آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله دوازدهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۲۶/بهمن/۱۴۰۳

دفترچه شماره یک

بودجه‌بندی دروس

حسابان و ریاضیات پایه	هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال
حسابان (۱) فصل ۳ صفحهٔ ۷۱ تا ۹۰ حسابان (۲) فصل ۴ (درس ۲ از ابتدای مشتق تابع مرکب) و فصل ۵ (درس ۱ تا ابتدای تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع) صفحهٔ ۹۶ تا ۱۱۹	هندسه (۲) فصل ۳ (درس ۳ و ۴) صفحهٔ ۶۸ تا ۷۵ هندسه (۳) فصل ۳ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای ضرب خارجی) صفحهٔ ۶۱ تا ۸۰	آمار و احتمال فصل ۲ (درس ۲ و ۳ تا ابتدای قانون احتمال کل) صفحهٔ ۴۴ تا ۵۴ ریاضیات گسسته فصل ۳ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای اصل لانه کبوتری) صفحهٔ ۵۵ تا ۷۹

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۵ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

۱- اگر $f(x)=۶x+\frac{a}{x}$ و داشته باشیم که $f''(۱)=f'(۱)$، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۲- ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[n]{x}-۱)$ است، اگر $f''(۱)=\frac{۱}{۲۰}$ باشد، مقدار طبیعی n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

۳- در تابع $f(x)=\sin^۳(\frac{\pi}{\sqrt{x+۸}})$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{-\pi}{۱۶}$ ۲) $\frac{-\pi}{۴۳۲}$ ۳) $\frac{-\pi}{۹۶}$ ۴) $\frac{-\pi}{۴۸}$

۴- اگر $f(x)=۴\sqrt{x}+۳g^۳(x)$ و $f'(۱)=g(۱)=۲$، مقدار $۱+f''(۱)$ چند برابر $g''(۱)$ است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۵- f یک تابع چندجمله‌ای درجه‌دوم است، اگر $f''(x)<۰$ و $(f'of)(x)=۸x^۲-۱۲x-۳$، آن‌گاه مقدار $(fof')(۲)$ کدام است؟

۱) $-۶۳/۵$ ۲) $-۶۶/۵$ ۳) $-۵۳/۵$ ۴) $-۵۱/۵$

۶- قرینهٔ طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲+mx-۴$، ۳ برابر دیگری است، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) -۹

۷- اگر $g(x)=x+۲\sqrt{۵-x^۲}$ و $f(x)=x^۳+x+k$، به ازای کدام مقدار k، بیشترین مقدار تابع $y=(fog)(x)$ برابر ۲۵ است؟

۱) -۱۱۰ ۲) -۱۲۵ ۳) -۱۰۵ ۴) -۱۲۰

۸- اگر مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^۲|۲x+a|$ برابر $\{۰,۳,\alpha\}$ باشد، مقادیر α کدام می‌تواند باشد؟

۱) $۲,۴/۵$ ۲) $-۲,-۴/۵$ ۳) $-۹,-۶$ ۴) $۹,۶$

۹- در تابع $f(x)=(-۱)^{[x]}\cos\frac{\pi x}{۲}$، کدام گزینه طول ماکزیمم مطلق تابع f است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۹

۱۰- اگر در تابع $f(x)=\sqrt[۳]{ax^۲-۵x+a}$، طول یکی از نقاط بحرانی $x=۲$ باشد، مجموع طول نقاط بحرانی دیگر کدام می‌تواند باشد؟

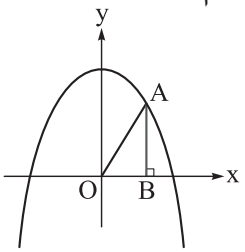
۱) ۲ ۲) $۶+۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

محل انجام محاسبات

۱۱- بیشترین مقدار تابع $f(x)=x+a\sqrt{2a-x}$ برابر ۱۲ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱۲- نمودار زیر مربوط به تابع با ضابطهٔ $f(x)=12-x^2$ است. بیشترین مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۹

۱۳- محل برخورد تابع $f(x)=2^{ax}-4$ با محور طول‌ها و محور عرض‌ها را به هم وصل می‌کنیم، مساحت سطح محصور بین محورها و پاره‌خط رسم‌شده ۳ واحد می‌شود، $f(-4)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{-65}{16}$ ۲) $\frac{-33}{8}$ ۳) $\frac{-31}{8}$ ۴) $\frac{-63}{16}$

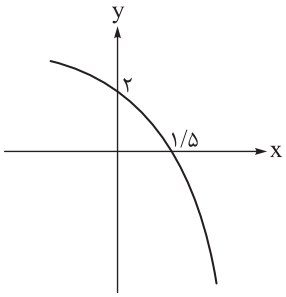
۱۴- اگر $a=3$ $\log_{a^2b}$ باشد، مقدار $\log_{b^3a} b$ کدام است؟

۱) $\frac{12}{5}$ ۲) $\frac{15}{7}$ ۳) $\frac{12}{7}$ ۴) $\frac{5}{12}$

۱۵- اگر $a=\log_2 9$ و $\log_{16} b=\frac{1}{8}(2+a)$ باشد، مقدار $\log_2(3b-2)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶- شکل زیر نمودار تابع $f(x)=1+\log_c(\frac{1}{ax+b})$ است، اگر $b-c=\frac{3}{2}$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع کدام است؟



۱) $(-\infty,3)$
۲) $(-\infty,2)$
۳) $(-\infty,3/5)$
۴) $(-\infty,2/5)$

۱۷- معادلهٔ $\log_{\sqrt{x}} k+2\log_{k^2} x=3$ دارای ریشه‌های $x=4$ و $x=\alpha$ است، مقدار α کدام است؟

۱) ۸ یا ۲ ۲) ۱۶ یا ۲ ۳) ۸ یا ۱۶ ۴) فقط ۱۶

۱۸- دوچرخه در هر روز ۴ درصد باد موجود در لاستیک خودش را از دست می‌دهد. چه‌قدر طول می‌کشد تا باد دوچرخه به $\frac{1}{5}$ باد روز اول برسد؟ ($\log 2=0/3, \log 3=0/47$)

۱) $\frac{80}{3}$ روز ۲) ۲۵ روز ۳) ۲۴ روز ۴) $\frac{70}{3}$ روز

محل انجام محاسبات

۱۹- یک ناحیه در فضا به صورت $\{(۲,y,z)\,|\,y,z\in\mathbb{R}\,,۱\le y\le ۴,-۱\le z\le ۵\}$ معرفی شده است. این ناحیه کدام شکل را مشخص می‌کند؟

۱) مکعب‌مستطیلی به حجم ۳۶
۲) مستطیلی به مساحت ۱۸
۳) مکعب‌مستطیلی به مساحت ۱۸
۴) مستطیلی به مساحت ۳۶

۲۰- اگر A، B، C و D چهار نقطهٔ دلخواه در فضا باشند، حاصل عبارت $\overrightarrow{BC}+۶\overrightarrow{DB}+۴\overrightarrow{CD}-۲\overrightarrow{DA}+۲\overrightarrow{BA}$ برابر کدام است؟

۱) $۳\overrightarrow{AC}$
۲) $۲\overrightarrow{BC}$
۳) $۳\overrightarrow{CB}$
۴) $۲\overrightarrow{DA}$

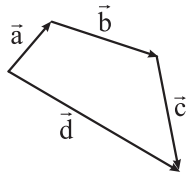
۲۱- اگر $|\vec{a}|=۲$ و $|\vec{b}|=۱$ و بردارهای $\vec{a}+۳\vec{b}$ و $۲\vec{a}-\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۱۵۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۶۰°
۴) ۴۵°

۲۲- اگر $\vec{a}=(\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $\vec{b}=(۳,۰,۳)$، آن‌گاه مؤلفه‌های تصویر قائم بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ به صورت $(x_۰,y_۰,z_۰)$ است. حاصل $x_۰+y_۰+z_۰$ کدام است؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) -۳
۴) ۳

۲۳- مطابق شکل اگر $|\vec{a}|=۱$، $|\vec{b}|=|\vec{c}|=۱/۵$ و $|\vec{d}|=۲$، آن‌گاه حاصل $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}$ کدام است؟

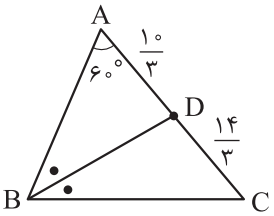


۱) ۰/۷۵
۲) $-۰/۷۵$
۳) ۱/۲۵
۴) $-۱/۲۵$

۲۴- اگر $(x+۱)^۲+(y+۲)^۲+(z-۱)^۲=۹$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $x+۲y-۲z$ کدام است؟

۱) -۱۶
۲) ۲
۳) -۲
۴) ۱۶

۲۵- در شکل مقابل، نیمساز داخلی زاویهٔ B در مثلث ABC، ضلع AC را به قطعات $\frac{۱۰}{۳}$ و $\frac{۱۴}{۳}$ واحدی تقسیم کرده است. فاصلهٔ نقطهٔ D از ضلع AB چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟



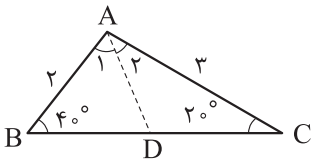
۱) $\frac{۱۷}{۱۲}$
۲) $\frac{۳۵}{۲۴}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

محل انجام محاسبات

۲۶- در مثلث ABC، می‌دانیم $BC = AC = 2AB$، اگر نیمساز زاویهٔ داخلی A ضلع BC را در D و عمودمنصف BC را در E قطع کند، آن‌گاه نسبت طول DE به طول AD کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

۲۷- مطابق شکل اگر $\hat{A}_2 = \hat{A}_1$، آن‌گاه طول AD کدام است؟

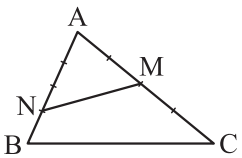


۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) ۱/۵
۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۱/۲

۲۸- در مثلث ABC، ضلع AC و عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ D یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر BD نیمساز زاویهٔ $A\hat{B}C$ باشد، به طوری که $AD = 9$ و $DC = 7$، آن‌گاه مساحت مثلث ABD کدام است؟

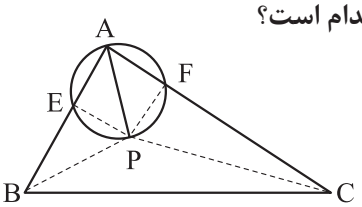
۱) ۱۴ ۲) ۲۱
۳) ۲۸ ۴) $14\sqrt{5}$

۲۹- مطابق شکل، هر یک از پاره‌خط‌های AB و AC به چهار قسمت مساوی تقسیم شده‌اند. نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت چهارضلعی BCMN کدام است؟



۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{3}{5}$
۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۰- مطابق شکل اگر $AB = 25$، $AC = 39$ و $BC = 40$ و دایرهٔ به قطر AP، ضلع‌های AB و AC را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند، به طوری که $PE = 12$ و $PF = 14$، آن‌گاه مساحت مثلث PBC کدام است؟



۱) ۳۹/۵ ۲) ۴۲
۳) ۴۴/۵ ۴) ۴۵

۳۱- اگر $S = \{1,2,3,4\}$ و $P(k) = kx$، حاصل $P(\{1,3\})$ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۳۲- در انداختن دو تاس با یکدیگر، اگر مجموع اعداد روشده اول باشد، احتمال آن‌که مجموع مربعات اعداد روشده، مربع کامل باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۳۳- دو مهره به طور متوالی و بدون جای‌گذاری از جعبه‌ای شامل سه مهرهٔ سفید و هفت مهرهٔ سیاه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو مهره سیاه باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۱۵}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۷}{۳۰}$

۳۴- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که در هر یک از آن‌ها رقم ۱، حداقل یک بار به کار رفته باشد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۵۲ ۴) ۳۳۶

۳۵- با حروف کلمهٔ aabbbcdee چند کلمهٔ ۹حرفی می‌توان ساخت به طوری‌که هیچ دو حرف b ای کنار هم نباشند؟

۱) ۳۶۰۰ ۲) ۴۵۰۰ ۳) ۵۴۰۰ ۴) ۶۳۰۰

۳۶- به چند طریق می‌توان سه شاخه گل از بین ۵ نوع گل مختلف انتخاب کرد؟

۱) ۱۰ ۲) ۳۵ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

۳۷- اگر مربع مقابل یک مربع لاتین باشد، آن‌گاه xyz کدام است؟

۳	x	a
b	۱	y
z	c	d

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

۳۸- معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰$، چند دسته جواب صحیح، غیرمنفی و کم‌تر از ۶ دارد؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۳۹- چند تابع پوشای f از مجموعهٔ $A = \{1,2,3,4,5\}$ به مجموعهٔ $B = \{1,3,5,7\}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $f(۲) = ۵$ و $f(۴) = ۷$ باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۴۰- در یک گروه هفت‌نفری قد هیچ دو نفری یکسان نیست. اگر قد یاشار بلندتر از قد رضا و قد یحیی باشد، چه‌قدر احتمال دارد یاشار دومین فرد بلندقد در این گروه باشد؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله دوازدهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۲۶/بهمن/۱۴۰۳

دفترچه شماره دو

بودجه‌بندی دروس

فیزیک	شیمی
فیزیک (۲) فصل ۳ صفحهٔ ۸۳ تا ۱۰۸ فیزیک (۳) فصل ۴ و فصل ۵ صفحهٔ ۸۹ تا ۱۳۶	شیمی (۲) فصل ۳ (تا ابتدای پلی‌استرها) صفحهٔ ۹۹ تا ۱۰۹ شیمی (۳) فصل ۳ (از ابتدای فلزها، عنصرهایی شکل‌پذیر با جلایی زیبا) و فصل ۴ (تا ابتدای ارزش فناوری‌های شیمیایی) صفحهٔ ۸۳ تا ۱۱۰

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۸۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	
مجموع	۶۵ سؤال			۸۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

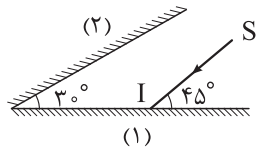
شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

۴۱- اساس کار رادار دوپلری و میکروفون سهموی به ترتیب از راست به چپ، بازتاب کدام امواج است؟

۱) مکانیکی، مکانیکی
۲) الکترومغناطیسی، الکترومغناطیسی
۳) الکترومغناطیسی، مکانیکی
۴) مکانیکی، الکترومغناطیسی

۴۲- در شکل زیر، پرتو SI به آینهٔ (۱) می‌تابد. پرتو نهایی بازتاب‌شده از آینه‌ها با پرتو SI زاویهٔ چند درجه می‌سازد؟ (طول آینه‌ها به اندازهٔ کافی بلند است.)



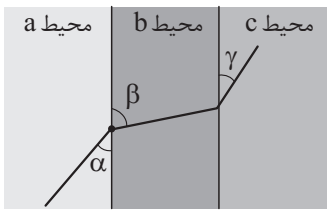
۱) ۹۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۳۵
۴) ۱۵۰

۴۳- برای مکان‌یابی پژواکی جسمی کروی به قطر ۲ cm در آب از امواج فراصوتی استفاده می‌شود. برای تشخیص این جسم، بسامد این امواج برابر با چه تعداد از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ (تندی انتشار صوت در آب ۱۵۰۰ m / s است.)

الف) ۲۵ kHz
ب) ۷۵ kHz
پ) ۱۲۵ kHz
ت) ۲۵۰ kHz

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۴- در شکل زیر جبههٔ موجی با عبور از محیط اولیهٔ a، از طریق محیط b، وارد محیط c شده است. کدام مورد دربارهٔ این موج درست است؟ $(\beta > \alpha > \gamma)$



۱) بسامد موج در محیط a بیشتر از بسامد آن در محیط b است.
۲) دورهٔ موج در محیط b بیشتر از دورهٔ آن در محیط c است.
۳) تندی انتشار موج در محیط a بیشتر از تندی انتشار آن در محیط b است.
۴) طول موج در محیط b بیشتر از طول موج آن در محیط c است.

۴۵- تندی انتشار موج در محیط (۲)، $\sqrt{۳}$ برابر تندی انتشار موج در محیط (۱) است. جبهه‌های موج تختی از محیط (۱) به محیط (۲) می‌تابند. بخشی از جبهه‌های موج وارد محیط (۲) شده و بخشی از آن‌ها بازتاب می‌شوند. اگر جبهه‌های موج شکست‌یافته، بر جبهه‌های موج بازتابیده عمود باشند، زاویهٔ بین راستای جبهه‌های موج شکست‌یافته با راستای جبهه‌های موج تابیده چند درجه است؟ (مرز بین دو محیط، یک سطح صاف است.)

۱) ۱۵
۲) ۳۰
۳) ۶۰
۴) ۹۰

۴۶- یک تار دو انتها بسته به طول ۵۰ cm با بسامد ۶۰۰ Hz در هماهنگ پنجم در حال ارتعاش است. اگر طول موج صوت گسیل‌شده توسط تار، ۵۵ cm باشد، تندی انتشار موج عرضی در این تار و تندی انتشار صوت در هوای اطراف تار به ترتیب از راست به چپ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۳۴۰، ۱۲۰
۲) ۳۳۰، ۱۵۰
۳) ۳۴۰، ۱۵۰
۴) ۳۳۰، ۱۲۰

محل انجام محاسبات

۴۷- اختلاف طول موج دو موج الکترومغناطیسی A و B در خلأ برابر ۶۰۰ nm و بسامد موج A، ۴ برابر بسامد موج B است. انرژی هر یک از فوتون‌های مربوط به موج A چند الکترون ولت است؟ $(hc = 1240\ eV.nm)$

۱) ۰/۶۲ ۲) ۱/۵۵ ۳) ۶/۲ ۴) ۱۵/۵

۴۸- شدت تابشی امواج الکترومغناطیسی که به سطحی به مساحت $200\ cm^2$ می‌رسد، برابر $4\ W/m^2$ است. اگر بسامد این موج $5\times10^{14}\ Hz$ باشد، در هر دقیقه چند فوتون به این سطح می‌رسد؟ $(h = 6\times10^{-34}\ J\cdot s)$

۱) $1/6\times10^{19}$ ۲) $1/6\times10^{20}$ ۳) $9/6\times10^{19}$ ۴) $9/6\times10^{20}$

۴۹- کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ مدل‌های اتمی تامسون و رادرفورد درست است؟

۱) در مدل اتمی تامسون، بار مثبت که سهم ناچیزی در جرم اتم دارد، به طور همگن در سراسر آن پخش شده است.

۲) در مدل اتمی رادرفورد، با حرکت الکترون به دور هسته، طول موج امواج الکترومغناطیسی گسیلی از آن به تدریج افزایش می‌یابد.

۳) مدل اتمی رادرفورد، برخلاف مدل اتمی تامسون، طیف خطی گسیل‌شده از اتم‌ها را توجیه می‌کند.

۴) در مدل اتمی رادرفورد، بنابر فیزیک کلاسیک، حرکت شتابدار الکترون به دور هسته، سبب تابش امواج الکترومغناطیسی می‌شود.

۵۰- با تابش نوری با بسامد f بر سطح یک فلز، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد، برای افزایش بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها کدام‌یک از تغییرهای زیر مؤثر است؟

الف) زمان تابش نور را افزایش دهیم.

ب) از فلزی با بسامد آستانهٔ کم‌تر استفاده کنیم.

پ) از نوری با بسامد بیشتر از f استفاده کنیم.

ت) بدون تغییر بسامد، شدت نور تابیده را افزایش دهیم.

۱) الف و ت ۲) ب و پ ۳) ب و ت ۴) الف و پ

۵۱- الکترون در اتم هیدروژن در تراز $n = 4$ قرار دارد. این الکترون مستقیماً به حالت پایه می‌رود و فوتون گسیلی به فلزی برخورد می‌کند که تابع کار آن $5/25\ eV$ است. بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از فلز چند الکترون ولت است؟ $(E_R = 13/6\ eV)$

۱) ۴/۴ ۲) ۷/۵ ۳) ۷/۲۵ ۴) ۴/۲۵

۵۲- در آزمایش فوتوالکتریک طول موج آستانهٔ فلزی ۴۰۰ nm است. نوری با طول موج λ به فلز می‌تابد و سبب گسیل فوتوالکترونی با بیشینهٔ تندی $8\times10^5\ m/s$ می‌شود. λ چند نانومتر است؟

$(e = 1/6\times10^{-19}C, c = 3\times10^8\ m/s, h = 4\times10^{-15}eV.s, m_e = 9\times10^{-31}\ kg)$

۱) ۸۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۵۰

محل انجام محاسبات

۵۳- کدام‌یک از موارد زیر، دربارهٔ الکترونی که در اتم هیدروژن از مدار $n_1 = 2$ به $n_2 = 4$ گذار می‌کند، درست است؟ $(e = 1/6\times10^{-19}C\ ,\ E_R = 13/6\ eV)$

۱) این الکترون، فوتونی با انرژی $4/08\times10^{-19}J$ گسیل می‌کند.

۲) این الکترون، فوتونی با انرژی $4/08\times10^{-19}J$ جذب می‌کند.

۳) این الکترون، فوتونی با انرژی $5/44\times10^{-19}J$ گسیل می‌کند.

۴) این الکترون، فوتونی با انرژی $5/44\times10^{-19}J$ جذب می‌کند.

۵۴- در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، اختلاف شعاع مدار الکترون در سومین و چهارمین حالت برانگیخته چند پیکومتر است؟ (شعاع بور برای اتم هیدروژن $5/29\times10^{-11}m$ است.)

۱) $52/9$ ۲) $370/3$ ۳) $476/1$ ۴) ۵۲۹

۵۵- انرژی فوتون متعلق به کوتاه‌ترین طول موج رشتهٔ براکت $(n' = 4)$ هیدروژن اتمی چند الکترون‌ولت است؟ $(hc = 1240\ eV.nm\ ,\ R = 0/01\ (nm)^{-1})$

۱) $0/279$ ۲) $0/775$ ۳) $2/79$ ۴) $7/75$

۵۶- در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، انرژی فوتون متعلق به اولین خط رشتهٔ براکت $(n' = 4)$ برابر E_1، و انرژی فوتون متعلق به دومین خط رشتهٔ بالمر $(n' = 2)$ برابر E_2 است. $E_1 - E_2$ برابر چند ریدبرگ است؟

۱) $0/21$ ۲) $-0/21$ ۳) $0/165$ ۴) $-0/165$

۵۷- در اتم هیدروژن، الکترونی در چهارمین حالت برانگیخته است. طول موج پرتوی فرابنفشی که این الکترون می‌تواند گسیل کند، چند میکرومتر است؟ $(R = 0/01\ (nm)^{-1})$

۱) $\frac{5}{48}$ ۲) $\frac{8}{75}$ ۳) $\frac{5}{96}$ ۴) $\frac{4}{75}$

۵۸- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) در پدیدهٔ فلوئورسانی، طول موج نور گسیل‌یافته معمولاً برابرِ همان طول موج نور فرودی یا کوچک‌تر از آن است.

ب) برخی از خط‌های تاریک موجود در طیف خورشید، ناشی از جذب طول موج‌های مربوط به این خط‌ها توسط گازهای جو خورشید است.

پ) همهٔ اجسام در هر دمایی از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند که در دماهای معمولی بیشتر تابش‌های گسیل‌شده، در ناحیهٔ فروسرخ قرار دارند.

ت) طیف گسیلی جسم جامد، برخلاف گازهای کم‌فشار و رقیق، خطی و ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است.

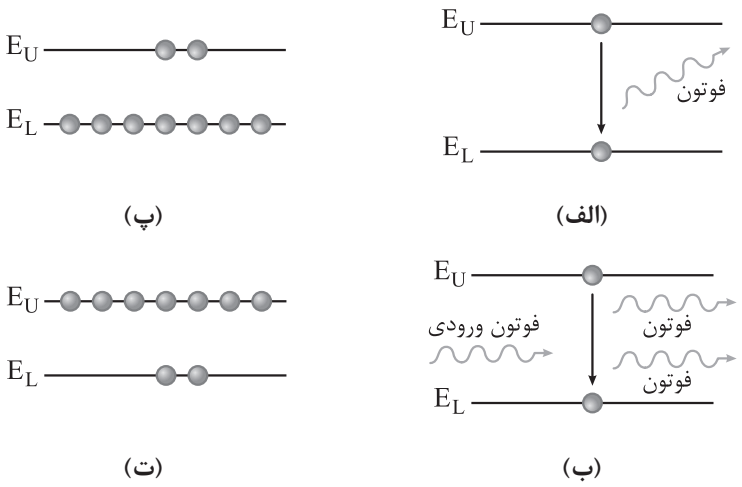
۱) الف و ب ۲) الف و ت ۳) پ و ت ۴) ب و پ

محل انجام محاسبات

۵۹- الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n = 7$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اگر این الکترون به حالت پایه برود، به ترتیب از راست به چپ، امکان گسیل چند نوع فوتون با انرژی متفاوت، و چند نوع فوتون در ناحیهٔ فروسرخ وجود دارد؟

۱) ۲۱، ۱۰ ۲) ۲۱، ۱۱ ۳) ۲۸، ۱۰ ۴) ۲۸، ۱۱

۶۰- به ترتیب از راست به چپ، کدام شکل نشان‌دهندهٔ فرایند گسیل القایی، و کدام شکل نشان‌دهندهٔ وضعیت وارونی جمعیت در لیزر است؟



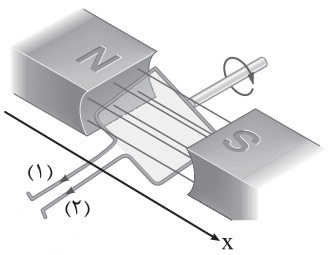
۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

۶۱- در شکل زیر، یک آهنربای میله‌ای و یک عقربهٔ مغناطیسی در یک صفحه قرار دارند. اگر آهنربا حول مرکز خود و در جهت ساعتگرد یک دور کامل دوران کند، عقربهٔ مغناطیسی چند درجه و در چه جهتی دوران می‌کند؟



۱) ۳۶۰، ساعتگرد ۲) ۳۶۰، پادساعتگرد ۳) ۷۲۰، ساعتگرد ۴) ۷۲۰، پادساعتگرد

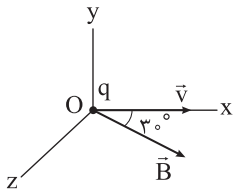
۶۲- در شکل زیر، حلقهٔ رسانای مستطیل‌شکلی که حامل جریان الکتریکی I است، درون میدان مغناطیسی یکنواخت، در جهت نشان داده شده می‌چرخد. جهت میدان مغناطیسی و جهت جریان I به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۱) در جهت محور x، (۱)
۲) در جهت محور x، (۲)
۳) در خلاف جهت محور x، (۱)
۴) در خلاف جهت محور x، (۲)

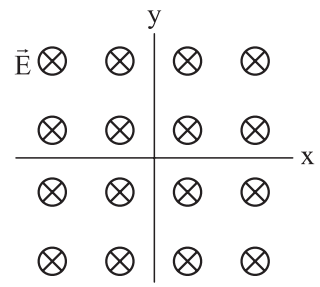
محل انجام محاسبات

۶۳- در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = 5\mu C$ با تندی $40 km/s$ در جهت محور x پرتاب شده است و بردار سرعت آن با میدان مغناطیسی $B = 400 G$ که عمود بر محور y است، زاویهٔ 30° می‌سازد. نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره، برحسب نیوتون در لحظهٔ پرتاب کدام است؟



۱) $0/04\vec{j}$
۲) $0/004\vec{j}$
۳) $-0/04\vec{j}$
۴) $-0/004\vec{j}$

۶۴- در شکل زیر، میدان الکتریکی یکنواخت $E = 50 N/C$، عمود بر صفحه و به سمت داخل آن است. پروتونی با تندی $200 m/s$ در جهت محور y پرتاب می‌شود. اگر با اعمال میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، پروتون بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ میدان مغناطیسی $\vec{B}$ الزاماً درست است؟



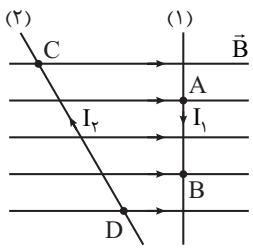
الف) $\vec{B}$ در جهت محور x است.
ب) $\vec{B}$ در خلاف جهت محور x است.
پ) اندازهٔ $\vec{B}$ برابر $0/25 T$ است.
ت) کمینهٔ اندازهٔ $\vec{B}$ برابر $0/25 T$ است.

۱) الف و پ
۲) ب و پ
۳) پ
۴) ت

۶۵- از سیمی به طول $2 m$ که به صورت افقی و در راستای شرق به غرب قرار دارد، جریان $2A$ از شرق به غرب عبور می‌کند. اگر بزرگی میدان مغناطیسی زمین در محل سیم $0/45 G$ و شیب مغناطیسی در این محل 30° باشد، اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون است؟

۱) $1/8\times10^{-4}$
۲) $1/8\times10^{-5}$
۳) 9×10^{-4}
۴) 9×10^{-5}

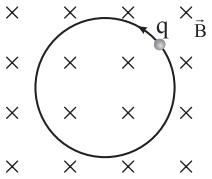
۶۶- در شکل زیر، دو سیم (۱) و (۲) در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارند. اگر جریان الکتریکی عبوری از سیم (۱)، ۲ برابر جریان الکتریکی عبوری از سیم (۲) و نیروی مغناطیسی وارد بر قطعهٔ AB از سیم (۱) برابر $\vec{F}$ باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر قطعهٔ CD از سیم (۲)، کدام است؟



۱) $4\vec{F}$
۲) $-4\vec{F}$
۳) $\vec{F}$
۴) $-\vec{F}$

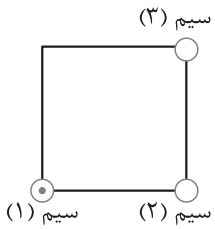
محل انجام محاسبات

۶۷- در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی q در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = ۰/۵\,T$ و تنها تحت تأثیر آن، روی محیط دایره‌ای به شعاع ۲۰cm، درجهت نشان داده شده، در حال حرکت است. اگر اندازهٔ تکانهٔ ذره در SI برابر ۲×۱۰^{-۶} باشد، q برحسب میکروکولن کدام است؟



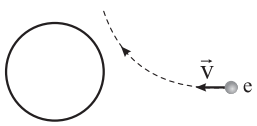
۱) ۲
۲) ۲۰
۳) −۲
۴) −۲۰

۶۸- در شکل زیر، سه سیم حامل جریان، روی سه رأس مربعی، عمود بر صفحه قرار دارند و جریان عبوری از سیم (۱)، برون‌سو است. اگر میدان مغناطیسی خالص در رأس چهارم مربع برابر صفر باشد، میدان مغناطیسی خالص در مرکز مربع در چه جهتی است؟



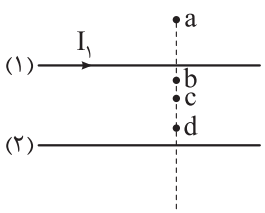
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۶۹- در شکل زیر، حلقهٔ حامل جریانی در صفحه قرار دارد. در این صفحه، الکترونی با سرعت $\vec{v}$ در جهت نشان داده شده، پرتاب می‌شود. با توجه به مسیر حرکت الکترون، جهت جریان عبوری از حلقه و جهت میدان مغناطیسی در مرکز آن کدام است؟



۱) ساعتگرد، ⊗
۲) ساعتگرد، ⊙
۳) پادساعتگرد، ⊗
۴) پادساعتگرد، ⊙

۷۰- در شکل زیر، دو سیم راست و موازی حامل جریان در یک صفحه قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ c برابر صفر باشد، چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟



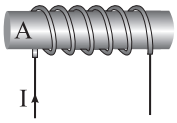
الف) دو سیم نیروی مغناطیسی رانشی به یکدیگر وارد می‌کنند.
ب) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ a، برون‌سو است.
پ) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ b، درون‌سو است.
ت) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ d، برون‌سو است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۷۱- در شکل زیر، جریان الکتریکی عبوری از سیم‌لولهٔ آرمانی، $I = 2A$ و تعداد دورهای آن در هر $10cm$ از طول سیم‌لوله برابر ۴۰ است. اندازهٔ میدان مغناطیسی در داخل سیم‌لوله چند گاوس و قسمت A کدام قطب سیم‌لوله است؟

$$(\mu_0 = 12/5 \times 10^{-7} \frac{T.m}{A})$$



۱) ۱، N
۲) ۱، S
۳) ۱۰، N
۴) ۱۰، S

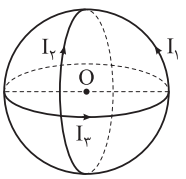
۷۲- با سیمی روکش‌دار به طول $3m$ و قطر مقطع $2mm$ که مقاومت ویژهٔ آن $5 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ است، سیم‌لوله‌ای می‌سازیم که حلقه‌های آن بدون هیچ فاصله‌ای کنار هم قرار دارند. اگر دو سر سیم‌لوله به اختلاف پتانسیل $15V$ متصل شود، اندازهٔ میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله به چند تسلا می‌رسد؟ ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$، $\pi^2 = 10$ و ضخامت روکش عایق سیم، ناچیز است.)

۱) ۰/۰۴
۲) ۰/۰۲
۳) ۰/۴
۴) ۰/۲

۷۳- با استفاده از سیمی به طول معین، پیچهٔ مسطحی به شعاع $4cm$ می‌سازیم و از آن جریان I را عبور می‌دهیم، به طوری‌که در مرکز این پیچه، میدان مغناطیسی ۲۷ گاوسی ایجاد شود. اگر با همان سیم، پیچهٔ مسطح دیگری به شعاع $12cm$ بسازیم و از آن جریان $2I$ عبور دهیم، اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز آن چند گاوس می‌شود؟

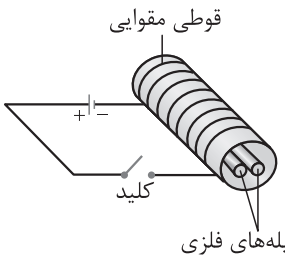
۱) ۱۲
۲) ۹
۳) ۶
۴) ۳

۷۴- سه حلقه که شعاع هر یک $15cm$ و جریان گذرنده از آن‌ها $I_1 = 2I_2 = 2I_3 = 0/5A$ است، مطابق شکل قرار دارند. سطح هر حلقه بر دو حلقهٔ دیگر عمود است. بزرگی میدان مغناطیسی در نقطهٔ O (مرکز حلقه‌ها) چند میکروتسلا است؟ ($\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$)



۱) $\sqrt{3}$
۲) $\sqrt{5}$
۳) ۲
۴) $\sqrt{6}$

۷۵- دو میلهٔ فلزی بلند مطابق شکل زیر درون سیم‌لوله‌ای که دور یک قوطی مقوایی پیچیده شده است، قرار دارند. با بستن کلید و عبور جریان از سیم‌لوله، مشاهده می‌شود که دو میله از یکدیگر دور می‌شوند. وقتی کلید باز و جریان در مدار قطع می‌شود، میله‌ها به محل اولیه بازمی‌گردند. میله‌های فلزی از نظر مغناطیسی در کدام دسته قرار می‌گیرند؟



۱) دیامغناطیس
۲) پارامغناطیس
۳) فرومغناطیس نرم
۴) فرومغناطیس سخت

محل انجام محاسبات

۷۶- اطلاعات موجود در کدام ردیف از جدول زیر، به طور کامل درست است؟

ردیف	نوع جامد	فرمول شیمیایی	ذرات سازنده	رسانایی الکتریکی
۱	فلزی	Fe	کاتیون و الکترون آزاد	در حالت جامد، مذاب و محلول رسانایی دارد.
۲	یونی	K_2CO_3	کاتیون و آنیون	در حالت مذاب و محلول رسانایی دارد.
۳	کووالانسی	$C(s,$ گرافیت$)$	اتم	رسانایی ندارد.
۴	کووالانسی	S_8	مولکول	رسانایی ندارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۷- درستی یا نادرستی چه تعداد از جملات زیر مشابه عبارت داده‌شده است؟

«براساس مدل دریای الکترونی می‌توان تنوع اعداد اکسایش در برخی فلزهای واسطه را توجیه کرد.»

- **علت چکش‌خواری فلزها، جابه‌جایی کاتیون‌های شناور در دریای الکترونی و عدم ایجاد دافعه بین آن‌ها است.**
- **رنگدانهٔ TiO_2 با جذب کامل پرتوهای مرئی، رنگ سفید ایجاد می‌کند.**
- **الکترون‌های درونی فلزها با حرکت آزادانه در دریای الکترونی، باعث رسانایی الکتریکی می‌شوند.**
- **دورهٔ برنز و آهن به ترتیب بعد از دوران سنگی، باعث دگرگونی جوامع شد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۸- در واکنش موازنه‌نشدهٔ $V^{n+}(aq) + Zn(s) \rightarrow V^{m+}(aq) + Zn^{2+}(aq)$، اگر ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار وانادیم، با ۱/۳ گرم فلز روی واکنش دهد، چه تعداد از موارد زیر می‌تواند درست باشد؟

- **اختلاف n و m، برابر ۲ است.**
- **رنگ محلول می‌تواند از آبی به بنفش تغییر کند.**
- **اگر محلول پایانی سبزرنگ باشد، عدد اکسایش VO_2^+ با n، برابر است.**
- **محلول پایانی می‌تواند آبی‌رنگ باشد.**
- **V^{m+} می‌تواند آرایش گاز نجیب داشته باشد.**

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۹- کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ فلزی که در دوره و گروه چهارم جدول تناوبی است، درست است؟

الف) نسبت به فولاد، مقاومت گرمایی بالاتر و چگالی کم‌تری دارد.

ب) برای تهیهٔ آن از $TiCl_4$، می‌توان از فلز منیزیم در حضور گاز اکسیژن یا نیتروژن استفاده کرد.

پ) آلیاژ آن با فلزی که مجموع اعداد کوانتومی الکترون‌های لایهٔ ظرفیت آن برابر ۴۸ است، یک آلیاژ هوشمند محسوب می‌شود.

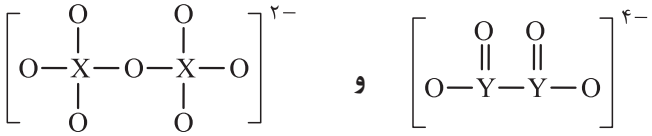
ت) سازه‌های فلزی در ارتودنسی، نمونه‌ای از کاربرد این فلز به صورت ترکیب یونی است.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ

۳) ب ـ پ ۴) ب ـ ت

محل انجام محاسبات

۸۰- اگر عدد اکسایش اتم‌های X و Y در ساختارهای زیر، بیشینه باشد، در کدام گزینه عدد اتمی مربوط به دو عنصر قابل پذیرش است؟ (همهٔ اتم‌ها از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی می‌کنند.)



و

۱) ۲۴ و ۱۶
۲) ۱۶ و ۵
۳) ۱۶ و ۱۷
۴) ۲۴ و ۷

۸۱- کدام مورد، نادرست است؟

۱) پس از انقلاب صنعتی اروپا، کودهای شیمیایی نیتروژن‌داری تولید شدند که جزء مولکول‌های کوچک‌اند.
۲) فناوری تولید فراورده‌هایی مانند پلی وینیل کلرید، صنعت بسته‌بندی را دگرگون ساخت.
۳) فراوردهٔ حاصل از فرایند هابر، نمونه‌ای از استفادهٔ درست و نادرست دانش و فناوری را نشان می‌دهد.
۴) در هوای آلوده، برخلاف هوای خشک و پاک، گازهایی مانند SO_2، NO_2، CO_2، O_3، CO، NO، مواد آلی فرّار و ذره‌های معلق وجود دارد.

۸۲- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) با طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان تشخیص داد که فرمول C_2H_6O می‌تواند مربوط به دو ماده با محتوای انرژی متفاوت باشد.
ب) ام.ار.آی (MRI) نمونه‌ای از کاربرد طیف‌سنجی جرمی در پزشکی است.
پ) گروه‌های عاملی کربوکسیل و هیدروکسیل، هر یک فقط باریکه‌ای از امواج فروسرخ را جذب می‌کنند.
ت) با استفاده از روش‌های طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان مقدار آلاینده‌هایی مثل CO و اکسیدهای نیتروژن را در هواکره کاهش داد یا حذف کرد.

۱) الف ـ ت
۲) ب ـ ت
۳) الف ـ پ
۴) ب ـ پ

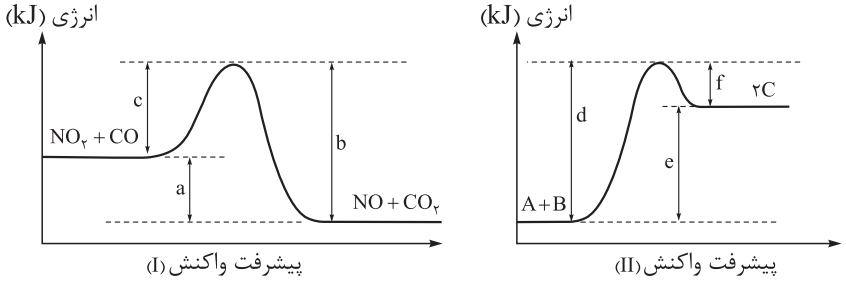
۸۳- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

- **در واکنش تعادلی $A \rightleftharpoons B$، اگر E_a (رفت) برابر با ۱۲۰ kJ و E_a (برگشت) برابر با ۸۰ kJ باشد، آنتالپی واکنش برابر با -40 kJ خواهد بود.**
- **افزایش دما، همواره باعث افزایش سرعت واکنش‌های گرماگیر و کاهش سرعت واکنش‌های گرماده می‌شود.**
- **کاتالیزگر، با افزایش سرعت واکنش، انرژی فعال‌سازی واکنش رفت و واکنش برگشت را به یک اندازه کاهش می‌دهد.**
- **در صورت استفاده از کاتالیزگر مناسب، می‌توان واکنش گرماگیر سوزاندن گاز متان را در دمای اتاق انجام داد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۸۴- با توجه به نمودارهای زیر، کدام مورد درست است؟



۱) تغییرات محتوای انرژی در واکنش (II) برابر با $f - d$ و هم‌علامت با تغییرات محتوای انرژی واکنش (I) در جهت برگشت است.

۲) به ازای مصرف ۲ مول آلایندهٔ قهوه‌ای‌رنگ در واکنش (I)، $2a\ kJ$ انرژی مصرف می‌شود.

۳) اگر مقدار a و c به ترتیب برابر ۲۲۶ و ۱۳۲ باشد و در صورت استفاده از کاتالیزگر انرژی فعال‌سازی واکنش رفت نصف شود، انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت حدود ۶۰ درصد کاهش می‌یابد.

۴) اگر در واکنش (II)، مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها برابر با $50\ kJ$ باشد، مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها $50 - e$ خواهد بود.

۸۵- چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن در دمای اتاق، درست است؟

- **این واکنش در حضور پودر اولین عنصری که لایهٔ سوم آن پر شده است، به طور سریع انجام می‌شود.**
- **در صورت ایجاد جرقه در مخلوط، سرعت واکنش انفجاری و انرژی فعال‌سازی آن کاهش می‌یابد.**
- **اگر مقدار انرژی فعال‌سازی آن در حضور کاتالیزگری مناسب برابر با $100\ kJ$ باشد، قدرمطلق آنتالپی واکنش آن به یقین بیشتر می‌شود.**
- **برای انجام این واکنش با سرعت انفجاری، می‌توان از عنصری که در محیط‌های اسیدی، اکسایش نمی‌یابد و در بخش‌های مختلف بدن هنگام جراحی به کار می‌رود، استفاده کرد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۶- کدام گزینه در مورد کاتالیزگرها، نادرست است؟

۱) می‌توانند با تغییر مسیر واکنش، انرژی فعال‌سازی را کاهش و سرعت واکنش را افزایش دهند.

۲) در واکنش، در نهایت مصرف نمی‌شوند، اما می‌توانند در طول واکنش دچار تغییرات فیزیکی یا شیمیایی موقت شوند.

۳) می‌توانند تعادل واکنش را به سمت تولید بیشتر محصولات جابه‌جا کنند.

۴) برای هر واکنش، اختصاصی عمل می‌کنند و کاتالیزگر یک واکنش ممکن است بر واکنش دیگر تأثیری نداشته باشد.

محل انجام محاسبات

۸۷- کدام گزینه در مورد مبدل‌های کاتالیستی خودرو، نادرست است؟

۱) مبدل‌های کاتالیستی با افزایش انرژی فعال‌سازی واکنش، سرعت تبدیل گازهای سمی به گازهای بی‌خطر را افزایش می‌دهند.

۲) فلزات رودیم، پالادیم و پلاتین به عنوان کاتالیزگر در مبدل‌های کاتالیستی خودروها استفاده می‌شوند.

۳) استفاده از سرامیک به شکل مش یا دانه‌های ریز، کارایی مبدل کاتالیستی را افزایش می‌دهد.

۴) مبدل‌های کاتالیستی چه در خودروهای بنزینی و چه در خودروهای دیزلی کاربرد دارند.

۸۸- کدام مورد دربارهٔ مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی و دیزلی درست است؟

۱) کاتالیزگرهای مورد استفاده در مبدل بنزینی پس از مدت معینی کارایی خود را از دست می‌دهند و باید آن‌ها را تمدید کرد.

۲) در واکنش حذف اکسیدهای نیتروژن‌دار در مبدل دیزلی، مجموع ضرایب استوکیومتری مولکول‌های نیتروژن‌دار برابر با شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آن است.

۳) درصد حجمی مولکول‌های ناقطبی خروجی از مبدل بنزینی، بیشتر از سایر مولکول‌های قطبی است.

۴) آمونیاک به عنوان کاتالیزگر در مبدل دیزلی، درون مخزنی جداگانه در قسمتی از این دستگاه تعبیه شده است.

۸۹- در واکنش به حالت تعادل زیر، در یک ظرف با حجم ثابت ۲لیتری، شمار مول‌های $PCl_3(g)$، $Cl_2(g)$ و $PCl_5(g)$ به ترتیب برابر ۴، ۲/۵ و ۳ است. به تقریب چند مول $Cl_2(g)$ باید از سامانه خارج کنیم تا شمار مول‌های $PCl_5(g)$ به ۲ برسد؟ (دما، ثابت در نظر گرفته شود.)

$$PCl_3(g) + Cl_2(g) \rightleftharpoons PCl_5(g)$$

۱) ۲/۱۷ ۲) ۰/۸۳ ۳) ۱/۸۱ ۴) ۲

۹۰- در یک ظرف در بستهٔ ۳۰لیتری، مقدار معینی سدیم هیدروژن کربنات را گرما می‌دهیم تا تعادل زیر برقرار شود. جرم $H_2O(g)$ در حالت تعادل کدام است و با کاهش فشار، مقدار $Na_2CO_3(s)$ چه تغییری می‌کند؟ $(H = 1, O = 16 : g.mol^{-1})$

$$2NaHCO_3(s) \rightleftharpoons Na_2CO_3(s) + CO_2(g) + H_2O(g) \quad , \quad K = 0/01$$

۱) ۵۴ ـ ثابت است. ۲) ۹۰ ـ ثابت است.

۳) ۵۴ ـ افزایش می‌یابد. ۴) ۹۰ ـ افزایش می‌یابد.

۹۱- کدام مورد، مثالی از اصل لوشاتلیه در زندگی روزمره یا صنعت نیست؟

۱) افزایش فشار در سیستم گردش خون باعث تنگ‌شدن رگ‌های خونی می‌شود تا فشار خون به حالت عادی برگردد.

۲) افزایش دما در بدن باعث عرق‌کردن می‌شود تا با تبخیر عرق، دمای بدن کاهش یابد.

۳) افزایش غلظت CO_2 در خون باعث افزایش تعداد تنفس می‌شود تا CO_2 اضافی از بدن خارج شود.

۴) در فرایند هابر برای تولید آمونیاک، از فشار بالا استفاده می‌شود تا تعادل واکنش به سمت تولید آمونیاک جابه‌جا شود.

محل انجام محاسبات

۹۲- چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد اثر تغییر غلظت، فشار و دما بر تعادل واکنش درست است؟

- **در واکنش تعادلی $3H_2(g) + N_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$، افزایش فشار باعث افزایش غلظت آمونیاک می‌شود.**
- **در واکنش تعادلی $2NO_2 \rightleftharpoons N_2O_4$، کاهش حجم باعث افزایش غلظت N_2O_4 می‌شود.**
- **در واکنش تعادلی $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2$، افزایش دما باعث افزایش غلظت NO_2 می‌شود.**
- **در واکنش تعادلی $2NO(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$، افزایش غلظت O_2 باعث افزایش غلظت NO می‌شود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۳- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

- **در فرایند هابر، افزایش دما باعث کاهش بازده تولید آمونیاک می‌شود.**
- **استفاده از کاتالیزگر در فرایند هابر، بازده تولید آمونیاک را افزایش می‌دهد.**
- **در فرایند هابر، برای جداکردن آمونیاک از مخلوط واکنش، از تفاوت نقطهٔ جوش آمونیاک با نیتروژن و هیدروژن استفاده می‌شود.**
- **در فرایند هابر، افزایش فشار باعث جابه‌جایی تعادل به سمت تولید آمونیاک می‌شود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۴- کدام گزینه درست است؟

۱) در تولید پوشاک مرحله‌ای که نخ به پارچهٔ خام تبدیل می‌شود، ریسندگی نام دارد.

۲) پیشرفت صنعت نساجی وابسته به تأمین الیاف از منابع طبیعی است.

۳) در ۲۰ سال اخیر میزان تولید پلی‌استر در جهان، دو برابر شده است.

۴) برخی از درشت‌مولکول‌ها مانند نایلون و تفلون، ساختگی هستند و در طبیعت یافت نمی‌شوند.

۹۵- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **از پنبه در تور ماهیگیری استفاده می‌شود و نیمی از لباس‌های تولیدشده در جهان از آن تهیه می‌شود.**
- **نقطهٔ جوش آب به دلیل پیوند هیدروژنی از درشت‌مولکول انسولین، بیشتر است.**
- **فرمول شیمیایی واحد تکرارشونده در سلولز، $C_6H_{12}O_6$ است.**
- **مونومر سازندهٔ نشاسته، یک ترکیب آروماتیک محسوب نمی‌شود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۶- نحوهٔ اتصال مولکول‌های گلوکز در تشکیل مولکول‌های نشاسته و سلولز اثر .....، به طوری که مولکول‌های نشاسته از اتصال ..... مولکول‌های گلوکز و مولکول‌های سلولز از اتصال ..... مولکول‌های گلوکز تشکیل می‌شود.

۱) دارد ـ زنجیری ـ مارپیچ
۲) دارد ـ مارپیچ ـ زنجیری
۳) ندارد ـ زنجیری ـ زنجیری
۴) ندارد ـ مارپیچ ـ مارپیچ

محل انجام محاسبات

۹۷- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **نفتالن برخلاف روغن زیتون، درشت‌مولکول نیست.**
- **سیکلوآلکان‌ها نمی‌توانند در واکنش پلیمری‌شدن شرکت کنند.**
- **درشت‌مولکول‌های ساختگی، می‌توانند از واکنش پلیمری‌شدن تهیه شوند.**
- **در فرایند تهیهٔ پلی‌اتن، کیفیت پلی‌اتن به نسبت مولی کاتالیزگرهای استفاده‌شده وابسته نیست و کاتالیزگرها صرفاً موجب سرعت‌بخشیدن به واکنش می‌شوند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۸- چه تعداد از موارد زیر در مورد پلیمری‌شدن ترکیباتی مانند اتن، درست است؟

- **در این نوع پلیمری‌شدن، مونومرها با یکدیگر واکنش‌داده و پلیمر را بدون حذف هیچ مولکول کوچکی تشکیل می‌دهند.**
- **هر ترکیب الی که در ساختار خود پیوند دوگانهٔ کربن - کربن در زنجیرهٔ کربنی داشته باشد، می‌تواند در این نوع واکنش پلیمری‌شدن شرکت کند.**
- **به طور معمول، این پلیمرها جرم مولی مشخصی ندارند و جرم مولی آن‌ها به عواملی مثل نسبت کاتالیزگرها بستگی دارد.**
- **در این نوع پلیمری‌شدن، واکنش با شکسته‌شدن پیوند دوگانه در مونومرها و تشکیل پیوند جدید بین آن‌ها آغاز می‌شود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۹- با توجه به پلی‌استیرن که در صنعت بسته‌بندی برای تولید ظروف یک‌بارمصرف و فوم استفاده می‌شود، کدام موارد، نادرست است؟ $(H = ۱, C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$

الف) مونومر سازندهٔ این پلیمر، یک هیدروکربن آروماتیک با ۸ اتم کربن است.

ب) جرم مولی مونومر سازندهٔ آن ۱۰۴ گرم بر مول است.

پ) در فرمول ساختاری مونومر سازندهٔ آن، به ازای هر ۳ اتم کربن، ۴ اتم هیدروژن وجود دارد.

ت) واکنش پلیمری‌شدن آن، با شکستن پیوند دوگانه در حلقهٔ بنزن همراه است.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ت

۱۰۰- کدام گزینه در مورد تفلون، نادرست است؟

۱) مونومر سازندهٔ آن در مجموع ۱۸ جفت‌الکترون پیوندی و ناپیوندی دارد.

۲) مونومر سازندهٔ آن برخلاف مونومر سازندهٔ پلی‌اتن، در دمای اتاق به حالت مایع است.

۳) این پلیمر در حلال‌های آلی، حل نمی‌شود.

۴) این ماده در ساختار خود پیوند دوگانه ندارد و سیرشده است.

۱۰۱- اگر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در یک مولکول پلی‌تترافلوئورو اتن برابر با ۴۲۰۰ باشد، جرم مولی این مولکول چند گرم بر مول است؟ $(F = ۱۹ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$

۱) ۳۵۰۰۰ ۲) ۳۶۴۰۰ ۳) ۸۴۰۰۰ ۴) ۸۷۳۶۰

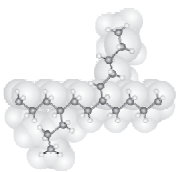
محل انجام محاسبات

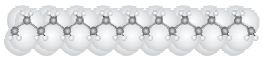
۱۰۲- چند مورد از مطالب زیر در رابطه با پلی‌اتن، نادرست است؟

- **نوعی پلی‌اتن که هر اتم کربن آن حداکثر می‌تواند به دو اتم کربن دیگر متصل شود، کدر است.**
- **استحکام و انعطاف‌پذیری پلی‌اتن سنگین، بیشتر از پلی‌اتن سبک است.**
- **در واکنش پلیمری‌شدن پلی‌اتن سبک برخلاف پلی‌اتن سنگین، تعداد مولکول‌ها افزایش می‌یابد.**
- **خواص فیزیکی و ساختار شیمیایی پلی‌اتن شفاف و کدر با یکدیگر متفاوت است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۳- شکل‌های زیر ساختار دو نوع پلی‌اتن متفاوت را نشان می‌دهد. با توجه به آن، چه تعداد از ویژگی‌های زیر دربارهٔ ساختار A نسبت به B، بیشتر است؟


ساختار A

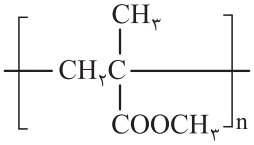

ساختار B

- **چگالی**
- **شفافیت**
- **انعطاف‌پذیری**
- **استحکام**
- **نقطهٔ ذوب**
- **نیروی بین مولکولی**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۴- با بررسی دو پلیمر داده‌شده:

الف) پلی‌متیل متاآکریلات (با ساختار روبه‌رو)



ب) پلیمر سازندهٔ سرنگ

اگر نسبت شمار واحدهای تکرارشوندهٔ پلیمر (الف) به شمار واحدهای تکرارشوندهٔ پلیمر (ب)، برابر ۵ باشد، نسبت جرم مولی پلیمر (الف) به جرم مولی پلیمر (ب) به تقریب کدام است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) ۱۱/۹۰ ۲) ۱۰/۶۶
۳) ۹/۴۳ ۴) ۷/۳۹

۱۰۵- مولکول‌های پلی‌اتن بدون شاخه، چگالی ..... از مولکول‌های پلی‌اتن شاخه‌دار دارند و از این‌که نیروهای بین مولکولی در پلی‌اتن بدون شاخه ..... از پلی‌اتن شاخه‌دار است، نتیجه می‌گیریم که یکی از عوامل مؤثر بر روی قدرت نیروهای بین مولکولی ..... است.

۱) کم‌تری ـ قوی‌تر ـ جرم مولی ۲) کم‌تری ـ ضعیف‌تر ـ سطح تماس
۳) بیشتری ـ ضعیف‌تر ـ جرم مولی ۴) بیشتری ـ قوی‌تر ـ سطح تماس

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله دوازدهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۲۶/بهمن/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان
هندسه	محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ کیوان صارمی ـ حمید گلزاری صبا مهدوی ـ محسن میراسلامی ـ حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
فیزیک	امین امینی ـ یاشار انگوتی ـ علیرضا جباری ـ مجید ساکی ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی ـ علیرضا عبداللهی حسین عبدوی‌نژاد ـ حمید فدائی‌فرد ـ احسان محمدی ـ فرزاد نامی ـ حامد نبی منصور ـ محمدرضا یاری
شیمی	محمدعلی توسلی‌فر ـ عباس سرمایه ـ سروش عبادی ـ وحید فارسیان ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ محمدرضا طاهری‌نژاد

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	علیرضا کاظمی‌بقا	محمدسجاد نقیه سجاد داوطلب	عادل حسینی سعید خان‌بابائی منصور زرکش اصفهانی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی فرزانه خاکپاش منصور زرکش اصفهانی
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	فرزانه خاکپاش منصور زرکش اصفهانی علیرضا کاظمی‌بقا
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری محمدجواد سورچی حسین عبدوی‌نژاد مریم گلی حسن‌لو	امین امینی مریم گلی حسن‌لو علیرضا گونه	محمود حسینی مسعود خندانی مدیا عیدی ماهان فنی‌فر احسان محمدی علی محمدی امیر محمودی انزابی محمدمهدی یوسفی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	کتابون جوهری هومن زندی وحید فارسیان	محمد مرادی وحید فارسیان	رامین آزادی متین قنبری آرمین عظیمی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ راضیه سادات خلدی‌نسب زهرا صفری ـ فاطمه علی اکبری ـ محیا غنی‌فرد زهرا فرهادی‌مهر ـ محمد محمودی ـ مریم مسلمی‌زاده نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ مریم حسین‌زاده ـ زهرا داراخانی سپیده سخایی ـ الهام سهرابی ـ طاهره صادق نژاد مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته ـ مهدیه گل‌پور دریا لطفی ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com

۱ اگر $f(x)=۶x+\frac{a}{x}$ و داشته باشیم که $f'(۱)=f''(۱)$، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲

۳) ۴ ۴) -۴

مشاوره قواعد مشتق را به خوبی بلد باشید چراکه در هر کنکور یک سؤال مستقیم از آن می‌آید.

Hint ابتدا $f'(x)$ و از روی آن $f''(x)$ را به دست آورید و سپس $x=۱$ را در آن جای‌گذاری کنید و برابر هم قرار دهید.

درس Box

مشتق بعضی توابع

مشتق	تابع
$y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$	$y=\frac{f(x)}{g(x)}$
$y'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$	$y=f(x)g(x)$
$y'=nf^{n-۱}(x)f'(x)$	$y=f^n(x)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا $f'(۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=۶x+\frac{a}{x} \Rightarrow f'(x)=۶+(\frac{-a}{x^۲}) \Rightarrow f'(x)=۶-\frac{a}{x^۲} \Rightarrow f'(۱)=۶-\frac{a}{(۱)^۲} \Rightarrow f'(۱)=۶-a$$

گام دوم: در گام اول $f'(x)$ به دست آمد، حال از روی آن $f''(x)$ را به دست می‌آوریم و $x=۱$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f'(x)=۶-\frac{a}{x^۲} \Rightarrow f''(x)=۰-\frac{-۲ax}{x^۴} \Rightarrow f''(x)=\frac{۲a}{x^۳}$$

$$\Rightarrow f''(۱)=\frac{۲a}{(۱)^۳} \Rightarrow f''(۱)=۲a$$

گام سوم: به گفتهٔ سؤال $f'(۱)=f''(۱)$؛ پس از گام‌های اول و دوم داریم:

$$f'(۱)=f''(۱) \Rightarrow ۶-a=۲a \Rightarrow ۳a=۶ \Rightarrow a=۲$$

۲ ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[n]{x}-۱)$ است، اگر $f''(۱)=\frac{۱}{۲۰}$ باشد، مقدار طبیعی n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

مشاوره حتماً در سؤالات مشتق، نیم‌نگاهی به عامل صفرشونده داشته باشید چراکه سرعتتان را بسیار بالا می‌برد.

Hint ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست آورید و سپس به کمک مشتق عامل صفرشونده، $f''(۱)$ را تشکیل دهید.

درس Box

مشتق توابع رادیکالی

تابع	$y=\sqrt{u}$	$y=\sqrt[۳]{u}$
مشتق	$y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$y'=\frac{u'}{۳\sqrt[۳]{u^۲}}$

مشتق عامل صفرشونده

اگر ضابطهٔ تابع f به صورت زیر باشد و $g(a)=۰$، آن‌گاه $f'(a)$ برابر می‌شود با:

$$f(x)=g(x)h(x) \Rightarrow f'(a)=g'(a)h(a)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا به کمک مشتق ضرب، $f'(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x)=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[n]{x}-۱) \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt[n]{x}-۱)+\frac{۱}{n\sqrt[n]{x^{n-۱}}}(\sqrt{x}-۱)$$

گام دوم: $f'(x)$ را به صورت جمع دو تابع $g(x)$ و $h(x)$ در نظر می‌گیریم؛ پس $f''(x)$ عبارت است از:

$$f'(x)=\underbrace{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt[n]{x}-۱)}_{g(x)}+\underbrace{\frac{۱}{n\sqrt[n]{x^{n-۱}}}(\sqrt{x}-۱)}_{h(x)} \Rightarrow f''(x)=g'(x)+h'(x)$$

$$\xrightarrow{x=۱} f''(۱)=g'(۱)+h'(۱) \quad (*)$$

گام سوم: $x=۱$ در هر دو تابع h و g عامل صفرشونده است؛ پس به کمک مشتق، عامل صفرشوندهٔ $h'(x)$ و $g'(x)$ را می‌یابیم:

$$g(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt[n]{x}-۱) \xrightarrow{(\sqrt[n]{x}-۱)'=\frac{۱}{n\sqrt[n]{x^{n-۱}}}} g'(۱)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{n} \Rightarrow g'(۱)=\frac{۱}{۲n}$$

$$h(x)=\frac{۱}{n\sqrt[n]{x^{n-۱}}}(\sqrt{x}-۱) \xrightarrow{(\sqrt{x}-۱)'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}} h'(۱)=\frac{۱}{n}\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow h'(۱)=\frac{۱}{۲n}$$

گام چهارم: به گفتهٔ سؤال $f''(۱)=\frac{۱}{۲۰}$، حال اطلاعات به‌دست‌آمده در گام سوم را در رابطهٔ $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f''(۱)=g'(۱)+h'(۱) \Rightarrow \frac{۱}{۲۰}=\frac{۱}{۲n}+\frac{۱}{۲n} \Rightarrow \frac{۱}{۲۰}=\frac{۱}{n} \Rightarrow n=۲۰$$

نکته اگر u و v دو تابع باشند که $u(a)=v(a)=۰$ باشد، داریم:

$$(u\times v)''(a)=۲u'(a)v'(a)$$

۳ در تابع $f(x)=\sin^{۳}(\frac{\pi}{\sqrt{x+۸}})$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{-\pi}{۱۶}$ ۲) $\frac{-\pi}{۴۳۲}$ ۳) $\frac{-\pi}{۹۶}$ ۴) $\frac{-\pi}{۴۸}$

درس Box

مشتق توابع مثلثاتی

تابع	مشتق
$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$
$y=\tan u$	$y'=u'(۱+\tan^{۲} u)$
$y=\cot u$	$y'=-u'(۱+\cot^{۲} u)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ضابطهٔ مشتق f را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۳(\sin^{۲}(\frac{\pi}{\sqrt{x+۸}}))(\sin\frac{\pi}{\sqrt{x+۸}})'$$

$$\Rightarrow f'(x)=۳\sin^{۲}(\frac{\pi}{\sqrt{x+۸}})\cos(\frac{\pi}{\sqrt{x+۸}})\frac{۰-\frac{\pi}{۲\sqrt{x+۸}}}{x+۸}$$

$$\Rightarrow f'(x)=۳\sin^{۲}(\frac{\pi}{\sqrt{x+۸}})\cos(\frac{\pi}{\sqrt{x+۸}})\frac{-\pi}{۲(x+۸)\sqrt{x+۸}}$$

گام دوم: حال $x=۱$ را در $f'(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f'(۱)=۳\sin^{۲}(\frac{\pi}{\sqrt{(۱)+۸}})\cos(\frac{\pi}{\sqrt{(۱)+۸}})(\frac{-\pi}{۲\sqrt{(۱)+۸}((۱)+۸)})$$

$$\Rightarrow f'(۱)=۳\sin^{۲}(\frac{\pi}{۳})\cos(\frac{\pi}{۳})(\frac{-\pi}{۲(۳)(۹)})$$

$$\xrightarrow[\cos(\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}]{\sin(\frac{\pi}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}} f'(۱)=۳(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}(\frac{۱}{۲})(\frac{-\pi}{۵۴})=۳\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times(\frac{-\pi}{۵۴})=\frac{۹}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times(\frac{-\pi}{۵۴_{۶}})$$

$$\Rightarrow f'(۱)=\frac{-\pi}{۴۸}$$

۴ اگر $f(x)=۴\sqrt{x}+۳g^{۳}(x)$ و $f'(۱)=g(۱)=۲$، مقدار $۱+f''(۱)$ چند برابر $g''(۱)$ است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

Hint ابتدا $f'(x)$ را به دست آورید و $x=۱$ را در آن جای‌گذاری کنید، با توجه به نتیجه‌ای که از این عملیات می‌گیرید، ابتدا $f''(x)$ و سپس $g''(۲)$ را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=(۴\sqrt{x})'+(۳g^{۳}(x))' \Rightarrow f'(x)=\frac{۴}{۲\sqrt{x}}+۳(۳)g^{۲}(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{\sqrt{x}}+۹g^{۲}(x)g'(x)$$

گام دوم: حال $x=۱$ را در $f'(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم و با توجه به این‌که $f'(۱)=g(۱)=۲$ خواهیم داشت:

$$f'(x)=\frac{۲}{\sqrt{x}}+۹g^{۲}(x)g'(x) \xrightarrow{x=۱} f'(۱)=\frac{۲}{\sqrt{۱}}+۹g^{۲}(۱)g'(۱)$$

$$\xrightarrow[g(۱)=۲]{f'(۱)=۲} ۲=۲+۹(۲)^{۲}g'(۱) \Rightarrow ۳۶g'(۱)=۰ \Rightarrow g'(۱)=۰$$

گام سوم: $f''(۱)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\underbrace{\frac{۲}{\sqrt{x}}}_{p(x)}+\underbrace{۹g^{۲}(x)g'(x)}_{q(x)}$$

$$p'(x)=\frac{-۲}{۲\sqrt{x}}=\frac{-۱}{x} \Rightarrow p'(۱)=-۱$$

$q(x)$ در $g'(۱)$: $q'(۱)=۹g^{۲}(۱)g''(۱)=۹(۴)g''(۱) \Rightarrow q'(۱)=۳۶g''(۱)$ عامل صفرشونده است.

پس $f''(۱)$ برابر می‌شود با:

$$f''(۱)=p'(۱)+q'(۱) \Rightarrow f''(۱)=-۱+۳۶g''(۱) \Rightarrow f''(۱)+۱=۳۶g''(۱)$$

گام چهارم: پس خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$f''(۱)+۱=۳۶g''(۱) \Rightarrow \frac{۱+f''(۱)}{g''(۱)}=۳۶$$

۵ f یک تابع چندجمله‌ای درجه‌دوم است، اگر $f''(x) < 0$ و $(f'of)(x) = 8x^2 - 12x - 3$، آن‌گاه مقدار $(fof')(2)$ کدام است؟

۱) $-63/5$
۲) $-66/5$
۳) $-53/5$
۴) $-51/5$

مشاوره مشتق ترکیب توابع از مباحث مورد علاقهٔ طراحان کنکور است.

Hint فرم کلی f را به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر بگیرید و $f'(x)$ را به دست آورید، سپس $f(x)$ و $f'(x)$ را در $f'of(x)$ جای‌گذاری کنید و سپس به کمک $(f'of)(x) = 8x^2 - 12x - 3$، مقادیر a و b و c را بیابید.

درس Box

مشتق ترکیب توابع

$$(fog(x))' = g'(x)f'(g(x))$$
$$(gof(x))' = f'(x)g'(f(x))$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون f درجه‌دوم است، فرم کلی آن را به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم و $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

گام دوم: حال با توجه به این‌که $(f'of)(x) = f'(f(x))$، $f(x) = ax^2 + bx + c$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\underbrace{(f'of)(x)}_{f'(f(x))} = 8x^2 - 12x - 3 \Rightarrow 2a(ax^2 + bx + c) + b = 8x^2 - 12x - 3$$

گام سوم: حال جملات مشابه در تساوی دوم را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$2a^2x^2 + 2abx + 2ac + b = 8x^2 - 12x - 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2 & (\text{چون } f''(x) = 2a \text{ و طبق صورت سؤال } f''(x) < 0 \text{؛ پس } a = -2 \text{ قابل قبول است.}) \\ 2ab = -12 \xrightarrow{a=-2} 2(-2)b = -12 \Rightarrow b = 3 \\ 2ac + b = -3 \xrightarrow[b=3]{a=-2} -4c + 3 = -3 \Rightarrow 4c = 6 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

پس $f(x) = -2x^2 + 3x + \frac{3}{2}$ و $f'(x) = -4x + 3$.

گام چهارم: حال که ضابطهٔ f و f' را داریم، $(fof')(2)$ برابر می‌شود با:

$$(fof')(2) = f(f'(2)) \xrightarrow{f'(2) = -4(2)+3 = -5} fof'(2) = f(-5) = -2(-5)^2 + 3(-5) + \frac{3}{2}$$

$$= -50 - 15 + \frac{3}{2} \Rightarrow (fof')(2) = -63/5$$

۶ قرینهٔ طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲+mx-۴$، ۳ برابر دیگری است، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) -۹

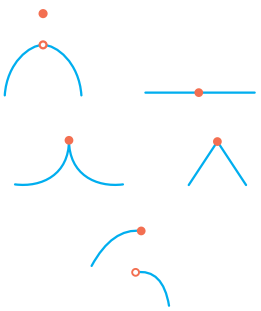
Hint طول نقاط اکسترمم نسبی، ریشه‌های f' هستند. یکی از ریشه‌ها را α و دیگری را -۳α در نظر بگیرید و با توجه به مجموع و ضرب ریشه‌ها، m را به دست آورید.

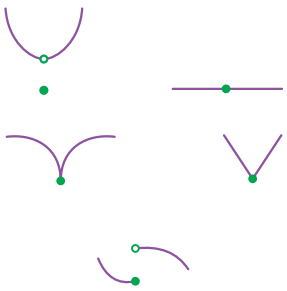
درس Box

اکسترمم نسبی

به نقاط ماکزیمم و یا مینیمم نسبی یک تابع، اکسترمم نسبی می‌گویند.

Max نسبی	Min نسبی
نسبت به همسایگی‌های خود مقدار بیشتری دارد. مثال:	نسبت به همسایگی‌های خود مقدار کم‌تری دارد. مثال:





نکته مشتق یک تابع در نقاط اکسترمم نسبی یا برابر صفر است یا وجود ندارد، به عبارت دیگر اگر $x=c$ طول یک نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c)=۰$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مشتق تابع داده‌شده یک تابع درجه‌دوم است؛ پس $f'(x)$ موجود است و دو ریشه دارد که همان دو ریشه، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند. حال $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^۳+۳x^۲+mx-۴ \Rightarrow f'(x)=۳x^۲+۶x+m$$

گام دوم: گفتیم که ریشه‌های معادلهٔ بالا همان طول نقاط اکسترمم نسبی هستند، با توجه به صورت سؤال، یکی از آن‌ها را α و دیگری را -۳α در نظر می‌گیریم:

مجموع ریشه‌ها: $S=-۳\alpha+\alpha=-۲\alpha \xrightarrow{S=\frac{-b}{a}} -۲\alpha=\frac{-۶}{۳} \Rightarrow \alpha=۱$

پس ریشه‌ها $\alpha=۱$ و $-۳\alpha=-۳$ هستند، حال با توجه به حاصل‌ضرب ریشه‌ها، m را پیدا می‌کنیم:

ضرب ریشه‌ها $P=(-۳)(۱) \xrightarrow{P=\frac{c}{a}} \frac{m}{۳}=-۳ \Rightarrow m=-۹$

گام سوم: پس خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$f(x)=x^۳+۳x^۲-۹x-۴ \Rightarrow f(-۱)=(-۱)^۳+۳(-۱)^۲-۹(-۱)-۴=-۱+۳+۹-۴ \Rightarrow f(-۱)=۷$$

۷ اگر $g(x)=x+۲\sqrt{۵-x^۲}$ و $f(x)=x^۳+x+k$، به ازای کدام مقدار k، بیشترین مقدار تابع $y=(fog)(x)$ برابر ۲۵ است؟

۱) -۱۱۰ ۲) -۱۲۵

۳) -۱۰۵ ۴) -۱۲۰

مشاوره برای این‌که از پس سؤالات کاربرد مشتق به خوبی برآیید، باید مطالب مشتق را به خوبی بلد باشید.

Hint تابع fog را تشکیل دهید و مشتق آن را برابر صفر قرار دهید.

درس Box

نقاط بحرانی

اگر $f'(c)=۰$ یا مشتق f در $x=c\in D_f$ وجود نداشته باشد، آن‌گاه $x=c$ نقطهٔ بحرانی تابع f است، همچنین نقاط ابتدا و انتهای دامنه نیز جزء نقاط بحرانی به حساب می‌آیند.

ماکزیمم و مینیمم مطلق

max مطلق، بیشترین مقدار تابع و min مطلق، کم‌ترین مقدار تابع است که این مقادیر در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتد. برای به دست آوردن max و min مطلق، نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم و مقادیر تابع در آن‌ها را به همراه مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه محاسبه می‌کنیم، هر کدام که از بقیه بزرگ‌تر باشد، max مطلق و هر کدام که از بقیه کوچک‌تر باشد، min مطلق است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به مشتق تابع مرکب داریم $(fog(x))'=g'(x)f'(g(x))$، حال $g'(x)$ و $f'(g(x))$ را به صورت جداگانه به دست می‌آوریم:

$$g(x)=x+۲\sqrt{۵-x^۲}\ \Rightarrow\ g'(x)=۱+\cancel{۲}\left(\frac{-۲x}{\cancel{۲}\sqrt{۵-x^۲}}\right)\ \Rightarrow\ g'(x)=۱-\frac{۲x}{\sqrt{۵-x^۲}}$$

$$f(x)=x^۳+x+k\ \Rightarrow\ f'(x)=۳x^۲+۱\xrightarrow{\text{جای‌گذاری }g(x)}f'(g(x))=۳g^۲(x)+۱$$

گام دوم: حال $(fog)'(x)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم، تا طول نقطهٔ بحرانی به دست آید:

$$(fog(x))'=g'(x)f'(g(x))\ \Rightarrow\ (fog(x))'=\left(۱-\frac{۲x}{\sqrt{۵-x^۲}}\right)(۳g^۲(x)+۱)$$

$$\xrightarrow{(fog(x))'=۰}۰=\left(۱-\frac{۲x}{\sqrt{۵-x^۲}}\right)\underbrace{(۳g^۲(x)+۱)}_{\text{همواره مثبت}}\Rightarrow\ ۱-\frac{۲x}{\sqrt{۵-x^۲}}=۰$$

$$\Rightarrow\ \frac{۲x}{\sqrt{۵-x^۲}}=۱\ \Rightarrow\ \underbrace{۲x=\sqrt{۵-x^۲}}_{(*)}\xrightarrow{\text{توان }۲}۴x^۲=۵-x^۲$$

$$\Rightarrow\ ۵x^۲=۵\ \Rightarrow x^۲=۱\ \Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=-۱\ \ (\text{در رابطهٔ }(*)\text{ صدق نمی‌کند})\end{cases}$$

گام سوم: حال دامنهٔ fog را نیز به دست می‌آوریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}\ \Rightarrow\ D_{fog}=\{x\in[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]\,|\,g(x)\in\mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]$$

گام چهارم: پس نقاط بحرانی تابع، $x=۱$ و سر و ته دامنه یعنی $x=\sqrt{۵}$ و $x=-\sqrt{۵}$ هستند. می‌دانیم که بیشترین مقدار تابع در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتد؛ پس با توجه به گزینه‌ها k صحیح است که در این دو مورد k صحیح نمی‌شود.

$$\left.\begin{aligned}(fog)(-\sqrt{۵})=۲۵\Rightarrow\ f(-\sqrt{۵})=۲۵\Rightarrow(-\sqrt{۵})^۳-\sqrt{۵}+k=۲۵\\ fog(\sqrt{۵})=۲۵\Rightarrow\ f(\sqrt{۵})=۲۵\Rightarrow(\sqrt{۵})^۳+\sqrt{۵}+k=۲۵\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\ (fog)(۱)=۲۵\ \Rightarrow\ f(g(۱))=۲۵\xrightarrow{g(۱)=۱+۲\sqrt{۵-۱}=۵}f(۵)=۲۵$$

$$\Rightarrow ۵^۳+(۵)+k=۲۵\ \Rightarrow ۱۳۰+k=۲۵\ \Rightarrow\ k=-۱۰۵$$

تیزبازی برای این‌که ماکزیمم تابع برابر ۲۵ شود، می‌توانید نقاط سر و ته دامنه را در تابع قرار ندهید و زودتر به پاسخ برسید چراکه با توجه به گزینه‌ها k صحیح است ولی با قراردادن سر و ته دامنه در تابع، مقدار k صحیح نمی‌شود.

۸ اگر مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^۲|۲x+a|$ برابر $\{۰,۳,\alpha\}$ باشد، مقادیر α کدام می‌تواند باشد؟

۱) $۲,۴/۵$ ۲) $-۲,-۴/۵$ ۳) $-۹,-۶$ ۴) $۹,۶$

Hint

تابع را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید و یک بار $x=۳$ را نقطهٔ مشتق‌ناپذیر و یک بار آن را نقطه‌ای در نظر بگیرید که مشتق در آن صفر می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و مشتق آن را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲(۲x+a) & x\geq \frac{-a}{۲} \\ -x^۲(۲x+a) & x<\frac{-a}{۲} \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۶x^۲+۲ax & x>\frac{-a}{۲} \\ -۶x^۲-۲ax & x<\frac{-a}{۲} \end{cases}$$

گام دوم: واضح است که مشتق در $x=۰$ وجود دارد و برابر صفر است، برای $x=۳$ دو حالت خواهیم داشت، یا مشتق در آن صفر می‌شود یا مشتق تابع در $x=۳$ وجود نخواهد داشت؛ یعنی ریشهٔ داخل قدر مطلق که $x=\frac{-a}{۲}$ است (نقطهٔ مشتق‌ناپذیری)، همان $x=۳$ خواهد بود. در گام‌های بعدی هر دو حالت را لحاظ می‌کنیم.

گام سوم: حالت اول را در نظر می‌گیریم، یعنی $x=۳$ ریشهٔ مشتق باشد (فرقی ندارد که $x=۳$ را در کدام ضابطه قرار دهیم):

$$f'(x)=۶x^۲+۲ax \xrightarrow[f'(۳)=۰]{x=۳} ۶(۳)^۲+۲a(۳)=۰ \Rightarrow ۵۴+۶a=۰ \Rightarrow ۵۴=-۶a \Rightarrow a=-۹$$

پس در این‌جا نقطهٔ بحرانی دیگر که همان α است، $x=-\frac{a}{۲}$ است و به ازای $a=-۹$ برابر می‌شود با:

$$\alpha=\frac{-a}{۲} \Rightarrow \alpha=۴/۵$$

گام چهارم: حالت دوم این بود که $\frac{-a}{۲}=۳$:

$$\frac{-a}{۲}=۳ \Rightarrow a=-۶$$

پس α که ریشهٔ مشتق است برابر می‌شود با (فرقی ندارد که کدام ضابطه را قرار دهیم):

$$f'(x)=۶x^۲+۲ax \xrightarrow{a=-۶} f'(x)=۶x^۲-۱۲x$$

$$\xrightarrow{f'(\alpha)=۰} ۶\alpha^۲-۱۲\alpha=۰ \Rightarrow ۶\alpha^{\cancel{۲}}=۱۲\cancel{\alpha} \Rightarrow \alpha=۲$$

پس با توجه به گام‌های سوم و چهارم، α می‌تواند ۲ یا ۴/۵ باشد.

۹ در تابع $f(x)=(-۱)^{[x]}\cos\frac{\pi x}{۲}$، کدام گزینه طول ماکزیمم مطلق تابع f است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۱
۴) ۹

مشاوره در مسائل کاربرد مشتق باید بتوانید نقاط اکسترمم مطلق و نسبی را از روی نمودارها تشخیص دهید.

Hint کافی است تابع را رسم کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به وجود براکت در ضابطهٔ f ابتدا بازه‌ها را یکی‌یکی تقسیم می‌کنیم و با توجه به آن‌ها ضابطه‌ها را بازنویسی می‌کنیم:

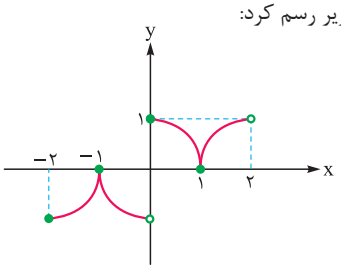
$$-۲\le x<-۱ \xrightarrow{[x]=-۲} f(x)=(-۱)^{-۲}\cos\frac{\pi x}{۲} \Rightarrow f(x)=\cos\frac{\pi x}{۲}$$

$$-۱\le x<۰ \xrightarrow{[x]=-۱} f(x)=(-۱)^{-۱}\cos\frac{\pi x}{۲} \Rightarrow f(x)=-\cos\frac{\pi x}{۲}$$

$$۰\le x<۱ \xrightarrow{[x]=۰} f(x)=(-۱)^{۰}\cos\frac{\pi x}{۲} \Rightarrow f(x)=\cos\frac{\pi x}{۲}$$

$$۱\le x<۲ \xrightarrow{[x]=۱} f(x)=(-۱)^{۱}\cos\frac{\pi x}{۲} \Rightarrow f(x)=-\cos\frac{\pi x}{۲}$$

گام دوم: با قراردادن نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ها در ضابطه‌ها می‌توان تابع را به صورت زیر رسم کرد:



گام سوم: از روی نمودار واضح است که دورهٔ تناوب تابع برابر $T=۴$ است، یعنی نمودار هر چهار واحد چهار واحد تکرار می‌شود، max مطلق در $x=۰$ اتفاق افتاده؛ پس در نقاط زیر تابع دارای max مطلق خواهد بود:

$$x=\underbrace{۰}_{+۴},\underbrace{x=۴}_{+۴},x=۸,\dots$$

$x=۸$ در گزینه‌ها موجود است و گزینهٔ (۲) پاسخ سؤال است.

۱۰ اگر در تابع $f(x)=\sqrt[۳]{ax^۲-۵x+a}$، طول یکی از نقاط بحرانی $x=۲$ باشد، مجموع طول نقاط بحرانی دیگر کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲
۲) $۶+۲\sqrt{۳}$
۳) $\frac{۱۵}{۴}$
۴) $\frac{۷}{۴}$

مشاوره امیدوارم محاسبات طولانی شما را در این سؤال از پای درنیاورد.

Hint $x=۲$ را یک بار نقطه‌ای در نظر بگیرید که f' در آن صفر می‌شود و یک بار آن را نقطه‌ای در نظر بگیرید که f' در آن موجود نیست.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt[۳]{ax^۲-۵x+a} \Rightarrow f'(x)=\frac{۲ax-۵}{۳\sqrt[۳]{(ax^۲-۵x+a)^۲}}$$

گام دوم: دو حالت داریم، $x=۲$ یا ریشهٔ صورت مشتق است (مشتق در آن صفر می‌شود) یا ریشهٔ مخرج مشتق است (مشتق در آن وجود ندارد)، حال با توجه به حالت اول داریم:

$$f'(۲)=۰ \xrightarrow{\text{ریشهٔ صورت } x=۲} ۲a(۲)-۵=۰ \Rightarrow ۴a-۵=۰ \Rightarrow ۴a=۵ \Rightarrow a=\frac{۵}{۴}$$

حال برای به دست آوردن نقاط بحرانی دیگر، ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$۳\sqrt[۳]{(ax^۲-۵x+a)^۲}=۰ \Rightarrow ax^۲-۵x+a=۰ \xrightarrow{a=\frac{۵}{۴}} \frac{۵}{۴}x^۲-۵x+\frac{۵}{۴}=۰$$

$$\xrightarrow[S=\frac{-b}{a}]{\Delta>۰} S=-\frac{(-۵)}{\frac{۵}{۴}}=۴$$

در این حالت مجموع طول نقاط بحرانی برابر ۴ است.

گام سوم: حال حالت دوم را در نظر می‌گیریم:

ریشهٔ مخرج $x=۲ : a(۲)^۲-۵(۲)+a=۰ \Rightarrow ۴a-۱۰+a=۰ \Rightarrow ۵a=۱۰ \Rightarrow a=۲$

مقدار به‌دست‌آمده برای a را در ضابطهٔ f' جای‌گذاری می‌کنیم و صورت و مخرج آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط بحرانی دیگر به دست آید:

$$f'(x)=\frac{۲ax-۵}{۳\sqrt[۳]{(ax^۲-۵x+a)^۲}} \xrightarrow{a=۲} f'(x)=\frac{۴x-۵}{۳\sqrt[۳]{(۲x^۲-۵x+۲)^۲}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x-۵=۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۴} \text{ (یکی از نقاط بحرانی)} \\ ۳\sqrt[۳]{(۲x^۲-۵x+۲)^۲}=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۵x+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۱}{۲} \text{ (یکی دیگر از نقاط بحرانی)} \\ x=۲ \text{ (قبلاً به دست آمده بود)} \end{cases} \end{cases}$$

پس در این‌جا جمع نقاط بحرانی دیگر $\frac{۵}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۴}$ می‌شود که همین جواب در گزینه‌ها موجود است.

۱۱ بیشترین مقدار تابع $f(x)=x+a\sqrt{۲a-x}$ برابر ۱۲ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ضابطهٔ f' را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x+a\sqrt{۲a-x} \Rightarrow f'(x)=۱+\frac{-a}{۲\sqrt{۲a-x}} \Rightarrow f'(x)=۱-\frac{a}{۲\sqrt{۲a-x}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲\sqrt{۲a-x}-a}{۲\sqrt{۲a-x}}$$

گام دوم: بیشترین مقدار تابع در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتد، در این‌جا نقطهٔ بحرانی یا ریشهٔ مخرج f' است یا ریشهٔ صورت f'، ضمناً دامنهٔ تابع $(-\infty,۲a]$ است؛ پس $x=۲a$ نیز نقطهٔ بحرانی است که همان ریشهٔ مخرج مشتق است:

مخرج: $۲\sqrt{۲a-x}=۰ \Rightarrow x=۲a \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } f} ۲a+a\underbrace{\sqrt{۲a-۲a}}_{۰}=۱۲ \Rightarrow a=۶$

$a=۶$ در گزینه‌ها موجود نیست؛ پس به سراغ نقطهٔ بحرانی دیگر می‌رویم.

گام سوم: حال برای پیداکردن نقطهٔ بحرانی دیگر، ریشهٔ صورت را پیدا می‌کنیم:

صورت: $۲\sqrt{۲a-x}-a=۰ \Rightarrow ۲\sqrt{۲a-x}=a \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۸a-۴x=a^۲ \Rightarrow x=۲a-\frac{a^۲}{۴}$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } f} ۲a-\frac{a^۲}{۴}+a\underbrace{\sqrt{۲a-(۲a-\frac{a^۲}{۴})}}_{۲a-۲a+\frac{a^۲}{۴}}=۱۲$$

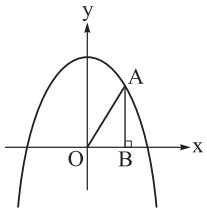
$$\Rightarrow ۲a-\frac{a^۲}{۴}+a\sqrt{\frac{a^۲}{۴}}=۱۲ \xrightarrow[a>۰]{\text{باتوجه به گزینه‌ها}} ۲a-\frac{a^۲}{۴}+\frac{a^۲}{۲}=۱۲ \Rightarrow \frac{a^۲}{۴}+۲a-۱۲=۰ \xrightarrow{\times ۴} a^۲+۸a-۴۸=۰$$

$$\Rightarrow (a+۱۲)(a-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۱۲ \\ a=۴ \quad ✓ \end{cases}$$

پس گزینهٔ (۱) جواب است.

دقت کنید که اگر a را منفی بگیریم، به معادلهٔ $۳a^۲-۸a+۴۸=۰$ می‌رسیم که جواب حقیقی ندارد.

۱۲ نمودار زیر مربوط به تابع با ضابطهٔ $f(x)=۱۲-x^۲$ است. بیشترین مساحت مثلث **OAB** کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۸

۳) ۶

۴) ۹

مشاوره بهینه‌سازی پای ثابت تمامی کنکورها بوده است، در کنکور هم سؤال سخت از آن داشتیم و هم سؤال آسان، بر روی مدل‌های مختلف آن مسلط باشید.

Hint با توجه به ضابطهٔ سهمی، اضلاع مثلث را x و $۱۲-x^۲$ در نظر بگیرید و تابع مساحت را تشکیل دهید.

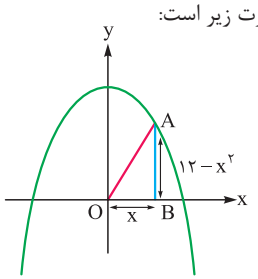
درس Box

بهینه سازی

در این گونه مسائل باید یک تابع هدف تک‌متغیره (حجم، مساحت، هزینه و ...) تشکیل دهیم و برای این‌که به بهترین حالت برسیم، باید نقاط بحرانی تابع مورد نظر را پیدا کنیم چراکه max و min مطلق تابع در این نقاط اتفاق می‌افتد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقطهٔ A بر روی سهمی قرار دارد؛ پس تابع مساحت مثلث OAB بر حسب x به صورت زیر است:



$$\begin{cases} OB = x \\ AB = ۱۲-x^۲ \end{cases} \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}x(۱۲-x^۲) \Rightarrow S=۶x-\frac{۱}{۲}x^۳$$

گام دوم: حال از تابع مساحت بر حسب x مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S(x)=۶x-\frac{۱}{۲}x^۳ \Rightarrow S'(x)=۶-\frac{۳}{۲}x^۲ \xrightarrow{S'(x)=۰} ۶-\frac{۳}{۲}x^۲=۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}x^۲=۶ \Rightarrow x^۲=۴ \xrightarrow[x>۰]{\text{با توجه به شکل}} x=۲$$

گام سوم: پس بیشترین مساحت مثلث در $x=۲$ اتفاق می‌افتد، $x=۲$ را در تابع مساحت جای‌گذاری می‌کنیم تا خواستهٔ سؤال به دست آید:

$$S(x)=۶x-\frac{۱}{۲}x^۳ \xrightarrow{x=۲} S(۲)=۶(۲)-\frac{۱}{۲}(۲)^۳$$

$$\Rightarrow S(۲)=۱۲-۴ \Rightarrow S_{max}=۸$$

۱۳ محل برخورد تابع $f(x)=۲^{ax}-۴$ با محور طول‌ها و محور عرض‌ها را به هم وصل می‌کنیم، مساحت سطح محصور بین محورها و پاره‌خط رسم‌شده ۳ واحد می‌شود، $f(-۴)$ کدام می تواند باشد؟

۱) $\frac{-۶۵}{۱۶}$

۲) $\frac{-۳۳}{۸}$

۳) $\frac{-۳۱}{۸}$

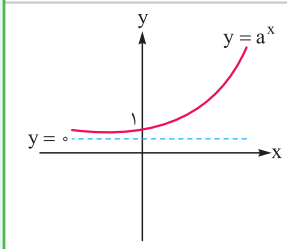
۴) $\frac{-۶۳}{۱۶}$

مشاوره تابع نمایی و نمودار آن محبوبیت بالایی نزد طراحان کنکور دارد و در اکثر کنکورها از آن یک تست آمده است، با توجه به حجم کم و دشواربودن مطلب حتماً بر روی آن مسلط باشید.

Hint محل برخورد تابع با محورها را پیدا کنید، شکل ایجادشده یک مثلث قائم‌الزاویه است، با توجه به مساحت داده‌شده مقدار a را پیدا کنید.

درس Box

نمودار توابع نمایی

$۰<a<۱$	$a>۱$
	
اکیداً نزولی	اکیداً صعودی

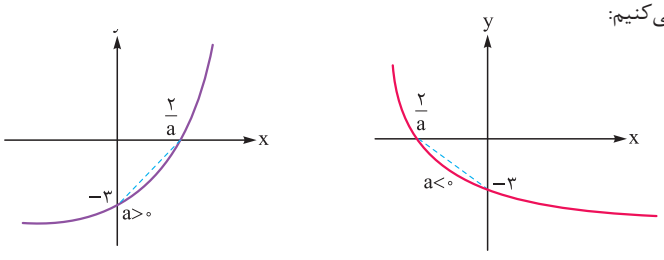
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: محل برخورد تابع با هر دو محور را مشخص می‌کنیم:

$$f(x)=۲^{ax}-۴ \xrightarrow[\text{برخورد با محور عرض‌ها}]{x=۰} f(۰)=۲^{۰}-۴=-۳$$

$$f(x)=۲^{ax}-۴ \xrightarrow[\text{برخورد با محور طول‌ها}]{y=۰} ۰=۲^{ax}-۴ \Rightarrow ۲^{ax}=\underbrace{۴}_{۲^{۲}} \Rightarrow ax=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{a}$$

گام دوم: در دو حالت نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



گام سوم: می‌بینید که با وصل‌کردن محل برخوردهای تابع با محورها یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاعی به طول ۳ و $\frac{۲}{|a|}$ پدید می‌آید که طبق فرض سؤال مساحت آن ۳ واحد است، در نتیجه:

$$۳=\frac{۱}{۲}(۳)(\frac{۲}{|a|}) \Rightarrow ۳=\frac{۳}{|a|} \Rightarrow |a|=۱$$

گام چهارم: حال ضابطهٔ تابع را بازنویسی می‌کنیم و خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=۲^{ax}-۴ \begin{cases} \xrightarrow{a=-۱} f(x)=۲^{-x}-۴ \Rightarrow f(-۴)=۲^{۴}-۴=۱۶-۴ \Rightarrow f(-۴)=۱۲ \\ \xrightarrow{a=۱} f(x)=۲^{x}-۴ \Rightarrow f(-۴)=۲^{-۴}-۴=\frac{۱}{۱۶}-۴ \Rightarrow f(-۴)=-\frac{۶۳}{۱۶} \end{cases}$$

۱۴ اگر $\log_{a^{۲}b} a = ۳$ باشد، مقدار $\log_{b^{۳}a} b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱۵}{۷}$

۳) $\frac{۱۲}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

مشاوره لگاریتم و خواص آن همیشه مورد توجه طراحان بوده است.

Hint ابتدا دو طرف رابطهٔ داده‌شده را معکوس کنید و مقدار $\log_b a$ را به دست آورید، سپس با توجه به قوانین لگاریتم خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

درس Box

مفهوم لگاریتم:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a \quad (a, b > ۰, b \neq ۱)$$

ویژگی‌های لگاریتم:

ردیف	ویژگی	مثال
۱	$\log_a a = ۱$	$\log_۵ ۵ = ۱$
۲	$\log_a ۱ = ۰$	$\log_{۱۹} ۱ = ۰$
۳	$\log a + \log b = \log ab$	$\log ۳ + \log ۵ = \log ۱۵ , \log ۱۲ = \log ۳ + \log ۴$
۴	$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$	$\log ۲۱ - \log ۳ = \log ۷, \log ۴ = \log ۲۸ - \log ۷$
۵	$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$	$\log_{۵^{۳}} ۳^{۲} = \frac{۲}{۳} \log_۵ ۳$
۶	$_a\log_c b = b^{\log_c a}$	$_۳\log_{\sqrt{۳}} ۱۶ = ۱۶^{\log_{\sqrt{۳}} ۳} = ۱۶^{۲}$
۷	$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$	$\log_۷ ۶ = \frac{\log ۶}{\log ۷}$

نکته از ویژگی ۷ نتیجه می‌گیریم که:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{۱}{\log_a b} \Rightarrow \boxed{\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا دو طرف رابطهٔ داده‌شده را معکوس می‌کنیم و با توجه به قوانین لگاریتم خواهیم داشت:

$$\log_{a^{۲}b} a = ۳ \Rightarrow \frac{۱}{\log_{a^{۲}b} a} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \log_a a^{۲}b = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \log_a a^{۲} + \log_a b = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \underbrace{۲\log_a a}_{۱} + \log_a b = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲ + \log_a b = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \log_a b = -\frac{۵}{۳} \Rightarrow \log_b a = \frac{-۳}{۵}$$

گام دوم: خواستهٔ سؤال $\log_{b^{۳}a} b$ است. اگر آن را A فرض کنیم، داریم:

$$A = \log_{b^{۳}a} b \xrightarrow{\text{معکوس کردن طرفین}} \frac{۱}{A} = \log_b b^{۳}a \Rightarrow \frac{۱}{A} = \log_b b^{۳} + \log_b a$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{A} = ۳\underbrace{\log_b b}_{۱} + \underbrace{\log_b a}_{\frac{-۳}{۵}} \Rightarrow \frac{۱}{A} = ۳ - \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{۱}{A} = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow A = \frac{۵}{۱۲}$$

(از گام قبلی)

۱۵ اگر $a = \log_{۲} ۹$ و $\log_{۱۶} b = \frac{۱}{۸}(۲+a)$ باشد، مقدار $\log_{۲}(۳b-۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۴

Hint $a = \log_{۲} ۹$ را در رابطهٔ داده‌شده جای‌گذاری کنید و لگاریتم‌ها را به پایهٔ ۲ ببرید تا مقدار b به دست آید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا $a = \log_{۲} ۹$ را در رابطهٔ $\log_{۱۶} b = \frac{۱}{۸}(۲+a)$ جای‌گذاری می‌کنیم و پایه‌های لگاریتم‌ها را به ۲ تبدیل می‌کنیم:

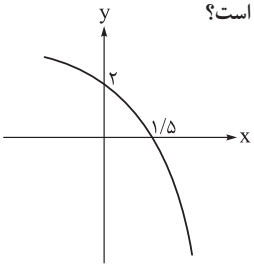
$$\underbrace{\log_{۱۶} b}_{\log_{۲^۴} b} = \frac{۱}{۸}(۲+\log_{۲} ۹) \xrightarrow{۲=\log_{۲} ۴} \frac{۱}{۴_{۱}}\log_{۲} b = \frac{۱}{۸_{۲}}\underbrace{(\log_{۲} ۴+\log_{۲} ۹)}_{\log_{۲} ۳۶}$$

$$\Rightarrow \log_{۲} b = \frac{۱}{۲}\log_{۲} ۳۶ \Rightarrow \underbrace{۲\log_{۲} b}_{\log_{۲} b^۲} = \log_{۲} ۳۶ \Rightarrow b^۲ = ۳۶ \xrightarrow{b>۰} b = ۶$$

گام دوم: حال که $b = ۶$ را به دست آوردیم، خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\log_{۲}(۳b-۲) = \log_{۲}(۳(۶)-۲) = \log_{۲} ۱۶ = ۴$$

۱۶ شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=۱+\log_c(\frac{۱}{ax+b})$ است، اگر $b-c=\frac{۳}{۲}$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع کدام است؟



۱) $(-\infty,۳)$

۲) $(-\infty,۲)$

۳) $(-\infty,۳/۵)$

۴) $(-\infty,۲/۵)$

مشاوره بعضی از سؤالات دارای محاسبات طولانی هستند ولی ایدهٔ پیچیده‌ای ندارند، با یکی از همین دسته سؤالات مواجهیم.

Hint ابتدا با توجه به این‌که $(\frac{۱}{ax+b})=(ax+b)^{-۱}$، تابع را بازنویسی کنید و با جای‌گذاری نقاط داده‌شده روی نمودار و رابطهٔ داده‌شده در سؤال، مقادیر a و b و c را به دست آورید.

درس Box

دامنهٔ توابع لگاریتمی

برای به دست آوردن دامنهٔ توابع به فرم $y=\log_{g(x)}f(x)$، باید اشتراک مجموعه‌جواب‌های نامساوی‌های زیر را به دست آوریم:

$f(x)>۰$

$g(x)>۰$

$g(x)\neq ۱$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم و سپس نقطهٔ $(۰,۲)$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=۱+\log_c\overbrace{(\frac{۱}{ax+b})}^{(ax+b)^{-۱}} \Rightarrow f(x)=۱-\log_c(ax+b) \xrightarrow{(۰,۲)\in f} ۲=۱-\log_c b$$

$$\Rightarrow \log_c b=-۱ \Rightarrow c^{-۱}=b \Rightarrow b=\frac{۱}{c} \quad (*)$$

گام دوم: حال در ضابطهٔ f، نقطهٔ $(۱/۵,۰)$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=۱-\log_c(ax+b) \xrightarrow{(۱/۵,۰)\in f} ۰=۱-\log_c(۱/۵a+b) \Rightarrow \log_c(۱/۵a+b)=۱$$

$$\Rightarrow ۱/۵a+b=c \Rightarrow c-b=۱/۵a \quad (**)$$

گام سوم: با توجه به رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال و روابط $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$(**):\begin{cases} c-b=۱/۵a \\ b-c=\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۱/۵a=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=-۱$$

$$(*):\begin{cases} b=\frac{۱}{c} \\ b-c=\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{c}-c=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times c} ۱-c^۲=\frac{۳}{۲}c \Rightarrow c^۲+\frac{۳}{۲}c-۱=۰$$

$$\Rightarrow (c+۲)(c-\frac{۱}{۲})=۰ \Rightarrow \begin{cases} c=-۲ & \text{غ ق ق} \quad (\text{مبنای لگاریتم نمی‌تواند منفی باشد.}) \\ c=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{b=\frac{۱}{c}} b=۲ \end{cases}$$

گام چهارم: حال که مقادیر a و b و c را به دست آوردیم، ضابطهٔ سؤال را می‌نویسیم و دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=۱-\log_c(ax+b) \xrightarrow[c=\frac{۱}{۲}]{a=-۱,\ b=۲} f(x)=۱-\log_{\frac{۱}{۲}}(-x+۲)$$

$$\xrightarrow{\text{به دست آوردن دامنه}} -x+۲>۰ \Rightarrow x<۲ \Rightarrow D_f=(-\infty,۲)$$

۱۷ معادلهٔ $\log_{\sqrt{x}} k + ۲\log_{k^۲} x = ۳$ دارای ریشه‌های $x = ۴$ و $x = \alpha$ است، مقدار α کدام است؟

۱) ۸ یا ۲
۲) ۱۶ یا ۲
۳) ۸ یا ۱۶
۴) فقط ۱۶

مشاوره این سؤال از آن دسته سؤالاتی است که با توجه به گزینه‌ها، سریع‌تر می‌توان به پاسخ رسید.

Hint $x = ۴$ را در معادله قرار دهید تا مقادیر مناسب برای k به دست آید، سپس با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده معادله را حل کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا $x = ۴$ را در معادله قرار می‌دهیم تا مقادیر k به دست آید:

$$\log_{\sqrt{x}} k + ۲\log_{k^۲} x = ۳ \xrightarrow{x=۴} \log_{\sqrt{۴}} k + ۲\underbrace{\log_{k^۲} ۴}_{\log_{k^۲} ۲^۲} = ۳$$

$$\Rightarrow \log_۲ k + ۲(۲)(\frac{۱}{۲})\log_k ۲ = ۳ \Rightarrow \log_۲ k + ۲\log_k ۲ = ۳$$

$$\xrightarrow{\log_۲ k = A} A + \frac{۲}{A} = ۳ \xrightarrow{\times A} A^۲ + ۲ = ۳A \Rightarrow A^۲ - ۳A + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (A-۲)(A-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} A = ۲ \Rightarrow \log_۲ k = ۲ \Rightarrow k = ۲^۲ \Rightarrow k = ۴ \\ A = ۱ \Rightarrow \log_۲ k = ۱ \Rightarrow k = ۲^۱ \Rightarrow k = ۲ \end{cases}$$

گام دوم: حال با توجه به هر کدام از مقادیر k که به دست آمده، معادله را بازنویسی و حل می‌کنیم:

$$k = ۴ : \underbrace{\log_{\sqrt{x}} ۴}_{\log_{x^{\frac{۱}{۲}}} ۴} + ۲\log_{۴^۲} x = ۳ \Rightarrow ۲\log_x ۴ + (۲)(\frac{۱}{۲})\log_۴ x = ۳$$

$$\xrightarrow{\log_x ۴ = t} ۲t + \frac{۱}{t} = ۳ \xrightarrow{\times t} ۲t^۲ + ۱ = ۳t \Rightarrow ۲t^۲ - ۳t + ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} t = ۱ \Rightarrow \log_x ۴ = ۱ \Rightarrow x = ۴ \\ t = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_x ۴ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x^{\frac{۱}{۲}} = ۴ \Rightarrow \sqrt{x} = ۴ \Rightarrow x = ۱۶ \Rightarrow \boxed{\alpha = ۱۶} \end{cases}$$

$$k = ۲ : \log_{\sqrt{x}} ۲ + ۲\log_{۲^۲} x = ۳ \Rightarrow ۲\log_x ۲ + \log_۲ x = ۳$$

$$\xrightarrow{m = \log_x ۲} ۲m + \frac{۱}{m} = ۳ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱ \Rightarrow \log_x ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow \boxed{\alpha = ۲} \\ m = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_x ۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۴ \end{cases}$$

پس گزینهٔ دوم درست است.

تیزبازی با توجه به این‌که α در گزینه‌ها وجود دارد، نیازی به حل‌کردن معادله نیست و بعد از به دست آوردن مقادیر ممکن برای k می‌توان α را از گزینه‌ها انتخاب و جای‌گذاری کرد:

$$k = ۴ : \log_{\sqrt{x}} ۴ + ۲\log_{۴^۲} x = ۳ \xrightarrow{x=۱۶} ۱ + ۲(۱) = ۳ \quad ✓$$

$$k = ۲ : \log_{\sqrt{x}} ۲ + ۲\log_{۲^۲} x = ۳ \Rightarrow ۲\log_x ۲ + \log_۲ x = ۳ \xrightarrow{x=۲} ۲ + ۱ = ۳ \quad ✓$$

۱۸ دوچرخه در هر روز ۴ درصد باد موجود در لاستیک خودش را از دست می‌دهد. چه‌قدر طول می‌کشد تا باد دوچرخه به $\frac{۱}{۵}$ باد روز اول برسد؟

$(\log ۳ = ۰/۴۷, \log ۲ = ۰/۳)$

۱) $\frac{۸۰}{۳}$ روز

۲) ۲۵ روز

۳) ۲۴ روز

۴) $\frac{۷۰}{۳}$ روز

مشاوره کاربرد لگاریتم در مسائل از تمرینات کتاب درسی یازدهم است و سابقهٔ حضور در کنکور را نیز دارد، پس باز هم ممکن است مورد سؤال واقع شود.

Hint

با توجه به این‌که بعد از گذشت هر روز، ۹۶ درصد باد لاستیک باقی می‌ماند، رابطهٔ $A = A_۰(۰/۹۶)^n$ را برای باد لاستیک در نظر بگیرید و سپس به حل سؤال بپردازید.

درس Box

در معادلاتی که مجهول در توان قرار دارد، می‌توان از دو طرف در مبنای پایهٔ مجهول لگاریتم گرفت تا مجهول از توان خارج شود:

$$a^x = b \xrightarrow{\log_a} \log_a a^x = \log_a b$$

$$\Rightarrow x \underbrace{\log_a a}_{۱} = \log_a b \Rightarrow x = \log_a b$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دوچرخه در هر روز ۴ درصد از باد خود را از دست می‌دهد، به عبارت دیگر در هر روز مقدار باد دوچرخه ۹۶ درصد روز قبلی می‌شود، حال اگر باد روز اول را $A_۰$ در نظر بگیریم، مقدار باد دوچرخه در روز nام از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$A = A_۰(۰/۹۶)^n$$

گام دوم: می‌خواهیم بفهمیم بعد از چند روز میزان باد مورد نظر به $\frac{۱}{۵}$ مقدار اولیه یعنی $\frac{۱}{۵}A_۰$ می‌رسد؛ پس:

$$A = A_۰(۰/۹۶)^n \Rightarrow \frac{۱}{۵}\cancel{A_۰} = \cancel{A_۰}(۰/۹۶)^n \Rightarrow \frac{۱}{۵} = (۰/۹۶)^n$$

گام سوم: از دو طرف رابطهٔ به‌دست‌آمده در مبنای ۰/۹۶ لگاریتم می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۵} = (۰/۹۶)^n \xrightarrow{\log_{۰/۹۶}} \log_{۰/۹۶}\frac{۱}{۵} = \underbrace{\log_{۰/۹۶} ۰/۹۶^n}_{n} \Rightarrow n = \log_{۰/۹۶}\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log \frac{۱}{۵}}{\log ۰/۹۶} \xrightarrow{\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۱۰}} n = \frac{\log ۲ - \log ۱۰}{\log ۹۶ - \log ۱۰۰} \Rightarrow n = \frac{\log ۲ - ۱}{\log ۹۶ - ۲}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log ۲ - ۱}{(\log ۳ + \underbrace{\log ۳۲}_{۵\log ۲}) - ۲} \Rightarrow n = \frac{\log ۲ - ۱}{\log ۳ + ۵\log ۲ - ۲} \xrightarrow[\log ۳ = ۰/۴۷]{\log ۲ = ۰/۳} n = \frac{۰/۳ - ۱}{۰/۴۷ + ۵(۰/۳) - ۲}$$

$$\Rightarrow n = \frac{-۰/۷}{-۰/۰۳} \Rightarrow n = \frac{۰/۷}{۰/۰۳} \xrightarrow[\times ۱۰۰]{\text{صورت و مخرج}} n = \frac{۰/۷ \times ۱۰۰}{۰/۰۳ \times ۱۰۰} = \frac{۷۰}{۳}$$

پس بعد از $\frac{۷۰}{۳}$ روز، باد دوچرخه به $\frac{۱}{۵}$ مقدار اولیه می‌رسد.

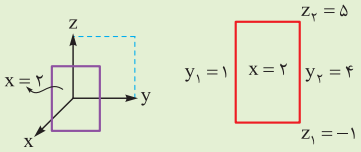
۱۹ یک ناحیه در فضا به صورت $\{(۲,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}, ۱ \le y \le ۴, -۱ \le z \le ۵\}$ معرفی شده است. این ناحیه کدام شکل را مشخص می‌کند؟

۱) مکعب‌مستطیلی به حجم ۳۶
۲) مستطیلی به مساحت ۱۸
۳) مکعب‌مستطیلی به مساحت ۱۸
۴) مستطیلی به مساحت ۳۶

Hint نقطهٔ $(۲,y,z)$ در صفحهٔ $x = ۲$ قرار دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (رسم شکل در دستگاه مختصات): نقطهٔ $(۲,y,z)$ در صفحهٔ $x = ۲$ قرار دارد، (پس گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند). این صفحهٔ عمود بر محور xها و موازی با صفحهٔ yz است. حالا با توجه به بازه‌های y و z ناحیهٔ مورد نظر را رسم می‌کنیم. این ناحیه باید روی دستگاه مختصات رسم شود.



گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ صورت سؤال): همان‌طور که مشخص شد این ناحیه یک مستطیل به طول $z_۲ - z_۱ = ۵ - (-۱) = ۶$ و عرض $y_۲ - y_۱ = ۴ - ۱ = ۳$ است و مساحت آن برابر با $۶ \times ۳ = ۱۸$ است.

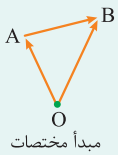
۲۰ اگر A، B، C و D چهار نقطهٔ دلخواه در فضا باشند، حاصل عبارت $\overrightarrow{BC}+۶\overrightarrow{DB}+۴\overrightarrow{CD}-۲\overrightarrow{DA}+۲\overrightarrow{BA}$ برابر کدام است؟

۱) $۳\overrightarrow{AC}$ ۲) $۲\overrightarrow{BC}$

۳) $۳\overrightarrow{CB}$ ۴) $۲\overrightarrow{DA}$

Hint اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه باشند، مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر است با $B-A$.

درس Box هر بردار مانند $\overrightarrow{AB}$ را در فضا می‌توان به صورت زیر نمایش داد:



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=B-A$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (تبدیل بردارها)**: با توجه به نکتهٔ گفته‌شده در درس‌باکس هر کدام از بردارهای عبارت صورت سؤال را به صورت تفاضل ۲ نقطه ابتدا و انتهای آن می‌نویسیم. برای مثال:

$$\overrightarrow{BC}=C-B\,,\ \overrightarrow{DB}=B-D\,,\ \overrightarrow{CD}=D-C\ ,\ \overrightarrow{DA}=A-D\,,\overrightarrow{BA}=A-B$$

گام دوم (محاسبهٔ عبارت صورت سؤال): تمام بردارها را به صورت بالا جای‌گذاری می‌کنیم و حاصل نهایی را به دست می‌آوریم.

$$\overrightarrow{BC}+۶\overrightarrow{DB}+۴\overrightarrow{CD}-۲\overrightarrow{DA}+۲\overrightarrow{BA}=C-B+۶B-۶D+۴D-۴C-۲A+۲D+۲A-۲B=۳B-۳C=۳(B-C)$$

$B-C$ برابر با بردار $\overrightarrow{CB}$ است؛ پس حاصل عبارت برابر با $۳\overrightarrow{CB}$ است.

۲۱ اگر $|\vec{a}|=۲$ و $|\vec{b}|=۱$ و بردارهای $\vec{a}+۳\vec{b}$ و $۲\vec{a}-\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۱۵۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۶۰° ۴) ۴۵°

Hint اگر دو بردار بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها صفر است.

درس Box

۱) ضرب داخلی دو بردار (ضرب اسکالر، ضرب نقطه‌ای دو بردار): فرض کنیم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر و θ زاویهٔ بین آن‌ها باشد. در این صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\ ,\ ۰\le\theta\le\pi$$

۲) بنا به تعریف ضرب داخلی، برای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}\ ,\ \vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$$

۳) ضرب داخلی بردارها نسبت به جمع و تفریق توزیع‌پذیر است، مثلاً اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و $k_۱,k_۲,k_۳$ و $k_۴$ عددهای حقیقی باشند، داریم:

$$(k_۱\vec{a}+k_۲\vec{b}).(k_۳\vec{a}-k_۴\vec{b})=k_۱k_۳\vec{a}.\vec{a}-k_۱k_۴\vec{a}.\vec{b}+k_۲k_۳\vec{b}.\vec{a}-k_۲k_۴\vec{b}.\vec{b}$$

$$=k_۱k_۳|\vec{a}|^۲+(k_۲k_۳-k_۱k_۴)\vec{a}.\vec{b}-k_۲k_۴|\vec{b}|^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ $\vec{a}.\vec{b}$): بردارهای $\vec{a}+۳\vec{b}$ و $۲\vec{a}-\vec{b}$ بر هم عمود هستند، بنابراین کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها صفر است و مطابق فرمول ضرب داخلی دو بردار، حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها صفر می‌شود و داریم:

$$(۲\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}+۳\vec{b})=۰\Rightarrow ۲|\vec{a}|^۲+۶\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}-۳|\vec{b}|^۲=۰$$

$$\Rightarrow ۲\times۴+۵\vec{a}.\vec{b}-۳=۰\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=-۱$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): در گام قبلی به دست آوردیم که $\vec{a}.\vec{b}=-۱$. بنابراین با توجه به فرمول ضرب داخلی داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=-۱\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-۱\Rightarrow\cos\theta=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۱۲۰^\circ$$

۲۲ اگر $\vec{a}=(\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $\vec{b}=(۳,۰,۳)$، آن‌گاه مؤلفه‌های تصویر قائم بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ به صورت $(x_۰,y_۰,z_۰)$ است. حاصل $x_۰+y_۰+z_۰$ کدام است؟

۱) -۲

۲) ۲

۳) -۳

۴) ۳

مشاوره یکی از مهم‌ترین کاربردهای ضرب داخلی محاسبهٔ تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر است. این موضوع از موضوعات مهم و پرتکرار در امتحان‌های نهایی و حتی کنکور است و این سؤال مشابه یکی از سؤال‌های امتحان‌های گذشته طرح شده است.

درس Box

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را در نظر می‌گیریم. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ که آن را با $\vec{a}'$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{a}'=r\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$): با توجه به بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{c}=۲\vec{a}-\vec{b}=(۳,-۱,۱)-(۳,۰,۳)=(۰,-۱,-۲)$$

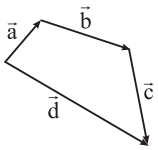
گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): تصویر بردار به‌دست‌آمده بر امتداد $\vec{b}$ برابر است با:

$$\vec{c}'=\frac{\vec{c}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{۰+۰-۶}{۳^۲+۰^۲+۳^۲}(۳,۰,۳)=-\frac{۱}{۳}(۳,۰,۳)=(-۱,۰,-۱)\Rightarrow x_۰=-۱,y_۰=۰,z_۰=-۱$$

در نتیجه خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$x_۰+y_۰+z_۰=-۱+۰-۱=-۲$$

۲۳ مطابق شکل اگر $|\vec{a}|=۱$، $|\vec{c}|=|\vec{b}|=۱/۵$ و $|\vec{d}|=۲$، آن‌گاه حاصل $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}$ کدام است؟

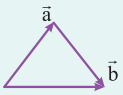


۱) ۰/۷۵
۲) −۰/۷۵
۳) ۱/۲۵
۴) −۱/۲۵

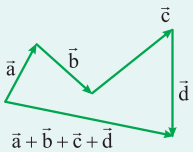
Hint با توجه به شکل $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$، پس $\vec{d}.\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

درس Box

۱) قاعدهٔ مثلثی و تعمیم آن در جمع بردارها: اگر ابتدای بردار $\vec{b}$ را روی انتهای بردار $\vec{a}$ قرار دهیم، بردار $\vec{a}+\vec{b}$ برداری است که ابتدای $\vec{a}$ را به انتهای $\vec{b}$ وصل می‌کند.



در حالت کلی اگر تعدادی بردار را طوری رسم کنیم که انتهای هر بردار بر ابتدای بردار بعدی منطبق باشد، مجموع این بردارها، برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می‌کند.



۲) اتحادهای جبری برای ضرب داخلی بردارها برقرار است، مثلاً:

$$\vec{d}.\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^۲=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مطابق شکل رسم‌شده، مجموع بردارهای $\vec{a},\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر با بردار $\vec{d}$ است. پس رابطهٔ به‌دست‌آمده را می‌نویسیم و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم تا با استفاده از $|\vec{a}|,|\vec{b}|$ و $|\vec{c}|$، عبارت خواسته‌شده در سؤال را به دست آوریم.

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^۲=|\vec{d}|^۲ \Rightarrow \underset{\uparrow ۱}{|\vec{a}|^۲}+\underset{\uparrow ۱/۵}{|\vec{b}|^۲}+\underset{\uparrow ۱/۵}{|\vec{c}|^۲}+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c})=\underset{\uparrow ۲}{|\vec{d}|^۲}$$

$$\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}=\frac{۴-(۱+(۱/۵)^۲+(۱/۵)^۲)}{۲}=\frac{-۱/۵}{۲}=-۰/۷۵$$

۲۴ اگر $(x+1)^۲+(y+2)^۲+(z-1)^۲=۹$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $x+۲y-۲z$ کدام است؟

۱) -۱۶

۲) ۲

۳) -۲

۴) ۱۶

مشاوره یک تیپ پرتکرار از سؤال‌های نامساوی کشی ـ شوارتز را در این سؤال می‌بینید. پاسخ این سؤال را خوب یاد بگیرید تا بتوانید سؤال‌های مشابه را به راحتی حل کنید.

Hint از نامساوی کشی ـ شوارتز استفاده کنید.

درس Box

۱) هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند، آن‌گاه رابطهٔ زیر همواره برقرار است:

$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$ (نامساوی کشی ـ شوارتز)

۲) اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$، آن‌گاه $\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: (ساخت دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$) برای به دست آوردن کم‌ترین مقدار $x+۲y-۲z$ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را طوری تعریف می‌کنیم که حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها شامل همین عبارت باشد. بنابراین داریم:

$$\vec{a}=(x+۱,y+۲,z-۱)$$
$$\vec{b}=(۱,۲,-۲)$$
$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=x+۱+۲(y+۲)-۲(z-۱)=x+۲y-۲z+۷$$

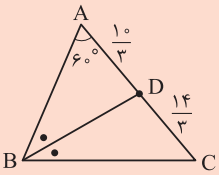
گام دوم (استفاده از نامساوی کشی ـ شوارتز): با استفاده از نامساوی کشی ـ شوارتز کم‌ترین و بیشترین مقدار ممکن برای $x+۲y-۲z$ را به دست می‌آوریم:

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow |x+۲y-۲z+۷|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{(x+۱)^۲+(y+۲)^۲+(z-۱)^۲}=\sqrt{۹}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{۱+(۲)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۹}$$

و در نتیجه داریم:

$$|x+۲y-۲z+۷|\le\sqrt{۹}\times\sqrt{۹} \Rightarrow |x+۲y-۲z+۷|\le۹\Rightarrow -۹\le x+۲y-۲z+۷\le۹\xrightarrow{-۷}-۱۶\le x+۲y-۲z\le۲$$

۲۵ در شکل زیر، نیمساز داخلی زاویهٔ **B** در مثلث **ABC**، ضلع **AC** را به قطعات $\frac{۱۰}{۳}$ و $\frac{۱۴}{۳}$ واحدی تقسیم کرده است. فاصلهٔ نقطهٔ **D** از ضلع **AB** چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟



۱) $\frac{۱۷}{۱۲}$

۲) $\frac{۳۵}{۲۴}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

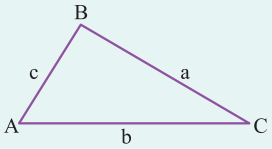
۴) $\frac{۵}{۳}$

مشاوره یک سؤال ترکیبی از «قضیهٔ نیمساز داخلی» و «قضیهٔ کسینوس‌ها» که مشابه یکی از سؤال‌های کنکورهای گذشته طرح شده است.

درس Box

۱) قضیهٔ کسینوس‌ها:

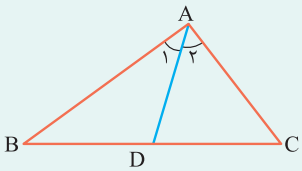
در هر مثلث مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos\hat{A}$$
$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac.\cos\hat{B}$$
$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab.\cos\hat{C}$$

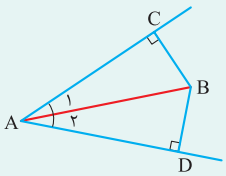
۲) قضیهٔ نیمساز داخلی:

در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند و بالعکس.



$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

۳) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بالعکس.



$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Leftrightarrow BC = BD$$

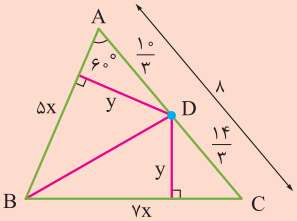
۴) اگر مجموعه ضرایب یک معادلهٔ درجه ۲ برابر با صفر باشد، ریشه‌های آن به صورت زیر است:

$$\left.\begin{matrix} ax^۲ + bx + c = ۰ \\ a + b + c = ۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = \frac{c}{a} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (استفاده از خواص نیمسازها): از نقطهٔ D به اضلاع AB و BC عمود می‌کنیم و طول دو پاره‌خط به‌دست‌آمده را برابر با y در نظر می‌گیریم. (می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.)

از طرفی طبق قضیهٔ نیمساز داخلی داریم: $\frac{BC}{AB} = \frac{DC}{AD} = \frac{۱۴}{۱۰} = \frac{۷}{۵}$ پس برای راحت‌ترشدن محاسبات اضلاع BC و AB را به ترتیب برابر با $۷x$ و $۵x$ در نظر می‌گیریم.



گام دوم (محاسبهٔ x): طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\underset{\downarrow}{BC}^2 = \underset{\downarrow}{AB}^2 + \underset{\downarrow}{AC}^2 - 2(AB)(AC)\cos 60^\circ \Rightarrow \underset{7x}{\quad} \quad \underset{5x}{\quad} \quad \underset{8}{\quad}$$

$$49x^2 = 25x^2 + 64 - 40x$$

$$\Rightarrow 24x^2 + 40x - 64 = 0 \xrightarrow{\div 8} 3x^2 + 5x - 8 = 0$$

در معادلهٔ به‌دست‌آمده مجموع ضرایب صفر است، پس یکی از ریشه‌ها $x = 1$ و دیگری $x = \frac{-8}{3}$ است. می‌دانیم x منفی غیر قابل قبول است پس $x = 1$.

گام سوم (محاسبهٔ y): مساحت مثلث ABD برابر است با $\frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \hat{A}$. از طرفی مساحت مثلث ABD برابر است با $\frac{1}{2} y \cdot AB$. از برابر قراردادن این دو مقدار، y را به دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{2} y \times 5 = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{10}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

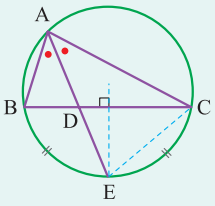
۲۶ در مثلث ABC، می‌دانیم $BC = AC = 2AB$، اگر نیمساز زاویهٔ داخلی A ضلع BC را در D و عمودمنصف BC را در E قطع کند، آن‌گاه نسبت طول DE به طول AD کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

Hint نقطهٔ E وسط کمان BC در دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.

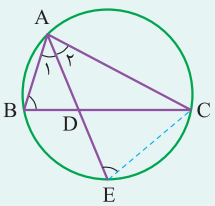
درس Box

۱) در مثلث ABC، نیمساز داخلی زاویهٔ A و عمودمنصف BC همدیگر را در نقطهٔ وسط کمان BC از دایرهٔ محیطی قطع می‌کنند.

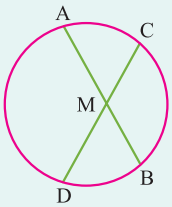


۲) مطابق شکل، اگر نیمساز زاویهٔ A، ضلع BC و دایرهٔ محیطی را به ترتیب در D و E قطع کند، آن‌گاه $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، $\hat{E} = \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$،

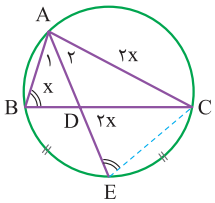
در نتیجه: $\triangle ABD \sim \triangle AEC$.



۳) مطابق شکل اگر دو وتر AB و CD در نقطهٔ M در داخل دایره یکدیگر را قطع کنند، داریم: $AM \cdot BM = CM \cdot DM$



پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (رسم شکل مناسب):** شکل مسئله را رسم می‌کنیم و طبق فرض BC و AC و AB را به ترتیب برابر با ۲x و ۲x و x در نظر می‌گیریم:



گام دوم (استفاده از تشابه $\triangle ABD$ و $\triangle AEC$): در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ A است و می‌دانیم نیمساز $\hat{A}$ و عمودمنصف BC یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{B} = \hat{E} \text{ (زاویهٔ محاطی رو به روی یک کمان)} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEC$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AC \quad (1)$$

گام سوم: (محاسبهٔ $\frac{AE}{DE}$): مطابق روابط طولی در دایره، داریم:

$$AD \cdot DE = BD \cdot CD$$

طبق رابطهٔ (۱) در گام دوم و این رابطه داریم:

$$\frac{AD \cdot AE}{AD \cdot DE} = \frac{AB \cdot AC}{BD \cdot CD} \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AB \cdot AC}{BD \cdot CD}$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ صورت سؤال): AD نیمساز $\hat{A}$ است، پس طبق قضیهٔ نیمسازها داریم:

$$\text{AD نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{BD+CD=۲x} BD=\frac{۲}{۳}x\ ,\ CD=\frac{۴}{۳}x$$

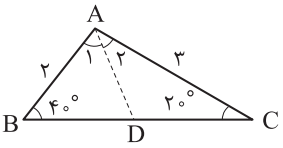
از طرفی طبق رابطهٔ به‌دست‌آمده در گام سوم داریم:

$$\frac{AE}{DE}=\frac{AB.AC}{BD.CD}=\frac{(x)(۲x)}{(\frac{۲}{۳}x)(\frac{۴}{۳}x)}=\frac{۹}{۴}$$

و با تفضیل در صورت به کسر مورد نظر سؤال می‌رسیم:

$$\frac{AE-DE}{DE}=\frac{۹-۴}{۴} \Rightarrow \frac{AD}{DE}=\frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{DE}{AD}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

۲۷ مطابق شکل اگر $\hat{A}_۲ = \hat{A}_۱$ ، آن‌گاه طول **AD** کدام است؟



۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۲) ۱/۵

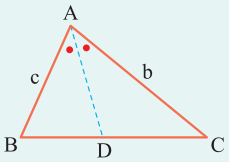
۳) $\sqrt{۳}$

۴) ۱/۲

مشاوره فصل سوم هندسهٔ ۲، فرمول‌های زیادی دارد که باید آن‌ها را حفظ باشید! یکی از این فرمول‌ها در مورد محاسبهٔ طول نیمساز داخلی یکی از زاویه‌های مثلث، با معلوم‌بودن اندازهٔ این زاویه طول دو ضلع آن است. اگر این فرمول را حفظ باشید، با یک سؤال آسان مواجه‌هستید.

درس Box

در شکل مقابل، AD نیمساز زاویهٔ A است، داریم:



$$AD = \frac{۲bc\cos\frac{\hat{A}}{۲}}{b+c}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ زاویه $\hat{A}$): در مثلث ABC، $\hat{B} = ۴۰^\circ$ و $\hat{C} = ۲۰^\circ$ است؛ پس زاویهٔ $\hat{A}$ برابر است با:

$$\hat{A} = ۱۸۰^\circ - (۲۰^\circ + ۴۰^\circ) = ۱۲۰^\circ$$

گام دوم (محاسبهٔ طول AD): مطابق فرمول درس Box داریم:

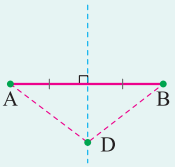
$$AD = \frac{۲bc\cos\frac{\hat{A}}{۲}}{b+c} = \frac{۲\times۳\times۲\times\frac{۱}{۲}}{۲+۳} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

۲۸ در مثلث ABC، ضلع AC و عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ D یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر BD نیمساز زاویهٔ $\hat{ABC}$ باشد، به طوری که $AD = ۹$ و $DC = ۷$، آن‌گاه مساحت مثلث ABD کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۲۱
۳) ۲۸
۴) $۱۴\sqrt{۵}$

درس Box

۱) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

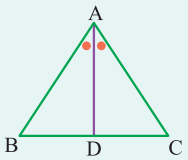


$AD = DB$

۲) قضیهٔ هرون: مساحت هر مثلث با طول اضلاع a، b، c برابر است با:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad , \quad p = \frac{a+b+c}{۲}$$

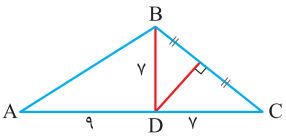
۳) مطابق شکل در مثلث ABC، اگر AD نیمساز زاویهٔ A باشد، آن‌گاه:



$$AD^۲ = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (رسم شکل مناسب و محاسبهٔ طول BD): مثلث ABC را رسم می‌کنیم و با رسم عمودمنصف ضلع BC و تقاطع آن با ضلع AC، نقطهٔ D را روی آن پیدا می‌کنیم.



چون D نقطه‌ای روی عمودمنصف است، پس $BD = DC = ۷$ و در نتیجه مثلث BDC متساوی‌الساقین است.

گام دوم (محاسبهٔ AB): طبق قضیهٔ نیمساز داخلی $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{۹}{۷}$، پس می‌توان در نظر گرفت $AB = ۹x$ و $BC = ۷x$،

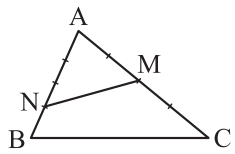
حال به کمک رابطهٔ طول نیمساز، x و سپس طول ضلع AB را به دست می‌آوریم:

$$BD^۲ = AB.BC - AD.DC = ۶۳x^۲ - ۶۳ = ۴۹ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱۶}{۹} \Rightarrow x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow AB = ۱۲$$

گام سوم (محاسبهٔ مساحت مثلث): حالا طول هر سه ضلع مثلث ABD را داریم و به کمک قضیهٔ هرون مساحت مثلث را به دست می‌آوریم:

$$p = \frac{۱۲+۷+۹}{۲} = ۱۴ \Rightarrow S = \sqrt{۱۴ \times ۲ \times ۷ \times ۵} = ۱۴\sqrt{۵}$$

۲۹ مطابق شکل، هر یک از پاره‌خط‌های **AB** و **AC** به چهار قسمت مساوی تقسیم شده‌اند. نسبت مساحت مثلث **AMN** به مساحت چهارضلعی **BCMN** کدام است؟

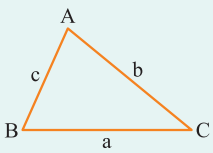


۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

درس Box

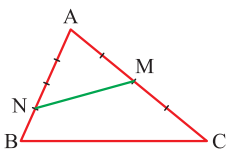
مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A} = \frac{۱}{۲}ca\sin\hat{B} = \frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ نسبت مساحت مثلث AMN به ABC): هر یک از بخش‌های مساوی روی AB و AC را به ترتیب x و y در نظر می‌گیریم، داریم:

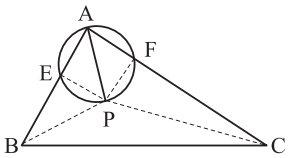


$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲}(۳x)(۲y)}{\frac{۱}{۲}(۴x)(۴y)} = \frac{۳}{۸}$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): با تفضیل در مخرج، نسبت مساحت مثلث AMN را به چهارضلعی BCMN به دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AMN}} = \frac{۳}{۸-۳} \Rightarrow \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{BCMN}} = \frac{۳}{۵}$$

۳۰ مطابق شکل اگر $AB = ۲۵$ ، $AC = ۳۹$ و $BC = ۴۰$ و دایرهٔ به قطر AP، ضلع‌های AB و AC را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند، به طوری که $PE = ۱۲$ و $PF = ۱۴$ ، آن‌گاه مساحت مثلث PBC کدام است؟



۱) ۳۹/۵

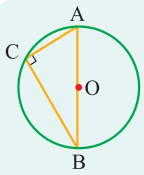
۲) ۴۲

۳) ۴۴/۵

۴) ۴۵

درس Box

در هر دایره، اندازهٔ زاویهٔ محاطی رو به‌روی قطر، ۹۰° است.



$\hat{C} = ۹۰^\circ$

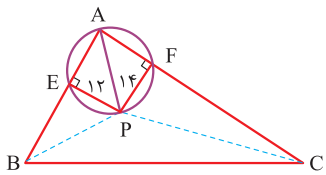
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$): ابتدا مساحت مثلث ABC را به کمک رابطهٔ هرون به دست می‌آوریم:

$$p = \frac{۲۵+۴۰+۳۹}{۲} = ۵۲ \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۵۲(۵۲-۴۰)(۵۲-۳۹)(۵۲-۲۵)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{۵۲\times۱۲\times۱۳\times۲۷} = \sqrt{۴\times۱۳\times۴\times۱۳\times۸۱} = ۴\times۱۳\times۹ = ۴۶۸$$

گام دوم (محاسبه مساحت $\overset{\Delta}{PBC}$): می‌دانیم زاویهٔ محاطی رو به قطر ۹۰° است، پس $A\hat{E}P = A\hat{F}P = ۹۰^\circ$. حالا مساحت مثلث ABC را به صورت مجموع مساحت‌های $\overset{\Delta}{APB}$، $\overset{\Delta}{APC}$ و $\overset{\Delta}{BPC}$ می‌نویسیم.



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{APB}} + S_{\overset{\Delta}{APC}} + S_{\overset{\Delta}{BPC}} \Rightarrow ۴۶۸ = \frac{۱}{۲}\times۱۲\times۲۵ + \frac{۱}{۲}\times۱۴\times۳۹ + S_{BPC} \Rightarrow ۱۵۰ + ۲۷۳ + S_{PBC} = ۴۶۸$$

$$\Rightarrow S_{PBC} = ۴۵$$

۳۱ اگر $S = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $P(k) = kx$، حاصل $P(\{۱,۳\})$ کدام است؟

۱) ۰/۳

۲) ۰/۴

۳) ۰/۵

۴) ۰/۶

درس Box

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{s_۱, s_۲, ..., s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{s_۱, s_۲, ..., s_n\}$ فضای نمونه‌ای، $A = \{a_۱, a_۲, ..., a_k\}$ یک زیر مجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

۱) $۰ \le P(A) \le ۱$

۲) $P(S) = ۱$

۳) $P(A) = P(a_۱) + P(a_۲) + ... + P(a_k)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول:

$$P(۱) = x \ , \ P(۲) = ۲x \ , \ P(۳) = ۳x \ , \ P(۴) = ۴x$$

چون پیشامدهای ساده از فضای نمونه‌ای S احتمال‌های نابرابر دارند پس با احتمال غیرهم‌شانس روبه‌رو هستیم.

گام دوم: در احتمال غیرهم‌شانس $P(S) = ۱$؛ بنابراین:

$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) = ۱ \Rightarrow x + ۲x + ۳x + ۴x = ۱ \Rightarrow ۱۰x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۰}$$

گام سوم:

$$P(\{۱,۳\}) = P(۱) + P(۳) = x + ۳x = ۴x$$

$$x = \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow P(\{۱,۳\}) = ۴ \times \frac{۱}{۱۰} = ۰/۴$$

۳۲ در انداختن دو تاس با یکدیگر، اگر مجموع اعداد روشده اول باشد، احتمال آن‌که مجموع مربعات اعداد روشده، مربع کامل باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$

۲) $\frac{۲}{۱۵}$

۳) $\frac{۱}{۵}$

۴) $\frac{۲}{۵}$

درس Box

احتمال شرطی:

کاهش فضای نمونه: در حالتی که فضای احتمال هم‌شانس است شرطی‌کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد B مثل این است که فضای نمونه، یعنی S، را کنار گذاشته و B را فضای نمونه تلقی کنیم. به این رویکرد: «کاهش فضای نمونه» گفته می‌شود.

در صورتی‌که B پیشامدی باشد که $P(B) > ۰$، برای هر پیشامد A، «احتمال A به شرط رخ‌دادن B» به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در انداختن دو تاس با هم، B را پیشامد مجموع اعداد دو تاس اول باشد و A را پیشامد مجموع مربعات اعداد روشده، مربع کامل باشد در نظر می‌گیریم.

گام دوم: می‌خواهیم احتمال A را به دست آوریم به شرط آن‌که B رخ داده باشد پس با احتمال شرطی $P(A \mid B)$ سروکار داریم:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

گام سوم: ابتدا پیشامد B را به دست می‌آوریم.

$$B = \{(۱,۱),(۲,۱),(۱,۲),(۴,۱),(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۲,۵),(۶,۱),(۱,۶),(۶,۵),(۵,۶)\}$$

بنابراین:

$$n(B) = ۱۵$$

گام چهارم: از بین اعضای B فقط در دو حالت $(۴,۳)$ و $(۳,۴)$ مجموع مربعات اعداد روشده، مربع کامل است یعنی اعداد فیثاغورسی هستند $(۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ = ۵^۲)$.

بنابراین:

$$n(A \cap B) = ۲$$

گام پنجم:

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۲}{۱۵}$$

۳۳ دو مهره به طور متوالی و بدون جای‌گذاری از جعبه‌ای شامل سه مهرهٔ سفید و هفت مهرهٔ سیاه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو مهره سیاه باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۱۵}$

۲) $\frac{۷}{۱۵}$

۳) $\frac{۴}{۱۵}$

۴) $\frac{۷}{۳۰}$

درس Box

قانون ضرب احتمال کل

اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A) > ۰$، آن‌گاه:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: پیشامد سیاه‌بودن مهرهٔ اول را A و پیشامد سیاه‌بودن مهرهٔ دوم را B می‌نامیم. در این‌صورت، آن‌چه خواسته شده $P(A \cap B)$ است.

گام دوم: با توجه به قانون ضرب احتمال $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$ بنابراین باید $P(A)$ و $P(B \mid A)$ را به دست آوریم.

گام سوم: در ابتدا ۱۰ مهره در جعبه است که ۷ تای آن‌ها سیاه است. پس احتمال سیاه‌بودن مهرهٔ اول برابر است با $P(A) = \frac{۷}{۱۰}$.

گام چهارم: برای محاسبهٔ $P(B \mid A)$ بعد از خارج‌کردن مهرهٔ اول، با این شرط که آن مهرهٔ سیاه باشد، ۹ مهره در جعبه مانده که ۶ تای آن‌ها سیاه است؛ بنابراین:

$$P(B \mid A) = \frac{۶}{۹}$$

گام پنجم: با توجه به قانون ضرب احتمال داریم:

$$P(A \cap B) = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۹} = \frac{۴۲}{۹۰} = \frac{۷}{۱۵}$$

۳۴ چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که در هر یک از آن‌ها رقم ۱، حداقل یک بار به کار رفته باشد؟

۱) ۱۰۰

۲) ۱۴۴

۳) ۲۵۲

۴) ۳۳۶

درس Box

اگر S مجموعهٔ مرجع A باشد، آن‌گاه تعداد مجموعهٔ متمم A برابر است با:

$$|A'|=|S|-|A|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اعداد سه‌رقمی‌ای را می‌خواهیم که رقم ۱ حداقل یک‌بار در آن‌ها به کار رفته باشد؛ یعنی اعداد سه‌رقمی که یک رقم یک و دو رقم یک و سه رقم یک دارند را باید بشماریم. برای راحتی کار از مجموعهٔ متمم استفاده می‌کنیم، یعنی تمام اعداد سه‌رقمی را به دست می‌آوریم و اعداد سه‌رقمی‌ای که رقم ۱ ندارند را از آن‌ها کم می‌کنیم:

گام دوم:

تعداد کل ۳رقمی‌ها $=|S|=\underset{\text{رقم اول نمی‌تواند صفر باشد}}{\overset{\uparrow}{۹}}\times\underset{\text{رقم دوم}}{\overset{\downarrow}{۱۰}}\times\underset{\text{رقم سوم}}{\overset{\uparrow}{۱۰}}=۹۰۰$

گام سوم:

تعداد ۳رقمی‌ها بدون رقم ۱ $=|A'|=\underset{\text{بدون صفر و یک}}{\overset{\downarrow}{۸}}\times\overset{\uparrow}{۹}\times\overset{\uparrow}{۹}=۶۴۸$ (بدون یک)

گام چهارم: حال متمم A را به دست می‌آوریم:

تعداد اعداد سه‌رقمی با حداقل یک رقم ۱ $=|A'|=|S|-|A|=۹۰۰-۶۴۸=۲۵۲$

۳۵ با حروف کلمهٔ **aabbbcdee** چند کلمهٔ ۹ حرفی می‌توان ساخت به طوری‌که هیچ دو حرف **b**ای کنار هم نباشند؟

۱) ۳۶۰۰

۲) ۴۵۰۰

۳) ۵۴۰۰

۴) ۶۳۰۰

درس Box

قضیهٔ جایگشت با تکرار: اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... n_k تای آن‌ها از نوع k ام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با کمک قضیهٔ جایگشت با تکرار، ۶ حرف aacdee را به $\frac{6!}{2!2!}$ طریق کنار هم قرار می‌دهیم.

(تکرار حرف a ، تکرار حرف e)

گام دوم: برای این‌که هیچ دو حرف b کنار هم نباشند، باید آن‌ها را در ۷ جایگاه خالی بین این ۶ حرف و یا طرفین آن‌ها قرار دهیم که به $\binom{7}{3}$ حالت امکان‌پذیر است:

$$-a-a-c-d-e-e-$$

گام سوم: طبق اصل ضرب تعداد کلمات ۹ حرفی که هیچ دو حرف bای کنار هم نباشند برابر است با:

$$\frac{6!}{2!2!} \times \binom{7}{3} = 180 \times \frac{7!}{3!4!} = 180 \times 35 = 6300$$

۳۶ به چند طریق می‌توان سه شاخه گل از بین ۵ نوع گل مختلف انتخاب کرد؟

۱) ۱۰

۲) ۳۵

۳) ۴۵

۴) ۶۰

نکته تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** پنج نوع گل مختلف را با x_1، x_2، ...، x_5 نمایش می‌دهیم. جمع ۵ گل برابر ۳ است. دنبال جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 3$ هستیم.

گام دوم: در معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 3$ داریم:

$$\begin{matrix} \text{انواع گل} = k = 5 \\ \text{تعداد شاخه گل انتخابی} = n = 3 \end{matrix} \Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

۳۷ اگر مربع مقابل یک مربع لاتین باشد، آن‌گاه xyz کدام است؟

۳	x	a
b	۱	y
z	c	d

۱) ۱۸

۲) ۱۲

۳) ۹

۴) ۶

درس Box

یک جدول مربعی از اعدادِ ۱، ۲، ... ، n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن، با اعداد ۱، ۲، ... ، n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین» می‌نامیم.

به هر یک از اعدادِ درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مربع لاتین مرتبهٔ ۳ از اعداد ۱، ۲ و ۳ پر شده است. سطر اول عدد ۳ وجود دارد پس x و a اعداد ۱ و ۲ هستند از طرفی در ستون دوم عدد ۱ وجود دارد پس x نمی‌تواند ۱ باشد؛ بنابراین: $a = ۱$ و $x = ۲$:

۳	۲	۱
b	۱	y
z	c	d

گام دوم: ستون دوم فقط عدد ۳ را ندارد، پس $c = ۳$:

۳	۲	۱
b	۱	y
z	۳	d

گام سوم: در سطر اول و سطر دوم عدد ۱ وجود دارد ولی در سطر سوم عدد ۱ وجود ندارد از طرفی d نمی‌تواند ۱ باشد زیرا در ستون سوم ۱ وجود دارد، پس $z = ۱$ و $d = ۲$:

۳	۲	۱
b	۱	y
۱	۳	۲

گام چهارم: حال می‌توانیم جدول را کامل کنیم. با توجه به ستون اول $b = ۲$ و با توجه به ستون سوم $y = ۳$؛ بنابراین داریم:

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

$xyz = ۲ \times ۳ \times ۱ = ۶$

۳۸ معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=10$، چند دسته جواب صحیح، غیرمنفی و کم‌تر از ۶ دارد؟

۱) ۱۷

۲) ۱۸

۳) ۲۰

۴) ۲۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای حل معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=10$ با شرط $x_i<6$ ؛ $i=1,2,3$ از متمم استفاده می‌کنیم یعنی ابتدا جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=10$ را به دست می‌آوریم و سپس جواب‌های صحیح و نامنفی معادله با شرط $x_i\geq 6$ را از آن کم می‌کنیم.

گام دوم: دو متغیر x_i با هم نمی‌توانند بزرگ‌تر یا مساوی ۶ باشند زیرا در این صورت معادله جواب ندارد؛ بنابراین معادله را برای هر x_i حل می‌کنیم.

گام سوم: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $x_1+x_2+x_3=10$ برابر است با:

$$\binom{12}{2}=66$$

گام چهارم: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $x_1+x_2+x_3=10$ با شرط $x_1\geq 6$ برابر است با:

$$x_1\geq 6 \Rightarrow x_1-6\geq 0 \Rightarrow x_1'=x_1-6 \Rightarrow x_1=x_1'+6$$

$$x_1'+6+x_2+x_3=10 \Rightarrow x_1'+x_2+x_3=4 \;;\; x_1'\geq 0, x_{2,3}\geq 0$$

$$\text{تعداد جواب‌های مطلوب}=\binom{6}{2}=15$$

گام پنجم: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $x_1+x_2+x_3=10$ با شرط $x_2\geq 6$ هم برابر ۱۵ و هم‌چنین با شرط $x_3\geq 6$ نیز برابر ۱۵ است.

گام ششم: در نتیجه، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=10$ با شرط $x_i<6$ برابر است با:

$$66-3\times 15=21$$

۳۹ چند تابع پوشای f از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به مجموعهٔ $B=\{۱,۳,۵,۷\}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $f(۲)=۵$ و $f(۴)=۷$ باشد؟

۱) ۱۰

۲) ۱۲

۳) ۱۵

۴) ۱۸

درس Box

اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد و $|A|=m$ و $|B|=n$، تعداد کل توابع از A به B برابر است با $|B|^{|A|}=n^m$.

اصل شمول برای دو مجموعه:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

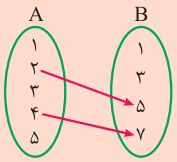
نتیجهٔ اصل شمول:

اگر S مجموعهٔ مرجع A و B باشد، داریم:

$$|(A\cup B)'|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به این‌که $f(۲)=۵$ و $f(۴)=۷$؛ بنابراین به ۵ و ۷ از مجموعهٔ B پیکانی رسم شده است.



گام دوم: کل توابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B به گونه‌ای که $f(۲)=۵$ و $f(۴)=۷$ برابر است با:

اعضای ۱، ۳ و ۵ از مجموعهٔ A به ۴ حالت می‌توانند به مجموعهٔ B بروند.

$$|S|=۴^۳$$

گام سوم: طبق نتیجهٔ اصل شمول داریم:

تعداد توابع پوشا = تعداد کل توابع − تعداد توابع غیرپوشا

گام چهارم:

$|A_۱|=۳^۳=$ توابعی که ۱ را پوشش نمی‌دهند.

$|A_۲|=۳^۳=$ توابعی که ۳ را پوشش نمی‌دهند.

$|A_۱\cap A_۲|=۲^۳=$ توابعی که ۳ و ۱ را پوشش نمی‌دهند. اعضای ۱، ۳ و ۵ از مجموعهٔ A فقط می‌توانند به ۵ و ۷ از مجموعهٔ B بروند.

گام پنجم: بنابراین، تعداد توابع پوشا برابر است با:

$$|\overline{A_۱\cup A_۲}|=|S|-|A_۱\cup A_۲|=۴^۳-(۳^۳+۳^۳-۲^۳)=۱۸$$

۴۰ در یک گروه هفت نفری قد هیچ دو نفری یکسان نیست. اگر قد یاشار بلندتر از قد رضا و قد یحیی باشد، چه‌قدر احتمال دارد یاشار دومین فرد بلند قد در این گروه باشد؟

۱) $\frac{۲}{۷}$

۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۴}{۷}$

۴) $\frac{۵}{۷}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: قد یاشار بلندتر از قد رضا و قد یحیی است؛ پس نفر اول یکی از چهار نفر باقی‌مانده می‌تواند باشد که ۴ حالت دارد و نفر دوم یاشار است.

گام دوم: پنج نفر بعدی به $۵!$ حالت می‌توانند قرار بگیرند، پس تعداد حالات مطلوب برابر است با $۴ \times ۵!$.

گام سوم: هفت نفر به $۷!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند که در $\frac{۱}{۳}$ این حالت‌ها قد یاشار بلندتر از قد رضا و یحیی است؛ بنابراین تعداد حالت‌های کل برابر است با $\frac{۷!}{۳}$.

(ترتیب قد یاشار، رضا و یحیی ۶ حالت دارد که در $\frac{۲}{۶}$ یا همان $\frac{۱}{۳}$ آن‌ها یاشار از هر دوی آن‌ها بلندتر است.)

رضا > یحیی > یاشار

یحیی > رضا > یاشار

یحیی > یاشار > رضا

رضا > یاشار > یحیی

یاشار > رضا > یحیی

یاشار > یحیی > رضا

گام چهارم:

$$\text{احتمال مطلوب} = \frac{۵! \times ۴}{\frac{۷!}{۳}} = \frac{۵! \times ۳ \times ۴}{۷!} = \frac{۲}{۷}$$

۴۱ اساس کار رادار دوپلری و میکروفون سهموی به ترتیب از راست به چپ، بازتاب کدام امواج است؟

۱) مکانیکی، مکانیکی

۲) الکترومغناطیسی، الکترومغناطیسی

۳) الکترومغناطیسی، مکانیکی

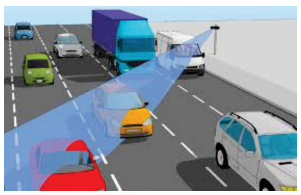
۴) مکانیکی، الکترومغناطیسی

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اساس کار میکروفون سهموی، بر مبنای بازتاب امواج مکانیکی (صوتی) است و برای ثبت صداهای ضعیف استفاده می‌شود.



تصویری از یک میکروفون سهموی

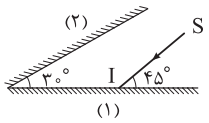
اساس کار رادار دوپلری، بر مبنای بازتاب امواج الکترومغناطیسی است که برای تعیین تندی خودروها به کار می‌رود.



در جدول زیر، کاربرد و اساس کار وسایلی که در کتاب درسی مطرح شده است را برایتان آورده‌ایم:

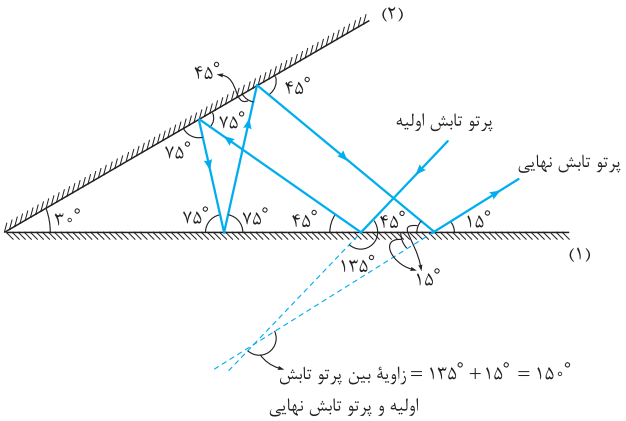
نام وسیله	اساس کار	کاربرد
میکروفون سهموی	بازتاب امواج مکانیکی (صوتی)	ثبت صداهای ضعیف
لیتوتریپسی	بازتاب امواج مکانیکی (صوتی)	شکستن سنگ کلیه
رادار دوپلری	بازتاب امواج الکترومغناطیسی	تعیین تندی خودروها
اجاق خورشیدی	بازتاب امواج الکترومغناطیسی	گرم‌کردن و پختن غذا
آنتن‌های بشقابی	بازتاب امواج الکترومغناطیسی	دریافت سیگنال
تندی‌سنج شارش خون	بازتاب امواج مکانیکی (فراصوتی)	تعیین تندی شارش خون در رگ‌ها

۴۲ در شکل زیر، پرتو SI به آینهٔ (۱) می‌تابد. پرتو نهایی بازتاب‌شده از آینه‌ها با پرتو SI زاویهٔ چند درجه می‌سازد؟ (طول آینه‌ها به اندازهٔ کافی بلند است.)



۱) ۹۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

پاسخ خیلی تشریحی ✔ به کمک قانون بازتاب عمومی داریم:



یه‌جور دیگه

گام اول: ابتدا تعداد برخورد پرتو به دو آینه را به دست می‌آوریم.

$$n=[\frac{۱۸۰-\theta}{\alpha}]+۱ \xrightarrow{\theta=۴۵^\circ,\ \alpha=۳۰^\circ} n=[\frac{۱۳۵}{۳۰}]+۱=۵$$

گام دوم: حالا زاویهٔ بین پرتو نهایی با پرتو SI را حساب می‌کنیم.

$$D=(n-۱)\alpha+۲\beta \xrightarrow[\beta=۹۰^\circ-۴۵^\circ=۴۵^\circ]{n=۵,\alpha=۳۰^\circ} D=(۵-۱)\times ۳۰+۲\times ۴۵=۱۲۰^\circ+۹۰^\circ=۲۱۰^\circ \Rightarrow D=۳۶۰^\circ-۲۱۰^\circ=۱۵۰^\circ$$

۴۳ برای مکان‌یابی پژواکی جسمی کروی به قطر ۲ cm در آب از امواج فراصوتی استفاده می‌شود. برای تشخیص این جسم، بسامد این امواج برابر با چه تعداد از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ (تندی انتشار صوت در آب ۱۵۰۰ m / s است.)

الف) ۲۵ kHz

ب) ۷۵ kHz

پ) ۱۲۵ kHz

ت) ۲۵۰ kHz

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

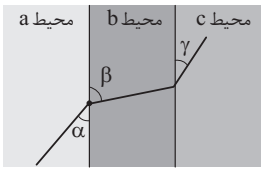
برای تشخیص این جسم باید طول موج امواج گسیل‌شده، کم‌تر یا مساوی ابعاد جسم باشد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\lambda \le ۰/۰۲ \xrightarrow{\lambda=\frac{v}{f}} \frac{v}{f} \le ۰/۰۲ \xrightarrow{v=۱۵۰۰\,m/s} \frac{۱۵۰۰}{f} \le ۰/۰۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱۵۰۰}{۰/۰۲} \le f \Rightarrow f \ge ۷۵۰۰۰Hz = ۷۵kHz$$

بنابراین بسامد موج باید بزرگ‌تر یا مساوی ۷۵kHz باشد؛ در نتیجه مقادیر ۷۵kHz، ۱۲۵kHz و ۲۵۰kHz قابل قبول هستند.

۴۴ در شکل زیر جبههٔ موجی با عبور از محیط اولیهٔ **a**، از طریق محیط **b**، وارد محیط **c** شده است. کدام مورد دربارهٔ این موج درست است؟ $(\beta > \alpha > \gamma)$



۱) بسامد موج در محیط a بیشتر از بسامد آن در محیط b است.

۲) دورهٔ موج در محیط b بیشتر از دورهٔ آن در محیط c است.

۳) تندی انتشار موج در محیط a بیشتر از تندی انتشار آن در محیط b است.

۴) طول موج در محیط b بیشتر از طول موج آن در محیط c است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ می‌دانیم در اثر شکست موج، بسامد و دورهٔ تناوب موج که مربوط به چشمهٔ موج است، ثابت می‌ماند؛ بنابراین داریم:

$$f_a = f_b = f_c \ , \ T_a = T_b = T_c$$

در نتیجه گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند.

از طرفی می‌دانیم زاویهٔ جبههٔ موج با مرز دو محیط همان زاویهٔ پرتوی موج با خط عمود بر مرز دو محیط است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\beta > \alpha > \gamma \Rightarrow \theta_b > \theta_a > \theta_c \Rightarrow \sin\theta_b > \sin\theta_a > \sin\theta_c$$

در نتیجه طبق قانون شکست عمومی داریم:

$$v_b > v_a > v_c$$

بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

$$\xrightarrow{\lambda \alpha v} \lambda_b > \lambda_a > \lambda_c$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

گول نخوری ✘ دقت کنید که شکل، مربوط به جبهه‌های موج است نه پرتو، اگه حواست نباشه توی دام گزینهٔ (۳) می‌افتی.

۴۵ تندی انتشار موج در محیط (۲)، $\sqrt{۳}$ برابر تندی انتشار موج در محیط (۱) است. جبهه‌های موج تختی از محیط (۱) به محیط (۲) می‌تابند. بخشی از جبهه‌های موج وارد محیط (۲) شده و بخشی از آن‌ها بازتاب می‌شوند. اگر جبهه‌های موج شکست‌یافته، بر جبهه‌های موج بازتابیده عمود باشند، زاویهٔ بین راستای جبهه‌های موج شکست‌یافته با راستای جبهه‌های موج تابیده چند درجه است؟ (مرز بین دو محیط، یک سطح صاف است.)

یعنی زاویهٔ انحراف پرتوی شکست نسبت به پرتوی تابیده‌شده چه‌قدر است؟

یعنی پرتوی شکست بر پرتوی بازتاب عمود باشد.

پس وقتی پرتوی موج از محیط (۱) وارد محیط (۲) می‌شه باید از خط عمود دورتر بشه ($\theta_۲ > \theta_۱$)

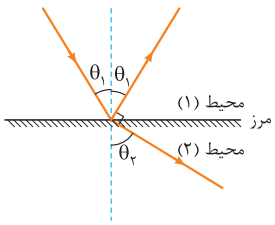
۱) ۱۵

۲) ۳۰

۳) ۶۰

۴) ۹۰

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به اطلاعات سؤال و تعبیر آن، مطابق شکل زیر داریم:



$$\theta_۱ + \theta_۲ + ۹۰ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_۱ + \theta_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow \sin\theta_۱ = \cos\theta_۲$$

حالا طبق قانون شکست عمومی می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱} = \frac{v_۲}{v_۱} \xrightarrow{v_۲ = \sqrt{۳}v_۱} \frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱} = \sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{\sin\theta_۱ = \cos\theta_۲} \frac{\sin\theta_۲}{\cos\theta_۲} = \tan\theta_۲ = \sqrt{۳} \Rightarrow \theta_۲ = ۶۰^\circ \ , \ \theta_۱ = ۳۰^\circ$$

حالا زاویهٔ بین جبههٔ موج در محیط (۲) با جبههٔ موج در محیط (۱) که همان زاویهٔ انحراف است را به دست می‌آوریم:

$$D = |\theta_۲ - \theta_۱| = ۶۰ - ۳۰ = ۳۰^\circ$$

۴۶ یک تار دو انتها بسته به طول ۵۰ cm با بسامد ۶۰۰ Hz در هماهنگ پنجم در حال ارتعاش است. اگر طول موج صوت گسیل‌شده توسط تار، ۵۵ cm باشد، تندی انتشار موج عرضی در این تار و تندی انتشار صوت در هوای اطراف تار به ترتیب از راست به چپ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۲۰، ۳۴۰
۲) ۱۵۰، ۳۳۰
۳) ۱۵۰، ۳۴۰
۴) ۱۲۰، ۳۳۰

پاسخ خیلی تشریحی ✔

طبق رابطهٔ $f_n = \frac{nv}{2L}$، تندی انتشار موج عرضی در تار را حساب می‌کنیم. با توجه به این‌که بسامد هماهنگ پنجم برابر با ۶۰۰Hz است، داریم:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \Rightarrow 600 = \frac{5 \times v}{2 \times 0/5} \Rightarrow v = 120\ m/s$$

از طرفی تندی انتشار صوت در هوا را طبق رابطهٔ $v = \lambda f$ به دست می‌آوریم:

$$v = \lambda f \Rightarrow v = 0/55 \times 600 = 330\ m/s$$

۴۷ اختلاف طول موج دو موج الکترومغناطیسی **A** و **B** در خلأ برابر $۶۰۰\ nm$ و بسامد موج **A**، ۴ برابر بسامد موج **B** است. انرژی هر یک از فوتون‌های مربوط به موج **A** چند الکترون ولت است؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm)$

۱) ۰/۶۲ ۲) ۱/۵۵

۳) ۶/۲ ۴) ۱۵/۵

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طول موج A را حساب می‌کنیم. طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{c}{f}$ و با توجه به این‌که بسامد موج A، ۴ برابر بسامد موج B است، در می‌یابیم طول موج A، $\frac{۱}{۴}$ طول موج B است. از طرفی با توجه به اختلاف طول موج A و B داریم:

$$\begin{cases} \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{f_B}{f_A} = \frac{۱}{۴} \\ \lambda_B - \lambda_A = ۶۰۰\ nm \end{cases} \Rightarrow ۴\lambda_A - \lambda_A = ۶۰۰\ nm \Rightarrow \lambda_A = ۲۰۰\ nm$$

گام دوم: انرژی هر یک از فوتون‌های موج A را حساب می‌کنیم:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow E_A = \frac{۱۲۴۰}{۲۰۰} = ۶/۲\ eV$$

۴۸ شدت تابشی امواج الکترومغناطیسی که به سطحی به مساحت $200\ cm^2$ می‌رسد، برابر $4\ W/m^2$ است. اگر بسامد این موج $5\times10^{14}\ Hz$ باشد، در هر دقیقه چند فوتون به این سطح می‌رسد؟ $(h = 6\times10^{-34}\ J\cdot s)$

۱) $1/6\times10^{19}$

۲) $1/6\times10^{20}$

۳) $9/6\times10^{19}$

۴) $9/6\times10^{20}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: انرژی هر فوتون را حساب می‌کنیم:

$$E_{\text{فوتون}} = hf \Rightarrow E_{\text{فوتون}} = 6\times10^{-34}\times5\times10^{14} = 3\times10^{-19}\ J$$

گام دوم: انرژی که در هر دقیقه به سطح می‌رسد را حساب می‌کنیم:

$$I = \frac{E}{At} \Rightarrow 4 = \frac{E}{200\times10^{-4}\times60} \Rightarrow E = 4/8\ J$$

گام سوم: تعداد فوتون‌ها را به دست می‌آوریم:

$$E = nE_{\text{فوتون}} \Rightarrow 4/8 = n\times3\times10^{-19} \Rightarrow n = 1/6\times10^{19}$$

۴۹ کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ مدل‌های اتمی تامسون و رادرفورد درست است؟

۱) در مدل اتمی تامسون، بار مثبت که سهم ناچیزی در جرم اتم دارد، به طور همگن در سراسر آن پخش شده است.

۲) در مدل اتمی رادرفورد، با حرکت الکترون به دور هسته، طول موج امواج الکترومغناطیسی گسیلی از آن به تدریج افزایش می‌یابد.

۳) مدل اتمی رادرفورد، برخلاف مدل اتمی تامسون، طیف خطی گسیل‌شده از اتم‌ها را توجیه می‌کند.

۴) در مدل اتمی رادرفورد، بنابر فیزیک کلاسیک، حرکت شتابدار الکترون به دور هسته، سبب تابش امواج الکترومغناطیسی می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

طبق متن کتاب درسی، گزینهٔ (۴) صحیح است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱) نادرست است؛ زیرا در مدل اتمی تامسون، بار منفی که سهم ناچیزی در جرم اتم دارد، به طور همگن در سراسر آن پخش شده است.

گزینهٔ (۲) نادرست است؛ زیرا افزایش طول موج امواج الکترومغناطیسی گسیلی در اثر نزدیک‌شدن چرخش الکترون به هسته، ناسازگاری مدل رادرفورد با واقعیت و نارسایی این مدل است.

گزینهٔ (۳) نادرست است؛ زیرا هیچ‌یک از مدل‌های رادرفورد و تامسون، طیف خطی گسیل‌شده از اتم‌ها را توجیه نمی‌کنند.

گزینهٔ (۴) درست است؛ زیرا مدل رادرفورد بر مبنای فیزیک کلاسیک ارائه شده است.

۵۰ با تابش نوری با بسامد **f** بر سطح یک فلز، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد، برای افزایش بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها کدام‌یک از تغییرهای زیر مؤثر است؟

الف) زمان تابش نور را افزایش دهیم.

ب) از فلزی با بسامد آستانهٔ کم‌تر استفاده کنیم.

پ) از نوری با بسامد بیشتر از **f** استفاده کنیم.

ت) بدون تغییر بسامد، شدت نور تابیده را افزایش دهیم.

۱) الف و ت ۲) ب و پ

۳) ب و ت ۴) الف و پ

Hint

در پدیدهٔ فوتوالکتریک، باید تأثیر تغییر بسامد نور، تغییر بسامد آستانه در اثر تغییر فلز و تغییر شدت نور تابیده را بر انرژی جنبشی بررسی کنید.

درس Box

قانون پایستگی انرژی در پدیدهٔ فوتوالکتریک بیان می‌کند که: $hf = W + K$

اگر W برابر با W_0 (تابع کار فلز) شود، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها بیشینه می‌شود و داریم:

$$K_{max} = hf - W_0 = hf - hf_0$$

از رابطهٔ بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم که با افزایش شدت تابش، مقدار انرژی که به هر الکترون می‌رسد تا از سطح فلز کنده شود تغییر نمی‌کند، در واقع انرژی جنبشی فقط تابع بسامد نور فرودی و جنس فلز (تابع کار) است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

طبق رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها، تأثیر تغییر f و f_0 را بررسی می‌کنیم:

$$K_{max} = hf - \underbrace{hf_0}_{\text{تابع کار فلز}}$$

با توجه به رابطهٔ بالا می‌بینیم که با افزایش بسامد نور فرودی و با تغییر فلز و کاهش بسامد آستانه، بیشینهٔ انرژی جنبشی افزایش می‌یابد.

افزایش زمان تابش نور و افزایش شدت نور تابیده‌شده باعث افزایش تعداد فوتوالکترون‌ها می‌شود ولی تأثیری روی انرژی جنبشی ندارد.

۵۱ الکترون در اتم هیدروژن در تراز $n = ۴$ قرار دارد. این الکترون مستقیماً به حالت پایه می‌رود و فوتون گسیلی به فلزی برخورد می‌کند که تابع کار آن $۵/۲۵\ eV$ است. بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از فلز چند الکترون ولت است؟ $(E_R = ۱۳/۶\ eV)$

۱) $۴/۴$
۲) $۷/۵$
۳) $۷/۲۵$
۴) $۴/۲۵$

مشاوره: این تست مشابه سؤال کنکور ریاضی نوبت اول ۱۴۰۳ است.

Hint ابتدا به کمک رابطهٔ ریدبرگ، انرژی فوتون گسیلی را محاسبه کنید و سپس در رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی، داده‌ها را جای‌گذاری کنید.

درس Box

۱) انرژی الکترون در اتم هیدروژن در مدار nاُم:

$$E_n = \frac{-۱۳/۶}{n^۲}$$ ← شمارهٔ مدار الکترون

وقتی در اتم هیدروژن، الکترون در یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) به یک حالت مانا با انرژی کم‌تر (E_L) می‌رود یک فوتون گسیل می‌کند که انرژی این فوتون از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$$E_{\text{فوتون}} = E_U - E_L$$

۲) بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در پدیدهٔ فوتوالکتریک از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$K_{max} = E_{\text{فوتون}} - W_۰$$ ↓ تابع‌کار

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا باید انرژی فوتون گسیلی را محاسبه کنیم. طبق رابطهٔ ریدبرگ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{فرودی}} = \frac{-۱۳/۶}{n^۲} \\ E_{\text{فرودی}} = E_۴ - E_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow E_۴ - E_۱ = -۱۳/۶\left(\frac{۱}{۴^۲} - \frac{۱}{۱^۲}\right) = -۱۳/۶\left(\frac{۱}{۱۶} - ۱\right)$$

$$\Rightarrow E_{\text{فرودی}} = -۱۳/۶ \times \left(\frac{-۱۵}{۱۶}\right) = ۱۲/۷۵\ eV$$

گام دوم: در رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی، $E_{\text{فرودی}}$ و $W_۰$ را داریم، پس:

$$K_{max} = E_{\text{فرودی}} - W_۰ = ۱۲/۷۵ - ۵/۲۵ = ۷/۵\ eV$$

۵۲ در آزمایش فوتوالکتریک طول موج آستانهٔ فلزی $400\ nm$ است. نوری با طول موج λ به فلز می‌تابد و سبب گسیل فوتوالکترونی با بیشینهٔ تندی $8\times10^{5}\ m/s$ می‌شود. λ چند نانومتر است؟ $(e=1/6\times10^{-19}C, c=3\times10^{8}\ m/s, h=4\times10^{-15}eV.s, m_e=9\times10^{-31}\ kg)$

۱) ۸۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۵۰

مشاوره اثر فوتوالکتریک در اکثر کنکورهای سال‌های اخیر مطرح شده است سعی کنید محاسبات مربوط به آن را بیشتر تمرین کنید.

Hint

ابتدا بیشینهٔ انرژی جنبشی را محاسبه کنید و سپس از رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکتریک، طول موج نور تابیده‌شده را به دست آورید. به یکاهای h و λ توجه کنید و کمیت‌ها را در رابطه براساس یکای SI جای‌گذاری کنید.

درس Box

با توجه به معادلهٔ فوتوالکتریک می‌توانیم بنویسیم:

$$K_{max}=h\,c\,(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0})$$

(c: تندی نور در خلأ (m/s)، λ: طول موج تابشی به سطح فلز، λ_0: طول موج آستانه)

انرژی جنبشی از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شود:

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا بیشینهٔ انرژی جنبشی را به دست می‌آوریم:

$$K_{max}=\frac{1}{2}m_e v^2=\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times(8\times10^{5})^2=\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times64\times10^{10}=4/5\times64\times10^{-21}J$$

گام دوم: با استفاده از معادلهٔ فوتوالکتریک داریم:

$$K_{max}=hc(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0})\Rightarrow 4/5\times64\times10^{-21}=4\times10^{-15}\times3\times10^{8}\times\underbrace{1/6\times10^{-19}}_{\text{تبدیل er به J}}(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{400})\times\underbrace{10^{+9}}_{\text{تبدیل nm به m}}$$

$$\Rightarrow\frac{4/5\times64\times10^{-21}}{1/6\times10^{-19}}=1200(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{400})=\frac{1200}{\lambda}-3$$

$$\Rightarrow1/8+3=\frac{1200}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{1200}{4/8}=250\ nm$$

۵۳ کدام‌یک از موارد زیر، دربارهٔ الکترونی که در اتم هیدروژن از مدار $n_1 = 2$ به $n_2 = 4$ گذار می‌کند، درست است؟ $(e = 1/6\times10^{-19}C\ ,\ E_R = 13/6\ eV)$

۱) این الکترون، فوتونی با انرژی $4/08\times10^{-19}J$ گسیل می‌کند.

۲) این الکترون، فوتونی با انرژی $4/08\times10^{-19}J$ جذب می‌کند.

۳) این الکترون، فوتونی با انرژی $5/44\times10^{-19}J$ گسیل می‌کند.

۴) این الکترون، فوتونی با انرژی $5/44\times10^{-19}J$ جذب می‌کند.

Hint فقط کافیه به این نکته توجه کنی که گذار به مدار بالا بوده، پس با جذب انرژی همراه است و داده‌ها را در رابطهٔ $E_n = \frac{-E_R}{n^2}$ جای‌گذاری کنی تا اختلاف انرژی دو مدار رو به دست بیاری.

درس Box طبق فرضیه‌های بور، الکترون فقط روی مدارهای خاصی می‌تواند گردش کند و فقط مقدارهای معینی از انرژی را می‌تواند داشته باشد. انرژی الکترون در مدار nام از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شود:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2}$$

- در رابطهٔ بالا E_R اندازهٔ انرژی در مدار nاُم پایه $(n = 1)$ است که برابر با $13/6\ eV$ است.
- برای تبدیل یکای eV به J داریم: $1\ eV = 1/6\times10^{-19}J$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ از رابطهٔ $E_n = -\frac{E_R}{n^2}$ برای حل این سؤال استفاده می‌کنیم:

$$E_4 - E_2 = -\frac{E_R}{(4)^2} - (-\frac{E_R}{2^2}) = \frac{-E_R}{16} + \frac{E_R}{4} = \frac{3}{16}E_R = \frac{3}{16}\times13/6\ eV$$

$$\Rightarrow E_4 - E_2 = \frac{3}{16}\times13/6\times1/6\times10^{-19}J = 4/08\times10^{-19}\ J$$

الکترون برای گذار از مدار $n = 2$ به مدار $n = 4$ باید $4/08\times10^{-19}J$ انرژی جذب کند.

۵۴ در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، اختلاف شعاع مدار الکترون در سومین و چهارمین حالت برانگیخته چند پیکومتر است؟ (شعاع بور برای اتم هیدروژن $5/29\times10^{-11}\,m$ است.)

۱) ۵۲/۹ ۲) ۳۷۰/۳ ۳) ۴۷۶/۱ ۴) ۵۲۹

مشاوره این سؤال مشابه کنکور خارج تجربی ۸۵ و کنکور ریاضی ۹۵ است.

Hint فقط کافیه شمارهٔ مدار مربوط به سومین $(n=4)$ و چهارمین $(n=5)$ حالت برانگیخته را پیدا کنی و در رابطهٔ مدل اتمی بور $(a_n=a_0n^2)$ جای‌گذاری کنی.

درس Box طبق مدل اتمی بور، شعاع مدارهای اتم هیدروژن نمی‌توانند هر مقداری داشته باشند و فقط مقادیر خاصی را می‌توانند به خود بگیرند؛ یعنی:

$r_n = n^2 a_0$ → شعاع بور (کوچک‌ترین مدار اتم هیدروژن)

n: شمارهٔ مدار، r_n: شعاع مدار nام

پاسخ خیلی تشریحی سومین حالت برانگیخته یعنی $n_1=4$ و چهارمین حالت برانگیخته یعنی $n_2=5$. شعاع هر مدار در مدل اتمی بور از رابطهٔ $r_n=n^2a_0$ محاسبه می‌شود؛ پس اختلاف شعاع دو مدار برابر است با:

$$\Delta r=r_5-r_4=a_0(5^2-4^2)=5/29\times10^{-11}\times(25-16)=5/29\times10^{-11}\times9=47/61\times10^{-11}\,m\Rightarrow\Delta r=476/1\,pm$$

۵۵ انرژی فوتون متعلق به کوتاه‌ترین طول موج رشتهٔ براکت ($n' = 4$) هیدروژن اتمی چند الکترون ولت است؟ $(hc = 1240\ eV.nm\ ,\ R = 0/01\ (nm)^{-1})$

۱) $0/279$
۲) $0/775$
۳) $2/79$
۴) $7/75$

Hint ابتدا به کمک معادلهٔ ریدبرگ طول موج را حساب کنید و سپس با استفاده از رابطهٔ $E = \frac{hc}{\lambda}$، انرژی فوتون را به دست آورید.

درس Box

۱) مقدار انرژی هر فوتون با بسامد نور رابطهٔ مستقیم دارد و از معادلهٔ مقابل به دست می‌آید: $E = hf$

اگر در معادلهٔ بالا، معادل f یعنی $\frac{c}{\lambda}$ را جای‌گذاری کنیم به رابطهٔ مقابل می‌رسیم: $E = \frac{hc}{\lambda}$

۲) طول موج طیف‌های اتمی گاز هیدروژن را دانشمندی به نام ریدبرگ به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

ثابت ریدبرگ — طول موج — شمارهٔ تراز پایین — شمارهٔ تراز بالا

در هر رشته، کوتاه‌ترین طول موج مربوط به $n = \infty$ است.

در معادلهٔ ریدبرگ با قراردادن n'های متفاوت، به رشته‌های خاصی می‌رسیم که در جدول زیر مشاهده می‌کنید:

نام رشته	n'	n	معادلهٔ ریدبرگ
لیمان	۱	۲,۳,۴,...	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$
بالمر	۲	۳,۴,۵,...	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$
پاشن	۳	۴,۵,۶,...	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$
براکت	۴	۵,۶,۷,...	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$
پفوند	۵	۶,۷,۸,...	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: کوتاه‌ترین طول موج با $n = \infty$ متناظر است، پس طبق رابطهٔ $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ داریم:

$$\frac{1}{\lambda} = 0/01\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{1600} \Rightarrow \lambda = 1600\ nm$$

گام دوم: از معادلهٔ $E = \frac{hc}{\lambda}$، انرژی فوتون را محاسبه می‌کنیم:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow E = \frac{1240}{1600} = 0/775\ eV$$

۵۶ در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، انرژی فوتون متعلق به اولین خط رشتهٔ براکت $(n' = ۴)$ برابر $E_۱$، و انرژی فوتون متعلق به دومین خط رشتهٔ بالمر $(n' = ۲)$ برابر $E_۲$ است. $E_۱ - E_۲$ برابر چند ریدبرگ است؟

۱) ۰/۲۱
۲) −۰/۲۱
۳) ۰/۱۶۵
۴) −۰/۱۶۵

Hint از رابطهٔ ریدبرگ، انرژی فوتون مربوط به اولین خط رشتهٔ براکت یعنی $n' = ۴$ و $n = ۵$ و دومین خط رشتهٔ بالمر یعنی $n' = ۲$ و $n = ۴$ را حساب کنید و اختلاف آن‌ها را به دست آورید.

درس Box طبق رابطهٔ ریدبرگ داریم:

$$E_U - E_L = hf \Rightarrow \left(\frac{-E_R}{n_U^۲}\right) - \left(\frac{-E_R}{n_L^۲}\right) = hf$$

$$\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}} E_R\left(\frac{۱}{n_L^۲} - \frac{۱}{n_U^۲}\right) = \frac{hc}{\lambda}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس برای هر حالت، انرژی را بر حسب E_R محاسبه می‌کنیم:

$$E = E_R\left(\frac{۱}{n_L^۲} - \frac{۱}{n_U^۲}\right) \Rightarrow \begin{cases} E_۱ = E_R\left(\frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۲۵}\right) = E_R\left(\frac{۹}{۴۰۰}\right) \\ E_۲ = E_R\left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۱۶}\right) = E_R\left(\frac{۳}{۱۶}\right) \end{cases}$$

حال خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$E_۱ - E_۲ = E_R\left(\frac{۹}{۴۰۰}\right) - E_R\left(\frac{۳}{۱۶}\right) = -۰/۱۶۵E_R$$

۵۷ در اتم هیدروژن، الکترونی در چهارمین حالت برانگیخته است. طول موج پرتوی فرابنفشی که این الکترون می‌تواند گسیل کند، چند میکرومتر است؟ $(R = ۰/۰۱\ (nm)^{-۱})$

۱) $\frac{۵}{۴۸}$ ۲) $\frac{۸}{۷۵}$ ۳) $\frac{۵}{۹۶}$ ۴) $\frac{۴}{۷۵}$

Hint حالت پایه $n' = ۱$ و چهارمین حالت برانگیخته $n = ۵$ است؛ پس داده‌ها را در رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲})$ جای‌گذاری می‌کنیم.

درس Box درس‌باکس (۲) تست ۵۵ را مطالعه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ چهارمین حالت برانگیخته یعنی $n = ۵$. چون طول موج پرتوی فرابنفش خواسته شده، طبق جدول ۴–۱ کتاب درسی، الکترون باید به مدار $n' = ۱$ گذار انجام دهد؛ پس با جای‌گذاری داده‌ها در معادلهٔ ریدبرگ داریم:

$$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲}) = ۰/۰۱(\frac{۱}{۱^۲} - \frac{۱}{۵^۲}) = ۹۶ \times ۱۰^{-۴}\ nm^{-۱}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{۱۰^۴}{۹۶} \times \underbrace{۱۰^{-۹}}_{\text{تبدیل m به nm}} \times \underbrace{۱۰^۶}_{\text{تبدیل μm به m}} = \frac{۱۰}{۹۶} = \frac{۵}{۴۸}\ \mu m$$

۵۸ کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) در پدیدهٔ فلوئورسانی، طول موج نور گسیل‌یافته معمولاً برابرِ همان طول موج نور فرودی یا کوچک‌تر از آن است.

ب) برخی از خط‌های تاریک موجود در طیف خورشید، ناشی از جذب طول موج‌های مربوط به این خط‌ها توسط گازهای جو خورشید است.

پ) همهٔ اجسام در هر دمایی از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند که در دماهای معمولی بیشتر تابش‌های گسیل‌شده، در ناحیهٔ فروسرخ قرار دارند.

ت) طیف گسیلی جسم جامد، برخلاف گازهای کم‌فشار و رقیق، خطی و ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است.

۱) الف و ب ۲) الف و ت

۳) پ و ت ۴) ب و پ

درس Box

- در پدیدهٔ فلوئورسانی، طول موج گسیل‌یافته نمی‌تواند از طول موج نور فرودی کوتاه‌تر باشد و معمولاً برابر همان طول موج نور فرودی یا بزرگ‌تر از آن است.
- در سال ۱۸۱۴ با مشاهدهٔ دقیق طیف خورشید، خط‌های تاریک نازکی در آن کشف شد که تجربه نشان داد خط‌های تاریکی که فرانهوفر در طیف خورشید کشف کرده ناشی از جذب طول موج‌های مربوط به این خط‌ها توسط گازهای موجود در جو خورشید است و خط‌های دیگر به سبب جذب نور در گازهای جو زمین پدید می‌آیند.
- همهٔ اجسام در هر دمایی باشند از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند و در دماهای معمولی بیشتر تابش گسیل‌شده از سطح اجسام در ناحیهٔ فروسرخ طیف قرار دارد.
- تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد ناشی از برهم‌کنش‌های قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است در حالی که گازهای کم‌فشار و رقیق که اتم‌های منفرد آن‌ها از برهم‌کنش‌های قوی موجود در جسم جامد آزادند به جای طیف پیوسته، طیف گسسته، گسیل می‌کنند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس موارد «ب» و «پ» درست و موارد «الف» و «ت» نادرست هستند.

۵۹ الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n = ۷$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اگر این الکترون به حالت پایه برود، به ترتیب از راست به چپ، امکان گسیل چند نوع فوتون با انرژی متفاوت، و چند نوع فوتون در ناحیهٔ فروسرخ وجود دارد؟

۱) ۲۱، ۱۰
۲) ۲۱، ۱۱
۳) ۲۸، ۱۰
۴) ۲۸، ۱۱

پاسخ خیلی تشریحی تمام گذارهای ممکن یعنی گذار از مدارهای $n > ۱$ به مدار $n' = ۱$؛ پس:

رشتهٔ لیمان ← $(۱ \to ۲)\ (۱ \to ۳)\ (۱ \to ۴)\ (۱ \to ۵)\ (۱ \to ۶)\ (۱ \to ۷)$

رشتهٔ بالمر ← $(۲ \to ۳)\ (۲ \to ۴)\ (۲ \to ۵)\ (۲ \to ۶)\ (۲ \to ۷)$

رشتهٔ پاشن ← $(۳ \to ۴)\ (۳ \to ۵)\ (۳ \to ۶)\ (۳ \to ۷)$

رشتهٔ براکت ← $(۴ \to ۵)\ (۴ \to ۶)\ (۴ \to ۷)$

رشتهٔ پفوند ← $(۵ \to ۶)\ (۵ \to ۷)$

رشتهٔ همفریس (اسم این رشته در کتاب درسی نیامده است و لازم نیست حفظ باشید) ← $(۶ \to ۷)$

تمام گذارهای ممکن، ۲۱ گذار است.

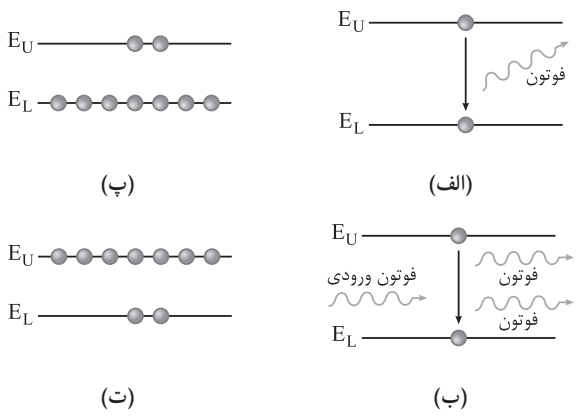
یه جور دیگه اگر در هیدروژن، الکترون در مدار nام قرار داشته باشد، تعداد تمام گذارهای ممکن الکترون برای این‌که به حالت پایه برسد، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{تعداد کل} = \frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$$

تمام طول موج‌های رشته‌های پاشن $(n' = ۳)$، براکت $(n' = ۴)$، پفوند $(n' = ۵)$ و همفریس $(n' = ۶)$ مربوط به ناحیهٔ طیفی فروسرخ است؛ پس جمعاً ۱۰ نوع فوتون در ناحیهٔ فروسرخ قرار دارند.

۶۰ به ترتیب از راست به چپ، کدام شکل نشان‌دهندهٔ فرایند گسیل القایی، و کدام شکل نشان‌دهندهٔ وضعیت وارونی جمعیت در لیزر است؟

مشاوره این سؤال مشابه کنکور داخل تجربی نوبت دوم ۱۴۰۲ است.



۱) الف، پ
۲) الف، ت
۳) ب، پ
۴) ب، ت

Hint مفاهیم مربوط به لیزر را دقیق مطالعه کنید.

درس Box

۱) در حالت معمول، بیشتر الکترون‌ها در تراز پایه با انرژی کم‌تر قرار دارند. اگر اتم انرژی لازم را دریافت کند، الکترون‌های بیشتری به تراز انرژی بالاتر برانگیخته می‌شوند و تعداد الکترون‌ها در ترازهایی معروف به تراز شبه‌پایدار نسبت به تراز پایین‌تر بیشتر می‌شود که در این حالت وارونی جمعیت رخ داده است.

۲) اگر الکترون به طور خودبه‌خودی از تراز بالاتر به تراز پایین‌تر گذاری انجام دهد، فوتون در جهت کاتوره‌ای گسیل می‌کند (گسیل خودبه‌خودی)، اما اگر یک فوتون که انرژی آن دقیقاً برابر اختلاف انرژی دو تراز باشد، الکترون برانگیخته را تحریک کند تا به تراز پایین‌تر برود، فوتون خروجی دقیقاً هم‌جهت، هم‌بسامد و هم‌فاز با فوتون ورودی گسیل می‌شود که این فرایند گسیل القایی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ شکل (الف) مربوط به گسیل خودبه‌خودی و شکل (ب) مربوط به گسیل القایی است. وارونی جمعیت نیز در شکل (ت) اتفاق افتاده است.

۶۱ در شکل زیر، یک آهنربای میله‌ای و یک عقربهٔ مغناطیسی در یک صفحه قرار دارند. اگر آهنربا حول مرکز خود و در جهت ساعتگرد یک دور کامل دوران کند، عقربهٔ مغناطیسی چند درجه و در چه جهتی دوران می‌کند؟



۱) ۳۶۰، ساعتگرد
۲) ۳۶۰، پادساعتگرد
۳) ۷۲۰، ساعتگرد
۴) ۷۲۰، پادساعتگرد

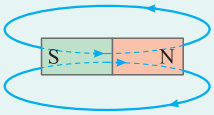
مشاوره این تست براساس یکی از فعالیت‌های کتاب درسی و مشابه کنکور ریاضی ۹۶ و کنکور ریاضی ۱۴۰۱ طراحی شده است.

Hint

کافی است آهنربا را یک دور کامل در جهت ساعتگرد بچرخانید و در هر حالت، عقربهٔ مغناطیسی را در جهت میدان مغناطیسی آهنربا قرار دهید.

درس Box

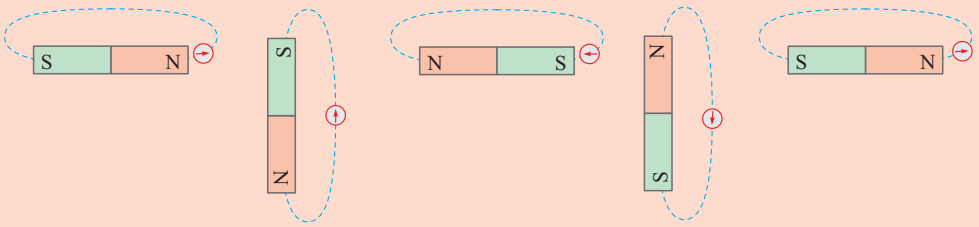
خطوط میدان مغناطیسی در اطراف آهنربا از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شوند، ولی جهت خطوط میدان مغناطیسی در داخل آهنربا از قطب S به سمت قطب N است.



جهت عقربهٔ مغناطیسی در هر نقطه از فضا جهت بردار میدان مغناطیسی در آن نقطه را نشان می‌دهد. دقت کنید قطب N عقربه، جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

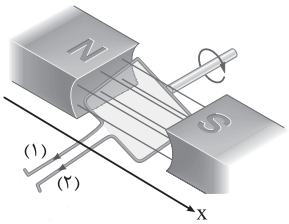
پاسخ خیلی تشریحی ✔

آهنربا را به صورت ساعتگرد یک دور کامل می‌چرخانیم و در هر مرحلهٔ ۹۰ درجه‌ای با توجه به این‌که جهت میدان مغناطیسی از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شود، جهت عقربهٔ مغناطیسی را مشخص می‌کنیم.



پس عقربهٔ مغناطیسی 360° و در جهت پادساعتگرد دوران می‌کند.

۶۲ در شکل زیر، حلقهٔ رسانای مستطیل‌شکلی که حامل جریان الکتریکی I است، درون میدان مغناطیسی یکنواخت، در جهت نشان داده شده می‌چرخد. جهت میدان مغناطیسی و جهت جریان I به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۱) در جهت محور x ، (۱)

۲) در جهت محور x ، (۲)

۳) در خلاف جهت محور x ، (۱)

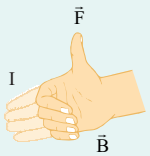
۴) در خلاف جهت محور x ، (۲)

Hint

جهت میدان مغناطیسی را مشخص کنید، سپس با توجه به جهت چرخش میله، جهت نیروهای وارد بر آن را تعیین کنید. در پایان به کمک قاعدهٔ دست راست جهت I را مشخص کنید.

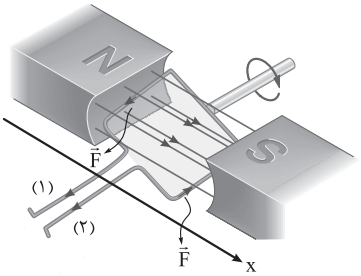
درس Box

جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم راست حامل جریان I که در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دارد، از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود، به این صورت که چهار انگشت دست راست را در جهت جریان قرار می‌دهیم، به گونه‌ای که جهت خم‌شدن چهار انگشت در جهت $\vec{B}$ باشد. در این صورت انگشت شست جهت نیرو را نشان می‌دهد.

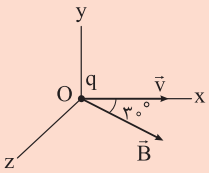


پاسخ خیلی تشریحی

خطوط میدان مغناطیسی در اطراف آهنربا همواره از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شوند. پس میدان مغناطیسی در جهت محور x است. جهت چرخش میله نشان می‌دهد که نیروهای وارد بر اجزای حلقه مطابق شکل زیر است. حالا اگر از قاعدهٔ دست راست کمک بگیریم، به راحتی می‌توان فهمید که جریان I عبوری از حلقه در جهت (۱) است.



۶۳ در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = 5\mu C$ با تندی $40 km/s$ در جهت محور x پرتاب شده است و بردار سرعت آن با میدان مغناطیسی $B = 400 G$ که عمود بر محور y است، زاویهٔ 30° می‌سازد. نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره، برحسب نیوتون در لحظهٔ پرتاب کدام است؟



۱) $0/04\vec{j}$

۲) $0/004\vec{j}$

۳) $-0/04\vec{j}$

۴) $-0/004\vec{j}$

مشاوره این سؤال مشابه کنکور ریاضی ۱۴۰۱ طراحی شده است.

Hint ابتدا به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت نیرو را مشخص کنید، سپس برای محاسبهٔ اندازهٔ نیرو، داده‌های سؤال را در رابطهٔ $F = qvB\sin\theta$ جای‌گذاری کنید.

درس Box

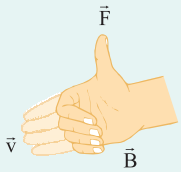
۱) اگر ذره‌ای با بار الکتریکی q و سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در حال حرکت باشد، به آن نیروی $\vec{F}$ وارد می‌شود که اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$F = q\,v\,B\,\sin\theta$$

F: نیروی مغناطیسی (N)، q: بار الکتریکی (C)، v: اندازهٔ سرعت (m/s)، B: میدان مغناطیسی (T)، θ: زاویهٔ بین بردار $\vec{v}$ و بردار $\vec{B}$

۲) تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک مثبت در میدان مغناطیسی:

اگر ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی قرار بگیرد، مطابق شکل، طبق قاعدهٔ دست راست جهت نیروی مغناطیسی تعیین می‌شود. چهار انگشت دست راست را در جهت $\vec{v}$ می‌گیریم؛ به طوری‌که جهت خم‌شدن چهار انگشت، جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را نشان دهد، در این صورت شست دست جهت بردار نیرو $(\vec{F})$ را نشان می‌دهد.



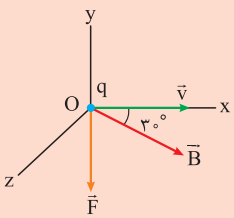
اگر بار ذره منفی بود، در نهایت جهت نیرو را برعکس می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از رابطهٔ $F = qvB\sin\theta$، اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذره را به دست می‌آوریم:

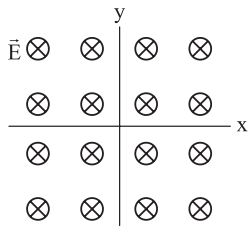
$$F = 5\times10^{-6}\times40\times10^{3}\times400\times10^{-4}\times\frac{1}{2} = 0/004\,N$$

گام دوم: برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره از قاعدهٔ دست راست کمک می‌گیریم:



پس نیروی مغناطیسی برابر $\vec{F} = (-0/004\,N)\vec{j}$ می‌شود.

۶۴ در شکل زیر، میدان الکتریکی یکنواخت $E = ۵۰ N/C$، عمود بر صفحه و به سمت داخل آن است. پروتونی با تندی $۲۰۰ m/s$ در جهت محور y پرتاب می‌شود. اگر با اعمال میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، پروتون بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ میدان مغناطیسی $\vec{B}$ الزاماً درست است؟



الف) $\vec{B}$ در جهت محور x است.

ب) $\vec{B}$ در خلاف جهت محور x است.

پ) اندازهٔ $\vec{B}$ برابر $۰/۲۵ T$ است.

ت) کمینهٔ اندازهٔ $\vec{B}$ برابر $۰/۲۵ T$ است.

۱) الف و پ

۲) ب و پ

۳) پ

۴) ت

مشاوره وقتی ذرهٔ باردار متحرک هم‌زمان در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی قرار می‌گیرد، ابتدا باید نیروهای الکتریکی و مغناطیسی وارد بر ذره را جدا بررسی کنیم و بعد آن‌ها را با هم مقایسه کنیم.

Hint ابتدا جهت نیروی الکتریکی و نیروی مغناطیسی را مشخص کنید. سپس با توجه به این‌که ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه داده، نیروهای مغناطیسی و الکتریکی را با هم برابر قرار دهید تا طبق داده‌ها، B را به دست آورید.

درس Box

اگر بار q در میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرار بگیرد، نیروی الکتریکی وارد بر آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$\vec{F}$: نیروی الکتریکی (N)، q: بار الکتریکی (C)، $\vec{E}$: میدان الکتریکی (N/C)

اگر $q > ۰ \Leftarrow$ $\vec{E}$ و $\vec{F}$ هم‌جهت هستند.

اگر $q < ۰ \Leftarrow$ $\vec{E}$ و $\vec{F}$ خلاف جهت هم هستند.

اگر ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q در ناحیه‌ای از فضا عبور کند که هم‌زمان تحت تأثیر دو میدان الکتریکی و مغناطیسی قرار بگیرد و ذره بدون انحراف، مسیر مستقیم خود را طی کند، باید نیروی خالص وارد بر آن صفر باشد، پس:

$$\vec{F}_T = ۰ \Rightarrow \vec{F}_B + \vec{F}_E + \vec{W} + \ldots = ۰$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

چون ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه داده است، پس اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره با اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذره برابر و جهت آن‌ها مخالف هم است. با توجه به این‌که $q > ۰$ است، $\vec{E}$ و $\vec{F}_E$ هم‌جهت هستند (جهت $\vec{F}_E$ درون‌سو است)، پس $\vec{F}_B$ باید برون‌سو باشد.

حالا با توجه به این‌که ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه داده است، پس:

$$\vec{F}_E + \vec{F}_B = ۰ \Rightarrow |F_E| = |F_B| \Rightarrow E\cancel{q} = \cancel{q}vB\sin\theta \Rightarrow B = \frac{E}{v\sin\theta} = \frac{۵۰}{۲۰۰\sin\theta}$$

$$\Rightarrow B = \frac{۱}{۴\sin\theta} \Rightarrow B_{min} = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵ T$$

(نادرستی عبارت «پ» و درستی عبارت «ت»)

چون اندازهٔ میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برابر با $\frac{۱}{۴\sin\theta}$ است، پس با توجه به $\sin\theta$، جهت میدان مغناطیسی می‌تواند با $\vec{v}$ هر زاویه‌ای بسازد. پس عبارت‌های «الف» و «ب» الزاماً درست نیستند.

۶۵ از سیمی به طول **۲m** که به صورت افقی و در راستای شرق به غرب قرار دارد، جریان **۲A** از شرق به غرب عبور می‌کند. اگر بزرگی میدان مغناطیسی زمین در محل سیم **۰/۴۵G** و شیب مغناطیسی در این محل 30° باشد، اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون است؟

۱) $1/8\times10^{-4}$

۲) $1/8\times10^{-5}$

۳) 9×10^{-4}

۴) 9×10^{-5}

مشاوره برای حل این مدل تست‌ها، فقط کافیه بتونی زاویهٔ θ رو تشخیص بدی، بقیهٔ راه حل یه جای‌گذاری ساده است.

Hint داده‌های سؤال را در رابطهٔ $F = ILB\sin\theta$ جای‌گذاری کنید.

درس Box

۱) بردار میدان مغناطیسی زمین در بیشتر نقاط زمین کاملاً افقی نیست و امتداد آن با سطح افق زاویه‌ای می‌سازد که به آن شیب مغناطیسی می‌گویند. شیب مغناطیسی وابسته به مکان جغرافیایی است.

۲) اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر سیمی به طول L و حامل جریان I که در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$F = I\,L\,B\,\sin\theta$

I: جریان الکتریکی (A)، L: طول سیمی که درمیدان مغناطیسی قرارگرفته (m)، B: میدان مغناطیسی (T)، θ: زاویهٔ بین خطوط میدان با جهت جریان، F: نیروی مغناطیسی (N)

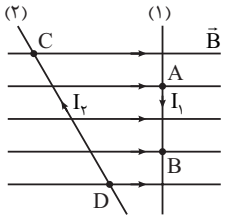
پاسخ خیلی تشریحی میدان مغناطیسی زمین را طبق قرارداد به طرف شمال یعنی درون‌سو ($\otimes$) در نظر می‌گیرند، در نتیجه زاویهٔ بین خطوط میدان و جهت جریان 90° است. دقت کنید شیب مغناطیسی، زاویهٔ بین عقربهٔ مغناطیسی (خطوط میدان) با سطح افق است و با زاویهٔ خطوط میدان با جهت جریان رابطه‌ای ندارد.

نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان از رابطهٔ $F = ILB\sin\theta$ محاسبه می‌شود، پس:

$$F = 2\times2\times0/45\times\underbrace{10^{-4}}_{\text{تبدیل G به T}}\times\underbrace{\sin90^\circ}_{1} = 1/8\times10^{-4}\ \text{N}$$

گول نخوری اگر به اشتباه به جای زاویهٔ بین میدان مغناطیسی و جهت جریان، شیب مغناطیسی زمین را جای‌گذاری کنی، به گزینهٔ اشتباه (۴) می‌رسی.

۶۶ در شکل زیر، دو سیم (۱) و (۲) در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارند. اگر جریان الکتریکی عبوری از سیم (۱)، ۲ برابر جریان الکتریکی عبوری از سیم (۲) و نیروی مغناطیسی وارد بر قطعهٔ **AB** از سیم (۱) برابر $\vec{F}$ باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر قطعهٔ **CD** از سیم (۲)، کدام است؟



۱) $۴\vec{F}$

۲) $-۴\vec{F}$

۳) $\vec{F}$

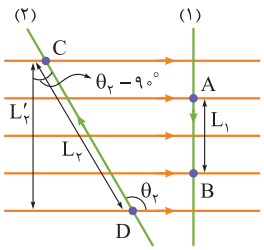
۴) $-\vec{F}$

Hint

از آن‌جایی که در میدان مغناطیسی یکنواخت، خطوط موازی و با فاصلهٔ یکسان از هم قرار دارند، نسبت طول سیم‌های AB و CD را پیدا کنید و سپس رابطهٔ $F = ILB\sin\theta$ را به صورت نسبتی برای هر دو سیم بنویسید تا نسبت F ها را به دست بیاورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون میدان مغناطیسی یکنواخت است، فاصلهٔ تمام خطوط یکسان است، یعنی در شکل ما $L'_۲ = ۲L_۱$ است؛ پس:



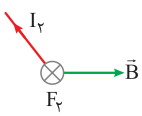
$$L'_۲ = L_۲\cos(\theta_۲ - ۹۰^\circ) = L_۲\sin\theta_۲$$

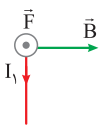
گام دوم: حال از رابطهٔ نسبتی $F = ILB\sin\theta$ داریم:

$$\frac{F_۱}{F_۲} = \frac{I_۱}{I_۲}\times\frac{L_۱}{L_۲}\times\frac{B}{B}\times\frac{\overbrace{\sin\theta_۱}^{۱}}{\sin\theta_۲} \xrightarrow{I_۱=۲I_۲} \frac{F}{F_۲} = \frac{۲I_۲}{I_۲}\times\frac{L_۱}{\underbrace{L_۲\sin\theta_۲}_{L'_۲}}$$

$$\xrightarrow{L'_۲=۲L_۱} \frac{F}{F_۲} = ۲\times\frac{۱}{۲} = ۱ \Rightarrow F = F_۲$$

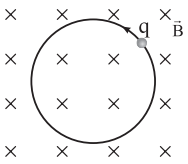
گام سوم: برای تعیین جهت نیرو، از قاعدهٔ دست راست کمک می‌گیریم:





پس $\vec{F}_۲ = -\vec{F}$.

۶۷ در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی q در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 0/5T$ و تنها تحت تأثیر آن، روی محیط دایره‌ای به شعاع ۲۰cm، درجهت نشان داده شده، در حال حرکت است. اگر اندازهٔ تکانهٔ ذره در SI برابر 2×10^{-6} باشد، q برحسب میکروکولن کدام است؟



۱) ۲

۲) ۲۰

۳) -2

۴) -20

مشاوره در سؤالاتی که حرکت روی مسیر دایره‌ای است، به دنبال نیروی تأمین‌کنندهٔ نیروی مرکزگرا باشید.

Hint با توجه به این‌که نیروی مغناطیسی وارد بر ذره، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند، مقدار بار q را از رابطهٔ $F_B = F_c$ $(qvB\sin\theta = \frac{mv^2}{R})$ به دست آورید.

درس Box

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، به نیرویی که باعث حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌شود نیروی مرکزگرا می‌گویند. این نیرو به سمت مرکز دایره است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

F_c: نیروی خالص رو به مرکز (N)، m: جرم (kg)، v: تندی جسم (m/s)، r: شعاع دایره (m)

تکانه: حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت آن را تکانه می‌گویند:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

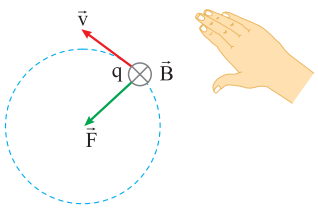
$\vec{p}$: تکانهٔ جسم $(\frac{kg\cdot m}{s})$، m: جرم (kg)، $\vec{v}$: سرعت (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی عامل حرکت بار الکتریکی در مسیر دایره‌ای، نیروی مرکزگرا است که در این‌جا نیروی مغناطیسی این نیرو را تأمین می‌کند:

$$F_c = F_B \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = qvB \xrightarrow[\theta=90^\circ \Rightarrow \sin 90^\circ = 1]{\sin\theta} \Rightarrow \frac{mv}{rB} = q \xrightarrow{mv=p} \frac{p}{rB} = q$$

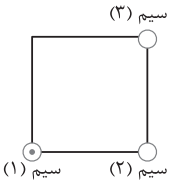
$$\Rightarrow q = \frac{2\times10^{-6}}{20\times10^{-2}\times0/5} = 2\times10^{-5}\,C = 20\,\mu C$$

برای تعیین مثبت یا منفی بودن بار، کافی است با توجه به این‌که نیروی مغناطیسی $(\vec{F})$، به سمت مرکز دایره، میدان مغناطیسی $(\vec{B})$ درون‌سو و سرعت $(\vec{v})$ مماس بر مسیر حرکت است، قاعدهٔ دست راست را به کار بگیریم. اگر با دست راست منطبق بود، بار مثبت و اگر برعکس بود، بار منفی است.



منطبق بر دست راست $\Rightarrow q > 0$

۶۸ در شکل زیر، سه سیم حامل جریان، روی سه رأس مربعی، عمود بر صفحه قرار دارند و جریان عبوری از سیم (۱)، برون‌سو است. اگر میدان مغناطیسی خالص در رأس چهارم مربع برابر صفر باشد، میدان مغناطیسی خالص در مرکز مربع در چه جهتی است؟





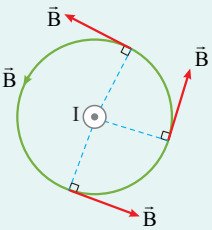
مشاوره سؤال‌های مربوط به میدان مغناطیسی ناشی از سیم مستقیم ما را درگیر محاسبات نمی‌کنند و به صورت مفهومی حل می‌شوند.

Hint

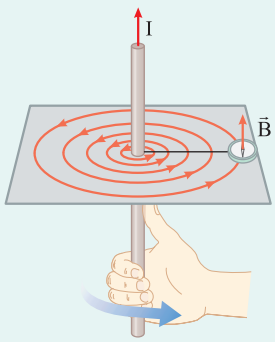
ابتدا جهت میدان مغناطیسی سیم (۱) را در رأس چهارم پیدا کنید و با توجه به این‌که میدان خالص در این رأس صفر است، جهت خطوط میدان سیم‌های (۲) و (۳) و سپس جهت جریان آن‌ها را پیدا کنید. در نهایت به کمک قاعدهٔ دست راست، خطوط میدان مغناطیسی ناشی از هر سه سیم را در مرکز مربع کشیده و برایند آن‌ها را پیدا کنید.

درس Box

۱) یک سیم حامل جریان الکتریکی، در اطراف خود میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند که جهت این میدان به کمک قاعدهٔ دست راست مشخص می‌شود. به این صورت که اگر انگشت شست را در جهت جریان قرار دهیم، جهت خم‌شدن انگشتان دست راست، جهت میدان مغناطیسی اطراف سیم را نشان می‌دهد.

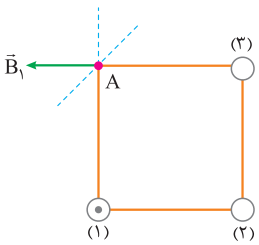


۲) اگر سیم حامل جریان بر صفحه عمود باشد، بردار میدان مغناطیسی در هر نقطه از صفحه بر خطی که آن نقطه را به سیم وصل می‌کند، عمود است.

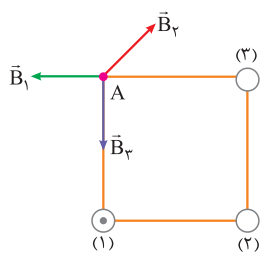


پاسخ خیلی تشریحی

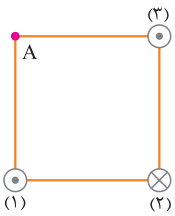
گام اول: ابتدا میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۱) را در نقطهٔ A (رأس چهارم) مشخص می‌کنیم. طبق مورد (۲) درس‌باکس، راستای میدان‌های مغناطیسی ناشی از سیم‌های (۲) و (۳) باید به صورت خط‌چین‌های رسم‌شده باشند.



گام دوم: برای این‌که میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ A صفر باشد، باید میدان‌های $\vec{B}_2$ و $\vec{B}_3$ در جهت‌های نشان در شکل روبه‌رو باشند، هم‌چنین لازم است که $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_3$ هم‌اندازه باشند تا برایند آن‌ها در خلاف جهت $\vec{B}_2$ قرار بگیرد. با توجه به هم‌اندازه‌بودن $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_3$ و یکسان‌بودن فاصلهٔ سیم‌های (۱) و (۳) تا نقطهٔ A، نتیجه می‌گیریم که I_1 و I_3 یکسان‌اند.

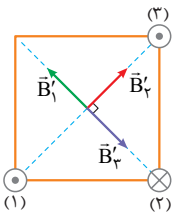


حالا به کمک قاعدهٔ دست راست جهت جریان سیم‌های (۲) و (۳) را پیدا می‌کنیم:



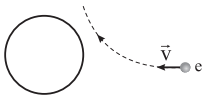
جریان سیم (۳) باید برون‌سو و جریان سیم (۲) باید درون‌سو باشد.

گام سوم: جهت جریان هر سه سیم مشخص شده است، پس جهت میدان مغناطیسی ناشی از هر سیم را در مرکز مربع پیدا کرده و در نهایت برایند آن‌ها را به دست می‌آوریم:



چون فاصلهٔ سیم‌های (۱) و (۳) از مرکز به یک اندازه و جریان‌هایشان برابر است، پس دو میدان $\vec{B}'_1$ و $\vec{B}'_3$ یکدیگر را خنثی می‌کنند و میدان مغناطیسی خالص در مرکز مربع برابر با $\vec{B}'_2$ است.

۶۹ در شکل زیر، حلقهٔ حامل جریانی در صفحه قرار دارد. در این صفحه، الکترونی با سرعت $\vec{v}$ در جهت نشان داده شده، پرتاب می‌شود. با توجه به مسیر حرکت الکترون، جهت جریان عبوری از حلقه و جهت میدان مغناطیسی در مرکز آن کدام است؟



۱) ساعتگرد، $\otimes$

۲) ساعتگرد، $\odot$

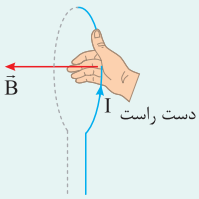
۳) پادساعتگرد، $\otimes$

۴) پادساعتگرد، $\odot$

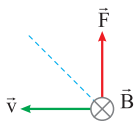
مشاوره این تست ترکیبی از نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک و میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی در حلقه است.

Hint ابتدا به کمک قاعدهٔ دست راست و با توجه به این‌که بار ذره منفی است، جهت میدان مغناطیسی خارج حلقه را مشخص کنید و سپس با توجه به مشخص‌شدن جهت میدان خارج حلقه، جهت میدان داخل حلقه و جهت جریان حلقه را پیدا کنید.

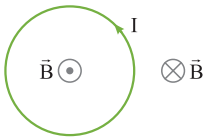
درس Box **جهت میدان مغناطیسی در اطراف پیچهٔ مسطح:** اگر انگشت شست دست راست را در جهت جریان قرار دهیم، در این صورت جهت چرخش چهار انگشت، جهت میدان مغناطیسی اطراف حلقه را نشان می‌دهد.



پاسخ خیلی تشریحی با توجه به این‌که به الکترون نیرویی به سمت بالا وارد شده و بردار سرعت به سمت چپ است، جهت میدان مغناطیسی را پیدا می‌کنیم:

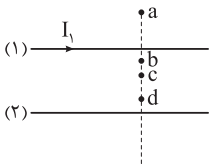


میدان در خارج حلقه درون‌سو است، پس میدان درون حلقه برون‌سو است؛ بنابراین جهت جریان به کمک قاعدهٔ دست راست پادساعتگرد خواهد بود.



گول نخوری اگر حواست به منفی‌بودن بار نباشه، به گزینهٔ اشتباه (۱) می‌رسی.

۷۰ در شکل زیر، دو سیم راست و موازی حامل جریان در یک صفحه قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ c برابر صفر باشد، چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟



الف) دو سیم نیروی مغناطیسی رانشی به یکدیگر وارد می‌کنند.

ب) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ a، برون‌سو است.

پ) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ b، درون‌سو است.

ت) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ d، برون‌سو است.

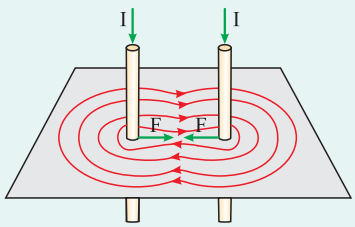
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

Hint

ابتدا به کمک جهت جریان سیم (۱)، میدان مغناطیسی ناشی از آن را در تمام نقاط مشخص کنید. سپس با توجه به صفربودن میدان خالص در نقطهٔ c، جهت میدان سیم (۲) در نقطهٔ c و جهت جریان آن را پیدا کنید. در نهایت چون عبارت‌ها در مورد میدان خالص در سایر نقاط است، در تمام نقاط، میدان خالص را بررسی کنید.

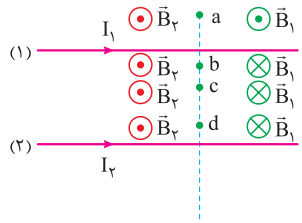
درس Box

- اندازهٔ میدان مغناطیسی اطراف سیم راست با فاصله از آن رابطهٔ عکس و با اندازهٔ جریان رابطهٔ مستقیم دارد.
- دو یا چند سیم حامل جریان، به واسطهٔ میدان مغناطیسی که اطراف خود ایجاد می‌کنند، به هم نیرو وارد می‌کنند. اگر در دو سیم موازی، جریان هم‌سو ایجاد شود، سیم (۱) در مکان سیم (۲) و سیم (۲) در مکان سیم (۱) میدان مغناطیسی تولید می‌کند. پس دو سیم که حامل جریان هستند، به واسطهٔ قرارگرفتن در میدان مغناطیسی، به هم نیرو وارد می‌کنند. جهت این نیروها طبق قاعدهٔ دست راست مطابق شکل است:



پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا جهت میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۱) را در نقطهٔ c طبق قاعدهٔ دست راست پیدا می‌کنیم، به این صورت که انگشت شست را در جهت جریان قرار می‌دهیم، جهت چرخش انگشتان، جهت میدان در اطراف سیم را نشان می‌دهد؛ میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۱) در نقاط b ،c و d درون‌سو و در نقطهٔ a برون‌سو است.

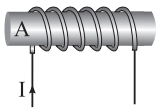


پس در نقطهٔ c میدان ناشی از سیم (۲) باید برون‌سو باشد و چون نقطهٔ c به سیم (۱) نزدیک‌تر است، باید $I_2 > I_1$ باشد تا میدان خالص در نقطهٔ c صفر باشد. حالا طبق قاعدهٔ دست راست، جهت جریان سیم (۲) را مشخص می‌کنیم؛ جریان سیم (۲) هم‌جهت با سیم (۱) است؛ بنابراین دو سیم یکدیگر را جذب می‌کنند (نادرستی عبارت «الف»).

طبق جهت جریان در سیم (۲)، میدان مغناطیسی ناشی از آن را در تمام نقاط مشخص می‌کنیم:

- در نقطهٔ d، چون میدان‌ها خلاف جهت هم هستند و با توجه به این‌که $I_2 > I_1$ است، پس میدان خالص هم‌جهت با $\vec{B}_2$ و برون‌سو است (درستی عبارت «ت»).
- در نقطهٔ b، چون بالاتر از نقطهٔ c است، میدان سیم (۱) بزرگ‌تر است. در نتیجه میدان خالص هم‌جهت با $\vec{B}_1$ و درون‌سو است (درستی عبارت «پ»).
- در نقطهٔ a هر دو میدان هم‌جهت و برون‌سو هستند، پس میدان خالص برون‌سو است (درستی عبارت «ب»).

۷۱ در شکل زیر، جریان الکتریکی عبوری از سیم‌لولهٔ آرمانی، $I = 2A$ و تعداد دورهای آن در هر $10cm$ از طول سیم‌لوله برابر ۴۰ است. اندازهٔ میدان مغناطیسی در داخل سیم‌لوله چند گاوس و قسمت A کدام قطب سیم‌لوله است؟ $(\mu_0 = 12/5 \times 10^{-7} \frac{T.m}{A})$



۱) ۱، N

۲) ۱، S

۳) ۱۰، N

۴) ۱۰، S

Hint

ابتدا به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی در داخل سیم‌لوله را پیدا کنید (قطب N جهت میدان را نشان می‌دهد.)

سپس طبق رابطهٔ $B = \frac{\mu_0 NI}{L}$، اندازهٔ میدان مغناطیسی در داخل سیم‌لوله را حساب کنید.

درس Box

۱) اندازهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت درون یک سیم‌لولهٔ آرمانی حامل جریان در نقاطی دور از لبه‌های آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

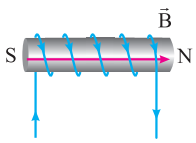
B: اندازهٔ میدان مغناطیسی (T)، μ_0: ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ $(\frac{T \cdot m}{A})$، N: تعداد دورهای سیم‌لوله، I: جریان (A)، L: طول سیم‌لوله (m)

رابطهٔ تسلا و گاوس به صورت مقابل است: $1G = 10^{-4} T$

۲) **تعیین جهت میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله:** به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی به دست می‌آید. به این صورت که اگر چهار انگشت دست راست را در جهت جریان قرار دهیم، انگشت شست جهت میدان درون سیم‌لوله را نشان می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق قاعدهٔ دست راست، میدان مغناطیسی ناشی از سیم‌لوله به سمت راست به دست می‌آید؛ پس قسمت A، قطب S سیم‌لوله است.



گام دوم: اندازهٔ میدان مغناطیسی در درون سیم‌لوله را محاسبه می‌کنیم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} \xrightarrow[I=2A,\ L=10cm=0/1m]{\mu_0=12/5\times10^{-7}\frac{T\cdot m}{A},\ N=40} B = \frac{12/5\times10^{-7}\times40\times2}{0/1} = 10^{-3}\,T = 10G$$

۷۲ با سیمی روکش‌دار به طول $3\,m$ و قطر مقطع $2\,mm$ که مقاومت ویژهٔ آن $5\times10^{-8}\,\Omega\cdot m$ است، سیم‌لوله‌ای می‌سازیم که حلقه‌های آن بدون هیچ فاصله‌ای کنار هم قرار دارند. اگر دو سر سیم‌لوله به اختلاف پتانسیل $15\,V$ متصل شود، اندازهٔ میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله به چند تسلا می‌رسد؟ ($\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}$، $\pi^2 = 10$ و ضخامت روکش عایق سیم، ناچیز است.)

۱) ۰/۰۴ ۲) ۰/۰۲

۳) ۰/۴ ۴) ۰/۲

مشاوره این تست ترکیبی از مباحث فصل ۲ و فصل ۳ کتاب فیزیک یازدهم است.

Hint به کمک رابطهٔ $R=\rho\frac{L}{A}$ مقاومت سیم‌لوله را حساب کنید و سپس جریان عبوری از سیم‌لوله را با کمک قانون اهم به دست آورید و در نهایت میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله را حساب کنید.

درس Box

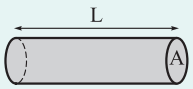
- اگر سیم‌لوله از سیمی به قطر D ساخته شده باشد، به طوری که حلقه‌های آن به هم چسبیده باشند، می‌توانیم از رابطهٔ زیر بزرگی میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله را حساب کنیم:

$$B=\frac{\mu_0 NI}{ND}=\frac{\mu_0 I}{D}$$

- مقاومت الکتریکی یک رسانا با دمای ثابت، به ساختمان رسانا (ابعاد و جنس آن) بستگی دارد و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$R=\rho\frac{L}{A}$$

(R: مقاومت (Ω)، ρ: مقاومت ویژه ($\Omega\cdot m$)، L: طول سیم (m)، A: سطح مقطع سیم (m^2))



قانون اهم: اگر در یک دمای معین، اختلاف پتانسیل دو سر رسانا را تغییر دهیم، نسبت $\frac{V}{I}$ (مقدار مقاومت) تغییر نمی‌کند:

$$R=\frac{V}{I}$$

(R: مقاومت (Ω)، V: اختلاف پتانسیل (V)، I: جریان (A))

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا از رابطهٔ $R=\rho\frac{L}{A}$ استفاده می‌کنیم و مقاومت سیم‌لوله را حساب می‌کنیم:

$$R=5\times10^{-8}\times\frac{3}{\pi(\frac{2\times10^{-3}}{2})^2}=\frac{15}{\pi}\times10^{-2}\,\Omega=\frac{3}{20\pi}\,\Omega$$

گام دوم: جریان عبوری از مدار را طبق قانون اهم حساب می‌کنیم:

$$I=\frac{V}{R}=\frac{15}{\frac{3}{20\pi}}=100\pi\,A$$

گام سوم: چون حلقه‌های سیم‌لوله به هم چسبیده‌اند، داریم:

$$\left.\begin{matrix}L=ND\\ B=\frac{\mu_0 NI}{L}\end{matrix}\right\}\Rightarrow B=\frac{\mu_0 I}{D}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times100\pi}{2\times10^{-3}}=200\pi^2\times10^{-4}=0/2\,T$$

۷۳ با استفاده از سیمی به طول معین، پیچهٔ مسطحی به شعاع ۴cm می‌سازیم و از آن جریان I را عبور می‌دهیم، به طوری‌که در مرکز این پیچه، میدان مغناطیسی ۲۷ گاوسی ایجاد شود. اگر با همان سیم، پیچهٔ مسطح دیگری به شعاع ۱۲cm بسازیم و از آن جریان ۲I عبور دهیم، اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز آن چند گاوس می‌شود؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۳

Hint

با توجه به متفاوت‌بودن شعاع حلقه‌ها و یکسان‌بودن طول سیم، ابتدا نسبت تعداد حلقه‌های هر پیچه را به دست آورید، سپس رابطهٔ نسبی میدان مغناطیسی در مرکز پیچه‌ها را بنویسید.

درس Box

- اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه‌ای به شعاع r که دارای N حلقه است و از آن جریان I عبور می‌کند، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ $(\frac{T\cdot m}{A})$ ↑

جریان(A) → $B=\frac{\mu_{\circ} NI}{2r}$ ← اندازهٔ میدان مغناطیسی(T)

↓ شعاع حلقه (m)

- اگر سیمی به طول L را به صورت یک پیچهٔ مسطح به شعاع r درآوریم، تعداد حلقه‌های آن از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$N=\frac{L}{2\pi r}$$

- در صورتی که از یک سیم با طول L، پیچهٔ مسطحی بسازیم، تعداد حلقه‌ها با شعاع حلقه‌ها رابطهٔ عکس دارد:

$$N \propto \frac{1}{r}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

تعداد دورهای پیچهٔ اول را N_1 و تعداد دورهای پیچهٔ دوم را N_2 در نظر می‌گیریم، شعاع پیچهٔ دوم سه برابر شده است، پس تعداد دورهای آن باید $\frac{1}{3}$ برابر شده باشد، یعنی:

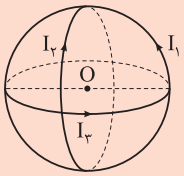
$$N_2=\frac{N_1}{3}$$

حالا از رابطهٔ نسبتی $B=\frac{\mu_{\circ} NI}{2r}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{B_1}{B_2}=\frac{N_1}{N_2}\times\frac{I_1}{I_2}\times\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{27}{B_2}=3\times\frac{1}{2}\times\frac{12}{4} \Rightarrow B_2=\frac{27\times 2}{9}=6\,G$$

مشابه کنکور

۷۴ سه حلقه که شعاع هر یک ۱۵cm و جریان گذرنده از آن‌ها $I_1 = 2I_2 = 2I_3 = 0/5\,A$ است، مطابق شکل قرار دارند. سطح هر حلقه بر دو حلقهٔ دیگر عمود است. بزرگی میدان مغناطیسی در نقطهٔ O (مرکز حلقه‌ها) چند میکروتسلا است؟ $(\mu_0 = 12\times10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A})$



۱) $\sqrt{3}$

۲) $\sqrt{5}$

۳) ۲

۴) $\sqrt{6}$

مشاوره این سؤال مشابه کنکور ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۲ است.

Hint میدان مغناطیسی حاصل از هر حلقه را در مرکز آن به دست آورید و در نهایت میدان مغناطیسی خالص را حساب کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

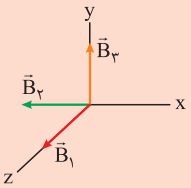
گام اول: اندازه و جهت میدان مغناطیسی حاصل از هر یک از حلقه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$B_1 = \frac{\mu_0 N I_1}{2r} = \frac{12\times10^{-7}\times1\times0/5}{2\times15\times10^{-2}} = 20\times10^{-7}\,T \xrightarrow{\text{جهت طبق قاعدهٔ دست راست}} (\odot)\ \text{برون‌سو}$$

$$B_2 = \frac{12\times10^{-7}\times1\times0/25}{2\times15\times10^{-2}} = 10\times10^{-7}\,T \xrightarrow{\text{جهت طبق قاعدهٔ دست راست}} (\leftarrow)\ \text{به‌سمت چپ}$$

$$B_3 = \frac{12\times10^{-7}\times1\times0/25}{2\times15\times10^{-2}} = 10\times10^{-7}\,T \xrightarrow{\text{جهت طبق قاعدهٔ دست راست}} (\uparrow)\ \text{به‌سمت بالا}$$

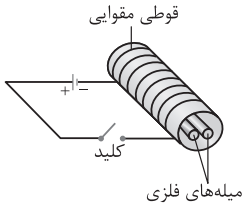
گام دوم: جهت میدان‌ها مطابق شکل است، پس بزرگی میدان مغناطیسی در نقطهٔ O (مرکز حلقه‌ها) به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2} \Rightarrow B_T = \sqrt{(2\times10^{-6})^2 + (10^{-6})^2 + (10^{-6})^2} = 10^{-6}\sqrt{4+1+1} = 10^{-6}\sqrt{6}\,T$$

$$\Rightarrow B_T = \sqrt{6}\,\mu T$$

۷۵ دو میلهٔ فلزی بلند مطابق شکل زیر درون سیم‌لوله‌ای که دور یک قوطی مقوایی پیچیده شده است، قرار دارند. با بستن کلید و عبور جریان از سیم‌لوله، مشاهده می‌شود که دو میله از یکدیگر دور می‌شوند. وقتی کلید باز و جریان در مدار قطع می‌شود، میله‌ها به محل اولیه باز می‌گردند. میله‌های فلزی از نظر مغناطیسی در کدام دسته قرار می‌گیرند؟



۱) دیامغناطیس

۲) پارامغناطیس

۳) فرومغناطیس نرم

۴) فرومغناطیس سخت

Hint کافی است ویژگی‌های مغناطیسی مواد را دقیق مطالعه کرده باشید.

درس Box مواد فرومغناطیسی، مواد مغناطیسی هستند که اتم‌ها و مولکول‌های آن‌ها ذاتاً دو قطبی مغناطیسی‌اند و به دو دستهٔ مواد فرومغناطیسی نرم و سخت تقسیم‌بندی می‌شوند:

حوزه‌های مواد فرومغناطیسی نرم در حضور میدان خارجی به راحتی با آن هم‌جهت می‌شوند و بعد از حذف آن، به حالت قبل برمی‌گردند.

حوزه‌های مواد فرومغناطیسی سخت در حضور میدان خارجی به سختی با آن هم‌جهت می‌شوند و بعد از حذف آن، تا مدتی به همان شکل باقی می‌مانند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ چون میدان سیم‌لوله قوی نیست و میله‌ها به راحتی با بستن کلید و عبور جریان، خاصیت مغناطیسی پیدا کرده‌اند و قطب‌های همنامشان یکدیگر را دفع کرده‌اند و پس از بازکردن کلید بلافاصله خاصیت مغناطیسی خود را از دست داده‌اند، پس میله‌ها از جنس مواد فرومغناطیسی نرم هستند.

۷۶ اطلاعات موجود در کدام ردیف از جدول زیر، به طور کامل درست است؟

ردیف	نوع جامد	فرمول شیمیایی	ذرات سازنده	رسانایی الکتریکی
۱	فلزی	Fe	کاتیون و الکترون آزاد	در حالت جامد، مذاب و محلول رسانایی دارد.
۲	یونی	K_2CO_3	کاتیون و آنیون	در حالت مذاب و محلول رسانایی دارد.
۳	کووالانسی	$C(s,$ گرافیت$)$	اتم	رسانایی ندارد.
۴	کووالانسی	S_8	مولکول	رسانایی ندارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تنها اطلاعات موجود در ردیف (۲) به طور کامل درست است؛ بیایید اطلاعات هر ردیف رو بررسی کنیم:

ردیف (۱):

- آهن (Fe) یک فلز است که از کاتیون و الکترون آزاد تشکیل شده است. ✓
- در حالت جامد و مذاب رسانایی الکتریکی دارد. ✓
- اما آهن در حالت محلول رسانایی ندارد، چون فلزها به صورت فلزی در آب حل نمی‌شوند. ×

ردیف (۲):

- K_2CO_3 (پتاسیم کربنات) یک ترکیب یونی است که از کاتیون و آنیون تشکیل شده است. ✓
- ترکیبات یونی در حالت جامد رسانای الکتریکی نیستند، زیرا یون‌ها در ساختار بلوری ثابت هستند و نمی‌توانند آزادانه حرکت کنند، اما در حالت مذاب و محلول، یون‌ها آزادانه حرکت می‌کنند و می‌توانند جریان الکتریکی را هدایت کنند. ✓

ردیف (۳):

- $C(s,$ گرافیت$)$ یک ترکیب کووالانسی بوده و از اتم‌های کربن تشکیل شده است. ✓
- گرافیت رسانای الکتریکی است. ×

ردیف (۴):

- گوگرد (S_8) یک نافلز است که در دمای اتاق به صورت جامد مولکولی وجود دارد. ×
- جامدات مولکولی به طور کلی رسانای الکتریکی نیستند، زیرا الکترون‌ها در پیوندهای کووالانسی بین اتم‌ها به دام افتاده‌اند و نمی‌توانند آزادانه حرکت کنند. ✓

۷۷ درستی یا نادرستی چه تعداد از جملات زیر مشابه عبارت داده‌شده است؟

«براساس مدل دریای الکترونی می‌توان تنوع اعداد اکسایش در برخی فلزهای واسطه را توجیه کرد.»

- علت چکش‌خواری فلزها، جابه‌جایی کاتیون‌های شناور در دریای الکترونی و عدم ایجاد دافعه بین آن‌ها است.
- رنگدانهٔ TiO_2 با جذب کامل پرتوهای مرئی، رنگ سفید ایجاد می‌کند.
- الکترون‌های درونی فلزها با حرکت آزادانه در دریای الکترونی، باعث رسانایی الکتریکی می‌شوند.
- دورهٔ برنز و آهن به ترتیب بعد از دوران سنگی، باعث دگرگونی جوامع شد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

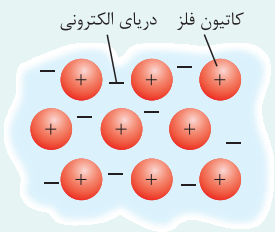
درس Box

رنگ، نماد زیبایی:

احساس درک رنگ به دلیل نورهای مرئی است که از محیط پیرامون به چشم ما می‌رسد، در واقع این نورها همان پرتوهای الکترومغناطیسی است که طول موج آن‌ها در گسترهٔ ۴۰۰ nm تا ۷۰۰ nm می‌باشد و چشم ما آن‌ها را می‌بیند. از این‌رو اگر در محیطی نور مرئی نباشد، انسان نمی‌تواند پیرامون خود را ببیند. مواد رنگی بخشی از نور سفید تابیده‌شده را جذب و باقی‌ماندهٔ آن را عبور می‌دهند یا بازتاب می‌کنند. اگر یک نمونهٔ ماده همهٔ طول موج‌های مرئی را بازتاب کند، به رنگ سفید و اگر همهٔ آن‌ها را جذب کند، به رنگ سیاه دیده می‌شود، هم‌چنین چشم ما مواد رنگی را با طول موج‌های عبوری یا بازتاب‌شده از آن‌ها می‌بیند. سازندهٔ اصلی یک مادهٔ رنگی، رنگدانه نام دارد، برای مثال TiO_2 ، Fe_2O_3 و دوده از جمله رنگدانه‌های معدنی هستند که رنگ‌های سفید، قرمز و سیاه را ایجاد می‌کنند.

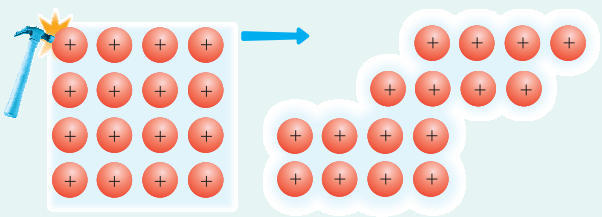
رنگ‌هایی که برای پوشش سطح استفاده می‌شوند، نوعی کلوئید هستند که لایهٔ نازکی روی سطح ایجاد می‌کنند تا افزون بر زیبایی، مانع خوردگی در برابر اکسیژن، رطوبت و مواد شیمیایی گردد.

مدل دریای الکترونی:



شکل مقابل، الگوی ساده از شبکهٔ بلوری فلزها را نشان می‌دهد که برای توجیه برخی رفتارهای فیزیکی آن‌ها ارائه شده و به آن مدل دریای الکترونی می‌گویند. براساس این مدل، ساختار فلزها، آرایش منظمی از کاتیون‌ها در سه بعد است که در فضای میان آن‌ها، سست‌ترین الکترون‌های موجود در اتم، دریایی را ساخته‌اند و در آن آزادانه جابه‌جا می‌شوند. الکترون‌های ظرفیت الکترون‌های سستی هستند که می‌توانند به راحتی در فضای بین کاتیون‌ها در شبکهٔ بلور فلز جابه‌جا شوند، چون دورتر از هسته بوده و نیروی جاذبهٔ هسته را کم‌تر احساس می‌کنند. این الکترون‌ها در شبکهٔ بلوری آزادانه حرکت می‌کنند و نمی‌توان آن‌ها را متعلق به یک اتم دانست.

در میان کاتیون‌ها در شبکهٔ بلوری فلز، نیروی دافعه وجود دارد ولی نیروی جاذبهٔ بین دریای الکترونی و کاتیون‌ها بر این دافعه غلبه می‌کند و چیدمان شبکهٔ بلوری حفظ می‌شود. چراکه در اثر ضربه کاتیون‌های فلزی در دریای الکترونی جابه‌جا شده ولی از هم جدا نمی‌شوند و فلز خرد نمی‌شود. هم‌چنین، الکترون‌های آزاد در دریای الکترونی می‌توانند در سراسر قطعهٔ فلزی حرکت کنند و می‌دانیم که حرکت الکترون‌ها، رسانایی الکتریکی را به دنبال دارد.



بنابراین با مدل دریای الکترونی می‌توان چکش‌خواری، شکل‌پذیری و رسانایی الکتریکی در فلزات را توجیه کرد.

فلزها، عنصرهایی شکل‌پذیر با جلایی زیبا:

مواد از جمله فلزها همواره برای زندگی انسان و ادامهٔ آن ضروری و ارزشمند بوده‌اند. به طوری که تمدن‌های آغازی نیز براساس گسترهٔ کاربردی آن‌ها نام‌گذاری شده‌اند. پس از دوران سنگی، در دورهٔ برنز و سپس آهن، جوامع دچار دگرگونی و رشد چشمگیری شدند و این خود نشان از جایگاه برجستهٔ فلزها در تمدن بشری دارد.

فلزها بخش عمده‌ای از عناصر جدول دوره‌ای را شکل می‌دهند و داشتن جلا، رسانایی الکتریکی، رسانایی گرمایی و شکل‌پذیری از جمله رفتارهای فیزیکی فلزها بوده، در حالی که واکنش‌پذیری و تنوع اعداد اکسایش از جمله رفتارهای شیمیایی آن‌هاست.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های دوم و چهارم، همانند عبارت داده‌شده، نادرست‌اند.

«تنوع عدد اکسایش جزء رفتارهای شیمیایی فلزها است و نمی‌توان آن را با مدل دریای الکترونی توجیه کرد؛ زیرا این مدل برای توجیه برخی رفتارهای **فیزیکی** فلزها ارائه شده است.»

عبارت دوم: تیتانیم (IV) اکسید (TiO_2) از جمله رنگدانه‌های معدنی است که به علت **بازتاب** همهٔ طول موج‌های مرئی، به رنگ سفید دیده می‌شود.

عبارت چهارم: این الکترون‌های ظرفیت هستند که دریای الکترونی را می‌سازند، نه الکترون‌های درونی!

جهت بررسی درستی عبارت‌های اول، سوم و پنجم، *می‌تونید یه نگاه به درس* Box *صفحهٔ قبل بندازید* ☺

۷۸ در واکنش موازنه‌نشدهٔ $V^{n+}(aq) + Zn(s) \rightarrow V^{m+}(aq) + Zn^{2+}(aq)$، اگر ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار وانادیم، با ۱/۳ گرم فلز روی واکنش دهد، چه تعداد از موارد زیر می‌تواند درست باشد؟

- اختلاف **n** و **m**، برابر ۲ است.
- رنگ محلول می‌تواند از آبی به بنفش تغییر کند.
- اگر محلول پایانی سبزرنگ باشد، عدد اکسایش VO_2^+ با **n**، برابر است.
- محلول پایانی می‌تواند آبی‌رنگ باشد.
- V^{m+} می‌تواند آرایش گاز نجیب داشته باشد.

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

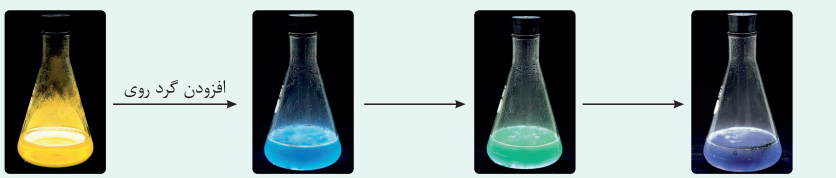
درس Box

وانادیم

محلول ترکیب‌های برخی فلزهای واسطه از جمله وانادیم ($_{23}V$) به رنگ‌های گوناگون دیده می‌شوند. وانادیم دارای عدد اکسایش صفر، در حالت آزاد و عنصری دارای عددهای اکسایش ۲ (II)، ۳ (III)، ۴ (IV) و ۵ (V) در حالت ترکیب با دیگر عنصرها است. رنگ نمک‌های مختلف وانادیم در این عددهای اکسایش، *این‌چنین‌اند*:

محلول	رنگ
نمک وانادیم (V)	زرد
نمک وانادیم (IV)	آبی
نمک وانادیم (III)	سبز
نمک وانادیم (II)	بنفش

شکل زیر پیشرفت واکنش فلز روی با محلول نمکی از وانادیم (V) را نشان می‌دهد.



محلولی از نمک وانادیم (V) — محلولی از نمک وانادیم (IV) — محلولی از نمک وانادیم (III) — محلولی از نمک وانادیم (II)

همان‌طور که می‌بینید با گذشت زمان، عدد اکسایش وانادیم در هر مرحله، ۱ واحد کاهش می‌یابد؛ بنابراین نمک وانادیم در هر مرحله، نقش اکسنده را دارد. معادلهٔ این واکنش‌ها را *به صورت ساده و مفید* می‌توان به صورت زیر نشان داد:

مرحلهٔ اول: نیم‌واکنش اکسایش: $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$؛ نیم‌واکنش کاهش: $2V^{5+} + 2e^- \rightarrow 2V^{4+}$ $\Rightarrow$ واکنش کلی: $Zn + 2V^{5+} \rightarrow Zn^{2+} + 2V^{4+}$ (زرد → آبی)

مرحلهٔ دوم: نیم‌واکنش اکسایش: $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$؛ نیم‌واکنش کاهش: $2V^{4+} + 2e^- \rightarrow 2V^{3+}$ $\Rightarrow$ واکنش کلی: $Zn + 2V^{4+} \rightarrow Zn^{2+} + 2V^{3+}$ (آبی → سبز)

مرحلهٔ سوم: نیم‌واکنش اکسایش: $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$؛ نیم‌واکنش کاهش: $2V^{3+} + 2e^- \rightarrow 2V^{2+}$ $\Rightarrow$ واکنش کلی: $Zn + 2V^{3+} \rightarrow Zn^{2+} + 2V^{2+}$ (سبز → بنفش)

توجه: وانادیم در گروه ۵ جدول دوره‌ای قرار دارد و بالاترین عدد اکسایش آن ۵+ است، پس وانادیم (V) فقط می‌تواند کاهش یابد و نقش اکسنده را ایفا کند.

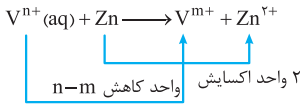
فلز روی در این واکنش‌ها نقش کاهنده را دارد و می‌تواند وانادیم (V) را تا وانادیم (II) کاهش دهد، اما توانایی کاهش وانادیم (II) به اتم وانادیم را ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های اول، دوم و سوم درست‌اند.

در ابتدا باید **m** و **n** را به دست آوریم.

اول باید واکنش را موازنه کنیم (برای این کار از عدد اکسایش استفاده کنید):



خواستون باشه که وانادیم کاهش می‌یابد و تغییرات آن را به صورت $n-m$ می‌نویسیم:

بعد از پیداکردن عدد اکسایش عناصر، تغییرات عدد اکسایش ماده‌ای که کاهش پیدا کرده است را به مادهٔ کاهنده و تغییرات عدد اکسایش ماده‌ای را که اکسایش پیدا کرده است را به مادهٔ اکسنده می‌دهیم:

$$2V^{n+} + (n-m)Zn \rightarrow V^{m+} + Zn^{2+}$$

و در آخر به روش وارسی، موازنه می‌کنیم:

$$2V^{n+} + (n-m)Zn \rightarrow 2V^{m+} + (n-m)Zn^{2+}$$

سپس از طریق استوکیومتری، مقدار $n-m$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cancel{100}^{10}\ mL\ \text{محلول} \times \frac{1L\ \text{محلول}}{\cancel{1000}\ mL} \times \frac{0/2\ mol\ V^{n+}}{1L\ \text{محلول}} \times \frac{2mol\ Zn}{(n-m)mol V^{n+}} \times \frac{65gZn}{1mol\ Zn} = 1/3gZn \Rightarrow \frac{2/6}{n-m} = 1/3$$

$$\Rightarrow n-m=2$$

در نهایت با توجه به اعداد اکسایش وانادیم، حالت‌های زیر را می‌توانیم داشته باشیم:

$n-m=2$

$5-3=2$

$4-2=2$

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: *درسته! به دست آوردیم دیگه!*

عبارت دوم: در صورتی که n و m را به ترتیب $+4$ و $+2$ در نظر بگیریم، این مورد درست است.

عبارت سوم: در صورتی که محلول پایانی سبزرنگ باشد، یعنی در V^{m+}، m برابر ۳ و در V^{n+}، n برابر ۵ است که برابر با عدد اکسایش وانادیم در VO_2^+ می‌باشد.

$$V + 2(-2) = +1 \Rightarrow V = 5$$

عبارت چهارم: در صورتی محلول نهایی آبی‌رنگ خواهد بود که m و n به ترتیب برابر با $+4$ و $+6$ باشند. اما می‌دونیم که وانادیم عدد اکسایش $+6$ *نداره!*

عبارت پنجم: همان‌طور که گفتیم m می‌تواند $+2$ و $+3$ باشد که در هیچ‌کدام از آن‌ها، یون‌های وانادیم به آرایش گاز نجیب نمی‌رسند.

$$_{23}V : [Ar]3d^3 4s^2 \begin{cases} V^{2+} \rightarrow [Ar]3d^3 \\ V^{3+} \rightarrow [Ar]3d^2 \end{cases}$$

۷۹ کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ فلزی که در دوره و گروه چهارم جدول تناوبی است، درست است؟

الف) نسبت به فولاد، مقاومت گرمایی بالاتر و چگالی کم‌تری دارد. ($_{22}Ti$)

ب) برای تهیهٔ آن از $TiCl_4$، می‌توان از فلز منیزیم در حضور گاز اکسیژن یا نیتروژن استفاده کرد.

پ) آلیاژ آن با فلزی که مجموع اعداد کوانتومی الکترون‌های لایهٔ ظرفیت آن برابر ۴۸ است، یک آلیاژ هوشمند محسوب می‌شود.

ت) سازه‌های فلزی در ارتودنسی، نمونه‌ای از کاربرد این فلز به صورت ترکیب یونی است.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ

۳) ب ـ پ ۴) ب ـ ت

Hint

فلزی که در دوره و گروه چهارم جدول تناوبی قرار دارد، تیتانیم ($_{22}Ti$) است. هم‌چنین فلزی که مجموع اعداد کوانتومی الکترون‌های لایهٔ ظرفیت آن برابر ۴۸ است نیکل ($_{28}Ni$) می‌باشد.

$3d^8 4s^2 \Rightarrow$ الکترون‌ها $(n+l) = 8(5) + 2(4) = 48$

درس Box

تیتانیم، فلزی فراتر از انتظار:

در میان عناصر دستهٔ d از دورهٔ چهارم جدول تناوبی، تیتانیم ($_{22}Ti$) فلزی فراتر از انتظار است. ماندگاری و استحکام بالا، از جمله ویژگی‌های این عنصر است. این فلز نهمین عنصر فراوان پوستهٔ جامد زمین است و در طبیعت به صورت آزاد یافت نمی‌شود و از جمله کانی‌های آن TiO_2 و $FeTiO_3$ هستند. از آن‌جا که تهیهٔ فلز تیتانیم خالص، گران و دشوار است، اغلب از TiO_2 در صنایع اولیه استفاده می‌شود. این فلز، به شکل آلیاژهای گوناگونی نیز کاربرد گسترده‌ای در صنعت یافته است. مثلاً نیتینول آلیاژی از نیکل و تیتانیم بوده که به آلیاژ هوشمند معروف است و در ساخت فراورده‌های صنعتی و پزشکی به کار می‌رود. در جدول زیر مقایسهٔ خواص فولاد زنگ نزن و تیتانیم را مشاهده کنید:

ویژگی / ماده	تیتانیم	فولاد
نقطهٔ ذوب ($^\circ C$)	۱۶۶۷	۱۵۳۵
چگالی (gmL^{-1})	۴/۵۱	۷/۹۰
واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا	ناچیز	متوسط
مقاومت در برابر خوردگی	عالی	ضعیف
مقاومت در برابر سایش	عالی	عالی

نکته

از آن‌جا که نقطهٔ ذوب با مقاومت گرمایی رابطهٔ مستقیم دارد، مقاومت گرمایی و نقطهٔ ذوب تیتانیم از فولاد، بیشتر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

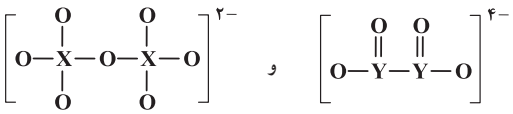
عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) تهیهٔ تیتانیم خالص معمولاً در شرایطی انجام می‌شود که مقدار اکسیژن یا نیتروژن حداقل باشد، چراکه این گازها می‌توانند خودشان با تیتانیم واکنش داده و ترکیبات غیرفلزی تولید کنند. (البته این ترکیبات بیشتر در دمای بسیار بالا با شرایط خاص ایجاد می‌شن!)

ت) تیتانیم در ارتودنسی معمولاً به شکل فلز خالص یا آلیاژهای فلزی استفاده می‌شود (مثل آلیاژ با نیکل) و نه به صورت ترکیب یونی.

۸۰ اگر عدد اکسایش اتم‌های X و Y در ساختارهای زیر، بیشینه باشد، در کدام گزینه عدد اتمی مربوط به دو عنصر قابل پذیرش است؟ (همهٔ اتم‌ها از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی می‌کنند.)



۱) ۲۴ و ۱۶

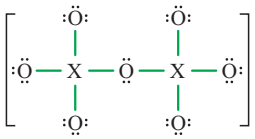
۲) ۱۶ و ۵

۳) ۱۶ و ۱۷

۴) ۲۴ و ۷

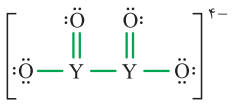
پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به اطلاعات داده‌شده و ساختار لوویس دو ترکیب، داریم:

مجموع شمار الکترون‌های به‌کاررفته در ساختار لوویس − مجموع شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم‌ها = بار یون



$$-۲=[۲X+\underbrace{۷\times۶}_{\text{اکسیژن}}]-[\underbrace{(۲۰\times۲)}_{\text{ناپیوندی}}+\underbrace{(۸\times۲)}_{\text{پیوندی}}] \Rightarrow -۲=۲X+۴۲-۵۶ \Rightarrow X=+۶$$

X، می‌تواند عنصری از گروه ۶ یا ۱۶ جدول تناوبی باشد.



$$\Rightarrow -۴=[۲Y+\underbrace{(۴\times۶)}_{\text{اکسیژن}}-[\underbrace{(۱۰\times۲)}_{\text{ناپیوندی}}+\underbrace{(۷\times۲)}_{\text{پیوندی}}] \Rightarrow -۴=۲Y+۲۴-۳۴$$

$$\Rightarrow ۲Y=۶ \Rightarrow Y=۳ \Rightarrow \text{گروه } ۱۳$$

از بین اعداد اتمی داده‌شده در گزینه‌ها، تنها عدد اتمی ۱۶ ($_{۱۶}S$) از گروه شانزده و ۵ ($_{۵}B$) از گروه سیزده برای این دو عنصر قابل قبول می‌باشد.

۸۱ کدام مورد، نادرست است؟

۱) پس از انقلاب صنعتی اروپا، کودهای شیمیایی نیتروژن‌داری تولید شدند که جزء مولکول‌های کوچک‌اند.

۲) فناوری تولید فراورده‌هایی مانند پلی وینیل کلرید، صنعت بسته‌بندی را دگرگون ساخت.

۳) فراوردهٔ حاصل از فرایند هابر، نمونه‌ای از استفادهٔ درست و نادرست دانش و فناوری را نشان می‌دهد.

۴) در هوای آلوده، برخلاف هوای خشک و پاک، گازهایی مانند SO_2، NO_2، CO_2، O_3، CO، NO، مواد آلی فرّار و ذره‌های معلق وجود دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): آمونیاک (NH_3) و اوره $(CO(NH_2)_2)$، طبق تعریف کتاب شیمی یازدهم، جزء مولکول‌های کوچک‌اند. ✓

نکته

مواد مولکولی

- مولکول‌های کوچک و متوسط ← تعداد اتم‌های تشکیل‌دهندهٔ آن‌ها کم یا متوسط است، در نتیجه جرم مولی آن‌ها کم یا متوسط می‌باشد $(Br_2, CO_2, C_3H_8$ و ...)
- مولکول‌های بزرگ (درشت‌مولکول‌ها) ← تعداد اتم‌های تشکیل‌دهندهٔ آن‌ها بسیار زیاد است. در نتیجه جرم مولی آن‌ها هم بسیار زیاد می‌باشد (روغن زیتون، سلولز، نشاسته، پروتئین‌ها، نایلون، تفلون و ...).

گزینهٔ (۲): یکی از دستاوردهای شیمی در جهان، فناوری تولید پلاستیک است که توانست صنعت پوشاک و صنعت بسته‌بندی (غذا، دارو و ...) را دگرگون سازد. پلی وینیل کلرید (PVC) یکی از شناخته‌شده‌ترین انواع پلاستیک‌هاست که در تهیهٔ کیسهٔ ذخیرهٔ خون به کار می‌رود. ✓

گزینهٔ (۳): آمونیاک (NH_3)، هم به عنوان کود شیمیایی (استفادهٔ درست) و هم به عنوان سلاح (استفادهٔ نادرست) می‌تواند به‌کار رود. ✓

گزینهٔ (۴): هوای خشک و پاک نیز CO_2 دارد! *هواستون باشه که* فراوان‌ترین ترکیب موجود در هوای خشک و پاک، کربن دی‌اکسید (CO_2) است. ✗

۸۲ کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) با طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان تشخیص داد که فرمول C_2H_6O می‌تواند مربوط به دو ماده با محتوای انرژی متفاوت باشد.

ب) ام.ار.آی (MRI) نمونه‌ای از کاربرد طیف‌سنجی جرمی در پزشکی است.

پ) گروه‌های عاملی کربوکسیل و هیدروکسیل، هر یک فقط باریکه‌ای از امواج فروسرخ را جذب می‌کنند.

ت) با استفاده از روش‌های طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان مقدار آلاینده‌هایی مثل CO و اکسیدهای نیتروژن را در هواکره کاهش داد یا حذف کرد.

۱) الف ـ ت ۲) ب ـ ت

۳) الف ـ پ ۴) ب ـ پ

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

الف) یکی از رایج‌ترین روش‌های طیف‌سنجی که برای شناسایی گروه‌های عاملی به کار می‌رود، طیف‌سنجی فروسرخ است. با توجه به این که هر یک از گروه‌های عاملی، گسترهٔ معین و منحصربه‌فردی از پرتوهای فروسرخ را جذب می‌کنند، از این تفاوت می‌توان برای شناسایی گروه‌های عاملی استفاده کرد. مثلاً می‌توان به کمک طیف‌سنجی فروسرخ، تشخیص داد که ماده‌ای با فرمول C_2H_6O می‌تواند اتانول با گروه عاملی هیدروکسیل $(-OH)$ و یا دی‌متیل اتر با گروه عاملی اتری $(-O-)$ باشد. ✓

هواستون باشه که چون فرمول مولکولی این دو ماده یکسان اما ساختارشان متفاوت است، بنابراین این دو ماده با یکدیگر ایزومرند و محتوای انرژی (آنتالپی) متفاوتی دارند

نکته تشابه و تفاوت ایزومرها

تفاوت	شباهت
فرمول ساختاری	فرمول مولکولی
محتوای انرژی	نوع عنصرها
خواص فیزیکی و شیمیایی	تعداد اتم‌ها

ب) ام . ار . آی (MRI) نمونه‌ای از کاربرد طیف‌سنجی **نوری** (رادیویی) در پزشکی می‌باشد. ✓

پ) هر گروه عاملی گسترهٔ معین و مشخصی از امواج فروسرخ را جذب می‌کند. ✓

ت) طیف‌سنجی فروسرخ تنها برای شناسایی مواد استفاده می‌شود. برای کاهش یا حذف مقدار آلاینده‌ها باید از رفتار و واکنش‌های شیمیایی آلاینده‌ها، E_a و نقش کاتالیزگر بهره برد. ✗

۸۳ چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

- در واکنش تعادلی $A \rightleftharpoons B$، اگر E_a (رفت) برابر با ۱۲۰ kJ و E_a (برگشت) برابر با ۸۰ kJ باشد، آنتالپی واکنش برابر با ۴۰ kJ− خواهد بود.
- افزایش دما، همواره باعث افزایش سرعت واکنش‌های گرماگیر و کاهش سرعت واکنش‌های گرماده می‌شود.
- کاتالیزگر، با افزایش سرعت واکنش، انرژی فعال‌سازی واکنش رفت و واکنش برگشت را به یک اندازه کاهش می‌دهد.
- در صورت استفاده از کاتالیزگر مناسب، می‌توان واکنش گرماگیر سوزاندن گاز متان را در دمای اتاق انجام داد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره در این تست، از شما خواسته شده است تا با توجه به مفاهیم انرژی فعال‌سازی، سرعت واکنش، آنتالپی واکنش و اثر کاتالیزگر، درستی یا نادرستی عبارت‌های مطرح‌شده را بررسی کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تنها عبارت «پ» درست است.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

الف) در واکنش تعادلی $A \rightleftharpoons B$، اگر E_a (رفت) برابر با ۱۲۰ kJ و E_a (برگشت) برابر با ۸۰ kJ باشد، آنتالپی واکنش برابر با ۴۰ kJ+ خواهد بود، نه ۴۰ kJ−، زیرا در یک واکنش گرماگیر، انرژی فعال‌سازی رفت از انرژی فعال‌سازی برگشت بیشتر است و آنتالپی واکنش (ΔH) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید: ×

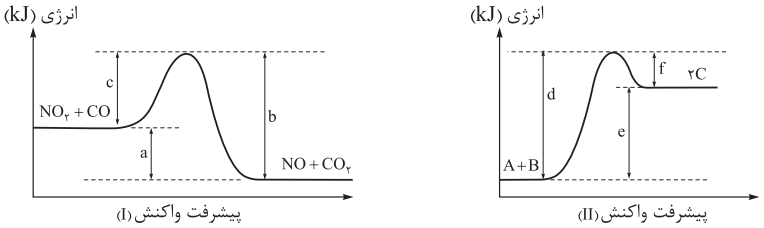
$$\Delta H = E_a(\text{رفت}) - E_a(\text{برگشت}) = ۱۲۰ - ۸۰ = ۴۰ kJ$$

ب) افزایش دما، همواره باعث افزایش سرعت همهٔ واکنش‌ها می‌شود، چه گرماگیر و چه گرماده؛ زیرا با افزایش دما، انرژی جنبشی ذرات افزایش می‌یابد و در نتیجه تعداد برخوردهای مؤثر بین ذرات و سرعت واکنش افزایش می‌یابد. ×

پ) کاتالیزگر، با افزایش سرعت واکنش، انرژی فعال‌سازی واکنش رفت و واکنش برگشت را به یک اندازه کاهش می‌دهد. کاتالیزگر با ایجاد یک مسیر واکنش جایگزین با انرژی فعال‌سازی کم‌تر، سرعت واکنش را افزایش می‌دهد. ✓

ت) واکنش سوزاندن گاز متان گرماده است نه گرماگیر!!! کاتالیزگر فقط سرعت انجام واکنش را افزایش می‌دهد، اما نمی‌تواند یک واکنش گرماده را به یک واکنش گرماگیر تبدیل کند. ×

۸۴ با توجه به نمودارهای زیر، کدام مورد درست است؟



مشاوره یکی از مباحث خیلی مهم در فصل چهارم شیمی دوازدهم، انرژی فعال‌سازی و نمودارهای آن است که مورد توجه طراحان کنکور و امتحانات نهایی است. حتماً مهارت بررسی نمودار ر و در خودتون تقویت کنید.

۱) تغییرات محتوای انرژی در واکنش (II) برابر با $f - d$ و هم‌علامت با تغییرات محتوای انرژی واکنش (I) در جهت برگشت است.

۲) به ازای مصرف ۲ مول آلایندهٔ قهوه‌ای‌رنگ در واکنش (I)، $2a\ kJ$ انرژی مصرف می‌شود. ← NO_2

۳) اگر مقدار a و c به ترتیب برابر ۲۲۶ و ۱۳۲ باشد و در صورت استفاده از کاتالیزگر انرژی فعال‌سازی واکنش رفت نصف شود، انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت حدود ۶۰ درصد کاهش می‌یابد.

۴) اگر در واکنش (II)، مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها برابر با ۵۰ kJ باشد، مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها $e - ۵۰$ خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

نکته بین انرژی فعال‌سازی یک واکنش در جهت رفت و برگشت و آنتالپی آن، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\Delta H = E_a(\text{رفت}) - E_a(\text{برگشت})$$

در واکنش (II)، d و f به ترتیب E_a (رفت) و E_a (برگشت) می‌باشند. بنابراین برای محاسبهٔ تغییرات محتوای انرژی واکنش (ΔH) را باید به صورت $d - f$ بنویسیم، نه $f - d$!

گزینهٔ (۲): واکنش (I)، یک واکنش گرماده است و به ازای مصرف ۲ مول گاز قهوه‌ای‌رنگ NO_2، $2a\ kJ$ انرژی **آزاد می‌شود**.

گزینهٔ (۳): با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

$$\Delta H = E_a(\text{رفت}) - E_a(\text{برگشت}) \Rightarrow -۲۲۶ = ۱۳۲ - E_a(\text{برگشت}) \Rightarrow E_a(\text{برگشت}) = ۳۵۸kJ$$

با استفاده از کاتالیزگر، انرژی فعال‌سازی رفت نصف شده است:

میزان کاهش انرژی فعال‌سازی رفت: $\frac{۱۳۲}{۲} = ۶۶kJ$

می‌دانیم که در صورت استفاده از کاتالیزگر، میزان کاهش انرژی فعال‌سازی رفت با میزان کاهش انرژی فعال‌سازی برگشت برابر خواهد بود، پس انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت نیز به اندازهٔ ۶۶kJ کاهش می‌یابد. بنابراین:

درصد کاهش انرژی فعال‌سازی $= \frac{۶۶}{۳۵۸} \times ۱۰۰ \simeq \%۱۸$

گزینهٔ (۴): مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها در واکنش (II) برابر است با:

$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها}]$$

$$\Rightarrow e = ۵۰ - [\text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها}] \Rightarrow [\text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها}] = ۵۰ - e$$

۸۵ چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن در دمای اتاق، درست است؟

$_{29}Cu$

- این واکنش در حضور پودر اولین عنصری که لایهٔ سوم آن پر شده است، به طور سریع انجام می‌شود.
- در صورت ایجاد جرقه در مخلوط، سرعت واکنش انفجاری و انرژی فعال‌سازی آن کاهش می‌یابد.
- اگر مقدار انرژی فعال‌سازی آن در حضور کاتالیزگری مناسب برابر با ۱۰۰ kJ باشد، قدرمطلق آنتالپی واکنش آن به یقین بیشتر می‌شود.
- برای انجام این واکنش با سرعت انفجاری، می‌توان از عنصری که در محیط‌های اسیدی، اکسایش نمی‌یابد و در بخش‌های مختلف بدن هنگام جراحی به کار می‌رود، استفاده کرد.

پلاتین (Pt)

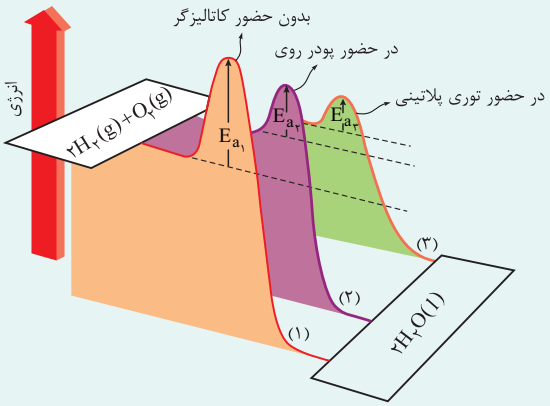
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

جدول زیر برخی داده‌ها برای واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن را در شرایط گوناگون نشان می‌دهد:

شرایط آزمایش	دما ($^\circ C$)	سرعت واکنش	آنتالپی واکنش (kJ)
بدون حضور کاتالیزگر	۲۵	ناچیز	−۵۷۲
ایجاد جرقه در مخلوط	۲۵	انفجاری	−۵۷۲
در حضور پودر روی	۲۵	سریع	−۵۷۲
در حضور توری پلاتینی	۲۵	انفجاری	−۵۷۲

- واکنش سوختن هیدورژن در دمای اتاق بدون حضور کاتالیزگر انجام نمی‌شود، زیرا انرژی فعال‌سازی آن بالا است.
- با ایجاد جرقه در مخلوط گازهای هیدروژن و اکسیژن، انرژی فعال‌سازی واکنش تأمین شده و واکنش به صورت انفجاری انجام می‌شود.
- فلزهای روی (Zn) و پلاتین (Pt) کاتالیزگرهای واکنش سوختن هیدروژن هستند. در خصوص پودر روی، واکنش سریع و در حضور توری پلاتینی، واکنش به صورت انفجاری انجام می‌شود. توری پلاتینی انرژی فعال‌سازی واکنش را بیشتر کاهش می‌دهد و کاتالیزگر مناسب‌تری برای سوختن هیدروژن است.



انرژی فعال‌سازی واکنش
- با استفاده از گرما و جرقه تأمین می‌شود.
- با استفاده از کاتالیزگر کاهش می‌یابد.

- در همهٔ مسیرهای انجام واکنش، آنتالپی واکنش مقداری ثابت است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تنها عبارت چهارم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

- اولین عنصری که لایهٔ سوم آن پُر می‌شود، $_{29}Cu$ است. واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن در حضور پودر **فلز روی** $(_{30}Zn)$ به طور سریع است. ×
- جرقهٔ انرژی فعال‌سازی را تأمین می‌کند و آن را کاهش نمی‌دهد! ×
- آنتالپی این واکنش، با کاتالیزگر و حتی بدون کاتالیزگر ثابت است و تغییری نمی‌کند. ×
- پلاتین (Pt) فلزی نجیب است که در محیط‌های اسیدی اکسایش نمی‌یابد و در بخش‌های مختلف بدن هنگام جراحی به کار می‌رود.
- واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن در حضور توری پلاتینی به صورت انفجاری انجام می‌شود. ✓

۸۶ کدام گزینه در مورد کاتالیزگرها، نادرست است؟

۱) می‌توانند با تغییر مسیر واکنش، انرژی فعال‌سازی را کاهش و سرعت واکنش را افزایش دهند.

۲) در واکنش، در نهایت مصرف نمی‌شوند، اما می‌توانند در طول واکنش دچار تغییرات فیزیکی یا شیمیایی موقت شوند.

۳) می‌توانند تعادل واکنش را به سمت تولید بیشتر محصولات جابه‌جا کنند.

۴) برای هر واکنش، اختصاصی عمل می‌کنند و کاتالیزگر یک واکنش ممکن است بر واکنش دیگر تأثیری نداشته باشد.

پاسخ خیلی تشریحی گزینهٔ (۳) نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): کاتالیزگرها می‌توانند با تغییر مسیر واکنش (یعنی ایجاد یک مسیر جایگزین با انرژی فعال‌سازی کم‌تر)، انرژی فعال‌سازی واکنش را کاهش و سرعت واکنش را افزایش دهند. ✓

گزینهٔ (۲): کاتالیزگرها در واکنش، در نهایت مصرف نمی‌شوند، اما می‌توانند در طول انجام واکنش، دچار تغییرات فیزیکی یا شیمیایی موقت شوند. به عنوان مثال، یک کاتالیزگر جامد ممکن است در طول واکنش به صورت موقت به حالت محلول شود و در پایان واکنش دوباره به حالت جامد برگردد. ✓

گزینهٔ (۳): کاتالیزگرها نمی‌توانند تعادل واکنش را به سمت تولید بیشتر محصولات جابه‌جا کنند. کاتالیزگرها فقط سرعت رسیدن به تعادل را افزایش می‌دهند، اما نقطهٔ تعادل و مقدار نسبی واکنش‌دهنده‌ها و محصولات در حالت تعادل را تغییر نمی‌دهند. ✗

گزینهٔ (۴): کاتالیزگرها برای هر واکنش، اختصاصی عمل می‌کنند و کاتالیزگر یک واکنش ممکن است بر واکنش دیگری، تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر، کاتالیزگرها گزینش‌پذیر هستند و هر کاتالیزگر به شمار معدودی واکنش سرعت می‌بخشد. ✓

۸۷ کدام گزینه در مورد مبدل‌های کاتالیستی خودرو، نادرست است؟

۱) مبدل‌های کاتالیستی با افزایش انرژی فعال‌سازی واکنش، سرعت تبدیل گازهای سمی به گازهای بی‌خطر را افزایش می‌دهند.

۲) فلزات رودیم، پالادیم و پلاتین به عنوان کاتالیزگر در مبدل‌های کاتالیستی خودروها استفاده می‌شوند.

۳) استفاده از سرامیک به شکل مش یا دانه‌های ریز، کارایی مبدل کاتالیستی را افزایش می‌دهد.

۴) مبدل‌های کاتالیستی چه در خودروهای بنزینی و چه در خودروهای دیزلی کاربرد دارند.

پاسخ خیلی تشریحی گزینهٔ (۱) نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): مبدل‌های کاتالیستی با کاهش انرژی فعال‌سازی واکنش، سرعت تبدیل گازهای سمی به گازهای بی‌خطر را افزایش می‌دهند، به عبارتی دیگر، کاتالیزگرها با ایجاد یک مسیر واکنش جایگزین با انرژی فعال‌سازی کم‌تر، سرعت واکنش را افزایش می‌دهند. ✗

گزینهٔ (۲): فلزات رودیم (Rh)، پالادیم (Pd) و پلاتین (Pt) به عنوان کاتالیزگر در مبدل‌های کاتالیستی خودرو استفاده می‌شوند. این فلزات گران‌بها هستند و به همین دلیل، مبدل‌های کاتالیستی گران‌قیمت می‌باشند. ✓

گزینهٔ (۳): استفاده از سرامیک به شکل مش یا دانه‌های ریز، سطح تماس کاتالیزگر با گازهای خروجی از موتور خودروها را افزایش و در نتیجه، کارایی مبدل کاتالیستی را افزایش می‌دهد. ✓

گزینهٔ (۴): مبدل‌های کاتالیستی در خودروهای بنزینی و دیزلی کاربرد دارند، اما نوع کاتالیزگرها و واکنش‌هایی که در آن‌ها رخ می‌دهد، متفاوت است. ✓

۸۸ کدام مورد دربارهٔ مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی و دیزلی درست است؟

۱) کاتالیزگرهای مورد استفاده در مبدل بنزینی پس از مدت معینی کارایی خود را از دست می‌دهند و باید آن‌ها را تمدید کرد.

۲) در واکنش حذف اکسیدهای نیتروژن‌دار در مبدل دیزلی، مجموع ضرایب استوکیومتری مولکول‌های نیتروژن‌دار برابر با شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آن است. (NO_2 , NO)

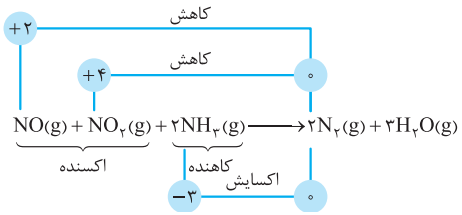
۳) درصد حجمی مولکول‌های ناقطبی خروجی از مبدل بنزینی، بیشتر از سایر مولکول‌های قطبی است. (H_2O / N_2 , O_2 , CO_2)

۴) آمونیاک به عنوان کاتالیزگر در مبدل دیزلی، درون مخزنی جداگانه در قسمتی از این دستگاه تعبیه شده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): کارایی مبدل کاهش می‌یابد، نه کاتالیزگر! ✘

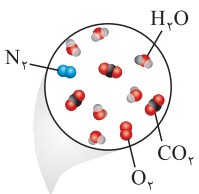
گزینهٔ (۲): واکنش حذف اکسیدهای نیتروژن‌دار در مبدل خودروهای دیزلی به صورت زیر است:



$$\text{شمار الکترون‌های مبادله‌شده براساس کاهنده } (NH_3) = \underset{\text{ضریب } NH_3}{2} \times \underset{\text{زیروند N}}{1} \times \underset{\text{تغییر عدد اکسایش N}}{3} = 6$$

مجموع ضرایب مولکول‌های نیتروژن‌دار (NO , NO_2 , NH_3 , N_2) و تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در این واکنش برابر ۶ است. ✓

گزینهٔ (۳): با توجه به شکل کتاب درسی، درصد حجمی یا درصد مولی مولکول‌های قطبی آب (H_2O) در خروجی مبدل کاتالیستی بنزینی، بیشتر است. ✘



گزینهٔ (۴): در این واکنش آمونیاک کاتالیزگر نیست و یک واکنش‌دهنده محسوب می‌شود. ✘

۸۹ در واکنش به حالت تعادل زیر، در یک ظرف با حجم ثابت ۲ لیتری، شمار مول‌های $PCl_3(g)$، $Cl_2(g)$ و $PCl_5(g)$ به ترتیب برابر ۴، ۲/۵ و ۳ است. به تقریب چند مول $Cl_2(g)$ باید از سامانه خارج کنیم تا شمار مول‌های $PCl_5(g)$ به ۲ برسد؟ (دما، ثابت در نظر گرفته شود.)

$$PCl_3(g) + Cl_2(g) \rightleftharpoons PCl_5(g)$$

۱) ۲/۱۷ ۲) ۰/۸۳ ۳) ۱/۸۱ ۴) ۲

Hint

ابتدا ثابت تعادل را حساب کن. سپس با توجه به جابه‌جایی تعادل پس از خروج گاز Cl_2، با استفاده از جدول تغییرات، شمار مول‌های PCl_5 رو در تعادل جدید به دست بیار و در آخر با قراردادن ثابت تعادل و مقدار مول مواد، مول Cl_2 خارج‌شده رو حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

ابتدا مقدار ثابت تعادل را محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{[PCl_5]}{[PCl_3][Cl_2]} \Rightarrow K = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{2} \times \frac{2/5}{2}} = \frac{3}{5}$$

اگر y مول Cl_2 از سامانه خارج کنیم، واکنش در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود:

	PCl_3	+ Cl_2	$\rightleftharpoons$ PCl_5
مول آغازی:	۴	$2/5 - y$	۳
تغییر مول:	$+x$	$+x$	$-x$
مول تعادلی:	$4+x$	$2/5 - y + x$	$3-x$

شمار مول‌های PCl_5 در تعادل جدید $= 3 - x = 2 \Rightarrow x = 1$

$$K = \frac{[PCl_5]}{[PCl_3][Cl_2]} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{\frac{2}{2}}{\frac{5}{2} \times \frac{3/5 - y}{2}} \Rightarrow y = 2/1$$

۹۰ در یک ظرف در بستهٔ ۳۰ لیتری، مقدار معینی سدیم هیدروژن کربنات را گرما می‌دهیم تا تعادل زیر برقرار شود. جرم $H_2O(g)$ در حالت تعادل کدام است و با کاهش فشار، مقدار $Na_2CO_3(s)$ چه تغییری می‌کند؟ $(H=1, O=16 : g.mol^{-1})$

$$2NaHCO_3(s) \rightleftharpoons Na_2CO_3(s) + CO_2(g) + H_2O(g) \quad , \quad K = 0/01$$

۱) ۵۴ ـ ثابت است.
۲) ۹۰ ـ ثابت است.
۳) ۵۴ ـ افزایش می‌یابد.
۴) ۹۰ ـ افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به واکنش، خواهیم داشت:

$$2NaHCO_3 \rightleftharpoons Na_2CO_3(s) + CO_2(g) + H_2O(g)$$

مول اولیه:	a	۰	۰	۰
تغییر مول:	$-2x$	$+x$	$+x$	$+x$
مول تعادلی:	$a-2x$	x	x	x

از آن‌جا که واکنش‌دهنده $(NaHCO_3(s))$ و یکی از فراورده‌های واکنش $(NaCO_3(s))$ جامد هستند، در رابطهٔ ثابت تعادل نوشته نمی‌شوند؛ بنابراین:

$$K = [CO_2][H_2O] \Rightarrow 0/01 = \frac{x}{30} \times \frac{x}{30} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

حالا، جرم $H_2O(g)$ را در تعادل جدید، می‌*سنجیم*:

$$3 mol H_2O \times \frac{18 g H_2O}{1 mol H_2O} = 54 g H_2O$$

پس گزینه‌های (۲) و (۴)، پَر! با کاهش فشار، واکنش به سمت مول‌های گازی بیشتر جابه‌جا خواهد شد، بنابراین مقدار $Na_2CO_3(s)$ افزایش می‌یابد:

$$2NaHCO_3(s) \xrightarrow{\text{کاهش فشار}} \underbrace{Na_2CO_3(s)}_{\text{مقدار افزایش (غلظت ثابت)}} + \underbrace{CO_2(g) + H_2O(g)}_{\text{۲ مول گازی}}$$

۹۱ کدام مورد، مثالی از اصل لوشاتلیه در زندگی روزمره یا صنعت نیست؟

مشاوره این تست با هدف سنجش توانایی دانش‌آموزان در تشخیص و به‌کارگیری اصل لوشاتلیه در موقعیت‌های مختلف طراحی شده است.

۱) افزایش فشار در سیستم گردش خون باعث تنگ‌شدن رگ‌های خونی می‌شود تا فشار خون به حالت عادی برگردد.

۲) افزایش دما در بدن باعث عرق‌کردن می‌شود تا با تبخیر عرق، دمای بدن کاهش یابد.

۳) افزایش غلظت CO_2 در خون باعث افزایش تعداد تنفس می‌شود تا CO_2 اضافی از بدن خارج شود.

۴) در فرایند هابر برای تولید آمونیاک، از فشار بالا استفاده می‌شود تا تعادل واکنش به سمت تولید آمونیاک جابه‌جا شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): مثالی از اصل لوشاتلیه نیست. قاعدتاً اگر قرار بود طبق اصل لوشاتلیه اتفاقی بیفتد باید برعکس، رگ‌های خونی گشاد می‌شدند تا فشار خون کاهش یابد.

بد نیست بدانید که تنگ‌شدن رگ‌های خونی در اثر افزایش فشار خون، یک پاسخ فیزیولوژیکی است که توسط سیستم عصبی کنترل می‌شود و ربطی به تعادل شیمیایی و اصل لوشاتلیه ندارد.

چرا بقیهٔ گزینه‌ها مثال‌هایی از اصل لوشاتلیه هستند؟

گزینهٔ (۲): افزایش دما در بدن مانند افزایش دما در یک واکنش تعادلی گرماگیر عمل می‌کند و باعث جابه‌جایی تعادل به سمتی می‌شود که گرما جذب کند (یعنی تبخیر عرق).

گزینهٔ (۳): افزایش غلظت CO_2 در خون مانند افزایش غلظت یکی از واکنش‌دهنده‌ها در یک واکنش تعادلی عمل می‌کند و باعث جابه‌جایی تعادل به سمت مصرف CO_2 (یعنی افزایش تعداد تنفس) می‌شود.

گزینهٔ (۴): در فرایند هابر، افزایش فشار مانند کاهش حجم در یک واکنش تعادلی گازی عمل می‌کند و باعث جابه‌جایی تعادل به سمتی می‌شود که تعداد مول‌های گازی کم‌تر باشد (یعنی تولید آمونیاک).

۹۲ چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد اثر تغییر غلظت، فشار و دما بر تعادل واکنش درست است؟

- در واکنش تعادلی $3H_2(g) + N_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$، افزایش فشار باعث افزایش غلظت آمونیاک می‌شود.
- در واکنش تعادلی $2NO_2 \rightleftharpoons N_2O_4$، کاهش حجم باعث افزایش غلظت N_2O_4 می‌شود.
- در واکنش تعادلی $2NO_2 \rightleftharpoons N_2O_4$، افزایش دما باعث افزایش غلظت NO_2 می‌شود.
- در واکنش تعادلی $2NO(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$، افزایش غلظت O_2 باعث افزایش غلظت NO می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

الف) در واکنش تعادلی $3H_2(g) + N_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$، افزایش فشار باعث افزایش غلظت آمونیاک، می‌شود، زیرا طبق اصل لوشاتلیه، افزایش فشار در یک واکنش تعادلی گازی، باعث جابه‌جایی تعادل به سمتی می‌شود که تعداد مول‌های گازی کم‌تر باشد. در این واکنش، تعداد مول‌های گازی در سمت واکنش‌دهنده‌ها (۴ مول)، بیشتر از سمت محصولات (۲ مول) است. ✓

ب) در واکنش تعادلی $2NO_2 \rightleftharpoons N_2O_4$، کاهش حجم باعث افزایش غلظت N_2O_4 می‌شود، زیرا کاهش حجم مانند افزایش فشار عمل می‌کند و باعث جابه‌جایی تعادل به سمتی می‌شود که تعداد مول‌های گازی کم‌تر باشد. در این واکنش، تعداد مول‌های گازی در سمت واکنش‌دهنده‌ها (۲ مول) بیشتر از سمت محصولات (۱ مول) است. ✓

پ) در واکنش تعادلی $2NO_2 \rightleftharpoons N_2O_4$، افزایش دما باعث افزایش غلظت NO_2 می‌شود، زیرا این واکنش گرماگیر است و طبق اصل لوشاتلیه، افزایش دما در یک واکنش گرماگیر، باعث جابه‌جایی تعادل به سمت محصولات می‌شود. ✓

ت) در واکنش تعادلی $2NO(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$، افزایش غلظت O_2 باعث کاهش غلظت NO می‌شود، زیرا طبق اصل لوشاتلیه، افزایش غلظت یکی از واکنش‌دهنده‌ها باعث جابه‌جایی تعادل به سمت فراورده‌ها می‌شود. ✗

۹۳ چه تعداد از موارد زیر درست است؟

- در فرایند هابر، افزایش دما باعث کاهش بازده تولید آمونیاک می‌شود.
- استفاده از کاتالیزگر در فرایند هابر، بازده تولید آمونیاک را افزایش می‌دهد.
- در فرایند هابر، برای جداکردن آمونیاک از مخلوط واکنش، از تفاوت نقطهٔ جوش آمونیاک با نیتروژن و هیدروژن استفاده می‌شود.
- در فرایند هابر، افزایش فشار باعث جابه‌جایی تعادل به سمت تولید آمونیاک می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

- واکنش تولید آمونیاک در فرایند هابر، یک واکنش گرماده است. طبق اصل لوشاتلیه، افزایش دما در یک واکنش گرماده، باعث جابه‌جایی تعادل به سمت واکنش‌دهنده‌ها می‌شود و در نتیجه، بازده تولید آمونیاک کاهش می‌یابد. ✓

جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت ←

$$N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3 + \text{گرما} \uparrow$$

- استفاده از کاتالیزگر در فرایند هابر، بازده تولید آمونیاک را افزایش نمی‌دهد. کاتالیزگر فقط سرعت رسیدن به تعادل را افزایش می‌دهد، اما نقطهٔ تعادل و بازده واکنش را تغییر نمی‌دهد. ✗
- در فرایند هابر، برای جداکردن آمونیاک از مخلوط واکنش، از تفاوت نقطهٔ جوش آمونیاک (۳۳− درجهٔ سلسیوس) با نیتروژن (۱۹۶− درجهٔ سلسیوس) و هیدروژن (۲۵۳− درجهٔ سلسیوس) استفاده می‌شود. آمونیاک در دمای بالاتر از نیتروژن و هیدروژن به مایع تبدیل می‌شود و به این ترتیب، می‌توان آن را از مخلوط گازی جدا کرد. ✓
- واکنش تولید آمونیاک در فرایند هابر، با کاهش تعداد مول‌های گازی همراه است. طبق اصل لوشاتلیه، افزایش فشار در یک واکنش تعادلی گازی، باعث جابه‌جایی تعادل به سمتی می‌شود که تعداد مول‌های گازی کم‌تر باشد. بنابراین، افزایش فشار باعث جابه‌جایی تعادل به سمت تولید آمونیاک می‌شود. ✓

۹۴ کدام گزینه درست است؟

۱) در تولید پوشاک مرحله‌ای که نخ به پارچهٔ خام تبدیل می‌شود، ریسندگی نام دارد.

۲) پیشرفت صنعت نساجی وابسته به تأمین الیاف از منابع طبیعی است.

۳) در ۲۰ سال اخیر میزان تولید پلی‌استر در جهان، دو برابر شده است.

۴) برخی از درشت‌مولکول‌ها مانند نایلون و تفلون، ساختگی هستند و در طبیعت یافت نمی‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

الیاف ساختگی، الیافی هستند که در طبیعت یافت نمی‌شوند، بلکه از واکنش بین مواد شیمیایی در شرکت‌های پتروشیمی تولید می‌شوند. در واقع اغلب فراورده‌های پتروشیمیایی برای تولید انواع گوناگون الیاف مانند پلی‌استر، نایلون، تفلون و ... به کار می‌روند. از این الیاف افزون بر تهیهٔ پارچه و پوشاک، به طور گسترده‌ای در تهیهٔ انواع پوشش‌ها، ظروف نچسب و یک‌بارمصرف و پلاستیکی، فرش، پرده و ... استفاده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در تولید پوشاک به مرحله‌ای که از الیاف پنبه، نخ تولید می‌شود، ریسندگی می‌گویند.

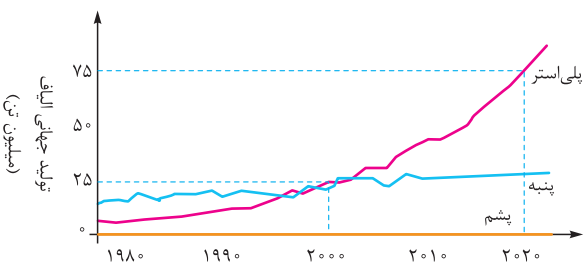
نکته

مراحل تولید پوشاک به صورت زیر است:

الیاف ←(ریسندگی) نخ ←(بافندگی) پارچهٔ خام ←(فراوری و بافندگی) پارچهٔ آمادهٔ استفاده ←(دوزندگی) پوشاک

گزینهٔ (۲): موفقیت صنعت نساجی در گرو تأمین الیاف مورد نیاز بود. با توجه به منابع طبیعی محدود، الیاف تولیدشده پاسخگوی نیاز صنایع نساجی و جامعه نبود. با گذشت زمان شیمی‌دان‌ها انواع گوناگونی از الیاف ساختگی بر پایهٔ نفت را شناسایی و تولید کردند؛ الیافی که جایگزین الیاف طبیعی شد و امروزه بخش عمدهٔ پوشاک را تشکیل می‌دهد.

گزینهٔ (۳): مطابق نمودار، از سال ۲۰۰۰ تا ۲۰۲۰، به تقریب میزان تولید الیاف پلی‌استری از ۲۵ میلیون تن به ۷۵ میلیون تن رسیده و ۳ برابر شده است.



نکته

۱) در ۴۰ سال اخیر روند تولید الیاف پشمی از دو الیاف دیگر کم‌تر بوده و به تقریب روند ثابتی داشته است.

۲) روند تولید الیاف نخی با شیب بسیار کم‌تر، روند صعودی داشته، اما میزان تولید آن از الیاف پلی‌استری کم‌تر است.

۳) روند تولید الیاف پلی‌استری با شیب زیاد، روند صعودی داشته به طوری که در چندین سال اخیر بخش عمدهٔ پوشاک را تشکیل می‌دهد.

۹۵ چند مورد از مطالب زیر درست است؟

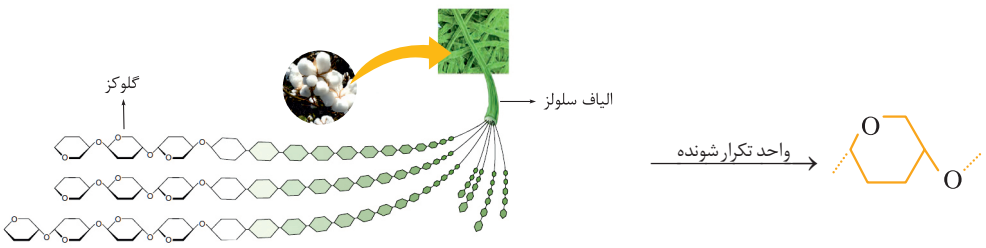
- از پنبه در تور ماهیگیری استفاده می‌شود و حدود نیمی از لباس‌های تولیدشده در جهان از آن تهیه می‌شود.
- نقطهٔ جوش آب به دلیل پیوند هیدروژنی از درشت‌مولکول انسولین، بیشتر است.
- فرمول شیمیایی واحد تکرارشونده در سلولز، $C_6H_{12}O_6$ است.
- مونومر سازندهٔ نشاسته، یک ترکیب آروماتیک محسوب نمی‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

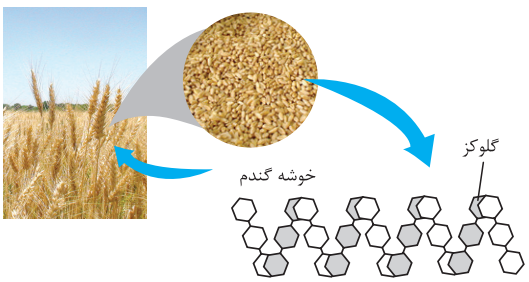
پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های اول و چهارم درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

- پنبه یکی از الیاف طبیعی است که در تولید پوشاک سهم قابل توجهی دارد. آمارها نشان می‌دهد که حدود نیمی از لباس‌های تولیدی در جهان از پنبه تهیه می‌شود. از پنبه افزون بر تولید پوشاک در تولید رویهٔ مبل، پرده، تور ماهیگیری، گاز استریل و ... استفاده می‌شود. ✓
- انسولین یک درشت‌مولکول است که از شمار بسیار زیادی اتم و واحد تکرارشونده تشکیل شده است. انسولین یک مولکول بسیار بزرگ است، بنابراین نیروی بین مولکولی بسیار قوی در آن وجود دارد، در حالی که آب یک مولکول کوچک است و با این‌که پیوند هیدروژنی برقرار می‌کند، اما قدرت نیروی بین مولکولی در آن از انسولین بسیار کم‌تر است، از این‌رو نقطهٔ جوش کم‌تری هم دارد. ×
- ساختار واحد تکرارشونده در الیاف سلولز به صورت زیر است و فرمول مولکولی آن $C_5H_8O_2$ است. ×



- واحدهای تکرارشونده در نشاسته به صورت حلقه است، اما در آن‌ها پیوند دوگانه دیده نمی‌شود، بنابراین آروماتیک محسوب نمی‌شوند. ✓



۹۶ نحوهٔ اتصال مولکول‌های گلوکز در تشکیل مولکول‌های نشاسته و سلولز اثر ....., به طوری که مولکول‌های نشاسته از اتصال ..... مولکول‌های گلوکز و مولکول‌های سلولز از اتصال ..... مولکول‌های گلوکز تشکیل می‌شود.

۱) دارد ـ زنجیری ـ مارپیچ

۲) دارد ـ مارپیچ ـ زنجیری

۳) ندارد ـ زنجیری ـ زنجیری

۴) ندارد ـ مارپیچ ـ مارپیچ

پاسخ خیلی تشریحی ✔

نشاسته و سلولز هر دو پلی‌ساکاریدهایی هستند که از واحدهای تکراری گلوکز تشکیل شده‌اند. با این‌حال، تفاوت‌هایی در ساختار و عملکرد آن‌ها وجود دارد که به دلیل نحوهٔ اتصال مولکول‌های گلوکز به یکدیگر است.

نشاسته:

- نشاسته به عنوان مادهٔ ذخیره‌کنندهٔ انرژی در گیاهان عمل می‌کند.
- در آن مولکول‌های گلوکز به شکل مارپیچ درمی‌آیند.

سلولز:

- سلولز مادهٔ اصلی سازندهٔ دیوارهٔ سلولی گیاهانی مثل پنبه است و به آن‌ها استحکام می‌بخشد.
- در آن مولکول‌های گلوکز به شکل زنجیری درمی‌آیند. بنابراین نحوهٔ اتصال مولکول‌های گلوکز در تشکیل مولکول‌های نشاسته و سلولز، تأثیر زیادی بر شکل و عملکرد آن‌ها دارد.

۹۷ چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- نفتالن ($C_{10}H_8$) برخلاف روغن زیتون، درشت‌مولکول نیست.
- سیکلوآلکان‌ها نمی‌توانند در واکنش پلیمری‌شدن شرکت کنند.
- درشت‌مولکول‌های ساختگی، می‌توانند از واکنش پلیمری‌شدن تهیه شوند.
- در فرایند تهیهٔ پلی‌اتن، کیفیت پلی‌اتن به نسبت مولی کاتالیزگرهای استفاده‌شده وابسته نیست و کاتالیزگرها صرفاً موجب سرعت‌بخشیدن به واکنش می‌شوند.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

مشاوره این تست شبیه‌ساز تست ۲۲۲ کنکور ریاضی داخل ۹۹ است که تمرکز بالایی بر روی مطالب حفظی دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های اول، دوم و سوم درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

- روغن زیتون با فرمول مولکولی $C_{57}H_{104}O_6$ یک درشت‌مولکول است، در حالی که نفتالن با فرمول مولکولی $C_{10}H_8$ یک مولکول کوچک است.
- هر ترکیب آلی که در ساختار خود پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن ($\diagup C=C \diagdown$) در زنجیر کربنی داشته باشد، می‌تواند در این نوع واکنش پلیمری‌شدن شرکت کند. بر همین اساس، ترکیب‌های سیرنشده و حاوی چنین پیوندی در زنجیر کربنی می‌توانند در صنایع پتروشیمی، با تأمین شرایط مناسب واکنش داده و پلیمرهای گوناگونی تولید کنند. سیکلوآلکان‌ها دارای حلقه‌های ۳ تا n کربنه هستند، اما دارای پیوند دوگانه نمی‌باشند و نمی‌توانند در واکنش پلیمری‌شدن (بسپارش) شرکت کنند.
- پلیمری‌شدن واکنشی است که در آن مولکول‌های کوچک در شرایط مناسب به یکدیگر متصل می‌شوند و مولکول‌هایی با زنجیرهٔ بلند و جرم مولی زیاد تولید می‌کنند؛ پلیمرهای ساختگی در صنایع پتروشیمیایی طبق همین واکنش تولید می‌شوند.
- واکنش پلیمری‌شدن اتن در شرایط گوناگون به تولید پلی‌اتن‌هایی با جرم مولی میانگین متفاوت منجر می‌شود. جرم مولی و کیفیت پلی‌اتن تولیدشده به مقدار کاتالیزگرهای واکنش بستگی دارد. بنابراین کاتالیزگرها افزون بر افزایش سرعت واکنش در کیفیت پلیمر نیز تأثیرگذارند.

۹۸ چه تعداد از موارد زیر در مورد پلیمری‌شدن ترکیباتی مانند اتن، C_2H_4، درست است؟

- در این نوع پلیمری‌شدن، مونومرها با یکدیگر واکنش‌داده و پلیمر را بدون حذف هیچ مولکول کوچکی تشکیل می‌دهند.
- هر ترکیب آلی که در ساختار خود پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن در زنجیر کربنی داشته باشد، می‌تواند در این نوع واکنش پلیمری‌شدن شرکت کند.
- به طور معمول، این پلیمرها جرم مولی مشخصی ندارند و جرم مولی آن‌ها به عواملی مثل نسبت کاتالیزگرها بستگی دارد.
- در این نوع پلیمری‌شدن، واکنش با شکسته‌شدن پیوند دوگانه در مونومرها و تشکیل پیوند جدید بین آن‌ها آغاز می‌شود.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

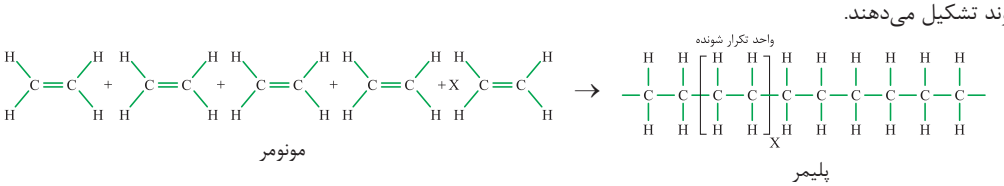
۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ همهٔ موارد درست هستند.

پلیمری‌شدن افزایشی یکی از روش‌های اصلی برای تولید پلیمرها است که در آن، مونومرها (مولکول‌های کوچک) با یکدیگر واکنش‌داده و پلیمر (مولکول بزرگ) را تشکیل می‌دهند. پلی‌اتن، یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین پلیمرها است که از طریق پلیمری‌شدن افزایشی اتن (C_2H_4) ساخته می‌شود.

بررسی همهٔ موارد:

- در پلیمری‌شدن افزایشی، مونومرها بدون حذف هیچ مولکول کوچکی (مانند آب) با یکدیگر واکنش می‌دهند. به عبارت دیگر، جرم مولی پلیمر برابر با مجموع جرم مولی مونومرهای تشکیل‌دهندهٔ آن است.
- وجود پیوند دوگانه در مونومرها برای انجام پلیمری‌شدن افزایشی ضروری است. این پیوندها در هنگام پلیمری‌شدن شکسته‌شده و امکان اتصال مونومرها به یکدیگر را فراهم می‌کنند.
- پلیمرهای افزایشی به طور معمول، جرم مولی مشخصی ندارند و عوامل مختلفی مانند دما، فشار، غلظت مونومر و کاتالیزگر می‌توانند بر روی جرم مولی این پلیمرها تأثیر بگذارند.
- در پلیمری‌شدن افزایشی، واکنش با شکسته‌شدن پیوند دوگانه در مونومرها و تشکیل پیوند جدید بین آن‌ها آغاز می‌شود. به عنوان مثال، در پلیمری‌شدن اتن، پیوند دوگانه بین دو اتم کربن شکسته شده و اتم‌های کربن با اتم‌های کربن مونومرهای دیگر، پیوند تشکیل می‌دهند.



مونومر — پلیمر

۹۹ با توجه به پلی‌استیرن که در صنعت بسته‌بندی برای تولید ظروف یک‌بارمصرف و فوم استفاده می‌شود، کدام موارد، نادرست است؟

$(H = ۱ , C = ۱۲ : g . mol^{-۱})$

$C_۸H_۸$

الف) مونومر سازندهٔ این پلیمر، یک هیدروکربن آروماتیک با ۸ اتم کربن است.

ب) جرم مولی مونومر سازندهٔ آن ۱۰۴ گرم بر مول است.

پ) در فرمول ساختاری مونومر سازندهٔ آن، به ازای هر ۳ اتم کربن، ۴ اتم هیدروژن وجود دارد.

ت) واکنش پلیمری‌شدن آن، با شکستن پیوند دوگانه در حلقهٔ بنزن همراه است.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ

۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «پ» و «ت» نادرست هستند.

پلی‌استیرن یک پلیمر مهم است که به دلیل شفافیت، سبکی، قابلیت شکل‌پذیری و قیمت مناسب، به طور گسترده در صنعت بسته‌بندی و ساخت وسایل مختلف استفاده می‌شود. این پلیمر از مونومر استیرن تشکیل شده است.

برای بررسی عبارت‌های مطرح‌شده، ابتدا به ساختار مونومر استیرن و واکنش پلیمری‌شدن آن توجه می‌کنیم:

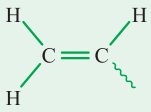


استیرن — پلی‌استیرن

بررسی عبارت‌ها:

الف) استیرن یک هیدروکربن آروماتیک با فرمول $C_۸H_۸$ است که دارای یک حلقهٔ بنزن و یک گروه وینیل است.

نکته اگر یکی از اتم‌های هیدروژن را از مولکول اتن حذف کنیم، به گروه به‌دست‌آمده، وینیل گفته می‌شود.



گروه وینیل

ب) جرم مولی مونومر استیرن برابر است با:

$$\text{جرم‌مولی } C_۸H_۸ = (۸ \times ۱۲) + (۸ \times ۱) = ۹۶ + ۸ = ۱۰۴ \ g . mol^{-۱}$$

پ) در فرمول ساختاری استیرن، ۸ اتم هیدروژن وجود دارد. بنابراین، به ازای هر ۳ اتم کربن، ۴ اتم هیدروژن نمی‌تواند وجود داشته باشد.

ت) واکنش پلیمری‌شدن پلی‌استیرن از نوع افزایشی است، اما با شکستن پیوند دوگانه در گروه وینیل همراه است، نه در حلقهٔ بنزن! حلقهٔ بنزن در واکنش پلیمری‌شدن دست‌نخورده باقی می‌ماند.

۱۰۰ کدام گزینه در مورد تفلون، نادرست است؟

C_2F_4

۱) مونومر سازندهٔ آن در مجموع ۱۸ جفت‌الکترون پیوندی و ناپیوندی دارد.

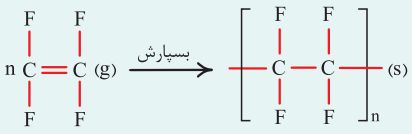
۲) مونومر سازندهٔ آن برخلاف مونومر سازندهٔ پلی‌اتن، در دمای اتاق به حالت مایع است.

۳) این پلیمر در حلال‌های آلی، حل نمی‌شود.

۴) این ماده در ساختار خود پیوند دوگانه ندارد و سیرشده است.

درس Box

تفلون نام تجاری پلیمری است که از بسپارش گاز تترافلوئورو اتن تولید می‌شود. پلانکت به همراه گروه پژوهشی‌اش در دههٔ ۱۹۳۰ میلادی در حالی که داشت انواع سردکننده‌ها را بررسی می‌کرد، به طور اتفاقی به پلیمر تفلون دست یافت که او را به شهرت و ثروت رساند. تفلون یا پلی‌تترافلوئورو اتن، نقطهٔ ذوب بالایی دارد و در برابر گرما مقاوم است. این پلیمر از نظر شیمیایی بی‌اثر بوده و با مواد شیمیایی واکنش نمی‌دهد، هم‌چنین در حلال‌های آلی حل نمی‌شود و نچسب است. این ویژگی‌ها دلیل کاربرد وسیع این پلیمر است.





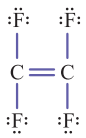




پاسخ خیلی تشریحی ✔ مونومر سازندهٔ تفلون، تترافلوئورو اتن و مونومر سازندهٔ پلی‌اتن، اتن است که هر دو در دمای اتاق به حالت گازی هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

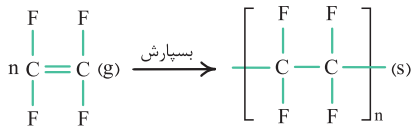
گزینهٔ (۱): ساختار مونومر سازندهٔ تفلون به صورت زیر است و در آن مجموعاً ۱۸ جفت‌الکترون پیوندی و ناپیوندی وجود دارد.



(تترافلوئورو اتن)

گزینهٔ (۳): تفلون از لحاظ شیمیایی بی‌اثر است و با مواد شیمیایی واکنش نمی‌دهد، در حلال‌های آلی حل نمی‌شود و نچسب است.

گزینهٔ (۴): همهٔ پیوندهای اشتراکی در ساختار پلیمر تفلون از نوع یگانه است.



تترافلوئورو اتن — پلی‌تترافلوئورو اتن (تفلون)

۱۰۱ اگر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در یک مولکول پلی‌تترافلوئورو اتن برابر با ۴۲۰۰ باشد، جرم مولی این مولکول چند گرم بر مول است؟ $(F=19, C=12 : g.mol^{-1})$

۱) ۳۵۰۰۰ ۲) ۳۶۴۰۰

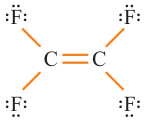
۳) ۸۴۰۰۰ ۴) ۸۷۳۶۰

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای حل این سؤال، ابتدا باید فرمول مولکولی مونومر تترافلوئورو اتن و تعداد جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در آن را تعیین کنیم. سپس با استفاده از این اطلاعات و جرم اتمی عناصر، جرم مولی پلیمر را محاسبه می‌کنیم.

۱) فرمول مولکولی و ساختار لوویس تترافلوئورو اتن:

تترافلوئورو اتن یک ترکیب آلی با فرمول C_2F_4 است. در این مولکول، هر اتم کربن با دو اتم فلوئور و یک اتم کربن دیگر پیوند دارد. ساختار لوویس تترافلوئورو اتن به صورت مقابل است:



۲) تعداد جفت‌الکترون‌های ناپیوندی:

در ساختار لوویس تترافلوئورو اتن، هر اتم فلوئور دارای ۳ جفت‌الکترون ناپیوندی است. در مجموع، این مولکول دارای ۴ اتم فلوئور و ۱۲ جفت‌الکترون ناپیوندی است.

۳) محاسبهٔ تعداد واحدهای تکرارشونده:

اگر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در نمونهٔ پلیمر برار با ۴۲۰۰ باشد، تعداد واحدهای تکرارشوندهٔ تترافلوئورو اتن در این پلیمر برابر است با:

$$\text{واحد تکرارشونده } ۳۵۰ = \frac{\text{واحد تکرارشونده } 1\,mol}{\text{جفت‌الکترون ناپیوندی } ۱۲} \times \text{جفت‌الکترون ناپیوندی } ۴۲۰۰$$

۴) محاسبهٔ جرم مولی واحد تکرارشونده:

جرم مولی واحدهای تکرارشونده تترافلوئورو اتن برابر است با:

$$\text{جرم مولی } C_2F_4 = (2\times12)+(4\times19) = ۱۰۰\ g.mol^{-1}$$

۵) محاسبهٔ جرم مولی پلیمر:

جرم مولی این نمونه پلی‌تترافلوئورو اتن برابر است با:

$$\text{واحد تکرارشونده } ۳۵۰ \times \frac{\text{واحد تکرارشونده } ۱۰۰\,g}{\text{واحد تکرارشونده } 1\,mol} = ۳۵۰۰۰\ g.mol^{-1}$$

۱۰۲ چند مورد از مطالب زیر در رابطه با پلی‌اتن، نادرست است؟

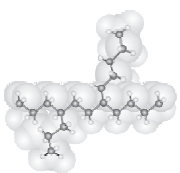
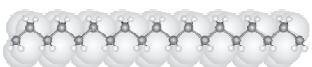
بدون شاخه

- نوعی پلی‌اتن که هر اتم کربن آن حداکثر می‌تواند به دو اتم کربن دیگر متصل شود، کدر است.
- استحکام و انعطاف‌پذیری پلی‌اتن سنگین، بیشتر از پلی‌اتن سبک است.
- در واکنش پلیمری‌شدن پلی‌اتن سبک برخلاف پلی‌اتن سنگین، تعداد مولکول‌ها افزایش می‌یابد.
- خواص فیزیکی و ساختار شیمیایی پلی‌اتن شفاف و کدر با یکدیگر متفاوت است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

پلی‌اتن یکی از مهم‌ترین پلیمرهای ساختگی است که سالانه میلیون‌ها تن از آن در شرکت‌های پتروشیمی تولید شده و برای ساخت وسایل گوناگون استفاده می‌شود. کالاهای ساخته‌شده از پلی‌اتن ویژگی‌های گوناگونی دارند. برخی مانند کیسهٔ پلاستیک شفاف بوده و کمی انعطاف‌پذیرند در حالی که برخی دیگر مانند لوله‌های پلاستیکی، دبه‌های آب یا بطری کدر شیر، سخت‌تر و محکم‌تر هستند. اتن در شرایط گوناگون، با انجام واکنش پلیمری‌شدن، فراورده‌هایی با ساختار متفاوت پدید می‌آورد. نوعی پلی‌اتن، چگالی کم‌تری داشته و شفاف است، از این‌رو به پلی‌اتن سبک معروف است در حالی که پلی‌اتن سنگین، چگالی بیشتری داشته و کدر است. مولکول‌های اتن می‌توانند به دو صورت به یکدیگر افزوده شوند و دو فراوردهٔ متفاوت ایجاد کنند. مولکول‌های اتن در شرایط معین پشت سر هم به یکدیگر متصل شده و زنجیرهای بلند و بدون شاخه ایجاد می‌کنند. اما در شرایطی دیگر برخی مولکول‌های اتن از کناره‌ها به یکدیگر افزوده شده و زنجیرهای شاخه‌دار تولید می‌شود.

ویژگی / نوع پلی‌اتن	سبک	سنگین
ظاهر	شفاف	کدر
چگالی $(g.cm^{-3})$	۰/۹۲	۰/۹۷
شاخه	شاخه‌دار	بدون شاخه
نیروی بین مولکولی	وان‌دروالسی	وان‌دروالسی
استحکام	پلی‌اتن سنگین از سبک، مستحکم‌تر است.	
کاربرد	پلاستیک و اسباب‌بازی	لوله‌های پلاستیکی، دبه‌های آب و بطری کدر شیر
ساختار		

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های دوم و سوم نادرست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

- در پلی‌اتن بدون شاخه، هر اتم کربن می‌تواند به یک یا دو اتم کربن دیگر متصل شود. پلی‌اتن بدون شاخه همان پلی‌اتن سنگین است که ظاهری کدر دارد.
- پلی‌اتن سنگین از سبک، مستحکم‌تر است اما انعطاف‌پذیری کم‌تری دارد.
- پلی‌اتن سنگین و سبک، هر دو پلیمر افزایشی هستند و در تشکیل آن‌ها، تعداد مولکول‌ها کاهش می‌یابد.
- پلی‌اتن‌های سبک و سنگین به دلیل تفاوت در ساختار شیمیایی، خواص فیزیکی متفاوتی دارند.

۱۰۳ شکل‌های زیر ساختار دو نوع پلی‌اتن متفاوت را نشان می‌دهد. با توجه به آن، چه تعداد از ویژگی‌های زیر دربارهٔ ساختار **A** نسبت به **B**، بیشتر است؟

- چگالی
- شفافیت
- انعطاف‌پذیری
- استحکام
- نقطهٔ ذوب
- نیروی بین مولکولی



ساختار A

پلی‌اتن شاخه‌دار

ساختار B

پلی‌اتن بدون شاخه

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

موارد «ب» و «پ» برای ساختار (A) نسبت به (B) بیشتر است.

در این تست دو نوع پلی‌اتن با ساختارهای متفاوت (A) و (B) نشان داده شده است. با توجه به شکل‌ها، می‌توان دریافت که ساختار (A) مربوط به **پلی‌اتن شاخه‌دار** (سبک) و ساختار (B) مربوط به **پلی‌اتن بدون شاخه** (سنگین) است.

حالا به بررسی ویژگی‌های خواسته‌شده می‌پردازیم:

الف) چگالی:

پلی‌اتن بدون شاخه (B) به دلیل ساختار منظم‌تر و فشرده‌تر، چگالی **بیشتری** نسبت به پلی‌اتن شاخه‌دار (A) دارد. در پلی‌اتن بدون شاخه، مولکول‌ها می‌توانند به طور منظم در کنار یکدیگر قرار بگیرند و فضای کم‌تری را اشغال کنند. در حالی که در پلی‌اتن شاخه‌دار، شاخه‌های فرعی مانع از چیده‌شدن منظم مولکول‌ها می‌شوند و فضای بیشتری را اشغال می‌کنند.

ب) شفافیت:

پلی‌اتن شاخه‌دار (A) به دلیل ساختار نامنظم‌تر، **شفافیت بیشتری** نسبت به پلی‌اتن بدون شاخه (B) دارد. ساختار منظم پلی‌اتن بدون شاخه باعث می‌شود که نور بیشتری پراکنده شود و شفافیت آن کاهش یابد.

پ) انعطاف‌پذیری:

پلی‌اتن شاخه‌دار (A) به دلیل وجود شاخه‌های فرعی که مانع از چیده‌شدن منظم مولکول‌ها می‌شوند، **انعطاف‌پذیری بیشتری** نسبت به پلی‌اتن بدون شاخه (B) دارد.

ت) استحکام:

پلی‌اتن بدون شاخه (B) به دلیل ساختار منظم‌تر و نیروهای بین مولکولی قوی‌تر، **استحکام بیشتری** نسبت به پلی‌اتن شاخه‌دار (A) دارد.

ث) نقطهٔ ذوب:

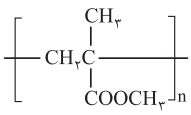
پلی‌اتن بدون شاخه (B) به دلیل نیروهای بین مولکولی قوی‌تر، **نقطهٔ ذوب بالاتری** نسبت به پلی‌اتن شاخه‌دار (A) دارد. برای ذوب‌شدن پلیمر، باید نیروهای بین مولکولی شکسته شوند و این امر در پلی‌اتن بدون شاخه به انرژی بیشتری نیاز دارد.

ج) نیروی بین مولکولی:

در پلی‌اتن بدون شاخه (B)، به دلیل تماس بیشتر بین زنجیره‌های پلیمری، نیروهای بین مولکولی (نیروهای وان‌دروالسی) **قوی‌تر** از پلی‌اتن شاخه‌دار (A) هستند. شاخه‌های فرعی در پلی‌اتن شاخه‌دار باعث کاهش سطح تماس بین زنجیره‌ها و در نتیجه ضعیف‌ترشدن نیروهای بین مولکولی می‌شوند.

۱۰۴ با بررسی دو پلیمر داده‌شده:

الف) پلی‌متیل متاآکریلات (با ساختار روبه‌رو)



ب) پلیمر سازندهٔ سرنگ ← پلی‌پروپن

اگر نسبت شمار واحدهای تکرارشوندهٔ پلیمر (الف) به شمار واحدهای تکرارشوندهٔ پلیمر (ب)، برابر ۵ باشد، نسبت جرم مولی پلیمر (الف) به جرم مولی پلیمر (ب) به تقریب کدام است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) ۱۱/۹۰

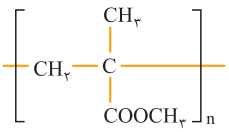
۲) ۱۰/۶۶

۳) ۹/۴۳

۴) ۷/۳۹

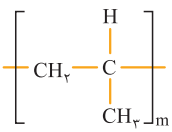
پاسخ خیلی تشریحی ✔

پلی‌متیل متاآکریلات:



$\Rightarrow$ جرم مولی = تعداد واحد تکرارشونده × جرم مولی واحد تکرارشونده $= n \times 100 = (100n)\ g.mol^{-1}$

پلی‌پروپن (پلیمر سازندهٔ سرنگ):



$\Rightarrow$ جرم مولی = تعداد واحد تکرارشونده × جرم مولی واحد تکرارشونده $= m \times 42 = (42m)\ g.mol^{-1}$

لا نسبت جرم مولی این دو پلیمر را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم مولی پلی متیل متاآکریلات}}{\text{جرم مولی پلی پروپن}} = \frac{100n}{42m} = \xrightarrow{\frac{n}{m}=5} \frac{500m}{42m} \simeq 11/90$$

۱۰۵ مولکول‌های پلی‌اتن بدون شاخه، چگالی ..... از مولکول‌های پلی‌اتن شاخه‌دار دارند و از این‌که نیروهای بین مولکولی در پلی‌اتن بدون شاخه ..... از پلی‌اتن شاخه‌دار است، نتیجه می‌گیریم که یکی از عوامل مؤثر بر روی قدرت نیروهای بین مولکولی ..... است.

۱) کم‌تری ـ قوی‌تر ـ جرم مولی
۲) کم‌تری ـ ضعیف‌تر ـ سطح تماس
۳) بیشتری ـ ضعیف‌تر ـ جرم مولی
۴) بیشتری ـ قوی‌تر ـ سطح تماس

پاسخ خیلی تشریحی ✔

پلی‌اتن، یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین پلیمرها است که از مونومر اتن (C_2H_4) ساخته می‌شود. پلی‌اتن می‌تواند به دو صورت بدون شاخه و شاخه‌دار وجود داشته باشد.

- **پلی‌اتن بدون شاخه**: در این نوع پلی‌اتن، مولکول‌ها به صورت زنجیره‌های بلند و بدون انشعاب هستند.
- **پلی‌اتن شاخه‌دار**: در این نوع پلی‌اتن، زنجیره‌های اصلی دارای شاخه‌های فرعی هستند.

چگالی:

- پلی‌اتن بدون شاخه به دلیل ساختار منظم‌تر و فشرده‌تر، چگالی بیشتری نسبت به پلی‌اتن شاخه‌دار دارد. در پلی‌اتن بدون شاخه، مولکول‌ها می‌توانند به طور منظم در کنار یکدیگر قرار بگیرند و فضای کم‌تری را اشغال کنند. در حالی که در پلی‌اتن شاخه‌دار، شاخه‌های فرعی مانع از چیده‌شدن منظم مولکول‌ها می‌شوند و فضای بیشتری را اشغال می‌کنند.

نیروی بین مولکولی:

- در پلی‌اتن بدون شاخه، به دلیل تماس بیشتر بین زنجیره‌های پلیمری، نیروهای بین مولکولی (نیروهای وان‌دروالسی) قوی‌تر از پلی‌اتن شاخه‌دار هستند. شاخه‌های فرعی در پلی‌اتن شاخه‌دار باعث کاهش سطح تماس بین زنجیره‌ها و در نتیجه ضعیف‌ترشدن نیروهای بین مولکولی می‌شوند.

عامل مؤثر بر قدرت نیروهای بین مولکولی:

- یکی از عوامل مؤثر بر قدرت نیروهای بین مولکولی در پلیمرها، سطح تماس بین زنجیره‌های پلیمری است، به طوری که هر چه سطح تماس بیشتر باشد، نیروهای بین مولکولی قوی‌تر خواهند بود.

بنابراین، با توجه به توضیحات فوق، گزینهٔ (۴) پاسخ درست این سؤال است:

- مولکول‌های پلی‌اتن بدون شاخه، چگالی بیشتری از مولکول‌های پلی‌اتن شاخه‌دار دارند.
- از این‌که نیروهای بین مولکولی در پلی‌اتن بدون شاخه قوی‌تر از پلی‌اتن شاخه‌دار است، نتیجه می‌گیریم که یکی از عوامل مؤثر بر روی قدرت نیروهای بین مولکولی سطح تماس است.