آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله یازدهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۲/بهمن/۱۴۰۳

دفترچه شماره یک

حسابان و ریاضیات پایه	هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	بودجه‌بندی دروس
ریاضی (۱) فصل ۳ صفحهٔ ۴۷ تا ۶۸ حسابان (۲) فصل ۴ صفحهٔ ۷۱ تا ۱۱۰	هندسه (۲) فصل ۳ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۵۹ تا ۶۷ هندسه (۳) فصل ۲ (درس ۳) و فصل ۳ (درس ۱) صفحهٔ ۴۷ تا ۷۶	ریاضی (۱) فصل ۷ (درس ۱) صفحهٔ ۱۴۱ تا ۱۵۱ آمار و احتمال فصل ۲ (درس ۱) صفحهٔ ۳۵ تا ۴۳ ریاضیات گسسته فصل ۲ (درس ۲) و فصل ۳ (درس ۱) صفحهٔ ۴۳ تا ۷۲	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۵ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

۱- تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۱ & ;x<۰\\ ۱-x & ;x\geq ۰\end{cases}$ مفروض است. حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(h)-f(|h|)}{h}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۲

۲- تابع $f(x)=\begin{cases}ax[-x]+۱ & ;x\leq -۲\\ bx^۲+۲x & ;x>-۲\end{cases}$ در $x=-۲$ مشتق‌پذیر است. حاصل ab کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۳- تابع $f(x)=\Big||x^۲-۱|-a\Big|$ در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است. حاصل‌ضرب طول نقاط مشتق‌ناپذیر تابع f کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۴

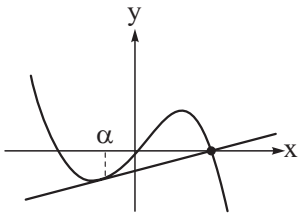
۴- دو تابع f و g در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند و رابطهٔ $f'(۲)g(۲)-f(۲)g'(۲)=۵$ برقرار است. اگر $g(۲)=\sqrt{۳}$ باشد، مشتق تابع $\frac{f}{g}$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) ۱۵ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) ۶

۵- اگر آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x-۲\sqrt{x}$ در بازهٔ $[۱,\alpha]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=۴$ برابر باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۶- نمودار تابع $f(x)=۴x-x^۳$ و خط مماس بر آن در شکل زیر رسم شده است. مقدار α کدام است؟



۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۷- اگر نمودارهای دو تابع $f(x)=x^۲+\frac{۲}{x}$ و $g(x)=x^۳+ax+b$ در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ بر هم مماس باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۱۴ ۲) ۱۴

۳) -۷ ۴) ۷

محل انجام محاسبات

۸- اگر $(fog)(x) = x^۲ - ۵x$ و $g(x) = ۲x - ۳$ باشد، مشتق تابع $g^{-۱}of'$ در $x = ۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۹- اگر $f(x) = ۴x + ۴\sqrt{x}$ و $g(x) = x^۲ - \frac{۴}{x} - ۵$ باشد، مشتق تابع $h(x) = (fog)(\frac{۴}{x})$ در $x = -۲$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) ۱۲ ۳) -۱۸ ۴) ۱۸

۱۰- اگر $f(x) = (\frac{x^۲ + \sqrt{۲x}}{x - ۱})\cos\frac{\pi}{x}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) $\frac{-۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۱۱- اگر $f(x) = \sqrt{\tan\frac{\pi}{x}}$ باشد، مقدار $f'(۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{-\pi}{۱۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۸}$ ۴) $-\frac{\pi}{۸}$

۱۲- اگر $g'(x) = \frac{۲}{x^۳}$ و $f(\frac{۲}{x}) = g(\sqrt{x})$ باشد، مقدار $f''(۲)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳- ریشهٔ سوم عدد a از ریشهٔ هفتم a بزرگ‌تر است و ریشهٔ هفتم $|a|$ از ریشهٔ نهم $|a|$ کوچک‌تر است. حدود a کدام است؟

۱) $(-\infty, -۱)$ ۲) $(-۱, ۰)$

۳) $(۰, ۱)$ ۴) $(۱, +\infty)$

۱۴- اگر $۳A = \frac{\sqrt[۳]{۳\sqrt{A}} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۳}} \times ۸۱^{\frac{-۳}{۴}}}$ باشد، مقدار ناصفر A کدام است؟

۱) $\sqrt{۲۷}$ ۲) $\sqrt[۳]{۸۱}$ ۳) ۸۱ ۴) ۲۷

۱۵- مقدار عبارت $A = \frac{a^۴\sqrt{a} - ۱}{a^۳ + a\sqrt{a} + ۱}(a\sqrt{a} + ۱)$ به ازای $a = \sqrt[۳]{۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

محل انجام محاسبات

۱۶- اگر $x=\sqrt{۳-\sqrt{۵+۲\sqrt{۳}}}$ و $y=\sqrt{۳+\sqrt{۵+۲\sqrt{۳}}}$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}+۱$
۲) $\sqrt{۵}+۱$
۳) $۲\sqrt{۳}+۱$
۴) $\sqrt{۳}+۱$

۱۷- اگر $\alpha-\beta=۱$ و $\alpha^۳+\beta^۳+۹=۰$ باشد، حاصل $\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟

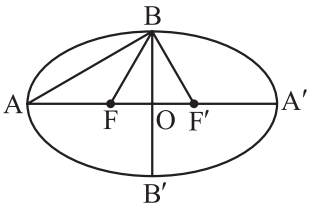
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۸- در تجزیهٔ عبارت $P(x)=ax^۳-۱۱x^۲+(۸a+۱)x-۶$ عامل $x-۲$ دیده می‌شود. در تجزیهٔ عبارت $P(۳x-۲)$ کدام عامل دیده نمی‌شود؟

۱) $۳x-۳$
۲) $۳x-۴$
۳) $۳x-۵$
۴) $۶x-۵$

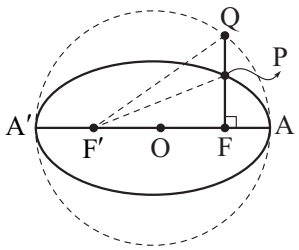
محل انجام محاسبات

۱۹- مطابق شکل، F و F' کانون‌های بیضی و BB' قطر کوچک آن است. اگر مساحت مثلث ABO چهار برابر مساحت مثلث BFF' باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

۲۰- بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' مطابق شکل زیر مفروض است. از نقطهٔ F عمودی به AA' رسم می‌کنیم تا بیضی و دایره به قطر AA' را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کند. اگر فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A یکسان و مساحت مثلث PQF' برابر ۴/۵ باشد، حاصل $AF \times A'F'$ کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}+۶$
۲) $۳\sqrt{۳}+۶$
۳) $۶\sqrt{۳}+۹$
۴) $۶\sqrt{۲}+۹$

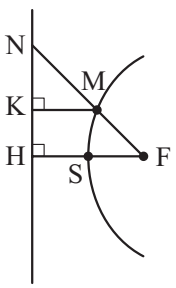
۲۱- نقطهٔ $(۴,۰)$ کانون و محور yها خط هادی یک سهمی است. این سهمی خط $y = ۲$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $۲\frac{۱}{۸}$
۲) $۲\frac{۱}{۴}$
۳) $۲\frac{۳}{۸}$
۴) $۲\frac{۱}{۲}$

۲۲- کانون سهمی به معادلهٔ $۲x^۲ - ۴x + ۳y = b$ روی نیمساز ناحیهٔ چهارم قرار دارد. عرض رأس این سهمی کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۸}$
۲) $-\frac{۱۱}{۸}$
۳) $\frac{۵}{۸}$
۴) $-\frac{۵}{۸}$

۲۳- در شکل زیر، نقطهٔ N را طوری روی خط هادی سهمی انتخاب کرده‌ایم که فاصلهٔ آن از کانون سهمی (F)، سه برابر فاصلهٔ کانونی سهمی باشد. حاصل $\frac{KH}{NH}$ کدام است؟



۱) ۰/۶
۲) ۰/۵
۳) ۰/۴
۴) ۰/۳

محل انجام محاسبات

۲۴- مساحت قسمتی از نمودار $|x+1| \le y \le 2$ که در ناحیهٔ اول مختصات قرار ندارد، کدام است؟

۱) $3/5$ ۲) ۳ ۳) $2/5$ ۴) ۴

۲۵- سه نقطهٔ $A(1,2,-4)$، $B(3,-4,0)$ و $C(4,0,-4)$ را در فضا در نظر بگیرید. اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، M در کدام ناحیه قرار دارد و طول CM کدام است؟

۱) ناحیهٔ هفتم و ۳
۲) ناحیهٔ هشتم و $2\sqrt{2}$
۳) ناحیهٔ هفتم و $2\sqrt{2}$
۴) ناحیهٔ هشتم و ۳

۲۶- فرض کنید زاویهٔ بین دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

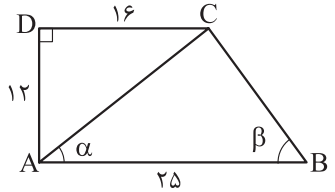
الف) اگر $\theta = 90^\circ$، آن‌گاه $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$

ب) اگر $\theta > 90^\circ$، آن‌گاه $|\vec{a}-\vec{b}| < |\vec{b}|$ و $|\vec{a}|$

پ) اگر $\theta < 90^\circ$، آن‌گاه $|\vec{a}-\vec{b}| > |\vec{b}|$ و $|\vec{a}|$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۷- در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه ABCD مطابق شکل، قطر AC رسم شده است. حاصل $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ کدام است؟

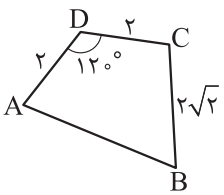


۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۲۸- در مثلث ABC به اضلاع $AB = c$، $AC = b$ و $BC = a$، اگر $5(a^2 - b^2 - c^2) = 4\sqrt{6}bc$ آن‌گاه طول شعاع دایرهٔ محیطی، چند برابر a است؟

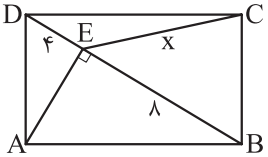
۱) $\frac{2\sqrt{6}}{4}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) ۲ ۴) $2/5$

۲۹- چهارضلعی رسم‌شده در شکل روبه‌رو محاطی است. طول ضلع AB کدام است؟



۱) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ ۲) $2+\sqrt{3}$ ۳) ۴ ۴) $2\sqrt{3}$

۳۰- در مستطیل ABCD مطابق شکل، AE بر قطر BD عمود است. اگر $DE = 4$ و $BE = 8$ باشد، طول EC کدام است؟



۱) $3\sqrt{5}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{6}$

محل انجام محاسبات

۳۱- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \subseteq B$، کدام گزینه نادرست است؟

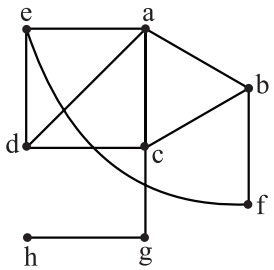
۱) $P(A) \leq P(B)$

۲) $P(B-A) = P(B) - P(A)$

۳) $P(A \cup B) = P(B)$

۴) $0 < P(A-B) < 1$

۳۲- در گراف مقابل، کدام مجموعه، γ- مجموعه نیست؟



۱) $\{e, c, h\}$

۲) $\{a, g, f\}$

۳) $\{b, d, h\}$

۴) $\{a, c, g\}$

۳۳- در پرتاب دو تاس، چه‌قدر احتمال دارد که عدد روشدهٔ یک تاس بر عدد روشدهٔ تاس دیگر بخش‌پذیر نباشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۳۴- اگر A و B دو پیشامد جدا از هم باشند به طوری که $P(A') + P(B') = ۱/۷$، آن‌گاه $P(A-B) + P(B-A)$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۳۵- در گراف کامل $K_۵$، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم وجود دارد؟

۱) ۳۱ ۲) ۱۷ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۳۶- با حروف کلمهٔ «ARASBARAN»، چند ترکیب ۸حرفی مختلف می‌توان ساخت؟

۱) ۷۵۶۰ ۲) ۵۶۲۰ ۳) ۳۳۶۰ ۴) ۲۵۲۰

۳۷- معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۷$، با شرایط $x_۱ \geq -۱$، $x_۲ > ۲$ و $۴ > x_۳ \leq ۲$، چند جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح دارد؟

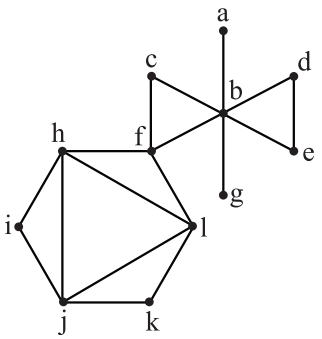
۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۷ ۴) ۳۰

۳۸- سه خانه از یک مربع لاتین مرتبهٔ ۵ انتخاب کرده‌ایم به طوری که هیچ دو خانه‌ای در یک سطر نباشند. با چه احتمالی مجموع سه عدد انتخاب‌شده برابر ۹ است؟

۱) ۰/۱۷۶ ۲) ۰/۱۶۸ ۳) ۰/۱۶ ۴) ۰/۱۵۲

محل انجام محاسبات

۳۹- در گراف مقابل، کدام مجموعه احاطه‌گر مینیمال است؟



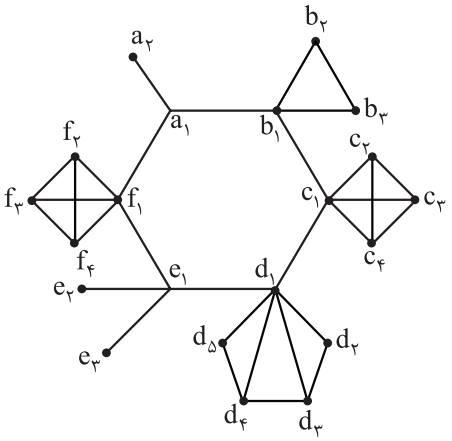
۱) $\{b, f, j\}$

۲) $\{a, b, j\}$

۳) $\{b, i, k\}$

۴) $\{a, h, l, g\}$

۴۰- در گراف زیر، تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر مینیمم، کدام است؟



۱) ۶۴

۲) ۹۶

۳) ۱۹۲

۴) ۲۸۸

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله یازدهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۲/بهمن/۱۴۰۳

دفترچه شماره دو

فیزیک	شیمی	بودجه‌بندی دروس
فیزیک (۲) فصل ۲ صفحهٔ ۴۵ تا ۸۲ فیزیک (۳) فصل ۳ (از ابتدای موج و انواع آن) و فصل ۴ صفحهٔ ۶۹ تا ۱۱۴	شیمی (۲) فصل ۲ (از ابتدای غذای سالم) صفحهٔ ۷۷ تا ۹۸ شیمی (۳) فصل ۳ صفحهٔ ۶۷ تا ۹۰	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۸۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	
مجموع	۶۵ سؤال			۸۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

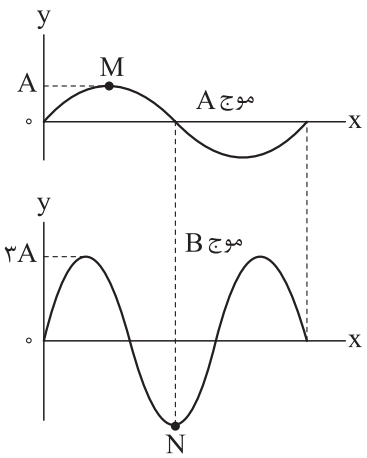
۴۱- در یک تشت موج، بسامد موج تخت تشکیل‌شده بر سطح آب برابر $۲\,Hz$ است. اگر با ورود موج از ناحیهٔ کم‌عمق به ناحیهٔ عمیق، تندی انتشار آن $۰/۲\,m/s$ تغییر کند، طول موج آن چند سانتی‌متر و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۱۰، کاهش می‌یابد.
۲) ۱۰، افزایش می‌یابد.
۳) ۴۰، کاهش می‌یابد.
۴) ۴۰، افزایش می‌یابد.

۴۲- نیروی کشش یک تار $۶۰\,N$ است و هنگامی که با بسامد $۲۵۰\,Hz$ به ارتعاش درمی‌آید، طول موج در آن $۲۰\,cm$ می‌شود. اگر چگالی تار $۸\,g/cm^۳$ باشد، قطر مقطع آن چند میلی‌متر است؟ $(\pi \simeq ۳)$

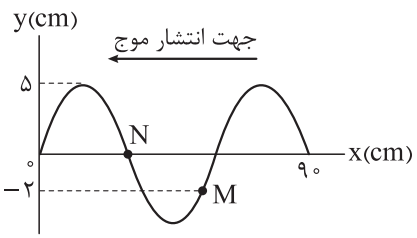
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۳- در شکل زیر، دو موج عرضی A و B در دو طناب متفاوت منتشر می‌شوند. اگر تندی انتشار موج A، ۲ برابر تندی انتشار موج B باشد، بیشینهٔ تندی ذرهٔ M چند برابر بیشینهٔ تندی ذرهٔ N است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۹}$

۴۴- تصویر یک موج عرضی که در طنابی در حال انتشار است، در لحظهٔ $t = ۰$ به شکل زیر است. اگر تندی متوسط ذرهٔ M از طناب در مدتی که موج $۳۰\,cm$ در محیط پیشروی می‌کند، برابر $۰/۵\,m/s$ باشد، شتاب ذرهٔ N از طناب در لحظهٔ $t = ۰/۴۵\,s$ در SI کدام است؟ $(\pi^۲ \simeq ۱۰)$



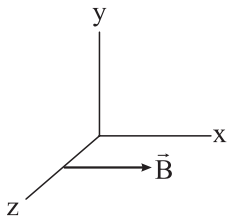
۱) $-۵\sqrt{۲}\,\vec{j}$
۲) $+۵\sqrt{۲}\,\vec{j}$
۳) $-\frac{۲۵}{۴}\sqrt{۲}\,\vec{j}$
۴) $+\frac{۲۵}{۴}\sqrt{۲}\,\vec{j}$

۴۵- شنونده‌ای از فاصلهٔ ۶۴۰ متری یک چشمهٔ صوت به فاصلهٔ ۱۶۰ متری آن می‌رود. تراز شدت صوتی که می‌شنود چند دسی‌بل افزایش می‌یابد؟ $(\log ۲ = ۰/۳)$

۱) ۰/۶ ۲) ۱/۲ ۳) ۶ ۴) ۱۲

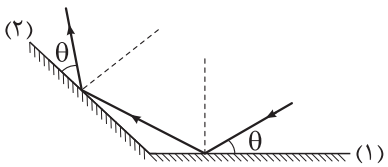
محل انجام محاسبات

۴۶- شکل زیر، جهت میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی را در یک نقطه و در یک لحظه نشان می‌دهد. اگر جهت انتشار موج در جهت مثبت محور z باشد، جهت میدان الکتریکی در این لحظه و در این مکان کدام است؟



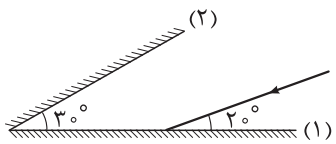
۱) $-y$
۲) $+y$
۳) $-z$
۴) $+z$

۴۷- مطابق شکل، پرتوی نوری به آینهٔ (۱) و در ادامه به آینهٔ (۲) می‌تابد. اگر امتداد پرتوی بازتاب از آینهٔ (۲) با امتداد پرتوی تابش به آینهٔ (۱) زاویهٔ 120° بسازد، θ چند درجه است؟



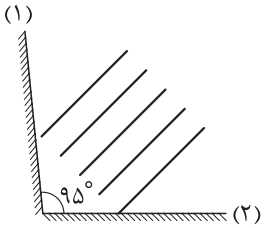
۱) ۲۰
۲) ۳۰
۳) ۴۰
۴) ۶۰

۴۸- در شکل زیر، پرتوی نوری به آینهٔ (۱) و سپس در ادامه به آینهٔ (۲) می‌تابد. در آخرین بازتابش پرتوی نور از آینهٔ (۲)، زاویهٔ بین پرتوی بازتاب و این آینه چند درجه است؟



۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۴۰

۴۹- در شکل زیر، جبهه‌های موج بازتاب‌شده از مانع تخت (۱) که به سمت مانع تخت (۲) در حال پیشروی‌اند، نشان داده شده است. اگر زاویه‌ای که این جبهه‌ها با سطح مانع (۱) می‌سازند، 45° باشد، زاویهٔ بازتاب از مانع تخت (۲) چند درجه است؟



۱) ۳۵
۲) ۴۰
۳) ۵۵
۴) ۵۰

۵۰- شخصی بین دو صخرهٔ قائم و موازی ایستاده و فاصله‌اش از یکی از صخره‌ها، دو برابر فاصلهٔ او از صخرهٔ دیگر است. اگر این شخص فریاد بزند، دو پژواک متوالی صدای خود را به فاصلهٔ زمانی $1/2\,s$ می‌شنود. فاصلهٔ بین دو صخره چند متر است؟ (تندی انتشار صوت در محیط $340\,m/s$ است.)

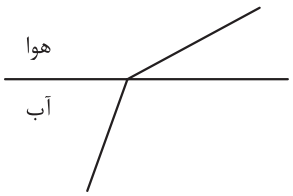
۱) ۲۰۴ ۲) ۴۰۸ ۳) ۶۱۲ ۴) ۱۲۲۴

محل انجام محاسبات

۵۱- بسامد نوری در خلأ ۳۷۵ THz و طول موج آن در مایعی ۰/۶ μm است. ضریب شکست این مایع کدام است؟ ($c = ۳\times۱۰^{۸}\ m/s$)

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

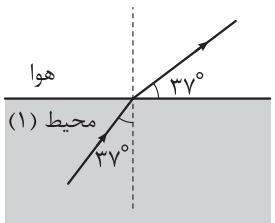
۵۲- یکی از جبهه‌های موجی در مرز بین آب و هوا به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این موج درست است؟



الف) این موج، می‌تواند یک موج صوتی باشد.
ب) این موج، می‌تواند نور مرئی باشد.
پ) طول موج این موج در هوا، بزرگ‌تر از طول موج آن در آب است.
ت) طول موج این موج در آب، بزرگ‌تر از طول موج آن در هوا است.

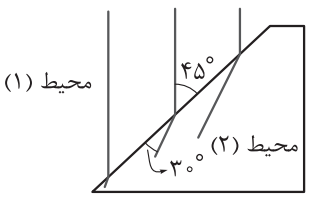
۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

۵۳- در شکل زیر، پرتو نور از محیط شفاف (۱) وارد هوا شده است. اگر ضریب شکست هوا برابر یک باشد، ضریب شکست محیط (۱) کدام است؟ ($\sin ۳۷ = ۰/۶$)



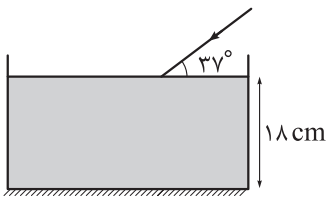
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$
۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۵۴- شکل زیر جبهه‌های موج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد که از محیط (۱) وارد محیط (۲) شده است. به ترتیب طول موج نور در محیط (۱) چند برابر طول موج نور در محیط (۲) و بسامد نور در محیط (۱) چند برابر بسامد نور در محیط (۲) است؟



۱) $۱ ،\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲} ،\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $۱ ،\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۳}{۲}} ،\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

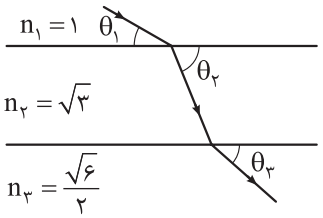
۵۵- در شکل زیر، پرتو نوری وارد آب درون ظرفی می‌شود که در کف آن یک آینهٔ تخت افقی قرار دارد. پرتو نور چند نانوثانیه پس از ورود به آب، از آن خارج می‌شود؟ (پرتو پس از یک بار بازتاب از آینه، از سطح آب خارج می‌شود و $c = ۳\times۱۰^{۸}\ m/s$ و ضریب شکست آب $\frac{۴}{۳}$ است.)



۱) ۲ ۲) ۲۰
۳) ۱/۵ ۴) ۱۵

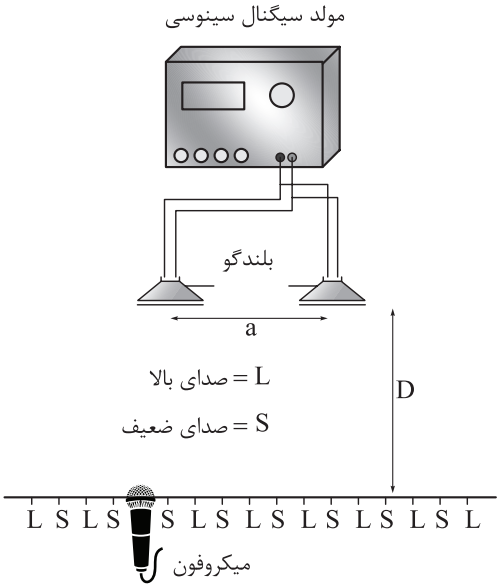
محل انجام محاسبات

۵۶- در شکل زیر پرتو نور تک‌رنگی از سه محیط شفاف با مرزهای موازی عبور می‌کند. اگر اختلاف دو زاویهٔ θ_1 و θ_3 برابر 15° باشد، زاویهٔ θ_2 چند درجه است؟



۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۶۰
۴) ۹۰

۵۷- شکل زیر نشان‌دهندهٔ آزمایش مربوط به تداخل امواج صوتی است. چه تعداد از اقدامات زیر باعث می‌شود نقطه‌های S و L مجاور، به هم نزدیک‌تر شوند؟



الف) افزایش بسامد صوت

ب) کاهش دمای هوای محیط

پ) انجام این آزمایش در آب

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۵۸- تاری به طول ۶۰cm و جرم ۶g بین دو نقطه با نیروی کشش ۳۲۴N بسته شده است. بسامد هماهنگ سوم تار چند هرتز است؟

۱) ۳۰۰
۲) ۶۰۰
۳) ۴۵۰
۴) ۹۰۰

۵۹- سه بسامد تشدیدی متوالی یک تار با دو انتهای بسته عبارت‌اند از ۳۰۰Hz، f و ۴۲۰Hz. اگر تندی انتشار صوت در تار برابر ۲۴۰m/s باشد، طول تار چند متر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶۰- در عبور کدام نور تک‌رنگ در کدام محیط از روزنه‌ای به قطر ۱μm پراشندگی بیشتری رخ می‌دهد؟

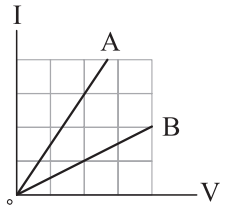
۱) نور قرمز در هوا
۲) نور قرمز در آب
۳) نور آبی در هوا
۴) نور آبی در آب

محل انجام محاسبات

۶۱- سیمی با مقاومت ویژهٔ $۲/۵\times۱۰^{-۸}\Omega.m$ که قطر مقطع آن $۱mm$ است، روی محیط دایره‌ای به شعاع $۱m$، ۵ دور پیچیده شده است. مقاومت الکتریکی این سیم چند اهم است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) π
۴) ۲π

۶۲- نمودار جریان الکتریکی عبوری از دو سیم توپر A و B برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها به شکل زیر است. اگر چگالی سیم A، ۲ برابر چگالی سیم B، طول سیم A، ۴ برابر طول سیم B و جرم سیم A، ۳ برابر جرم سیم B باشد، مقاومت ویژهٔ سیم A چند برابر مقاومت ویژهٔ سیم B است؟

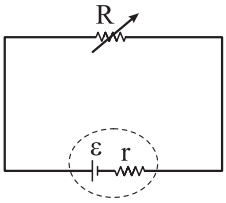


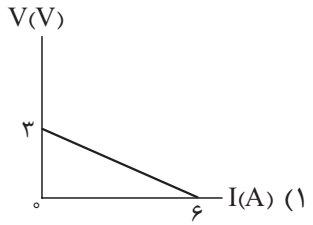
۱) ۳۲
۲) $\frac{۱}{۳۲}$
۳) $\frac{۳۲}{۹}$
۴) $\frac{۹}{۳۲}$

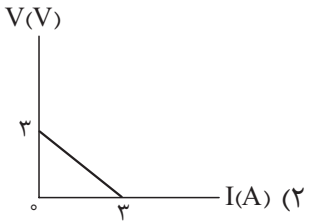
۶۳- اگر دمای یک سیم مسی از $۲۰^{\circ}F$ به $۲۰۰^{\circ}F$ برسد، مقاومت الکتریکی آن چند درصد تغییر می‌کند؟ (ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ مس $\frac{۱}{K}$ ۴×۱۰^{-۳} و تغییر ابعاد سیم در اثر تغییر دما، ناچیز است.)

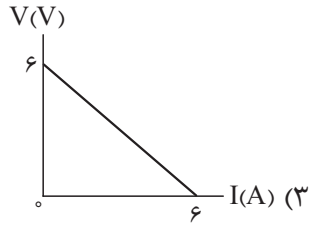
۱) ۴
۲) ۷/۲
۳) ۴۰
۴) ۷۲

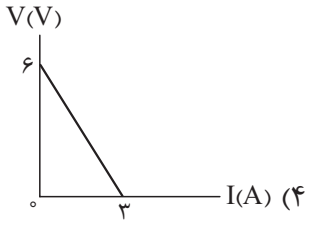
۶۴- در مدار شکل زیر، اگر با تغییر مقاومت رئوستا، جریان الکتریکی عبوری از آن از $۱A$ به $۴A$ برسد، توان مصرفی آن از $۲/۵W$ به $۴W$ می‌رسد. نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری موجود در مدار برحسب جریان عبوری از آن به صورت کدام شکل است؟



۱)


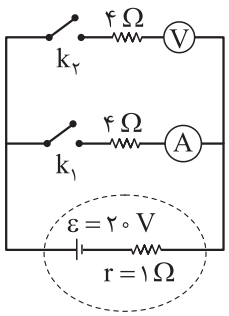
۲)


۳)


۴)


محل انجام محاسبات

۶۵- در مدار شکل زیر، آمپرسنج و ولت‌سنج، آرمانی‌اند. ابتدا کلید k_1 بسته و کلید k_2 باز است. اگر کلید k_1 را باز کرده و کلید k_2 را ببندیم، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری چند ولت تغییر می‌کند؟



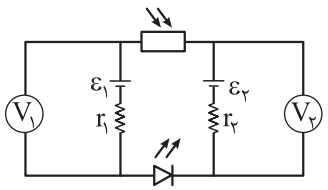
۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

۶۶- در مدار شکل زیر، LED روشن است. اگر شدت نور تابیده‌شده به LDR افزایش یابد، مقدارهایی که ولت‌سنج‌های آرمانی V_1 و V_2 نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟



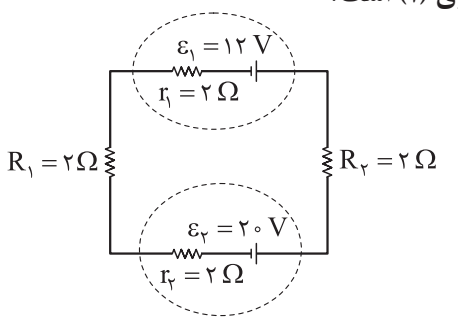
۱) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد

۲) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد

۳) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد

۴) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد

۶۷- در مدار شکل زیر، توان خروجی باتری (۲) چند برابر توان ورودی باتری (۱) است؟



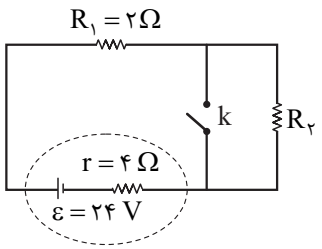
۱) $\frac{۹}{۵}$

۲) $\frac{۹}{۷}$

۳) $\frac{۱۱}{۵}$

۴) $\frac{۱۱}{۷}$

۶۸- در مدار شکل زیر، با بستن کلید k، توان خروجی باتری تغییری نمی‌کند. در حالتی‌که کلید k باز است، توان مصرفی مقاومت R_1 چند برابر توان خروجی باتری است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$

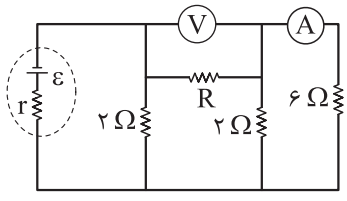
۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

محل انجام محاسبات

۶۹- در مدار شکل زیر، اگر مقداری که آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب، ۱A و ۲V باشد، توان مصرفی مقاومت R چند وات است؟



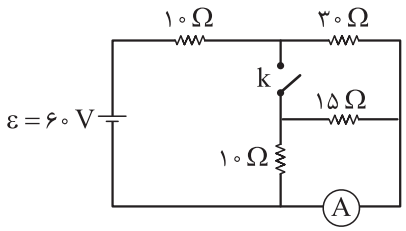
۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

۷۰- در مدار شکل زیر، با بستن کلید k، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر و چگونه تغییر می‌کند؟



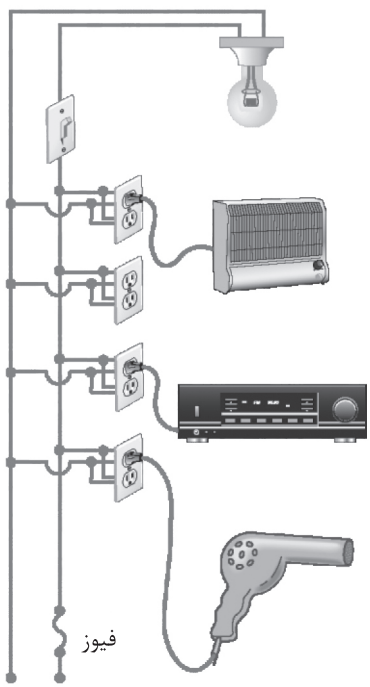
۱) ۰/۵، کاهش می‌یابد.

۲) ۰/۵، افزایش می‌یابد.

۳) ۲/۵، کاهش می‌یابد.

۴) ۲/۵، افزایش می‌یابد.

۷۱- یک لامپ رشته‌ای ۱۰۰ W، یک بخاری برقی ۲۰۰۰ W، یک دستگاه پخش صوت ۸۰۰ W و یک سشوار (موخشک‌کن) ۱۵۰۰ W مطابق شکل به پریزهای یک مدار سیم‌کشی خانگی ۲۲۰ V وصل شده است. اگر فیوز این مدار ۱۵ A باشد، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟



الف) مقاومت معادل مدار ۱۱ Ω است.

ب) جریان الکتریکی عبوری از فیوز ۲۲ A است.

پ) این ترکیب مصرف‌کننده‌ها باعث پریدن فیوز می‌شود.

ت) این ترکیب مصرف‌کننده‌ها باعث پریدن فیوز نمی‌شود.

۱) الف و پ

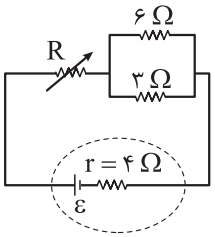
۲) الف و ت

۳) ب و پ

۴) ب و ت

محل انجام محاسبات

۷۲- در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا از 1Ω به 3Ω برسد، توان خروجی باتری چگونه تغییر می‌کند؟



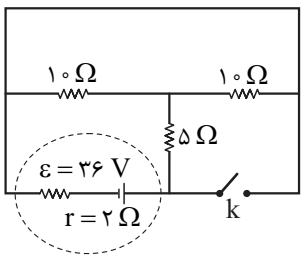
۱) به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

۲) به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

۷۳- در مدار شکل زیر، با بستن کلید k، توان خروجی باتری چند وات و چگونه تغییر می‌کند؟



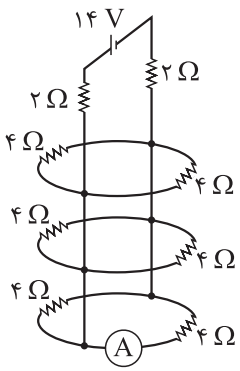
۱) ۹۰، کاهش می‌یابد.

۲) ۹۰، افزایش می‌یابد.

۳) ۴۵، کاهش می‌یابد.

۴) ۴۵، افزایش می‌یابد.

۷۴- در مدار شکل زیر، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر است؟



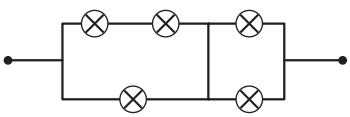
۱) ۳

۲) ۱/۵

۳) ۱

۴) ۰/۵

۷۵- در مدار شکل زیر، لامپ‌ها مشابه‌اند و بیشینهٔ توان مصرفی هر یک از آن‌ها بدون آن‌که آسیب ببینند، $200\ W$ است. بیشینهٔ توان مصرفی مجموعه، بدون آن‌که لامپی آسیب ببیند، چند وات است؟



۱) ۱۰۰۰

۲) ۷۰۰

۳) ۵۲۵

۴) ۳۲۵

محل انجام محاسبات

۷۶- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **سرخ‌فام‌بودن خاک رس، به دلیل وجود آهن اکسید در آن است.**
- **هنگام پختن سفالینه‌های تهیه‌شده از خاک رس، از جرم ترکیب مولکولی موجود در آن کاسته می‌شود.**
- **سیلیس، افزون بر خاک‌های رس، یکی از سازنده‌های اصلی بسیاری از سنگ‌ها، صخره‌ها و نیز شن و ماسه است.**
- **سیلیسیم شبه‌فلزی از خانوادهٔ کربن است و از آن‌جا که ساختار سیلیسیم مانند کربن است، سیلیس هم ساختاری همانند کربن دی‌اکسید دارد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۷- کدام مجموعه از ترکیب‌های زیر، همگی ترکیب یونی هستند؟

۱) $SO_3, P_4O_{10}, Fe_2O_3, SiCl_4$ ۲) $ZnCl, AgNO_3, CuSO_4, Na_2O$

۳) $HNO_3, HClO_4, CO, N_2O_5$ ۴) $Ba(OH)_2, NH_4NO_3, Mg_3(PO_4)_2, K_2SO_4$

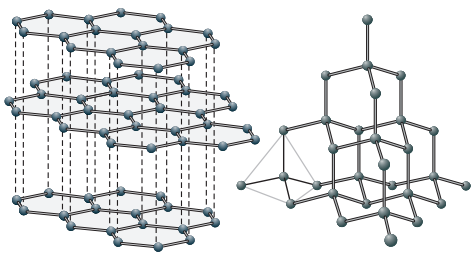
۷۸- درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- **طول پیوند کربن ـ کربن در الماس بیشتر از گرافیت است.**
- **سیلیس همانند سیلیسیم، به صورت خالص در طبیعت یافت نمی‌شود.**
- **پختن نان سنگک بر روی دانه‌های درشت سنگ را می‌توان نشانه‌ای از مقاومت گرمایی سیلیس دانست.**
- **در ساخت مته‌ها و ابزار برش شیشه از الماس استفاده می‌شود.**

۱) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست ۲) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست

۳) درست ـ درست ـ درست ـ نادرست ۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست

۷۹- چند مورد از مطالب زیر در ارتباط با شکل‌های داده‌شده که آلوتروپ‌های مختلف از فراوان‌ترین و اصلی‌ترین عنصر موجود در نفت خام را نشان می‌دهند، نادرست است؟



(A) (B)

- **در دمایی که یک نمونه از مادهٔ B شروع به ذوب‌شدن می‌کند، یک نمونه H_2O به حالت بخار یافت می‌شود.**
- **مادهٔ A نوعی رسانای الکترونی بوده و قدرت پیوندهای کربن ـ کربن در آن بیشتر از مادهٔ B است.**
- **در ساختار مادهٔ A، هر اتم کربن با ۳ اتم کربن دیگر و در ساختار مادهٔ B، هر اتم کربن با ۴ اتم کربن دیگر پیوند برقرار می‌کند.**
- **مادهٔ B ناپایدارتر از مادهٔ A بوده و در حجم یکسان، شمار اتم‌های کربن بیشتری در مقایسه با مادهٔ A دارد.**

۱) سه ۲) دو ۳) یک ۴) صفر

محل انجام محاسبات

۸۰- کدام‌یک از مطالب زیر دربارهٔ گرافن درست است؟

الف) شمار پیوندهای کووالانسی در یک گرم از دو مادهٔ گرافن و گرافیت با هم برابر است.

ب) شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی پیرامون هر اتم کربن در گرافن، کم‌تر از الماس است.

پ) گرافن همانند گرافیت، جامدی کووالانسی با چینش دوبعدی اتم‌هاست و همانند آن سطحی کدر داشته و رسانای جریان الکتریکی است.

ت) گرافن، تک‌لایه‌ای از گرافیت است که در آن هر اتم کربن بین سه حلقهٔ شش‌گوشه، مشترک است.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) پ ـ ت

۸۱- کدام گزینه، تنها شامل موادی است که می‌توان برای توصیف آن‌ها از واژه‌های «مادهٔ مولکولی»، «فرمول مولکولی» و «نیروهای بین مولکولی» استفاده کرد؟

۱) $H_2O(l), CO_2(g), Cl_2(g), HF(g), C_6H_{14}(l)$

۲) $Cu(s), Fe(s), C(s, \text{گرافیت}), NaCl(s), SiO_2(s)$

۳) $NH_3(g), I_2(s), HF(g), C(s, \text{گرافن}), C_6H_{14}(l)$

۴) $MgO(s), KBr(s), Cl_2(g), HF(g), NaCl(s)$

۸۲- اگر شمار اتم‌های کلر در دو نمونهٔ جامد، اولی شامل مخلوطی از $KClO_3$ و KCl با نسبت مولی ۳ به ۲ و دومی شامل $Ca(ClO_3)_2$ خالص، برابر باشد، نسبت جرم نمونهٔ اول به نمونهٔ دوم به تقریب کدام است؟

$(O = 16 , Cl = 35/5 , K = 39 , Ca = 40 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۸۳- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **اگر در سیلیس، اتم‌های Si را با اتم‌های C جایگزین کنیم، پیوندهای کووالانسی ضعیف‌تر شده و نقطهٔ ذوب و جوش نیز کاهش می‌یابد.**
- **در هر مول از سیلیس همانند کربن دی‌اکسید، چهار مول جفت‌الکترون پیوندی وجود دارد.**
- **سیلیسیم کربید، که به عنوان یک ساینده ارزان در تهیهٔ سنباده کاربرد دارد، مانند عنصرهای سازندهٔ خود در حالت خالص، جزء جامدهای کووالانسی است.**
- **شمار اتم‌های اکسیژن در ساختار هر واحد یون سیلیکات، برابر با عدد اکسایش اتم مرکزی در این آنیون است.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

محل انجام محاسبات

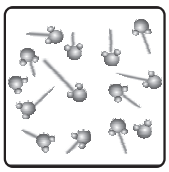
۸۴- با توجه به داده‌های زیر:

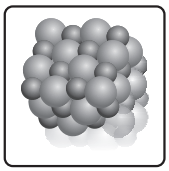
مادهٔ a: کوارتز از جمله نمونه‌های خالص و ماسه از جمله نمونه‌های ناخالص آن است.

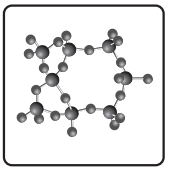
مادهٔ b: تنها ماده‌ای است که در طبیعت به هر سه حالت جامد، مایع و گاز یافت می‌شود.

مادهٔ c: در حالت مذاب و محلول، رسانای جریان برق است.

هر یک از شکل‌های «الف»، «ب» و «پ» به ترتیب از راست به چپ، به کدام ماده مربوط است؟


(الف)


(ب)


(پ)

۱) c, b, a

۲) c, a, b

۳) a, c, b

۴) b, a, c

۸۵- اگر نسبت بار به شعاع Al^{3+}، برابر با 6×10^{-2} باشد، با توجه به روند تغییر شعاع و بار یون‌ها در جدول تناوبی، کدام نسبت بار به شعاع پیشنهادشده غیرقابل‌پذیرش است؟

۱) $2\times10^{-2} : Ca^{2+}$

۲) $1/1\times10^{-2} : S^{2-}$

۳) $2/8\times10^{-2} : N^{3-}$

۴) $4/3\times10^{-2} : Mg^{2+}$

۸۶- چند مورد از مقایسه‌های زیر درست است؟

- **چگالی بار: $O^{2-} < Mg^{2+}$**
- **آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور: $FeO < FeCl_2$**
- **نقطهٔ ذوب: $MgF_2 > Na_2O$**
- **شعاع یونی: $Ca^{2+} < F^-$**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۷- با توجه به جدول زیر که مقادیر آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب یونی حاصل از عناصر اصلی چهار دورهٔ اول جدول تناوبی را برحسب $kJ.mol^{-1}$ نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

کاتیون / آنیون	A	B
C	۸۰۰	x
D	۹۸۰	۲۴۵۰
E	۲۸۷۰	y

الف) در صورتی که عنصر A تک‌ظرفیتی باشد، عنصر B به یقین هم‌گروه آن نیست.

ب) y بزرگ‌ترین عدد بین اعداد مطرح‌شده است.

پ) در ترکیب یونی حاصل از A و C، نسبت کاتیون به آنیون می‌تواند برابر با ۲ باشد.

ت) مقدار عدد x می‌تواند ۲۷۴۰ باشد.

۱) الف ـ ب

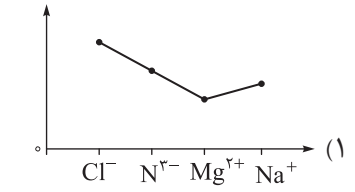
۲) ب ـ ت

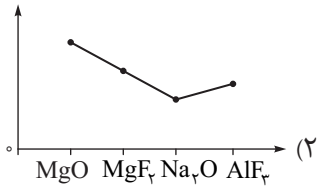
۳) الف ـ پ

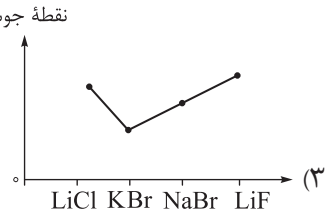
۴) پ ـ ت

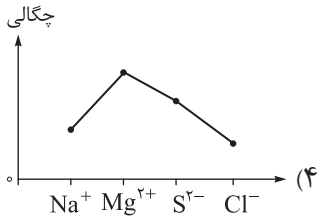
محل انجام محاسبات

۸۸- کدام نمودار با توجه به ویژگی بیان‌شده، نادرست رسم شده است؟

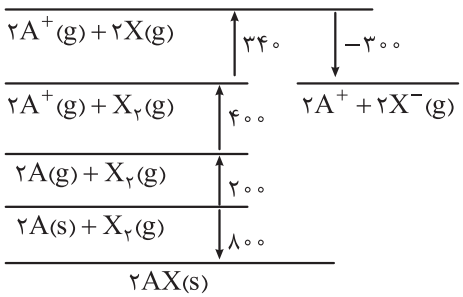
۱) شعاع یونی


۲) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور


۳) نقطهٔ جوش


۴) چگالی بار


۸۹- اگر A و X، هر دو جزء عنصرهای اصلی جدول دوره‌ای باشند، با توجه به نمودار زیر، کدام مورد نادرست است؟ (واحد اعداد kJ است.)



الف) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب یونی AX، ۱۲۴۰ کیلوژول بر مول است.

ب) در صورتی که یک مول الکترون از یک مول A(g) جدا کنیم و آن را به یک مول X(g) بدهیم، ۵۰kJ انرژی به محیط منتقل می‌شود.

پ) در صورتی که دو عنصر A و X مربوط به دو دورهٔ متوالی باشند، چگالی بار کاتیون از آنیون بیشتر است.

ت) در صورتی که به جای $X_2(g)$ از $O_2(g)$ در این فرایند استفاده کنیم، ترکیب حاصل، نقطهٔ جوش بیشتری از ترکیب AX(g) خواهد داشت.

۱) الف ـ ت ۲) فقط الف ۳) ب ـ ت ۴) فقط پ

۹۰- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **فلزات در هر چهار دستهٔ جدول تناوبی یافت می‌شوند و از نظر هر دو رفتار فیزیکی و شیمیایی متنوع‌اند.**
- **جاذبهٔ قوی میان هستهٔ اتم‌های فلز و دریای الکترونی سبب می‌شود تا هستهٔ اتم‌های فلزی در مکان‌های مشخصی به طور ثابت واقع شوند.**
- **مجموعهٔ الکترون‌های اتم‌های فلزی در به وجود آمدن دریای الکترونی مشارکت دارند.**
- **دریای الکترونی مدلی برای توجیه همهٔ رفتارهای فیزیکی محسوب می‌شود و رفتار تنوع عدد اکسایش منگنز را توجیه نمی‌کند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۹۱- کدام مطلب، نادرست است؟

۱) اختلاف آنتالپی فروپاشی فلوئورید و کلرید یک کاتیون، بیشتر از اختلاف آنتالپی فروپاشی کلرید و برمید همان کاتیون می‌باشد.

۲) هر چه یک ترکیب مولکولی نیروی بین مولکولی قوی‌تری داشته باشد، به یقین اختلاف نقطهٔ ذوب و جوش بیشتری خواهد داشت.

۳) اغلب موادی که نیروی بین مولکولی در آن‌ها فقط از نوع وان‌درووالسی است، نسبت به موادی که نیروی بین مولکولی در آن‌ها از نوع پیوند هیدروژنی است، نقطهٔ جوش پایین‌تری دارند.

۴) استفاده از روش تولید انرژی الکتریکی با انرژی خورشیدی در روزهای ابری و شب‌هنگام نیز ممکن است.

۹۲- کدام گزینه، عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«**همهٔ موادی که** ..... ، ..... .»

۱) در تشکیل آن‌ها کاتیون‌های فلزی مشارکت دارند ـ در حالت جامد رسانای جریان برق نیستند

۲) در حالت جامد سخت و شکننده هستند ـ هرگز به شکل عنصری یافت نمی‌شوند

۳) رنگی هستند ـ به یقین بخشی از طیف الکترومغناطیسی را جذب می‌کنند

۴) در دما و فشار اتاق به حالت مایع قرار دارند ـ جزء مواد مولکولی هستند

۹۳- ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار NH_4VO_3 را تهیه کرده و به آن ۲ گرم فلز روی با ۶۵ درصد ناخالصی می‌افزاییم. رنگ محلول نهایی مانند کدام‌یک از ترکیبات زیر خواهد بود؟ ($Zn = 65 : g.mol^{-1}$)

۱) زنگار مس

۲) رنگ محلول مس (II) سولفات

۳) رنگ محلول $FeCl_3$

۴) رنگ محلول ید در هگزان

۹۴- کدام مطلب، نادرست است؟

۱) نگه‌داری سیب‌زمینی در انبار تاریک و خشک، از جوانه‌زنی و فساد آن جلوگیری می‌کند.

۲) نگه‌داری کشمش در ظرف دربسته داخل یخچال، به دلیل رطوبت بالا منجر به کپک‌زدگی آن می‌شود.

۳) نگه‌داری نان در فریزر، به دلیل کاهش فعالیت میکروبی، زمان ماندگاری آن را افزایش می‌دهد.

۴) نگه‌داری روغن زیتون در ظرف شیشه‌ای تیره و در جای خنک، از اکسایش و کاهش کیفیت آن جلوگیری می‌کند.

۹۵- در کدام گزینه، ترتیب انجام واکنش‌ها از راست به چپ، از سریع‌ترین به کندترین به درستی آمده است؟

۱) سوختن چوب کبریت ـ پختن تخم مرغ ـ تشکیل الماس ـ زنگ‌زدن آهن

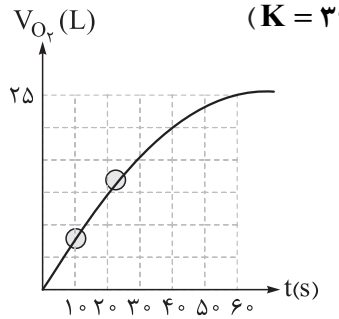
۲) انفجار آتشفشان ـ پوسیدن کاغذ ـ تشکیل نفت خام ـ ترش‌شدن شیر

۳) سوختن بنزین ـ تجزیهٔ پلاستیک ـ فاسدشدن گوشت ـ تشکیل سنگ مرمر

۴) انفجار بمب ـ هضم غذا ـ رسیدن میوه ـ تشکیل فسیل

محل انجام محاسبات

۹۶- اگر نمودار زیر، حجم گاز آزادشده بر اثر انجام واکنش: $2KNO_3(s) \rightarrow 2KNO_2(s) + O_2(g)$ را نشان دهد، به تقریب چند ثانیه زمان لازم است تا جرم فراوردهٔ جامد تولیدشده با جرم واکنش‌دهندهٔ باقی‌مانده برابر شود؟ (چگالی گاز O_2 در شرایط آزمایش، برابر با $0/96\ g.L^{-1}$ است؛ $K=39, O=16, N=14 : g.mol^{-1}$)



۱) ۱۰

۲) ۲۳

۳) ۳۵

۴) ۴۲

۹۷- با توجه به واکنش زیر که در ظرفی با حجم ثابت انجام می‌شود، چند مورد از موارد زیر نادرست است؟

$$A(g) + 2B(g) \rightarrow 3C(g)$$

- **اگر در لحظه‌ای سرعت متوسط مصرف A، برابر با $0/02\ mol.L^{-1}.s^{-1}$ باشد، سرعت متوسط تولید C برابر با $0/06\ mol.L^{-1}.s^{-1}$ خواهد بود.**
- **اگر در لحظه‌ای سرعت متوسط تولید C، برابر با $1/2\ mol.L^{-1}.min^{-1}$ باشد، سرعت متوسط واکنش برابر با $0/06\ mol.L^{-1}.s^{-1}$ خواهد بود.**
- **اگر در شروع واکنش، غلظت A برابر با $0/4\ mol.L^{-1}$ و غلظت B برابر با $0/8\ mol.L^{-1}$ باشد، پس از مدت‌زمانی که غلظت C به $0/6\ mol.L^{-1}$ می‌رسد، غلظت A و B به ترتیب برابر با $0/2\ mol.L^{-1}$ و $0/4\ mol.L^{-1}$ خواهد بود.**
- **اگر نمودار غلظت ـ زمان برای هر سه ماده رسم شود، شیب نمودار برای مادهٔ A، یک‌سوم شیب نمودار برای مادهٔ C و قرینهٔ آن خواهد بود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۸- اگر سرعت متوسط مصرف هیدروژن پراکسید در واکنش زیر، برابر با $0/002$ مولار بر ثانیه باشد، به ترتیب سرعت متوسط مصرف MnO_2، چند گرم بر ثانیه و سرعت متوسط تولید اکسیژن، چند لیتر بر دقیقه است؟ (شرایط را STP، دما را ثابت و حجم محلول را ۲ لیتر در نظر بگیرید؛ $MnO_2 = 87\ g.mol^{-1}$)

$$H_2O_2\ (aq) + MnO_2\ (s) \rightarrow MnO\ (s) + O_2\ (g) + H_2O\ (l)$$

۱) ۰/۳۴۸ ، ۵/۳۷۶

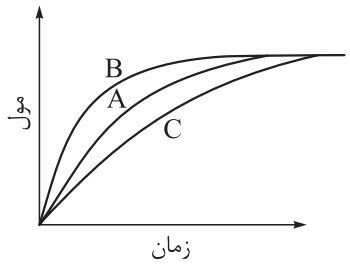
۲) ۰/۳۴۸ ، ۲/۶۸۸

۳) ۰/۱۷۴ ، ۵/۳۷۶

۴) ۰/۱۷۴ ، ۲/۶۸۸

محل انجام محاسبات

۹۹- با توجه به نمودار زیر که مربوط به تولید یک فراورده در یک واکنش در شرایط مختلف است، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) اگر منحنی A مربوط به واکنش پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق باشد، منحنی B می‌تواند مربوط به همین واکنش در دمای $40^{\circ}C$ باشد.

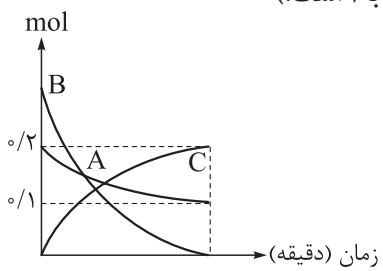
ب) خاک باغچه می‌تواند منحنی تولید بخار آب حاصل از سوختن قند را از A به C تبدیل کند و مدت‌زمان انجام واکنش را کاهش دهد.

پ) استفاده از پتاسیم به جای سدیم در واکنش آن با آب سرد و در همان شرایط، می‌تواند منحنی تولید گاز هیدروژن را از A به B تبدیل کند.

ت) اگر منحنی A مربوط به تولید رادیکال‌ها بر اثر انجام واکنش‌های متنوع و پیچیده در بدن ما باشد، منحنی C تأثیر لیکوپن بر میزان تولید این رادیکال‌ها را نشان می‌دهد.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ ۳) ب ـ ت ۴) پ ـ ت

۱۰۰- با توجه به نمودار زیر، در لحظه‌ای که شمار مول‌های A، ۲ برابر شمار مول‌های C می‌شود، ۴۰ درصد از شمار مول‌های B مصرف شده است. شمار مول‌های اولیهٔ B و نسبت مجموع ضرایب فراورده به مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (ضریب A در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، برابر با ۱ است.)



۱) ۰/۳ ـ ۰/۵

۲) ۰/۳ ـ ۰/۴

۳) ۰/۴ ـ ۰/۴

۴) ۰/۴ ـ ۰/۵

۱۰۱- درستی یا نادرستی مطالب زیر در ارتباط با بنزوئیک اسید، به ترتیب کدام است؟

- **افزودن آن به مواد غذایی، منجر به حذف واکنش‌های شیمیایی فاسدکنندهٔ مواد غذایی می‌شود.**
- **یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک و نوعی رنگ‌دهنده است که در تمشک و توت‌فرنگی وجود دارد.**
- **آشناترین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها است که به صورت هدفمند به مواد خوراکی افزوده می‌شود.**
- **نوعی مادهٔ شیمیایی با ویژگی‌های خاص است که از آن به عنوان افزودنی به منظور افزایش زمان ماندگاری و کیفیت مواد غذایی در صنایع غذایی استفاده می‌شود.**

۱) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست ۲) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست

۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست ۴) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست

محل انجام محاسبات

۱۰۲- در یک واکنش شیمیایی، سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ A، برابر با سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ B و جرم مولی مادهٔ A، ۱/۵ برابر جرم مولی مادهٔ B است. کدام مورد همواره درست است؟

۱) سرعت متوسط واکنش، برابر با سرعت متوسط ماده با جرم مولی بیشتر است.

۲) یکی از آن‌ها واکنش‌دهنده و دیگری فراورده است.

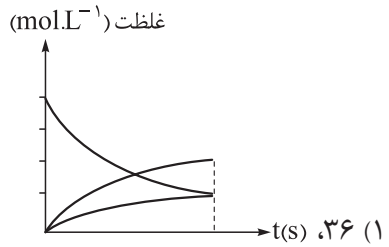
۳) در واحد زمان، تغییر شمار مول‌های A، ۱/۵ برابر تغییر شمار مول‌های B است.

۴) ضریب استوکیومتری ماده با جرم مولی کم‌تر، ۱/۵ برابر ضریب استوکیومتری دیگری است.

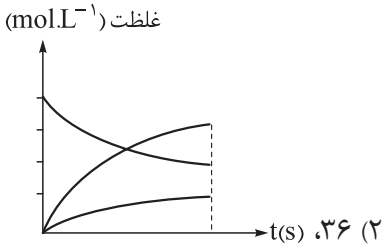
۱۰۳- اگر تغییرات غلظت مواد شرکت‌کننده در یک واکنش شیمیایی به صورت جدول روبه‌رو باشد، سرعت متوسط تولید مادهٔ B در بازهٔ زمانی ۱۲ تا ۱۸ ثانیه، چند مولار بر ساعت است و کدام نمودار، تغییرات غلظت مولار اجزای شرکت‌کننده در این واکنش را به درستی نشان می‌دهد؟

زمان (ثانیه)	غلظت $(mol.L^{-1})$		
	C	B	A
۰	۰	۰	۱/۲۰
۶	۰/۱۵	۰/۴۵	۰/۹۰
۱۲	۰/۲۴	۰/۷۲	۰/۷۲
۱۸	۰/۲۸۵	x	۰/۶۳

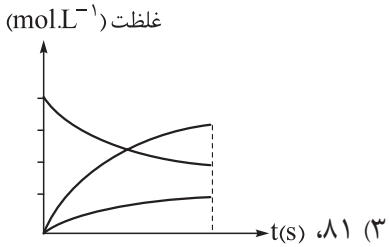
۱) ۳۶،



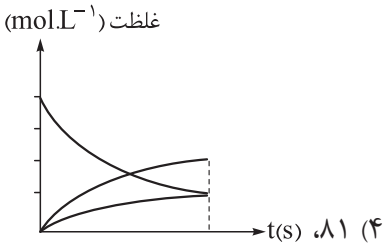
۲) ۳۶،



۳) ۸۱،



۴) ۸۱،



۱۰۴- کدام موارد زیر در ارتباط با رادیکال‌های آزاد و بازدارنده‌های آن‌ها، نادرست است؟

الف) رادیکال‌های آزاد، گونه‌های فعال و ناپایداری هستند که می‌توانند به بافت‌های بدن آسیب برسانند.

ب) بازدارنده‌ها با به دام انداختن رادیکال‌های آزاد، از سرعت واکنش‌های ناخواسته در بدن می‌کاهند.

پ) میوه‌ها و سبزیجات حاوی ترکیباتی هستند که می‌توانند به عنوان بازدارنده عمل کنند.

ت) رادیکال‌های آزاد به دلیل داشتن الکترون‌های جفت‌نشده، واکنش‌پذیری پایینی دارند.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ ت ۳) پ ـ ت ۴) فقط ت

محل انجام محاسبات

۱۰۵- اگر در واکنش فرضی: $2AB(g) \rightarrow A_2(g) + B_2(g)$، واکنش‌دهنده با غلظت یک مولار شروع به تجزیه کند، غلظت آن در هر ساعت، ۰/۱ برابر می‌شود. اگر این واکنش در حضور کاتالیزگر هر ۱۵ دقیقه با همین روند پیشرفت کند، در لحظه‌ای که ۹۹/۹۹ درصد مادهٔ اولیه مصرف شده باشد، تفاوت زمان انجام واکنش در حضور و عدم حضور کاتالیزگر چند دقیقه است و با به کار بردن کاتالیزگر، سرعت متوسط واکنش چند برابر می‌شود؟ (دما را ثابت در نظر بگیرید.)

۱) ۱۸۰، ۸ ۲) ۱۲۰، ۴ ۳) ۱۲۰، ۸ ۴) ۱۸۰، ۴

محل انجام محاسبات



پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله یازدهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۲/بهمن/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان
هندسه	محمدطاهر شعاعی ـ کیوان صارمی ـ حمید گلزاری ـ علی منصف شکری ـ صبا مهدوی ـ حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
فیزیک	امین امینی ـ یاشار انگوتی ـ علیرضا جباری ـ مجید ساکی ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی ـ علیرضا عبداللهی حسین عبدوی‌نژاد ـ علیرضا علینقی ـ علیرضا گونه ـ احسان محمدی ـ فرزاد نامی ـ حامد نبی منصور ـ محمدرضا یاری
شیمی	یاسر راش ـ هومن زندی ـ عباس سرمایه ـ سروش عبادی ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ محمدرضا طاهری‌نژاد

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	عاطفه خان‌محمدی	محمدسجاد نقیه محمد گودرزی	عادل حسینی سعید خان‌بابائی منصور زرکش اصفهانی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی فرزانه خاکپاش ماهان فنی‌فر
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	فرزانه خاکپاش منصور زرکش اصفهانی علیرضا کاظمی‌بقا
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری محمدجواد سورچی مریم گلی حسن‌لو	امین امینی علیرضا جباری مریم گلی حسن‌لو	مریم حسن‌لو مدیا عیدی ماهان فنی‌فر احسان محمدی امیر محمودی انزابی محمدمهدی یوسفی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	یاسر راش سروش عبادی محمدرضا طاهری‌نژاد	محمد مرادی سروش عبادی	علی حیدری وحید فارسیان متین قنبری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهمی‌ها از نابستان

Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	راضیه سادات خلدی‌نسب ـ زهرا صفری ـ محیا غنی‌فرد زهرا فرهادی‌مهر ـ مریم مسلمی‌زاده ـ ساعده نمازی نادره نازآوری ـ نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان فاطمه علی اکبری ـ محمد محمودی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخایی مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته ـ مهدیه گل‌پور لیلا نعمت‌پور ـ دریا لطفی ـ الهام سهرابی زهرا داراخانی ـ طاهره صادق نژاد

Azmoon.kheilisabz.com

۱ تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۱ & ;x<۰\\ ۱-x & ;x\geq ۰\end{cases}$ مفروض است. حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(h)-f(|h|)}{h}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۲

پاسخ خیلی تشریحی به ازای $h\to ۰^-$ عبارت‌های $f(h)$ و $f(|h|)$ را در حد داده‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$h\to ۰^-\begin{cases}f(\underbrace{h}_{۰^-})=۳h+۱\\ f(\underbrace{|h|}_{۰^+})=۱-|h|\end{cases}\Rightarrow \lim_{h\to ۰^-}\frac{f(h)-f(|h|)}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۳h+۱-(۱-|h|)}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۳h+\overbrace{|h|}^{-h}}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۲h}{h}=۲$$

۲ تابع $f(x)=\begin{cases} ax[-x]+1 & ;x\le -2 \\ bx^2+2x & ;x>-2 \end{cases}$ در $x=-2$ مشتق پذیر است. حاصل **ab** کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{3}{8}$

Hint

شرط مشتق‌پذیری در یک نقطه:

پیوستگی در آن نقطه

مساوی‌بودن مشتق چپ و راست در آن نقطه

درس Box

ارتباط پیوستگی و مشتق‌پذیری

ارتباط پیوستگی و مشتق‌پذیری به صورت ساختمان دوطبقهٔ مقابل است:

مشتق در a

پیوستگی در a

قضیه: اگر f در a مشتق داشته باشد (طبقهٔ دوم داشته باشد)، در a پیوسته است. (طبقهٔ اول هم دارد).

نتیجه: اگر f در a پیوسته نباشد (طبقهٔ اول نداشته باشد)، مشتق هم ندارد (طبقهٔ دوم هم ندارد)؛ ولی اگر پیوسته باشد (طبقهٔ اول داشته باشد)، ممکن است در a مشتق داشته باشد یا نه.

مشتق چپ و راست:

مشتق راست تابع f در $x=a$:

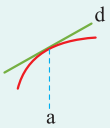
$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق چپ تابع f در $x=a$:

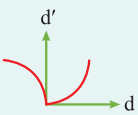
$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نکته اگر $f'_+(a)=f'_-(a)$ (دو عدد مساوی باشند)، آن‌گاه $f'(a)$ هم وجود داشته و برابر با مشتق‌های چپ و راست است؛ اما اگر مشتق چپ و راست دو عدد مختلف باشند، $f'(a)$ موجود نیست.

نکته مشتق راست (چپ) در صورت وجود، شیب مماس راست (چپ) را نشان می‌دهند، مثلاً:



$$f'_+(a)=f'_-(a)=f'(a)=m_d$$



$$\begin{cases} f'_+(a)=m_d \\ f'_-(a)=m_{d'} \\ f'(a)=\text{موجود نیست} \end{cases}$$

نکته برای به دست آوردن مشتق‌های چپ و راست در امتحان نهایی از تعریف آن‌ها استفاده کنید.

نکته اگر تابع f از راست پیوسته باشد، برای به دست آوردن $f'_+(a)$ می‌توانیم از فرمول‌های مشتق استفاده کنیم.

نکته اگر تابع f از چپ پیوسته باشد، برای به دست آوردن $f'_-(a)$ می‌توانیم از فرمول‌های مشتق استفاده کنیم.

پیوستگی

شرط پیوستگی تابع f در $x=a$:

$$\underbrace{\lim_{x\to a^+}f(x)}_{\text{حد راست}}=\underbrace{\lim_{x\to a^-}f(x)}_{\text{حد چپ}}=\underbrace{f(a)}_{\text{مقدار}}$$

پیداکردن مجهول توابع پیوستهٔ چندضابطه‌ای:

	فرم تابع	برای پیوستگی تابع چه می‌کنیم؟	شرط پیوستگی در نقطهٔ مرزی دامنه
۱	$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\neq a\\ k & x=a\end{cases}$	حد چپ و راست را از g می‌گیریم و مقدارش هم k است.	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=k$
۲	$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq a\\ h(x) & x<a\end{cases}$	حد راست و مقدارش را از g و حد چپ را هم از h می‌گیریم.	$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=g(a)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)$
۳	$f(x)=\begin{cases}g(x) & x>a\\ k & x=a\\ h(x) & x<a\end{cases}$	حد راست را از g می‌گیریم و حد چپ را از h و مقدارش هم k است.	$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)=k$
۴	$f(x)=\begin{cases}g(x) & a<x<b\\ h(x) & x\geq b \text{ یا } x\leq a\end{cases}$	در دو نقطهٔ $x=a$ و $x=b$ پیوسته باشد.	$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=h(a)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)$ $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=h(b)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)$

مشتق‌پذیری در مرز توابع چندضابطه‌ای:

اگر تابع $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq a\\ h(x) & x<a\end{cases}$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو شرط زیر را داشته باشد:

۱	در $x=a$ پیوسته باشد.	$g(a)=h(a)$
۲	مشتق راست و چپ در $x=a$ برابر باشد.	$g'(a)=h'(a)$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}ax+4 & x\geq 2\\ x^3+b & x<2\end{cases}$ در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۱) باید f در $x=2$ پیوسته باشد:

$$\underbrace{2a+4}_{\text{مقدار و حد راست}}=\underbrace{2^3+b}_{\text{حد چپ}}\Rightarrow 2a-b=4$$

۲) باید مشتق راست و چپ در $x=2$ برابر باشد:

$$\underbrace{a}_{\text{مشتق راست}}=\underbrace{3x^2}_{\text{مشتق چپ}}\xrightarrow{x=2} a=12$$

پس $a=12$ و $b=20$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** برای این‌که تابع f در $x=-2$ مشتق‌پذیر باشد، باید اولاً در این نقطه پیوسته باشد و دوماً مشتق چپ و راست آن در این نقطه با هم برابر باشند.

گام دوم: شرط پیوستگی را چک می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=f(2)$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}(ax[-x]+1)\overset{\begin{cases}x<-2\\ -x>2\end{cases}}{=\!=}\lim_{x\to(-2)^-}(2ax+1)=-4a+1$$

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(bx^2+2x)=4b-4$$

$$\xrightarrow{\text{پیوستگی}} -4a+1=4b-4\Rightarrow \boxed{4b+4a=5}\quad (*)$$

$$f(-2)=a(-2)[2]+1=-4a+1$$

گام سوم: حالا شرط داشتن مشتق چپ و راست برابر را بررسی می‌کنیم :

$$\begin{cases} x \le -2 \Rightarrow f'_-(-2) = (2ax+1)' = 2a \\ x > -2 \Rightarrow f'_+(-2) = (bx^2+2x)' = 2bx+2 = -4b+2 \end{cases} \Rightarrow 2a = -4b+2 \Rightarrow \boxed{a = -2b+1} \quad (**)$$

گام چهارم: حالا از (*) و (**) داریم:

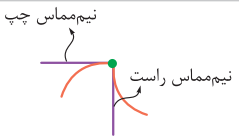
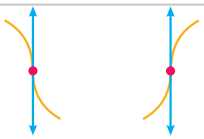
$$\begin{cases} 4a+4b=5 \\ a=-2b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{4} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow ab = \frac{-3}{8}$$

۳ تابع $f(x)=\big||x^۲-۱|-a\big|$ در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است. حاصل‌ضرب طول نقاط مشتق‌ناپذیر تابع f کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۴

Hint توابع قدرمطلقی در ریشه‌شان مشتق‌ناپذیر هستند. (ریشه‌ها باید ساده باشند، از مرتبهٔ مزدوج نباشند.)

درس Box **نقاط مشتق‌ناپذیری**

اسم نقطه	توضیح	کجا می‌تواند رخ دهد؟	مثال نموداری
نقاط ناپیوستگی	هر نقطه‌ای که تابع در آن ناپیوسته باشد، قطعاً مشتق‌ناپذیر هم هست.	ریشه‌های مخرج نقاط صحیح داخل براکت مرز توابع چندضابطه‌ای	
گوشه	اولاً تابع در آن پیوسته است. ثانیاً «مشتق‌های چپ و راست، دو عدد نابرابرند.» یا «مشتق یک طرف عدد و طرف دیگر بی‌نهایت است.»	ریشه‌های سادهٔ قدرمطلق مرز توابع چندضابطه‌ای	
عطف قائم	مشتق‌های دو طرف بی‌نهایت‌های هم‌علامت هستند.	عامل صفرکنندهٔ داخل رادیکال	
بازگشتی	مشتق‌های دو طرف بی‌نهایت‌های ناهم‌علامت هستند.		

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** از آن‌جایی که تابع f در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است و f نیز به صورت تابع قدرمطلقی است، نتیجه می‌گیریم که $x=۲$ ریشهٔ داخل قدرمطلق است:

$$f(۲)=۰ \Rightarrow |۳-a|=۰ \Rightarrow a=۳$$

گام دوم: پس $f(x)=\big||x^۲-۱|-۳\big|$ است. این تابع در نقاطی که ریشهٔ داخل قدرمطلق هستند، مشتق‌ناپذیر است:

۱) $|x^۲-۱|=۰ \Rightarrow x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$

۲) $|x^۲-۱|-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲-۱=۳ \Rightarrow x=\pm ۲ \\ x^۲-۱=-۳ \Rightarrow x^۲=-۲ \text{ غ.ق.ق.} \end{cases}$

پس نقاط مشتق‌ناپذیری تابع f، $x\in\{\pm ۱,\pm ۲\}$ هستند که حاصل‌ضربشان برابر با ۴ است.

۴ دو تابع f و g در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند و رابطهٔ $f'(۲)g(۲)-f(۲)g'(۲)=۵$ برقرار است. اگر $g(۲)=\sqrt{۳}$ باشد، مشتق تابع $\frac{f}{g}$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) ۱۵ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) ۶

Hint

$$(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-g'f}{g^۲}$$

درس Box

قواعد مشتق‌گیری

(در جدول زیر، منظور از $(')$ روی فلش، همان مشتق است.)

	رابطه	مثال
ضریب عددی	$a\cdot\square \xrightarrow{'} a\cdot\square'$	$۵x^۳ \to ۵(۳x^۲)=۱۵x^۲$
جمع و تفریق	$f\pm g \xrightarrow{'} f'\pm g'$	$۴x^۷-\sqrt[۳]{x} \to ۲۸x^۶-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$
ضرب	$f\cdot g \xrightarrow{'} f'\cdot g+f\cdot g'$	$x^۲(\sqrt{x}+۱) \to ۲x(\sqrt{x}+۱)+x^۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})$
تقسیم	$\frac{f}{g} \xrightarrow{'} \frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^۲}$	$\frac{x+۴}{۲x^۳-۱} \to \frac{۱(۲x^۳-۱)-۶x^۲(x+۴)}{(۲x^۳-۱)^۲}$
ترکیب	$f(\square) \xrightarrow{'} \square'\cdot f'(\square)$	$f(x^۲+۲x-۳) \to (۲x+۲).f'(x^۲+۲x-۳)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مشتق تابع $\frac{f}{g}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)} \xrightarrow{x=۲} \frac{f'(۲)g(۲)-g'(۲)f(۲)}{g^۲(۲)}$$

گام دوم: مقدار هم صورت و هم مخرج در سؤال داده شده است؛ پس داریم:

$$(\frac{f(۲)}{g(۲)})'=\frac{۵}{(\sqrt{۳})^۲}=\frac{۵}{۳}$$

۵ اگر آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x-۲\sqrt{x}$ در بازهٔ $[۱,\alpha]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=۴$ برابر باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

مشاوره سؤال از مبحث آهنگ تغییر لحظه‌ای و آهنگ تغییر متوسط در کنکورهای سال‌های اخیر مطرح شده است که سؤال ساده‌ای است. تیپ سؤالات مشابه با این سؤال است. پیشنهاد می‌کنم این‌گونه سؤالات را از دست ندهید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: آهنگ متغیر متوسط $f(x)=x-۲\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[۱,\alpha]$ به دست می‌آوریم:

$$A_۱=\frac{f(\alpha)-f(۱)}{\alpha-۱}=\frac{(\alpha-۲\sqrt{\alpha})-(۱-۲)}{\alpha-۱}=\frac{\alpha-۲\sqrt{\alpha}+۱}{\alpha-۱}=\frac{(\sqrt{\alpha}-۱)^۲}{(\sqrt{\alpha}-۱)(\sqrt{\alpha}+۱)}=\frac{\sqrt{\alpha}-۱}{\sqrt{\alpha}+۱}$$

گام دوم: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=۴$ برابر با مشتق تابع در $x=۴$ است:

$$A_۲=(f(۴))'=(۱-۲\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}})\xrightarrow{x=۴}۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

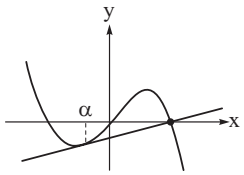
گام سوم: $A_۱=A_۲$ است، پس:

$$\frac{\sqrt{\alpha}-۱}{\sqrt{\alpha}+۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲\sqrt{\alpha}-۲=\sqrt{\alpha}+۱\Rightarrow\sqrt{\alpha}=۳\Rightarrow\alpha=۹$$

گام چهارم: حالا مقدار مشتق در $x=\alpha=۹$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۱-\frac{۱}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۹)=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

۶ نمودار تابع $f(x)=۴x-x^۳$ و خط مماس بر آن در شکل مقابل رسم شده است. مقدار α کدام است؟



۱) -۱
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۲}{۳}$
۴) $-\frac{۱}{۳}$

Hint شیب خط مماس در نقطهٔ $x=\alpha$ با مشتق تابع f در این نقطه برابر است.

درس Box

معادلهٔ خط مماس بر $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$

نقطه	شیب خط مماس	معادلهٔ خط مماس
$(a,f(a))$	$f'(a)$	$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

مثال: معادلهٔ خط مماس بر منحنی $f(x)=x^۳-x^۲$ در $x=۲$:

- $f(۲)=۸-۴=۴ \xrightarrow{\text{نقطه}} (۲,۴)$
- $f'(x)=۳x^۲-۲x \Rightarrow f'(۲)=۱۲-۴=۸ \Rightarrow m_{\text{مماس}}=۸$
- معادلهٔ خط مماس: $y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-۴=۸(x-۲) \Rightarrow y=۸x-۱۲$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: خط مماس رسم‌شده از نقاط $A\begin{vmatrix}\alpha\\ ۴\alpha-\alpha^۳\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۲\\ ۰\end{vmatrix}$ می‌گذرد که B مربوط به صفر تابع f است.

گام دوم: شیب خط مماس، برابر با مشتق تابع f در نقطهٔ $x=\alpha$ است؛ پس داریم:

$$f'(x)=۴-۳x^۲ \Rightarrow f'(\alpha)=۴-۳\alpha^۲$$

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۴\alpha-\alpha^۳-۰}{\alpha-۲}=\frac{\alpha(۴-\alpha^۲)}{\alpha-۲}=\frac{\alpha(۲-\alpha)(۲+\alpha)}{\alpha-۲}=-\alpha(\alpha+۲)$$

$$\Rightarrow f'(\alpha)=m_{AB} \Rightarrow ۴-۳\alpha^۲=-\alpha^۲-۲\alpha \Rightarrow ۲\alpha^۲-۲\alpha-۴=۰ \Rightarrow \alpha^۲-\alpha-۲=۰$$

$$\Rightarrow (\alpha-۲)(\alpha+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-۱\\ \alpha=۲\end{cases}$$

با توجه به شکل مقدار α منفی است؛ پس $\alpha=-۱$ قابل قبول است.

۷ اگر نمودارهای دو تابع $f(x)=x^۲+\frac{۲}{x}$ و $g(x)=x^۳+ax+b$ در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ بر هم مماس باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۱۴ ۲) ۱۴ ۳) -۷ ۴) ۷

Hint

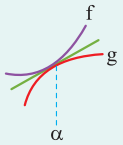
شرط مماس‌بودن دو تابع در $x=a$:

$$\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$$

درس Box

مماس‌بودن دو منحنی بر هم

اگر دو منحنی f و g (یا خط و منحنی) در نقطهٔ α بر هم مماس باشند، دو نکته می‌فهمیم:



$$f(\alpha)=g(\alpha) \text{ و } f'(\alpha)=g'(\alpha)$$

نکته

اگر دو منحنی f و g بر هم مماس باشند، معادلهٔ $f(x)=g(x)$ ریشهٔ مضاعف دارد؛ پس اگر معادلهٔ حاصل از مساوی قراردادن دو تابع درجه‌دوم باشد، باید $\Delta=۰$ باشد. اگر معادلهٔ حاصل درجه‌دوم باشد، استفاده از این نکته بهتر از مطلب قبلی است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر تابع f و g در $x=-۱$ بر هم مماس باشد، دو شرط برقرار است:

۱) $f(-۱)=g(-۱)$

۲) $f'(-۱)=g'(-۱)$

هر یک از شرط‌ها را بررسی می‌کنیم.

گام دوم: (بررسی شرط ۱)

$$\left.\begin{aligned} f(-۱)&=(-۱)^۲+\frac{۲}{(-۱)}=۱-۲=-۱ \\ g(-۱)&=(-۱)^۳+a(-۱)+b=-۱-a+b \end{aligned}\right\} \Rightarrow -a+b=۰ \Rightarrow a=b$$

گام سوم: (بررسی شرط ۲)

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=۲x-\frac{۲}{x^۲} \\ g'(x)&=۳x^۲+a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f'(-۱)=-۲-۲=-۴ \\ g'(-۱)=۳+a \end{cases} \Rightarrow a=-۷ \Rightarrow b=-۷$$

گام چهارم: بنابراین $a+b=-۱۴$ است.

۸ اگر $(fog)(x) = x^۲ - ۵x$ و $g(x) = ۲x - ۳$ باشد، مشتق تابع $g^{-۱}of'$ در $x = ۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۸}$

Hint ضابطهٔ تابع f را به کمک fog و g پیدا کنید.

درس Box **مشتق توابع مهم**

مثال	مشتق	عبارت
$۵ \xrightarrow{'} ۰$	صفر	عدد
$x^۵ \xrightarrow{'} ۵x^۴$	$nx^{n-۱}$	x^n
$(x^۳ - x^۲)^۶ \xrightarrow{'} ۶(x^۳ - x^۲)^۵ \times (۳x^۲ - ۲x)$	$n \cdot \square' \square^{n-۱}$	$\square^n$
$\sqrt{۳x+۵} \xrightarrow{'} \frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۵}}$	$\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
	$\frac{\square'}{۲\sqrt{\square}}$	$\sqrt{\square}$
$\sqrt[۳]{x^۲+x} \xrightarrow{'} \frac{۲x+۱}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+x)^۲}}$	$\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$	$\sqrt[۳]{x}$
	$\frac{\square'}{۳\sqrt[۳]{\square^۲}}$	$\sqrt[۳]{\square}$
$\sin ۴x \xrightarrow{'} ۴\cos ۴x$	$\cos x$	$\sin x$
	$\square' \cos \square$	$\sin \square$
$\cos(x^۲) \xrightarrow{'} -۲x \cdot \sin(x^۲)$	$-\sin x$	$\cos x$
	$-\square' \sin \square$	$\cos \square$
$\tan ۳x \xrightarrow{'} ۳(۱+\tan^۲ ۳x)$	$۱+\tan^۲ x$	$\tan x$
	$\square' (۱+\tan^۲ \square)$	$\tan \square$
$\cot(۲x+۱) \xrightarrow{'} -۲(۱+\cot^۲(۲x+۱))$	$-(۱+\cot^۲ x)$	$\cot x$
	$-\square'(۱+\cot^۲ \square)$	$\cot \square$
$\frac{۲x-۳}{۵x+۱} \xrightarrow{'} \frac{(۲)(۱)-(-۳)(۵)}{(۵x+۱)^۲} = \frac{۱۷}{(۵x+۱)^۲}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$	$\frac{ax+b}{cx+d}$
$\frac{۲x^۳-۳}{۵x^۳+۱} \xrightarrow{'} \frac{۱۷}{(۵x^۳+۱)^۲} \times ۳x^۲$	$\frac{ad-bc}{(c\square+d)^۲} \times \square'$	$\frac{a\square+b}{c\square+d}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** fog و g را داریم، بنابراین می‌توانیم ضابطهٔ تابع f را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} g(x) = ۲x - ۳ \\ fog(x) = x^۲ - ۵x \end{cases} \Rightarrow f(۲x-۳) = x^۲ - ۵x \xrightarrow[x=\frac{۳+t}{۲}]{۲x-۳=t} f(t) = (\frac{۳+t}{۲})^۲ - ۵(\frac{۳+t}{۲})$$

$$= \frac{۱}{۴}(t+۳)^۲ - \frac{۵}{۲}(t+۳) = \frac{۱}{۴}(t^۲+۶t+۹) - \frac{۵}{۲}(t+۳) = \frac{۱}{۴}t^۲ - t - \frac{۲۱}{۴} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲}x - ۱$$

گام دوم: حالا وارون تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$g(x)=۲x-۳ \Rightarrow \frac{y+۳}{۲}=x \Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۲}$$

گام سوم: تابع $g^{-۱}of'$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(g^{-۱}of')(x)=g^{-۱}(f'(x))=g^{-۱}(\frac{۱}{۲}x-۱)=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}x-۱+۳)=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}x+۲)=\frac{۱}{۴}x+۱$$

گام چهارم: به ازای $x=۴$ داریم:

$$(g^{-۱}of')'(x)=\frac{۱}{۴} \Rightarrow (g^{-۱}of')'(۴)=\frac{۱}{۴}$$

۹ اگر $f(x)=۴x+۴\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲-\frac{۴}{x}-۵$ باشد، مشتق تابع $h(x)=(fog)(\frac{۴}{x})$ در $x=-۲$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) ۱۲ ۳) -۱۸ ۴) ۱۸

Hint به کمک رابطهٔ مشتق تابع مرکب، مشتق تابع $(fog)(\frac{۴}{x})$ را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مشتق تابع $y=(fog)(\frac{۴}{x})$ را به دست می‌آوریم:

$$y=f(g(\frac{۴}{x}))\Rightarrow y'=\underbrace{(g(\frac{۴}{x}))'}\cdot f'(g(\frac{۴}{x}))=\underbrace{\frac{-۴}{x^۲}g'(\frac{۴}{x})}f'(g(\frac{۴}{x}))$$

گام دوم: با جای‌گذاری $x=-۲$ در عبارت به‌دست‌آمده از گام اول داریم:

$$y'(-۲)=-g'(-۲)f'(g(-۲))\quad (*)$$

$$\begin{cases} g(x)=x^۲-\frac{۴}{x}-۵\Rightarrow g'(x)=۲x+\frac{۴}{x^۲} & g'(-۲)=-۴+۱=-۳ \\ & g(-۲)=۴+۲-۵=۱ \\ f(x)=۴x+۴\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=۴+\frac{۴}{۲\sqrt{x}}=۴+\frac{۲}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۱)=۴+۲=۶ & \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} h'(-۲)=(fog)'(\frac{۴}{x})\Big|_{x=-۲}=-(-۳)f'(۱)=۳f'(۱)=۳\times۶=۱۸$$

۱۰ اگر $f(x)=(\frac{x^۲+\sqrt{۲x}}{x-۱})\cos\frac{\pi}{x}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) $\frac{-۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

Hint به ازای $x=۲$، عامل صفرکننده داریم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به ازای $x=۲$، مقدار $\cos\frac{\pi}{x}$ برابر با صفر است، پس عامل صفرکننده است، پس مشتق تابع f برابر می‌شود با:

$$f'(x)=\text{مشتق عامل صفرکننده}\times\text{سایر عبارت‌ها}=(\frac{x^۲+\sqrt{۲x}}{x-۱})\times(\frac{+\pi}{x^۲}\sin\frac{\pi}{x})$$

گام دوم: حالا $f'(۲)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(۲)=(\frac{۴+۲}{۲-۱})(\frac{\pi}{۴}\sin\frac{\pi}{۲})=\frac{۶\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۲}$$

۱۱ اگر $f(x)=\sqrt{\tan\frac{\pi}{x}}$ باشد، مقدار $f'(۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{-\pi}{۱۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۸}$ ۴) $-\frac{\pi}{۸}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{\tan\frac{\pi}{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{(\tan\frac{\pi}{x})'}{۲\sqrt{\tan\frac{\pi}{x}}}=\frac{\frac{-\pi}{x^۲}(۱+\tan^۲\frac{\pi}{x})}{۲\sqrt{\tan\frac{\pi}{x}}}$$

گام دوم: حالا مقدار $f'(۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(۴)=\frac{\frac{-\pi}{۱۶}(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴})}{۲\sqrt{\tan\frac{\pi}{۴}}}=\frac{\frac{-\pi}{۱۶}\times ۲}{۲}=\frac{-\pi}{۱۶}$$

۱۲ اگر $g'(x)=\frac{۲}{x^۳}$ و $f(\frac{۲}{x})=g(\sqrt{x})$ باشد، مقدار $f''(۲)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از $f(\frac{۲}{x})=g(\sqrt{x})$ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{-۲}{x^۲}f'(\frac{۲}{x})=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}g'(\sqrt{x}) \xrightarrow{g'(x)=\frac{۲}{x^۳}} f'(\frac{۲}{x})=\frac{-x^۲}{۴\sqrt{x}}\times\frac{۲}{x\sqrt{x}}=-\frac{x}{۲x}=-\frac{۱}{۲}$$

گام دوم: از آن‌جایی که $f'(\frac{۲}{x})=-\frac{۱}{۲}$ است، مشتق این تابع به ازای هر مقدار از x نیز صفر خواهد شد؛ بنابراین $f''(۲)=۰$ است.

۱۳ ریشهٔ سوم عدد a از ریشهٔ هفتم a آن بزرگ‌تر است و ریشهٔ هفتم $|a|$ از ریشهٔ نهم $|a|$ کوچک‌تر است. حدود a کدام است؟

۱) $(-\infty, -1)$
۲) $(-1, 0)$
۳) $(0, 1)$
۴) $(1, +\infty)$

مشاوره یک سؤال ساده برای دست‌گرمی که از کتاب درسی مطرح شده! از این‌گونه سؤال‌ها رد نشوید و حلشان کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: موارد داده‌شده را می‌نویسیم و بررسی می‌کنیم که در هر یک، a در چه بازه‌ای شرایط گفته‌شده را دارد:

۱) $\sqrt[3]{a} > \sqrt[7]{a} \xrightarrow{\text{به توان ۲۱ می‌رسانیم}} a^7 > a^3 \Rightarrow \begin{cases} -1 < a < 0 \\ \text{یا} \\ a > 1 \end{cases}$

۲) $\sqrt[7]{|a|} < \sqrt[9]{|a|} \xrightarrow{\text{به توان ۶۳ می‌رسانیم}} |a|^9 < |a|^7 \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow |a| < -1 \text{ غ.ق.ق.} \\ \text{یا} \\ \rightarrow 0 < |a| < 1 \Rightarrow a \in (-1,1) - \{0\} \end{cases}$

گام دوم: اشتراک حالت‌های ۱ و ۲ به صورت $(-1, 0)$ است.

۱۴ اگر $۳A = \frac{\sqrt[۳]{۳\sqrt{A}} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۳}} \times ۸۱^{\frac{-۳}{۴}}}$ باشد، مقدار ناصفر A کدام است؟

۱) $\sqrt{۲۷}$ ۲) $\sqrt[۳]{۸۱}$ ۳) ۸۱ ۴) ۲۷

Hint همهٔ عبارت‌ها را به صورت توانی بنویسید.

درس Box

توان‌های گویا و قواعد آن:

فرض کنید $a > ۰$ باشد. برای دو عدد طبیعی m و n، توان کسری a، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(n \geq ۲)\ a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال: $۷^{\frac{۲}{۵}} = \sqrt[۵]{۷^۲}\ ,\ ۵^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۵}\ ,\ ۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$

قواعد توان‌های گویا:

قواعدی که برای توان‌های صحیح برقرار است، برای توان‌های گویا هم برقرار است؛ مثلاً اگر s و r دو عدد گویا باشند:

۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$، یعنی اگر در ضرب پایه‌ها مساوی باشند، آن را نوشته و توان‌ها را جمع می‌کنیم.

۲) $a^r \div a^s = a^{r-s}$، یعنی اگر در تقسیم پایه‌ها مساوی باشند، آن را نوشته و توان‌ها را کم می‌کنیم.

۳) $(a^r)^s = a^{rs}$

۴) $(ab)^r = a^r \times b^r$ (در استفاده از تمام قواعد، فرض می‌کنیم a و b مثبت باشند.)

نکته

۱) در استفاده از توان‌های گویا، فرض می‌کنیم پایهٔ (a) حتماً مثبت است؛ بنابراین اگر پایه منفی باشد، توان‌های کسری را تعریف نمی‌کنیم. مثلاً $(-۲)^{\frac{۱}{۵}}$ را تعریف نمی‌کنیم.

۲) برای توان‌های منفی گویا داریم:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{۱}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{۱}{\sqrt[n]{a^m}}$$

i) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

ii) $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = a^{\frac{۱}{m}} \times a^{\frac{۱}{n}} = a^{\frac{m+n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ برای ساده‌کردن عبارت داده‌شده، رادیکال‌ها را تبدیل به توان کسری می‌کنیم:

$$۳A = \frac{\sqrt[۳]{۳\sqrt{A}} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۳}} \times ۸۱^{\frac{-۳}{۴}}} \Rightarrow ۳A = \frac{۳^{\frac{۱}{۳}} \times A^{\frac{۱}{۶}} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{۳^{\frac{۱}{۶}} \times (۳^۴)^{\frac{-۳}{۴}}}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}} ۳A = \frac{A^{\frac{۱}{۶}} \times ۳^{\frac{۲}{۳}}}{۳^{-\frac{۱۷}{۶}}} \Rightarrow A = A^{\frac{۱}{۶}} \times ۳^{\frac{۲}{۳}+\frac{۱۷}{۶}-۱} \Rightarrow A^{\frac{۵}{۶}} = ۳^{\frac{۱۵}{۶}} \Rightarrow A = ۳^۳ = ۲۷$$

۱۵ مقدار عبارت $A=\frac{a^{۴}\sqrt{a}-۱}{a^{۳}+a\sqrt{a}+۱}(a\sqrt{a}+۱)$ به ازای $a=\sqrt[۳]{۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

مشاوره در سؤال‌هایی که ظاهرشان پیچیده است و از شما خواسته می‌شود تا حاصل عبارت را به ازای مقدار (معمولاً رادیکالی!) به دست بیاورید، اول سعی کنید عبارت را ساده کنید و بعد جای‌گذاری کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای این‌که حاصل عبارت A را به ازای مقدار a داده‌شده به دست آوریم، ابتدا عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A=\frac{\overbrace{a^{\frac{۹}{۲}}}^{a^{۴}\sqrt{a}}-۱}{a^{۳}+a\sqrt{a}+۱}.(a\sqrt{a}+۱)=\frac{(a^{\frac{۳}{۲}})^{۳}-۱}{a^{۳}+a\sqrt{a}+۱}.(a\sqrt{a}+۱)=\frac{((a\sqrt{a})-۱)((a\sqrt{a})^{۲}+a\sqrt{a}+۱)}{a^{۳}+a\sqrt{a}+۱}.(a\sqrt{a}+۱)$$

$$=(a\sqrt{a}-۱)(a\sqrt{a}+۱)=a^{۲}\times a-۱=a^{۳}-۱$$

گام دوم: حالا حاصل A را به ازای $a=\sqrt[۳]{۳}$ به دست می‌آوریم:

$$A=a^{۳}-۱=(\sqrt[۳]{۳})^{۳}-۱=۳-۱=۲$$

۱۶ اگر $x=\sqrt{۳-\sqrt{۵+۲\sqrt{۳}}}$ و $y=\sqrt{۳+\sqrt{۵+۲\sqrt{۳}}}$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}+۱$ ۲) $\sqrt{۵}+۱$

۳) $۲\sqrt{۳}+۱$ ۴) $\sqrt{۳}+۱$

Hint $(x+y)^۲$ را به دست بیاورید.

پاسخ خیلی تشریحی می‌بینیم که عبارت‌های زیر رادیکال x و y مزدوج یکدیگر هستند؛ پس برای به دست آوردن حاصل $x+y$، ابتدا $(x+y)^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(x+y)^۲=x^۲+۲xy+y^۲=(۳-\sqrt{۵+۲\sqrt{۳}})+۲\sqrt{(۳+\sqrt{۵+۲\sqrt{۳}})(۳-\sqrt{۵+۲\sqrt{۳}})}+(۳+\sqrt{۵+۲\sqrt{۳}})$$

$$=۶+۲\sqrt{۹-(۵+۲\sqrt{۳})}=۶+۲\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}=۶+۲\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^۲}=۶+۲|\sqrt{۳}-۱|=۶+۲\sqrt{۳}-۲=۴+۲\sqrt{۳}=(\sqrt{۳}+۱)^۲$$

پس داریم:

$$(x+y)^۲=(\sqrt{۳}+۱)^۲ \xrightarrow{\sqrt{\ }} x+y=|\sqrt{۳}+۱|=\sqrt{۳}+۱$$

۱۷ اگر $\alpha-\beta=۱$ و $\alpha^۳+\beta^۳+۹=۰$ باشد، حاصل $\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

Hint یک اتحاد به دست بیاورید و به کمک تجزیه، آن اتحادها را با عبارت داده‌شده ایجاد کنید.

درس Box

روش‌های تجزیه

شبیه تجزیهٔ اعداد، اگر عبارت‌های جبری را به صورت ضرب عبارت‌ها با درجهٔ کوچک‌تر دربیاوریم، آن‌ها را تجزیه کرده‌ایم.

۱) استفاده از اتحادها

در به دست آوردن حاصل عبارت‌ها با استفاده از اتحادها، معمولاً از سمت چپ اتحاد به سمت راست می‌رویم، اما در تجزیه، معمولاً از سمت راست به چپ حرکت می‌کنیم.

۲) دسته‌بندی

برای تجزیهٔ برخی از عبارت‌های جبری نمی‌توانیم به صورت مستقیم از اتحادها استفاده کنیم. یکی از راه‌های تجزیهٔ این عبارت‌ها، این است که جمله‌های عبارت‌های جبری را به گونه‌ای با هم دسته‌بندی کنیم که بعد از فاکتورگیری، دارای عامل مشترک باشند؛ مثلاً:

$$\underline{x^۳+x^۲}+\underline{x+۱}=x^۲(x+۱)+(x+۱)=(x+۱)(x^۲+۱)$$

۳) شکستن جملات

برخی از عبارت‌های جبری ممکن است با دسته‌بندی اولیه نیز تجزیه نشوند. در این مواقع ممکن است با نوشتن یک جمله، به صورت جمع چند جمله، بتوانیم آن‌ها را با هم دسته‌بندی کنیم؛ مثلاً می‌خواهیم $x^۳-۳x+۲$ را تجزیه کنیم. در مرحلهٔ اول نمی‌توانیم دسته‌بندی کنیم، اما اگر $-۳x=-۲x-x$ بنویسیم، داریم:

$$x^۳-۳x+۲=\underline{x^۳}-\underline{x}-\underline{\underline{۲x}}+\underline{۲}=x(x^۲-۱)-۲(x-۱)=x(x-۱)(x+۱)-۲(x-۱)=(x-۱)(\overbrace{x(x+۱)-۲}^{x^۲+x-۲})$$

$$=(x-۱)(x+۲)(x-۱)=(x+۲)(x-۱)^۲$$

یادآوری اتحادها:

۱) اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای: $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$

۲) اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای: $(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$

۳) اتحاد مزدوج: $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$

۴) اتحاد یک جمله مشترک: $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

۵) اتحاد مکعب مجموع: $(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳$

$$(\text{دومی}+\text{اولی})^۳=(\text{اولی})^۳+۳(\text{اولی})^۲(\text{دومی})+۳(\text{اولی})(\text{دومی})^۲+(\text{دومی})^۳$$

در صورتی که در دو طرف این اتحاد، b را به $-b$ تبدیل کنیم، همان جمله‌های اتحاد مکعب مجموع، یکی در میان مثبت و منفی می‌شوند؛ بنابراین:

۶) اتحاد مکعب تفاضل: $(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$

دو اتحاد دیگر، مجموع مکعبات (و تفاضل مکعبات) یا چاق و لاغر هم است. توجه دارید که علامت حاصل با علامت قسمت لاغر، یکسان و با علامت ab متفاوت است.

۷) اتحاد چاق و لاغر (مکعب دومی + مکعب اولی = (مربع دومی + ضرب دوتا − مربع اولی) (دومی + اولی)):

$$\begin{cases}(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳\\(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از معادلهٔ اول به دست می‌آوریم:

$$\beta = \alpha - ۱$$

و در معادلهٔ دوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\alpha^۳ + (\alpha - ۱)^۳ = -۹ \Rightarrow \alpha^۳ + \alpha^۳ - ۳\alpha^۲ + ۳\alpha - ۱ = -۹$$

$$\Rightarrow ۲\alpha^۳ - ۳\alpha^۲ + ۳\alpha + ۸ = ۰$$

گام دوم: عبارت معادلهٔ بالا را تجزیه می‌کنیم تا آن را حل کنیم:

$$۲\alpha^۳ + ۲ - ۳\alpha^۲ + ۳\alpha + ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲(\alpha^۳ + ۱) - ۳(\alpha^۲ - \alpha - ۲) = ۰ \Rightarrow ۲(\alpha + ۱)(\alpha^۲ - \alpha + ۱) - ۳(\alpha + ۱)(\alpha - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow (\alpha + ۱)\Big[۲(\alpha^۲ - \alpha + ۱) - ۳(\alpha - ۲)\Big] = ۰ \Rightarrow (\alpha + ۱)(۲\alpha^۲ - ۵\alpha + ۸) = ۰$$

Δ ی عبارت درجه‌دوم منفی است؛ بنابراین فقط $\alpha + ۱$ صفر است:

$$\Rightarrow \alpha = -۱$$

گام سوم: مقدار β نیز برابر -۲ به دست می‌آید و داریم:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = ۵$$

۱۸ در تجزیهٔ عبارت $P(x)=ax^3-11x^2+(8a+1)x-6$ عامل $x-2$ دیده می‌شود. در تجزیهٔ عبارت $P(3x-2)$ کدام عامل دیده نمی‌شود؟

۱) $3x-3$ ۲) $3x-4$

۳) $3x-5$ ۴) $6x-5$

مشاوره هرچند احتمال طرح چنین سؤالی در کنکور کم است، اما برای ساده‌سازی توابع یا رفع ابهام‌ها نیاز به تجزیهٔ عبارت‌ها دارید.

Hint $x=2$ ریشهٔ $P(x)$ است. a را پیدا کنید.

درس Box

به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$

۱) ریشهٔ مقسوم‌علیه را به دست می‌آوریم: $ax+b=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{a}$

۲) ریشه را در f قرار می‌دهیم تا باقی‌مانده که یک عدد است به دست آید؛ پس $R=f(-\frac{b}{a})$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر در تجزیهٔ عبارت $P(x)$ داده‌شده عامل $x-2$ دیده شود، پس مقدار $P(x)$ به ازای $x=2 \Rightarrow x-2=0$ باید صفر باشد. به کمک این رابطه، a را پیدا می‌کنیم:

$$P(x)=ax^3-11x^2+(8a+1)x-6 \xrightarrow{x=2} P(2)=8a-44+16a+2-6=0 \Rightarrow P(2)=24a-48=0 \Rightarrow a=2$$

گام دوم: پس $P(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت: $P(x)=2x^3-11x^2+17x-6$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-11x^2+17x-6 & x-2 \\ \hline -(2x^3-4x^2) & 2x^2-7x+3 \\ \hline -7x^2+17x-6 & \\ -(-7x^2+14x) & \\ \hline 3x-6 & \\ -(3x-6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

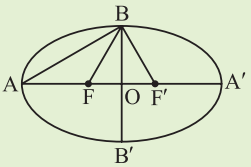
$$\Rightarrow P(x)=2x^3-11x^2+17x-6=(x-2)(2x^2-7x+3)=(x-2)(2x-1)(x-3)$$

گام سوم: حالا $P(3x-2)$ را به دست می‌آوریم:

$$P(3x-2)=(3x-4)(6x-4-1)(3x-5)=(3x-4)(6x-5)(3x-5)$$

پس عامل $3x-3$ در این عبارت وجود ندارد.

۱۹ مطابق شکل، F و F' کانون‌های بیضی و BB' قطر کوچک آن است. اگر مساحت مثلث ABO چهار برابر مساحت مثلث BFF' باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۸}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

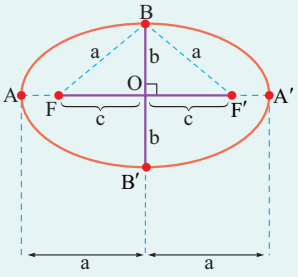
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

مشاوره سؤالی ساده که مشابه یکی از سؤال‌های امتحان‌های نهایی سال‌های گذشته است.

Hint AA' و BB' بر هم عمودند، مساحت مثلث‌ها را بر حسب a، b و c بنویسید.

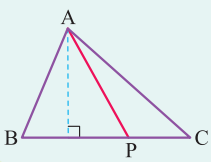
درس Box



۱) در شکل رسم‌شده، F و F' کانون‌های بیضی و O مرکز آن است. نقاط A و A' رأس‌های کانونی و B و B' رأس‌های غیرکانونی نامیده می‌شوند. AA' بلندترین و BB' کوتاه‌ترین قطر بیضی است و طول پاره‌خط‌ها برحسب پارامترهای a، b و c مشخص شده‌اند. هم‌چنین توجه داشته باشید که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BOF می‌توان نتیجه گرفت: $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

۲) میزان کشیدگی یا بازشدگی بیضی با پارامتری به نام خروج از مرکز (e) سنجیده می‌شود و بنا به تعریف داریم $e = \frac{c}{a}$، خروج از مرکز بیضی همیشه عددی بین صفر و یک است.

۳) اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع مشترک باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع مشترک.



$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{BP}{CP}\ ,\ \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}} = \frac{BP}{BC}$$

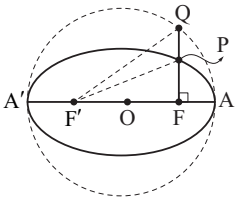
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (محاسبهٔ $\frac{OA}{FF'}$)**: اگر مساحت $\triangle ABO$ ۴ برابر $\triangle BFF'$ باشد، چون هر دوی آن‌ها ارتفاع مشترک BO را دارند، آن‌گاه نسبت قاعده‌های آن‌ها، یعنی $\frac{OA}{FF'}$ نیز ۴ است. یا به عبارتی:

$$S_{ABO} = ۴S_{BFF'} \Rightarrow \frac{۱}{۲}BO \cdot OA = ۴(\frac{۱}{۲}BO \cdot FF') \Rightarrow OA = ۴FF'$$

گام دوم (محاسبهٔ خروج از مرکز بیضی): OA همان a یا نصف قطر بزرگ بیضی و FF' فاصلهٔ کانونی بیضی یا همان $۲c$ است، پس داریم:

$$OA = ۴FF' \Rightarrow a = ۴(۲c) \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۸}$$

۲۰ بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' مطابق شکل زیر مفروض است. از نقطهٔ F عمودی به AA' رسم می‌کنیم تا بیضی و دایره به قطر AA' را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کند. اگر فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A یکسان و مساحت مثلث PQF' برابر $۴/۵$ باشد، حاصل $AF \times A'F'$ کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}+۶$

۲) $۳\sqrt{۳}+۶$

۳) $۶\sqrt{۳}+۹$

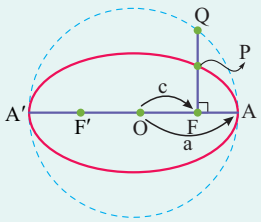
۴) $۶\sqrt{۲}+۹$

مشاوره با سؤال دشواری مواجهیم که برای حل آن، باید نکته‌ای را که در درس‌باکس گفته‌ایم، بلد باشیم.

درس Box

نکته

مطابق شکل مقابل، اگر از یکی از کانون‌های بیضی، عمودی بر قطر AA' رسم کنیم تا بیضی و دایرهٔ به قطر AA' را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کند، داریم:



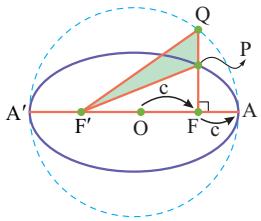
$$\boxed{PF=\frac{b^۲}{a}},\ \boxed{QF=b}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ b بر حسب c):

چون فاصلهٔ F از نقاط O و A یکسان است، پس $OF=FA=c$ است و در نتیجه $a=c+c=۲c$،

بنابراین:



$$a^۲=b^۲+c^۲ \xrightarrow{a=۲c} ۴c^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow b^۲=۳c^۲ \Rightarrow b=c\sqrt{۳}$$

گام دوم (محاسبهٔ PQ بر حسب c): با استفاده از درس‌باکس، PF و QF را به دست می‌آوریم و آن‌ها را از یکدیگر کم می‌کنیم تا PQ به دست آید.

$$\begin{cases} PF=\frac{b^۲}{a}=\frac{(c\sqrt{۳})^۲}{۲c}=\frac{۳}{۲}c \\ QF=b=c\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow PQ=QF-PF \Rightarrow PQ=c\sqrt{۳}-\frac{۳}{۲}c=\frac{۱}{۲}c(۲\sqrt{۳}-۳)$$

گام سوم (محاسبهٔ $c^۲$): مساحت مثلث PQF' برابر با $۴/۵$ است، پس:

$$S_{PQF'}=۴/۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲}FF'\times PQ=۴/۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۲c)\times(\frac{۱}{۲}c(۲\sqrt{۳}-۳))=۴/۵ \Rightarrow c^۲(۲\sqrt{۳}-۳)=۹$$

$$\Rightarrow c^۲=\frac{۹}{۲\sqrt{۳}-۳}$$

عبارت به‌دست‌آمده را گویا می‌کنیم:

$$c^۲=\frac{۹}{۲\sqrt{۳}-۳}\times\frac{۲\sqrt{۳}+۳}{۲\sqrt{۳}+۳} \Rightarrow c^۲=\frac{۹(۲\sqrt{۳}+۳)}{۳}=۳(۲\sqrt{۳}+۳)$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): از طرفی دیگر $AF=A'F'=c$ است، بنابراین:

$$AF\times A'F'=c\times c=c^۲ \Rightarrow AF\times A'F'=۳(۲\sqrt{۳}+۳)=۶\sqrt{۳}+۹$$

۲۱ نقطهٔ $(۴,۰)$ کانون و محور yها خط هادی یک سهمی است. این سهمی خط $y = ۲$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $۲\frac{۱}{۸}$ ۲) $۲\frac{۱}{۴}$ ۳) $۲\frac{۳}{۸}$ ۴) $۲\frac{۱}{۲}$

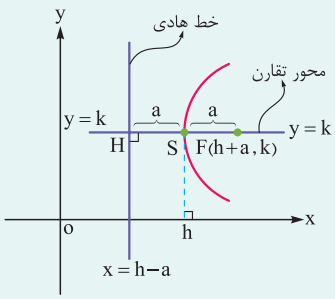
مشاوره نوشتن معادلهٔ سهمی با معلوم‌بودن معادلهٔ خط هادی و مختصات رأس، یک تیپ بسیار پرتکرار در سؤال‌های سهمی چه در امتحان نهایی و چه در کنکور است. این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های امتحان نهایی طراحی شده است.

درس Box

سهمی افقی: اگر محور تقارن یک سهمی موازی محور xها باشد (یا به بیان دیگر، خط هادی آن موازی محور yها باشد)، سهمی را افقی گوییم.

سهمی‌های افقی در دستگاه مختصات:

۱) اگر دهانهٔ سهمی به راست باز شود:



رأس سهمی: $S(h,k)$

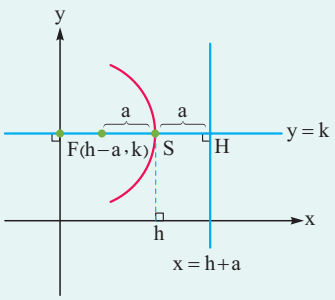
معادلهٔ استاندارد سهمی: $(y-k)^۲ = ۴a(x-h)$

محور تقارن سهمی خط: $y = k$

خط هادی: $x = h-a$

کانون: $F(h+a,k)$

۲) اگر دهانهٔ سهمی به چپ باز شود:



رأس سهمی: $S(h,k)$

معادلهٔ سهمی استاندارد: $(y-k)^۲ = -۴a(x-h)$

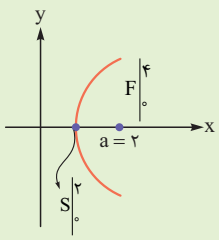
محور تقارن سهمی: $y = k$

خط هادی: $x = h+a$

کانون: $F(h-a,k)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (پیداکردن رأس سهمی): رأس سهمی دقیقاً در وسط کانون و خط هادی قرار دارد؛ پس مختصات آن $S(۲,۰)$ و فاصلهٔ کانونی سهمی $a = ۲$ است.



گام دوم (نوشتن رابطهٔ سهمی): سهمی افقی و رو به راست است. پس معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$(y-k)^۲ = ۴a(x-h) \Rightarrow (y-۰)^۲ = ۸(x-۲)$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ صورت سؤال): حالا $y = ۲$ را در معادلهٔ سهمی جای‌گذاری می‌کنیم تا طول این نقطهٔ مورد نظر سؤال را پیدا کنیم:

$$۴ = ۸(x-۲) \Rightarrow x = ۲ + \frac{۴}{۸} = ۲\frac{۱}{۲}$$

۲۲ کانون سهمی به معادلهٔ $2x^2-4x+3y=b$ روی نیمساز ناحیهٔ چهارم قرار دارد. عرض رأس این سهمی کدام است؟

۱) $\frac{11}{8}$ ۲) $-\frac{11}{8}$

۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $-\frac{5}{8}$

مشاوره شاید بتوان گفت مهم‌ترین تیپ سؤال‌های سهمی، سؤال‌هایی است که در آن‌ها باید از روی معادلهٔ گسترده، بتوانید فاصلهٔ کانونی، مختصات نقاط مهم و معادلهٔ خط‌های مهم سهمی را به دست آورید.

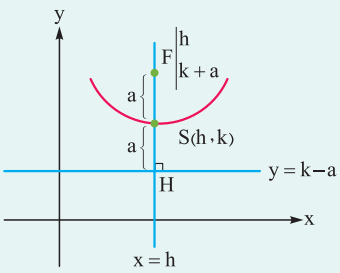
Hint معادله را به صورت استاندارد نوشته، از خواص سهمی‌های قائمی که دهانهٔ آن‌ها رو به پایین باز می‌شود استفاده کنید.

درس Box

سهمی قائم: اگر محور تقارن سهمی موازی محور yها باشد (یا به بیان دیگر، خط هادی سهمی موازی محور xها باشد) سهمی را قائم می‌نامیم.

سهمی‌های قائم در دستگاه مختصات:

اگر دهانهٔ سهمی به بالا باز شود.



معادلهٔ استاندارد سهمی: $(x-h)^2=4a(y-k)$

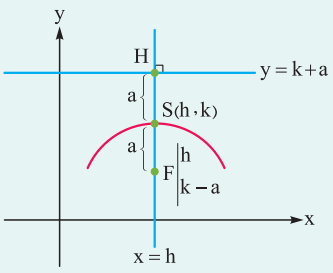
رأس سهمی: $S(h,k)$

محور تقارن سهمی: $x=h$

خط هادی: $y=k-a$

کانون: $F(h,k+a)$

اگر دهانهٔ سهمی به پایین باز شود.



معادلهٔ استاندارد سهمی: $(x-h)^2=-4a(y-k)$

رأس سهمی: $S(h,k)$

محور تقارن سهمی: $x=h$

خط هادی: $y=k+a$

کانون: $F(h,k-a)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (نوشتن معادلهٔ استاندارد): معادلهٔ داده‌شده را به معادلهٔ استاندارد سهمی تبدیل می‌کنیم.

$$2x^2-4x+3y=b \Rightarrow 2(x^2-2x)=-3y+b \Rightarrow 2((x-1)^2-1)=-3y+b$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2=-3y+b+2 \Rightarrow (x-1)^2=\frac{-3}{2}(y+\frac{b+2}{-3})$$

حالا مختصات رأس و فاصلهٔ کانونی سهمی را به دست می‌آوریم:

$$S(1,\frac{b+2}{3}),4a=\frac{3}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{8}$$

گام دوم (محاسبهٔ طول و عرض کانون سهمی): با توجه به معادلهٔ استاندارد، این سهمی قائم است و دهانهٔ آن به پایین باز می‌شود،

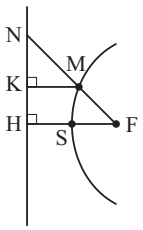
عرض کانون سهمی را به دست می‌آوریم:

$$y_F=y_S-a=y_S-\frac{3}{8}$$

از طرفی کانون سهمی روی خط $y=-x$ قرار دارد، پس داریم:

$$y_F=-x_F \xrightarrow{x_F=x_S=1} y_S-\frac{3}{8}=-1 \Rightarrow y_S=-\frac{5}{8}$$

۲۳ در شکل زیر، نقطهٔ N را طوری روی خط هادی سهمی انتخاب کرده‌ایم که فاصلهٔ آن از کانون سهمی (F)، سه برابر فاصلهٔ کانونی سهمی باشد. حاصل $\frac{KH}{NH}$ کدام است؟



۱) ۰/۶

۲) ۰/۵

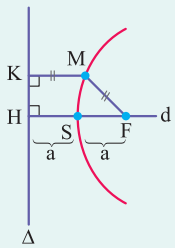
۳) ۰/۴

۴) ۰/۳

درس Box

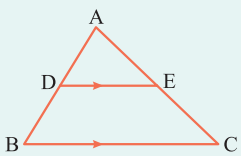
۱) سهمی:

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت (خط هادی) و یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط (کانون) به یک فاصله‌اند.



$MF = MK$

۲) قضیهٔ تالس: در شکل زیر DE با BC موازی است، داریم:



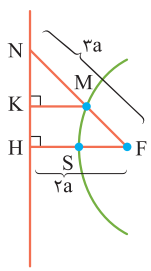
تالس جزءبه‌جزء: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

تالس جزءبه‌کل: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (استفاده از قضیهٔ تالس در $\overset{\Delta}{NHF}$):

طبق فرض سؤال، NF سه برابر فاصلهٔ کانونی است، یعنی $NF = ۳a$.



طبق تالس جزءبه‌کل در مثلث $\overset{\Delta}{NHF}$ داریم:

$$KM \parallel HF \Rightarrow \frac{KM}{HF} = \frac{MN}{NF} \Rightarrow \frac{KM}{۲a} = \frac{NM}{۳a} \Rightarrow \frac{KM}{NM} = \frac{۲a}{۳a} = \frac{۲}{۳}$$

گام دوم (محاسبهٔ خواسته سؤال): می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی سهمی از کانون و از خط هادی با یکدیگر برابر است، پس: $KM = MF$، پس مطابق آن‌چه در گام اول به دست آوردیم، داریم:

$$\frac{KM}{MN} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{KM=MF} \frac{MF}{MN} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{MF}{MN + MF} = \frac{۲}{۳+۲} \Rightarrow \frac{MF}{NF} = \frac{۲}{۵}$$

بار دیگر با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث $\overset{\Delta}{NHF}$، داریم:

$$\frac{KH}{NH} = \frac{MF}{NF} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

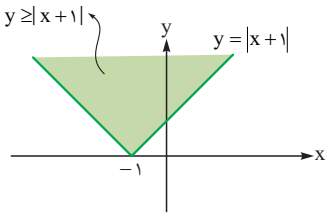
۲۴ مساحت قسمتی از نمودار $|x+۱| \le y \le ۲$ که در ناحیهٔ اول مختصات قرار ندارد، کدام است؟

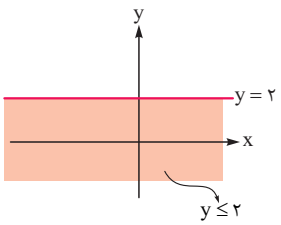
۱) ۳/۵ ۲) ۳

۳) ۲/۵ ۴) ۴

Hint ناحیهٔ مورد نظر، اشتراک دو ناحیهٔ $y \le ۲$ و $|x+۱| \le y$ است.

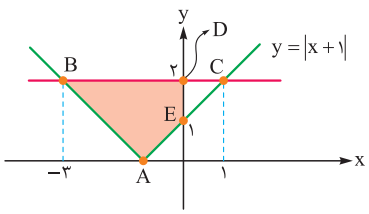
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال):** نمودارهای $y = |x+۱|$ و $y = ۲$ را در دستگاه مختصات رسم‌کرده و ناحیه‌های متناظر با $|x+۱| \le y$ و $y \le ۲$ را مشخص می‌کنیم.





گام دوم (رسم شکل ناحیهٔ مورد نظر سؤال): نقاط تقاطع نمودار $y = |x+۱|$ را با خط $y = ۲$ به دست می‌آوریم.

دقت کنید که ناحیهٔ $|x+۱| \le y \le ۲$ از اشتراک دو ناحیهٔ مشخص‌شده در گام اول به دست می‌آید و در شکل مقابل، قسمتی از این ناحیه را که در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات قرار ندارد، مشخص کرده‌ایم.



$$|x+۱| = ۲ \Rightarrow x+۱ = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۳ \end{cases}$$

گام سوم (محاسبهٔ مساحت قسمت رنگی): برای به دست آوردن مساحت قسمت رنگی ابتدا مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم و سپس مساحت مثلث CDE را از آن کم می‌کنیم.

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۴ - \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ = ۴ - ۰/۵ = ۳/۵$$

۲۵ سه نقطهٔ $A(۱,۲,-۴)$، $B(۳,-۴,۰)$ و $C(۴,۰,-۴)$ را در فضا در نظر بگیرید. اگر نقطهٔ **M** وسط پاره‌خط **AB** باشد، **M** در کدام ناحیه قرار دارد و طول **CM** کدام است؟

۱) ناحیهٔ هفتم و ۳
۲) ناحیهٔ هشتم و $۲\sqrt{۲}$
۳) ناحیهٔ هفتم و $۲\sqrt{۲}$
۴) ناحیهٔ هشتم و ۳

مشاوره خیلی از دانش‌آموزان در ناحیه‌بندی فضای مختصات مشکل دارند، توصیه می‌کنیم مورد (۳) درس‌باکس این سؤال را حتماً بلد باشید.

درس Box

۱) مختصات نقطهٔ وسط یک پاره‌خط: اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند. مختصات نقطهٔ M وسط AB به صورت زیر است:

$$M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲},\frac{z_۱+z_۲}{۲})$$

۲) فاصلهٔ بین دو نقطه (اندازهٔ پاره‌خط) در فضا: هر گاه $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند، فاصلهٔ بین آن‌ها (اندازهٔ پاره‌خط AB) برابر است با:

$$\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$$

۳) برای تعیین ناحیهٔ نقطهٔ $P(x,y,z)$ در فضا، ابتدا ناحیهٔ نقطهٔ $(x\ ،\ y)$ را در صفحه مشخص کنید، فرض کنید این نقطه در ناحیهٔ nام صفحه قرار می‌گیرد، اگر $z>۰$ آن‌گاه P درناحیهٔ nام فضا قرار می‌گیرد و اگر $z<۰$ آن‌گاه P در ناحیهٔ $(۴+n)$ام فضا قرار می‌گیرد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (پیدا کردن مختصات نقطه M): مختصات نقطهٔ M به صورت $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲},\frac{z_A+z_B}{۲})=(۲,-۱,-۲)$ است. نقطهٔ $(۲,-۱)$ در صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ در ربع چهارم واقع است و چون ارتفاع M منفی است، پس این نقطه در فضای $\mathbb{R}^۳$ در ناحیهٔ $۸=۴+۴$ام قرار دارد.

گام دوم (یافتن طول CM): با توجه به مختصات نقاط C و M، طول CM را به دست می‌آوریم.

$$CM=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۰-(-۱))^۲+(-۴-(-۲))^۲}=۳$$

۲۶ فرض کنید زاویهٔ بین دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

الف) اگر $\theta = 90^\circ$، آن‌گاه $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$

ب) اگر $\theta > 90^\circ$، آن‌گاه $|\vec{a}-\vec{b}| < |\vec{b}|$ و $|\vec{a}|$

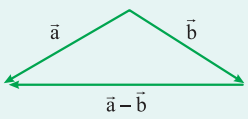
پ) اگر $\theta < 90^\circ$، آن‌گاه $|\vec{a}-\vec{b}| > |\vec{b}|$ و $|\vec{a}|$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

درس Box

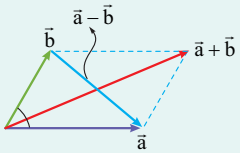
۱) تفاضل دو بردار:

دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را طوری قرار می‌دهیم که ابتدای بردار $\vec{b}$ بر ابتدای بردار $\vec{a}$ واقع شود. برداری که انتهای بردار $\vec{b}$ را به انتهای بردار $\vec{a}$ وصل می‌نماید، تفاضل بردار $\vec{b}$ از بردار $\vec{a}$ یعنی بردار $\vec{a}-\vec{b}$ را مشخص می‌کند.

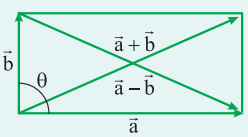


۲) قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع:

اگر مطابق شکل، بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشند، قطرهای این متوازی‌الاضلاع، بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ هستند.



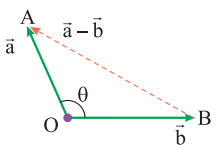
نکته اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه:



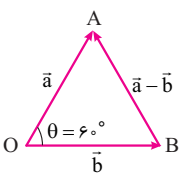
$\hat{\theta} = 90^\circ \Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$

پاسخ خیلی تشریحی طبق درس‌باکس گزارهٔ (الف) درست است.

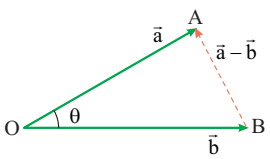
در مورد گزارهٔ (ب): اگر $\theta > 90^\circ$، آن‌گاه θ بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث OAB است، پس ضلع روبه‌روی آن هم بزرگ‌ترین ضلع مثلث است.



در مورد گزارهٔ (پ): اگر $\theta < 90^\circ$، آن‌گاه در مورد مقایسهٔ $|\vec{a}-\vec{b}|$ با $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ نمی‌توان حکم کلی داد، شکل‌های زیر را ببینید:



$|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}| = |\vec{b}|$

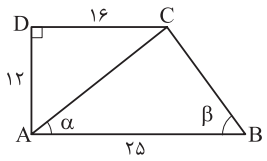


$|\vec{a}-\vec{b}| < |\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$

(مثال نقض برای ردّ گزارهٔ پ)

درنتیجه ۲تا از گزاره‌ها درست هستند.

۲۷ در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه **ABCD** مطابق شکل، قطر **AC** رسم شده است. حاصل $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

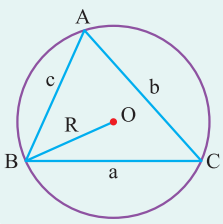
۴) $\frac{۳}{۵}$

Hint

در مثلث ABC از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده کنید.

درس Box

قضیهٔ سینوس‌ها



در مثلث ABC رابطهٔ زیر برقرار است. در این رابطه که به قضیهٔ سینوس‌ها معروف است، R شعاع دایره محیطی مثلث ABC است:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$$

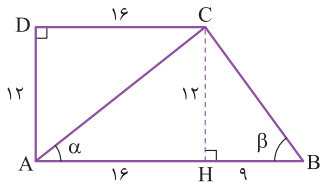
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (تحلیل سؤال): طبق قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم: $\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin\alpha}$، به بیان دیگر $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{BC}{AC}$ است.

پس باید طول BC و AC را به دست بیاوریم.

گام دوم (محاسبهٔ طول‌های AC و BC):

در مثلث ACD طبق فیثاغورس داریم:



$$\overset{\triangle}{ACD}: AC^۲=AD^۲+CD^۲=۱۲^۲+۱۶^۲=۲۰^۲ \Rightarrow AC=۲۰$$

ارتفاع CH را رسم می‌کنیم، چهارضلعی AHCD مستطیل است. پس $AH=۱۶$ و $CH=۱۲$، حالا طبق فیثاغورس در مثلث BCH داریم:

$$\overset{\triangle}{BCH}: BC^۲=CH^۲+BH^۲=۱۲^۲+۹^۲=۱۵^۲ \Rightarrow BC=۱۵$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): با توجه به گام اول، داریم:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{BC}{AC}=\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۳}{۴}$$

۲۸ در مثلث ABC به اضلاع $AB=c$، $AC=b$ و $BC=a$، اگر $5(a^2-b^2-c^2)=4\sqrt{6}bc$ آن‌گاه طول شعاع دایرهٔ محیطی، چند برابر a است؟

۱) $\frac{2\sqrt{6}}{4}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

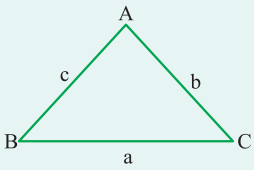
Hint

در مثلث ABC، قضیهٔ کسینوس‌ها را بر حسب زاویهٔ A بنویسید.

درس Box

قضیه کسینوس‌ها

در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها.



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\hat{C}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اوّل (نوشتن فرض سؤال، به شکل مناسب): می‌خواهیم رابطهٔ مفروض سؤال را تا حد امکان، شبیه به قضیهٔ کسینوس‌ها برای ضلع a بنویسیم:

$$5(a^2-b^2-c^2)=4\sqrt{6}bc \Rightarrow a^2-b^2-c^2=\frac{4\sqrt{6}}{5}bc \Rightarrow a^2=b^2+c^2+\frac{4\sqrt{6}}{5}bc$$

گام دوم (محاسبهٔ سینوس و کسینوس زاویهٔ $\hat{A}$): قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC را برای ضلع a می‌نویسیم و از مقایسهٔ آن با رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال کسینوس زاویهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A} \\ \text{فرض}: a^2=b^2+c^2+\frac{4\sqrt{6}}{5}bc \end{cases} \Rightarrow -2\cos\hat{A}=\frac{4\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \cos A=\frac{-2\sqrt{6}}{5}$$

طبق رابطهٔ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$، سینوس زاویهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\cos\hat{A}=\frac{-2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \cos^2\hat{A}=\frac{24}{25}$$

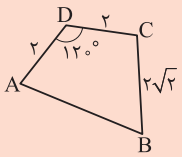
$$1-\cos^2\hat{A}=\sin^2\hat{A} \Rightarrow \sin^2\hat{A}=\frac{1}{25} \xrightarrow{0^\circ<\hat{A}<180^\circ} \sin\hat{A}=\frac{1}{5}$$

گام سوم (محاسبهٔ شعاع دایره محیطی مثلث):

مطابق فرمول، شعاع دایرهٔ محیطی را به دست می‌آوریم:

$$R=\frac{a}{2\sin\hat{A}}=\frac{a}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}a=2/5a$$

۲۹ چهارضلعی رسم‌شده در شکل روبه‌رو محاطی است. طول ضلع **AB** کدام است؟

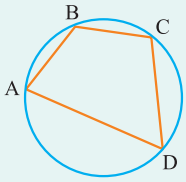


۱) $\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$
۲) $۲+\sqrt{۳}$
۳) ۴
۴) $۲\sqrt{۳}$

مشاوره می‌دانید که در هندسه، سؤال‌های ترکیبی بین مباحث، بسیار مهم هستند، در این سؤال که شبیه یکی از سؤال‌های کنکورهای گذشته است، «خواص چهارضلعی محاطی» با «قضیهٔ کسینوس‌ها» ترکیب شده است.

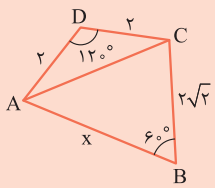
Hint قطر AC را رسم کنید و در دو مثلث ایجادشده، قضیهٔ کسینوس‌ها را بنویسید.

درس Box **قضیه:** یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر هر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند:



$$\hat{A}+\hat{C}=B+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (محاسبهٔ طول AC):** طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ACD داریم:



$$\overset{\triangle}{ACD}: AC^۲ = ۲^۲+۲^۲-۲\times۲\times۲\cos۱۲۰^\circ = ۴+۴+۴ = ۱۲$$

گام دوم (محاسبهٔ طول AB): در چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل هستند، پس $\hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۲۰^\circ=۶۰^\circ$ است.

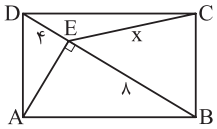
طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC، طول ضلع $AB=x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\overset{\triangle}{ABC}: AC^۲ = x^۲+۸-۲(۲\sqrt{۲})x\cos۶۰^\circ = x^۲-۲\sqrt{۲}x+۸$$

$$\Rightarrow x^۲-۲\sqrt{۲}x+۸=۱۲ \Rightarrow x^۲-۲\sqrt{۲}x-۴=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲\sqrt{۲}\pm\sqrt{۲۴}}{۲} \xrightarrow{x>۰} x=\frac{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۴\times۶}}{۲}=\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$$

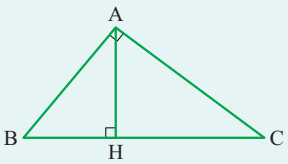
۳۰ در مستطیل **ABCD** مطابق شکل، **AE** بر قطر **BD** عمود است. اگر **DE = ۴** و **BE = ۸** باشد، طول **EC** کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۵}$
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $۵\sqrt{۲}$
۴) $۳\sqrt{۶}$

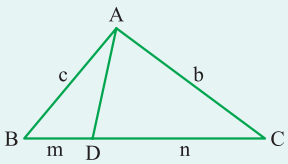
درس Box

۱) روابط طولی مثلث قائم‌الزاویه: مطابق شکل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، AH ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:



$$AC^۲ = BC \times CH$$
$$AB^۲ = BC \times BH$$

۲) قضیه استوارت: در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D را روی ضلع BC در نظر می‌گیریم، با توجه به شکل، داریم:



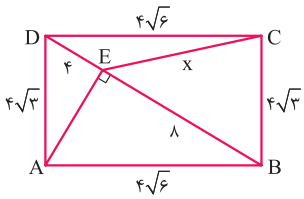
$$AD^۲ = \frac{b^۲ \cdot m + c^۲ \cdot n}{m+n} - mn$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ طول و عرض مستطیل): مثلث ABD قائم‌الزاویه و AE ارتفاع آن است، حالا با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، طول و عرض مستطیل را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} AD^۲ = DE \cdot DB = ۴ \times ۱۲ = ۴۸ \Rightarrow AD = ۴\sqrt{۳} \\ AB^۲ = BE \cdot BD = ۸ \times ۱۲ = ۹۶ \Rightarrow AB = ۴\sqrt{۶} \end{cases}$$

گام دوم (محاسبهٔ طول EC): حال با استفاده از قضیهٔ استوارت در مثلث BDC داریم:



$$EC^۲ = \frac{DE \times BC^۲ + BE \times DC^۲}{DB} - DE \times BE$$
$$\Rightarrow x^۲ = \frac{۴ \times (۴\sqrt{۳})^۲ + ۸ \times (۴\sqrt{۶})^۲}{۱۲} - ۴ \times ۸ = \frac{۴ \times ۴۸ + ۸ \times ۹۶}{۱۲} - ۳۲ = ۴۸$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

۳۱ اگر **A** و **B** دو پیشامد از فضای نمونه‌ای **S** باشند و $A \subseteq B$ ، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $P(A) \leq P(B)$

۲) $P(B-A) = P(B) - P(A)$

۳) $P(A \cup B) = P(B)$

۴) $0 < P(A-B) < 1$

Hint

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \subseteq B$ آن‌گاه:

$P(A) \leq P(B)$

درس Box

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $A \subseteq B$ آن‌گاه:

۱) $A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$

۲) $A \cup B = B \Rightarrow P(A \cup B) = P(B)$

۳) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = 0$

۴) $P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ یکی‌یکی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) گزینهٔ: $A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

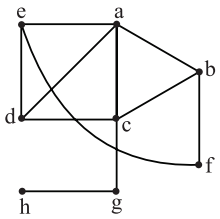
(۲) گزینهٔ: $P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)$

(۳) گزینهٔ: $A \cup B = B \Rightarrow P(A \cup B) = P(B)$

(۴) گزینهٔ: $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) = 0$

(۴) راه دوم گزینهٔ: $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \varnothing \Rightarrow P(A-B) = 0$

۳۲ در گراف مقابل، کدام مجموعه، $\gamma-$ مجموعه نیست؟



۱) $\{e,c,h\}$

۲) $\{a,g,f\}$

۳) $\{b,d,h\}$

۴) $\{a,c,g\}$

درس Box

تعریف: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

به چنین مجموعهٔ احاطه‌گر، یک $\gamma-$ مجموعه می‌گوییم.

پاسخ خیلی تشریحی

قبل از بررسی گزینه‌ها، دقّت داشته باشید که در همهٔ گزینه‌ها، تعداد اعضای مجموعهٔ داده‌شده برابر ۳ است و این یعنی $\gamma = ۳$.

پس روی تعداد اعضای مجموعه تمرکز نکنید که ببینید مینیمم است یا نه و فقط احاطه‌گربودن مجموعه را بررسی می‌کنیم.

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گام اول: بررسی گزینهٔ (۱): رأس e رئوس d, f, a را پوشش می‌دهد.

رأس c رئوس a, b, d, g را پوشش می‌دهد.

با این دو رأس تمام رئوس به‌جز h پوشش داده شده و خود h هم که در مجموعه هست، پس مجموعهٔ $\{e,c,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. ✓

گام دوم: بررسی گزینهٔ (۲): رئوس a و f تمام رئوس گراف به‌جز دو رأس g و h را پوشش می‌دهند. با اضافه‌شدن رأس g، رأس h هم احاطه می‌شود، پس مجموعهٔ $\{a,g,f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر هست. ✓

گام سوم: بررسی گزینهٔ (۳): رئوس b و d، تمام رئوس گراف به‌جز دو رأس g و h را احاطه می‌کنند. با وجود رأس h در مجموعه، رأس g هم احاطه می‌شود؛ پس مجموعهٔ $\{b,d,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است.

گام چهارم: بررسی گزینهٔ (۴): رأس a رئوس b, c, d, e را پوشش می‌دهد.

رأس c رئوس d, b, a و g را پوشش می‌دهد.

رأس g هم رأس h را پوشش می‌دهد.

همان‌طور که مشخص است رأس f توسط هیچ‌یک از رئوس این مجموعه احاطه نمی‌شود؛ بنابراین مجموعهٔ داده‌شده احاطه‌گر نیست و درنتیجه نمی‌تواند $\gamma-$ مجموعه باشد.

۳۳ در پرتاب دو تاس، چه‌قدر احتمال دارد که عدد روشدهٔ یک تاس بر عدد روشدهٔ تاس دیگر بخش‌پذیر نباشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۷}{۱۸}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۴}{۹}$

نکته در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضای نمونه $S_۱$ و $S_۲$ باشد، فضای نمونهٔ آن $S_۱ \times S_۲$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فضای نمونه‌ای در پرتاب دو تاس $n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$ عضو دارد؛ پس $n(S) = ۳۶$.

گام دوم: با رسم جدول فضای نمونه‌ای، اعداد روشدهٔ دو تاس که بر هم بخش‌پذیر نیستند را انتخاب می‌کنیم، مثل $(۲,۳)$.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲			×		×	
۳		×		×	×	
۴			×		×	×
۵		×	×	×		×
۶				×	×	

گام سوم: همان‌طور که از جدول مشخص است $n(A) = ۱۴$؛ بنابراین:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۴}{۳۶} = \frac{۷}{۱۸}$$

۳۴ اگر A و B دو پیشامد جدا از هم باشند به طوری که $P(A')+P(B')=1/7$، آن‌گاه $P(A-B)+P(B-A)$ کدام است؟

۱) ۰/۱

۲) ۰/۲

۳) ۰/۳

۴) ۰/۴

درس Box اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A\cap B=\varnothing$، در این صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار یا جدا از هم می‌نامیم. در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچ‌گاه با هم رخ نمی‌دهند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** اگر A و B دو پیشامد جدا از هم باشند؛ پس $A\cap B=\varnothing$ بنابراین:

$$\begin{matrix}P(A-B)=P(A)\\P(B-A)=P(B)\end{matrix}\quad(1)$$

گام دوم:

$$P(A')+P(B')=1/7\Rightarrow 1-P(A)+1-P(B)=1/7\Rightarrow P(A)+P(B)=0/3\quad(2)$$

گام سوم:

$$P(A-B)+P(B-A)\overset{(1)}{=}P(A)+P(B)\overset{(2)}{=}0/3$$

۳۵ در گراف کامل K_5، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم وجود دارد؟

۱) ۳۱

۲) ۱۷

۳) ۱۰

۴) ۵

Hint

عدد احاطه‌گری در گراف کامل برابر است با:

$\gamma(G)=1$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در گراف کامل، تمام رئوس به هم متصل‌اند؛ بنابراین با انتخاب هر یک از رئوس، گراف احاطه می‌شود؛ پس عدد احاطه‌گری در گراف کامل برابر $\gamma(G)=1$ است.

گام دوم: گراف کامل K_5، ۵ رأس دارد که با انتخاب هر یک از این ۵ عضو گراف احاطه می‌شود؛ بنابراین تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم برابر است با:

$$\binom{5}{1}=5$$

۳۶ با حروف کلمهٔ «ARASBARAN»، چند ترکیب ۸حرفی مختلف می‌توان ساخت؟

۱) ۷۵۶۰
۲) ۵۶۲۰
۳) ۳۳۶۰
۴) ۲۵۲۰

درس Box

قضیهٔ جایگشت با تکرار: اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن‌ها از نوع kام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کلمهٔ داده‌شده ۹ حرف دارد و ما ترکیب‌های ۸حرفی را می‌خواهیم، پس یک حرف را باید حذف کنیم.

گام دوم: اگر حرف A را حذف کنیم، ۳ حرف A و ۲ حرف R تکراری هستند؛ بنابراین تعداد جایگشت‌های ۸حرفی برابر است با:

$$A \Rightarrow \frac{8!}{\underset{\text{تکرار A}}{3!} \times \underset{\text{تکرار R}}{2!}} = 3360$$

گام سوم: اگر حرف R حذف شود:

$$R \Rightarrow \frac{8!}{\underset{\text{تکرار حرف A}}{4!}} = 1680$$

گام چهارم: با حذف یکی از حروف S، B و N تعداد جایگشت‌های ۸حرفی برابر است با:

$$\overset{\text{حذف B یا S یا N}}{3} \times \frac{8!}{\underset{\text{تکرار A}}{4!} \times \underset{\text{تکرار R}}{2!}} = 3 \times 840 = 2520$$

گام پنجم: پس تعداد جایگشت‌های ۸حرفی مختلف برابر است با:

$$3360 + 1680 + 2520 = 7560$$

یه جور دیگه

تعداد جایگشت‌های nتایی nشیء همواره برابر تعداد جایگشت‌های $(n-1)$ تایی آن‌ها است. بنابراین کافی است به جای ترکیب‌های ۸حرفی ترکیب‌های ۹حرفی کلمهٔ ARASBARAN را محاسبه کنیم. طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار داریم:

$$\frac{9!}{\underset{\text{تکرار A}}{4!} \times \underset{\text{تکرار R}}{2!}} = 7560$$

۳۷ معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 17$، با شرایط $x_1 \geq -1$، $x_2 > 2$ و $2 \leq x_3 < 4$، چند جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح دارد؟

۱) ۱۲

۲) ۱۸

۳) ۲۷

۴) ۳۰

درس Box

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$.

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا شرط‌های مسئله را بررسی می‌کنیم:

$x_1 \geq -1 \Rightarrow x_1' = x_1 + 1 \geq 0$

$x_2 > 2 \Rightarrow x_2 \geq 3 \Rightarrow x_2' = x_2 - 3 \geq 0$

$2 \leq x_3 < 4 \Rightarrow x_3 = 2$ یا 3

گام دوم: حال شرط‌ها را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$x_1 + x_2 + x_3 = 17 \Rightarrow x_1' - 1 + x_2' + 3 + x_3 = 17 \Rightarrow x_1' + x_2' + x_3 = 15$

گام سوم: شرط x_3 را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x_3 = 2 \Rightarrow x_1' + x_2' + 2 = 15 \Rightarrow x_1' + x_2' = 13 \xrightarrow{x_1', x_2' \geq 0} \binom{14}{1} = 14$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow x_1' + x_2' + 3 = 15 \Rightarrow x_1' + x_2' = 12 \xrightarrow{x_1', x_2' \geq 0} \binom{13}{1} = 13$$

بنابراین تعداد جواب‌های صحیح معادله برابر است با:

$14 + 13 = 27$

۳۸ سه خانه از یک مربع لاتین مرتبهٔ ۵ انتخاب کرده‌ایم به طوری که هیچ دو خانه‌ای در یک سطر نباشند. با چه احتمالی مجموع سه عدد انتخاب‌شده برابر ۹ است؟

۱) ۰/۱۷۶

۲) ۰/۱۶۸

۳) ۰/۱۶

۴) ۰/۱۵۲

درس Box

تعریف: یک جدول مربعی از اعداد ۱، ۲، ... و n به شکل یک مربع $n\times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین» می‌نامیم. به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مربع لاتین مرتبهٔ ۵ از اعداد ۱، ۲، ...، ۵ پر شده است که در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود ندارد؛ می‌خواهیم هیچ دو خانه‌ای در یک سطر نباشند، بنابراین پنج سطر برای انتخاب داریم که سه‌تای آن‌ها را باید به $\binom{۵}{۳}=۱۰$ حالت انتخاب کنیم. برای هر سطر ۵ حالت ۱، ۲، ...، ۵ داریم؛ بنابراین $۵^۳$ حالت می‌شود که در کل $n(S)=\binom{۵}{۳}\times ۵^۳=۱۲۵۰$.

گام دوم: مجموع سه عدد انتخاب‌شده برابر ۹ است؛ بنابراین حالت‌های مختلف برابر است با:

$$۱+۳+۵=۹ \Rightarrow \binom{۵}{۳}\times ۳!=۶۰$$

$$۱+۴+۴=۹ \Rightarrow \binom{۵}{۳}\times \frac{۳!}{۲!}=۳۰$$

$$۲+۲+۵=۹ \Rightarrow \binom{۵}{۳}\times \frac{۳!}{۲!}=۳۰$$

$$۲+۳+۴=۹ \Rightarrow \binom{۵}{۳}\times ۳!=۶۰$$

$$۳+۳+۳=۹ \Rightarrow \binom{۵}{۳}=۱۰$$

گام سوم: در نتیجه:

$$n(A)=۶۰+۳۰+۳۰+۶۰+۱۰=۱۹۰$$

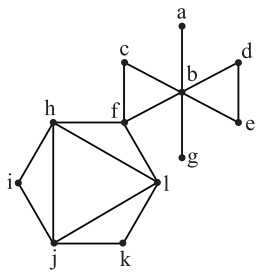
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۹۰}{۱۲۵۰}=\frac{۱۹}{۱۲۵}=\frac{۱۵۲}{۱۰۰۰}=۰/۱۵۲$$

یه‌جور دیگه

چون انتخاب ۳ سطر از میان ۵ سطر هم در محاسبهٔ فضای نمونه و هم در محاسبهٔ تعداد اعضای پیشامد تکرار می‌شود، می‌توانیم $\binom{۵}{۳}$ را به کلی نادیده گرفته و فرض کنیم ۳ سطر از ۵ سطر را انتخاب کرده‌ایم. در این صورت داریم:

$$P(A)=\frac{۳!+\frac{۳!}{۲!}+\frac{۳!}{۲!}+۳!+۱}{۵^۳}=\frac{۱۹}{۱۲۵}=۰/۱۵۲$$

۳۹ در گراف مقابل، کدام مجموعه احاطه‌گر مینیمال است؟



۱) $\{b,f,j\}$

۲) $\{a,b,j\}$

۳) $\{b,i,k\}$

۴) $\{a,h,l,g\}$

درس Box

تعریف: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رئوس b و j تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند؛ بنابراین می‌توان رأس f در گزینهٔ (۱) و رأس a در گزینهٔ (۲) را حذف کرد.

گام دوم: در گزینهٔ (۴) رئوس d، c و e احاطه نمی‌شوند؛ بنابراین گزینهٔ (۴) اصلاً احاطه‌گر نیست.

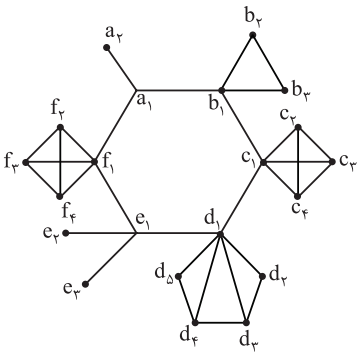
گام سوم: در گزینهٔ (۳)، با حذف رأس b رئوس g، e، d، a، c، f و خود رأس b احاطه نمی‌شوند.

با حذف رأس i، رأس h و خود رأس i احاطه نمی‌شود.

و با حذف رأس k، رأس l و خود رأس k احاطه نمی‌شود.

پس هیچ‌کدام از اعضای مجموعهٔ $\{b,i,k\}$ را نمی‌توان حذف کرد. هم‌چنین با این سه رأس تمام رئوس گراف احاطه می‌شوند؛ پس این مجموعه، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

۴۰ در گراف مقابل، تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر مینیمم، کدام است؟



۱) ۶۴

۲) ۹۶

۳) ۱۹۲

۴) ۲۸۸

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (۲): در این گراف $\gamma = 6$ است و ساده‌ترین مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمُمی که به ذهنمان می‌رسد این است:

$$D = \{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1\} \Rightarrow \gamma = |D| = 6$$

گام دوم (شمارش): حالا حالت‌های مختلف را در هر رأسِ شش‌ضلعی شمارش می‌کنیم:

در رأس a_1 از شش‌ضلعی، ۲ حالت داریم: a_1 یا a_2

در رأس b_1، سه حالت داریم: b_1 یا b_2 یا b_3

در رأس c_1، چهار حالت داریم: c_1 یا c_2 یا c_3 یا c_4

در رأس d_1، یک حالت داریم: فقط d_1

در رأس e_1، یک حالت داریم: فقط e_1

در رأس f_1، چهار حالت داریم: f_1 یا f_2 یا f_3 یا f_4

بنابراین طبق اصل ضرب، می‌رسیم به: $2 \times 3 \times 4 \times 1 \times 1 \times 4 = 96$

۴۱ در یک تشت موج، بسامد موج تخت تشکیل‌شده بر سطح آب برابر $2Hz$ است. اگر با ورود موج از ناحیهٔ کم‌عمق به ناحیهٔ عمیق، تندی انتشار آن $0/2 m/s$ تغییر کند، طول موج آن چند سانتی‌متر و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۱۰، کاهش می‌یابد.

۲) ۱۰، افزایش می‌یابد.

۳) ۴۰، کاهش می‌یابد.

۴) ۴۰، افزایش می‌یابد.

Hint

ابتدا طبق رابطهٔ عمق با تندی، متوجه می‌شویم با افزایش عمق، تندی انتشار افزایش یافته، پس در رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$، تندی و بسامد را جای‌گذاری می‌کنیم تا تغییرات طول موج را محاسبه کنیم.

درس Box

- در آب‌های کم‌عمق، تندی انتشار امواج در سطح آب، به عمق آب وابسته است. به طوری که هر چه عمق آب کم‌تر باشد، تندی انتشار امواج در سطح آب کم‌تر است.
- رابطهٔ طول موج با تندی و بسامد به صورت زیر است:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

(λ: طول موج (m)، v: تندی (m/s)، T: دورهٔ تناوب (s)، f: بسامد (Hz))

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک پارامترها، طول موج محیط کم‌عمق (ناحیهٔ ۱) را می‌نویسیم:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{v_1}{2} \quad (I)$$

نکته

با تغییر عمق، بسامد موج در سطح آب تغییر نمی‌کند، ولی طول موج متناسب با تندی تغییر می‌کند.

گام دوم: موج از ناحیهٔ کم‌عمق (۱) وارد ناحیهٔ عمیق (۲) شده، پس تندی موج سطحی آب افزایش می‌یابد:

$$v_2 = v_1 + 0/2$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{v_1 + 0/2}{f} = \frac{v_1}{2} + \frac{0/2}{2} \xrightarrow{(I)} \lambda_2 = \lambda_1 + 0/1\,(m) = \lambda_1 + 10\,cm$$

پس طول موج در ناحیهٔ ۲ (عمیق) به اندازهٔ $10\,cm$ افزایش می‌یابد.

۴۲ نیروی کشش یک تار ۶۰N است و هنگامی که با بسامد ۲۵۰Hz به ارتعاش درمی‌آید، طول موج در آن ۲۰cm می‌شود. اگر چگالی تار $۸\,g/cm^۳$ باشد، قطر مقطع آن چند میلی‌متر است؟ $(\pi \simeq ۳)$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

Hint

ابتدا تندی انتشار موج را از رابطهٔ $v = \lambda f$ محاسبه می‌کنیم و سپس در رابطهٔ $v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ جای‌گذاری می‌کنیم تا خواستهٔ سؤال به دست آید.

درس Box

رابطهٔ تندی انتشار موج عرضی در یک فنر یا طناب، برحسب پارامترهای چگالی و سطح مقطع به صورت زیر است:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \xrightarrow[V=AL]{\rho=\frac{m}{V} \Rightarrow m=\rho V} v = \sqrt{\frac{FL}{\rho AL}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \xrightarrow{} \pi r^۲$$

توجه کنید که سیم یا تار به صورت استوانه است و حجم آن از رابطهٔ $V = AL$ محاسبه می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک طول موج و بسامد، تندی انتشار موج را محاسبه می‌کنیم:

$$v = \lambda f = ۲۰\times۱۰^{-۲}\times۲۵۰ = ۵۰\,m/s \quad (I)$$

گام دوم: تندی انتشار موج از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \xrightarrow{(I)} ۵۰ = \sqrt{\frac{۶۰}{۸\times۱۰^۳\times ۳r^۲}} \Rightarrow ۵۰ = \sqrt{\frac{۱}{۴۰۰r^۲}} \Rightarrow ۵۰ = \frac{۱}{۲۰r} \Rightarrow r = \frac{۱}{۱۰^۳}m \Rightarrow r = ۱mm$$

($A = \pi r^۲$)

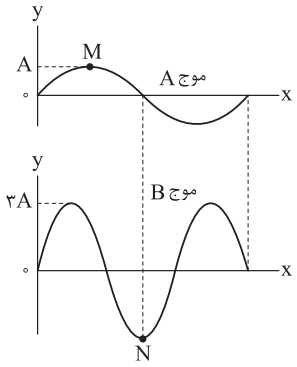
سؤال از ما قطر مقطع را خواسته است، پس:

$$۲r = d = ۲mm$$

گول نخوری

خواست باشه که سؤال **قطر** مقطع رو خواسته، در حالی که ما از رابطهٔ سطح مقطع (A) اندازهٔ **شعاع** رو به دست میاریم.

۴۳ در شکل زیر، دو موج عرضی **A** و **B** در دو طناب متفاوت منتشر می‌شوند. اگر تندی انتشار موج **A**، ۲ برابر تندی انتشار موج **B** باشد، بیشینهٔ تندی ذرهٔ **M** چند برابر بیشینهٔ تندی ذرهٔ **N** است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

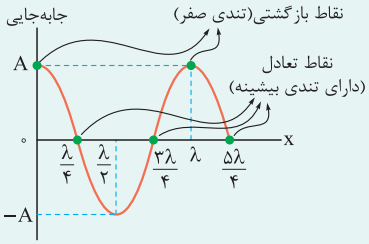
۴) $\frac{۴}{۹}$

Hint

چون دو موج عرضی A و B در دو طناب متفاوت (دو محیط متفاوت) منتشر می‌شوند، پس ابتدا به کمک داده‌های نمودار، رابطهٔ بسامد دو موج را به دست می‌آوریم و سپس از رابطهٔ $v_{max} = A\omega = A(۲\pi f)$ نسبت بیشینهٔ تندی ذره‌ها را می‌نویسیم.

درس Box

شکل روبه‌رو نمودار جابه‌جایی ـ مکان یک موج عرضی را نشان می‌دهد. به کمک نمودار می‌توانیم طول موج، دامنه و نقاط تعادل و بازگشتی موج را مشخص کنیم:



فرمول محاسبهٔ طول موج برای امواج عرضی و طولی به صورت زیر است:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

طول موج(m) ← λ ، v: تندی(m/s)، T: دورهٔ تناوب(s)، f: بسامد(Hz)

موج در نقطهٔ تعادل دارای بیشینهٔ تندی است که از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$v_{max} = A\omega = A(۲\pi f)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار و طبق داده‌های صورت سؤال، اطلاعات زیر را داریم:

(۱) $A_B = ۳A \quad , \quad A_A = A$

(۲) $\lambda_A = \frac{۳}{۲}\lambda_B$

(۳) $v_A = ۲v_B$

گام دوم: طبق رابطهٔ تندی انتشار دو موج، نسبت بسامد دو موج A و B را به دست می‌آوریم:

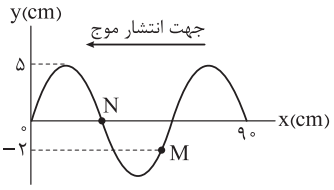
$$\left.\begin{matrix} v_A = ۲v_B \\ v = \lambda f \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_A f_A = ۲\lambda_B f_B \xrightarrow{\lambda_A = \frac{۳}{۲}\lambda_B} \frac{۳}{۲}\lambda_B f_A = ۲\lambda_B f_B$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}f_A = f_B \Rightarrow \frac{۳}{۴}f_M = f_N$$

گام سوم: نقاط M و N در وضعیت تعادل دارای بیشینهٔ تندی هستند، پس از رابطهٔ بیشینهٔ تندی داریم:

$$v_{max} = A(۲\pi f) \Rightarrow \frac{v_{max,M}}{v_{max,N}} = \frac{A_M}{A_N} \times \frac{f_M}{f_N} = \frac{A}{۳A} \times \frac{f_M}{\frac{۳}{۴}f_M} = \frac{۴}{۹}$$

۴۴ تصویر یک موج عرضی که در طنابی در حال انتشار است، در لحظهٔ $t=0$ به شکل زیر است. اگر تندی متوسط ذرهٔ M از طناب در مدتی که موج ۳۰cm در محیط پیشروی می‌کند، برابر $0/5\,m/s$ باشد، شتاب ذرهٔ N از طناب در لحظهٔ $t=0/45\,s$ در SI کدام است؟ $(\pi^2\simeq 10)$



۱) $-5\sqrt{2}\,\vec{j}$

۲) $+5\sqrt{2}\,\vec{j}$

۳) $-\frac{25}{4}\sqrt{2}\,\vec{j}$

۴) $+\frac{25}{4}\sqrt{2}\,\vec{j}$

درس Box

۱) رابطهٔ تندی متوسط

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$$

s_{av} = تندی متوسط (m/s)

l = مسافت طی‌شده (m)

Δt = مدت‌زمان (s)

۲) هر ذرهٔ نوسانی از محیط، همچون چشمهٔ موج، در هر نصف دوره $(\frac{T}{2})$ مسافتی به اندازهٔ دو برابر دامنه $(2A)$ را می‌پیماید.

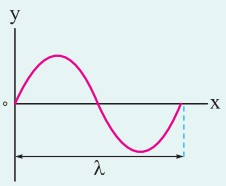
۳) رابطهٔ بسامد زاویه‌ای برحسب دوره:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

ω = بسامد زاویه‌ای (rad/s)

T = دوره (s)

۴) طول موج (λ)، برابر با مسافتی است که موج در مدت دورهٔ تناوب نوسان طی می‌کند.



۵) رابطهٔ شتاب هر ذرهٔ نوسانگر برحسب مکان:

$$a=-\omega^2 y$$

a = شتاب (m/s^2)

ω = بسامد زاویه‌ای (rad/s)

y = مکان نوسانگر (m)

پاسخ خیلی تشریحی

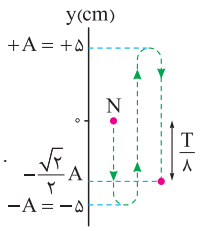
گام اول: با توجه به شکل داده‌شده داریم:

$$\frac{3}{2}\lambda=90\Rightarrow\lambda=60\,cm$$

بنابراین وقتی موج ۳۰cm در محیط پیشروی می‌کند، یعنی نصف طول موج را پیموده و زمانی معادل نصف دوره $(\frac{T}{2})$ سپری شده است. هم‌چنین در این مدت ذرهٔ نوسانی M مسافتی معادل دو برابر دامنه $(2A)$ را می‌پیماید.

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\xrightarrow[l=2A=2\times5\times10^{-2}=10^{-1}m]{s_{av}=0/5\,m/s,\ \Delta t=\frac{T}{2}}0/5=\frac{10^{-1}}{\frac{T}{2}}\Rightarrow\frac{T}{4}=10^{-1}\Rightarrow T=0/4\,s$$

گام دوم: شتاب ذرهٔ N از طناب در لحظهٔ $t=0/45\,s$ خواسته شده است. پس باید مکان ذرهٔ N در این لحظه را پیدا کنیم:



$$t=0/45\,s=0/4+0/05=T+\frac{T}{8}$$

جابه‌جایی ذرهٔ N بعد از زمان T صفر است، اما در $\frac{T}{8}$ بعد از آن فاصلهٔ $\frac{\sqrt{2}}{2}A$ را رو به پایین طی می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$y_N=-\frac{\sqrt{2}}{2}A=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times5\times10^{-2}\,m$$

گام سوم: بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم و به کمک آن، شتاب ذرهٔ N برحسب مکان آن را به دست می‌آوریم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0/4} = 5\pi \, rad/s$$

$$a = -\omega^2 y \xrightarrow[y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 5\times 10^{-2} m]{\omega = 5\pi \, rad/s} a = -(5\pi)^2 \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 5\times 10^{-2})$$

$$\xrightarrow{\pi^2=10} a = -250\times(-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 5\times 10^{-2}) = 250\times 0/5\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25}{4}\sqrt{2}\, m/s^2$$

جهت شتاب رو به بالا است؛ بنابراین در لحظهٔ $t = 0/45\, s$ و در SI می‌توان نوشت:

$$\vec{a}_N = (+\frac{25}{4}\sqrt{2}\, m/s^2)\vec{j}$$

۴۵ شنونده‌ای از فاصلهٔ ۶۴۰متری یک چشمهٔ صوت به فاصلهٔ ۱۶۰متری آن می‌رود. تراز شدت صوتی که می‌شنود چند دسی‌بل افزایش می‌یابد؟ $(\log ۲ = ۰/۳)$

۱) ۰/۶
۲) ۱/۲
۳) ۶
۴) ۱۲

مشاوره این تست، یکی از سؤال‌های امتحانی نهایی دوازدهم تجربی در خرداد ۱۴۰۳ بوده است.

درس Box

۱) شدت صوت یک چشمهٔ صوتی، با مربع فاصله آن از چشمه، رابطهٔ عکس دارد.

$$\frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

$I_۱$ = شدت صوت در فاصلهٔ $r_۱$ از چشمهٔ صوت $(W/m^۲)$

$I_۲$ = شدت صوت در فاصلهٔ $r_۲$ از چشمهٔ صوت $(W/m^۲)$

۲) برای مقایسهٔ شدت صوت در دو حالت مختلف و محاسبهٔ تغییر تراز شدت صوت داریم:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱}$$

$\beta_۱$ = تراز شدت صوت در حالت اول (dB)

$\beta_۲$ = تراز شدت صوت در حالت دوم (dB)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نسبت شدت صوت در دو حالت داده‌شده را به دست می‌آوریم:

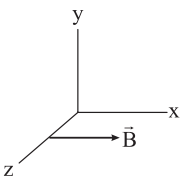
$$\frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{r_۱}{r_۲})^۲ \xrightarrow[r_۲ = ۱۶۰\,m]{r_۱ = ۶۴۰\,m} \frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{۶۴۰}{۱۶۰})^۲ = ۴^۲ = ۱۶$$

گام دوم: تغییر تراز شدت صوت بین دو حالت را محاسبه می‌کنیم:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱} \xrightarrow{\frac{I_۲}{I_۱} = ۱۶ = ۲^۴} \beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log ۲^۴$$

$$\Rightarrow \beta_۲ - \beta_۱ = ۴۰ \log ۲ \xrightarrow{\log ۲ = ۰/۳} \beta_۲ - \beta_۱ = ۴۰ \times ۰/۳ = ۱۲\,dB$$

۴۶ شکل زیر، جهت میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی را در یک نقطه و در یک لحظه نشان می‌دهد. اگر جهت انتشار موج در جهت مثبت محور z باشد، جهت میدان الکتریکی در این لحظه و در این مکان کدام است؟



۱) $-y$

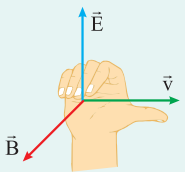
۲) $+y$

۳) $-z$

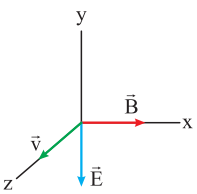
۴) $+z$

درس Box

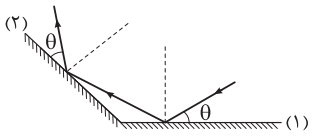
یکی از ویژگی‌های امواج الکترومغناطیسی آن است که اگر چهار انگشت دست راست خود را در جهت $\vec{E}$ گرفته و آن‌ها را به طرف $\vec{B}$ خم کنیم، انگشت شست، جهت انتشار موج را نشان می‌دهد.



پاسخ خیلی تشریحی ✔ میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در سوی محور x و جهت انتشار در سوی محور z است؛ بنابراین با توجه به قاعدهٔ دست راست که در درس‌باکس به آن اشاره شد، باید جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ در سوی منفی محور y باشد.



۴۷ مطابق شکل، پرتوی نوری به آینهٔ (۱) و در ادامه به آینهٔ (۲) می‌تابد. اگر امتداد پرتوی بازتاب از آینهٔ (۲) با امتداد پرتوی تابش به آینهٔ (۱) زاویهٔ ۱۲۰° بسازد، θ چند درجه است؟



۱) ۲۰

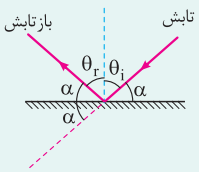
۲) ۳۰

۳) ۴۰

۴) ۶۰

درس Box

۱) قانون عمومی بازتاب: برای همهٔ انواع موج هنگام بازتاب (از یک مانع)، زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتابش برابر است.

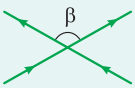


$$\theta_i = \theta_r$$

$\theta_i =$ زاویهٔ تابش

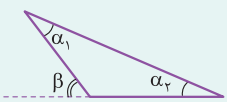
$\theta_r =$ زاویهٔ بازتاب

۲) زاویهٔ بین دو پرتو، هنگامی معنا دارد که این دو پرتو، اضلاع آن زاویه را بسازند و هر دو پرتو از رأس آن زاویه، رو به خارج باشند. مثلاً در شکل روبه‌رو زاویهٔ بین دو پرتو با β نشان داده شده است:



۳) یادآوری از درس هندسه:

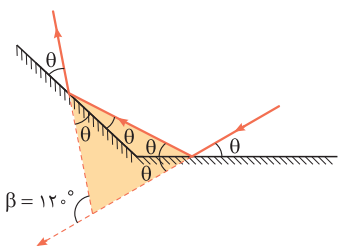
در یک مثلث، هر زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن:



$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2$$

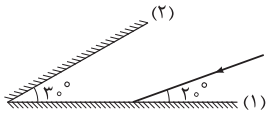
پاسخ خیلی تشریحی ✔ پرتوی تابش بر سطح آینهٔ (۱) و پرتوی بازتاب از سطح آینهٔ (۲) را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را قطع کنند. زاویهٔ بین این دو پرتو را با β نشان می‌دهیم که ۱۲۰° است.

با توجه به نکتهٔ ۳ درس‌باکس در مثلث رنگی می‌توان نوشت:



$$\beta = ۲\theta + ۲\theta \Rightarrow ۱۲۰ = ۴\theta \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

۴۸ در شکل زیر، پرتوی نوری به آینهٔ (۱) و سپس در ادامه به آینهٔ (۲) می‌تابد. در آخرین بازتابش پرتوی نور از آینهٔ (۲)، زاویهٔ بین پرتوی بازتاب و این آینه چند درجه است؟



۱) ۱۰

۲) ۲۰

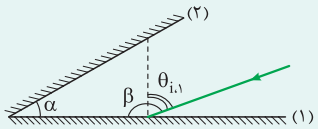
۳) ۳۰

۴) ۴۰

مشاوره مشابه این تست در کنکورهای تجربی خارج از کشور در سال‌های ۱۴۰۱ و ۱۴۰۲ مطرح شده است.

درس Box

هرگاه دو آینهٔ تخت متقاطع با یکدیگر زاویهٔ α بسازند و مطابق شکل، پرتوی نوری با زاویهٔ تابش $\theta_{i,1}$ بر سطح یکی از آینه‌ها (مثلاً آینه ۱) بتابد، دو نکتهٔ زیر وجود دارد:



۱) تعداد بازتاب‌ها یا تعداد برخوردها بر سطح این دو آینه (n) به صورت زیر به دست می‌آید:

الف) اگر $\frac{\beta}{\alpha}$ برابر با یک عدد صحیح باشد: $n=\frac{\beta}{\alpha}$

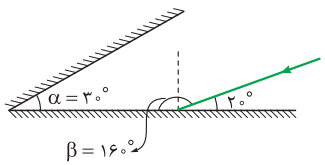
ب) اگر $\frac{\beta}{\alpha}$ برابر با یک عدد صحیح نباشد: $n=[\frac{\beta}{\alpha}]+1$

۲) زاویهٔ بازتاب در nاُمین برخورد پرتو به آینه‌ها برابر است با:

$$\theta_{r,n}=\left|(n-1)\alpha-\theta_{i,1}\right|$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تعداد بازتاب‌ها (n) را به دست می‌آوریم:



$$n=[\frac{\beta}{\alpha}]+1=[\frac{160^\circ}{30^\circ}]+1=5+1=6$$

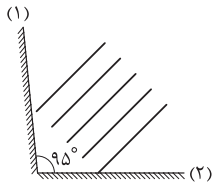
گام دوم: $\theta_{r,n}$ یعنی زاویهٔ بازتاب در nامین برخورد را پیدا می‌کنیم:

$$\theta_{r,n}=\left|(n-1)\alpha-\theta_{i,1}\right| \xrightarrow[\theta_{i,1}=70^\circ]{n=6,\alpha=30^\circ} \theta_{r,n}=(6-1)30-70=80^\circ$$

پس در آخرین بازتاب، زاویهٔ بین پرتوی بازتاب و آینه برابر است با:

$$90^\circ-80^\circ=10^\circ$$

۴۹ در شکل زیر، جبهه‌های موج بازتاب‌شده از مانع تخت (۱) که به سمت مانع تخت (۲) در حال پیشروی‌اند، نشان داده شده است. اگر زاویه‌ای که این جبهه‌ها با سطح مانع (۱) می‌سازند، 45° باشد، زاویهٔ بازتاب از مانع تخت (۲) چند درجه است؟



۱) ۳۵

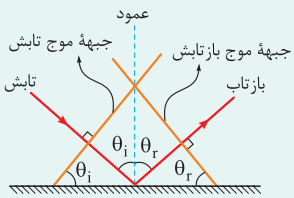
۲) ۴۰

۳) ۵۵

۴) ۵۰

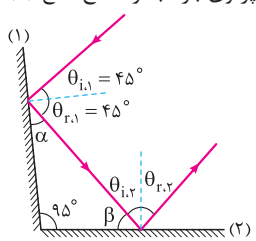
درس Box

هنگام تابش یا بازتاب موج از یک سطح تخت، زاویهٔ بین جبهه‌های موج و سطح مانع، همان زاویهٔ پرتوی موج با خط عمود بر سطح است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از آن‌جایی که زاویهٔ بین جبهه‌های موج بازتاب‌شده از سطح مانع (۱) 45° است، زاویهٔ پرتوی بازتاب از سطح مانع (۱) نیز 45° است.



$$\theta_{r,1} = 45^\circ \Rightarrow \theta_{i,1} = 45^\circ$$

گام دوم: زاویه‌های α و β را نیز به دست می‌آوریم:

$$\alpha + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\alpha + 95^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + 95^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 40^\circ$$

گام سوم: زاویهٔ بازتاب از مانع تخت (۲) را حساب می‌کنیم:

$$\beta + \theta_{i,2} = 90^\circ \Rightarrow 40^\circ + \theta_{i,2} = 90^\circ \Rightarrow \theta_{i,2} = 50^\circ$$

$$\theta_{i,2} = \theta_{r,2} \Rightarrow \theta_{r,2} = 50^\circ$$

۵۰ شخصی بین دو صخرهٔ قائم و موازی ایستاده و فاصله‌اش از یکی از صخره‌ها، دو برابر فاصلهٔ او از صخرهٔ دیگر است. اگر این شخص فریاد بزند، دو پژواک متوالی صدای خود را به فاصلهٔ زمانی $۱/۲\ s$ می‌شنود. فاصلهٔ بین دو صخره چند متر است؟ (تندی انتشار صوت در محیط $۳۴۰\ m/s$ است.)

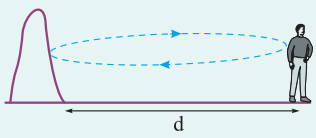
۱) ۲۰۴ ۲) ۴۰۸

۳) ۶۱۲ ۴) ۱۲۲۴

Hint

ابتدا برحسب v و فاصلهٔ صخرهٔ نزدیک‌تر، زمان هر دو پژواک را بنویسید و سپس با توجه به این‌که فاصلهٔ زمانی دو پژواک $۱/۲\ s$ است، روابط اول را از هم کم کنید تا فاصلهٔ شخص از صخرهٔ نزدیک‌تر به دست آید و در نهایت با سه برابر کردن این مقدار فاصلهٔ دو صخره را حساب کنید.

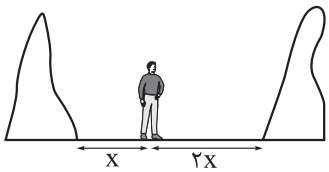
درس Box



پژواک صوت در واقع بازتاب صوت از یک مانع است که با یک تأخیر زمانی از صوت اصلی شنیده می‌شود، مثلاً اگر چشمهٔ صوت (شخص) در فاصلهٔ d از یک مانع (کوه) ایستاده باشد و شخص فریاد بزند، صوت پس از یک رفت و برگشت مسافت $۲d$ را طی می‌کند و می‌توانیم بنویسیم: $۲d = vt$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: صوت باید تا صخرهٔ نزدیک‌تر برود و برگردد تا شخص پژواک اول را بشنود؛ پس:



$$۲x = vt_۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{۲x}{v}$$

گام دوم: پژواک دوم حاصل بازتاب صوت از صخرهٔ دورتر است؛ یعنی صوت تا صخرهٔ دورتر رفته و به شخص بازگشته است؛ پس:

$$۲(۲x) = vt_۲ \Rightarrow t_۲ = \frac{۴x}{v}$$

گام سوم: طبق صورت سؤال، شخص دو پژواک صدای خود را با فاصلهٔ زمانی $۱/۲\ s$ می‌شنود؛ پس به کمک دو گام قبلی که روابط $t_۱$ و $t_۲$ را داریم، x که فاصلهٔ شخص تا صخرهٔ نزدیک‌تر است را به دست می‌آوریم:

$$t_۲ - t_۱ = \frac{۴x}{v} - \frac{۲x}{v} = \frac{۴x - ۲x}{v} \Rightarrow ۱/۲ = \frac{۲x}{۳۴۰}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۳۴۰ \times ۱/۲}{۲} = ۲۰۴$$

گام چهارم: سؤال فاصلهٔ بین دو صخره را خواسته، پس:

$$\text{فاصلهٔ دو صخره} = x + ۲x = ۲۰۴ + ۲(۲۰۴) = ۶۱۲\ m$$

گول نخوری

حواست باشه سؤال، فاصلهٔ بین دو صخره رو خواسته. سریع با حل معادله به عدد ۲۰۴ رسیدی، گزینهٔ (۱) رو نزنی! ۲۰۴ فاصلهٔ شخص از صخرهٔ نزدیک‌تر است.

۵۱ بسامد نوری در خلأ ۳۷۵THz و طول موج آن در مایعی ۰/۶ μm است. ضریب شکست این مایع کدام است؟ $(c = 3\times10^8 m/s)$

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

Hint چون اطلاعات مربوط به خلأ را دارید؛ پس طول موج نور در خلأ را حساب کنید و سپس از رابطهٔ $\frac{\lambda_{خلأ}}{\lambda_{مایع}} = \frac{n_{مایع}}{n_{خلأ}}$، ضریب شکست مایع را حساب کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$، طول موج نور را در خلأ حساب می‌کنیم:

$$\lambda_{خلأ} = \frac{3\times10^8}{375\times10^{12}} = 8\times10^{-7} m$$

گام دوم: از رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ و $v = \frac{c}{n}$ داریم:

$$\left.\begin{matrix}\lambda = \frac{v}{f}\\ v = \frac{c}{n}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{nf}$$

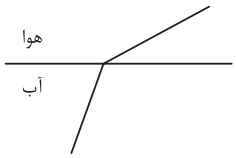
طول موج با ضریب شکست رابطهٔ عکس دارد.

گام سوم: طبق رابطهٔ گام دوم ضریب شکست مایع را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\lambda_{مایع}}{\lambda_{خلأ}} = \frac{n_{خلأ}}{n_{مایع}} \Rightarrow \frac{0/6\times10^{-6}}{8\times10^{-7}} = \frac{1}{n_{مایع}}$$

$$\Rightarrow n_{مایع} = \frac{0/8\times10^{-6}}{0/6\times10^{-6}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

۵۲ یکی از جبهه‌های موجی در مرز بین آب و هوا به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این موج درست است؟



الف) این موج، می‌تواند یک موج صوتی باشد.

ب) این موج، می‌تواند نور مرئی باشد.

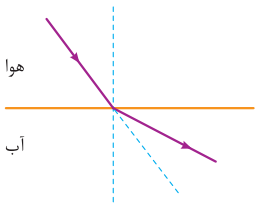
پ) طول موج این موج در هوا، بزرگ‌تر از طول موج آن در آب است.

ت) طول موج این موج در آب، بزرگ‌تر از طول موج آن در هوا است.

۱) الف و پ
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) ب و ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا از روی جبهه‌های موج پرتوها را رسم می‌کنیم:



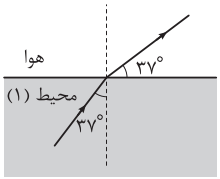
گام دوم: موج با ورود از هوا به آب از خط عمود دور شده است، طبق قانون شکست عمومی در عبور نور از هوا به آب تندی کاهش پیدا کرده و به خط عمود نزدیک می‌شود پس این موج مربوط به موج صوتی می‌تواند باشد.

می‌دانیم تندی انتشار موج صوتی در آب بیشتر از هوا است؛ پس:

$$\lambda = \frac{V}{f} \xrightarrow{f:\text{ثابت}} \lambda \propto V \xrightarrow{V_{آب} > V_{هوا}} \lambda_{آب} > \lambda_{هوا}$$

پس عبارت‌های (الف) و (ت) درست است.

۵۳ در شکل زیر، پرتو نور از محیط شفاف (۱)، وارد هوا شده است. اگر ضریب شکست هوا برابر یک باشد، ضریب شکست محیط (۱) کدام است؟ $(\sin ۳۷^\circ = ۰/۶)$



۱) $\frac{۴}{۳}$

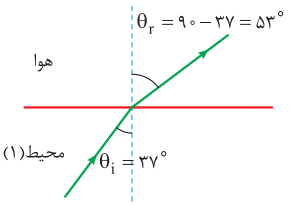
۲) $\frac{۱۶}{۹}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۹}{۱۶}$

Hint ابتدا به کمک شکل، زاویهٔ تابش و شکست را پیدا کنید و سپس با جای‌گذاری در رابطهٔ اسنل، ضریب شکست شیشه را محاسبه کنید.

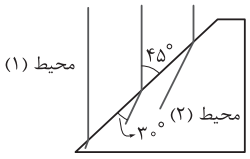
پاسخ خیلی تشریحی ✔ مطابق شکل مقابل زاویهٔ شکست برابر ۵۳° است؛ پس طبق قانون اسنل داریم:



$$\frac{n_{هوا}}{n_۱} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} \Rightarrow \frac{۱}{n_۱} = \frac{\sin ۳۷^\circ}{\sin ۵۳^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n_۱} = \frac{۰/۶}{۰/۸} \Rightarrow n_۱ = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

۵۴ شکل زیر جبهه‌های موج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد که از محیط (۱) وارد محیط (۲) شده است. به ترتیب طول موج نور در محیط (۱) چند برابر طول موج نور در محیط (۲) و بسامد نور در محیط (۲) چند برابر بسامد نور در محیط (۱) است؟



۱) 1 ، $\sqrt{2}$

۲) $\sqrt{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ، 1

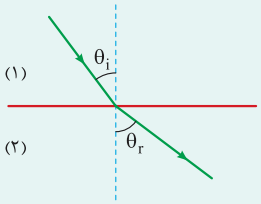
۴) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$

مشاوره مبحث شکست موج از سؤالات پرتکرار در کنکور است.

Hint

ابتدا به کمک شکل، زاویهٔ تابش و شکست را پیدا کنید و سپس به کمک قانون شکست عمومی، نسبت طول موج‌ها را پیدا کنید. برای محاسبهٔ نسبت بسامدها به این نکته دقت کنید که بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و با تغییر محیط تغییر نمی‌کند.

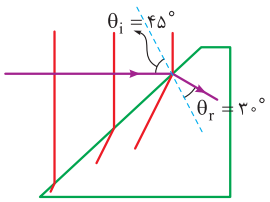
درس Box



با ورود موج از یک محیط به محیط دوم در اثر تغییر تندی، موج شکسته می‌شود. اگر طول موج و تندی در محیط اول را با λ_1 و v_1 و طول موج و تندی در محیط دوم را با λ_2 و v_2 نشان دهیم، برای شکل مقابل قانون شکست عمومی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{v_1}{v_2}\xrightarrow[\text{f: ثابت}]{\lambda=\frac{v}{f}}\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

پاسخ خیلی تشریحی

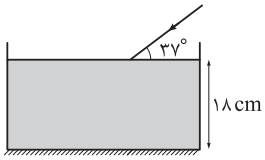


با توجه به این‌که زاویهٔ بین جبههٔ موج و مرز دو محیط با زاویهٔ تابش برابر و زاویهٔ بین جبههٔ شکست و مرز دو محیط برابر با زاویهٔ شکست است، پس به کمک قانون شکست عمومی داریم:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\sqrt{2}$$

چون بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج است با تغییر محیط، بسامد تغییر نمی‌کند و نسبت بسامدها برابر یک است $\left(\frac{f_2}{f_1}=1\right)$.

۵۵ در شکل زیر، پرتو نوری وارد آب درون ظرفی می‌شود که در کف آن یک آینهٔ تخت افقی قرار دارد. پرتو نور چند نانوثانیه پس از ورود به آب، از آن خارج می‌شود؟ (پرتو پس از یک بار بازتاب از آینه، از سطح آب خارج می‌شود؛ $c = ۳\times۱۰^{۸}\ m/s$ و ضریب شکست آب $\frac{۴}{۳}$ است. $\sin ۳۷ = ۰/۶$)



۱) ۲

۲) ۲۰

۳) ۱/۵

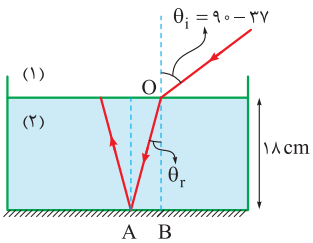
۴) ۱۵

Hint

ابتدا $v_۲$ (سرعت نور در آب) و زاویهٔ شکست را به کمک روابط اسنل حساب کنید. سپس با داشتن θ_r به کمک رابطهٔ $\cos\theta_r$، مسافتی که نور در آب طی می‌کند تا به آینه برسد را حساب کنید و با جای‌گذاری در رابطهٔ $x = vt$، زمان رسیدن پرتو از مرز جدایی تا آینه را به دست آورید. با توجه به این‌که پرتو از سطح آینه با همان زاویه بازتاب می‌شود و مسیری به اندازهٔ OA را طی می‌کند، مدت‌زمانی که نور پس از ورود به آب از آن خارج می‌شود را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک شکل با نوشتن قانون اسنل، زاویهٔ شکست و تندی در آب $(v_۲)$ را حساب می‌کنیم:



$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{n_۲}{n_۱} = \frac{v_۱}{v_۲} \Rightarrow \frac{\sin ۵۳^\circ}{\sin\theta_r} = \frac{\frac{۴}{۳}}{۱}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_r = \frac{۰/۸}{\frac{۴}{۳}} = ۰/۶ \Rightarrow \theta_r = ۳۷^\circ$$

$$\frac{\frac{۴}{۳}}{۱} = \frac{۳\times۱۰^{۸}}{v_۲} \Rightarrow v_۲ = \frac{۹}{۴}\times۱۰^{۸}\ m/s$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ cos در مثلث OAB، طول OA را حساب می‌کنیم:

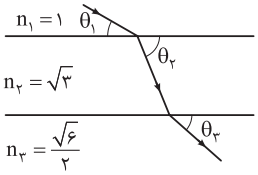
$$\cos ۳۷^\circ = \frac{OB}{OA} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{۱۸\times۱۰^{-۲}}{OA} \Rightarrow OA = \frac{۹}{۴}\times۱۰^{-۱}\ m$$

گام سوم: با توجه به این‌که طول OA و سرعت در آب را به دست آوردیم، زمان رسیدن نور از مرز جدایی تا آینه را حساب می‌کنیم:

$$OA = v_۲t \Rightarrow t = \frac{OA}{v_۲} = \frac{\frac{۹}{۴}\times۱۰^{-۱}}{\frac{۹}{۴}\times۱۰^{۸}} = ۱۰^{-۹}\ s = ۱\ ns$$

گام چهارم و آخر: نور با بازتاب از سطح آینه، مسیری به اندازهٔ OA و در زمان ۱ ns طی می‌کند، در نتیجه نور پس از ۲ ns از آب خارج می‌شود.

۵۶ در شکل زیر پرتو نور تک‌رنگی از سه محیط شفاف با مرزهای موازی عبور می‌کند. اگر اختلاف دو زاویهٔ θ_1 و θ_3 برابر 15° باشد، زاویهٔ θ_2 چند درجه است؟



۱) ۳۰

۲) ۴۵

۳) ۶۰

۴) ۹۰

Hint

رابطهٔ اسنل را یک بار برای محیط‌های (۱) و (۲) و یک بار برای محیط‌های (۱) و (۳) بنویسید و از دو معادلهٔ به‌دست‌آمده و $\theta_3 - \theta_1 = 15^\circ$ اندازهٔ θ_2 را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

برای محیط‌های (۱) و (۲) قانون اسنل را می‌نویسیم:

$$n_1 \sin(90 - \theta_1) = n_2 \sin(90 - \theta_2) \Rightarrow \cos\theta_1 = \sqrt{3}\cos\theta_2 \quad (1)$$

بار دیگه قانون اسنل را برای محیط‌های (۱) و (۳) می‌نویسیم:

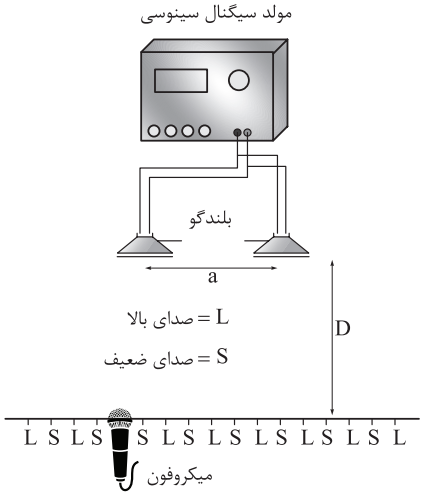
$$n_1 \sin(90 - \theta_1) = n_3 \sin(90 - \theta_3) \Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta_3 \xrightarrow{\theta_3 - \theta_1 = 15} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}\cos(15 + \theta_1)$$

رابطهٔ بالا فقط به ازای $\theta_1 = 30^\circ$ جواب دارد، خودتان امتحان کنید.

گام دوم: از رابطهٔ (۱) برای $\theta_1 = 30^\circ$ داریم:

$$\cos 30^\circ = \sqrt{3}\cos\theta_2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\cos\theta_2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = 60^\circ$$

۵۷ شکل زیر نشان‌دهندهٔ آزمایش مربوط به تداخل امواج صوتی است. چه تعداد از اقدامات زیر باعث می‌شود نقطه‌های S و L مجاور، به هم نزدیک شوند؟



الف) افزایش بسامد صوت

ب) کاهش دمای هوای محیط

پ) انجام این آزمایش در آب

۱) صفر

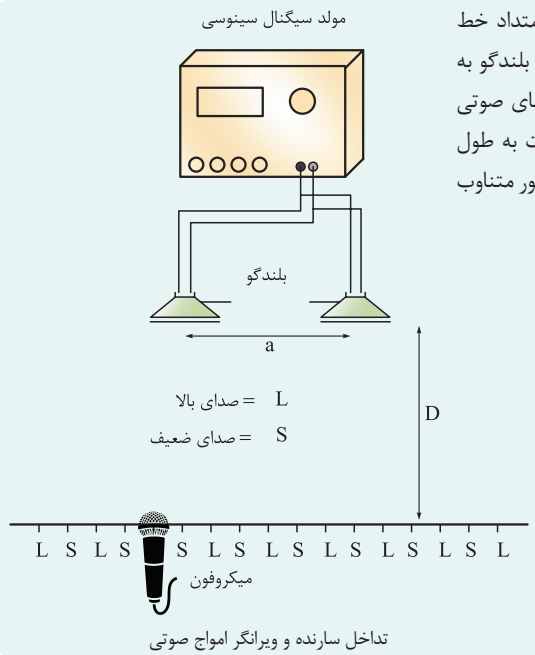
۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

درس Box

اگر مطابق شکل، دو بلندگو را در فاصلهٔ نسبتاً دور (D) از امتداد خط راست قرار دهیم، مشاهده می‌کنیم که روی خط راست صدای بلندگو به طور متناوب کم و زیاد می‌شود، دلیل این اتفاق تداخل موج‌های صوتی است. در واقع امواج صوتی ناشی از دو بلندگو روی خط راست به طول متناوب تداخل سازنده و ویرانگر داشته و باعث می‌شود صدا به طور متناوب ضعیف و بالا شنیده شود.



تداخل سازنده و ویرانگر امواج صوتی

نکته

۱) فاصلهٔ دو نقطهٔ S و L با طول موج و تندی رابطهٔ مستقیم دارد و طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ با بسامد نسبت عکس دارد.

۲) هر چه دما کم‌تر باشد، طول موج‌های کوتاه‌تری منتشر می‌شود.

طبق جدول صفحهٔ ۷۹ کتاب درسی فیزیک دوازدهم هر چه دما کاهش یابد، تندی و در نتیجه طول موج کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی

می‌دانیم تندی انتشار امواج صوتی در آب بیشتر از هوا است، طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ طول موج با تندی انتشار رابطهٔ مستقیم و با بسامد صوت رابطهٔ عکس دارد، پس طبق عبارت بالا، اقدامات را بررسی می‌کنیم:

الف) با افزایش بسامد، طول موج کاهش می‌یابد و درنتیجه فاصلهٔ دو نقطه L و S کاهش می‌یابد. ✓

ب) با کاهش دمای محیط طول موج و درنتیجه فاصلهٔ دو نقطه کاهش می‌یابد. ✓

پ) با انجام آزمایش در آب، فاصلهٔ دو نقطهٔ S و L افزایش می‌یابد. ✗

۵۸ تاری به طول ۶۰ cm و جرم ۶ g بین دو نقطه با نیروی کشش ۳۲۴ N بسته شده است. بسامد هماهنگ سوم تار چند هرتز است؟

۱) ۳۰۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۴۵۰ ۴) ۹۰۰

Hint ابتدا تندی انتشار موج را حساب کنید و سپس بسامد هماهنگ سوم را با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ $f_n = \frac{nv}{2L}$ به دست آورید.

درس Box تندی انتشار موج در یک تار یا یک طناب به طول L و جرم m که تحت تأثیر نیروی کشش F قرار دارد، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$

μ: چگالی خطی جرم (kg/m)

بسامد هماهنگ nام در یک موج ایستاده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f_n = \frac{n\,V}{2L}$$

n: شمارهٔ هماهنگ، f_n: بسامد nام (Hz)، V: تندی انتشار موج (m/s)، L: طول تار (m)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا به کمک رابطهٔ $v = \sqrt{\frac{FL}{m}}$، تندی انتشار موج را به دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{۳۲۴ \times ۰/۶}{۶ \times ۱۰^{-۳}}} = ۱۸۰\ m/s$$

گام دوم: با توجه به رابطهٔ $f_n = \frac{nv}{2L}$، بسامد هماهنگ سوم تار را به دست می‌آوریم:

$$f_۳ = \frac{۳ \times ۱۸۰}{۲ \times ۶۰ \times ۱۰^{-۲}} = ۴۵۰\ Hz$$

۵۹ سه بسامد تشدیدی متوالی یک تار با دو انتهای بسته عبارت‌اند از ۳۰۰ Hz، f و ۴۲۰ Hz. اگر تندی انتشار صوت در تار برابر ۲۴۰ m/s باشد، طول تار چند متر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

Hint ابتدا بسامد هماهنگ اصلی را محاسبه کنید و سپس با کمک رابطهٔ $f_1 = \frac{v}{2L}$ که رابطهٔ بسامد تار اصلی است، طول تار را به دست آورید.

درس Box بسامد اصلی یا هماهنگ اول در واقع پایین‌ترین بسامد صوت مربوط به $n = 1$ است. رابطهٔ سایر بسامدها با بسامد اصلی به صورت زیر است:

$$f_n = nf_1$$

در یک تار دو انتها بسته، اختلاف بسامدهای تشدیدی متوالی به صورت زیر است:

$$f_{(n+1)} - f_n = f_1$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** بسامد اصلی را از اختلاف دو بسامد تشدیدی به دست می‌آوریم:

$$f_{n+1} - f_n = f_1 \Rightarrow \begin{cases} f - 300 = f_1 & (1) \\ 420 - f = f_1 & (2) \end{cases} \Rightarrow f - 300 = 420 - f$$

$$\Rightarrow 420 + 300 = 2f \Rightarrow f = 360\,Hz$$

$$\xrightarrow{(1)} 360 - 300 = f_1 \Rightarrow f_1 = 60\,Hz$$

گام دوم: در رابطهٔ $f_1 = \frac{v}{2L}$ با جای‌گذاری f_1 و v، طول تار را به دست می‌آوریم:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \Rightarrow 60 = \frac{240}{2 \times L} \Rightarrow L = \frac{240}{2 \times 60} = 2\,m$$

۶۰ در عبور کدام نور تک‌رنگ در کدام محیط از روزنه‌ای به قطر $1\ \mu m$ پراشندگی بیشتری رخ می‌دهد؟

۱) نور قرمز در هوا
۲) نور قرمز در آب
۳) نور آبی در هوا
۴) نور آبی در آب

درس Box

پراش به خمیده‌شدن موج پس از برخورد به لبهٔ یک مانع گفته می‌شود.
در پدیدهٔ پراش هر چه‌قدر نسبت طول موج به پهنای شکاف بزرگ‌تر باشد، پراش بیشتری رخ می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی

طبق درس‌باکس برای این‌که پراش بیشتری رخ دهد، باید طول موج بزرگ‌تری داشته باشیم. از طرفی برای داشتن طول موج بزرگ‌تر، باید تندی انتشار بیشتر باشد؛ پس:

تندی انتشار و طول موج نور در آب کم‌تر از هوا است. ضمناً طول موج نور قرمز از طول موج نور آبی بیشتر است. در نتیجه پراش حاصل از نور قرمز در هوا بیشتر است.

۶۱ سیمی با مقاومت ویژهٔ $۲/۵\times۱۰^{-۸}\,\Omega.m$ که قطر مقطع آن ۱ mm است، روی محیط دایره‌ای به شعاع ۱ m، ۵ دور پیچیده شده است. مقاومت الکتریکی این سیم چند اهم است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) π

۴) ۲π

مشاوره در مورد مقاومت رسانا برحسب جنس و ابعاد آن، همیشه انتظار تست‌های مقایسه‌ای و نوشتن نسبت بین دو حالت را نداشته باشید. گاهی مانند این‌جا سؤال فقط در مورد مقاومت یک قطعه رسانا و در یک حالت است. مشابه این تست در کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳ مطرح شده است.

درس Box

مقاومت الکتریکی یک جسم در دمای ثابت، با طول و جنس آن نسبت مستقیم دارد، ولی با مساحت سطح مقطع آن رابطهٔ عکس دارد:

$$R=\rho\frac{L}{A}$$



R = مقاومت الکتریکی (Ω)

ρ = مقاومت ویژه $(\Omega.m)$

L = طول جسم (m)

A = مساحت سطح مقطع (که در امتداد جسم ثابت فرض می‌شود) $(m^۲)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طول سیم را که ۵ برابر محیط دایره‌ای به شعاع یک متر است به دست می‌آوریم:

$$L=N(۲\pi R)\xrightarrow[N=۵]{R=۱\,m}L=۱۰\pi\times۱=۱۰\pi\ m$$

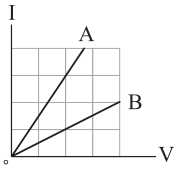
گام دوم: با معلوم‌بودن قطر سطح مقطع سیم، مساحت سطح مقطع آن را حساب می‌کنیم:

$$A=\frac{\pi d^۲}{۴}\xrightarrow{d=۱\,mm}A=\frac{\pi}{۴}(۱\times۱۰^{-۳})^۲=\frac{\pi}{۴}\times۱۰^{-۶}\,m^۲$$

گام سوم: مقاومت الکتریکی سیم را محاسبه می‌کنیم:

$$R=\rho\frac{L}{A}\xrightarrow[L=۱۰\pi\,m\,,\,A=\frac{\pi}{۴}\times۱۰^{-۶}\,m^۲]{\rho=۲/۵\times۱۰^{-۸}\,\Omega.m}R=۲/۵\times۱۰^{-۸}\times\frac{۱۰\pi}{\frac{\pi}{۴}\times۱۰^{-۶}}=۱\,\Omega$$

۶۲ نمودار جریان الکتریکی عبوری از دو سیم توپر **A** و **B** برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها به شکل زیر است. اگر چگالی سیم **A**، ۲ برابر چگالی سیم **B**، طول سیم **A**، ۴ برابر طول سیم **B** و جرم سیم **A**، ۳ برابر جرم سیم **B** باشد، مقاومت ویژهٔ سیم **A** چند برابر مقاومت ویژهٔ سیم **B** است؟



۱) ۳۲ ۲) $\frac{۱}{۳۲}$

۳) $\frac{۳۲}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۳۲}$

درس Box

۱) اگر حجم رسانا را با V و چگالی آن را با ρ' و جرم آن را با m نشان دهیم برای سیمی به طول L و مساحت مقطع A که مقاومت ویژهٔ آن ρ است، مقاومت الکتریکی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R=\rho\frac{L}{A}\xrightarrow{V=AL}R=\rho\frac{L^۲}{V}\xrightarrow{V=\frac{m}{\rho'}}R=\frac{\rho L^۲\rho'}{m}$$

۲) رابطهٔ قانون اُهم برای یک رسانای اُهمی به صورت زیر است:

$$R=\frac{V}{I}$$

R = مقاومت الکتریکی (Ω)

V = اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)

I = جریان الکتریکی (A)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک قانون اهم و نمودار داده‌شده، نسبت مقاومت R_A به R_B را به دست می‌آوریم:

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{\frac{V_A}{I_A}}{\frac{V_B}{I_B}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۴}{۲}}=\frac{۴}{۳\times۴}=\frac{۱}{۳}$$

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ به‌دست‌آمده در قسمت اول درس‌باکس، بین دو مقاومت A و B می‌توان نوشت:

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times(\frac{L_A}{L_B})^۲\times\frac{\rho'_A}{\rho'_B}\times\frac{m_B}{m_A}\xrightarrow[L_A=۴L_B\ ,\ m_A=۳m_B]{\frac{R_A}{R_B}=\frac{۱}{۳}\ ,\ \rho'_A=۲\rho'_B}\frac{۱}{۳}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times(\frac{۴L_B}{L_B})^۲\times\frac{۲\rho'_B}{\rho'_B}\times\frac{m_B}{۳m_B}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times۱۶\times۲\times\frac{۱}{۳}\Rightarrow۱=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times۳۲\Rightarrow\frac{\rho_A}{\rho_B}=\frac{۱}{۳۲}$$

۶۳ اگر دمای یک سیم مسی از $۲۰^\circ F$ به $۲۰۰^\circ F$ برسد، مقاومت الکتریکی آن چند درصد تغییر می‌کند؟ (ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ مس $۴\times۱۰^{-۳}\frac{۱}{K}$ و تغییر ابعاد سیم در اثر تغییر دما، ناچیز است.)

۱) ۴ ۲) ۷/۲ ۳) ۴۰ ۴) ۷۲

درس Box

۱) بین تغییر دمای جسم برحسب کلوین و درجهٔ فارنهایت، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\Delta F = \frac{۹}{۵}\Delta T$$

$\Delta F = F_۲ - F_۱$: تغییر دمای جسم برحسب درجهٔ فارنهایت $(^\circ F)$

$\Delta T = T_۲ - T_۱$: تغییر دمای جسم برحسب کلوین (K)

۲) رابطهٔ تغییر مقاومت الکتریکی برحسب تغییر دما برای یک رسانا:

$$\Delta R = R_۱\alpha\Delta T$$

$\Delta R = R_۲ - R_۱$: تغییر مقاومت الکتریکی (Ω)

$R_۱$ = مقاومت الکتریکی در دمای $T_۱$

$R_۲$ = مقاومت الکتریکی در دمای $T_۲$

α = ضریب دمایی مقاومت ویژه $(K^{-۱})$

$\Delta T = T_۲ - T_۱$: تغییر دما برحسب کلوین (K)

پاسخ خیلی تشریحی

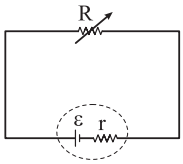
گام اول: تغییر دمای سیم را برحسب کلوین محاسبه می‌کنیم:

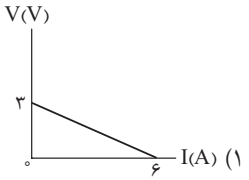
$$\Delta F = \frac{۹}{۵}\Delta T \xrightarrow{\Delta F = ۲۰۰ - ۲۰ = ۱۸۰^\circ F} ۱۸۰ = \frac{۹}{۵}\Delta T \Rightarrow \Delta T = ۱۰۰\ K$$

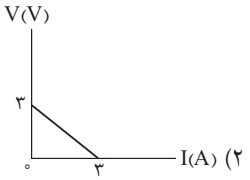
گام دوم: رابطهٔ تغییر مقاومت الکتریکی برحسب تغییر دما را برای این سیم مسی می‌نویسیم و درصد تغییر مقاومت الکتریکی آن را به دست می‌آوریم:

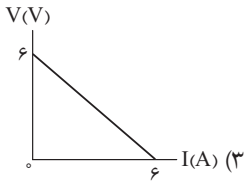
$$\Delta R = R_۱\alpha\Delta T \Rightarrow \frac{\Delta R}{R_۱} = \alpha\Delta T \xrightarrow[\Delta T = ۱۰۰\ K]{\alpha = ۴\times۱۰^{-۳}\frac{۱}{K}} \frac{\Delta R}{R_۱} = ۴\times۱۰^{-۳}\times۱۰۰ = ۰/۴ \Rightarrow \frac{\Delta R}{R_۱}\times۱۰۰ = ٪۴۰$$

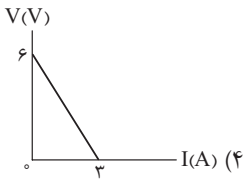
۶۴ در مدار شکل زیر، اگر با تغییر مقاومت رئوستا، جریان الکتریکی عبوری از آن از ۱ A به ۴ A برسد، توان مصرفی آن از ۲/۵ W به ۴ W می‌رسد. نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری موجود در مدار برحسب جریان عبوری از آن به صورت کدام شکل است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

درس Box

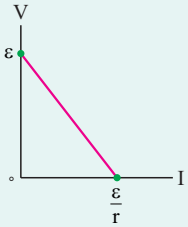
۱) **توان در یک باتری مولد**: یک مولد توان εI را تولید می‌کند. بخشی از آن به اندازهٔ rI^2 در مقاومت درونی مولد مصرف (تلف) می‌شود و بقیهٔ آن به صورت توان خروجی (مفید) به مصرف‌کننده‌های مدار داده می‌شود؛ بنابراین توان الکتریکی مصرفی در مقاومت‌های خارجی مدار، همان توان خروجی (مفید) مولد است: $P = \varepsilon I - rI^2$

P = توان خروجی (مفید) مولد (W)

εI = توان تولیدی مولد (W)

rI^2 = توان تلف‌شده در مقاومت داخلی مولد (W)

۲) نمودار اختلاف پتانسیل دو سر یک باتری مولد به صورت زیر است:



$V = \varepsilon - rI$

V = اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مولد (V)

ε = نیروی محرکهٔ الکتریکی (V)

I = جریان الکتریکی (A)

r = مقاومت درونی (Ω)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رابطهٔ توان برحسب جریان را برای مولد در دو حالت داده‌شده می‌نویسیم و با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول مقادیر ε و r را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} I_1 = 1\,A \\ P_1 = 2/5\,W \end{cases} \Rightarrow 2/5 = \varepsilon \times 1 - r \times 1^2 \Rightarrow 2/5 = \varepsilon - r$$

$$\begin{cases} I_2 = 4A \\ P_2 = 4\,W \end{cases} \Rightarrow 4 = \varepsilon \times 4 - r \times 4^2 \Rightarrow 4 = 4\varepsilon - 16r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10 = 4\varepsilon - 4r \\ 4 = 4\varepsilon - 16r \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6 = 12r \Rightarrow r = 0/5\,\Omega$$

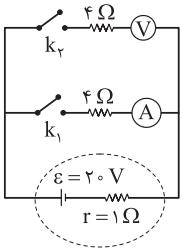
$$2/5 = \varepsilon - r \xrightarrow{r=0/5\,\Omega} 2/5 = \varepsilon - 0/5 \Rightarrow \varepsilon = 3\,V$$

گام دوم: بیشینهٔ جریان را به دست می‌آوریم:

$$I_{max} = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{3}{0/5} = 6A$$

بیشینهٔ اختلاف پتانسیل دو سر مولد نیز همان نیروی محرکه یعنی ۳V است؛ بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۶۵ در مدار شکل زیر، آمپرسنج و ولت‌سنج، آرمانی‌اند. ابتدا کلید k_1 بسته و کلید k_2 باز است. اگر کلید k_1 را باز کرده و کلید k_2 را ببندیم، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری چند ولت تغییر می‌کند؟



۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

درس Box

۱) **آمپرسنج**: وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری جریان الکتریکی در یک شاخه از مدار که به طور متوالی در آن شاخه قرار می‌گیرد. آمپرسنج، مقاومت الکتریکی بسیار کمی دارد و اگر آرمانی فرض شود، مقاومت الکتریکی آن را صفر در نظر می‌گیریم.

۲) **ولت‌سنج**: وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل (ولتاژ) بین دو نقطه از مدار و مقاومت الکتریکی بسیار زیادی دارد؛ یعنی جریان عبوری از آن بسیار کم است. مقاومت الکتریکی یک ولت‌سنج آرمانی، بی‌نهایت فرض می‌شود و جریانی از آن عبور نمی‌کند.

نکته

اگر یک ولت‌سنج آرمانی به طور متوالی در یک مدار تک‌حلقه قرار گیرد، مقداری که نشان می‌دهد همان نیروی محرکهٔ مولد است.

۳) رابطهٔ مستقل از جریان در یک مدار با مقاومت خارجی R_{eq} به صورت زیر است:

$$V = \frac{\varepsilon R_{eq}}{R_{eq} + r}$$

V = اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مولد (V)

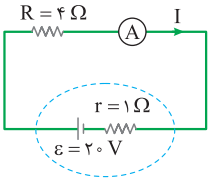
ε = نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد (V)

R_{eq} = مقاومت معادل خارجی مولد (Ω)

r = مقاومت درونی مولد (Ω)

پاسخ خیلی تشریحی

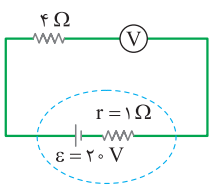
گام اول: ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که کلید k_1 بسته و کلید k_2 باز است. در این حالت جریان در مدار برقرار است:



$$V_1 = \frac{\varepsilon R_{eq}}{R_{eq} + r} \xrightarrow[R_{eq}=R=۴\,\Omega]{\varepsilon=۲۰\,V,\ r=۱\,\Omega} V_1 = \frac{۲۰ \times ۴}{۴ + ۱}$$

$$V_1 = ۱۶\ V$$

گام دوم: در حالتی که کلید k_1 باز و کلید k_2 بسته شود، جریانی در مدار برقرار نمی‌شود، زیرا مقاومت ولت‌سنج آرمانی بی‌نهایت فرض می‌شود. طبق نکتهٔ درس‌باکس داریم:

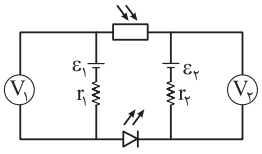


$$V_2 = \varepsilon = ۲۰\ V$$

بنابراین تغییر اختلاف پتانسیل دو سر باتری به دست می‌آید:

$$V_2 - V_1 = ۲۰ - ۱۶ = ۴V$$

۶۶ در مدار شکل زیر، LED روشن است. اگر شدت نور تابیده‌شده به LDR افزایش یابد، مقدارهایی که ولت‌سنج‌های آرمانی V_1 و V_2 نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟



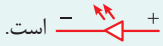
۱) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد

۲) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد

۳) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد

۴) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد

درس Box

۱) **دیود نورگسیل (LED)**: در این نوع از دیودها از نیم‌رساناهایی استفاده می‌شود که با عبور جریان از آن‌ها، LED از خود نور گسیل می‌کند و نماد آن به صورت  است. دیود جریان را تنها از یک سو عبور می‌دهد و مقاومت آن در برابر عبور جریان در این سو ناچیز است، اما در سوی مخالف مانند یک مقاومت بسیار بزرگ عمل می‌کند. پیکان در نماد دیود، جهتی را نشان می‌دهد که جریان می‌تواند از دیود عبور کند.

۲) **مقاومت نوری (LDR)**: نوعی مقاومت هستند که مقاومت الکتریکی آن‌ها به نور تابیده‌شده به آن‌ها بستگی دارد و با افزایش شدت نور، از مقاومت آن‌ها کاسته می‌شود. نماد LDR در مدارها به صورت زیر است:



۳) **محاسبهٔ جریان در یک مدار تک‌حلقه:**

$$I = \frac{\text{مجموع نیروی محرکهٔ باتری‌های مصرف‌کننده} - \text{مجموع نیروی محرکهٔ باتری‌های مولد}}{\text{مجموع کل مقاومت‌های داخلی و خارجی مدار}} = \frac{\sum\varepsilon - \sum\varepsilon'}{\sum(R+r)}$$

۴) در مدارهای الکتریکی، جریان الکتریکی از پایانهٔ مثبت باتری‌های مولد خارج و به پایانهٔ مثبت باتری‌های مصرف‌کننده، وارد می‌شود.

اختلاف پتانسیل دو سر باتری مولد: $V = \varepsilon - rI$

اختلاف پتانسیل دو سر باتری مصرف‌کننده: $V = \varepsilon + rI$

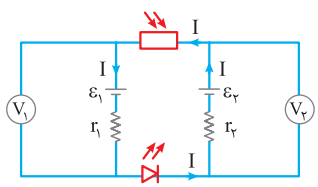
ε = نیروی محرکهٔ الکتریکی (V)

r = مقاومت درونی (Ω)

I = جریان الکتریکی (A)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به جهت قرارگیری دیود در مدار و این‌که جریان در جهت پیکان از آن عبور می‌کند، معلوم می‌شود که جریان در این مدار پادساعتگرد است؛ بنابراین باتری (۲) به‌عنوان مولد و باتری (۱) به‌عنوان مصرف‌کننده عمل می‌کنند.



گام دوم: از آن‌جا که شدت نور تابیده‌شده به LDR افزایش می‌یابد، مقاومت آن کم شده و جریان الکتریکی در مدار افزایش می‌یابد:

$$\uparrow I = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\downarrow R + r_1 + r_2}$$

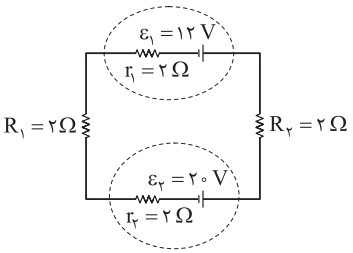
گام سوم: ولت‌سنج V_2 اختلاف پتانسیل دو سر باتری مولد و ولت‌سنج V_1 اختلاف پتانسیل دو سر باتری مصرف‌کننده را نشان می‌دهند. با توجه به ثابت‌بودن مقادیر ε_1، ε_2، r_1 و r_2 داریم:

$$\uparrow V_1 = \varepsilon_1 + r_1 I \uparrow$$

$$\downarrow V_2 = \varepsilon_2 - r_2 I \uparrow$$

بنابراین مقادیری که ولت‌سنج‌های آرمانی V_1 و V_2 نشان می‌دهند، به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابند.

۶۷ در مدار شکل زیر، توان خروجی باتری (۲) چند برابر توان ورودی باتری (۱) است؟



۱) $\frac{۹}{۵}$

۲) $\frac{۹}{۷}$

۳) $\frac{۱۱}{۵}$

۴) $\frac{۱۱}{۷}$

درس Box

توان خروجی باتری مولد (P):

$$P = \varepsilon I - rI^{۲}$$

ε = نیروی محرکهٔ الکتریکی (V)

I = جریان الکتریکی (A)

r = مقاومت درونی (Ω)

توان ورودی باتری مصرف‌کننده (P):

$$P = \varepsilon I + rI^{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی

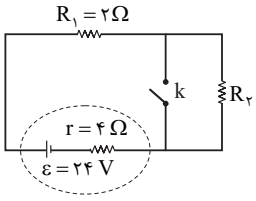
گام اول: با توجه به این‌که $\varepsilon_۲ > \varepsilon_۱$ است، باتری (۲) به عنوان مولد و باتری (۱) به عنوان مصرف‌کننده در مدار عمل می‌کنند. ابتدا جریان الکتریکی مدار را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon_۲ - \varepsilon_۱}{R_۱ + R_۲ + r_۱ + r_۲} = \frac{۲۰ - ۱۲}{۲ + ۲ + ۲ + ۲} = \frac{۸}{۸} = ۱\,A$$

گام دوم: نسبت توان خروجی (مفید) باتری (۲) به توان ورودی باتری (۱) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_۲}{P_۱} = \frac{\varepsilon_۲ I - r_۲ I^{۲}}{\varepsilon_۱ I + r_۱ I^{۲}} = \frac{۲۰ \times ۱ - ۲ \times ۱}{۱۲ \times ۱ + ۲ \times ۱} = \frac{۱۸}{۱۴} = \frac{۹}{۷}$$

۶۸ در مدار شکل زیر، با بستن کلید **k**، توان خروجی باتری تغییری نمی‌کند. در حالتی‌که کلید **k** باز است، توان مصرفی مقاومت R_1 چند برابر توان خروجی باتری است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

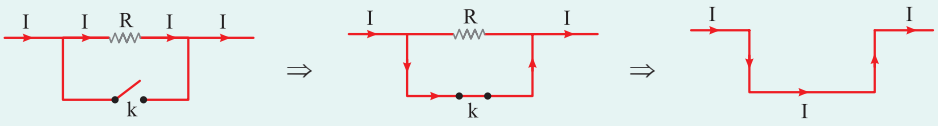
۴) $\frac{۳}{۴}$

درس Box

۱) اگر به ازای دو مقاومت معادل خارجی R_{eq_1} و R_{eq_2} در یک مدار، توان خروجی مولد یکسان باشد می‌توان نوشت:

$$r^2 = R_{eq_1} \times R_{eq_2}$$

۲) **اتصال کوتاه**: هرگاه دو سر یک مقاومت، به وسیلهٔ یک سیم رابط (که مقاومت آن ناچیز است) به هم متصل شوند، تمام جریان از درون آن سیم گذشته و از مقاومت، هیچ جریانی نمی‌گذرد. در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم آن مقاومت اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد.

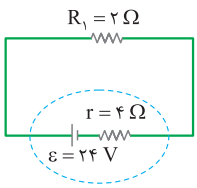


پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در حالتی که کلید k باز است، R_1 و R_2 متوالی هستند و داریم:

$$R_{eq_1} = R_1 + R_2 = ۲ + R_2$$

در حالتی که کلید k بسته است، مقاومت R_2 اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود. در این صورت داریم:



$$R_{eq_2} = R_1 = ۲\,\Omega$$

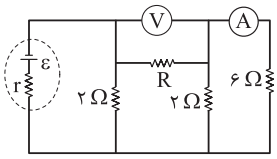
گام دوم: به کمک نکتهٔ اول درس‌باکس، مقاومت R_2 را به دست می‌آوریم:

$$r^2 = R_{eq_1} \times R_{eq_2} \Rightarrow ۴^2 = (۲ + R_2) \times ۲ \Rightarrow ۲ + R_2 = ۸ \Rightarrow R_2 = ۶\,\Omega$$

گام سوم: در حالتی که کلید k باز است، توان مصرفی مقاومت R_1 و توان خروجی باتری را حساب کرده و نسبت آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{R_1 I^2}{(R_1 + R_2) I^2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{۲}{۲ + ۶} = \frac{۱}{۴}$$

۶۹ در مدار شکل زیر، اگر مقداری که آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب، ۱A و ۲V باشد، توان مصرفی مقاومت R چند وات است؟



۱) ۲

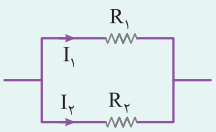
۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

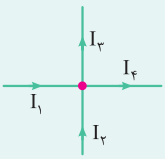
درس Box

۱) وقتی دو مقاومت با یکدیگر موازی هستند، اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها یکسان بوده و جریان الکتریکی به نسبت عکس مقاومت‌ها بین آن‌ها تقسیم می‌شود:



$$V_1 = V_2 \Rightarrow I_1R_1 = I_2R_2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

۲) **قاعدهٔ انشعاب**: مجموع جریان‌هایی که به هر نقطهٔ انشعاب (گره) وارد می‌شوند برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطهٔ انشعاب خارج می‌شوند.



$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

۳) **توان مصرفی** در یک مقاومت خارجی R از رابطهٔ $P = VI$ نیز به دست می‌آید.

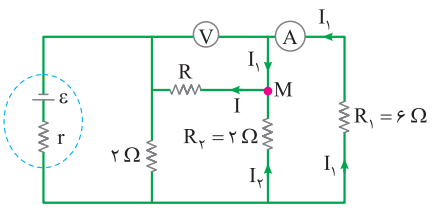
P = توان (W)

V = اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)

I = جریان الکتریکی (A)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر جریان عبوری از مقاومت‌های R_1 و R_2 را به ترتیب با I_1 و I_2 نشان دهیم، با توجه به موازی‌بودن R_1 و R_2 می‌توان نوشت:



$$V_1 = V_2 \Rightarrow I_1R_1 = I_2R_2 \Rightarrow 1\times6 = I_2\times2 \Rightarrow I_2 = 3A$$

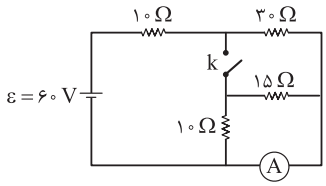
گام دوم: قاعدهٔ انشعاب را در گره M به کار می‌بریم و جریان گذرنده از مقاومت R را حساب می‌کنیم:

$$I = I_1 + I_2 = 1 + 3 = 4A$$

گام سوم: به کمک رابطهٔ $P = VI$ توان مصرفی مقاومت R را به دست می‌آوریم:

$$P = VI \Rightarrow P = 2\times4 = 8W$$

۷۰ در مدار شکل زیر، با بستن کلید k، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر و چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۰/۵، کاهش می‌یابد.

۲) ۰/۵، افزایش می‌یابد.

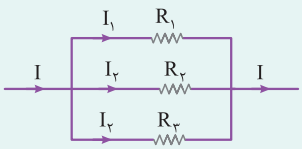
۳) ۲/۵، کاهش می‌یابد.

۴) ۲/۵، افزایش می‌یابد.

درس Box

۱) از آن‌جا که مقاومت آمپرسنج آرمانی، صفر فرض می‌شود، وقتی آمپرسنج به دو سر یک مقاومت یا مجموعه‌ای از مقاومت‌ها وصل می‌شود مانند یک سیم رابط عمل می‌کند و می‌تواند اتصال کوتاه را به وجود آورد.

۲) وقتی چند مقاومت به طور موازی به هم بسته می‌شوند، مقاومت معادل آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

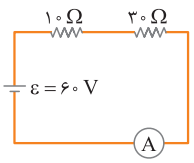


$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \xrightarrow{V=V_1=V_2=V_3} \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: وقتی کلید k باز است، مقاومت‌های ۱۵ Ω و ۱۰ Ω به وسیلهٔ آمپرسنج، اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردند. مقاومت‌های ۱۰ Ω و ۳۰ Ω متوالی بوده و می‌توان نوشت:



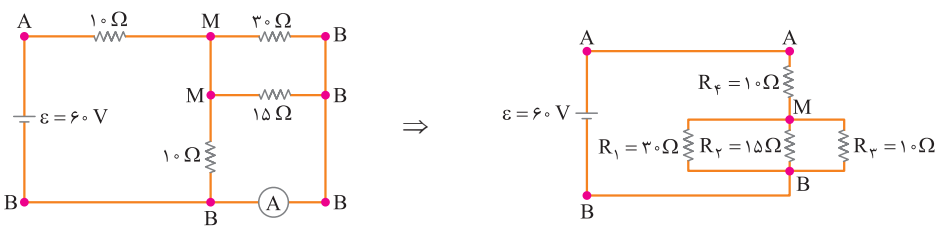
$$R_{eq} = 10 + 30 = 40\ \Omega$$

جریان مدار نیز به دست می‌آید:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{60}{40 + 0} = 1/5\ A$$

این همان جریانی است که آمپرسنج در حالت اول نشان می‌دهد.

گام دوم: بعد از بسته‌شدن کلید k شکل ساده‌تری از مدار را رسم می‌کنیم:



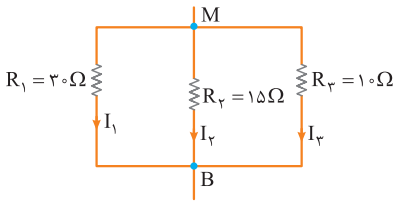
مقاومت معادل مدار در حالت دوم را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R_{1,2,3}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{6}{30} \Rightarrow R_{1,2,3} = \frac{30}{6} = 5\ \Omega$$

$$R_{eq} = R_{1,2,3} + R_4 = 5 + 10 = 15\ \Omega$$

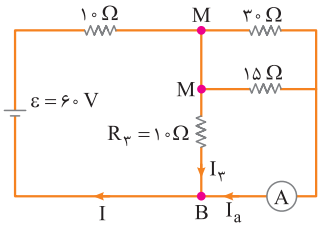
گام سوم: جریان عبوری از مولد را پیدا می‌کنیم و براساس آن جریان عبوری از آمپرسنج را در حالت دوم به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{۶۰}{۱۵ + ۰} = ۴A$$



$$V_{MB} = R_{۱,۲,۳} \times I = ۵ \times ۴ = ۲۰\,V$$

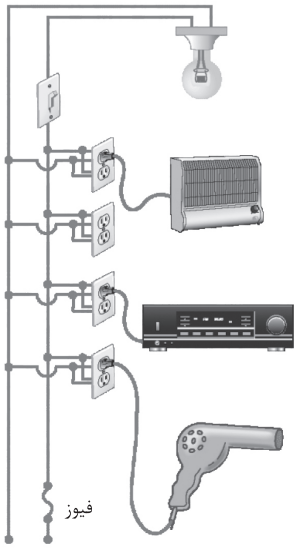
$$I_۳ = \frac{V_{MB}}{R_۳} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲A$$



$$I = I_۳ + I_a \Rightarrow ۴ = ۲ + I_a \Rightarrow I_a = ۲A$$

بنابراین، جریان عبوری از آمپرسنج در حالت دوم به ۲A می‌رسد که نسبت به حالت اول (۱/۵A) به اندازهٔ ۰/۵A افزایش پیدا کرده است.

۷۱ یک لامپ رشته‌ای ۱۰۰ W، یک بخاری برقی ۲۰۰۰ W، یک دستگاه پخش صوت ۸۰۰ W و یک سشوار (موخشک‌کن) ۱۵۰۰ W مطابق شکل به پریزهای یک مدار سیم‌کشی خانگی ۲۲۰ V وصل شده است. اگر فیوز این مدار ۱۵ A باشد، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟



الف) مقاومت معادل مدار ۱۱ Ω است.

ب) جریان الکتریکی عبوری از فیوز ۲۲ A است.

پ) این ترکیب مصرف‌کننده‌ها باعث پریدن فیوز می‌شود.

ت) این ترکیب مصرف‌کننده‌ها باعث پریدن فیوز نمی‌شود.

۱) الف و پ ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

مشاوره این تست براساس یکی از مثال‌های فصل ۲ از کتاب درسی فیزیک (۲) مطرح شده است. مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

درس Box

۱) سیم‌کشی برق خانگی به صورت موازی است و اختلاف پتانسیل دو سر همهٔ مصرف‌کننده‌ها یکسان است.

۲) فیوز، قطعه‌ای است که برای کنترل جریان در مدار قرار می‌گیرد. هر فیوز می‌تواند حداکثر یک جریان معین را از خود عبور دهد و به ازای جریان‌های بیشتر از آن، مانند یک کلید باز، جریان کل مدار را قطع می‌کند یا اصطلاحاً فیوز می‌پرد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جریان عبوری از فیوز برابر است با مجموع جریان‌های عبوری از هر چهار مصرف‌کننده:

$$I_{\text{کل}} = I_{\text{فیوز}} = I_{\text{لامپ}} + I_{\text{بخاری}} + I_{\text{پخش صوت}} + I_{\text{سشوار}}$$

$$\xrightarrow{I=\frac{P}{V}} I_{\text{فیوز}} = \frac{P_{\text{لامپ}} + P_{\text{بخاری}} + P_{\text{پخش صوت}} + P_{\text{سشوار}}}{V} = \frac{۱۰۰+۲۰۰۰+۸۰۰+۱۵۰۰}{۲۲۰}$$

$$\Rightarrow I_{\text{فیوز}} = \frac{۴۴۰۰}{۲۲۰} = ۲۰\ \text{A}$$

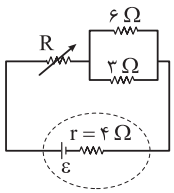
چون حداکثر جریان قابل تحمل برای این فیوز، ۱۵ A است مورد (ب) نادرست است و هم‌چنین با جریان ۲۰ A فیوز می‌پرد و مورد (پ) درست و (ت) نادرست است.

گام دوم: به کمک قانون اهم و با معلوم‌بودن جریان و اختلاف پتانسیل کل مدار، مقاومت معادل مدار به دست می‌آید:

$$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{۲۲۰}{۲۰} = ۱۱\ \Omega$$

پس مورد (الف) نیز درست است.

۷۲ در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا از ۱ Ω به ۳ Ω برسد، توان خروجی باتری چگونه تغییر می‌کند؟



۱) به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

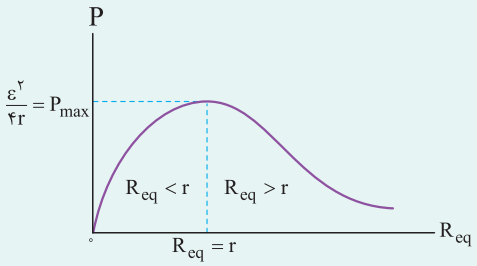
۲) به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

درس Box

نمودار توان مفید (خروجی) یک مولد برحسب مقاومت معادل خارجی مدار به صورت زیر است:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با فرض آن‌که $R_1 = 6\ \Omega$ و $R_2 = 3\ \Omega$ باشد، مقاومت معادل مدار را در هر دو حالت به دست می‌آوریم.

حالت اول:

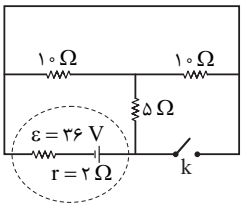
$$R_{eq_1} = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \xrightarrow[R_1=6\,\Omega,\ R_2=3\,\Omega]{R=1\,\Omega} R_{eq_1} = 1 + \frac{6\times 3}{6+3} = 3\ \Omega$$

حالت دوم:

$$R_{eq_2} = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \xrightarrow[R_1=6\,\Omega,\ R_2=3\,\Omega]{R=3\,\Omega} R_{eq_2} = 3 + \frac{6\times 3}{6+3} = 5\ \Omega$$

گام دوم: با توجه به این‌که $r = 4\ \Omega$ و $R_{eq_1} < r$ و $R_{eq_2} > r$ هستند، براساس نمودار مطرح‌شده در درس‌باکس وقتی از $R_{eq_1} = 3\ \Omega$ به $R_{eq_2} = 5\ \Omega$ می‌رسیم توان خروجی باتری ابتدا افزایش و سپس کاهش پیدا می‌کند.

۷۳ در مدار شکل زیر، با بستن کلید k، توان خروجی باتری چند وات و چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۹۰، کاهش می‌یابد.

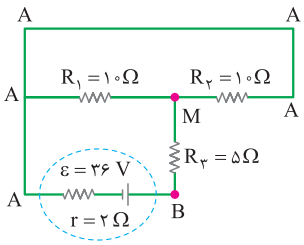
۲) ۹۰، افزایش می‌یابد.

۳) ۴۵، کاهش می‌یابد.

۴) ۴۵، افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در حالت اول که کلید k باز است مقاومت معادل مدار را به دست می‌آوریم. مقاومت‌های R_1 و R_2 با هم موازی‌اند و حاصل آن‌ها با مقاومت R_3 به صورت متوالی قرار دارد:



$$R_{1,2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{10\times10}{10+10}=5\,\Omega$$

$$R_{eq_1}=R_{1,2}+R_3=5+5=10\,\Omega$$

گام دوم: جریان الکتریکی و توان خروجی باتری را در این حالت به دست می‌آوریم:

$$I_1=\frac{\varepsilon}{R_{eq_1}+r}=\frac{36}{10+2}=3A$$

اکنون می‌توانیم توان خروجی مولد را در حالت اول پیدا کنیم:

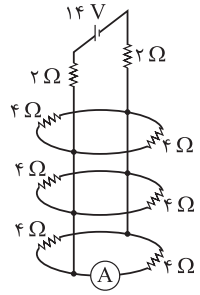
$$P_1=R_{eq_1}\times I_1^2=10\times3^2=90W$$

گام سوم: در حالتی که کلید بسته است کل مقاومت خارجی مدار اتصال کوتاه شده و دو سر مولد هم‌پتانسیل می‌شوند؛ بنابراین توان خروجی باتری به صفر می‌رسد:

$$P_2=R_{eq_2}\times I_2^2 \xrightarrow{R_{eq_2}=0} P_2=0$$

بنابراین از حالت (۱) به حالت (۲) توان خروجی باتری از ۹۰W به صفر می‌رسد؛ یعنی ۹۰W کاهش پیدا می‌کند.

۷۴ در مدار شکل زیر، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر است؟



۱) ۳

۲) ۱/۵

۳) ۱

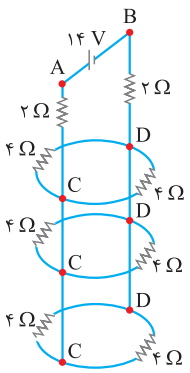
۴) ۰/۵

مشاوره برای تشخیص سری یا موازی بودن مقاومت‌ها می‌توانیم از تکنیک نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل استفاده کنیم.

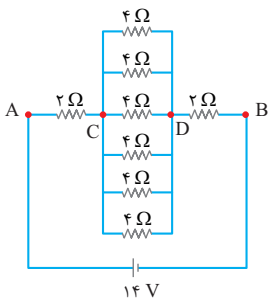
Hint

ابتدا حالت ساده‌ای از مدار را با استفاده از نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل رسم کنید، سپس جریان الکتریکی مدار را با توجه به مقاومت معادل و رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$ به دست بیاورید.

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا با استفاده از تکنیک نام‌گذاری، مدار را ساده‌تر می‌کنیم تا از شکل (الف) به شکل (ب) درآید:



(الف)



(ب)

حالا می‌توانیم مقاومت معادل مدار را محاسبه کنیم:

$$R_{eq}=۲+\frac{۴}{۶}+۲=\frac{۱۴}{۳}\,\Omega$$

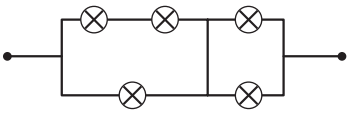
برای این‌که جریان الکتریکی عبوری از هر یک از مقاومت‌های ۴اهمی را به دست آوریم، باید ابتدا جریان الکتریکی کل مدار را محاسبه کنیم. برای این کار داریم:

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+I}\xrightarrow[R_{eq}=\frac{۱۴}{۳}\,\Omega\,,\,r=۰]{\varepsilon=۱۴\,V}I=\frac{۱۴}{\frac{۱۴}{۳}}\Rightarrow I=۳A$$

با توجه به شکل (ب)، جریان الکتریکی کل مدار بین مقاومت‌های ۴اهمی به طور مساوی تقسیم می‌شود و از هر یک از آن‌ها جریان الکتریکی ۰/۵ A عبور می‌کند.

$$I_{۴\Omega}=\frac{I}{۶}=\frac{۳}{۶}=۰/۵\,A$$

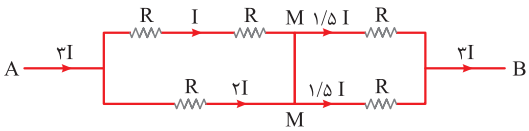
۷۵ در مدار شکل زیر، لامپ‌ها مشابه‌اند و بیشینهٔ توان مصرفی هر یک از آن‌ها بدون آن‌که آسیب ببینند، ۲۰۰ W است. بیشینهٔ توان مصرفی مجموعه، بدون آن‌که لامپی آسیب ببیند، چند وات است؟



۱) ۱۰۰۰ ۲) ۷۰۰ ۳) ۵۲۵ ۴) ۳۲۵

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: هر لامپ را به‌عنوان یک مقاومت R در نظر می‌گیریم. سپس جریان عبوری از دو مقاومت متوالی R را با I نشان می‌دهیم و براساس آن جریان سایر مقاومت‌ها را به دست می‌آوریم:



$$V_{AM} = ۲R \times I = R \times ۲I$$
$$V_{MB} = R \times ۱/۵I$$

گام دوم: در بین مقاومت‌های موجود مقاومتی که از آن جریان ۲I می‌گذرد بیشترین توان مصرفی را دارد. توان مصرفی آن را ۲۰۰ W در نظر می‌گیریم:

$$R(۲I)^۲ = ۲۰۰ \Rightarrow ۴RI^۲ = ۲۰۰ \Rightarrow RI^۲ = ۵۰\ W$$

اکنون توان مصرفی همهٔ مقاومت‌ها را به دست آورده و با هم جمع می‌کنیم:

$$P_{کل} = RI^۲ + RI^۲ + R(۲I)^۲ + R(۱/۵I)^۲ + R(۱/۵I)^۲$$

$$\Rightarrow P_{کل} = ۲RI^۲ + ۴RI^۲ + ۲R(۲/۲۵I^۲) = ۶RI^۲ + ۴/۵RI^۲ = ۱۰/۵RI^۲$$

$$\xrightarrow{RI^۲ = ۵۰\ W} P_{کل} = ۱۰/۵ \times ۵۰ = ۵۲۵\ W$$

۷۶ چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- سرخ‌فام‌بودن خاک رس، به دلیل وجود آهن اکسید در آن است.
- هنگام پختن سفالینه‌های تهیه‌شده از خاک رس، از جرم ترکیب مولکولی موجود در آن کاسته می‌شود.
- سیلیس، افزون بر خاک‌های رس، یکی از سازنده‌های اصلی بسیاری از سنگ‌ها، صخره‌ها و نیز شن و ماسه است.
- سیلیسیم شبه‌فلزی از خانوادهٔ کربن است و از آن‌جا که ساختار سیلیسیم مانند کربن است، سیلیس هم ساختاری همانند کربن دی‌اکسید دارد.

آب (H_2O)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند.

- سرخ‌فام‌بودن خاک رس به دلیل وجود Fe_2O_3 در آن است. *هواستون باشه که* نام درست این ترکیب، **آهن (III) اکسید** است؛ نه آهن اکسید!
- خاک رس حاوی مقداری آب است که به صورت ترکیب مولکولی در ساختار آن وجود دارد. هنگام پختن سفالینه‌های تهیه‌شده از خاک رس، این آب تبخیر شده و از جرم خاک رس کاسته می‌شود.
- سیلیس (SiO_2)، فراوان‌ترین اکسید در پوستهٔ جامد زمین به شمار می‌رود. این ماده علاوه بر خاک رس، یکی از سازنده‌های اصلی بسیاری از سنگ‌ها، صخره‌ها و شن و ماسه است.
- سیلیسیم و کربن هر دو در گروه ۱۴ جدول تناوبی قرار داشته و خواص شیمیایی مشابهی دارند. با این حال، ساختار سیلیس (SiO_2) با ساختار کربن دی‌اکسید (CO_2) متفاوت است. سیلیس ساختار کووالانسی غول‌آسایی دارد، در حالی که کربن دی‌اکسید، یک مولکول کوچک با ساختار خطی است.

۷۷ کدام مجموعه از ترکیب‌های زیر، همگی ترکیب یونی هستند؟

۱) $SO_3, P_4O_{10}, Fe_2O_3, SiCl_4$

۲) $ZnCl, AgNO_3, CuSO_4, Na_2O$

۳) $HNO_3, HClO_4, CO, N_2O_5$

۴) $Ba(OH)_2, NH_4NO_3, Mg_3(PO_4)_2, K_2SO_4$

مشاوره این تست به مفاهیم مربوط به پیوندهای شیمیایی و شناسایی ترکیبات یونی می‌پردازد. برای پاسخگویی به این تست، *نیازه که* به خوبی به انواع پیوندها (یونی و کووالانسی) و ویژگی‌های ترکیبات یونی *تسلط داشته باشین!*

پاسخ خیلی تشریحی بیایید *دونه دونه!* گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱): $SiCl_4$، P_4O_{10} و SO_3 از نافلزات تشکیل شده‌اند (پیوند کوالانسی دارند) و ترکیب مولکولی محسوب می‌شوند.

گزینهٔ (۲): Na_2O، $CuSO_4$ و $AgNO_3$ همگی از یک فلز و یک نافلز (یا یک یون چندتایی) تشکیل شده‌اند و پیوند یونی دارند.

اما هواستون باشه که فرمول شیمیایی درست ترکیب یونی روی کلرید، به صورت $ZnCl_2$ است؛ نه $ZnCl$!

گزینهٔ (۳): *متاسفانه!* ترکیب‌های موجود در این گزینه، همگی مولکولی هستند.

گزینهٔ (۴): K_2SO_4، $Mg_3(PO_4)_2$، NH_4NO_3، $Ba(OH)_2$ و Li_2CO_3 همگی از یک فلز و یک نافلز (یا یک یون چندتایی) تشکیل شده‌اند و پیوند یونی دارند.

تیزبازی با کمی دقت در فرمول شیمیایی ترکیبات، می‌توان به سرعت از رد گزینه استفاده کرد:

- رد گزینهٔ (۱): SO_3
- رد گزینهٔ (۲): فرمول اشتباه $ZnCl$
- رد گزینهٔ (۳): CO

کدام مجموعهٔ سه‌تایی از ترکیب‌های زیر، همگی ترکیب یونی هستند؟ *(تجربی داخل ۱۴۰۱)*

۱) $SF_4, FeS, CaCO_3$

۲) $NaBr, CaCl_2, KNO_3$

۳) KI, Mg_3N_2, CS_2

۴) N_2O_3, Al_2O_3, CH_4

۷۸ درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- طول پیوند کربن ـ کربن در الماس بیشتر از گرافیت است.
- سیلیس همانند سیلیسیم، به صورت خالص در طبیعت یافت نمی‌شود.
- پختن نان سنگک بر روی دانه‌های درشت سنگ را می‌توان نشانه‌ای از مقاومت گرمایی سیلیس دانست.
- در ساخت مته‌ها و ابزار برش شیشه از الماس استفاده می‌شود.

۱) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست

۲) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست

۳) درست ـ درست ـ درست ـ نادرست

۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست

پاسخ خیلی تشریحی ✔ همهٔ عبارت‌های داده‌شده به‌جز عبارت دوم، درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

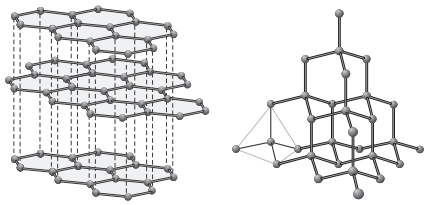
عبارت اول: در ساختار الماس، هر اتم کربن با چهار اتم کربن دیگر پیوند کووالانسی یگانه تشکیل می‌دهد و ساختار شبکه‌ای سه‌بعدی ایجاد می‌کند. در ساختار گرافیت، هر اتم کربن با دو اتم کربن، پیوند کووالانسی یگانه و با یک اتم کربن، پیوند کووالانسی دوگانه تشکیل می‌دهد و ساختار لایه‌ای ایجاد می‌کند. به دلیل مرتبهٔ پیوند کم‌تر، طول پیوند کربن ـ کربن در الماس بیشتر از گرافیت است.

عبارت دوم: سیلیس به صورت خالص در طبیعت به شکل کوارتز یافت می‌شود. البته سیلیس به صورت ناخالص نیز در بسیاری از ماسه‌ها، سنگ‌ها و کانی‌ها وجود دارد.

عبارت سوم: سنگ‌هایی که برای پخت نان سنگک استفاده می‌شوند، حاوی سیلیس هستند؛ زیرا سیلیس مقاومت گرمایی بالایی دارد و می‌تواند حرارت را تحمل کند.

عبارت چهارم: الماس به دلیل سختی بسیار بالا، در ساخت ابزارهای برش و سایش مانند مته‌ها و ابزار برش شیشه استفاده می‌شود.

۷۹ چند مورد از مطالب زیر در ارتباط با شکل‌های داده‌شده که آلوتروپ‌های مختلف از فراوان‌ترین و اصلی‌ترین عنصر موجود در نفت خام (عنصر کربن $_{6}C$) را نشان می‌دهند، نادرست است؟



گرافیت (A) — الماس (B)

- در دمایی که یک نمونه از مادهٔ **B** شروع به ذوب‌شدن می‌کند، یک نمونه H_2O به حالت بخار یافت می‌شود.
- مادهٔ **A** نوعی رسانای الکترونی بوده و قدرت پیوندهای کربن ـ کربن در آن بیشتر از مادهٔ **B** است.
- در ساختار مادهٔ **A**، هر اتم کربن با ۳ اتم کربن دیگر و در ساختار مادهٔ **B**، هر اتم کربن با ۴ اتم کربن دیگر پیوند برقرار می‌کند.
- مادهٔ **B** ناپایدارتر از مادهٔ **A** بوده و در حجم یکسان، شمار اتم‌های کربن بیشتری در مقایسه با مادهٔ **A** دارد.

چگالی B > چگالی A

۱) سه ۲) دو

۳) یک ۴) صفر

مشاوره آشنایی با مواد مختلف معرفی‌شده در این فصل و هم‌چنین تفاوت‌ها و شباهت‌های آن‌ها، یکی از ارکان اصلی موفقیت *تو این فصله!* زیرا اکثر تست‌ها، به بررسی و یا مقایسهٔ این ویژگی‌ها می‌پردازند.

درس Box

مقایسهٔ الماس و گرافیت

شباهت‌ها	تفاوت‌ها
۱) هر دو از آلوتروپ‌های طبیعی کربن هستند. ۲) هر دو از جامدهای کووالانسی هستند. ۳) هر دو دیرگداز بوده و نقطهٔ ذوب بالایی دارند. ۴) در ساختار هر دو گونه، اتم‌های کربن چهار پیوند اشتراکی تشکیل داده‌اند.	۱) گرافیت جامد کووالانسی دوبعدی، ولی الماس جامد کووالانسی سه‌بعدی است. ۲) گرافیت سیاه‌رنگ بوده و ظاهری تیره دارد، ولی الماس خالص ظاهری شفاف دارد. ۳) در گرافیت هر اتم کربن به سه اتم کربن دیگر متصل است، ولی در الماس هر اتم کربن به چهار اتم کربن دیگر متصل است. ۴) گرافیت جامدی نرم ولی الماس جامدی بسیار سخت است. (علت: وجود نیروهای وان‌دروالسی میان صفحات گرافیت) ۵) الماس برخلاف گرافیت رسانایی گرمایی بالایی دارد. (علت: وجود یک شبکهٔ گسترده و پیوسته میان اتم‌های کربن در الماس)

مقایسهٔ ویژگی‌ها

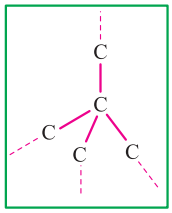
۱	میزان سختی: الماس > گرافیت	۷	شمار اتم‌های متصل به یک اتم کربن: الماس(۴) > گرافیت (۳)
۲	نقطهٔ ذوب: الماس > گرافیت	۸	چگالی(جرم‌حجمی): الماس ($۳/۵۱\ g.cm^{-3}$) > گرافیت ($۲/۲۷\ g.cm^{-3}$)
۳	رسانایی الکتریکی: گرافیت > الماس (ندارد)	۹	سطح انرژی: الماس > گرافیت (به اندازهٔ $۱/۹\ kJ.mol^{-1}$)
۴	رسانایی گرمایی: الماس > گرافیت (اندک)	۱۰	میزان پایداری: گرافیت > الماس
۵	طول پیوند کربن ـ کربن: الماس > گرافیت	۱۱	قدرمطلق آنتالپی سوختن: الماس > گرافیت (به اندازهٔ $۱/۹\ kJ.mol^{-1}$)
۶	آنتالپی پیوند کربن ـ کربن: گرافیت > الماس		

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عنصر اصلی سازندهٔ نفت خام، کربن (C) است. الماس و گرافیت از جمله دگرشکل‌های طبیعی این عنصر هستند که جزء جامدهای کووالانسی به شمار می‌روند. شکل‌های A و B به ترتیب نشان‌دهندهٔ ساختار جامدهای کووالانسی گرافیت (با چینش دوبعدی اتم‌ها) و الماس (با چینش سه‌بعدی اتم‌ها) هستند.

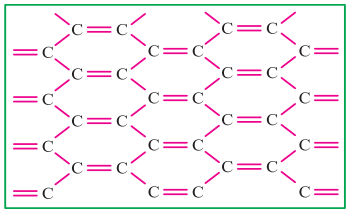
همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- هر دو مادهٔ گرافیت و الماس به عنوان جامدهای کووالانسی، **دیرگداز بوده و نقطهٔ ذوب بالایی دارند** *(فیلی بالاتر از* $100^\circ C$*!)*، بنابراین آب در دمایی که یک نمونه الماس *(که اتفاقاً نقطهٔ ذوب بالاتری هم نسبت به گرافیت داره!)* شروع به ذوب‌شدن می‌کند، به حالت بخار (گاز) می‌باشد.
- گرافیت، همانند عناصر فلزی، نوعی **رسانای الکترونی** است. از آن‌جایی که مرتبهٔ پیوندها در گرافیت $(\frac{4}{3})$ بیشتر از الماس (1) است؛ بنابراین قدرت پیوندهای کربن ـ کربن در آن بیشتر است.
- در الماس هر اتم کربن با **چهار** پیوند یگانه به **چهار** اتم کربن دیگر متصل شده است. اما گرافیت، ساختاری لایه‌ای دارد که در هر لایهٔ آن، هر اتم کربن با **چهار پیوند** به **سه** اتم کربن دیگر متصل است و می‌توان گفت هر صفحهٔ گرافیت، شبکه‌ای از حلقه‌های شش‌ضلعی است.



الماس



گرافیت

جامد کووالانسی	الماس	گرافیت
شمار پیوندهای هر اتم کربن	۴	۴
شمار اتم‌های متصل به هر اتم کربن	۴	۳

گول نخوری ✘ با توجه به این‌که در ساختار گرافیت، پیوند دوگانه هم وجود دارد، آنتالپی پیوند کربن ـ کربن در گرافیت بیشتر از الماس است.

- الماس (به اندازهٔ $1/9\ kJ$) از گرافیت ناپایدارتر است (سطح آنتالپی الماس بالاتر است). هم‌چنین چون چگالی الماس $(3/51\ g.cm^{-3})$ از گرافیت $(2/27\ g.cm^{-3})$ بیشتر است (به دلیل فاصلهٔ زیاد بین لایه‌ها در گرافیت، چگالی گرافیت از الماس کم‌تر است)، پس می‌توان گفت در حجم یکسان از الماس و گرافیت، جرم و شمار اتم‌های کربن در الماس بیشتر است.

$$\text{چگالی} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} \xrightarrow{\text{حجم ثابت}} \text{چگالی} \propto \text{جرم}$$

۸۰ کدام‌یک از مطالب زیر دربارهٔ گرافن درست است؟

الف) شمار پیوندهای کووالانسی در یک گرم از دو مادهٔ گرافن و گرافیت با هم برابر است.

ب) شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی پیرامون هر اتم کربن در گرافن، کم‌تر از الماس است.

پ) گرافن همانند گرافیت، جامدی کووالانسی با چینش دوبعدی اتم‌هاست و همانند آن سطحی کدر داشته و رسانای جریان الکتریکی است.

ت) گرافن، تک‌لایه‌ای از گرافیت است که در آن هر اتم کربن بین سه حلقهٔ شش‌گوشه، مشترک است.

۱) الف ـ ب
۲) الف ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) پ ـ ت

نکته

گرافن	تک‌لایه‌ای از گرافیت است.
	در آن اتم‌های کربن با پیوندهای اشتراکی، حلقه‌های شش‌گوشه تشکیل داده‌اند.
	استحکام ویژه‌ای دارد و مقاومت کششی آن، حدود ۱۰۰ برابر فولاد است.
	یک گونهٔ شیمیایی (جامد کووالانسی) دوبعدی است.
	شفاف و انعطاف‌پذیر است.
	رسانای جریان برق است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

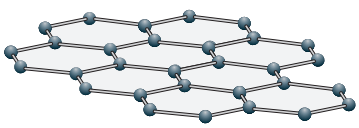
بررسی عبارت‌ها:

الف) در گرافیت، اتم‌ها به صورت لایه‌لایه آرایش یافته‌اند و بین لایه‌ها **نیروی ضعیف وان‌درووالسی** (*نه پیوند کووالانسی!*) وجود دارد و گرافن، تک‌لایه‌ای از گرافیت است؛ بنابراین شمار اتم‌های کربن و هم‌چنین پیوندهای کووالانسی در جرم‌های برابر از دو مادهٔ گرافن و گرافیت **یکسان** می‌باشد.

ب) *نه والا!* در ساختار گرافن و الماس، هر اتم کربن چهار پیوند اشتراکی تشکیل داده است و در واقع **پیرامون هر اتم کربن در گرافن، همانند الماس، چهار جفت‌الکترون پیوندی وجود دارد.**

پ) گرافن برخلاف گرافیت که تیره است، **شفاف و انعطاف پذیر** می‌باشد.

ت) در ساختار گرافن همانند گرافیت، اتم‌های کربن با پیوندهای اشتراکی حلقه‌های شش‌گوشه‌ای تشکیل داده‌اند، به طوری که **هر اتم کربن در این ساختار، بین سه حلقهٔ شش‌گوشه مشترک است.**



گرافن

۸۱ کدام گزینه، تنها شامل موادی است که می‌توان برای توصیف آن‌ها از واژه‌های «مادهٔ مولکولی»، «فرمول مولکولی» و «نیروهای بین مولکولی» استفاده کرد؟

۱) $H_2O(l), CO_2(g), Cl_2(g), HF(g), C_6H_{14}(l)$

۲) $Cu(s), Fe(s), C(s, \text{گرافیت}), NaCl(s), SiO_2(s)$

۳) $NH_3(g), I_2(s), HF(g), C(s, \text{گرافن}), C_6H_{14}(l)$

۴) $MgO(s), KBr(s), Cl_2(g), HF(g), NaCl(s)$

درس Box

- **مادهٔ مولکولی**: ماده‌ای است که از مولکول‌های مجزا تشکیل شده است. این مولکول‌ها توسط نیروهای بین مولکولی (نیروهای وان‌درووالسی یا پیوندهای هیدروژنی) به هم جذب می‌شوند.

مثال: آب (H_2O)، هگزان (C_6H_{14})، کربن دی‌اکسید (CO_2) و ... .

- **ترکیب یونی**: ماده‌ای است که از یون‌های مثبت و منفی تشکیل شده است. این یون‌ها توسط پیوندهای یونی قوی به هم جذب شده و ساختار بلوری تشکیل می‌دهند.

مثال: سدیم کلرید $(NaCl)$، پتاسیم برمید (KBr) و ... .

- **مادهٔ کووالانسی**: ماده‌ای است که اتم‌های آن تنها با پیوندهای کووالانسی به هم متصل شده‌اند. در ساختار آن تعداد بسیار زیادی اتم با پیوندهای کووالانسی به هم متصل شده و شبکه‌ای گسترده تشکیل می‌دهند.

مثال: سیلیس (SiO_2)، گرافیت، گرافن و ... .

- **فلز**: ماده‌ای است که از اتم‌های فلزی تشکیل شده است. این اتم‌ها توسط پیوند فلزی به هم متصل شده‌اند و ساختار بلوری تشکیل می‌دهند.

مثال: آهن (Fe)، مس (Cu) و ... .

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بیایین یکی‌یکی! گزینه‌ها رو بررسی کنیم و گزینه‌ای که همهٔ مواد موجود در آن، جزء مواد مولکولی هستند را بیابیم:

گزینهٔ (۱): *خوشبختانه!* تمام مواد موجود در این گزینه، موادی مولکولی هستند که از مولکول‌های مجزا تشکیل شده‌اند؛ در نتیجه می‌توان برای توصیف آن‌ها از واژه‌های «مادهٔ مولکولی»، «فرمول مولکولی» و «نیروهای بین مولکولی» استفاده کرد.

گزینهٔ (۲): سیلیس (SiO_2) و (گرافیت) C، جزء مواد کوالانسی هستند. هم‌چنین سدیم کلرید $(NaCl)$ یک ترکیب یونی بوده و آهن (Fe) و مس (Cu) فلز می‌باشند.

گزینهٔ (۳): *متأسفانه!* (گرافن) C، یک مادهٔ کوالانسی است.

گزینهٔ (۴): سدیم کلرید $(NaCl)$، پتاسیم برمید (KBr) و منیزیم اکسید (MgO)، همگی ترکیبات یونی هستند.

واژه‌های شیمیایی رایج مانند مادهٔ مولکولی، فرمول مولکولی و نیروهای بین مولکولی را برای توصیف کدام مواد زیر می‌توان به کار برد؟ چرا؟ *(خود را بیازمایید ـ صفحهٔ ۷۴ کتاب درسی)*

$Cl_2(g), C(s, \text{گرافیت}), C_6H_{14}(l), SiO_2(s), NaCl(s), HF(g)$

۸۲ اگر شمار اتم‌های کلر در دو نمونهٔ جامد، اولی شامل مخلوطی از $KClO_3$ و KCl با نسبت مولی ۳ به ۲ و دومی شامل $Ca(ClO_3)_2$ خالص، برابر باشد، نسبت جرم نمونهٔ اول به نمونهٔ دوم به تقریب کدام است؟ $(O = 16 , Cl = 35/5 , K = 39 , Ca = 40 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

Hint

ابتدا تعداد مشخصی کلر (مثلاً ۱۰ مول) را در هر دو نمونه در نظر بگیر و با استفاده از این تعداد اتم کلر، تعداد مول $KClO_3$، KCl و $Ca(ClO_3)_2$ را محاسبه کن. سپس با استفاده از جرم مولی هر ترکیب، جرم هر نمونه را به دست بیاور. در نهایت، نسبت جرم نمونهٔ اول به نمونهٔ دوم را محاسبه کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اگر شمار اتم‌های کلر موجود در هر نمونه را برابر با ۱۰ مول در نظر بگیریم، در نمونهٔ اول، با توجه به نسبت مولی ۳ به ۲ برای $KClO_3$ و KCl، شمار مول‌های آن‌ها در نمونه به ترتیب برابر با ۶ و ۴ خواهد بود. هم‌چنین چون نمونهٔ دوم، تنها شامل $Ca(ClO_3)_2$ بوده و هر مول از این ماده، شامل ۲ مول کلر است، در نتیجه می‌*توانیم بگیم که* در این نمونه، ۵ مول $Ca(ClO_3)_2$ وجود دارد.

حالا بریم سراغ محاسبهٔ جرم نمونه‌ها:

$$\text{جرم نمونهٔ اول} = (4\,\text{mol KCl} \times \frac{74/5\,\text{g KCl}}{1\,\text{mol KCl}}) + (6\,\text{mol } KClO_3 \times \frac{122/5\,\text{g } KClO_3}{1\,\text{mol } KClO_3}) = 298 + 735 = 1033\,\text{g}$$

$$\text{جرم نمونهٔ دوم} = 5\,\text{mol } Ca(ClO_3)_2 \times \frac{207\,\text{g } Ca(ClO_3)_2}{1\,\text{mol } Ca(ClO_3)_2} = 1035\,\text{g}$$

بنابراین نسبت جرم دو نمونه برابر است با:

$$\frac{\text{جرم نمونهٔ اول}}{\text{جرم نمونهٔ دوم}} = \frac{1033}{1035} \simeq 1$$

۸۳ چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- اگر در سیلیس، اتم‌های Si را با اتم‌های C جایگزین کنیم، پیوندهای کووالانسی ضعیف‌تر شده و نقطهٔ ذوب و جوش نیز کاهش می‌یابد.
- در هر مول از سیلیس همانند کربن دی‌اکسید، چهار مول جفت‌الکترون پیوندی وجود دارد. ← عنصرهای C, Si
- سیلیسیم کربید، که به عنوان یک سایندهٔ ارزان در تهیهٔ سنباده کاربرد دارد، مانند عنصرهای سازندهٔ خود در حالت خالص، جزء جامدهای کووالانسی است. ← SiC
- شمار اتم‌های اکسیژن در ساختار هر واحد یون سیلیکات، برابر با عدد اکسایش اتم مرکزی در این آنیون است. ← SiO_4^{4-}

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

درس Box

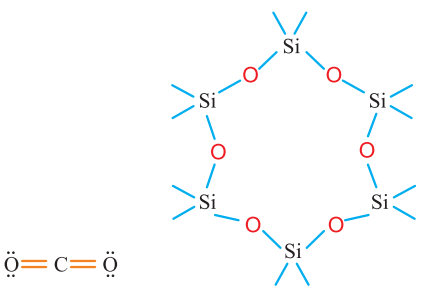
همه چیز دربارهٔ سیلیس (SiO_2)

سیلیس (SiO_2)	یکی از سازنده‌های اصلی بسیاری از سنگ‌ها، صخره‌ها و شن و ماسه است.
	فراوان‌ترین اکسید در پوستهٔ جامد زمین به شمار می‌رود.
	کوارتز از جملهٔ نمونه‌های خالص و ماسه از جمله نمونه‌های ناخالص آن است.
	جزء جامدهای کووالانسی است، به همین دلیل دیرگداز بوده و سختی بالایی دارد.
	به دلیل داشتن خواص نوری ویژه، در ساخت منشورها و عدسی‌ها به کار می‌رود.
	در ساختار آن، فقط پیوندهای اشتراکی Si — O وجود دارد.
	در ساختار آن هر اتم سیلیسیم به چهار اتم اکسیژن متصل است و اتم‌های سیلیسیم در آن با پل‌های Si — O — Si به دیگر واحدها متصل می‌باشند.
	از حلقه‌های چندضلعی ساخته شده و در همهٔ حلقه‌ها، شمار اتم‌های سیلیسیم با شمار اتم‌های اکسیژن برابر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های دوم، سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- اگر در ساختار سیلیس، اتم‌های Si را با C جایگزین کنیم، نقطهٔ ذوب و جوش کاهش می‌یابد، *اما هواستون باشه که* **پیوندهای اشتراکی قوی‌تر و محکم‌تر می‌شوند!**
- با توجه به ساختار دو مادهٔ SiO_2 و CO_2، مشخص است که در هر مول از هر دو آن‌ها، چهار مول پیوند اشتراکی یا چهار مول جفت‌الکترون پیوندی وجود دارد:



- سیلیسیم کربید (SiC)، یک جامد کووالانسی است که در ساختار آن، دو عنصر کربن و سیلیسیم وجود دارد. این ماده یک سایندهٔ ارزان است که در تهیهٔ سنباده به کار می‌رود.
- فرمول شیمیایی یون سیلیکات به صورت SiO_4^{4-} است؛ در نتیجه شمار اتم‌های اکسیژن در هر واحد از این یون، برابر ۴ است. هم‌چنین در یون سیلیکات (SiO_4^{4-})، عدد اکسایش اتم مرکزی یعنی سیلیسیم، $+4$ است:

$$SiO_4^{4-}: Si + 4(-2) = -4 \Rightarrow Si = +4$$

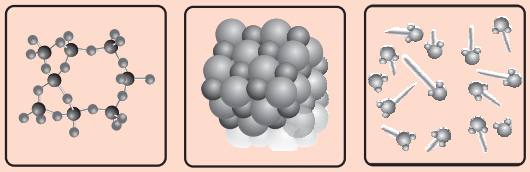
۸۴ با توجه به داده‌های زیر:

مادهٔ **a**: کوارتز از جمله نمونه‌های خالص و ماسه از جمله نمونه‌های ناخالص آن است. ← سیلیس (SiO_2)

مادهٔ **b**: تنها ماده‌ای است که در طبیعت به هر سه حالت جامد، مایع و گاز یافت می‌شود. ← آب (H_2O)

مادهٔ **c**: در حالت مذاب و محلول، رسانای جریان برق است. ← ترکیب یونی

هر یک از شکل‌های «الف»، «ب» و «پ» به ترتیب از راست به چپ، به کدام ماده مربوط است؟



(الف) (ب) (پ)

۱) c,b,a

۲) c,a,b

۳) a,c,b

۴) b,a,c

پاسخ خیلی تشریحی ✔

به ترتیب ببینیم کدوم یک از مواد رو به ترتیب می‌شه به شکل‌های «الف»، «ب» و «پ» نسبت داد:

- مادهٔ b، همون *آب فورمونه!* که تنها ماده‌ای است که در طبیعت به هر سه حالت جامد، مایع و گاز یافت می‌شود؛ در نتیجه با شکل «الف» که این مادهٔ مولکولی را در حالت بخار نشان می‌دهد، مطابقت دارد.
- مادهٔ c، یک ترکیب یونی است؛ در نتیجه با شکل «ب» مطابق است.
- مادهٔ a همان سیلیس (SiO_2) است که کوارتز و ماسه به ترتیب از جمله نمونه‌های خالص و ناخالص آن به شمار می‌روند؛ در نتیجه با شکل «پ» که مربوط به یک جامد کووالانسی است، تطابق دارد.

(تجربی داخل ۹۹)

با توجه به داده‌های زیر:

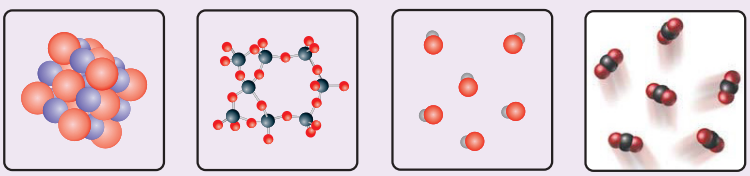
مادهٔ **a**: در دمای اتاق گاز است.

مادهٔ **b**: جامد سخت مورد استفاده در ساخت عدسی است.

مادهٔ **c**: در حالت مذاب و محلول، رسانای جریان برق است.

مادهٔ **d**: ترکیبی است که مولکول آن در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

هر یک از شکل‌های «الف»، «ب»، «پ» و «ت»، به ترتیب از راست به چپ به کدام ماده مربوط است؟



(الف) (ب) (پ) (ت)

۱) c,b,d,a

۲) c,d,a,b

۳) b,c,a,d

۴) b,a,d,c

۸۵ اگر نسبت بار به شعاع Al^{3+}، برابر با 6×10^{-2} باشد، با توجه به روند تغییر شعاع و بار یون‌ها در جدول تناوبی، کدام نسبت بار به شعاع پیشنهادشده غیرقابل‌پذیرش است؟

۱) $Ca^{2+}: 2\times10^{-2}$

۲) $S^{2-}: 1/1\times10^{-2}$

۳) $N^{3-}: 2/8\times10^{-2}$

۴) $Mg^{2+}: 4/3\times10^{-2}$

مشاوره این سؤال مشابه سؤال کنکور سراسری است که برای حل آن نگاه ژرفی باید به تناوب‌ها و تغییر شعاع یون‌ها داشته باشید. هرچند گزینهٔ (۴) این سؤال به طور واضح نادرست است، اما *برای بررسی موارد دیگه باید بسیار دقیق بود!*

پاسخ خیلی تشریحی

بیایید گزینه‌ها را به ترتیب بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱): بار یون Ca^{2+}، $\frac{2}{3}$ بار یون Al^{3+} است؛ در نتیجه با فرض برابربودن شعاع یونی دو یون، نسبت $\frac{q}{r}$ برای یون Ca^{2+} برابر با 4×10^{-2} می‌باشد، اما با توجه به این‌که Al^{3+} دو لایهٔ الکترونی و Ca^{2+} سه لایهٔ الکترونی دارد و از طرفی بار Ca^{2+} کم‌تر است؛ در نتیجه تغییر شعاع کم‌تری نسبت به Al^{3+} دارد؛ بنابراین منطقی است که شعاع یون Ca^{2+} دو برابر Al^{3+} باشد و نسبت بار به شعاع Ca^{2+}، برابر با 2×10^{-2} شود!

گزینهٔ (۲): Ca^{2+} و S^{2-}، هر دو بار و تعداد لایهٔ یکسانی دارند، اما *هواستون باشه که* در یون کلسیم، تعداد پروتون‌ها و در یون سولفید، تعداد الکترون‌ها بیشتر است؛ بنابراین شعاع یون S^{2-} به مراتب از Ca^{2+} بزرگ‌تر می‌باشد *و عدد ارائه‌شده قابل قبوله!*

گزینهٔ (۳): یون‌های Al^{3+} و N^{3-}، بار و تعداد لایه‌های الکترونی برابری دارند، اما دقت کنید که در Al^{3+} تعداد پروتون‌ها سه عدد بیشتر و در N^{3-} تعداد الکترون‌ها سه عدد بیشتر است؛ پس شعاع یونی N^{3-} بسیار بیشتر از Al^{3+} *و عدد ارائه‌شده برای نسبت بار به شعاع قابل قبوله!*

گزینهٔ (۴): بار یون Mg^{2+}، $\frac{2}{3}$ برابر Al^{3+} است و شعاع یونی Mg^{2+} نیز به دلیل بار مثبت کم‌تر، بیشتر است؛ در نتیجه نسبت $\frac{q}{r}$ برای Mg^{2+} از $\frac{2}{3}$ یون Al^{3+} کم‌تر است و باید از 4×10^{-2} کم‌تر باشد.

۸۶ چند مورد از مقایسه‌های زیر درست است؟

- چگالی بار: $O^{2-} < Mg^{2+}$
- آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور: $FeO < FeCl_2$
- نقطهٔ ذوب: $MgF_2 > Na_2O$
- شعاع یونی: $Ca^{2+} < F^-$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره مقایسهٔ پارامترهای مختلف از پرتکرارترین سؤالات این فصل در کنکور سراسری است و نیازمند بررسی و تحلیل دقیق کتاب درسی و داشتن دقت کافی هنگام حل تست می‌باشد.

درس Box

تکنیک مقایسهٔ شعاع اتمی، شعاع یونی و چگالی بار یون‌ها

۱) شعاع اتمی: در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی عنصرها کاهش و در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد. اگر شمارهٔ دوره یا گروه چند عنصر با هم متفاوت باشد، عنصری که شمارهٔ دوره بیشتر و شمارهٔ گروه کم‌تری دارد (در سمت چپ و پایین‌تر جدول قرار دارد)، شعاع بزرگ‌تری دارد.

۲) شعاع یونی: در یک گروه از بالا به پایین مانند شعاع اتمی، شعاع یون پایدار عنصرها نیز افزایش می‌یابد. در یون‌های یک دوره، هر چه مقدار بار مثبت یون بیشتر باشد، شعاع کاتیون کوچک‌تر و هر چه مقدار بار منفی یون بیشتر باشد، شعاع آنیون بزرگ‌تر است. در یک دوره، شعاع آنیون‌ها از شعاع کاتیون‌ها بیشتر است. هم‌چنین در بین یون‌های هم‌الکترون، هر چه بار منفی یون بیشتر باشد، شعاع یون بزرگ‌تر و هر چه بار مثبت یون بیشتر باشد، شعاع یون کوچک‌تر است.

مقایسهٔ شعاع یونی: $_{7}N^{3-} > {}_{8}O^{2-} > {}_{9}F^{-} > {}_{11}Na^{+} > {}_{12}Mg^{2+} > {}_{13}Al^{3+}$

۳) چگالی بار یون: برای مقایسهٔ چگالی بار یون‌ها اولویت با بار یون است، به طوری‌که هر چه مقدار بار یون بیشتر باشد، چگالی بار آن بیشتر است. اگر مقدار بار دو یون برابر باشد، چگالی بار یونی بیشتر است که شعاع کوچک‌تری دارد.

چگالی بار: $_{12}Mg^{2+} > {}_{20}Ca^{2+} > {}_{16}S^{2-} > {}_{17}Cl^{-}$

پاسخ خیلی تشریحی به‌جز مورد دوم، سایر موارد درست‌اند.

بیایید *دونه دونه!* موارد را بررسی کنیم:

- با توجه به این‌که مقدار بار دو یون برابر است و هر دو هم، دو هم‌الکترون هستند؛ بنابراین چگالی بار یونی بیشتر است که شعاع کوچک‌تری داشته باشد:

چگالی بار: $_{8}O^{2-} < {}_{12}Mg^{2+}$ $\Rightarrow$ شعاع: $\underbrace{{}_{8}O^{2-} > {}_{12}Mg^{2+}}_{\text{هر دو ۱۰ الکترون دارند.}}$

- آنتالپی فروپاشی با بار یون‌ها رابطهٔ مستقیم و با شعاع آن‌ها رابطهٔ وارونه دارد.

مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون: $\underset{\downarrow \\ ۲+۲=۴}{FeO} > \underset{\downarrow \\ ۲+۱=۳}{FeCl_2}$

- برای مقایسهٔ ΔH فروپاشی شبکهٔ بلور Na_2O و MgF_2 *اول می‌ریم سراغ* مقایسهٔ بار یون‌ها:

مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون:
$$\begin{cases} Na_2O: \underset{\downarrow Na^+}{۱} + \underset{\downarrow O^{2-}}{۲} = ۳ \\ MgF_2: \underset{\downarrow Mg^{2+}}{۲} + \underset{\downarrow F^-}{۱} = ۳ \end{cases}$$

حالا که مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و بار یک آنیون برای هر دو ترکیب یکسان شد، *می‌ریم دست به دامن شعاع یون‌ها می‌شیم!*

شعاع یونی:
$$\begin{cases} O^{2-} > F^- \\ Na^+ > Mg^{2+} \end{cases} \Rightarrow \Delta H_{\text{فروپاشی}}: Na_2O < MgF_2$$

بنابراین MgF_2، آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور بیشتر و در نتیجه نقطهٔ ذوب بالاتری نسبت به Na_2O دارد.

- مطابق کتاب درسی، *هواستون باشه که* لزوماً هر یونی که تعداد لایه‌های الکترونی بیشتری داشته باشد، شعاع آن بیشتر نیست. به طور مثال $_{19}F^-$ دو لایهٔ الکترونی و $_{20}Ca^{2+}$، سه لایهٔ الکترونی دارد، اما شعاع F^- از شعاع Ca^{2+} بزرگ‌تر است.

۸۷ با توجه به جدول زیر که مقادیر آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب یونی حاصل از عناصر اصلی چهار دورهٔ اول جدول تناوبی را برحسب $kJ.mol^{-1}$ نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

کاتیون / آنیون	A	B
C	۸۰۰	x
D	۹۸۰	۲۴۵۰
E	۲۸۷۰	y

الف) در صورتی که عنصر **A** تک‌ظرفیتی باشد، عنصر **B** به یقین هم‌گروه آن نیست.

ب) **y** بزرگ‌ترین عدد بین اعداد مطرح‌شده است.

پ) در ترکیب یونی حاصل از **A** و **C**، نسبت کاتیون به آنیون می‌تواند برابر با ۲ باشد.

ت) مقدار عدد **x** می‌تواند ۲۷۴۰ باشد.

۱) الف ـ ب

۲) ب ـ ت

۳) الف ـ پ

۴) پ ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های (الف) و (ب) درست‌اند.

نکته آنتالپی فروپاشی ترکیبات حاصل از یون‌های M^{+} و N^{-}، در محدودهٔ ۵۰۰ تا ۱۰۰۰ کیلوژول بر مول، آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیبات حاصل از M^{2+} و N^{-} یا M^{+} و N^{2-}، در محدودهٔ ۱۵۰۰ ـ ۳۰۰۰ کیلوژول بر مول است و در نهایت آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب حاصل از M^{2+} و N^{2-}، از ۳۰۰۰ کیلوژول بر مول بزرگ‌تر است. (M و N عناصر اصلی و در چهار دورهٔ اول قرار دارند.)

بررسی عبارت‌ها:

الف) ترکیب یونی حاصل از عناصر A و D، به صورت AD و ترکیب یونی حاصل از عناصر B و D، به صورت BD_2 است؛ بنابراین عناصر A و B به ترتیب در گروه اول و دوم قرار دارند.

ب) با توجه به بار یون A^{+} و هم‌چنین آنتالپی فروپاشی ترکیب حاصل از A با E در محدودهٔ ۱۵۰۰ ـ ۳۰۰۰ قرار دارد، بار یون E، ۲− است؛ در نتیجه با توجه به‌بار یون‌های B^{2+} و E^{2-}، ترکیب یونی حاصل از عناصر B و E، بیشترین آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور را در میان ترکیبات داده‌شده دارد.

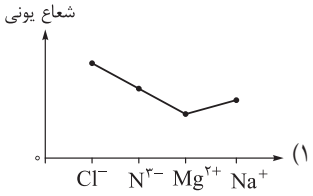
پ) *نه والا!* نسبت کاتیون به آنیون در ترکیب یونی AC، برابر با ۱ است.

ت) با توجه به این‌که آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب یونی AC از AD کم‌تر است؛ در نتیجه شعاع یونی شبکهٔ بلور C^{-} از D^{-} بزرگ‌تر بوده و در نتیجه BD_2 به دلیل شعاع آنیون کم‌تر، نسبت به BC_2، آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور بیشتری خواهد داشت.

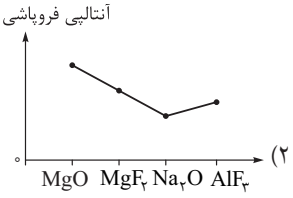
۸۸ کدام نمودار با توجه به ویژگی بیان‌شده، نادرست رسم شده است؟

مشاوره یکی از پرتکرارترین سؤالات در این فصل، مربوط به مقایسهٔ فروپاشی ΔH می‌باشد. به همین دلیل *از شما تقاضا داریم* که درس Box این سؤال را با دقت ویژه‌ای مورد مطالعه قرار دهید.

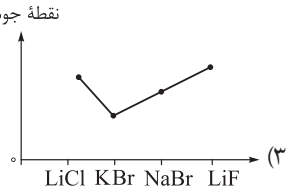
۱) شعاع یونی



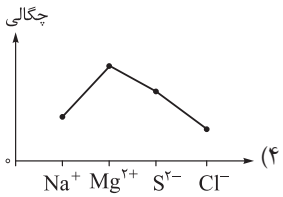
۲) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور



۳) نقطهٔ جوش



۴) چگالی بار



درس Box

تکنیک مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب‌های یونی

تکنیک‌های مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی شبکه (به ترتیب اولویت)

↓

اولویت اول: مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و بار یک آنیون:

هر آن‌چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و بار یک آنیون، بزرگ‌تر ← آنتالپی فروپاشی شبکه، بزرگ‌تر

↓ در صورت مساوی‌بودن

اولویت دوم: در نظر گرفتن شعاع یون‌ها

در صورت مساوی‌بودن مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و بار یک آنیون ← هر چه‌قدر شعاع یون‌ها کوچک‌تر ← آنتالپی فروپاشی شبکه، بزرگ‌تر

پاسخ خیلی تشریحی بیایید به ترتیب گزینه‌ها را بررسی کنیم.

گزینهٔ (۱): برای مقایسهٔ شعاع یون‌های هم‌الکترون، هر چه بار منفی یون بیشتر باشد، شعاع یون بزرگ‌تر و هر چه بار مثبت یون بیشتر باشد، شعاع یون کوچک‌تر خواهد بود؛ بنابراین مقایسهٔ شعاع یون‌های هم‌الکترون $_{7}N^{3-}$، $_{11}Na^{+}$ و $_{12}Mg^{2+}$ به صورت زیر است:

مقایسهٔ شعاع: $_{7}N^{3-} > _{11}Na^{+} > _{12}Mg^{2+}$

هم‌چنین با توجه به این‌که تعداد لایه‌ها در یون کلرید $(_{17}Cl^-)$، یک واحد بیشتر از یون نیترید $(_{7}N^{3-})$ می‌باشد؛ در نتیجه شعاع یون $_{17}Cl^-$، بیشتر از یون $_{7}N^{3-}$ بوده و به این ترتیب مقایسهٔ شعاع این ۴ یون، *این‌چنین‌است*؛

مقایسهٔ شعاع: $_{17}Cl^- > _{7}N^{3-} > _{11}Na^{+} > _{12}Mg^{2+}$

گزینه (۲): *اولاً!* هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکهٔ آن بزرگ‌تر است.

مجموع بار یک کاتیون و یک آنیون: $\begin{cases} AlF_3 = MgO > MgF_2 = Na_2O \\ \underbrace{Al^{3},F^-}_{4} \quad \underbrace{Mg^{2+},O^{2-}}_{4} \quad \underbrace{Mg^{2+},F^-}_{3} \quad \underbrace{Na^+,O^{2-}}_{3} \end{cases}$

ثانیاً برای مقایسهٔ کامل‌تر، *دست به دامن شعاع یون‌ها می‌شیم!*

شعاع یونی: $\begin{cases} Al^{3+} < Mg^{2+} \\ F^- < O^{2-} \end{cases} \Rightarrow \Delta H_{\text{فروپاشی}} : AlF_3 > MgO$

شعاع یونی: $\begin{cases} O^{2-} > F^- \\ Na^+ > Mg^{2+} \end{cases} \Rightarrow \Delta H_{\text{فروپاشی}} : Na_2O < MgF_2$

بنابراین مقایسهٔ فروپاشی ΔH این چهار ترکیب یونی به صورت زیر است:

فروپاشی ΔH : $AlF_3 > MgO > MgF_2 > Na_2O$

گزینهٔ (۳): *برای این‌که فیالتون راحت بشه*، مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی ۹ ترکیب یونی که در نمودار کتاب درسی *اومده*، به صورت زیر است:

مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی شبکه : $LiF > NaF > LiCl > LiBr > KF > NaCl > NaBr > KCl > KBr$

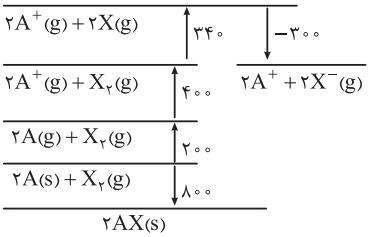
از این رمزگذاری‌های خنده‌دار هم می‌تونین انجام بدین! مثلاً با لیف (LiF) *شروع می‌شه، کف* (KF) *وسطشه و با کبریت* (KBr) *هم تموم می‌شه!*

گزینهٔ (۴): Mg^{2+} و S^{2-}، به دلیل مقدار بار بیشتر، چگالی بار بیشتری از Na^+ و Cl^- دارند. بین دو یون Mg^{2+} و S^{2-}، Mg^{2+} به دلیل شعاع کم‌تر، چگالی بار بیشتری داشته و بین دو یون Na^+ و Cl^-، Na^+ به دلیل شعاع کم‌تر، چگالی بار بیشتری دارد.

بنابراین مقایسهٔ چگالی بار این ۴ یون به صورت زیر است:

چگالی بار : $Mg^{2+} > S^{2-} > Na^+ > Cl^-$

۸۹ اگر **A** و **X**، هر دو جزء عنصرهای اصلی جدول دوره‌ای باشند، با توجه به نمودار مقابل، کدام مورد نادرست است؟ (واحد اعداد **kJ** است.)



مشاوره این نمودار اصطلاحاً به چرخهٔ بورن ـ هابر معروف است و انرژی‌های مبادله‌شده در تمام فرایندهای تولید ترکیب یونی از طریق دو عنصر سازنده را نشان می‌دهد. راه‌حل کلی این سؤالات مشابه قانون هس است.

انرژی مورد نیاز برای تبدیل یک مول از جامد یونی به یون‌های گازی سازندهٔ شبکهٔ بلور

الف) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب یونی **AX**، ۱۲۴۰ کیلوژول بر مول است.

ب) در صورتی که یک مول الکترون از یک مول **A(g)** جدا کنیم و آن را به یک مول **X(g)** بدهیم، **۵۰kJ** انرژی به محیط منتقل می‌شود.

پ) در صورتی که دو عنصر **A** و **X** مربوط به دو دورهٔ متوالی باشند، چگالی بار کاتیون از آنیون بیشتر است.

ت) در صورتی که به جای $X_2(g)$ از $O_2(g)$ در این فرایند استفاده کنیم، ترکیب حاصل، نقطهٔ جوش بیشتری از ترکیب **AX(g)** خواهد داشت.

۱) الف ـ ت
۲) فقط الف
۳) ب ـ ت
۴) فقط پ

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تنها عبارت (الف) نادرست است.

بیایید عبارت‌ها را به ترتیب بررسی کنیم:

الف) ابتدا فرایندهای انجام‌شده را به ترتیب می‌نویسیم:

$$2A(s)+X_2(g) \rightarrow 2A(g)+X_2(g) \quad ,\Delta H=200kJ$$
$$2A(g)+X_2(g) \rightarrow 2A^+(g)+X_2(g) \quad ,\Delta H=400kJ$$
$$2A^+(g)+X_2(g) \rightarrow 2A^+(g)+2X(g) \quad ,\Delta H=340kJ$$
$$2A^+(g)+2X(g) \rightarrow 2A^+(g)+2X^-(g) \quad ,\Delta H=-300kJ$$
$$2A(g)+X_2(g) \rightarrow 2AX(s) \quad ,\Delta H=-800kJ$$
$$2A^+(g)+2X^-(g) \rightarrow 2AX(g) \quad ,\Delta H=-1240kJ$$

آنتالپی فروپاشی، به میزان انرژی مورد نیاز برای تبدیل **یک مول** از جامد یونی به یون‌های گازی سازندهٔ خود گفته می‌شود؛ در نتیجه آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب **AX**، برابر با $\frac{1240}{2}=620$ کیلوژول بر مول است.

ب) با توجه به قانون هس، دو واکنش دریافت و از دست دادن الکترون را نوشته و با یکدیگر جمع می‌نماییم:

$$2A(g)+X_2(g) \rightarrow 2A^+(g)+X_2(g) \quad ,\Delta H=200kJ$$
$$2A^+(g)+2X(g) \rightarrow 2A^+(g)+2X^-(g) \quad ,\Delta H=-300kJ$$
$$2A(g)+2X(g) \rightarrow 2A^+(g)+2X^-(g) \quad ,\Delta H=-100kJ$$
$$A(g)+X(g) \rightarrow A^+(g)+X^-(g) \quad ,\Delta H=-50kJ$$

بنابراین ΔH این فرایند، برابر با $-50kJ$ بوده و با انجام آن، $50kJ$ انرژی از سامانه به محیط منتقل می‌شود.

پ) حالات مختلف را نوشته و آن‌ها را بررسی می‌نماییم:

- عنصر **A** در جدول تناوبی، در دورهٔ بعد از **X** قرار داشته باشد: مثلاً A^+، یون Na^+ و X^-، یون F^- باشد. با توجه به این‌که دو یون Na^+ و F^-، تعداد لایه‌های یکسانی دارند، اما در یون Na^+ تعداد پروتون‌ها بیشتر است؛ پس شعاع یون Na^+ از F^- کم‌تر بوده و چگالی بار آن بیشتر است.
- عنصر **X** در جدول تناوبی، در دورهٔ بعد از **A** قرار داشته باشد: مثلاً X^-، یون Cl^- و A^+، یون Li^+ باشد. با توجه به این‌که یون Li^+ تنها یک لایه دارد و بار آن مثبت است، به یقین شعاع آن کم‌تر و چگالی بار آن بیشتر خواهد بود.

بنابراین در هر حالتی، چگالی بار A^+ از X^- *بیشتره!*

ت) در ترکیب حاصل (A_2O)، چون کاتیون (A^+) ثابت بوده، اما اندازهٔ بار آنیون بیشتر شده است؛ در نتیجه آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب و نقطهٔ جوش آن نیز بیشتر خواهد شد.

۹۰ چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- فلزات در هر چهار دستهٔ جدول تناوبی یافت می‌شوند و از نظر هر دو رفتار فیزیکی و شیمیایی متنوع‌اند.
- جاذبهٔ قوی میان هستهٔ اتم‌های فلز و دریای الکترونی سبب می‌شود تا هستهٔ اتم‌های فلزی در مکان‌های مشخصی به طور ثابت واقع شوند.
- مجموعهٔ الکترون‌های اتم‌های فلزی در به وجود آمدن دریای الکترونی مشارکت دارند.
- دریای الکترونی مدلی برای توجیه همهٔ رفتارهای فیزیکی محسوب می‌شود و رفتار تنوع عدد اکسایش منگنز را توجیه نمی‌کند.

- توجیه برخی رفتارهای فیزیکی فلزها
- توسط سست‌ترین الکترون‌های موجود در اتم فلز (الکترون ظرفیت)
- جابه‌جایی آزادانهٔ الکترون‌ها در فضای میان کاتیون‌ها

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فقط عبارت اول درست است.

بررسی عبارت‌ها:

- در هر چهار دستهٔ جدول تناوبی، عناصر فلزی یافت می‌شوند و مطابق کتاب درسی، رفتارهای فلزات به طور کلی مشابه اما *بعضاً* منحصربه‌فرد و بسیار متنوع است.
- *هواستون باشه که* سست‌ترین الکترون‌های موجود در اتم فلز که **نیروی جاذبهٔ هسته بر آن‌ها کم‌تر است**، الکترون‌های ظرفیت آن هستند!
- *نه والا!* ساختار فلزها آرایش منظمی از کاتیون‌ها در سه بعد است که در فضای میان آن‌ها، **سست‌ترین الکترون‌های موجود در اتم (الکترون‌های ظرفیت)** دریایی را ساخته‌اند و در آن آزادانه جابه‌جا می‌شوند؛ نه همهٔ الکترون‌های فلز!
- *بازم هواستون باشه که* مدل دریایی الکترونی، برای توجیه **برخی** رفتارهای **فیزیکی** فلزها ارائه شده است؛ نه همهٔ آن‌ها!

۹۱ کدام مطلب، نادرست است؟

۱) اختلاف آنتالپی فروپاشی فلوئورید و کلرید یک کاتیون، بیشتر از اختلاف آنتالپی فروپاشی کلرید و برمید همان کاتیون می‌باشد.

۲) هر چه یک ترکیب مولکولی نیروی بین مولکولی قوی‌تری داشته باشد، به یقین اختلاف نقطهٔ ذوب و جوش بیشتری خواهد داشت.

۳) اغلب موادی که نیروی بین مولکولی در آن‌ها فقط از نوع وان‌دروالسی است، نسبت به موادی که نیروی بین مولکولی در آن‌ها از نوع پیوند هیدروژنی است، نقطهٔ جوش پایین‌تری دارند.

۴) استفاده از روش تولید انرژی الکتریکی با انرژی خورشیدی در روزهای ابری و شب‌هنگام نیز ممکن است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): با توجه به نمودار صفحهٔ ۸۲ کتاب درسی، اختلاف آنتالپی فروپاشی فلوئورید و کلرید یک کاتیون بیشتر از اختلاف آنتالپی فروپاشی شبکهٔ کلرید و برمید آن است.

گزینهٔ (۲): به طور کلی این جمله *درسته، نه به یقین!* مثلاً نیروهای بین مولکولی در آب از HF قوی‌تر هستند، اما اختلاف نقطهٔ ذوب و جوش HF، ۲ درجه از آب بیشتر است.

گزینهٔ (۳): نیروهای بین مولکولی از نوع وان‌دروالسی می‌توانند قدرت کم‌تر و یا بیشتری از پیوندهای هیدروژنی داشته باشند!

اغلب ترکیب‌های دارای پیوند هیدروژنی، نسبت به ترکیب‌های فاقد پیوند هیدروژنی، نقطهٔ جوش بالاتری دارند. به طور مثال نقطهٔ جوش HF، به دلیل پیوند هیدروژنی، بیشتر از نقطهٔ جوش HCl است.

گول نخوری ✘ گفتیم «اغلب»، چون در برخی موارد جرم و حجم یک مولکول *به قدری زیاده* که بر پیوند هیدروژنی هم غلبه می‌کند. به طور مثال I_2 در دمای اتاق جامد و HF گاز است و این یعنی نیروهای بین مولکولی در I_2 به دلیل جرم و حجم بیشتر، حتی از پیوند هیدروژنی بین مولکول‌های HF نیز قوی‌تر است و I_2 نقطهٔ جوش بالاتری دارد.

$I_2 > HF$: نیروهای بین مولکولی ⟵ $I_2 > HF$: نقطهٔ جوش ⟵ HF(گاز)، I_2(جامد) : در دمای اتاق

گزینهٔ (۴): در این سامانه به علت وجود منبع ذخیرهٔ انرژی گرمایی می‌توان در روزهای ابری و حتی شب نیز انرژی الکتریکی تولید کرد.

۹۲ کدام گزینه، عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«همهٔ موادی که ..... ، ..... .»

مواد یونی و فلزات

۱) در تشکیل آن‌ها کاتیون‌های فلزی مشارکت دارند ـ در حالت جامد رسانای جریان برق نیستند

مواد کووالانسی و یونی

۲) در حالت جامد سخت و شکننده هستند ـ هرگز به شکل عنصری یافت نمی‌شوند

۳) رنگی هستند ـ به یقین بخشی از طیف الکترومغناطیسی را جذب می‌کنند

۴) در دما و فشار اتاق به حالت مایع قرار دارند ـ جزء مواد مولکولی هستند

پاسخ خیلی تشریحی ✔

مواد رنگی، **بخشی** از نور تابیده‌شده را جذب و بقیهٔ آن را عبور داده یا بازتاب می‌کنند. چشم ما مواد رنگی را با طول موج‌های **عبوری** یا **بازتاب شده** از آن‌ها می‌بیند. به طور کلی می‌توان گفت اگر ماده‌ای به رنگ A دیده شود، یعنی این ماده نور A را بازتاب یا عبور می‌دهد و همهٔ طول موج‌های مرئی به‌جز A را جذب می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در ساختار فلزات و ترکیبات یونی، کاتیون‌های فلزی شرکت دارند. دقت کنید که فلزات برخلاف ترکیبات یونی، در حالت جامد رسانا هستند.

گزینهٔ (۲): مواد یونی و کووالانسی در حالت جامد سخت و شکننده هستند. در دستهٔ مواد یونی فقط با ترکیب *سروکار داریم!* اما در مواد کووالانسی، هم با ترکیب *سروکار داریم* و هم با عنصر!

جامدهای کووالانسی
- عنصری ← C و Si
- ترکیب ← SiO_2 و SiC

گزینهٔ (۴): **ترکیب‌هایی** که در دما و فشار اتاق به حالت مایع هستند، جزء مواد مولکولی به شمار می‌روند، نه همه مواد! مثلاً جیوه، به عنوان یک عنصر فلزی در دمای اتاق، مایع است.

۹۳ ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار NH_4VO_3 را تهیه کرده و به آن ۲ گرم فلز روی با ۶۵ درصد ناخالصی می‌افزاییم. رنگ محلول نهایی مانند کدام‌یک از ترکیبات زیر خواهد بود؟ ($Zn = 65 : g.mol^{-1}$)

۱) زنگار مس
۲) رنگ محلول مس (II) سولفات
۳) رنگ محلول $FeCl_3$
۴) رنگ محلول ید در هگزان

Hint

ابتدا عدد اکسایش وانادیم را در محلول اولیه محاسبه کن، سپس تعداد مول‌های روی و وانادیم مصرف‌شده در واکنش را به دست بیاور. در نهایت با نوشتن معادلهٔ واکنش، عدد اکسایش وانادیم را در محلول نهایی *بحساب!* و به این ترتیب رنگ محلول نهایی را تعیین کن و *ببین با کدام گزینه همخونی داره!*

درس Box

محلول ترکیب‌های **برخی** فلزهای واسطه از جمله وانادیم ($_{23}V$) به رنگ‌های گوناگون دیده می‌شوند. وانادیم دارای عدد اکسایش صفر، در حالت آزاد، عنصری و دارای عددهای اکسایش ۲ (II)، ۳ (III)، ۴ (IV) و ۵ (V) در حالت ترکیب با دیگر عنصرها است. رنگ **نمک‌های مختلف وانادیم** در این عددهای اکسایش، *این‌جوریاست*:

محلول	رنگ
نمک وانادیم (V)	زرد
نمک وانادیم (IV)	آبی
نمک وانادیم (III)	سبز
نمک وانادیم (II)	بنفش

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: عدد اکسایش وانادیم در یون VO_3^- را محاسبه می‌کنیم:

$$VO_3^- : V + 3(-2) = -1 \Rightarrow V = +5$$

عدد اکسایش وانادیم در یون VO_3^-، برابر با $+5$ می‌باشد؛ بنابراین محلول اولیه، زردرنگ است.

گام دوم: تعداد مول V^{5+} و فلز روی را به دست می‌آوریم:

$$\text{تعداد مول } V^{5+} : 0/1\ mol.L^{-1} \times \frac{200}{1000} L = 0/02\ mol$$

$$\text{تعداد مول } Zn : 2g\ Zn \text{ نمونهٔ} \times \frac{65g\ Zn}{100g\ Zn \text{ نمونهٔ}} \times \frac{1mol\ Zn}{65g\ Zn} = 0/02\ mol$$

گام سوم: فرض می‌کنیم V^{5+} به V^{n+} تبدیل می‌شود و n را حساب می‌کنیم:

$$V^{5+} + Zn \rightarrow V^{n+} + Zn^{2+}$$

برای موازنهٔ واکنش، تغییر عدد اکسایش روی (۲ واحد) را ضریب V^{5+} و تغییر عدد اکسایش وانادیم $(5-n)$ را ضریب Zn قرار می‌دهیم. با این کار به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ زیر می‌رسیم:

$$2V^{5+} + (5-n)Zn \rightarrow 2V^{n+} + (5-n)Zn^{2+}$$

با توجه این‌که به مول مصرف‌شدهٔ Zn و V^{5+} یکسان $(0/02\ mol)$ است، نتیجه می‌گیریم که ضریب استوکیومتری این دو گونه باید با هم برابر باشد:

$$2 = 5 - n \Rightarrow n = 3 \Rightarrow$$ با تولید V^{3+}، محلول سبزرنگ می‌شود.

گام چهارم: گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم *تا ببینیم کدومشون سبزرنگه*:

گزینهٔ (۱): زنگار مس ← سبزرنگ ✓

گزینهٔ (۲): رنگ محلول مس (II) سولفات $(CuSO_4)$ ← آبی‌رنگ

گزینهٔ (۳): رنگ محلول آهن (III) کلرید ← زردرنگ

گزینهٔ (۴): رنگ محلول ید در هگزان ← بنفش‌رنگ

به $200\ mL$ از محلول ۰/۰۲۵ مولار نمک وانادیم (V)، $325\ mg$ از فلز روی اضافه شده است. با توجه به جدول زیر، رنگ نهایی محلول، کدام است؟ ($Zn = 65 : g.mol^{-1}$) واکنش در هر مرحله کامل انجام می‌شود. $(V^{5+}(aq) + Zn(s) \rightarrow \ldots + Zn^{2+}(aq))$

(ریاضی خارج ۹۸)

عدد اکسایش وانادیم	(V)	(IV)	(III)	(II)
رنگ محلول	زرد	آبی	سبز	بنفش

۱) بنفش
۲) آبی
۳) زرد
۴) سبز

۹۴ کدام مطلب، نادرست است؟

۱) نگه‌داری سیب‌زمینی در انبار تاریک و خشک، از جوانه‌زنی و فساد آن جلوگیری می‌کند.

۲) نگه‌داری کشمش در ظرف دربسته داخل یخچال، به دلیل رطوبت بالا منجر به کپک‌زدگی آن می‌شود.

۳) نگه‌داری نان در فریزر، به دلیل کاهش فعالیت میکروبی، زمان ماندگاری آن را افزایش می‌دهد.

۴) نگه‌داری روغن زیتون در ظرف شیشه‌ای تیره و در جای خنک، از اکسایش و کاهش کیفیت آن جلوگیری می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ نگه‌داری کشمش در ظرف دربسته داخل یخچال، به دلیل کاهش دما و عدم دسترسی به اکسیژن، می‌تواند زمان ماندگاری آن را افزایش داده و از کپک‌زدن جلوگیری کند. *هواستون باشه که* یخچال محیط خشکی است و رطوبت را افزایش نمی‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): سیب‌زمینی در محیط تاریک و خشک، جوانه نمی‌زند و دیرتر فاسد می‌شود؛ زیرا نور و رطوبت از عوامل مؤثر در فساد و جوانه‌زنی سیب‌زمینی است.

گزینهٔ (۳): کاهش دما در فریزر، فعالیت میکروبی و واکنش‌های شیمیایی که باعث فساد نان می‌شوند را کاهش داده و باعث افزایش زمان ماندگاری آن می‌شود.

گزینهٔ (۴): نگه‌داری روغن زیتون در ظرف تیره و در جای خنک، از اکسایش آن که منجر به تغییر طعم و بوی روغن می‌شود، جلوگیری می‌کند و *طبیعتاً* باعث حفظ کیفیت آن برای مدت‌زمان طولانی‌تری می‌شود.

۹۵ در کدام گزینه، ترتیب انجام واکنش‌ها از راست به چپ، از سریع‌ترین به کندترین به درستی آمده است؟

۱) سوختن چوب کبریت ـ پختن تخم مرغ ـ تشکیل الماس ـ زنگ‌زدن آهن

۲) انفجار آتشفشان ـ پوسیدن کاغذ ـ تشکیل نفت خام ـ ترش‌شدن شیر

۳) سوختن بنزین ـ تجزیهٔ پلاستیک ـ فاسدشدن گوشت ـ تشکیل سنگ مرمر

۴) انفجار بمب ـ هضم غذا ـ رسیدن میوه ـ تشکیل فسیل

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- **انفجار بمب**: انفجار، یک واکنش شیمیایی بسیار سریع است که در کسری از ثانیه رخ می‌دهد.
- **هضم غذا**: هضم غذا، فرایندی کند است که چند ساعت در بدن انسان طول می‌کشد.
- **رسیدن میوه**: رسیدن میوه نیز فرایندی کند است که چند روز یا چند هفته زمان می‌برد.
- **تشکیل فسیل**: تشکیل فسیل، فرایندی بسیار کند است که میلیون‌ها سال به طول می‌انجامد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

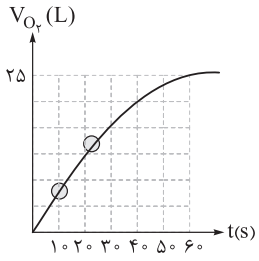
گزینهٔ (۱): تشکیل الماس فرایندی بسیار کندتر از زنگ‌زدن آهن است.

گزینهٔ (۲): تشکیل نفت خام فرایندی بسیار کندتر از ترش‌شدن شیر است.

گزینهٔ (۳): تجزیهٔ پلاستیک، فرایندی بسیار کندتر از فاسدشدن گوشت است.

مشاوره این سؤال برگرفته و تلفیقی از دو سؤال در کنکورهای سال‌های دور است که ایده‌های جذابی *داشتن* و در نظام آموزش جدید *هنوز مشابهش نیومده* و *احتمالاً به زودی بیاد!*

۹۶ اگر نمودار زیر، حجم گاز آزادشده بر اثر انجام واکنش: $2KNO_3(s) \rightarrow 2KNO_2(s) + O_2(g)$ را نشان دهد، به تقریب چند ثانیه زمان لازم است تا جرم فراوردهٔ جامد تولیدشده با جرم واکنش‌دهندهٔ باقی‌مانده برابر شود؟ (چگالی گاز O_2 در شرایط آزمایش، برابر با $0/96\ g.L^{-1}$ است؛ $K=39, O=16, N=14 : g.mol^{-1}$)



۱) ۱۰

۲) ۲۳

۳) ۳۵

۴) ۴۲

Hint ابتدا با استفاده از مقدار گاز تولیدشده در پایان واکنش، مقدار مول اولیهٔ KNO_3 و سپس مقدار مول مصرف‌شدهٔ KNO_3 تا لحظهٔ برقراری شرط سؤال را حساب کن. در ادامه با استفاده از مقدار مول مصرف‌شدهٔ KNO_3 تا لحظهٔ مورد نظر، حجم گاز اکسیژن تولیدشده را حساب کرده و با استفاده از نمودار، زمان مورد نظر *رو بیاب!*

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** شمار مول‌های اولیهٔ KNO_3 را حساب می‌کنیم:

با توجه به نمودار مشخص است که واکنش در لحظهٔ $t = 60\ s$ به پایان رسیده است. بر اثر انجام واکنش به صورت کامل، ۲۵ لیتر گاز آزاد شده است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$25\ L\ O_2 \times \frac{0/96\ g\ O_2}{1\ L\ O_2} \times \frac{1\ mol\ O_2}{32\ g\ O_2} \times \frac{2\ mol\ KNO_3}{1\ mol\ O_2} = 1/5\ mol\ KNO_3$$

گام دوم: مقدار مول KNO_3 را در لحظه‌ای حساب می‌کنیم که جرم آن با جرم فراوردهٔ جامد تولیدشده یعنی KNO_2 برابر باشد:

$2KNO_3(s) \rightarrow 2KNO_2(s) + O_2(g)$			
مول اولیه	۱/۵	۰	۰
مول مصرفی	$-2x$	$+2x$	$+x$
مول باقی‌مانده	$1/5-2x$	$2x$	x

مطابق با معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، اگر تا لحظهٔ مورد نظر $2x$ مول KNO_3 مصرف شده باشد، $2x$ مول KNO_2 و x مول O_2 تولید می‌شود. با فرض برابربودن جرم KNO_3 و KNO_2 در این لحظه، می‌توان نوشت:

$$(1/5-2x)\ mol\ KNO_3 \times \frac{101\ g\ KNO_3}{1\ mol\ KNO_3} = 2x\ mol\ KNO_2 \times \frac{85\ g\ KNO_2}{1\ mol\ KNO_2}$$

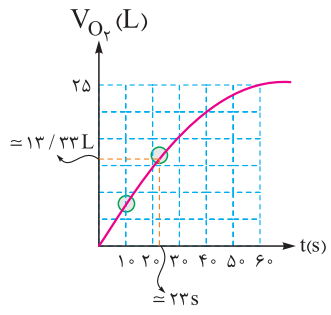
$$\Rightarrow 151/5 - 202x = 170x \Rightarrow x = \underbrace{\frac{151/5}{170+202}}_{372} \simeq 0/4$$

یعنی بر اثر مصرف $2x$ مول یا تقریباً ۰/۸ مول KNO_3، جرم KNO_2 تولیدشده با جرم KNO_3 باقی‌مانده برابر خواهد شد.

گام سوم: با استفاده از مقدار مصرف‌شدهٔ KNO_3 تا لحظهٔ مورد نظر، حجم گاز O_2 تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$0/8\ mol\ KNO_3 \times \frac{1\ mol\ O_2}{2\ mol\ KNO_3} \times \frac{32\ g\ O_2}{1\ mol\ O_2} \times \frac{1\ L\ O_2}{0/96\ g\ O_2} = \frac{40}{3} \simeq 13/33\ L\ O_2$$

با توجه به نمودار، تقریباً در لحظهٔ $t = 23\ s$ پس از شروع واکنش، حدود ۱۳/۳۳ لیتر گاز O_2 آزاد شده است، *ببینید:*



۹۷ با توجه به واکنش زیر که در ظرفی با حجم ثابت انجام می‌شود، چند مورد از موارد زیر نادرست است؟

$$A(g)+2B(g) \rightarrow 3C(g)$$

- اگر در لحظه‌ای سرعت متوسط مصرف A، برابر با $0/02 mol.L^{-1}.s^{-1}$ باشد، سرعت متوسط تولید C برابر با $0/06 mol.L^{-1}.s^{-1}$ خواهد بود.
- اگر در لحظه‌ای سرعت متوسط تولید C، برابر با $1/2 mol.L^{-1}.min^{-1}$ باشد، سرعت متوسط واکنش برابر با $0/06 mol.L^{-1}.s^{-1}$ خواهد بود.
- اگر در شروع واکنش، غلظت A برابر با $0/4 mol.L^{-1}$ و غلظت B برابر با $0/8 mol.L^{-1}$ باشد، پس از مدت‌زمانی که غلظت C به $0/6 mol.L^{-1}$ می‌رسد، غلظت A و B به ترتیب برابر با $0/2 mol.L^{-1}$ و $0/4 mol.L^{-1}$ خواهد بود.
- اگر نمودار غلظت ـ زمان برای هر سه ماده رسم شود، شیب نمودار برای مادهٔ A، یک‌سوم شیب نمودار برای مادهٔ C و قرینهٔ آن خواهد بود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

مشاوره این تست با هدف سنجش درک شما از مفاهیم سرعت واکنش، ضرایب استوکیومتری، واحدهای سرعت واکنش و ارتباط آن‌ها با تغییر غلظت مواد در طول زمان طراحی شده است. دقت در تبدیل واحدها و محاسبات در این‌گونه تست‌ها بسیار مهم است.

پاسخ خیلی تشریحی فقط عبارت دوم نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

با توجه به ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در واکنش، سرعت متوسط تولید C، سه برابر سرعت متوسط مصرف A است؛ بنابراین اگر سرعت متوسط مصرف A برابر با $0/02 mol.L^{-1}.s^{-1}$ باشد، سرعت متوسط تولید C برابر با $0/06 mol.L^{-1}.s^{-1}$ خواهد بود.

سرعت متوسط واکنش را می‌توان از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف هر ماده بر ضریب استوکیومتری آن ماده به دست آورد. با توجه به این‌که ضریب استوکیومتری C برابر ۳ است، سرعت متوسط واکنش برابر است با:

$$\bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(C)}{3} = \frac{1/2}{3} = 0/4 mol.L^{-1}.min^{-1} \times \frac{1 min}{60 s} = 0/0067 mol.L^{-1}.s^{-1}$$

با توجه به ضرایب استوکیومتری، به ازای مصرف هر ۰/۲ مول از A، ۰/۴ مول از B مصرف و ۰/۶ مول از C تولید می‌شود؛ بنابراین اگر در شروع واکنش، غلظت A برابر با $0/4 mol.L^{-1}$ و غلظت B برابر با $0/8 mol.L^{-1}$ باشد، پس از مدت‌زمانی که غلظت C به $0/6 mol.L^{-1}$ می‌رسد، غلظت A و B به ترتیب برابر با ۰/۲ و ۰/۴ مول بر لیتر خواهد بود.

شیب نمودار غلظت ـ زمان، نشان‌دهندهٔ سرعت واکنش است. با توجه به ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در واکنش، سرعت متوسط تولید C سه برابر سرعت متوسط مصرف A است. همچنین، با مصرف A و B، غلظت آن‌ها کاهش می‌یابد و نمودار آن‌ها شیب منفی خواهد داشت، درحالی‌که با تولید C، غلظت آن افزایش می‌یابد و نمودار آن شیب مثبت خواهد داشت.

۹۸ اگر سرعت متوسط مصرف هیدروژن پراکسید در واکنش زیر، برابر با ۰/۰۰۲ مولار بر ثانیه باشد، به ترتیب سرعت متوسط مصرف MnO_2، چند گرم بر ثانیه و سرعت متوسط تولید اکسیژن، چند لیتر بر دقیقه است؟ (شرایط را STP، دما را ثابت و حجم محلول را ۲ لیتر در نظر بگیرید؛ $MnO_2 = 87 : g.mol^{-1}$)

$$H_2O_2\,(aq) + MnO_2\,(s) \rightarrow MnO\,(s) + O_2\,(g) + H_2O\,(l)$$

۱) ۰/۳۴۸، ۵/۳۷۶ ●

۲) ۰/۳۴۸، ۲/۶۸۸

۳) ۰/۱۷۴، ۵/۳۷۶

۴) ۰/۱۷۴، ۲/۶۸۸

Hint

سرعت متوسط مصرف $H_2O_2(aq)$ را با واحد $mol.s^{-1}$ حساب کرده، سپس با استفاده از رابطهٔ بین سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد با ضرایب استوکیومتری آن‌ها، سرعت متوسط مصرف MnO_2 و سرعت متوسط تولید O_2 را با واحد $mol.s^{-1}$ به دست بیاور. در نهایت با تبدیل واحد مناسب، واحد سرعت‌ها را به واحدهای مد نظر سؤال تبدیل کن.

درس Box

نسبت سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد شرکت‌کننده در یک واکنش به ضرایب استوکیومتری آن‌ها، با هم برابر است:

$$aA \rightarrow bB \Rightarrow \bar{R}_{(\text{واکنش})} = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

معادلهٔ واکنش داده‌شده، موازنه شده است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\bar{R}(H_2O_2)}{1} = \frac{\bar{R}(MnO_2)}{1} = \frac{\bar{R}(O_2)}{1} = 0/002\,mol.L^{-1}.s^{-1} \times 2L = 4\times10^{-3}\,mol.s^{-1}$$

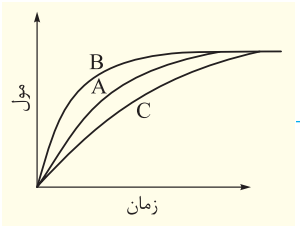
ابتدا سرعت متوسط مصرف MnO_2 رابرحسب گرم بر ثانیه محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{R}(MnO_2) = 4\times10^{-3}\,mol.s^{-1} \times \frac{87\,g}{1\,mol} = 0/348\,g.s^{-1}$$

و بالا! سرعت متوسط تولید O_2 را برحسب لیتر بر دقیقه به دست می‌آوریم:

$$\bar{R}(O_2) = 4\times10^{-3}\,mol.s^{-1} \times \frac{22/4\,L}{1\,mol} \times \frac{60\,s}{1\,min} = 5/376\,L.min^{-1}$$

۹۹ با توجه به نمودار زیر که مربوط به تولید یک فراورده در یک واکنش در شرایط مختلف است، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



شیب نمودار : $B > A > C \Rightarrow$ سرعت واکنش انجام‌شده $B > A > C$

الف) اگر منحنی A مربوط به واکنش پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق باشد، منحنی B می‌تواند مربوط به همین واکنش در دمای $40^\circ C$ باشد.

کاتالیزگر واکنش سوختن قند

ب) خاک باغچه می‌تواند منحنی تولید بخار آب حاصل از سوختن قند را از A به C تبدیل کند و مدت‌زمان انجام واکنش را کاهش دهد.

پ) استفاده از پتاسیم به جای سدیم در واکنش آن با آب سرد و در همان شرایط، می‌تواند منحنی تولید گاز هیدروژن را از A به B تبدیل کند.

واکنش‌پذیری: $Na < K \Leftarrow$ سرعت واکنش ↑

ت) اگر منحنی A مربوط به تولید رادیکال‌ها بر اثر انجام واکنش‌های متنوع و پیچیده در بدن ما باشد، منحنی C تأثیر لیکوپن بر میزان تولید این رادیکال‌ها را نشان می‌دهد.

با به دام انداختن رادیکال‌ها مقدار آن‌ها را کاهش می‌دهد تا از سرعت انجام واکنش‌های ناخواسته کاسته شود.

۱) الف ـ ب

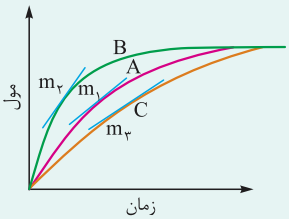
۲) الف ـ پ

۳) ب ـ ت

۴) پ ـ ت

درس Box

در نمودار مقابل، منحنی A نشان‌دهندهٔ تغییر شمار مول‌های یکی از مواد فراورده در یک واکنش را نشان می‌دهد. اگر عاملی بتواند سرعت واکنش و در نتیجه سرعت تولید فراورده را افزایش دهد (مثل افزودن کاتالیزگر به سامانهٔ واکنش، افزایش دما، افزایش سطح تماس واکنش‌دهنده‌ها و ...)، شیب منحنی تولید فراوردهٔ مورد نظر افزایش پیدا کرده و منحنی آن از A به B تغییر می‌کند ($m_2 > m_1$).



از طرفی، اگر عاملی بتواند سرعت واکنش و در نتیجه سرعت تولید فراورده را کاهش دهد (مثل افزودن بازدارنده به سامانهٔ واکنش، کاهش دما، کاهش سطح تماس واکنش‌دهنده‌ها و ...)، شیب منحنی تولید فراوردهٔ مورد نظر کاهش پیدا کرده و منحنی آن از A به C تغییر می‌کند ($m_3 < m_1$).

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های (الف) و (پ) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) افزایش دما، شیب منحنی تولید فراورده را افزایش می‌دهد؛ بنابراین اگر منحنی A نشان‌دهندهٔ تولید فراورده در دمای اتاق ($25^\circ C$) باشد، منحنی B می‌تواند تولید همان فراورده را در دمای $40^\circ C$ نشان دهد.

ب) وجود نوعی کاتالیزگر در خاک باغچه باعث می‌شود واکنش سوختن حبهٔ قند آغشته به خاک باغچه، با سرعت و شدت بیشتری همراه باشد؛ بنابراین اگر منحنی A نشان‌دهندهٔ تولید بخار آب در واکنش سوختن حبهٔ قند معمولی باشد، منحنی B می‌تواند مربوط به تولید بخار آب در واکنش سوختن حبهٔ قند آغشته به خاک باغچه باشد.

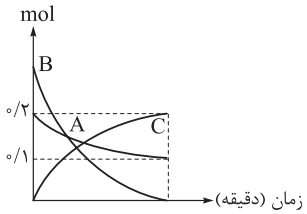
پ) معادلهٔ واکنش فلزهای قلیایی (با نماد فرضی M) با آب به صورت زیر است:

$$2M(s) + 2H_2O(l) \rightarrow 2MOH(aq) + H_2(g)$$

در گروه فلزهای قلیایی از بالا به پایین، واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد. به همین دلیل پتاسیم (دورهٔ چهارم) از سدیم (دورهٔ سوم) واکنش‌پذیرتر بوده و در شرایط یکسان (مقدار مول برابر، دما و فشار یکسان و ...)، واکنش پتاسیم با آب سرد، نسبت به واکنش سدیم با آن با سرعت و شدت بیشتری همراه بوده و اگر منحنی A نشان‌دهندهٔ تولید گاز هیدروژن در واکنش سدیم با آب سرد باشد، منحنی B می‌تواند مربوط به تولید گاز هیدروژن در واکنش پتاسیم با آب سرد باشد.

ت) در بدن ما به دلیل انجام واکنش‌های متنوع و پیچیده، رادیکال‌هایی به وجود می‌آیند که اگر به وسیلهٔ بازدارنده‌ها (مثل لیکوپن) جذب نشوند، می‌توانند با انجام واکنش‌های سریع به بافت‌های بدن آسیب برسانند؛ بنابراین لیکوپن به عنوان یک بازدارنده بر میزان تولید رادیکال‌ها تأثیری ندارد، بلکه با به دام انداختن رادیکال‌ها مقدار آن‌ها را کاهش می‌دهد تا از سرعت انجام واکنش‌های ناخواسته کاسته شود.

۱۰۰ با توجه به نمودار زیر، در لحظه‌ای که شمار مول‌های A، ۲ برابر شمار مول‌های C می‌شود، ۴۰ درصد از شمار مول‌های B مصرف شده است. شمار مول‌های اولیهٔ B و نسبت مجموع ضرایب فراورده به مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (ضریب A در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، برابر با ۱ است.)



۱) ۰/۳ _ ۰/۵

۲) ۰/۳ _ ۰/۴

۳) ۰/۴ _ ۰/۴

۴) ۰/۴ _ ۰/۵

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به نمودار، از لحظهٔ شروع تا پایان واکنش، بر اثر مصرف ۰/۱ مول A، ۰/۲ مول C تولید می‌شود، پس ضریب استوکیومتری C در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، دو برابر ضریب استوکیومتری A است؛ بنابراین می‌توان معادلهٔ واکنش را به صورت روبه‌رو در نظر گرفت:

$$A + bB \rightarrow 2C$$

گام دوم: *دست به دامن جدول تغییرات شده* و شمار مول‌های مصرف‌شدهٔ A در لحظه‌ای که شمار مول‌های باقی‌ماندهٔ آن دو برابر شمار مول‌های تولیدشدهٔ C است را حساب می‌کنیم:

	A ~ 2C	
شمار مول‌های آغازی	۰/۲	۰
شمار مول‌های مصرفی	$-x$	$+2x$
شمار مول‌های باقی‌مانده	$0/2-x$	$2x$

با فرض بر این‌که تا رسیدن به لحظهٔ مورد نظر، x مول A مصرف شده باشد، $2x$ مول C تولید می‌شود. اکنون با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$0/2-x=2(2x) \Rightarrow x=\frac{0/2}{5}=0/04$$

گام سوم: شمار مول‌های اولیه B را محاسبه می‌کنیم:

بر اثر مصرف ۰/۰۴ مول A، ۴۰ درصد شمار مول‌های اولیهٔ B مصرف شده است؛ بنابراین داریم:

$$\text{شمار مول‌های مصرف‌شدهٔ B} = 0/04\,\text{mol A} \times \frac{b\,\text{mol B}}{1\,\text{mol A}} = 0/04\,b\,\text{mol B}$$

$$\text{درصد مصرف‌شدهٔ B} = \frac{\text{مول مصرف‌شدهٔ B}}{\text{مول اولیهٔ B}} \times 100 = \frac{0/04b}{\text{مول اولیهٔ B}} \times 100 = 40 \Rightarrow \text{مول اولیهٔ B} = 0/1\,b$$

مشفقصه که برای محاسبهٔ شمار مول‌های اولیهٔ B، نیاز به اطلاعاتی در رابطه با b داریم! از قسمت دوم سؤال و هم‌چنین گزینه‌ها کمک می‌گیریم:

اگر نسبت مجموع ضرایب فراورده به مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها برابر با ۰/۴ باشد:

$$\frac{\text{ضریب استوکیومتری C}}{\text{مجموع ضرایب استوکیومتری A و B}} = 0/4 \Rightarrow \frac{2}{1+b} = 0/4 \Rightarrow b = 4$$

اگر b برابر با ۴ باشد، شمار مول‌های اولیهٔ B برابر با ۰/۴ مول خواهد بود:

$$\text{درصد مصرفی B} = \frac{0/04 \times 4}{0/4} \times 100 = \%40 \quad \text{ق.ق} \checkmark$$

اگر نسبت مجموع ضرایب فراورده به مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها برابر ۰/۵ باشد:

$$\frac{\text{ضریب استوکیومتری C}}{\text{مجموع ضرایب استوکیومتری A و B}} = 0/5 \Rightarrow \frac{2}{1+b} = 0/5 \Rightarrow b = 3$$

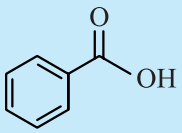
اگر b برابر با ۳ باشد، شمار مول‌های اولیهٔ B برابر با ۰/۳ مول خواهد بود:

$$\text{درصد مصرفی B} = \frac{0/04 \times 3}{0/4} \times 100 = \%30 \quad \text{غ.ق.ق} \times$$

بنابراین گزینهٔ (۳) *درست از آب دروومده!*

۱۰۱ درستی یا نادرستی مطالب زیر در ارتباط با بنزوئیک اسید، به ترتیب کدام است؟

- کربوکسیلیک اسید آروماتیک، فرمول مولکولی: $C_7H_6O_2$
- ساختار:



- در تمشک و توت‌فرنگی

- افزودن آن به مواد غذایی، منجر به حذف واکنش‌های شیمیایی فاسدکنندهٔ مواد غذایی می‌شود.
- یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک و نوعی رنگ‌دهنده است که در تمشک و توت‌فرنگی وجود دارد.

استیک اسید با فرمول مولکولی $C_2H_4O_2$

- آشناترین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها است که به صورت هدفمند به مواد خوراکی افزوده می‌شود.
- نوعی مادهٔ شیمیایی با ویژگی‌های خاص است که از آن به عنوان افزودنی به منظور افزایش زمان ماندگاری و کیفیت مواد غذایی در صنایع غذایی استفاده می‌شود.

نقش نگهدارنده ⇐ ↓ سرعت واکنش‌های شیمیایی منجر به فساد مواد غذایی

۱) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست

۲) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست

۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

۴) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست

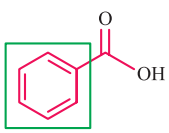
پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های اول تا سوم نادرست و تنها عبارت آخر درست است.

استفاده از مواد شیمیایی با ویژگی‌های خاص به عنوان افزودنی‌ها در صنایع غذایی، سبب افزایش زمان ماندگاری و کیفیت مواد غذایی شده است. افزودنی‌ها، مواد شیمیایی مانند **نگهدارنده**، **رنگ‌دهنده**، **طعم‌دهنده** و ... هستند که به صورت **هدفمند** به مواد خوراکی یا غذاها افزوده می‌شوند. برای نمونه نگهدارنده‌ها، سرعت واکنش‌های شیمیایی که منجر به فساد مادهٔ غذایی می‌شود را کاهش می‌دهند. یکی از این مواد، بنزوئیک اسید است که در تمشک و توت‌فرنگی وجود دارد.

بررسی عبارت‌های نادرست:

- افزودن بنزوئیک اسید به مواد غذایی، سرعت واکنش‌های شیمیایی که منجر به فساد مواد غذایی می‌شود را **کاهش** می‌دهد؛ نه این‌که این واکنش‌ها را حذف کند!
- یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک و نوعی **نگهدارنده** است که در تمشک و توت‌فرنگی وجود دارد، نه نوعی رنگ‌دهنده!



حلقهٔ بنزنی

- آشناترین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها، اتانوئیک اسید است؛ نه بنزوئیک اسید!

۱۰۲ در یک واکنش شیمیایی، سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ **A**، برابر با سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ **B** و جرم مولی مادهٔ **A**، ۱/۵ برابر جرم مولی مادهٔ **B** است. کدام مورد همواره درست است؟

۱) سرعت متوسط واکنش، برابر با سرعت متوسط ماده با جرم مولی بیشتر است.

۲) یکی از آن‌ها واکنش‌دهنده و دیگری فراورده است.

۳) در واحد زمان، تغییر شمار مول‌های A، ۱/۵ برابر تغییر شمار مول‌های B است.

۴) ضریب استوکیومتری ماده با جرم مولی کم‌تر، ۱/۵ برابر ضریب استوکیومتری دیگری است.

مشاوره این تست شبیه‌ساز یکی از مفهومی‌ترین تست‌های مبحث سینتیک است که در کنکور ۱۴۰۳ مشاهده شده است. طراحان کنکور اخیراً به طرح تست‌های این‌چنینی *تمایل و علاقه نشون داده‌اند!*

Hint با استفاده از برابری در سرعت تغییر جرم دو مادهٔ A و B و نسبت جرم مولی آن‌ها، نسبت تغییر شمار مول‌های آن‌ها در واحد زمان را حساب کن و سپس به بررسی و تحلیل گزینه‌ها بپرداز.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اگر ضریب استوکیومتری ماده‌های A و B در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش را به ترتیب برابر a و b نشان دهیم، می‌توان نوشت: (واحد زمان (t) را برحسب ثانیه (s) در نظر می‌گیریم.)

$$\bar{R}_{(\text{واکنش})} = \frac{\bar{R}\ A \text{ یا } B(\text{mol}.\text{s}^{-1})}{a \text{ یا } b} \xrightarrow{\bar{R}=\frac{\Delta n}{\Delta t}} \bar{R}_{(\text{واکنش})} = \underbrace{\frac{\Delta n_A(\text{mol})}{a \times \Delta t(\text{s})} = \frac{\Delta n_B(\text{mol})}{b \times \Delta t(\text{s})}}_{(I)}$$

از طرفی با توجه به برابری سرعت تغییر جرم (m) دو ماده، داریم:

$$\text{سرعت تغییر جرم } A = \text{سرعت تغییر جرم } B \Rightarrow \frac{\Delta m_A}{\Delta t(\text{s})} = \frac{\Delta m_B}{\Delta t(\text{s})} \xrightarrow{\text{جرم مولی} \times \text{مول} = \text{جرم}}$$

$$\frac{\Delta n_A \times M_A}{\Delta t(\text{s})} = \frac{\Delta n_B \times M_B}{\Delta t(\text{s})} \xrightarrow[\text{زمان یکسان}]{M_A = 1/5 M_B} 1/5 \Delta n_A = \Delta n_B \quad (II)$$

تساوی (II) نشان می‌دهد که در واحد زمان، تغییر شمار مول‌های مادهٔ B، ۱/۵ برابر تغییر شمار مول‌های مادهٔ A است (نادرستی گزینهٔ (۳)).

با توجه به تساوی‌های (I) و (II) داریم:

$$\frac{\Delta n_A}{a \times \Delta t(\text{s})} = \frac{1/5 \Delta n_A}{b \times \Delta t(\text{s})} \xrightarrow{\text{زمان یکسان}} 1/5a = b$$

بنابراین ضریب استوکیومتری ماده با جرم مولی کم‌تر (B)، ۱/۵ برابر ضریب استوکیومتری مادهٔ دیگر (A) است (درستی گزینهٔ (۴)).

بررسی گزینه‌های (۱) و (۲):

گزینهٔ (۱): اگر ضریب استوکیومتری ماده با جرم مولی بیشتر (A) برابر با ۱ باشد، این گزینه درست است، اما با توجه به اطلاعات داده‌شده، نمی‌توان در رابطه با مقدار دقیق ضرایب استوکیومتری اظهار نظر کرد.

گزینهٔ (۲): با در نظر گرفتن واکنش فرضی زیر، این گزینه نیز رد می‌شود:

	$2A(g) + 3B(g) \rightarrow C(g)$		
جرم مولی $(\text{g}.\text{mol}^{-1})$	۳۰	۲۰	۱۲۰

تیزبازی اگر فرض کنیم جرم مولی A و B به ترتیب برابر با ۱۵ و ۱۰ گرم بر مول است، با تولید یا مصرف هر ۱/۵ گرم A در واحد زمان (مثلاً یک ثانیه)، ۱/۵ گرم تولید یا مصرف می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned} \bar{R}(A) &= \frac{(\frac{1/5}{15})}{1\text{s}} = 0/1\,\text{mol}.\text{s}^{-1} \\ \bar{R}(B) &= \frac{(\frac{1/5}{10})}{1\text{s}} = 0/15\,\text{mol}.\text{s}^{-1} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\bar{R}(\text{واکنش})=\frac{\bar{R}(A)}{a}=\frac{\bar{R}(B)}{b}} \frac{0/1}{a} = \frac{0/15}{b} \Rightarrow \underbrace{1/5a = b}_{\text{تأیید گزینهٔ (۴)}}$$

در یک واکنش شیمیایی، سرعت متوسط تغییر مول‌های مادهٔ A، ۳ برابر سرعت متوسط تغییر مول‌های مادهٔ D، است. کدام مورد همواره درست است؟ *(ریاضی داخل ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)*

۱) در معادلهٔ واکنش، ضریب استوکیومتری A، ۳ برابر ضریب استوکیومتری D، است.

۲) استفاده از کاتالیزگر، سرعت متوسط تغییر مول‌های A و D، را به یک اندازه افزایش می‌دهد.

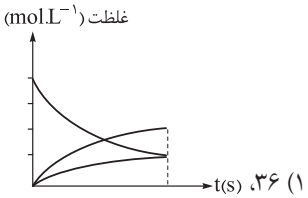
۳) سرعت واکنش، با سرعت متوسط تغییر مول‌های D، برابر است.

۴) A و D، هر دو در یک سمت معادلهٔ واکنش جای دارند.

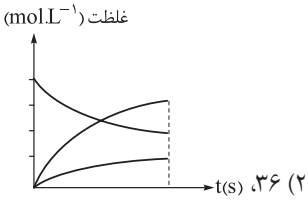
۱۰۳ اگر تغییرات غلظت مواد شرکت‌کننده در یک واکنش شیمیایی به صورت جدول روبه‌رو باشد، سرعت متوسط تولید مادهٔ B در بازهٔ زمانی ۱۲ تا ۱۸ ثانیه، چند مولار بر ساعت است و کدام نمودار، تغییرات غلظت مولار اجزای شرکت‌کننده در این واکنش را به درستی نشان می‌دهد؟

زمان (ثانیه)	غلظت ($mol.L^{-1}$)		
	C	B	A
۰	۰	۰	۱/۲۰
۶	۰/۱۵	۰/۴۵	۰/۹۰
۱۲	۰/۲۴	۰/۷۲	۰/۷۲
۱۸	۰/۲۸۵	x	۰/۶۳

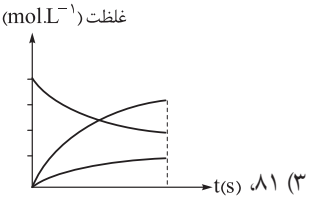
۱) ۳۶،



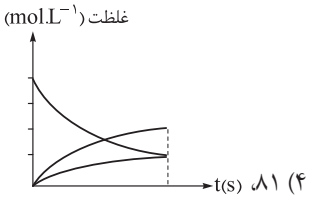
۲) ۳۶،



۳) ۸۱،



۴) ۸۱،



درس Box

در یک واکنش شیمیایی، نسبت اندازهٔ تغییرات شمار مول‌های واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها به ضرایب آن‌ها (یا تغییرات غلظت آن‌ها) در یک بازهٔ زمانی معین با هم برابر است:

$$aA \rightarrow bB \xrightarrow{\text{در بازهٔ زمانی } \Delta t} \frac{|\Delta n_A|}{a} = \frac{|\Delta n_B|}{b} \quad \text{یا} \quad \frac{|\Delta[A]|}{a} = \frac{|\Delta[B]|}{b}$$

به عبارت دیگر، اندازهٔ تغییرات غلظت در بازه‌های زمانی یکسان و معین برای مواد شرکت‌کننده در واکنش متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها است.

توجه: پس از شروع یک واکنش شیمیایی، غلظت واکنش‌دهنده(ها) کاهش و غلظت فراورده(ها) افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

پس از شروع واکنش در لحظهٔ $t = ۰s$، غلظت مادهٔ A کاهش و غلظت مواد B و C افزایش می‌یابد؛ در نتیجه A واکنش‌دهنده، B و C فراورده‌ها و معادلهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$aA \rightarrow bB + cC$$

برای تشخیص ضرایب مواد در واکنش، یک بازهٔ زمانی معین را برای بررسی تغییرات غلظت مواد در نظر می‌گیریم (مثلاً بازهٔ زمانی ۰ تا ۶ ثانیه). ببینید:

$$\frac{|\Delta[A]|}{a} = \frac{|\Delta[B]|}{b} = \frac{|\Delta[C]|}{c} \xrightarrow{\text{بازهٔ زمانی ۰ تا ۶ ثانیه}} \frac{۰/۳}{a} = \frac{۰/۴۵}{b} = \frac{۰/۱۵}{c}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم اعداد به کوچک‌ترین عدد، یعنی ۰/۱۵} } \frac{۲}{a} = \frac{۳}{b} = \frac{۱}{c}$$

کوچک‌ترین ضرایب ممکن برای برقراری این تساوی، $a = ۲$، $b = ۳$ و $c = ۱$ بوده و معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر می‌باشد:

$$۲A \rightarrow ۳B + C$$

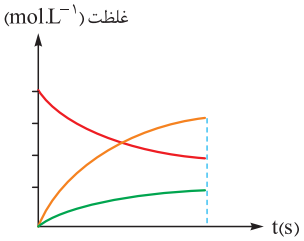
حالا! برای محاسبهٔ سرعت متوسط تولید مادهٔ B در بازهٔ زمانی ۱۲ تا ۱۸ ثانیه، *لازم* که تغییرات غلظت آن در این بازه را به دست آوریم (نیاز به محاسبهٔ مستقیم x در جدول نیست!) این بازهٔ زمانی را بین دو ماده A و B بررسی می‌کنیم:

$$\frac{|\Delta[A]|}{a} = \frac{|\Delta[B]|}{b} \xrightarrow{\text{بازهٔ زمانی ۱۲ تا ۱۸ ثانیه}} \frac{۰/۰۹}{۲} = \frac{|\Delta[B]|}{۳} \rightarrow |\Delta[B]| = ۰/۱۳۵ \ mol.L^{-1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\bar{R}(B)=\frac{\Delta[B](mol.L^{-1})}{\Delta t(h)}=\frac{۰/۱۳۵\ mol.L^{-1}}{\underbrace{(۱۸-۱۲)}_{۶}s\times\frac{۱\ h}{۳۶۰\ s}}=۰/۱۳۵\times۶۰=۸۱\ mol.L^{-1}.h^{-1}$$

همون‌طور که می‌دونین! هر چه ضریب استوکیومتری برای یک ماده بزرگ‌تر باشد، قدرمطلق شیب منحنی تغییرات غلظت آن نیز بیشتر است و در واقع در یک بازهٔ زمانی معین، قدرمطلق میزان تغییرات مقدار یا غلظت مواد شرکت‌کننده در یک واکنش و در نتیجه شیب نمودار آن‌ها، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها است؛ بنابراین با توجه به معادلهٔ واکنش، نمودار زیر را می‌توان به واکنش مورد نظر نسبت داد:



۱۰۴ کدام موارد زیر در ارتباط با رادیکال‌های آزاد و بازدارنده‌های آن‌ها، نادرست است؟

گونه‌های ناپایدار و پرانرژی که در ساختار خود الکترون جفت‌نشده دارند.

الف) رادیکال‌های آزاد، گونه‌های فعال و ناپایداری هستند که می‌توانند به بافت‌های بدن آسیب برسانند.

ب) بازدارنده‌ها با به دام انداختن رادیکال‌های آزاد، از سرعت واکنش‌های ناخواسته در بدن می‌کاهند.

پ) میوه‌ها و سبزیجات حاوی ترکیباتی هستند که می‌توانند به عنوان بازدارنده عمل کنند.

ترکیبات آلی سیرنشده‌ای به نام ریزمغذی‌ها

ت) رادیکال‌های آزاد به دلیل داشتن الکترون‌های جفت‌نشده، واکنش‌پذیری پایینی دارند.

۱) الف ـ پ

۲) ب ـ ت

۳) پ ـ ت

۴) فقط ت

پاسخ خیلی تشریحی

فقط عبارت (ت) نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف و ت) **از آن‌جا که رادیکال‌ها، الکترون جفت‌نشده دارند، بسیار واکنش‌پذیرند.** در بدن ما به دلیل انجام واکنش‌های متنوع و پیچیده، رادیکال‌هایی به وجود می‌آیند که اگر به وسیلهٔ بازدارنده‌ها جذب نشوند، می‌توانند با انجام واکنش‌های سریع به بافت‌های بدن آسب برسانند.

ب) بازدارنده‌ها با به دام انداختن رادیکال‌ها باعث می‌شوند که از سرعت واکنش‌های ناخواسته کم شود.

پ) *آره خوشبختانه!* برخی خوراکی‌ها (مانند میوه‌ها و سبزیجات) حاوی بازدارنده هستند و مصرف آن‌ها باعث می‌شود که رادیکال‌ها *به دام بیفتند.*

۱۰۵ اگر در واکنش فرضی: $A_۲(g)+B_۲(g) \rightarrow ۲AB(g)$، واکنش‌دهنده با غلظت یک مولار شروع به تجزیه کند، غلظت آن در هر ساعت، ۰/۱ برابر می‌شود. اگر این واکنش در حضور کاتالیزگر هر ۱۵ دقیقه با همین روند پیشرفت کند، در لحظه‌ای که ۹۹/۹۹ درصد مادهٔ اولیه مصرف شده باشد، تفاوت زمان انجام واکنش در حضور و عدم حضور کاتالیزگر چند دقیقه است و با به کار بردن کاتالیزگر، سرعت متوسط واکنش چند برابر می‌شود؟ (دما را ثابت در نظر بگیرید.)

۱) ۱۸۰، ۸

۲) ۱۲۰، ۴

۳) ۱۲۰، ۸

۴) ۱۸۰، ۴

پاسخ خیلی تشریحی

غلظت AB در هر ساعت، ۰/۱ برابر غلظت آن در ساعت قبلی می‌شود؛ بنابراین با گذشت n ساعت، غلظت باقی‌مانده از واکنش‌دهنده یعنی $[AB]$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$[AB] = (\frac{۱}{۱۰})^n \times [AB]_۰$$

حالا! تعداد ساعاتی (n) که باید بگذرد تا ۹۹/۹۹ درصد از AB تجزیه شود را حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد غلظت مصرفی AB} = \frac{\text{غلظت اولیهٔ AB} - \text{غلظت باقی‌ماندهٔ AB}}{\text{غلظت اولیهٔ AB}} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۹۹/۹۹ = \frac{۱-[AB]}{۱} \times ۱۰۰ \Rightarrow [AB] = \frac{۱}{۱۰^۴}$$

با جای‌گذاری $[AB]$ به‌دست‌آمده در رابطهٔ بالا، مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۱۰^۴} = (\frac{۱}{۱۰})^n \times ۱ \Rightarrow n = ۴$$

بنابراین غلظت واکنش‌دهندهٔ (AB)، چهار مرتبه ۰/۱ برابر شده است؛ در نتیجه داریم:

زمان تجزیهٔ AB در عدم حضور کاتالیزگر $= ۴ \times ۶۰ = ۲۴۰ \text{ min}$

زمان تجزیهٔ AB در حضور کاتالیزگر $= ۴ \times ۱۵ = ۶۰ \text{ min}$

اختلاف زمان این دو برابر با ۱۸۰ دقیقه است.

در مدت‌زمان ۶۰ دقیقه، $[AB]$ در حضور کاتالیزگر ۴ مرتبه و در عدم حضور آن یک مرتبه ۰/۱ برابر می‌شود؛ پس سرعت واکنش در حضور کاتالیزگر، ۴ برابر سرعت واکنش در عدم حضور آن است.