکیل می‌شود.

ب) در این آزمایش طیف گسیلی گاز هیدروژن تشکیل می‌شود.

پ) در این آزمایش روی پرده یک طیف پیوسته با خط‌های تاریک درون آن، مشاهده می‌شود.

ت) در این آزمایش روی پرده یک نوار تاریک با چند خط رنگی مشاهده می‌شود.

۱) الف و پ
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) ب و ت

مشاوره این سؤال و عبارت‌های آن عیناً از شکل کتاب درسی و زیرنویس آن مطرح شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box در این آزمایش باریکهٔ نور سفید قبل از عبور از منشور، از گاز کم‌فشار هیدروژن اتمی می‌گذرد. با انجام آزمایش، یک طیف پیوسته با خط‌هایی تاریک درون آن مشاهده می‌شود که در آن بعضی از طول موج‌ها از نور سفید جذب شده‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس، در رابطه با این آزمایش موارد «الف» و «پ» درست هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۹ کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

۱) اندازهٔ نیروی ربایشی هسته‌ای بین دو پروتون مجاور، از اندازهٔ نیروی ربایشی هسته‌ای بین دو نوترون مجاور کم‌تر است.

۲) درون هسته، جاذبهٔ حاصل از نیروی گرانشی بین نوکلئون‌ها، با دافعهٔ حاصل از نیروی الکترواستاتیکی بین پروتون‌ها، موازنه می‌شود.

۳) از آن‌جایی‌که ایزوتوپ‌ها، تعداد پروتون متفاوت و تعداد نوترون یکسان دارند، خواص شیمیایی آن‌ها یکسان است.

۴) اختلاف بین ترازهای انرژی نوکلئون‌ها در هسته از اختلاف بین ترازهای انرژی الکترون‌ها در اتم، بیشتر است.

مشاوره حواست به سؤالات حفظی بخش ساختار هسته و ایزوتوپ باشه و فکر نکنی فقط سؤالات مسئله‌ای مطرح می‌شه.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

برسی عبارت‌های نادرست:

گزینهٔ (۱): اندازهٔ نیروی دافعهٔ بین دو پروتون هم‌اندازه با نیروی ربایشی هسته‌ای بین دو نوترون است.

گزینهٔ (۲): از آن‌جا که جرم نوکلئون‌ها خیلی کوچک است، اصلاً نیروی گرانشی بین نوکلئون‌ها به حساب نمی‌آید و نیروی جاذبهٔ بین نوکلئون‌ها ناشی از نیروی هسته‌ای است.

گزینهٔ (۳): در ایزوتوپ‌ها، تعداد پروتون‌ها یکسان و تعداد نوترون‌ها متفاوت است، از این‌رو چون در یک خانهٔ جدول قرار دارند، خواص شیمیایی یکسانی دارند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰ اگر نسبت عدد جرمی به عدد اتمی در ایزوتوپ‌های پایدار سبک برابر k و در ایزوتوپ‌های پایدار سنگین برابر k' باشد، کدام درست است؟

۱) $k \simeq ۱ ، ۲ > k' > ۱$

۲) $k \simeq ۱ ، k' > ۲$

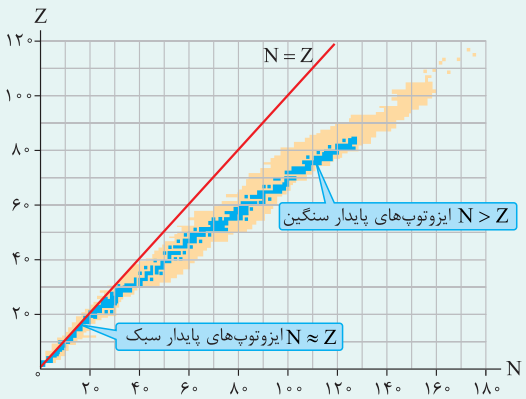
۳) $k \simeq ۲ ، ۲ > k' > ۱$

۴) $k \simeq ۲ ، k' > ۲$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint نمودار عدد اتمی برحسب عدد نوترونی را به یاد آورید و با حرکت از سبک‌ترین اتم‌ها به سمت سنگین‌ترین اتم، نسبت $\frac{N}{Z}$ و سپس $\frac{A}{Z}$ را بررسی کنید.

درس Box طبق نمودار با افزایش عدد اتمی (Z) شیب نمودار کم می‌شود، در واقع نسبت $\frac{N}{Z}$ افزایش می‌یابد.



پاسخ خیلی تشریحی طبق نمودار عدد اتمی برحسب عدد نوترونی می‌دانیم:

۱) برای ایزوتوپ‌های پایدار سبک: $\frac{N}{Z} \simeq ۱$

۲) برای ایزوتوپ‌های پایدار سنگین: $\frac{N}{Z} > ۱$

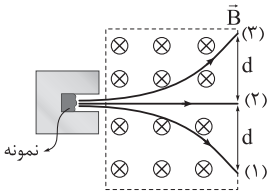
سؤال نسبت عدد جرمی به عدد اتمی $(\frac{A}{Z})$ را خواسته و می‌دانیم $A = Z + N$ است؛ پس با جمع مخرج در صورت داریم:

۱) $\frac{N}{Z} \simeq \frac{۱}{۱} \Rightarrow \frac{N+Z}{Z} \simeq \frac{۱+۱}{۱} \Rightarrow k \simeq ۲$

۲) $\frac{N}{Z} > \frac{۱}{۱} \Rightarrow \frac{N+Z}{Z} > \frac{۱+۱}{۱} \Rightarrow k' > ۲$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱ مسیر حرکت برخی پرتوهای گسیل‌شده از نمونه‌ای شامل دو مادهٔ پرتوزای جدا از هم در میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحهٔ $\vec{B}$ به شکل زیر است. مسیرهای (۱)، (۲) و (۳) به‌ترتیب از راست به چپ، مسیر حرکت کدام‌یک از ذره‌ها می‌توانند باشند؟



۱) الکترون، گاما و آلفا

۲) پوزیترون، گاما و الکترون

۳) الکترون، گاما و پوزیترون

۴) آلفا، گاما و الکترون

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی وارد بر هر پرتو را با جهت انحراف پرتو مقایسه کنید و سپس با توجه به شعاع انحراف، نوع بار را مشخص کنید.

درس Box وقتی یک هستهٔ ناپایدار یا پرتوزا به طور طبیعی (خودبه‌خودی) واپاشی می‌کند، نوع معینی از ذرات آزاد می‌شوند که به این فرایند، پرتوزایی طبیعی می‌گویند. در پرتوزایی سه نوع پرتو آزاد می‌شود که ویژگی‌های آن‌ها را در زیر بیان می‌کنیم.

۱) ذرات آلفا (α): همان هستهٔ هلیم ($_{2}^{4}He^{2+}$) است که از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده است. هسته‌های سنگین با تابش آلفا به هسته‌های سبک‌تری تبدیل می‌شوند. چون این ذرات جرم زیادی دارند، برد کوتاهی دارند و خیلی سریع جذب می‌شوند.

۲) ذرات بتا (β): این واپاشی متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست و دو نوع β^+ (پوزیترون) و β^- (الکترون) است که هر دو جرم یکسانی دارند.

۳) ذرات گاما (γ): اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل فوتون‌های پرانرژی (پرتوی گاما) به حالت پایه می‌رسند. در این واکنش‌ها نه عدد جرمی تغییر می‌کند و نه عدد اتمی.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: ذرهٔ (۲) طبق گزینه‌ها گاما است، اما بیایید بررسی‌اش کنیم؛ چون ذره بدون انحراف و در مسیری مستقیم از میدان مغناطیسی عبور کرده است، پس بدون بار بوده و گاما است.

گام دوم: براساس قاعدهٔ دست راست، اگر ذره در میدان مغناطیسی درون‌سو به سمت بالا منحرف شود، بار مثبت و اگر به سمت پایین منحرف شود، بار منفی دارد؛ در نتیجه ذرهٔ (۳) مثبت و ذرهٔ (۱) بار منفی دارد، پس تا این‌جا گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند. برای بررسی این‌که ذرهٔ (۳) آلفا است یا پوزیترون، از آن‌جایی که میزان انحراف ذرات (۱) و (۳) شبیه هم است، درنتیجه باید جرم یکسانی داشته باشند؛ پس ذرهٔ (۳) باید پوزیترون باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۲ یک هستهٔ مادر پرتوزا با گسیل **a** ذرهٔ α و **b** ذرهٔ β^- به هستهٔ دختر تبدیل شده است. اگر تعداد نوترون‌های هستهٔ مادر ۳ واحد بیشتر از تعداد نوترون‌های هستهٔ دختر باشد، **a** و **b** به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟

۱) ۲، ۱ ۲) ۱، ۲ ۳) ۴، ۲ ۴) ۱، ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint معادلهٔ واکنش را نوشته و از موازنهٔ عدد جرمی و عدد اتمی و با کمک رابطه‌های $A = Z + N$ و $N = N' + ۳$، رابطهٔ بین a و b را پیدا کنید.

درس Box

واپاشی آلفا (α) به صورت زیر است:

$$\underset{\text{(هستهٔ مادر)}}{{}^{A}_{Z}X} \longrightarrow \underset{\text{(هستهٔ دختر)}}{{}^{A-۴}_{Z-۲}Y} + \underset{\text{(پرتوی } \alpha\text{)}}{{}^{۴}_{۲}\alpha}$$

واپاشی بتا (β^-) به صورت زیر است:

$$\underset{\text{(هستهٔ مادر)}}{{}^{A}_{Z}X} \longrightarrow \underset{\text{(هستهٔ دختر)}}{{}^{A}_{Z+۱}Y} + \underset{\text{(پرتوی } \beta^-\text{)}}{{}^{۰}_{-۱}e}$$

عدد جرمی: به مجموع تعداد نوکلئون‌ها (تعداد پروتون‌ها و تعداد نوترون‌ها) عدد جرمی گفته می‌شود:

$A = Z + N$ ← عدد جرمی، تعداد پروتون‌ها، تعداد نوترون‌ها

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ واپاشی را می‌نویسیم (X را هستهٔ مادر و Y را هستهٔ دختر در نظر می‌گیریم.):

$${}^{A}_{Z}X = a\ {}^{۴}_{۲}\alpha + b\ {}^{۰}_{-۱}\beta + {}^{A'}_{Z'}Y$$

گام دوم: از روی موازنهٔ عدد جرمی و عدد اتمی داریم:

$$\begin{cases} A = ۴a + A' & (I) \\ Z = ۲a - b + Z' & (II) \end{cases}$$

گام سوم: می‌دانیم عدد جرمی (A) مجموع تعداد پروتون‌ها (Z) و تعداد نوترون‌ها (N) است و طبق صورت سؤال، تعداد نوترون هستهٔ مادر ۳ واحد بیشتر از تعداد نوترون هستهٔ دختر است؛ پس:

$$\xrightarrow{(I)} Z + N = ۴a + Z' + N' \xrightarrow{N = N' + ۳} Z + N' + ۳ = ۴a + Z' + N'$$

$$\xrightarrow{(II)} ۲a - b + Z' + ۳ = ۴a + Z' \Rightarrow ۲a + b = ۳$$

حال با امتحان گزینه‌ها در رابطهٔ بالا مقدارهای a و b را پیدا می‌کنیم که با جای‌گذاری $a = ۱$ و $b = ۱$ رابطهٔ بالا برقرار است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۳ در لحظهٔ $t = ۰$ نمونه‌ای از یک مادهٔ پرتوزا با نیمه‌عمر $۴\,min$ شروع به واپاشی می‌کند. اگر در ۴ دقیقهٔ سوم، $۴۰\,g$ از این نمونه دچار واپاشی شود، در لحظهٔ $t_۱ = ۲۰\,min$ چند گرم از این نمونه به صورت فعال باقی می‌ماند؟

۱) ۱۰ ۲) ۵

۳) ۲/۵ ۴) ۱/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint با توجه به این‌که اختلاف جرم فعال باقی‌مانده در لحظات $t_۱ = ۸\,min$ و $t_۲ = ۱۲\,min$ برابر با جرم واپاشیده‌شده است، جرم فعال باقی‌مانده را برحسب $N_۰$ در هر لحظه حساب کرده و اختلاف آن‌ها را برابر $۴۰\,g$ قرار دهید تا $N_۰$ به دست آید.

درس Box **نیمه‌عمر**: نیمه‌عمر مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌های مادر در یک نمونه به نصف برسد.

تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$N = \frac{N_۰}{۲^n}$ (N: تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده، $N_۰$: تعداد هسته‌های اولیه)

و

$n = \frac{t}{T_{\frac{۱}{۲}}}$ (n: مدت‌زمان واپاشی، $T_{\frac{۱}{۲}}$: نیمه‌عمر)

با کاهش تعداد هسته‌های فعال، جرم آن‌ها نیز به همان نسبت کاهش می‌یابد، یعنی:

$m = \frac{m_۰}{۲^n}$ (m: جرم هستهٔ فعال باقی‌مانده، $m_۰$: جرم هستهٔ اولیه)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: سؤال، مقدار ماده‌ای که در ۴ دقیقهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۸\,min$ تا $t_۲ = ۱۲\,min$ دچار واپاشی شده است را داده، پس ابتدا جرم فعال باقی‌مانده در هر دو زمان را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} N_۱ = \frac{N_۰}{۲^{\frac{۸}{۴}}} = \frac{N_۰}{۴} \\ N_۲ = \frac{N_۰}{۲^{\frac{۱۲}{۴}}} = \frac{N_۰}{۸} \end{cases}$$

گام دوم: جرم واپاشیده‌شده در ۴ دقیقهٔ سوم برابر با اختلاف جرم فعال باقی‌مانده در این بازهٔ زمانی است، پس:

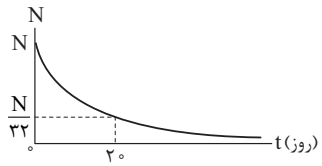
$$N_۱ - N_۲ = \frac{N_۰}{۴} - \frac{N_۰}{۸} \Rightarrow ۴۰ = \frac{۲N_۰ - N_۰}{۸} \Rightarrow N_۰ = ۳۲۰\,g$$

گام سوم: جرم فعال باقی‌مانده در لحظهٔ $t = ۲۰\,min$ برابر است با:

$$N = \frac{N_۰}{۲^{\frac{t}{T_{\frac{۱}{۲}}}}} \Rightarrow N = \frac{۳۲۰}{۲^{\frac{۲۰}{۴}}} \Rightarrow N = \frac{۳۲۰}{۳۲} = ۱۰\,g$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۴ نمودار تعداد هسته‌های فعال یک مادهٔ پرتوزا برحسب زمان به شکل زیر است. پس از گذشت ۱۲ روز چند درصد از جرم نمونه‌ای از این ماده دچار واپاشی می‌شود؟



۱) ۶/۲۵

۲) ۱۲/۵

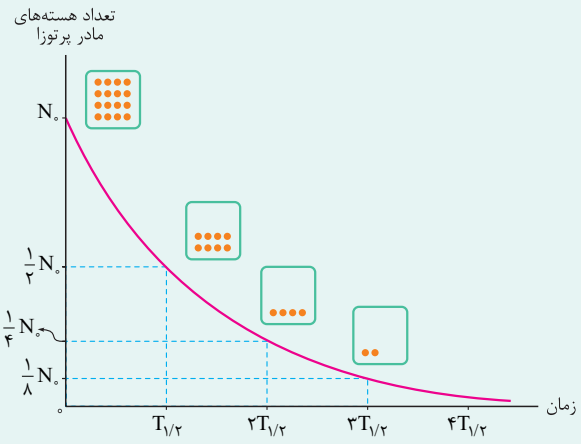
۳) ۹۳/۷۵

۴) ۸۷/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا به کمک نمودار، نیمه عمر را حساب کنید، سپس در معادلهٔ $N=\frac{N_0}{2^n}$ پس از گذشت ۱۲ روز تعداد هسته‌های فعال و سپس تعداد هسته‌های واپاشیده (جرم هسته‌های واپاشیده) را به دست آورید و در نهایت درصد آن را حساب کنید.

درس Box ۱) شکل زیر، نمودار تعداد هسته‌های فعال برحسب زمان را نشان می‌دهد:



۲) درس‌باکس سؤال ۷۳ را مطالعه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: با توجه به نمودار، در مدت ۲۰ روز، تعداد هسته‌های فعال از N به $\frac{N}{32}$ رسیده است، پس:

$$N=\frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{N}{32}=\frac{N}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2^5}=\frac{1}{2^n} \Rightarrow n=5$$

گام دوم: نیمه عمر را محاسبه کنیم:

$$n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 5=\frac{20}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}}=4 \text{ روز}$$

گام سوم: تعداد هسته‌های واپاشیده پس از گذشت ۱۲ روز را باید محاسبه کنیم؛ پس:

$$N=\frac{N_0}{2^{\frac{12}{4}}}=\frac{N_0}{2^3}=\frac{N_0}{8} \Rightarrow N_0-N=\frac{7}{8}N_0$$

از آن‌جایی‌که نسبت تعداد هسته‌های واپاشیده با نسبت جرم هسته‌های واپاشیده برابر است؛ پس:

$$\text{جرم واپاشی‌شده}=m'=\frac{7}{8}m_0$$

گام چهارم: درصد جرم واپاشی‌شده برابر است با:

$$\frac{m'}{m_0}\times 100=\frac{7}{8}\times 100=\%87/5$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۵ در هر واکنش گداخت ${}_{2}^{3}He + n \rightarrow {}_{1}^{2}D + {}_{1}^{2}D$، حدود $3/2MeV$ انرژی آزاد می‌شود. برای تولید $1J$ انرژی، تقریباً چند نانوگرم دوتریم باید وارد این فرایند گداخت شود؟ ($e = 1/6\times10^{-19}C$ ، جرم مولی دوتریم $2g/mol$ و عدد آووگادرو $6/022\times10^{23}$ است.)

۱) $6/5\times10^{-3}$ ۲) $1/3\times10^{-2}$

۳) $1/65\times10^{-2}$ ۴) $3/3\times10^{-2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا حساب می‌کنیم که در هر واکنش چند ژول انرژی آزاد می‌شود:

$$E = 3/2\times10^{6}\times\frac{1/6\times10^{-19}J}{1eV} = 5/12\times10^{-13}J$$

گام دوم: E انرژی آزادشده برای یک واکنش است. باید ببینیم $1J$ انرژی از چند واکنش آزاد می‌شود، پس:

$$\frac{\text{انرژی آزادشده}}{\text{تعداد واکنش}} = \frac{5/12\times10^{-13}}{1} = \frac{1J}{n}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد واکنش‌ها برای تولید } 1J = n = \frac{1}{5/12\times10^{-13}} = \frac{10^{13}}{5/12} \simeq 1/95\times10^{12}$$

گام سوم: در هر واکنش، ۲ هستهٔ دوتریم مصرف می‌شود، پس در $1/95\times10^{12}$ واکنش، تعداد هستهٔ مصرفی دوتریم برابر است با:

$$\text{هستهٔ مصرفی دوتریم در } n \text{ واکنش} = 2\times1/95\times10^{12} = 3/9\times10^{12}$$

گام چهارم: در هر مول دوتریم، $6/022\times10^{23}$ هستهٔ دوتریوم وجود دارد، پس برای $3/9\times10^{12}$ هسته، تعداد مول‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{3/9\times10^{12}}{6/022\times10^{23}} \simeq 0/65\times10^{-11}\ mol$$

گام پنجم: خواستهٔ سؤال جرم دوتریم مصرفی برحسب نانوگرم است؛ پس به کمک جرم مولی داریم:

$$\frac{2g}{1mol} = \frac{m}{0/65\times10^{-11}} \Rightarrow m = 2\times0/65\times10^{-11} = 1/3\times10^{-11}\,g\times\frac{1ng}{10^{-9}\,g} = 1/3\times10^{-2}ng$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶ جدول زیر، درصد جرمی مواد سازندهٔ نوعی خاک رس را نشان می‌دهد. اگر درصد جرمی سیلیس، پس از پخت سفالینهٔ تهیه‌شده از این نمونه خاک رس، ۱۰ درصد افزایش یابد، درصد جرمی سدیم موجود در این خاک رس چند درصد خواهد شد؟ $(Na = ۲۳, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

ماده	$SiO_۲$	$Al_۲O_۳$	$H_۲O$	$Fe_۲O_۳$	$Na_۲O$	ناخالصی‌های دیگر
درصد جرمی	۴۰	۵	۲۵	۲۳/۱	۶/۲	۰/۷

۱) ۵/۷۵
۲) ۸/۶۲۵
۳) ۱۱/۵
۴) ۱۷/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا با توجه به تغییر جرم سیلیس، مقدار آب بخارشده را به دست می‌آوریم، سپس مقدار سدیم موجود در خاک را محاسبه می‌کنیم و در نهایت، درصد جرمی سدیم را در سفالینهٔ پخته‌شده، به دست می‌آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** جرم خاک رس اولیه را ۱۰۰ گرم فرض می‌کنیم، بنابراین در این نمونه ۴۰ گرم سیلیس $(SiO_۲)$ وجود داشته است، با توجه به این‌که پس از پختن سفالینهٔ تهیه‌شده از این نمونه خاک، فقط آب تبخیر می‌شود و جرم $SiO_۲$ ثابت است، خواهیم داشت:

$$\text{درصد جرمی } SiO_۲ = \frac{\text{جرم } SiO_۲}{\text{جرم سفالینه}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۴۰ + ۱۰ = ۵۰ = \frac{۴۰}{۱۰۰ - x} \times ۱۰۰ \Rightarrow x = ۲۰g$$

بنابراین پس از پختن سفالینه، ۲۰ گرم آب تبخیر شده و جرم آن به ۸۰ گرم می‌رسد.

یه‌جور دیگه کافی است جرم سفالینه را پس از تبخیر آب، حساب کنیم:

$$۵۰ = \frac{۴۰}{\text{جرم سفالینه}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{جرم سفالینه} = ۸۰g$$

بنابراین ۲۰ گرم آب آن، تبخیر شده است.

گام دوم: در خاک رس اولیه، ۶/۲ گرم $Na_۲O$ وجود داشته است. با توجه به این مطلب، مقدار سدیم را در آن حساب می‌کنیم:

$$۶/۲g\ Na_۲O \times \frac{۱mol\ Na_۲O}{۶۲g\ Na_۲O} \times \frac{۲mol\ Na^+}{۱mol\ Na_۲O} \times \frac{۲۳g\ Na^+}{۱mol\ Na^+} = ۴/۶g\ Na^+$$

گام سوم: در نهایت، درصد جرمی سدیم را در سفالینهٔ پخته‌شده به دست می‌آوریم:

$$\text{درصد جرمی } Na^+ = \frac{\text{جرم } Na^+}{\text{جرم سفالینه}} \times ۱۰۰ = \frac{۴/۶}{۸۰} \times ۱۰۰ = ٪۵/۷۵$$

تیزبازی با توجه به درصد جرمی $SiO_۲$ در سفالینهٔ پخته‌شده، درصد جرمی $Na_۲O$ را محاسبه می‌کنیم:

$$۶/۲ \times \frac{۵۰}{۴۰} = ٪۷/۷۵$$

از روی درصد جرمی $Na_۲O$، درصد جرمی سدیم را در سفالینهٔ پخته‌شده، به دست می‌آوریم:

$$۷/۷۵g\ Na_۲O \times \frac{۴۶g\ Na^+}{۶۲g\ Na_۲O} = ٪۵/۷۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۷ چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- اگر شمار اتم‌های کربن در یک نمونهٔ الماس و گرافیت با یکدیگر برابر باشد، حجم نمونهٔ گرافیتی بیشتر از الماس خواهد بود.
- در ساختار یخ خشک، هر اتم اکسیژن به دو اتم هیدروژن با پیوند اشتراکی و به دو اتم هیدروژنی متصل است. ← $CO_2(s)$
- کوارتز از جمله نمونه‌های خالص سیلیس به شمار می‌رود و در ساختار آن، هر اتم عنصر شبه‌فلزی به دو اتم عنصر نافلزی متصل است. ← $SiO_2(s)$
- در مولکول‌های خطی سه‌اتمی، هستهٔ اتم‌ها بر روی یک خط راست قرار دارد و این مولکول‌ها در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند. ← ناقطبی

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

ویژگی‌های دو دگرشکل مختلف کربن در جدول زیر آورده شده است:

ویژگی / ماده	گرافیت	الماس
نوع جامد	کووالانسی	کووالانسی
چینش اتم‌ها	دوبعدی	سه‌بعدی
پیوندها	هر اتم کربن با ۳ اتم کربن دیگر پیوند اشتراکی برقرار می‌کند.	هر اتم کربن با ۴ اتم کربن دیگر پیوند اشتراکی برقرار می‌کند.
رسانایی الکتریکی	دارد	ندارد
سختی	کم‌تر	بیشتر
چگالی ($g.cm^{-3}$)	۲/۲۷	۳/۵۱
پایداری	بیشتر	کم‌تر
اندازهٔ آنتالپی سوختن	کم‌تر	بیشتر
کاربرد	مغز مداد و الکترود	ساخت مته‌ها، ابزار برش شیشه و جواهرسازی

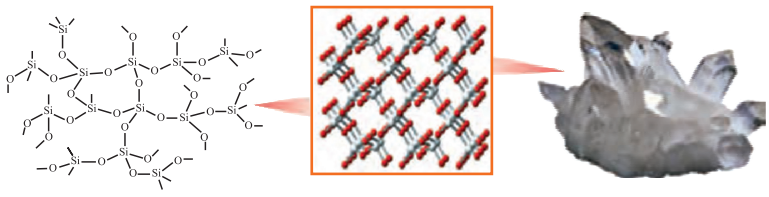
پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های دوم، سوم و چهارم نادرست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

- برابری تعداد اتم‌ها در دو نمونه، نشان‌دهندهٔ جرم برابر آن‌ها است. از آن‌جایی که چگالی گرافیت از الماس کم‌تر است و طبق رابطهٔ $\text{چگالی} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}}$، حجم گرافیت از الماس بیشتر خواهد بود.
- مولکول‌های H_2O در ساختار یخ، نه یخ خشک $(CO_2(s))$! در یک آرایش منظم و سه‌بعدی با تشکیل حلقه‌های شش گوشه، شبکه‌ای همانند کندوی زنبور عسل با استحکام ویژه پدید می‌آورند. در این ساختار، هر اتم اکسیژن به دو اتم هیدروژن با پیوند اشتراکی و به دو اتم هیدروژن از **مولکول‌های دیگر** با پیوندهای هیدروژنی متصل است.

گول نخوری ✘ *خواست باشه!* به مولکول‌های کربن دی‌اکسید (CO_2) در حالت جامد، یخ خشک $(CO_2(s))$ گفته می‌شود و نه مولکول‌های آب (H_2O)!

- کوارتز از جمله نمونه‌های خالص و ماسه از جمله نمونه‌های ناخالص سیلیس (SiO_2) است. در ساختار سیلیس، هر اتم شبه‌فلز سیلیسیم (Si)، به چهار اتم نافلز اکسیژن (O) با پیوند اشتراکی متصل است.



$SiO_2(s)$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

- در همهٔ مولکول‌های خطی سه‌اتمی، هستهٔ اتم‌ها بر روی یک خط راست قرار دارند، اما فقط بعضی از آن‌ها ناقطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.

نکته بعضی مولکول‌های خطی سه‌اتمی مثل کربن دی‌اکسید (CO_2)، ناقطبی و برخی از آن‌ها مانند هیدروژن سیانید (HCN) و کربونیل سولفید (SCO)، قطبی هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۸ کدام مورد درست است؟

۱) اگر در یک مادهٔ مولکولی، اتم کربن با چهار پیوند کووالانسی به چهار اتم متصل باشد، مولکول حاصل در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

۲) در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول‌های خمیدهٔ اکسیژن دی‌فلوئورید و آب، اتم یکسانی به رنگ سرخ نمایش داده می‌شود.

OF_2

۳) آنتالپی پیوندهای موجود در الماس، از آنتالپی پیوندهای موجود در مادهٔ مورد استفاده در تهیهٔ سنباده، کم‌تر است.

SiC

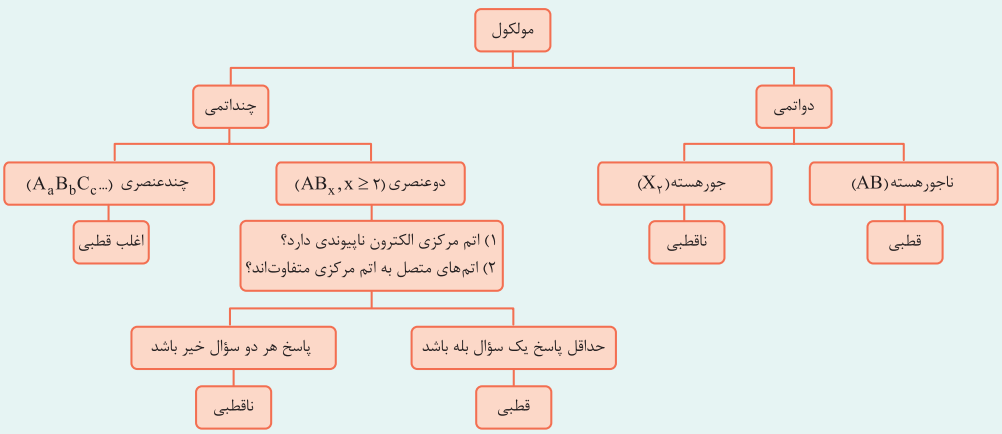
۴) تفاوت شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم نخستین و دومین عنصر فراوان در پوستهٔ جامد زمین، برابر با ۲ است.

اکسیژن (O) — سیلیسیم (Si)

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مولکول‌های قطبی و ناقطبی را به وسیلهٔ نمودار زیر می‌توان تعیین کرد:



پاسخ خیلی تشریحی بررسی همهٔ گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر در یک مولکول، اتم‌های متصل به اتم کربن یکسان باشند، مثل متان (CH_4)، آن مولکول ناقطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند، اما اگر اتم‌های متصل به اتم کربن متفاوت باشند، مثل کلروفرم $(CHCl_3)$، آن مولکول قطبی است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

گزینهٔ (۲): مولکول‌های اکسیژن دی‌فلوئورید (OF_2) و آب (H_2O)، هر دو خمیده هستند. در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول OF_2، اتم F و در مولکول H_2O، اتم O، به رنگ سرخ است.

نکته در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول‌ها، هر اتمی که خاصیت نافلزی بیشتری داشته باشد، دارای بار جزئی منفی بوده و به رنگ سرخ نمایش داده می‌شود و اتم‌های دیگر، بار جزئی مثبت دارند و با رنگ آبی نمایش داده می‌شوند.

مقایسهٔ خاصیت نافلزی اتم‌ها: $F > O > N > Cl > Br > S > C > H >$ اتم‌های دیگر

گزینهٔ (۳): سیلیسیم کربید (SiC)، یک جامد کووالانسی و سایندهٔ ارزان است که در تهیهٔ سنباده به کار می‌رود. آنتالپی پیوندهای $C-C$ در الماس، از آنتالپی پیوندهای $Si-C$ در سیلسیم کربید، بیشتر است.

نکته هر چه میانگین شعاع اتمی دو اتم تشکیل‌دهندهٔ یک پیوند کووالانسی بیشتر باشد، طول آن پیوند بیشتر بوده و آنتالپی آن کم‌تر است.

گزینهٔ (۴): سیلیسیم پس از اکسیژن فراوان‌ترین عنصر در پوستهٔ جامد زمین است، به طوری که ترکیب‌های گوناگون این دو عنصر بیش از ۹۰ درصد پوستهٔ جامد زمین را تشکیل می‌دهند؛ از این رو سیلیس (SiO_2)، فراوان‌ترین اکسید در پوستهٔ جامد زمین به شمار می‌رود.

آرایش الکترونی فشردهٔ این دو عنصر، به صورت زیر است:

$$\left.\begin{matrix} {}_8O : [He]2s^2 2p^4 \\ {}_{14}Si : [Ne]3s^2 3p^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{تفاوت شمار الکترون‌های ظرفیت} = (2+4)-(2+2) = 2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۹ کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

الف) شکل زیر می‌تواند مربوط به مدل فضاپرکن نیتروژن تری‌فلوئورید باشد و علامت بار جزئی اتم مرکزی در آن با مولکول آمونیاک، متفاوت است.



ب) توزیع الکترون‌ها در ساختار دی‌متیل اتر، برخلاف پروپان، نامتقارن و غیریکنواخت است و هر دو ماده در دما و فشار اتاق، مایع هستند.

پ) حضور جفت‌الکترون‌های ناپیوندی روی اتم‌های اطراف در مولکول‌های چندتایی، توزیع یکنواخت بارهای الکتریکی را به هم می‌زند.

ت) در مولکول گوگرد تری‌اکسید همانند مولکول نیتروژن دی‌اکسید، اتم مرکزی دارای بار جزئی مثبت است.

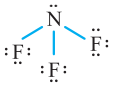
۱) الف ـ ب
۲) الف ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های (الف) و (ت) درست‌اند.

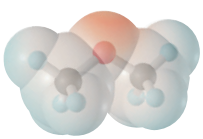
بررسی همهٔ عبارت‌ها:

الف) در مولکول نیتروژن تری فلوئورید (NF_3)، به دلیل حضور یک جفت‌الکترون ناپیوندی بر روی اتم مرکزی، اتم‌های کناری به سمت پایین *هل* داده می‌شوند و مدل فضاپرکن آن به صورت داده‌شده خواهد بود.



هواستون باشه که در مولکول NF_3، خاصیت نافلزی اتم‌های F از اتم N، بیشتر است، از این رو اتم مرکزی (N) بار جزئی مثبت می‌گیرد، در حالی که در مولکول NH_3، اتم مرکزی (N) دارای بار جزئی منفی است.

ب) دی متیل اتر برخلاف پروپان، مولکولی قطبی می‌باشد و توزیع الکترون‌ها در ساختار آن، نامتقارن و غیریکنواخت است. این دو ماده در دما و فشار اتاق، به صورت مولکول‌های گازی‌شکل‌اند.



دی‌متیل اتر



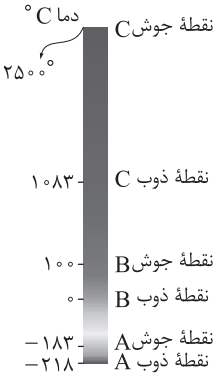
پروپان

پ) یکی از عواملی که می‌تواند تقارن و توزیع یکنواخت بارهای الکتریکی را در مولکول‌های چندتایی به هم بزند، وجود جفت‌الکترون‌های ناپیوندی روی **اتم مرکزی** است.

ت) در مولکول گوگرد تری‌اکسید (SO_3)، اتم‌های کناری (اکسیژن) نسبت به اتم مرکزی (گوگرد)، خاصیت نافلزی بیشتری دارند، از این رو اتم گوگرد بار جزئی مثبت و اتم‌های اکسیژن بار جزئی منفی می‌گیرند. در مولکول نیتروژن دی‌اکسید (NO_2) نیز، اتم‌های کناری (اکسیژن) از اتم مرکزی (نیتروژن)، خاصیت نافلزی بیشتری دارند و از این رو اتم نیتروژن دارای بار جزئی مثبت و اتم‌های اکسیژن دارای بار جزئی منفی هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰ با توجه به نمودار زیر که نقطه‌های ذوب و جوش چند ماده و گسترهٔ دمایی مایع‌بودن آن‌ها را در فشار یک اتمسفر نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟



۱) در دما و فشار اتاق، مواد A، B و C به ترتیب گاز، مایع و جامد هستند.

۲) برای توجیه برخی از رفتارهای فیزیکی مادهٔ C، می‌توان از مدل دریای الکترونی استفاده کرد.

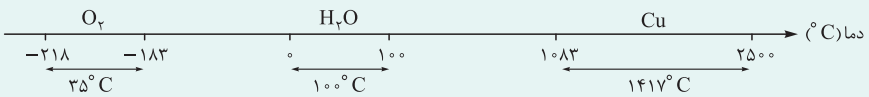
۳) مادهٔ B برخلاف گاز نیتروژن، دارای نیروی بین مولکولی هیدروژنی است؛ بنابراین گسترهٔ دمایی مایع‌بودن آن از گاز نیتروژن بیشتر است.

۴) گسترهٔ دمایی مایع‌بودن شاره‌ای که در فناوری تولید برق از پرتوهای خورشیدی باعث تولید بخار داغ می‌شود، نسبت به مادهٔ C، بیشتر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

در حاشیهٔ صفحهٔ ۷۸ کتاب درسی، نقطهٔ ذوب و جوش اکسیژن (O_2)، آب (H_2O) و مس (Cu) و گسترهٔ دمایی مایع‌بودن آن‌ها نیز آورده شده است.



با توجه به این شکل، *معلومه که* فلزها نیز مانند ترکیب‌های یونی، نقطهٔ ذوب و جوش بالایی دارند و در گسترهٔ دمایی وسیعی به حالت مایع باقی می‌مانند. در مورد این ۶تا ماده‌ای که کتاب درسی آورده، *بهتره* مقایسه‌های زیر را *بلَد باشین!*

نقطهٔ ذوب: $Cu > NaCl > H_2O > HF > N_2 > O_2$

نقطهٔ جوش: $Cu > NaCl > H_2O > HF > O_2 > N_2$

تفاوت نقطهٔ ذوب و جوش (گسترهٔ دمایی مایع‌بودن): $Cu > NaCl > HF > H_2O > O_2 > N_2$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مطابق با درس‌باکس، گسترهٔ دمای مایع‌بودن مادهٔ C یا *همون* مس، از NaCl که در فناوری تولید برق باعث تولید بخار آب می‌شود، بیشتر است.

نکته

اگر در سؤالی علاوه بر یک دمای معین، نقطهٔ ذوب و جوش هم داده باشند، حالت فیزیکی به صورت زیر تعیین می‌شود:

۱) دمای داده‌شده از نقطهٔ ذوب کم‌تر باشد، ماده در حالت جامد است.

۲) دمای داده‌شده بین نقطهٔ ذوب و جوش باشد، ماده در حالت مایع است.

۳) دمای داده‌شده از نقطهٔ جوش بیشتر باشد، ماده در حالت گاز است.

مثال: در صورتی که دمای ذوب و جوش یک ماده به ترتیب $-۱۲۰^\circ C$ و $-۱۰۰^\circ C$ باشد، در دماهای زیر، حالت فیزیکی را به دست آورید:

$-۱۳۰^\circ C$ ← کم‌تر از دمای ذوب است؛ پس جامد است.

$-۱۱۰^\circ C$ ← کم‌تر از دمای جوش است یا بیشتر از دمای ذوب است؛ پس مایع است.

$-۹۰^\circ C$ ← بیشتر از دمای جوش است؛ پس گاز است.

گزینهٔ (۱): در دما ($۲۵^\circ C$) و فشار اتاق ($۱ atm$)، مواد A (O_2)، B (H_2O) و C (Cu) به ترتیب به حالت‌های گاز، مایع و جامد هستند.

گزینهٔ (۲): مادهٔ C (مس)، یک فلز است و برای توجیه برخی از خواص فیزیکی آن، می‌توان از مدل دریای الکترونی استفاده کرد.

گزینهٔ (۳): مادهٔ B، آب است که برخلاف N_2، دارای پیوند هیدروژنی بوده و در نتیجه نیروی بین مولکولی آن قوی‌تر و در گسترهٔ دمای بیشتری به حالت مایع است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۱ چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ یون‌های سولفات، فسفات و سیلیکات، درست است؟

- اتم مرکزی در همهٔ این یون‌ها، نافلزهایی از دورهٔ سوم هستند.
- در آن‌ها، اتم مرکزی نمی‌تواند کاهنده باشد.
- در هر سه یون، به یقین ۳۲ الکترون ظرفیتی وجود دارد.
- در هر واحد فرمولی ترکیب حاصل از آن‌ها با یون آمونیوم، شمار پیوندهای اشتراکی یکسان است.

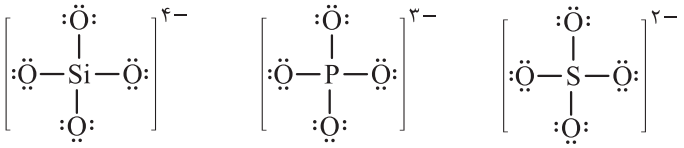
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد دوم و سوم درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

مورد اول: Si، یک شبه‌فلز است.

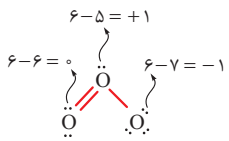


مورد دوم:

درس Box

تعیین عدد اکسایش، بدون رسم ساختار لوویس (روش میانبر)

برای تعیین سریع‌تر عدد اکسایش می‌توان از قواعد زیر استفاده کرد.

ردیف	قاعده	مثال	توضیحات
۱	عدد اکسایش عنصرها در حالت آزاد برابر صفر است.	عدد اکسایش سدیم در Na و عدد اکسایش اتم‌های هیدروژن در H_2 برابر با صفر است.	در اوزون، مجموع عدد اکسایش اتم‌ها برابر با صفر است در حالی که عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن با هم متفاوت است. 
۲	عدد اکسایش اتم‌ها در یون‌های تک‌اتمی، برابر با بار یون است.	عدد اکسایش آهن در یون Fe^{2+} برابر با $+2$ و عدد اکسایش کلر در یون Cl^- برابر با -1 است.	
۳	عدد اکسایش فلزهای قلیایی (گروه ۱)، فلزهای قلیایی خاکی (گروه ۲) و فلزهای گروه ۱۳، در ترکیب‌های مختلف به ترتیب برابر با $+1, +2, +3$ است.	عدد اکسایش Na در $NaCl$ برابر $+1$ و عدد اکسایش Ca در $CaCO_3$ برابر با $+2$ و عدد اکسایش Al در Na_3AlF_6 برابر با $+3$ است.	به طور کلی عدد اکسایش فلزها در ترکیب‌های یونی، برابر با بار یون آن‌ها است. به طور مثال عدد اکسایش آهن در $Fe_2(SO_4)_3$ برابر با $+3$ است.
۴	عدد اکسایش فلوئور (F) در ترکیب با بقیه عنصرها، همیشه برابر -1 است.	عدد اکسایش F در CaF_2، HOF و Na_3AlF_6 و ... برابر -1 است.	عدد اکسایش فلوئور در حالت آزاد (F_2)، برابر صفر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ردیف	قاعده	مثال	توضیحات
۵	عدد اکسایش هیدروژن در ترکیب با نافلزها و ترکیب‌های آلی، ۱+ و در ترکیب با فلزها، ۱− است.	عدد اکسایش هیدروژن در HCl، CH_4 و H_2O، ۱+ و در NaH و CaH_2، ۱− است.	
۶	عدد اکسایش اکسیژن در بیشتر ترکیبات، برابر ۲− است.	عدد اکسایش اکسیژن در H_2O، Na_2O، H_2SO_4 و NO_3^-، برابر ۲− است.	برخی از مواردی که عدد اکسایش اکسیژن برابر با ۲− نیست: عدد اکسایش O و HOF، برابر صفر است. عدد اکسایش O در OF_2، برابر ۲+ و در O_2F_4 برابر ۱+ است. عدد اکسایش اکسیژن در H_2O_2، برابر با ۱− است.
۷	جمع جبری اعداد اکسایش اتم‌ها در یک ترکیب خنثی برابر با صفر و در یک یون چندتایی برابر با بار یون است.	$H_2SO_4 : 2H + S + 4O = 0$ $PO_4^{3-} : P + 4O = -3$	با توجه به این قاعده و تشکیل معادله، می‌توان عدد اکسایش عنصری که روش تعیین عدد اکسایش آن در قواعد گفته‌شده موجود نبود را مشخص کرد. $H_2SO_4 : 2(+1)+S+4(-2)=0 \Rightarrow S=+6$ $PO_4^{3-} : P+4(-2)=-3 \Rightarrow P=+5$

تمرین: در کدام موارد زیر، عدد اکسایش اتم مشخص‌شده به درستی بیان شده است؟

الف) $\underline{Na}ClO_4 : +7$

ب) $\underline{N}O_3^- : +6$

پ) $K_2\underline{Cr}_2O_7 : +5$

ت) $NaH_2\underline{P}O_3 : +3$

۱) الف ـ ب

۲) ب ـ ت

۳) الف ـ ت

۴) ب ـ پ

پاسخ: گزینهٔ (۳)

الف) $NaClO_4 : +1 + Cl + 4(-2) = 0 \Rightarrow Cl = +7$

ب) $NO_3^- : N + 3(-2) = -1 \Rightarrow N = +5$

پ) $K_2Cr_2O_7 : 2(+1) + 2Cr + 7(-2) = 0 \Rightarrow Cr = +6$

ت) $NaH_2PO_3 : +1 + 2(+1) + P + 3(-2) = 0 \Rightarrow P = +3$

عدد اکسایش یک اتم می‌تواند در ترکیب‌های مختلف، متفاوت باشد، اغلب نافلزها و هم‌چنین فلزهای واسطه، عددهای اکسایش مختلفی را در ترکیب‌های گوناگون خود دارند.

بهتر است دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش برخی عنصرها را *بلد باشیم*.

شمارهٔ گروه	۱	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
پایین‌ترین عدد اکسایش	۰	۰	۰	−۴	−۳	−۲	−۱
بالاترین عدد اکسایش	+۱	+۲	+۳	+۴	+۵	+۶	+۷

به طور کلی در همهٔ فلزها، پایین‌ترین عدد اکسایش برابر با صفر است (در حالت آزاد)؛ برای عنصرهای گروه ۱۴ تا ۱۷ (به‌جز اکسیژن و فلوئور)، پایین‌ترین و بالاترین عدد اکسایش از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

پایین‌ترین عدد اکسایش = شمارهٔ گروه − ۱۸

بالاترین عدد اکسایش = شمارهٔ گروه − ۱۰ = یکان شمارهٔ گروه

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

در مورد دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش، استثناهایی هم به چشم می‌خورد:

الف) دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش اکسیژن از -2 تا $+2$ است.

ب) عدد اکسایش فلوئور تنها می‌تواند اعداد صفر (در F_2) و -1 (در بقیهٔ گونه‌ها) باشد.

در ضمن عدد اکسایش هیدروژن می‌تواند صفر، -1 و $+1$ باشد.

گفتیم برخی فلزهای واسطه هم عددهای اکسایش متنوعی دارند. بالاترین عدد اکسایش وانادیم ($_{23}V$)، کروم ($_{24}Cr$)، منگنز ($_{25}Mn$)، آهن ($_{26}Fe$) و مس ($_{29}Cu$) به ترتیب برابر با $+5, +6, +7, +3, +2$ است.

فلز واسطه	وانادیم ($_{23}V$)	کروم ($_{24}Cr$)	منگنز ($_{25}Mn$)	آهن ($_{26}Fe$)	مس ($_{29}Cu$)
بالاترین عدد اکسایش	$+5$	$+6$	$+7$	$+3$	$+2$

در نام ترکیب‌های دارای فلزهای واسطه، عدد رومی نشان‌دهندهٔ عدد اکسایش آن فلز است. البته به شرطی مجاز به استفاده از اعداد رومی در نام‌گذاری هستیم که آن فلز واسطه، عددهای اکسایش متفاوتی داشته باشد.

MnO : منگنز (II) اکسید $\qquad$ MnO_2 : منگنز (IV) اکسید

حالا یه سؤال، اگه گفتین کدام عنصرها در ترکیب‌های مختلف فقط یک نوع عدد اکسایش دارند؟

آفرین! درسته! فلزهای قلیایی و قلیایی خاکی، آلومینیم، فلوئور، اسکاندیم، روی و نقره.

عنصر	فلزهای قلیایی (گروه ۱)	فلزهای قلیایی خاکی (گروه ۲)	آلومینیم ($_{13}Al$)	فلوئور ($_{9}F$)	اسکاندیم ($_{21}Sc$)	روی ($_{30}Zn$)	نقره ($_{47}Ag$)
تنها عدد اکسایش در ترکیب‌ها	$+1$	$+2$	$+3$	-1	$+3$	$+2$	$+1$

وقتی عنصری در یک گونه در بالاترین عدد اکسایش خود است، دیگر نمی‌تواند اکسید شود، یعنی همیشه کاهش می‌یابد و فقط اکسنده است.

تمرین: کدام آنیون، فقط می‌تواند نقش یک عامل اکسنده را در واکنش‌ها داشته باشد (نقش کاهندگی ندارد)؟

۱) BrO_2^- $\qquad$ ۲) NO_2^- $\qquad$ ۳) ClO_4^- $\qquad$ ۴) IO^-

پاسخ: گزینه (۳)، در این‌گونه سؤال‌ها منظور این است که ما عدد اکسایش اتم مرکزی و یا عدد اکسایش عنصری را که تنوع عدد اکسایش بیشتری دارد بررسی کنیم، این‌جا یعنی در Cl, N, Br و I.

عنصر	Br	N	Cl	I
پایین‌ترین عدد اکسایش	-1	-3	-1	-1
بالاترین عدد اکسایش	$+7$	$+5$	$+7$	$+7$

۱) BrO_2^- : $Br + 2(-2) = -1 \Rightarrow Br = +3 \Rightarrow$ هم اکسنده و هم کاهنده

۲) NO_2^- : $N + 2(-2) = -1 \Rightarrow N = +3 \Rightarrow$ هم اکسنده و هم کاهنده

۳) ClO_4^- : $Cl + 4(-2) = -1 \Rightarrow Cl = +7 \Rightarrow$ ✓ فقط اکسنده

۴) IO^- : $I + (-2) = -1 \Rightarrow I = +1 \Rightarrow$ هم اکسنده و هم کاهنده

مطابق با درس‌باکس، عدد اکسایش اتم‌های مرکزی را به دست می‌آوریم:

$SO_4^{2-} \rightarrow S + 4(-2) = -2 \Rightarrow S = +6$

$PO_4^{3-} \rightarrow P + 4(-2) = -3 \Rightarrow P = +5$

$SiO_4^{4-} \rightarrow Si + 4(-2) = -4 \Rightarrow Si = +4$

حالا چون عدد اکسایش همهٔ عناصر گفته‌شده در حداکثر حالت خود هستند؛ پس فقط می‌توانند اکسنده باشند.

مورد سوم:

نکته الکترون‌های ظرفیتی عناصر گروه‌های ۱۳ تا ۱۸، برابر با یکان شمارهٔ گروه آن‌ها بوده (به‌جز هلیم) و هم‌چنین اگر یک یون چندتایی دارای بار منفی باشد، مجموع عدد اکسایش با بار آن یون چندتایی جمع می‌شود و اگر یک یون چندتایی مثبت باشد، به میزان بار مثبت از تعداد الکترون لایهٔ ظرفیت کم می‌کنیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عناصر گوگرد، اکسیژن، فسفر و سیلسیم به ترتیب در گروه‌های ۱۶، ۱۶، ۱۵ و ۱۴ قرار دارند، در نتیجه تعداد الکترون لایهٔ ظرفیت آن‌ها به ترتیب برابر ۶، ۶، ۵ و ۴ می‌باشد؛ در نتیجه تعداد الکترون لایهٔ ظرفیت یون‌های زیر برابر می‌شود با:

$$SO_4^{2-} = \overset{\text{گوگرد}}{\uparrow} 6 + \overbrace{(4\times 6)}^{\text{اکسیژن}} + \overbrace{2}^{\text{بار}} = 32$$

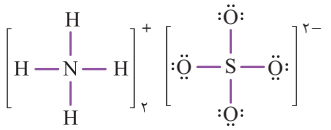
$$PO_4^{3-} = \overset{\text{فسفر}}{\uparrow} 5 + \overbrace{(4\times 6)}^{\text{اکسیژن}} + \overbrace{3}^{\text{بار}} = 32$$

$$SiO_4^{4-} = \overset{\text{سیلیسیم}}{\uparrow} 4 + \overbrace{(4\times 6)}^{\text{اکسیژن}} + \overbrace{4}^{\text{بار}} = 32$$

در نتیجه جمع الکترون‌های ظرفیتی هر سه یون برابر هستند.

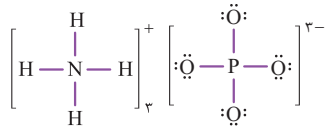
مورد چهارم: با توجه به ترکیب‌های یونی حاصل و ساختار لوویس آن‌ها، بیشترین تعداد پیوند اشتراکی برای آمونیوم سیلیکات است:

$$NH_4^+SO_4^{2-} \Rightarrow (NH_4)_2SO_4 \xrightarrow{\text{ساختار لوویس}}$$



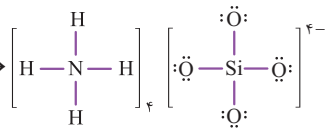
$$\Rightarrow \underbrace{2}_{\substack{\text{تعداد پیوند}\\ \text{در } NH_4^+}} \times \underbrace{4}_{\substack{\text{تعداد پیوند}\\ \text{در } SO_4^{2-}}} + \square = 12 \text{ پیوند}$$

$$NH_4^+PO_4^{3-} \Rightarrow (NH_4)_3PO_4 \xrightarrow{\text{ساختار لوویس}}$$



$$\Rightarrow \underbrace{3}_{\substack{\text{تعداد پیوند}\\ \text{در } NH_4^+}} \times \underbrace{4}_{\substack{\text{تعداد پیوند}\\ \text{در } PO_4^{3-}}} + \square = 16 \text{ پیوند}$$

$$NH_4^+SiO_4^{4-} \Rightarrow (NH_4)_4SiO_4 \xrightarrow{\text{ساختار لوویس}}$$



$$\Rightarrow \underbrace{4}_{\substack{\text{تعداد پیوند}\\ \text{در } NH_4^+}} \times \underbrace{4}_{\substack{\text{تعداد پیوند}\\ \text{در } SiO_4^{4-}}} + \square = 20 \text{ پیوند}$$

یه‌جور دیگه *قبول داری* آنیون‌های مورد نظر، ۴ پیوند دارند و کاتیون آمونیوم هم، ۴ پیوند دارد؛ پس ترکیب یونی که تعداد کاتیون بیشتری داشته باشد، تعداد پیوند بیشتری دارد و در نتیجه $(NH_4)_4SiO_4$ بیشترین تعداد پیوند را دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲ کدام موارد زیر، در مورد پرتوهای خورشیدی و استفاده از این پرتوها برای تولید برق به کمک شاره‌ها، درست است؟

الف) شارهٔ بسیار داغ، قبل از تبادل گرمایی با شارهٔ مولکولی، وارد منبع ذخیرهٔ انرژی الکتریکی می‌شود.

H_2O

ب) دمای شاره‌ای که گسترهٔ دمایی مایع کم‌تری دارد، در سردکننده تا نقطهٔ ذوب پایین می‌آید.

پ) در این فرآیند، تغییر شیمیایی وجود ندارد و به کمک خورشید که بزرگ‌ترین منبع انرژی برای زمین است، حتی در روزهای ابری و شب‌هنگام نیز، برق تولید می‌شود.

ت) شارهٔ یونی برخلاف شارهٔ مولکولی، در این فرآیند همواره به حالت مایع است.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ پ

۳) پ ـ ت ۴) ب ـ ت

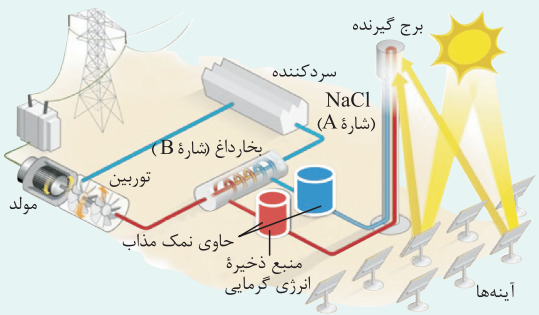
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

هنرنمایی شاره (سیال) های مولکولی و یونی برای تولید برق

یکی از روش‌های تولید انرژی الکتریکی، استفاده از پرتوهای خورشیدی است. همان‌طور که می‌دانید انرژی خورشید از جمله منابع انرژی تجدیدپذیر است و استفاده از این انرژی پاک، باعث کاهش گرمای جهانی و ردپای زیست‌محیطی می‌شود. در روش تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی، شاره (سیال) های مولکولی و یونی نقش مهمی را ایفا می‌کنند که *جلوتر بهش می‌رسیم!*

شکل زیر نمایی از این فناوری پیشرفته را نشان می‌دهد:



مراحل تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی به کمک این فناوری

۱) آینه‌ها پرتوهای خورشیدی را روی برج گیرنده متمرکز می‌کنند.

۲) شاره (سیال) داخل لوله که در این‌جا سدیم کلرید مذاب است، انرژی خورشیدی را دریافت کرده و دمای آن افزایش می‌یابد.

۳) سدیم کلرید مذاب و بسیار داغ به منبع ذخیرهٔ انرژی گرمایی سرازیر می‌شود و انرژی گرمایی خود را به آب درون یک مخزن می‌دهد و آن را به بخار تبدیل می‌کند. سدیم کلرید مذاب سردشده به مخزن دیگری می‌رود و از آن‌جا دوباره از برج گیرنده عبور می‌کند تا داغ شود.

۴) بخار داغ تولیدشده، توربین را برای تولید انرژی الکتریکی به حرکت درمی‌آورد.

۵) بخار داغ پس از به حرکت درآوردن مولد الکتریکی، به سردکننده منتقل می‌شود تا دوباره در چرخهٔ تولید بخار قرار گیرد.

مقایسهٔ گسترهٔ دمایی مایع‌بودن مواد مولکولی و یونی

شاره‌ای که در فناوری تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی به عنوان منبع ذخیرهٔ انرژی گرمایی استفاده می‌شود، باید هم ظرفیت گرمایی بالایی داشته باشد و هم در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع باشد تا بتواند انرژی گرمایی خورشید را برای مدت طولانی‌تری نگه دارد تا حتی در روزهای ابری و شب هم، انرژی لازم برای تبدیل آب به بخار داغ را فراهم کند. به طور کلی، **هر چه تفاوت بین نقطهٔ ذوب و جوش یک مادهٔ خالص بیشتر باشد، آن ماده در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع بوده و نیروهای جاذبهٔ میان ذره‌های سازندهٔ مایع قوی‌تر است.** به همین دلیل در این‌جا از سدیم کلرید مذاب که یک شارهٔ یونی است، استفاده می‌شود.

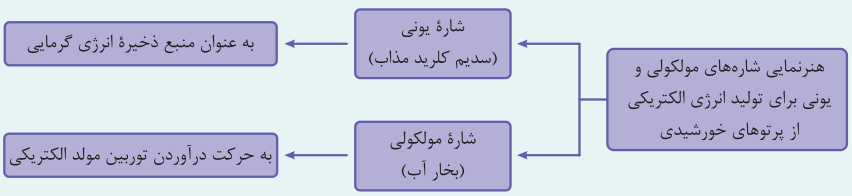
مواد مولکولی، نقطهٔ ذوب و جوش پایین‌تری نسبت به مواد یونی دارند و گسترهٔ دمایی که در آن، این مواد به حالت مایع هستند، خیلی کم‌تر از گسترهٔ دمایی مایع‌بودن مواد یونی است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ماده	نوع ماده	نقطهٔ ذوب ($^\circ C$)	نقطهٔ جوش ($^\circ C$)	اختلاف نقطهٔ ذوب و جوش (گسترهٔ دمایی مایع‌بودن)
N_2	مولکولی	-210	-196	$-196-(-210)=14^\circ C$
HF	مولکولی	-83	19	$19-(-83)=102^\circ C$
NaCl	یونی	801	1413	$1413-801=612^\circ C$

داده‌های تجربی نشان می‌دهند که گسترهٔ دمایی سدیم کلرید مذاب در فناوری تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی، در حدود $850-1350^\circ C$ است.

جمع‌بندی:



پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی همهٔ موارد:

الف) شارهٔ بسیار داغ، وارد منبع ذخیرهٔ انرژی گرمایی می‌شود، نه الکتریکی!

ب) شاره‌ای که در گسترهٔ دمایی کم‌تری به حالت مایع است، آب می‌باشد و دمای آن را در سردکننده، تا نقطهٔ جوش پایین می‌آورند.

تیزبازی وقتی مورد «الف» و «ب» نادرست هستند، حتماً گزینهٔ (۳) جواب می‌شود.

پ) در این فرایند، فقط فرایندهای فیزیکی «ذوب، تبخیر و میعان» را داریم، بقیهٔ موارد هم در درس‌باکس آمده است.

ت) شارهٔ یونی فقط به حالت مذاب است، اما شارهٔ مولکولی، هم به صورت گاز و هم به صورت مایع است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۳ اگر شمار الکترون‌های خارج‌شده از دریای الکترونی ($N.e^-$)، با شمار الکترون‌های مبادله‌شده هنگام تشکیل ترکیب یونی منیزیم فلوئورید برابر باشد، برای فروپاشی این مقدار از منیزیم فلوئورید، به تقریب چند کیلوژول گرما لازم است؟ ($\Delta H_{\text{فروپاشی}}(MgF_2(s)) = 3000\ kJ.mol^{-1}$، جرم هر الکترون $0/0005\ amu$ و هر amu را معادل $1/66\times10^{-24}$ گرم در نظر بگیرید.)

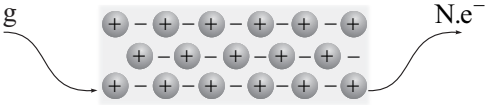
۱) ۶۰۰kJ

۲) ۳۰۰kJ

۳) ۱۵۰ kJ

۴) ۷۵kJ

جرم الکترون واردشده $= 10^{-4}\ g$



پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اوّل حساب کن 10^{-4} گرم الکترون، چند الکترون است، بعد محاسبه کن این مقدار الکترون در اثر تشکیل چند مول منیزیم فلوئورید مبادله می‌شود و در آخر حساب کن اگر این مقدار منیزیم فلوئورید متلاشی شود، چند کیلو ژول گرما مصرف می‌شود.

نکته همان تعداد الکترونی که وارد دریای الکترونی فلز می‌شود، از دریای الکترونی نیز خارج می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی در ابتدا حساب می‌کنیم 10^{-4} گرم الکترون واردشده، شامل چه تعداد الکترون است.

$$\text{تعداد الکترون مبادله‌شده} = 10^{-4}\,ge^- \times \frac{1\,amu}{1/66\times10^{-24}\,ge^-} \times \frac{1e^-}{5\times10^{-4}\,amu} \simeq 1/2\times10^{23}\ \text{الکترون}$$

سپس حساب می‌کنیم اگر این تعداد الکترون مبادله شود، چند مول منیزیم فلوئورید تولید می‌شود.

نکته تعداد الکترون مبادله‌شده هنگام تولید یک ترکیب یونی، از فرمول زیر به دست می‌آید:

| بار × تعداد آنیون | یا | بار × تعداد کاتیون |

$$\text{تعداد الکترون مبادله‌شده هنگام تشکیل ۱ مول } MgF_2 = \text{بار} \times \text{تعداد کاتیون} \Rightarrow 1\times2 = 2$$

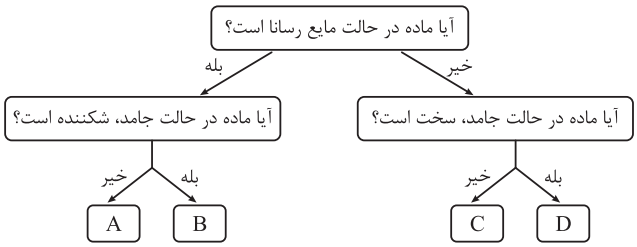
$$\text{مقدار مول } MgF_2 \text{ تولیدشده هنگام مبادلهٔ } 1/2\times10^{23} \text{ الکترون} = 1/2\times10^{23}\,e^- \times \frac{1\,mol\,MgF_2}{2\times\underbrace{6/02}_{\simeq6}\times10^{23}\,e^-} \simeq 0/1\,mol\,MgF_2$$

و در آخر مقدار انرژی لازم برای فروپاشی $0/1$ مول منیزیم فلوئورید را حساب می‌کنیم:

$$0/1\ mol\ \text{منیزیم فلوئورید} \text{ گرمای لازم برای فروپاشی} = 0/1\,mol\,MgF_2 \times \frac{3000\,kJ}{1\,mol\,MgF_2} = 300\,kJ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۴ با توجه به نمودار زیر، کدام مطلب درست است؟



۱) هیچ عنصری در دستهٔ A یا B، قرار نمی‌گیرد.

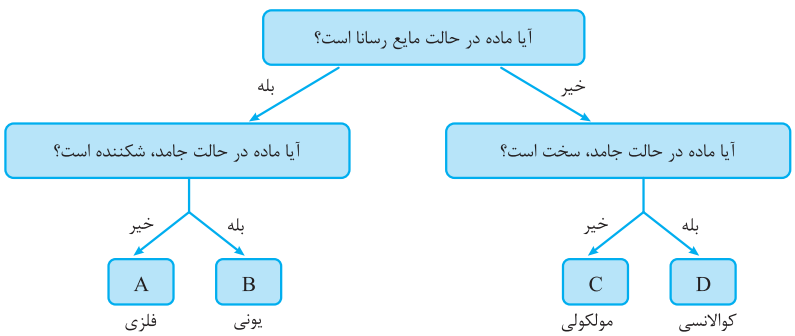
۲) در مواد D همانند مواد C، آنتالپی پیوند، می‌تواند تعیین‌کنندهٔ آنتالپی تبخیر و نقطهٔ جوش باشد.

۳) در مواد A و B، یون‌های مثبت و منفی وجود دارد که چگالی بار آن‌ها، تعیین‌کنندهٔ نقطهٔ ذوب این مواد است.

۴) در میان عناصر واکنش‌پذیر دورهٔ سوم جدول تناوبی در دما و فشار اتاق، به ترتیب یک و دو عنصر در دسته‌های D و C قرار می‌گیرد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ نمودار کامل‌شده در سؤال به صورت زیر است:



در نتیجه در دورهٔ سوم، دو عنصر گوگرد و فسفر، جزء جامدهای مولکولی، عنصر سیلیسیم جزء جامدهای کووالانسی و ۳ عنصر سدیم، منیزیم و آلومینیم، جزء جامدهای فلزی هستند. *هواستون باشه* که کلر و آرگون هر دو جزء جامدهای مولکولی‌اند، اما در دما و فشار اتاق به صورت گاز هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): مواد موجود در دستهٔ A، فلز هستند؛ توجه کنید که برخی عنصرها، فلزی می‌باشند.

گزینهٔ (۲): در مواد مولکولی یا C، نیروی بین‌مولکولی می‌تواند تعیین‌کنندهٔ آنتالپی تبخیر و نقطهٔ جوش باشد.

گزینهٔ (۳): مادهٔ A یا فلزها، آنیون ندارند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۵ اگر به محلول آمونیوم وانادات (NH_4VO_3)، مقدار زیادی فلز قلع به همراه مقدار کافی از هیدروکلریک اسید بیفزاییم، در نهایت محلول حاصل چه رنگی خواهد شد؟ (محلول دارای کاتیون‌های قلع، بی‌رنگ و شفاف است.)

$VO_3^-(aq) + 4H^+(aq) + e^- \rightarrow VO^{2+}(aq) + 2H_2O(l)$ $\quad E^\circ = 1/00\ V$

$VO^{2+}(aq) + 2H^+(aq) + e^- \rightarrow V^{3+}(aq) + H_2O(l)$ $\quad E^\circ = 0/34\ V$

$V^{3+}(aq) + e^- \rightarrow V^{2+}(aq)$ $\quad E^\circ = -0/26\ V$

$Sn^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Sn(s)$ $\quad E^\circ = -0/13\ V$

۱) زرد ۲) سبز

۳) آبی ۴) بنفش

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

وانادیم

محلول ترکیب‌های برخی فلزهای واسطه از جمله وانادیم $(_{23}V)$ به رنگ‌های گوناگون دیده می‌شوند. وانادیم دارای عدد اکسایش صفر، در حالت آزاد و عنصری و دارای عددهای اکسایش ۲(II)، ۳(III)، ۴(IV) و ۵(V)، در حالت ترکیب با دیگر عنصرها است. رنگ **نمک‌های مختلف وانادیم** در این عددهای اکسایش، *این‌چوریاست*:

محلول	رنگ
نمک وانادیم (V)	زرد
نمک وانادیم (IV)	آبی
نمک وانادیم (III)	سبز
نمک وانادیم (II)	بنفش

تمرین: محلول نمک‌های وانادیم (II)، (III)، (V) و (IV)، به ترتیب از راست به چپ دارای کدام رنگ‌اند؟ *(تجربی ۱۴۰۱ـ کنکور مجدد)*

۱) بنفش، سبز، آبی، زرد ۲) زرد، آبی، سبز، بنفش

۳) بنفش، سبز، زرد، آبی ۴) زرد، آبی، بنفش، سبز

پاسخ: گزینهٔ (۳) *یه نگاهی به جدول قبل بیندازین!*

شکل زیر، پیشرفت واکنش فلز روی با محلول نمکی از وانادیم (V) را نشان می‌دهد.



محلولی از نمک وانادیم (II) | محلولی از نمک وانادیم (III) | محلولی از نمک وانادیم (IV) | محلولی از نمک وانادیم (V)

همان‌طور که می‌بینید با گذشت زمان، عدد اکسایش وانادیم در هر مرحله، ۱ واحد کاهش می‌یابد، بنابراین نمک وانادیم در هر مرحله، نقش اکسنده را دارد. معادلهٔ این واکنش‌ها را به *صورت ساده و مفید!* می‌توان به صورت زیر نشان داد:

مرحلهٔ اول:
- نیم‌واکنش اکسایش: $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$
- نیم‌واکنش کاهش: $2V^{5+} + 2e^- \rightarrow 2V^{4+}$

$\Rightarrow$ واکنش کلی: $Zn + 2V^{5+}_{\text{زرد}} \rightarrow Zn^{2+} + 2V^{4+}_{\text{آبی}}$

مرحلهٔ دوم:
- نیم‌واکنش اکسایش: $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$
- نیم‌واکنش کاهش: $2V^{4+} + 2e^- \rightarrow 2V^{3+}$

$\Rightarrow$ واکنش کلی: $Zn + 2V^{4+}_{\text{آبی}} \rightarrow Zn^{2+} + 2V^{3+}_{\text{سبز}}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مرحلهٔ سوم $\begin{cases} \text{نیم‌واکنش اکسایش: } Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^- \\ \text{نیم‌واکنش کاهش: } 2V^{3+} + 2e^- \rightarrow 2V^{2+} \end{cases} \Rightarrow$ واکنش کلی: $\underset{\text{سبز}}{Zn + 2V^{3+}} \rightarrow \underset{\text{بنفش}}{Zn^{2+} + 2V^{2+}}$

وانادیم در گروه ۵ جدول دوره‌ای قرار دارد و بالاترین عدد اکسایش آن، $+5$ است؛ پس وانادیم (V) فقط می‌تواند کاهش یابد و نقش اکسنده را ایفا کند.

فلز روی در این واکنش‌ها نقش کاهنده را دارد و می‌تواند وانادیم (V) را تا وانادیم (II) کاهش دهد، اما توانایی کاهش وانادیم (II) به وانادیم را ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ $E^\circ(Sn^{2+}/Sn)$ از E° نیم‌واکنش‌های اول و دوم، کوچک‌تر است و فقط می‌تواند این دو مرحله را پیش ببرد. با انجام نیم‌واکنش دوم و تولید V^{3+}، محلول سبزرنگ می‌شود (Sn با V^{3+} واکنش نمی‌دهد).

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۶ تفاوت آنتالپی فروپاشی کدام دو ترکیب یونی از بقیه، بیشتر است؟

۱) KF و RbI

۲) Na_2O و K_2S

۳) $MgCl_2$ و $CaCl_2$

۴) AlF_3 و Al_2O_3

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint برای حل این تست، باید به دو عامل **بار یون‌ها** و شعاع **یون‌ها** توجه کنید.

درس Box آنتالپی فروپاشی یک ترکیب یونی به **بار یون‌ها** و **شعاع یون‌ها** بستگی دارد.

- **چگالی بار**: نسبت بار یون به حجم آن است. هر چه چگالی بار یون‌ها بیشتر باشد، نیروی جاذبهٔ بین آن‌ها قوی‌تر و آنتالپی فروپاشی بیشتر خواهد بود.
- **شعاع یون‌ها**: هر چه شعاع یون‌ها بزرگ‌تر باشد، فاصلهٔ بین هسته‌های آن‌ها بیشتر و نیروی جاذبهٔ بین آن‌ها ضعیف‌تر و آنتالپی فروپاشی کم‌تر خواهد بود.

با توجه به این دو عامل، می‌توان آنتالپی فروپاشی ترکیب‌های یونی و تفاوت آن‌ها را با هم مقایسه کرد.

پاسخ خیلی تشریحی در این سؤال برای مقایسهٔ تفاوت آنتالپی فروپاشی ترکیب‌ها، باید به **مقدار بار** و **شعاع یون‌ها** در هر گزینه توجه کنیم.

گزینهٔ (۱): **KF و RbI**: یون‌های K^+, F^- در KF، دارای بار $+1$ و -1 و شعاع کوچک هستند، در حالی که یون‌های Rb^+ و I^- در RbI، دارای بار $+1$ و -1 و شعاع بزرگ‌تر هستند؛ بنابراین آنتالپی فروپاشی KF بیشتر بوده، ولی تفاوت آنتالپی فروپاشی این دو ترکیب چندان زیاد نیست.

گزینهٔ (۲): **Na_2O و K_2S**: یون‌های Na^+ و O^{2-} در Na_2O، دارای بار $+1$ و -2 و شعاع کوچک هستند، در حالی که یون‌های K^+ و S^{2-} در K_2S، دارای بار $+1$ و -2 و شعاع بزرگ‌تر هستند. بنابراین آنتالپی فروپاشی Na_2O بیشتر بوده، ولی هم‌چنان تفاوت آنتالپی فروپاشی دو ترکیب نیز چندان زیاد نیست.

گزینهٔ (۳): **$MgCl_2$ و $CaCl_2$**: یون‌های Mg^{2+} و Cl^- در $MgCl_2$، دارای بار $+2$ و -1 و شعاع کوچک هستند، در حالی که یون‌های Ca^{2+} و Cl^- در $CaCl_2$، دارای بار $+2$ و -1 و شعاع بزرگ‌تر هستند؛ بنابراین آنتالپی فروپاشی $MgCl_2$ بیشتر بوده، ولی تفاوت آنتالپی فروپاشی این دو ترکیب نیز چندان زیاد نیست.

گزینهٔ (۴): **AlF_3 و Al_2O_3**: یون Al^{3+} در هر دو ترکیب، دارای بار $+3$ است. اما یون‌های F^- و O^{2-}، دارای بارهای متفاوت $(-1, -2)$ و شعاع‌های متفاوت هستند؛ بنابراین آنتالپی فروپاشی **Al_2O_3 بسیار بیشتر** بوده و تفاوت آنتالپی فروپاشی این دو ترکیب، **زیاد** است.

نکته در مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی ترکیب‌های یونی، ابتدا به **بار یون‌ها** و سپس به **شعاع آن‌ها** توجه کنید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۷ با توجه به جدول داده‌شده، با طی یک کیلومتر مسافت، درصد کاهش جرم C_8H_{18} به واسطهٔ استفاده از کاتالیزگر، به تقریب کدام است و کدام آلایندهٔ تولیدشده توسط وسایل نقلیه، کم‌ترین کاهش مقدار مول را با به‌کارگیری کاتالیزگر دارد؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

فرمول شیمیایی آلاینده		CO	C_8H_{18}	NO
مقدار گرم آلاینده به ازای طی یک کیلومتر مسافت	بدون کاتالیزگر	۵/۹۹	۱/۶۷	۱/۰۴
	با کاتالیزگر	۰/۶۱	۰/۰۷	۰/۰۴

۱) NO ـ ۹۵/۸
۲) NO ـ ۸۹/۸
۳) C_8H_{18} ـ ۸۹/۸
۴) C_8H_{18} ـ ۹۵/۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا درصد کاهش جرم آلاینده C_8H_{18} را به واسطهٔ استفاده از کاتالیزگر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد کاهش جرم آلاینده} = \left|\frac{\text{میزان تغییر جرم آلاینده}}{\text{مقدار اولیهٔ آلاینده در غیاب کاتالیزگر}}\right| \times 100 \Rightarrow C_8H_{18}\text{ درصد کاهش جرم} = \left|\frac{0/07-1/67}{1/67}\right| \times 100 \simeq \%95/8$$

۵۱ با محاسبه و مقایسهٔ مقدار کاهش شمار مول آلاینده‌ها به واسطهٔ استفاده از کاتالیزگر، آلاینده‌ای که بیشترین کاهش مقدار مول را دارد، می‌یابیم:

$$\text{مقدار کاهش مول آلاینده} = \left|\frac{\text{مقدار تغییر جرم آلاینده}}{\text{جرم مولی آلاینده}}\right|$$

$$\text{مقدار کاهش مول CO} = \left|\frac{0/61-5/99}{28}\right| \simeq 0/192\ mol$$

$$\text{مقدار کاهش مول NO} = \left|\frac{0/04-1/04}{30}\right| \simeq 0/033\ mol$$

$$\text{مقدار کاهش مول } C_8H_{18} = \left|\frac{0/07-1/67}{114}\right| \simeq 0/014\ mol$$

پروا ضمه که! در میان این سه آلاینده، C_8H_{18} کم‌ترین مقدار کاهش مول را به واسطهٔ استفاده از کاتالیزگر دارد.

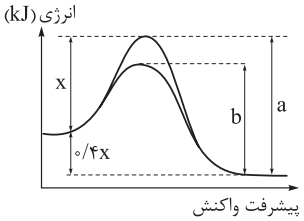
با توجه به جدول داده‌شده، با طی یک کیلومتر مسافت، درصد کاهش جرمی CO به واسطهٔ استفاده از کاتالیزگر، به تقریب کدام است و کدام آلایندهٔ تولیدشده توسط وسایل نقلیه، بیشترین کاهش مقدار مول را با به‌کارگیری کاتالیزگر دارد؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$ *(ریاضی داخل ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)*

فرمول شیمیایی آلاینده		CO	C_8H_{18}	NO
مقدار گرم آلاینده به ازای طی یک کیلومتر مسافت	بدون کاتالیزگر	۵/۹۹	۱/۶۷	۱/۰۴
	با کاتالیزگر	۰/۶۱	۰/۰۷	۰/۰۴

۱) C_8H_{18} ، ۸۹/۸
۲) CO ، ۸۹/۸
۳) CO ، ۹۶/۱
۴) C_8H_{18} ، ۹۶/۱

مشاوره جالبه بدونین که تمرینات کتاب درسی، علاوه بر امتحانات نهایی، منبع اصلی طرح بسیاری از سؤالات کنکور سراسری نیز هست. مثلاً این تست، شبیه‌ساز کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۳ می‌باشد که داده‌های آن‌ها برگرفته از با هم بیندیشیم کتاب درسی است.
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۸ شکل زیر، نمودار انرژی ـ پیشرفت را برای یک واکنش در دو حالت، بدون حضور و در حضور کاتالیزگر، نمایش می‌دهد. اگر کاتالیزگر، انرژی فعال‌سازی واکنش (رفت) را به میزان ۷۰ درصد کاهش دهد، نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۳}$

۲) ۲

۳) $\frac{۷}{۴}$

۴) ۱/۵

مشاوره از ظاهر نسبتاً طولانی برخی مسائل، نباید بترسید. بسیاری از سؤالات، علی‌رغم *ظاهرشون، فیلی راحتن!* بنابراین سعی کنید حداقل یک بار تست‌ها را بخوانید و *صرفاً از ظاهر طولانی‌شون، قضاوت نکنین!*

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ‌خیلی‌تشریحی انرژی فعال‌سازی واکنش، بدون حضور کاتالیزگر و در حضور کاتالیزگر، برابر است با:

انرژی فعال‌سازی بدون حضور کاتالیزگر $= x$

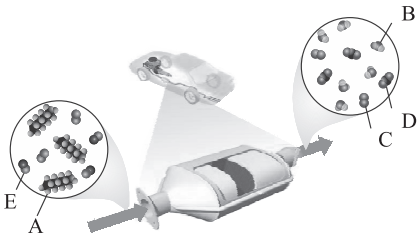
انرژی فعال‌سازی در حضور کاتالیزگر $= x - \frac{۷۰}{۱۰۰}x = ۰/۳x$

حالا! نسبت خواسته‌شده را باید حساب کنیم:

$$\frac{a}{b} = \frac{x + ۰/۴x}{۰/۳x + ۰/۴x} = \frac{۱/۴x}{۰/۷x} = ۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۹ چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ مولکول‌های نشان داده‌شده در شکل، نادرست است؟



الف) در هر دو واکنش حذف آلاینده‌های **A** و **E**، اتم‌های کربن کاهش پیدا می‌کنند.

ب) در میان مولکول‌های خارج‌شده از مبدل، برخلاف مولکول‌های واردشده، یک مولکول دارای پیوند سه‌گانه در ساختار خود است.

پ) در میان سه واکنش مربوط به حذف آلاینده‌ها در مبدل، مولکول‌های مبدل کاتالیستی در دو واکنش به عنوان واکنش‌دهنده و مولکول‌های **D** در واکنش به عنوان فراورده شرکت می‌کنند.

ت) مولکول‌های **B**، برخلاف مولکول‌های **C** و **D**، در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.

ث) درون مبدل، قطعهٔ سرامیکی به شکل توری وجود دارد که بر روی آن فلزهای واسطهٔ پلاتین، پالادیم و روبیدیم با قطر ۲ تا ۱۰ نانومتر نشانده می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

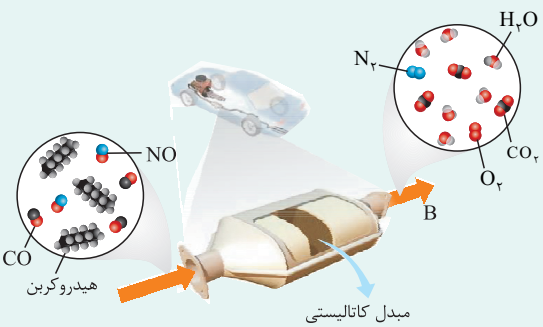
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی

ویژگی‌های مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی:

۱) یکی از راهکارهای مهم برای حذف آلاینده‌های تولیدشده توسط خودروها (گازهای C_xH_y ، CO ، NO) گذاشتن قطعه‌ای به نام مبدل کاتالیستی در مسیر خروج گازها از اگزوز خودروها است.



برای حذف آلاینده‌های C_xH_y ، CO ، NO موجود در گازهای خروجی از اگزوز خودرو دو مشکل اساسی وجود دارد:

۱) این آلاینده‌ها در کسری از ثانیه از موتور خودرو خارج و وارد هواکره می‌شوند.

۲) دمای آلاینده‌ها پس از خروج از موتور خودرو به سرعت کاهش می‌یابد.

در مبدل‌های کاتالیستی واکنش‌هایی انجام می‌شود که می‌تواند باعث حذف و یا کاهش آلاینده‌ها شود:

واکنش‌های حذف یا کاهش سه آلایندهٔ C_xH_y ، CO ، NO:

الف) واکنش حذف CO:

$$2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$$

ب) واکنش حذف NO:

$$2NO(g) \rightarrow N_2(g) + O_2(g)$$

ج) واکنش حذف C_xH_y:

$$C_xH_y(g) + (x + \frac{y}{4})O_2(g) \rightarrow xCO_2(g) + \frac{y}{2}H_2O(g)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکات زیر را در ارتباط با سه واکنش فوق یاد *بگیرین*:

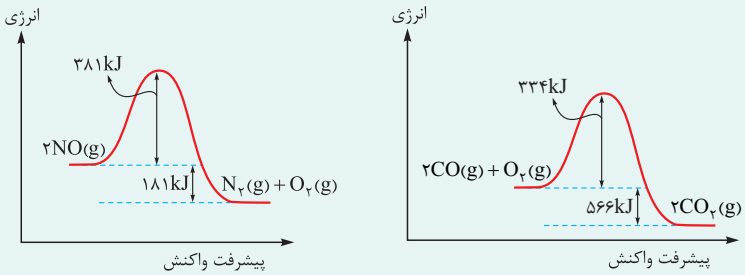
۱) هر سه واکنش فوق، گرماده هستند.

۲) هر سه واکنش، فقط در دمای بالا با سرعت مناسب انجام می‌شوند؛ بنابراین برای انجام سریع واکنش‌ها و در دمای پایین، نیاز به مبدل کاتالیستی است.

۳) هر سه واکنش در دماهای پایین انجام نمی‌شوند یا بسیار کند هستند.

۴) هر سه واکنش فوق از نوع اکسایش ـ کاهش هستند، زیرا در هر سه آن‌ها، یک عنصر به حالت آزاد وجود دارد.

۵) مقدار گرمای آزادشده از واکنش حذف آلایندهٔ $CO(\Delta H = -۵۶۶kJ)$، بیشتر از حذف آلایندهٔ $NO\ (\Delta H = -۱۸۱kJ)$ است، ولی انرژی فعال‌سازی واکنش حذف آلایندهٔ NO، بیشتر است؛ بنابراین سرعت آن، کم‌تر است.



۶) در مبدل‌های کاتالیستی از یک سو آلاینده‌های $CO\ ,\ NO$ و C_xH_y وارد و از سمت دیگر گازهای $CO_۲\ ,\ N_۲\ ,\ O_۲$ و $H_۲O$ خارج می‌شوند.

۷) با این که مبدل کاتالیستی برای مدت طولانی کار می‌کند، اما کارایی این قطعه پس از مدت معینی کاهش یافته و دیگر قابل استفاده نیست.

میزان اثر گذاری مبدل کاتالیستی در رابطه با آلاینده‌های مختلف به صورت زیر است:

- ترتیب میزان آلاینده‌های خارج‌شده از خودرو در غیاب مبدل کاتالیستی: $CO > C_xH_y > NO$
- ترتیب میزان آلاینده‌های خارج‌شده از خودرو در حضور مبدل کاتالیستی: $CO > C_xH_y > NO$
- ترتیب میزان اثر مبدل کاتالیستی بر روی حذف آلاینده‌های خارج‌شده از خودرو: $NO > C_xH_y > CO$
- پس مقدار کاهش آلاینده بر حسب گرم، در حضور مبدل کاتالیستی به صورت $CO > C_xH_y > NO$ و درصد کاهش آلایندگی در حضور مبدل کاتالیستی به صورت $NO(٪۹۶ / ۱) > C_xH_y(٪۹۵ / ۸) > CO(٪۸۹ / ۸)$ است.

۸) در ساختار مبدل‌های کاتالیستی، یک قطعهٔ سرامیکی وجود دارد. بر روی سطح این قطعه که به شکل توری به کار می‌رود، فلزهای رودیم (Rh) (دورهٔ ۵ و گروه ۹)، پالادیوم (Pd) (دورهٔ ۵ و گروه ۱۰) و پلاتین (Pt) (دورهٔ ۶ و گروه ۱۰) به عنوان کاتالیزگر نشانده شده‌اند. این فلزها E_a واکنش‌های انجام‌شده در مبدل را کاهش می‌دهند.

توجه: هر سه کاتالیزگر مورد استفاده برای حذف آلاینده‌ها، فلزهایی از دستهٔ d یا عنصرهای واسطه هستند که جایگاه آن‌ها در جدول دوره‌ای عناصر به صورت زیر است:

	گروه ۹	گروه ۱۰
دورهٔ ۵	۴۵Rh	۴۶Pd
دورهٔ ۶		۷۸Pt

در سطح سرامیک‌های درون مبدل کاتالیستی، توده‌های فلزی با قطر ۲ تا ۱۰ نانومتر وجود دارد.

۹) برای افزایش کارایی مبدل کاتالیستی، گاهی سرامیک‌ها را به شکل مش (دانه)های ریز در می‌آورند و کاتالیزگرها را روی سطح آن می‌نشانند، این فرایند، با افزایش سطح تماس میان کاتالیزگرها و آلاینده‌ها سبب افزایش قدرت مبدل می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های (الف)، (ب) و (ث) نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) آلاینده‌های E و A، به ترتیب کربن مونوکسید (CO) و هیدروکربن نسوخته (C_xH_y) هستند. در واکنش‌های مربوط به حذف هر دو آلاینده، عدد اکسایش اتم‌های کربن، افزایش یافته و عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن، کاهش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ب) در میان گازهای واردشده به مبدل کاتالیستی، در مولکول CO (با ساختار لوویس : $C \equiv O$:) و در میان گازهای خارج‌شده از مبدل کاتالیستی، در مولکول N_2 (با ساختار لوویس : $N \equiv N$:)، پیوند سه‌گانه وجود دارد.

پ) واکنش‌های انجام‌شده در مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی، *این‌چوریاست*:

۱) واکنش حذف گاز کربن مونوکسید: $2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$

۲) واکنش حذف هیدروکربن نسوخته: $C_xH_y(g) + (x + \frac{y}{4})O_2(g) \rightarrow xCO_2(g) + \frac{y}{2}H_2O(g)$

۳) واکنش حذف گاز نیتروژن مونوکسید: $2NO(g) \rightarrow N_2(g) + O_2(g)$

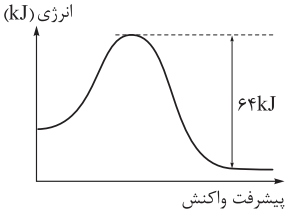
مولکول‌های C و D، به ترتیب O_2 و CO_2 هستند. با توجه به واکنش‌های بالا، *واضحه که* O_2 و CO_2 در واکنش‌های (۱) و (۲) به ترتیب به عنوان واکنش‌دهنده و فراورده *تشریف دارن!*

ت) *کاملاً درسته!* مولکول‌های B، *همون* مولکول‌های H_2O *خودمونن!* که به دلیل قطبی‌بودن، برخلاف مولکول‌های ناقطبی O_2 و CO_2، در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.

ث) رودیم (Rh)؛ نه روبیدیم (Rb)!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۰ اگر در واکنش $H_2(g) + I_2(g) \rightarrow 2HI(g)$، انرژی فعال‌سازی (E_a) واکنش، ۲/۲ برابر مقدار عددی آنتالپی واکنش (ΔH) آن باشد، با توجه به نمودار زیر، به ازای تولید ۰/۵ مول HI در این واکنش، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟

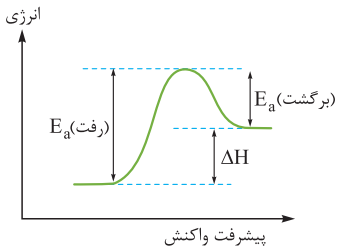
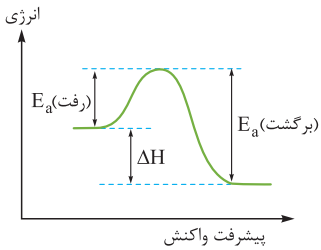


۱) ۲۰
۲) ۵
۳) ۱۰
۴) ۷/۵

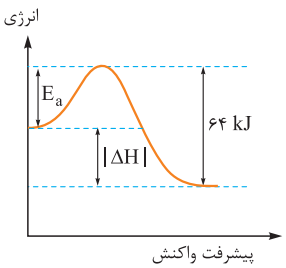
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint با توجه به این که حاصل‌جمع E_a و مقدار عددی ΔH واکنش، برابر با ۶۴kJ است و همچنین با توجه به رابطهٔ E_a و ΔH واکنش، مقدار آنتالپی (ΔH) واکنش را محاسبه کن، سپس مقدار انرژی آزادشده در این واکنش را به ازای تولید ۰/۵ مول HI، به دست بیاور! *والسلام!*

نکته در جدول زیر ویژگی واکنش‌های گرماگیر و گرماده ارائه شده است:

گرماگیر:	گرماده:
	
۱) آنتالپی واکنش بزرگ‌تر از صفر است. $(\Delta H > 0)$ ۲) سطح انرژی فراورده‌ها بالاتر از واکنش‌دهنده‌ها است. ۳) واکنش‌دهنده‌ها پایدارتر از فراورده‌ها هستند. ۴) انرژی فعال‌سازی واکنش رفت، بیشتر از واکنش برگشت است. ۵) مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها کم‌تر از مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها است. ۶) سطح انرژی گونهٔ به‌وجودآمده در قله، به سطح انرژی فراورده‌ها نزدیک‌تر است.	۱) آنتالپی واکنش کوچک‌تر از صفر است. $(\Delta H < 0)$ ۲) سطح انرژی فراورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها است. ۳) واکنش‌دهنده‌ها ناپایدارتر از فراورده‌ها هستند. ۴) انرژی فعال‌سازی واکنش رفت، کم‌تر از واکنش برگشت است. ۵) مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها بیشتر از مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها است. ۶) سطح انرژی گونهٔ به‌وجودآمده در قله، به سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها نزدیک‌تر است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به نمودار، مقدار ΔH واکنش را حساب می‌کنیم:



مجموع قدرمطلق آنتالپی و انرژی فعال‌سازی واکنش، برابر با ۶۴kJ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\Rightarrow E_a + |\Delta H| = 64\,kJ \xrightarrow{E_a = 2/2|\Delta H|} 3/2|\Delta H| = 64 \Rightarrow |\Delta H| = \frac{64}{3/2} = 20\,kJ \xrightarrow[\Delta H<0]{\text{واکنش گرماده}} \Delta H = -20\,kJ$$

گام دوم: مقدار انرژی آزادشده در واکنش را به ازای تولید ۰/۵ مول HI، به دست می‌آوریم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$0/5\,mol\,HI \times \frac{20\,kJ\ \text{انرژی آزادشده}}{2\,mol\,HI} = 5\,kJ\ \text{انرژی آزادشده}$$

یه‌جور دیگه **استفاده از کسر تناسب:**

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}_{HI} = \frac{Q}{|\Delta H|} \rightarrow \frac{0/5}{2} = \frac{x}{20} \rightarrow x = 5kJ\ \text{انرژی آزادشده}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۱ کدام مورد در ارتباط با مبدل‌های کاتالیستی خودروهای دیزلی، نادرست است؟

۱) مولکول H_2O در واکنش‌های انجام‌شده در هر دو محفظهٔ این مبدل‌ها، تولید می‌شود.

۲) در محفظهٔ دوم این مبدل کاتالیستی، می‌توان فراوردهٔ واکنش هابر را یافت.

۳) در این مبدل‌ها، واکنشی که فراوردهٔ آن یک مولکول دواتمی است، در محفظهٔ اول صورت می‌گیرد.

۴) در مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی برخلاف مبدل‌های کاتالیستی دیزلی، همهٔ واکنش‌ها در یک محفظه انجام می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

مبدل‌های کاتالیستی خودروهای دیزلی، دارای دو محفظه هستند:

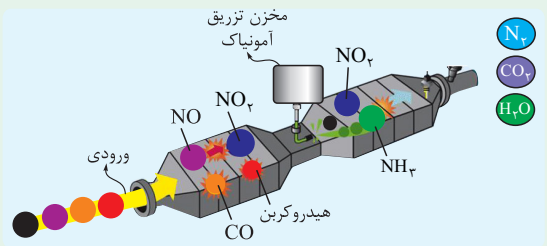
- در محفظهٔ اول همانند مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی، گازهای CO و C_xH_y واکنش می‌دهند:

$$2CO(g)+O_2(g)\rightarrow 2CO_2(g)$$

$$C_xH_y(g)+(x+\frac{y}{4})O_2(g)\rightarrow xCO_2(g)+\frac{y}{2}H_2O(g)$$

- در محفظهٔ دوم با ورود آمونیاک، گازهای NO و NO_2 به گاز N_2 تبدیل شده و تا حدود زیادی (نه به طور کامل!) از ورود گازهای NO و NO_2 به هواکره جلوگیری می‌شود:

$$NO(g)+NO_2(g)+2NH_3(g)\rightarrow 2N_2(g)+3H_2O(g)$$



پاسخ خیلی تشریحی

گاز نیتروژن (N_2) به عنوان یک مولکول دواتمی، فراوردهٔ واکنشی است که در **محفظهٔ دوم** مبدل‌های کاتالیستی خودروهای دیزلی، صورت می‌گیرد. *هواستون باشه تو واکنش‌های انجام‌شده در محفظهٔ اول، مولکول دواتمی‌ای تولید نمی‌شه!*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌های (۱) و (۲): با توجه به واکنش‌های بالا، *مهمه که!* مولکول‌های آب (H_2O) در واکنش‌های انجام‌شده در هر دو محفظه این مبدل، تولید می‌شوند. هم‌چنین با توجه به شکل، *مهمه که!* گاز آمونیاک (NH_3) (فراوردهٔ فرایند هابر)، تنها در محفظهٔ دوم این مبدل‌ها حضور دارد.

گزینه (۴): *بله!* با توجه به این‌که در مبدل خودروهای دیزلی برای حذف اکسیدهای نیتروژن، بخش جداگانه‌ای در نظر گرفته شده است، می‌توان گفت که مبدل‌های خودروهای دیزلی برخلاف مبدل‌های خودروهای بنزینی، دومرحله‌ای‌اند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۲ کدام مورد، نادرست است؟

۱) گیاهان با جوی سرشار از گاز نیتروژن احاطه شده‌اند، ولی می‌توانند این عنصر ضروری را از خاک جذب کنند.

۲) عنصر نیتروژن به شکل ترکیبات نیتروژن‌دار از جمله آمونیاک و اوره، برای گیاهان استفاده می‌شود.

۳) برخی کشورها برای افزایش بازده فراورده‌های کشاورزی، گاز آمونیاک را به طور مستقیم به خاک تزریق می‌کنند.

۴) گیاهان برای رشد خود افزون بر عنصرهایی مانند K, P, N, S و ...، به برخی ترکیبات نیز نیاز دارند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

واضحه که بهترین راه‌حل برای چالش تأمین غذا، افزایش بهره‌وری در تولید فراورده‌های کشاورزی و در نتیجه شناسایی، تولید و افزودن کودهای شیمیایی مناسب به خاک است. آمونیاک یکی از کودهای شیمیایی است که در برخی کشورها به صورت مایع $(NH_3(l))$ و به طور مستقیم به خاک تزریق می‌شود.

توجه: گیاهان برای رشد، علاوه بر کربن دی‌اکسید (CO_2) و آب (H_2O)، به عنصرهایی مانند S ، N ، P ، K و ... نیاز دارند. با این‌که بیشتر حجم هوا را گاز نیتروژن تشکیل می‌دهد، اما گیاهان نمی‌توانند این عنصر را به طور مستقیم از هوا جذب کنند. به همین دلیل نیتروژن را باید به شکل ترکیب‌های نیتروژن‌دار از جمله آمونیاک (NH_3) و اوره $(CO(NH_2)_2)$ به خاک اضافه کرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ آمونیاک مایع را به خاک تزریق می‌کنند «*مگه می‌شه گاز به خاک تزریق کرد!*»

بررسی سایر گزینه‌ها در درس‌باکس انجام شده است.

هواستون باشه! CO_2 و H_2O ترکیب هستند!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۳ ۰/۳ مول گاز آمونیاک وارد ظرف ۲لیتری دربسته می‌شود. اگر در شرایط مناسب، با انجام واکنش، کاهش جرم واکنش‌دهنده تا رسیدن به تعادل گازی $2NH_3(g) \rightleftharpoons N_2(g) + 3H_2(g)$، برابر ۳/۴ گرم باشد، ثابت تعادل واکنش بر حسب $mol^2.L^{-2}$ کدام است؟ $(N = 14, H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) $2/7 \times 10^{-2}$ ۲) $6/75 \times 10^{-1}$

۳) $2/7 \times 10^{-1}$ ۴) $6/75 \times 10^{-2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا از طریق میزان تغییرات آمونیاک، مقدار تعادلی همهٔ مواد را حساب کن! بعد بذار توی عبارت ثابت آن و مقدار ثابت را به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به معادلهٔ واکنش خواهیم داشت:

	$2NH_3$	$\rightleftharpoons N_2$	$+ 3H_2$
مول اولیه:	۰/۳	۰	۰
تغییرات مول:	$-2x$	$+x$	$+3x$
مقدار مول نهایی:	$۰/۳ - 2x$	$+x$	$+3x$

در ابتدای واکنش، ۰/۳ مول آمونیاک داشته‌ایم که $2x$ مول یا ۳/۴ گرم از آن تجزیه شده است؛ بنابراین داریم:

$$\text{کاهش جرم} = ۳/۴ g\ NH_3 \times \frac{1 mol\ NH_3}{17 g\ NH_3} = ۰/۲\ mol NH_3 \Rightarrow 2x = ۰/۲ \Rightarrow x = ۰/۱$$

ضب! الان تعداد مول‌های تعادلی همهٔ مواد را حساب می‌کنیم.

$$mol\ NH_3 = ۰/۳ - ۰/۲ = ۰/۱ \quad , \quad mol\ N_2 = x = ۰/۱ \quad , \quad mol\ H_2 = 3x = ۰/۳$$

و در آخر، مقدار K را به دست می‌آوریم.

$$K = \frac{[N_2][H_2]^3}{[NH_3]^2} = \frac{(\frac{۰/۱}{2})(\frac{۰/۳}{2})^3}{(\frac{۰/۱}{2})^2} = 6/75 \times 10^{-2}\ mol.L^{-2}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۴ ۱/۰۲ گرم آمونیوم هیدروژن سولفید (NH_4HS)، در ظرفی به حجم ۵ لیتر بر اساس معادلهٔ واکنش زیر، تجزیه می‌شود. تعداد مولکول آمونیاک در ظرف واکنش در لحظهٔ تعادل، کدام است؟ $(S = ۳۲ , N = ۱۴ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

$$NH_4HS(s) \rightleftharpoons NH_3(g) + H_2S(g),\ K = ۱/۶ \times ۱۰^{-۵}$$

۱) $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۱}$

۲) $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۱}$

۳) $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۲}$

۴) $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا عبارت ثابت تعادل را بنویس و بعد از آن، غلظت مواد را در حالت تعادل *حساب کن*! *حالا* با توجه به حجم داده‌شده، مول تعادلی NH_3 را به دست بیار. در آخر هم با توجه به مول به دست آمده، تعداد مولکول آمونیاک را حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی برای حل این سؤال، با توجه به معادلهٔ واکنش، عبارت ثابت تعادل آن را می‌نویسیم.

$$NH_4HS(s) \rightleftharpoons NH_3(g) + H_2S(g) \qquad K = [NH_3][H_2S]$$

هواستون باشه که غلظت مواد جامد و مایع خالص، ثابت است و در عبارت ثابت تعادل *نمیاد*. سپس با توجه به برابربودن ضرایب فراورده‌ها، غلظت و مول هر کدام را به دست می‌آوریم:

$$[NH_3] = [H_2S] = x \Rightarrow [x]^2 = ۱/۶ \times ۱۰^{-۵} \Rightarrow x = ۴ \times ۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

$$\Rightarrow mol\ x = mol\ NH_3 = ۴ \times ۱۰^{-۳}\ mol.\cancel{L^{-۱}} \times ۵\cancel{L} = ۲ \times ۱۰^{-۲}\ mol$$

و در آخر، از طریق مول به‌دست‌آمده، تعداد مولکول NH_3 را به دست می‌آوریم:

$$۲ \times ۱۰^{-۲}\ mol\ NH_3 \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ \text{مولکول}\ NH_3}{۱\ mol\ NH_3} = ۱۲/۰۴ \times ۱۰^{۲۱} = ۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۲}\ \text{مولکول}\ NH_3$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۵ چند مورد از عوامل زیر، سبب افزایش شدت رنگ در مخلوط تعادلی $N_2O_4(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$ می‌شود؟

الف) انتقال به ظرفی با حجم کم‌تر

ب) افزودن مقداری N_2O_4

پ) افزایش دما

ت) افزودن مقداری NO_2

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

جناب لوشاتولیه می‌*فرماید!* اگر تغییری سبب به هم خوردن یک سامانهٔ تعادلی شود، تعادل در جهتی جابه‌جا می‌شود که تا حد امکان اثر آن تغییر را جبران کند. با تغییر غلظت، فشار و دما می‌توان سامانهٔ تعادلی را در جهت دلخواه جابه‌جا کرد. در واقع با تغییر این کمیت‌ها، واکنش تعادلی در جهت معینی پیش می‌رود تا به تعادل جدید برسد.

عامل			عکس‌العمل تعادل به تغییر	چگونگی تغییر ثابت تعادل (K) به جابه‌جاشدن تعادل
تغییر غلظت	افزایش غلظت یک ماده		جابه‌جایی در جهت مصرف آن ماده	تغییر نمی‌کند.
	کاهش غلظت یک ماده		جابه‌جایی در جهت تولید آن ماده	تغییر نمی‌کند.
تغییر حجم (فشار)	افزایش حجم (کاهش فشار) سامانه		جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی بیشتر	تغییر نمی‌کند.
	کاهش حجم (افزایش فشار) سامانه		جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی کم‌تر	تغییر نمی‌کند
تغییر دما	واکنش‌های گرماده	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولیدگرما (جهت رفت)	افزایش می‌یابد.
		افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت برگشت)	کاهش می‌یابد.
	واکنش‌های گرماگیر	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت برگشت)	کاهش می‌یابد.
		افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت رفت)	افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ همهٔ موارد باعث افزایش غلظت NO_2 می‌شوند؛ در نتیجه شدت رنگ مخلوط افزایش می‌یابد.

بررسی همهٔ موارد:

الف) انتقال به ظرفی با حجم کم‌تر، سبب افزایش غلظت همهٔ گونه‌های گازی‌شکل از جمله NO_2 که گازی قهوه‌ای رنگ است، می‌گردد و مخلوط پررنگ‌تر می‌شود.

ب) افزودن مقداری گاز N_2O_4، سبب افزایش غلظت آن شده، در نتیجه واکنش در جهت رفت پیش می‌رود.

پ) با توجه به گرماگیربودن واکنش با افزایش دما، واکنش در جهت رفت و زیادشدن غلظت NO_2 پیش می‌رود.

ت) افزودن مقداری گاز NO_2، سبب جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت می‌شود، اما همهٔ NO_2 اضافی مصرف نمی‌شود. در نتیجه ظرف مخلوط، نسبت به تعادل اولیه، پررنگ‌تر می‌شود.

نکته

طبق نظر آقای لوشاتلیه! اگر تغییری سبب به هم خوردن یک سامانهٔ تعادلی شود، تعادل در جهتی جابه‌جا می‌شود که تا حد امکان اثر آن تغییر را جبران کند نه صد در صد تغییر را!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۶ واکنش‌های تعادلی زیر در دو ظرف جداگانهٔ دربسته و در دمای ثابت انجام‌شده‌اند. کدام مورد دربارهٔ آن‌ها، نادرست است؟

I) $N_2(g)+3H_2(g)\rightleftharpoons 2NH_3(g)$ $\quad \Delta H<0$

II) $2HI(g)\rightleftharpoons H_2(g)+I_2(g)$ $\quad \Delta H>0$

۱) افزایش حجم ظرف در واکنش (I)، همانند کاهش غلظت $H_2(g)$ در واکنش (II)، غلظت مواد واکنش‌دهنده را کاهش می‌دهد.

۲) افزایش فشار ناشی از کاهش حجم، غلظت گاز هیدروژن را در واکنش (I) برخلاف واکنش (II)، افزایش می‌دهد.

۳) کاهش دما در واکنش (I)، همانند افزودن HI در تعادل (II)، تعداد مول فراورده‌ها را افزایش می‌دهد.

۴) با افزایش دما، ثابت تعادل واکنش (I)، برخلاف ثابت تعادل واکنش (II)، کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اثرات فشار در تعادل

نوع عامل	تأثیر	جهت جابه‌جایی تعادل	سرعت واکنش‌های رفت و برگشت	غلظت مواد گازی	ثابت تعادل
افزایش فشار (کاهش حجم)	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابرند.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	افزایش	افزایش	بدون تغییر
	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابر نیستند.	به سمت شمار مول‌های گازی کم‌تر	افزایش	افزایش	بدون تغییر
	اصلاً مادهٔ گازی نداریم.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	بدون تغییر		بدون تغییر
کاهش فشار (افزایش حجم)	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابرند.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	کاهش	کاهش	بدون تغییر
	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابر نیستند.	به سمت شمار مول‌های گازی بیشتر	کاهش	کاهش	بدون تغییر
	اصلاً مادهٔ گازی نداریم.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	بدون تغییر		بدون تغییر

اثرات دما در تعادل

- واکنش گرماده $(A \rightleftharpoons B+Q)$
  - افزایش دما ← جابه‌جایی تعادل در جهت مصرف گرما (جهت برگشت) ← کاهش مقدار فراورده‌ها و افزایش مقدار واکنش‌دهنده‌ها ← کاهش ثابت تعادل
  - کاهش دما ← جابه‌جایی تعادل در جهت تولید گرما (جهت رفت) ← افزایش مقدار فراورده‌ها و کاهش مقدار واکنش‌دهنده‌ها ← افزایش ثابت تعادل
- واکنش گرماگیر $(A+Q \rightleftharpoons B)$
  - افزایش دما ← جابه‌جایی تعادل در جهت مصرف گرما (جهت رفت) ← کاهش مقدار فراورده‌ها و افزایش مقدار واکنش‌دهنده‌ها ← افزایش ثابت تعادل
  - کاهش دما ← جابه‌جایی تعادل در جهت تولید گرما (جهت برگشت) ← افزایش مقدار فراورده‌ها و کاهش مقدار واکنش‌دهنده‌ها ← کاهش ثابت تعادل

پاسخ خیلی تشریحی

افزایش فشار ناشی از کاهش حجم، غلظت همهٔ مواد شرکت‌کننده از جمله گاز هیدروژن را افزایش می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): افزایش حجم در واکنش (I)، سبب کاهش غلظت همهٔ مواد شرکت‌کننده می‌شود و کاهش غلظت H_2 در واکنش (II)، تعادل را در جهت رفت جابه‌جا می‌کند و غلظت مواد واکنش‌دهنده کاهش می‌یابد.

گزینهٔ (۳): کاهش دما در واکنش (I)، تعادل را در جهت رفت و افزایش تعداد مول فراورده‌ها جابه‌جا می‌کند. از سوی دیگر افزودن گاز HI، در تعادل (II)، آن را در جهت رفت و تولید فراورده جابه‌جا می‌کند.

گزینهٔ (۴): در واکنش‌های گرماگیر (در واکنش (II))، ثابت تعادل با افزایش دما، برعکس واکنش‌های گرماده (واکنش I)، افزایش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۷ در واکنش تعادلی $\Delta H < 0$ ، $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ ، چند مورد از عوامل زیر، سرعت تعادلی واکنش‌های رفت و برگشت را نسبت به تعادل اولیه، افزایش می‌دهد؟

الف) افزایش فشار

ب) افزایش دما

پ) افزودن کاتالیزگر

ت) افزودن مقداری NH_3

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ همهٔ موارد، سرعت تعادلی واکنش‌های رفت و برگشت را نسبت به تعادل اولیه، افزایش می‌دهند.

نکته در صورتی که در یک واکنش تعادلی، عاملی سبب افزایش احتمال برخورد ذرات «افزایش فشار، غلظت، دما و ...» و یا تأمین انرژی فعال‌سازی «دما» یا کاهش انرژی فعال‌سازی «کاتالیزگر» یک واکنش شود، سرعت واکنش افزایش می‌یابد.

نکته در صورتی که یک تعادل به هم می‌خورد، سرعت هر دو طرف زیادتر می‌شود، اما سرعت طرفی که باعث جبران بی‌نظمی می‌شود، بیشتر افزایش می‌یابد.

مثال: با افزودن مقداری NH_3 ، سرعت رفت و برگشت واکنش افزایش می‌یابد، اما سرعت برگشت بیشتر، زیاد می‌شود.

بررسی همهٔ موارد:

الف) افزایش فشار، سبب افزایش غلظت همهٔ گونه‌های گازی‌شکل و در نتیجه افزایش سرعت واکنش تعادلی می‌شود.

ب) افزایش دما، باعث افزایش احتمال برخورد ذرات و تأمین انرژی فعال‌سازی شده و در نتیجه سرعت واکنش زیاد می‌شود.

پ) کاتالیزگر با کاهش انرژی فعال‌سازی، سبب افزایش سرعت واکنش تعادلی می‌شود.

ت) افزایش آمونیاک، باعث افزایش غلظت واکنش‌دهنده‌ها (به دلیل جابه‌جاشدن واکنش) و افزایش خود NH_3 می‌شود؛ در نتیجه سرعت واکنش زیاد می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۸ اگر در واکنش تعادلی فرضی $2A_2(g)+B_2(g) \rightleftharpoons 2BA_2(g)$، ثابت تعادل واکنش در دماهای $20^\circ C$ و $60^\circ C$ به ترتیب برابر 4×10^{-5} و 2×10^{-4} باشد، چند مورد از مطالب داده‌شده درست است؟

الف) مجموع آنتالپی فراورده‌ها، بیشتر از مجموع آنتالپی واکنش‌دهنده‌ها است.

ب) در شرایط یکسان، سرعت واکنش رفت بیشتر از واکنش برگشت است.

پ) مجموع آنتالپی پیوند مواد واکنش‌دهنده‌ها، کم‌تر از مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها است.

ت) در دمای $60^\circ C$، به دلیل بیشتربودن ثابت تعادل، واکنش با سرعت بیشتری انجام می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فقط مورد «الف» درست است.

ابتدا با توجه به توضیحات سؤال، گرماگیر و گرماده بودن واکنش را مشخص می‌کنیم. چون با زیادشدن دما، مقدار ثابت تعادل افزایش یافته است؛ در نتیجه واکنش داده‌شده گرماگیر است.

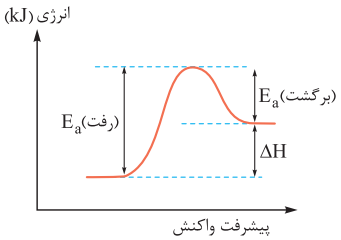
بررسی همهٔ موارد:

الف)

مجموع آنتالپی واکنش‌دهنده‌ها < مجموع آنتالپی فراورده‌ها

$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی فراورده‌ها یا } H_2] - [\text{مجموع آنتالپی واکنش‌دهنده‌ها یا } H_1] \xrightarrow[\text{بوده است.}]{\text{چون واکنش گرماگیر}} H_2 > H_1$$

ب) در واکنش‌های گرماگیر، سطح انرژی واکنش‌دهنده پایین‌تر از فراورده است؛ در نتیجه طبق نمودار زیر، سرعت واکنش رفت از سرعت واکنش برگشت، کم‌تر است:



$$\left.\begin{matrix}\Delta H = E_a - E'_a \\ E_a > E'_a\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta H > 0$$

پ) با توجه به گرماگیربودن واکنش و محاسبهٔ آنتالپی واکنش از طریق آنتالپی پیوند می‌توان نوشت:

مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها < مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها

$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها } H_2] - [\text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها } H_1] \xrightarrow{\text{واکنش گرماگیر است.}} H_1 > H_2$$

ت) به دلیل بیشتربودن دما، واکنش سرعت بیشتری دارد، نه بیشتربودن ثابت تعادل!

هواستون باشه که ثابت تعادل، یک کمیّت ترمودینامیکی است و ارتباطی با سرعت واکنش ندارد!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۹ کدام‌یک از گزینه‌های داده‌شده، عبارت زیر را به درستی کامل می‌کند؟

هابر، واکنش: $N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$ را در دماهای بالاتر بررسی کرد، دماهایی که در آن واکنش با سرعت ..... و پیشرفت ..... به تعادل می‌رسید و هر چه دما را بالاتر می‌برد، درصد مولی آمونیاک ..... می‌یافت.

۱) بالا ـ کمی ـ افزایش
۲) بالا ـ کمی ـ کاهش
۳) کم ـ زیادی ـ کاهش
۴) کم ـ زیادی ـ افزایش

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

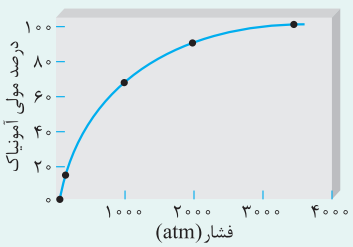
تولید آمونیاک به روش هابر

جناب هابر برای تولید آمونیاک هیدروژن و نیتروژن، واکنش را بارها و بارها در شرایط مختلف انجام داد تا بالاخره شرایط بهینهٔ واکنش را به دست آورد:

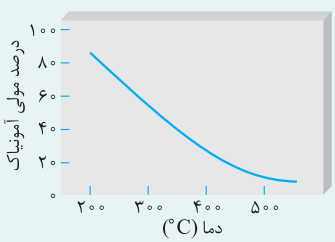
$$N_2(g) + 3H_2 \rightleftharpoons^{200\,atm,450^\circ C,Fe(s)} 2NH_3(g) + Q$$

حالا می‌خوایم ببینیم ایشون چه‌طوری این کار رو کرد!

۱) با افزایش فشار، تعادل به سمت شمار مول‌های گازی کم‌تر؛ یعنی در جهت تولید آمونیاک پیش می‌رود؛ بنابراین با افزایش فشار، تعادل در جهت رفت جابه‌جا شده و درصد مولی آمونیاک در مخلوط تعادلی زیاد می‌شود. به همین دلیل هابر فشار را بالا برد.



۲) واکنش تولید آمونیاک، گرماده است؛ بنابراین با افزایش دما، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا شده و مقدار ثابت تعادل و درصد مولی آمونیاک کاهش می‌یابد.

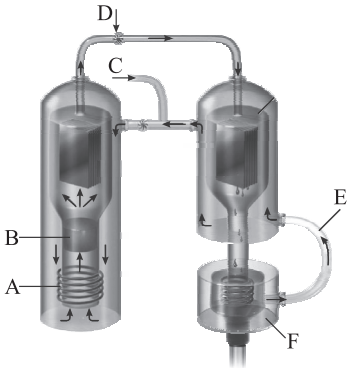


بنابراین دماهای خیلی بالا برای این واکنش تعادلی و تولید آمونیاک بیشتر، مطلوب نیست، اما همان‌طور که می‌دانید با افزایش دما، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت و در نتیجه سرعت برقراری تعادل افزایش می‌یابد. به همین دلیل هابر برای این‌که *نه سیخ بسوزه نه کباب!* واکنش را در دمای $450^\circ C$ انجام داد و *اومد* برای افزایش سرعت واکنش، از یک کاتالیزگر مانند آهن استفاده کرد. در واقع، کاتالیزگر کمک کرد که در دمای به نسبت کم‌تری، واکنش با سرعت مناسبی انجام شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با یک نگاه به درس‌باکس علت کل این جمله را متوجه می‌شی!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۰ با توجه به شکل زیر که نمایی از فناوری تولید آمونیاک به روش هابر را نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



الف) نوع گازهای تشکیل‌دهندهٔ نقاط **C** و **E**، یکسان است.

ب) در نقطهٔ **D**، مخلوط سه گاز وجود دارد.

پ) **A** و **B**، به ترتیب از راست به چپ مربوط به کاتالیزگر و گرم‌کننده است.

ت) دما در نقطهٔ **F**، برابر $-۲۰۰^{\circ}C$ است.

۱) ۱

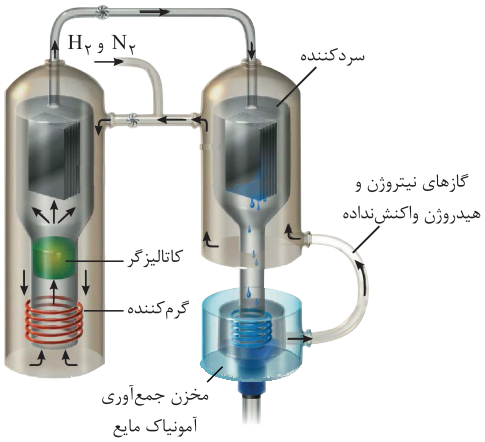
۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد «الف» و «ب» درست هستند.



با توجه به شکل زیر، همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) گازهای N_2 و H_2، در نقاط **C** و **E** وجود دارند.

ب) گازهای خروجی از واکنشگاه یا همان **D**، مخلوطی از سه گاز است.

پ) **A** و **B** به ترتیب از راست به چپ، مربوط به گرم‌کننده و کاتالیزگر هستند.

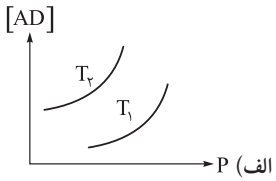
ت) در نقطهٔ **F**، دما حدود $-۴۰^{\circ}C$ است تا فقط آمونیاک مایع شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

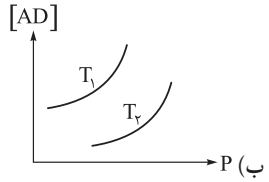
۱۰۱ کدام‌یک از نمودارهای داده‌شده برای واکنش تعادلی $A(g)+D(g) \rightleftharpoons AD(g)\ ,\ \Delta H<0$ ، به درستی ترسیم شده است؟

$(P_2 > P_1\ ,\ T_2 > T_1)$

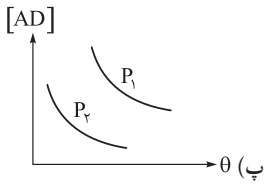
الف)



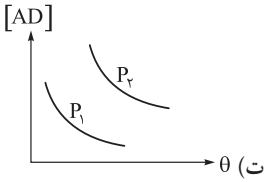
ب)



پ)



ت)



۱) الف ـ ب

۲) الف ـ ت

۳) ب ـ پ

۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد «ب» و «ت» درست‌اند.

بررسی همهٔ موارد:

موارد الف و ب) واکنش گرماده است، پس با افزایش دما، واکنش در جهت برگشت پیش می‌رود؛ در نتیجه غلظت AD کم می‌شود و مورد «ب» درست و «الف» رد می‌شود.

موارد پ و ت) تعداد مول‌های گازی سمت واکنش‌دهنده، بیشتر از فراورده است $\underbrace{A(g)+D(g)}_{\text{۲ مول}} \rightleftharpoons \underbrace{AD(g)}_{\text{یک‌مول}}$. پس با افزایش فشار، واکنش در جهت رفت که مول گازی کم‌تر است، پیش می‌رود؛ پس غلظت AD زیاد می‌شود.

یه‌جور دیگه ✔ با افزایش فشار، حجم کم می‌شود، پس غلظت همهٔ مواد بیشتر می‌شود؛ در نتیجه نمودار «ت» درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۲ کدام مورد درست است؟

۱) فراورده‌های پتروشیمیایی حاصل از پالایش نفت خام، همواره مواد آلی هستند که می‌توان به قیمت بالاتری آن‌ها را به فروش رساند.

۲) مس (I) سولفید را به عنوان مادهٔ اولیهٔ مهم و پرکاربرد می‌توان پس از صرف انرژی، آب، فناوری شیمیایی و نیروی انسانی، به فلز مس با خلوص بالا تبدیل کرد.

۳) افزایش درصد خلوص مواد شیمیایی، نیاز به فناوری‌های پیشرفته و گران‌قیمت، اما در عین حال درآمدزا دارد.

۴) تبدیل مواد آلی به یکدیگر، از جمله واکنش‌های شیمیایی آسان و پربازده است که از تولیدات صنایع شیمیایی به شمار می‌رود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ خالص‌سازی مواد، یکی از فناوری‌های پیشرفته، گران، پرکاربرد و در حین حال کارآفرین و درآمدزا می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): فراورده‌های پتروشیمیایی همواره مواد آلی نیستند! این مواد می‌توانند شامل آمونیاک (NH_3) و سولفوریک اسید (H_2SO_4) نیز باشند که در هیچ‌کدام کربن یافت نمی‌شود.

گزینهٔ (۲): مس (I) سولفید، سنگ معدن مس است که جزء مواد خام محسوب نمی‌شود.

گزینهٔ (۴): تبدیل مواد آلی به یکدیگر، می‌تواند آسان یا دشوار باشد، به طوری که هر چه نوع و شمار گروه‌های عاملی در مولکول هدف بیشتر باشد، ساخت آن دشوارتر و به دانش پیشرفته‌تر و فناوری کارآمدتری نیاز دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳ چند مورد زیر، جزء ویژگی پلاستیک‌ها هستند؟

- چگالی کم
- نفوذپذیری نسبت به آب و هوا
- زیست‌تخریب‌ناپذیری
- مقاومت در برابر خوردگی
- واکنش‌ناپذیری

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

پلاستیک‌ها را می‌توان یکی از نتایج خلاقیت و نوآوری بشر دانست.

یکی از مواد پلاستیکی قابل بازیافت، پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) است. برای این منظور، ابتدا باید آن‌ها را جداگانه جمع‌آوری و سپس با انجام فرایندهای فیزیکی و شیمیایی، به مواد قابل استفاده تبدیل کرد. دو راه برای بازیافت وسایل پلاستیکی وجود دارد:

۱) این مواد را پس از شست‌وشو و تمیزکردن، ذوب کرده و دوباره از آن‌ها برای تولید وسایل و ابزار دیگر استفاده می‌کنند و یا این‌که آن‌ها را خرد کرده و به تکه‌های کوچکی به نام **پَرک** تبدیل و در تولید مواد پلاستیکی دیگر استفاده می‌کنند.

۲) پسماندها را به مونومرهای سازنده یا مواد اولیهٔ مفید و ارزشمند تبدیل می‌کنند.

پلاستیک‌ها
- از ویژگی‌های آن‌ها می‌توان به چگالی کم، نفوذناپذیری نسبت به هوا و آب، ارزان‌بودن و مقاومت در برابر خوردگی اشاره کرد.
- امروزه سالانه حدود ۴۰۰ میلیون تن از آن‌ها در جهان تولید می‌شود.
- به طور معمول، زیست‌تخریب‌ناپذیرند و برای مدت طولانی در طبیعت باقی می‌مانند.

پاسخ خیلی تشریحی

طبق نمودار بالا موارد دوم و پنجم نادرست‌اند.

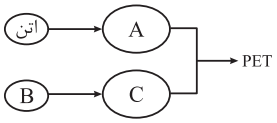
همهٔ موارد در درس‌باکس بررسی شده‌اند برای همین فقط نادرست‌ها را بررسی می‌کنیم.

مورد دوم: پلاستیک‌ها نسبت به آب و هوا، نفوذناپذیرند!

مورد پنجم: این مواد در واکنش شیمیایی شرکت می‌کنند، مثلاً می‌توان با توجه به واکنش‌پذیری آن، بازیافت به روش شیمیایی را انجام داد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۴ با توجه به نمودار زیر که فرایند کلی سنتز PET را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟ $(O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1})$



۱) در تبدیل ۵۳ گرم مادهٔ B با خلوص ۴۰ درصد به C، ۰/۱ مول مادهٔ C تولید می‌شود.

۲) شمار پیوندهای دوگانه در C، برابر با تعداد اتم‌های کربنی است که در ساختار آن عدد اکسایش منفی دارند.

۳) مادهٔ A در اثر واکنش گاز اتن در حضور کاتالیزگر پتاسیم منگنات رقیق در شرایط مناسب تولید می‌شود.

۴) اگر در فرمول PET حاصل، ۱۲۰۰ عامل استری وجود داشته باشد، شمار واحد تکرارشوندهٔ آن، ۹/۶ برابر درصد جرمی کربن در آن است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا نمودار داده‌شده در سؤال را کامل می‌کنیم و *بعدش می‌ریم سراغ* بررسی گزینهٔ (۴):

$$\left.\begin{array}{l} (C_2H_4)\text{ اتن} \xrightarrow[\text{پتاسیم پرمنگنات}]{\text{محلول آبی و رقیق}} (C_2H_6O_2)\text{ اتیلن گلیکول} \\ (C_8H_{10})\text{ پارازیلن} \xrightarrow[\text{پتاسیم پرمنگنات}]{\text{محلول غلیظ}} (C_8H_6O_4)\text{ ترفتالیک اسید} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{-(C_{10}H_8O_4)-_n}{\text{PET}}$$

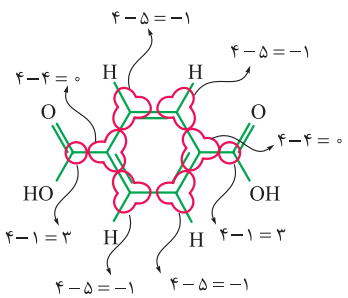
شمار واحدهای تکرارشونده، از فرمول $n=600 \Rightarrow 2n=1200$ به دست می‌آید و درصد جرمی کربن نیز به صورت زیر است:

$$\text{درصد جرمی کربن} = \frac{\text{جرم C}}{C_{10}H_8O_4}\times 100 \Rightarrow \frac{120}{192}\times 100 = \%62/5 \Rightarrow \frac{\text{شمار واحد تکرارشونده}}{\text{درصد جرمی کربن}} = \frac{600}{62/5} = 9/6$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):
$$53\,g\,C_8H_{10}\times\frac{40}{100}\times\frac{1\,mol\,C_8H_{10}}{106\,g\,C_8H_{10}}\times\frac{1\,mol\,C_8H_6O_4}{1\,mol\,C_8H_{10}} = 0/2\,mol\,C_8H_6O_4$$

گزینهٔ (۲): ترکیب C (ترفتالیک اسید) دارای ساختار زیر است.



$$\left.\begin{array}{l} \text{شمار پیوند دوگانه} = 5 \\ \text{شمار کربن با عدد اکسایش منفی} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{شمار کربن با عدد اکسایش منفی} \neq \text{شمار پیوند دوگانه}$$

گزینهٔ (۳): کاتالیزگر مورد استفاده، پتاسیم پرمنگنات است، نه منگنات!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۵ کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ ساده‌ترین الکل درست است؟

الف) برای تولید آن، اکسید قطبی کربن را در مجاورت کاتالیزگر می‌سوزانند. (CH_3OH)

ب) در مرحلهٔ اول روش غیرمستقیم تهیهٔ آن از گاز مرداب، عدد اکسایش کربن، ۶ درجه افزایش می‌یابد. (CO)

پ) از آن برای سنتز الکل دوعاملی موجود در مونومرهای سازندهٔ PET استفاده می‌شود. (CH_4)

ت) در روش تولید مستقیم آن از گاز مرداب، کاتالیزگر مورد استفاده با کاهش ΔH واکنش، سرعت تولید را افزایش می‌دهد. (اتیلن گلیکول)

۱) الف ـ ب
۲) پ ـ ت
۳) فقط ب
۴) الف ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

PET در شرایط مناسب می‌تواند با **متانول** واکنش دهد و به مواد مفیدی تبدیل شود. این مواد را می‌توان برای تولید پلیمرها به کار برد، اما برای این کار سالانه به مقدار زیادی متانول نیاز است. دانستن نکات زیر دربارهٔ متانول *بر شما واجب است*؛

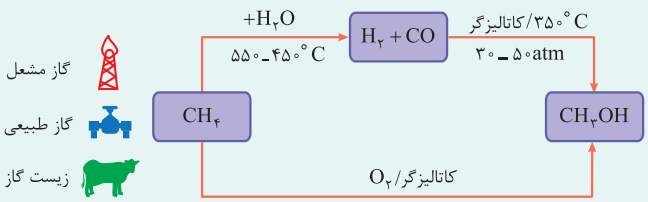
۱) مواد واکنش‌دهنده برای واکنش تولید متانول در مقیاس صنعتی (یعنی CO و H_2) در دسترس نیستند، به همین دلیل ابتدا باید آن‌ها را تولید کرد. برای تهیهٔ گازهای کربن مونوکسید و هیدروژن می‌توان از واکنش گاز متان با بخار آب در حضور کاتالیزگر استفاده کرد:

$$\underset{\text{کاهنده}}{CH_4(g)} + \underset{\text{اکسنده}}{H_2O(g)} \rightarrow CO(g) + 3H_2(g)$$

(عدد اکسایش: -4 در CH_4، $+2$ در CO، $+1$ در H_2O، 0 در H_2)

۲) متانول را می‌توان به طور مستقیم از متان تهیه کرد. همان‌طور که می‌دانید، گاز متان سازندهٔ اصلی گاز طبیعی است که در میدان‌های نفتی به فراوانی یافت می‌شود. در این میدان‌ها برای افزایش ایمنی، بخش قابل توجهی از آن را می‌سوزانند. متان (CH_4) یک آلکان است (هیدروکربن سیرشده) و واکنش‌پذیری بسیار کمی دارد؛ بنابراین تبدیل آن به متانول فرایندی دشوار است و به دانش و فناوری پیشرفته‌ای نیاز دارد.

تولید مستقیم متانول از متان: $CH_4 \xrightarrow{O_2/\text{کاتالیزگر}} CH_3OH$



متانول:

- ساده‌ترین عضو خانوادهٔ الکل‌ها با فرمول مولکولی CH_3OH است.
- مایعی بی‌رنگ و بسیار سمّی است و به هر نسبتی در آب حل می‌شود.
- می‌توان آن را از چوب تهیه کرد. (به الکل چوب معروف است.)
- در صنعت آن را از واکنش گازهای کربن مونوکسید و هیدروژن در شرایط مناسب و در حضور کاتالیزگر تهیه می‌کنند:

$$CO(g) + 2H_2(g) \xrightarrow[\text{دما و فشار مناسب}]{\text{کاتالیزگر}} CH_3OH(l)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

تنها عبارت «ب» درست است.

بررسی همهٔ عبارات:

الف) CO با H_2 واکنش می‌دهد و نمی‌سوزد!

ب) مطابق با درس‌باکس، این مورد کاملاً درست است!

تیزبازی

در صورت غلط‌بودن «الف» و درست‌بودن «ب»، فقط گزینهٔ (۳) می‌تواند گزینهٔ درست این سؤال باشد.

پ) از آن برای بازیافت PET، استفاده می‌شود.

ت) کاتالیزگر، ΔH را کاهش نمی‌دهد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir