آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله سیزدهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۰/اسفند/۱۴۰۳

دفترچه شماره یک

حسابان و ریاضیات پایه	هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	بودجه‌بندی دروس
ریاضی (۱) فصل ۱ (درس ۳ و ۴) صفحهٔ ۱۴ تا ۲۷ حسابان (۱) فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۱ تا ۶ حسابان (۲) فصل ۵ صفحهٔ ۱۱۱ تا ۱۴۴	هندسه (۱) فصل ۴ صفحهٔ ۷۷ تا ۹۶ هندسه (۳) فصل ۳ صفحهٔ ۶۱ تا ۸۶	آمار و احتمال فصل ۲ (درس ۳ از ابتدای قانون احتمال کل و درس ۴) صفحهٔ ۵۵ تا ۶۸ ریاضیات گسسته فصل ۳ صفحهٔ ۵۵ تا ۸۴	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۵ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

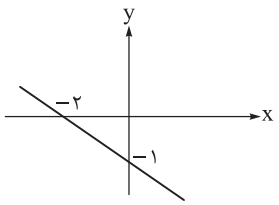
شروع دوازدهمی‌ها از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

۱- اگر $x = ۲$ طول نقطهٔ بحرانی تابع $f(x) = ax + \sqrt{۵ - x^۲}$ باشد، مقدار مینیمم مطلق تابع چه عددی است؟

۱) $\sqrt{۵} - ۲$ ۲) $-\sqrt{۵} + ۲$ ۳) $-۲\sqrt{۵}$ ۴) $-\sqrt{۵}$

۲- نمودار وارون تابع f به شکل زیر است. تابع $y = x\sqrt{(fof)(x) - ۴}$ روی کدام بازه، صعودی اکید است؟



۱) $[-۲, +\infty)$

۲) $[\frac{۱}{۲}, +\infty)$

۳) $(-\infty, \frac{۱}{۳}]$

۴) $\mathbb{R}$

۳- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = (x + a)\sqrt{۴ - x}$ روی آن اکیداً نزولی است، بازهٔ $[-۳a, ۴]$ است. مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

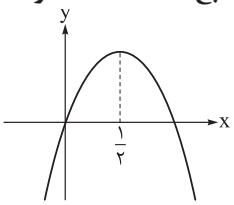
۴- تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳ax^۲ - ۱۲a^۲x$ روی یک بازه با طول ۶ واحد، نزولی اکید است. طول ماکزیمم نسبی آن چه عددی است؟ $(a > ۰)$

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

۵- مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = ax(x^۲ + ۳x - ۹)$ برابر ۵۴ است، مجموع طول و عرض نقطهٔ مینیمم نسبی تابع کدام است؟ $(a > ۰)$

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) -۴ ۴) -۹

۶- نمودار تابع $f(x) = ax^۴ + bx^۳ + ۲x$ به شکل زیر است. بیشترین مقدار تابع چه عددی است؟ (تابع نقطهٔ عطف ندارد.)



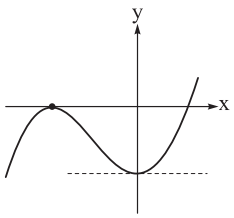
۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۱۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲۳}{۸}$

۷- هرگاه بیشترین مقدار تابع $f(x) = x + \sqrt{۳ - ۳x^۲} + ۲k$ برابر ۸ باشد، کم‌ترین مقدار آن کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) ۳

۸- هرگاه نمودار تابع درجه‌سوم $y = f(x)$ شکل زیر باشد و خط $y = -۲x - ۲$ از نقاط اکسترمم آن عبور کند، مقدار $f(۱)$ چه عددی است؟



۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۱۰

محل انجام محاسبات

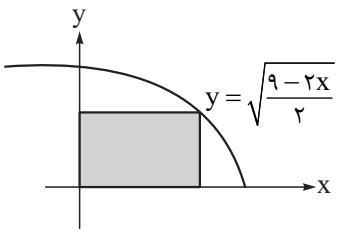
۹- تابع $f(x) = \cos 2x - 4\sin x$ با دامنهٔ $[0, 2\pi]$ داده شده است. روی کدام بازه تابع صعودی اکید یا تقعر رو به پایین است؟

۱) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{6}$
۲) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{4\pi}{3}$
۳) $\frac{5\pi}{6} < x \le \frac{3\pi}{2}$
۴) $\frac{7\pi}{6} \le x \le 2\pi$

۱۰- خطی که نقاط عطف تابع $f(x) = 2\cos^2 \frac{\pi}{3}x - 1$ روی آن قرار دارند، کدام است؟

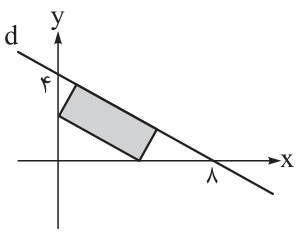
۱) $y = 0$
۲) $y = -1$
۳) $y = 2x - 1$
۴) $y = 2x$

۱۱- حداکثر مساحت مستطیل رنگی در شکل مقابل چه عددی است؟



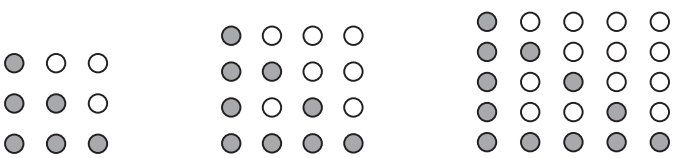
۱) $3\sqrt{\frac{4}{3}}$
۲) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
۳) $3\sqrt{\frac{3}{2}}$
۴) $3\sqrt{\frac{3}{4}}$

۱۲- خط d محورهای مختصات را در نقاط $(8,0)$ و $(0,4)$ قطع کرده است، بیشترین مساحت مستطیل سایه خورده کدام است؟



۱) ۸
۲) $2\sqrt{5}$
۳) ۴
۴) $4\sqrt{5}$

۱۳- باتوجه به الگوی زیر در شکل هشتم چه کسری از دایره‌ها رنگی شده است؟



۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۲۴
۳) ۰/۲۷
۴) ۰/۲۸

۱۴- اگر a_n الگوی خطی با جملات طبیعی و $b_n = a_n^2$ الگوی درجه‌دو باشد به طوری که $b_1 = a_4$ و $b_2 = a_{12}$، مقدار b_7 کدام است؟

۱) ۲۵۶
۲) ۲۲۵
۳) ۱۶۵
۴) ۲۸۹

محل انجام محاسبات

۱۵- اگر $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = 2a_n + 1$، اختلاف جملات نوزدهم و بیستم دنبالهٔ a_n چه عددی است؟

۱) 2^{20} ۲) 2^{19}

۳) $2^{21} - 1$ ۴) $2^{19} - 1$

۱۶- در دنبالهٔ حسابی $a_n = kn + 4$، مجموع n جملهٔ اول به صورت $S_n = 2n^2 + bn$ است. مجموع ۴ جملهٔ دوم آن چه عددی است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۲۴ ۳) ۱۱۶ ۴) ۱۲۰

۱۷- سه جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ حسابی را به ترتیب با ۲ و ۴ و ۶ جمع می‌کنیم. سه عدد به‌دست‌آمده، دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند. قدرنسبت دنبالهٔ حسابی چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -2 ۴) صفر

۱۸- اگر $a_n = 3 \times 2^{2n-1}$، حاصل $A = \frac{18}{a_1 a_2} + \frac{18}{a_2 a_3} + ... + \frac{18}{a_9 a_{10}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2^{36}} - \frac{1}{15}$ ۲) $\frac{1}{2^{30}} - \frac{1}{15}$ ۳) $\frac{1 - 2^{-32}}{16}$ ۴) $\frac{2 - 2^{-35}}{15}$

محل انجام محاسبات

۱۹- در بین نقاط عضو مجموعهٔ $S=\{(x,y)\mid x^{۲}\le y\le ۲x+\frac{۵}{۴}\}$ اگر کم‌ترین مقدار x را با m و بیشترین مقدار y را با n نمایش دهیم، حاصل $\frac{n}{m^{۲}}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۷

۲۰- فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,۲,۳)$ از نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ xy کدام است؟

۱) $\sqrt{۹/۵}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۳/۵}$

۲۱- اگر $\vec{a}=\sqrt{۳}\vec{j}\times\vec{i}+\vec{k}\times\vec{j}$ و $\vec{b}=(\sqrt{۳},۲,۱)$، آن‌گاه طول تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۲- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند، به طوری که $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{۲}$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۶}$، آن‌گاه زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۵۰°

۲۳- سه نقطهٔ $(۱,۰,-۱)$، $(۲,-۱,۱)$ و $(-۳,۱,۰)$ وسط‌های اضلاع یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۱۱}$ ۲) $۶\sqrt{۶}$ ۳) $۴/۵\sqrt{۱۱}$ ۴) $۴/۵\sqrt{۶}$

۲۴- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، هر دو به طول واحد غیرموازی و دو بردار $۲x\vec{a}+\vec{b}$ و $(۱-x)\vec{a}-\vec{b}$ موازی هستند. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع بناشده روی دو بردار $۲\vec{a}+۳x\vec{b}$ و $(۲+x)\vec{a}+\vec{b}$ برابر $\frac{۱۵}{۴}$ باشد، آن‌گاه $\vec{a}\cdot\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\pm\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ ۲) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\pm\frac{۳}{۴}$ ۴) $\pm\frac{۳}{۵}$

۲۵- چهار نقطهٔ $A(۴,۱,۳)$، $B(۳,-۱,۲)$، $C(۲,۱,۳)$ و $D(۱,۲,۲)$ در فضا رأس‌های یک متوازی‌السطوح هستند. طول ارتفاعی از این متوازی‌السطوح که از رأس D بر قاعدهٔ شامل A، B و C وارد می‌شود، کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$

۲۶- دو خط متمایز در فضا مفروض‌اند. دو نقطه روی خط اول و دو نقطه روی خط دوم در نظر می‌گیریم. چند صفحه از این چهار نقطه می‌گذرد؟

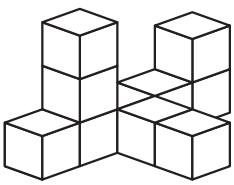
۱) صفر یا یک
۲) یک یا بی‌شمار
۳) صفر یا بی‌شمار
۴) صفر، یک یا بی‌شمار

محل انجام محاسبات

۲۷- خط L، صفحهٔ P و نقطهٔ A که بر L و P واقع نیست، مفروض‌اند، اگر فقط یک خط گذرنده از A و متقاطع با L و موازی با صفحهٔ P وجود داشته باشد، آن‌گاه چند صفحهٔ گذرنده از A و موازی با L و عمود بر صفحهٔ P وجود دارد؟

۱) یک یا بی‌شمار
۲) صفر یا بی‌شمار
۳) دقیقاً یک
۴) بی‌شمار

۲۸- قطعهٔ رسم‌شده در شکل از ۱۰ مکعب واحد ساخته شده است. اگر این قطعه را درون یک ظرف رنگ فرو ببریم، چند مکعب واحد وجود خواهد داشت که دقیقاً ۴ وجه آن رنگ شده است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۲۹- طول ساق‌های یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه ۳ و ۵ و حجم شکل حاصل از دوران آن حول قاعدهٔ کوچک ۳۳π است. طول قطر کوچک این ذوزنقه کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۱۰}$

۳۰- صفحهٔ P در تقاطع با کره‌ای با شعاع R، بیشترین سطح مقطع ممکن را ایجاد کرده است. صفحهٔ P را به موازات خود چه‌قدر جابه‌جا کنیم تا مساحت مقطع جدید ۲۰ درصد مساحت کل کره باشد؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}R$
۲) $\frac{۲}{۵}R$
۳) $\frac{۱}{۵}R$
۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}R$

محل انجام محاسبات

۳۱- در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۱۰ مهرهٔ سیاه موجود است. دو مهره به طور متوالی و بدون جاگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی دو مهرهٔ ناهمرنگ انتخاب می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۳) $\frac{۹}{۱۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۲- مربع لاتین مقابل، با کدام مربع لاتین می‌تواند متعامد باشد؟

۱	۲	۳
*	۱	*
*	*	*

۱)
۳	۱	۲
۲	*	*
*	*	*

۲)
*	*	*
۲	۱	۳
*	*	۲

۳)
*	۳	*
*	*	*
۳	۱	۲

۴)
*	۲	*
۱	۳	۲
*	*	*

۳۳- در یک دانشگاه، ۶۰ درصد جمعیت دختر و ۴۰ درصد آن پسر هستند. اگر معدل ۲۰٪ از دختران و ۱۰٪ از پسران، بالاتر از ۱۵ باشد، معدل چند درصد از دانشجویان کم‌تر یا مساوی ۱۵ است؟

۱) ۸۲ ۲) ۸۳ ۳) ۸۴ ۴) ۸۵

۳۴- بیشترین مقدار n چه‌قدر باشد تا در یک کلاس ۵۱ نفری، مطمئن باشیم حداقل n نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۵- در دو جعبه به ترتیب ۹ و ۱۵ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۱ لامپ معیوب و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب قرار دارد. از جعبهٔ اول ۴ لامپ و از جعبهٔ دوم ۸ لامپ به تصادف انتخاب کرده و در جعبهٔ جدیدی قرار می‌دهیم. مشاهده می‌شود همهٔ لامپ‌های جعبهٔ جدید سالم هستند. اگر یک لامپ به تصادف از جعبهٔ جدید انتخاب کنید، با چه احتمالی متعلق به جعبهٔ دوم است؟

۱) $\frac{۸}{۱۵}$ ۲) $\frac{۹}{۱۴}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۶- خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. احتمال آن‌که همهٔ فرزندان خانواده از یک جنسیت نباشند کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۷- به چند طریق می‌توان ۳ شاخه گل از بین ۵ نوع گل متفاوت، انتخاب کرد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۴ ۴) ۳۵

محل انجام محاسبات

۳۸- تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x+y+z=11$، با شرط $x \leq 7$، کدام است؟

۱) ۴۱
۲) ۴۲
۳) ۸۸
۴) ۸۹

۳۹- با اعداد $1,1,2,2,3,3$ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴
۲) ۲۱
۳) ۱۸
۴) ۱۵

۴۰- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «Golzari» حداقل یکی از حروف z و r در جای خودش است؟

۱) ۱۳۲۰
۲) ۱۱۰۰
۳) ۸۸۰
۴) ۶۶۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.
azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله سیزدهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۰/اسفند/۱۴۰۳

دفترچه شماره دو

فیزیک	شیمی	بودجه‌بندی دروس
فیزیک (۲) فصل ۳ و فصل ۴ صفحهٔ ۸۳ تا ۱۳۰ فیزیک (۳) فصل ۵ و فصل ۶ صفحهٔ ۱۱۵ تا ۱۵۶	شیمی (۲) فصل ۳ (از ابتدای پلی‌استرها) صفحهٔ ۱۰۹ تا ۱۲۳ شیمی (۳) فصل ۴ صفحهٔ ۹۱ تا ۱۲۳	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۸۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	
مجموع	۶۵ سؤال			۸۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

۴۱- انرژی هر یک از فوتون‌های نور تک‌رنگی $۲\ eV$ است. اگر این نور تک‌رنگ از خلأ وارد محیط شفافی شود، طول موج آن $۱۲۴\ nm$ تغییر می‌کند. تندی نور در این محیط چند متر بر ثانیه است؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm$ و $c = ۳\times ۱۰^{۸}\ m/s)$

۱) $۲/۴\times ۱۰^{۸}$
۲) $۲/۴\times ۱۰^{۷}$
۳) ۲×۱۰^{۷}
۴) ۲×۱۰^{۸}

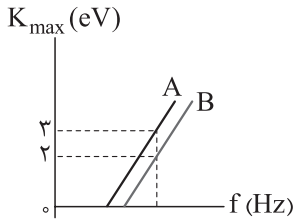
۴۲- یک لامپ با توان $۵۰\ W$ و بازده ۰/۷۲ درصد، نور تک‌رنگی را با طول موج $۰/۵۵\ \mu m$ به طور یکنواخت و در تمام جهت‌های اطراف خود منتشر می‌کند. سطحی به مساحت $۲۴\ cm^{۲}$ در فاصلهٔ ۱۰۰ متری از لامپ و عمود بر راستای انتشار نور حاصل از آن قرار دارد. در هر دقیقه چند فوتون از لامپ به این سطح می‌رسد؟
$(\pi = ۳$ و $h = ۶/۶\times ۱۰^{-۳۴}\ J\cdot s$ ، $c = ۳\times ۱۰^{۸}\ m/s)$

۱) $۱/۲\times ۱۰^{۱۲}$
۲) $۱/۲\times ۱۰^{۹}$
۳) $۷/۲\times ۱۰^{۱۲}$
۴) $۷/۲\times ۱۰^{۹}$

۴۳- تابع کار فلزی $۳\ eV$ است. به سطح این فلز به طور جداگانه سه پرتوی نور تک‌رنگ با طول موج‌های $۴۰۰\ nm$، $۵۰۰\ nm$ و $۶۰۰\ nm$ می‌تابد. چه تعداد از این پرتوها سبب خارج‌شدن الکترون از سطح فلز می‌شوند؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm)$

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۴۴- در آزمایش فوتوالکتریک، نمودار بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از سطح دو فلز A و B برحسب بسامد نور فرودی به سطح آن‌ها به شکل زیر است. اگر تابع کار یکی از این فلزها ۲۵ درصد بزرگ‌تر از تابع کار فلز دیگر باشد، تابع کار فلز B چند الکترون ولت است؟ $(h = ۴\times ۱۰^{-۱۵}\ eV.s)$



۱) ۴
۲) ۴/۲۵
۳) ۴/۵
۴) ۵

۴۵- در اتم هیدروژن، انرژی فوتون‌های مربوط به کدام خط طیفی برابر $۲/۳۲۵\ eV$ است؟
$(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm$ و $R = \frac{۱}{۱۰۰}(nm)^{-۱})$

۱) اولین خط رشتهٔ پاشن $(n' = ۳)$
۲) سومین خط رشتهٔ پاشن $(n' = ۳)$
۳) دومین خط رشتهٔ بالمر $(n' = ۲)$
۴) چهارمین خط رشتهٔ بالمر $(n' = ۲)$

محل انجام محاسبات

۴۶- در طیف گسیلی اتم هیدروژن، بلندترین طول موج کدام رشته $\frac{۴۰}{۹}\mu m$ است؟ $(R = ۰/۰۱(nm)^{-۱})$

۱) بالمر $(n' = ۲)$
۲) پاشن $(n' = ۳)$
۳) براکت $(n' = ۴)$
۴) پفوند $(n' = ۵)$

۴۷- اگر ضریب گذردهی الکتریکی خلأ برابر $\varepsilon_۰$، ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ برابر $\mu_۰$، ثابت ریدبرگ برابر R و انرژی یک ریدبرگ برابر E_R باشد، ثابت پلانک برابر کدام است؟

۱) $\frac{E_R\sqrt{\mu_۰\varepsilon_۰}}{R}$
۲) $\frac{R\sqrt{\mu_۰\varepsilon_۰}}{E_R}$
۳) $\frac{E_R}{R\sqrt{\mu_۰\varepsilon_۰}}$
۴) $\frac{R}{E_R\sqrt{\mu_۰\varepsilon_۰}}$

۴۸- در مدل اتمی بور برای هیدروژن، الکترون در مدار شمارهٔ $n_۱$ قرار دارد و انرژی آن $-۳/۴\,eV$ است. این الکترون با جذب فوتونی با انرژی $۴/۰۸\times۱۰^{-۱۹}\,J$ به مدار $n_۲$ منتقل می‌شود. در این گذار، اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر الکترون چند برابر می‌شود؟ $(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,C\,,\,E_R = ۱۳/۶\,eV)$

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۱۶}$
۳) $\frac{۱}{۶۴}$
۴) $\frac{۱}{۲۵۶}$

۴۹- الکترونی در چهارمین حالت برانگیختهٔ اتم هیدروژن قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، با جهش این الکترون به مدارهای پایین‌تر، به ترتیب از راست به چپ چند فوتون متفاوت در ناحیهٔ مرئی و چند فوتون متفاوت در ناحیهٔ فروسرخ می‌تواند گسیل شود؟

۱) ۱ و ۲
۲) ۲ و ۳
۳) ۳ و ۲
۴) ۳ و ۳

۵۰- الکترونی در سومین حالت برانگیختهٔ اتم هیدروژن قرار دارد. در گذاری که منجر به گسیل کم‌انرژی‌ترین فوتون شود، شعاع مدار الکترون چند نانومتر تغییر می‌کند؟ (شعاع بور برای اتم هیدروژن $۵/۳\times۱۰^{-۱۱}\,m$ است.)

۱) ۰/۲۶۵
۲) ۰/۳۷۱
۳) ۰/۴۲۴
۴) ۰/۷۹۵

۵۱- کدام‌یک از موارد زیر، دربارهٔ فرایند گسیل القایی درست است؟

الف) در این فرایند، برخلاف فرایند گسیل خودبه‌خودی، فوتون در جهتی کاتوره‌ای گسیل می‌شود.

ب) در این فرایند، فوتون گسیلی در همان جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند.

پ) در این فرایند، انرژی فوتون ورودی از اختلاف انرژی دو تراز بالاتر و پایین‌تر باید بیشتر باشد.

ت) در این فرایند، انرژی فوتون ورودی باید با اختلاف انرژی دو تراز بالاتر و پایین‌تر دقیقاً برابر باشد.

۱) الف و پ
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) ب و ت

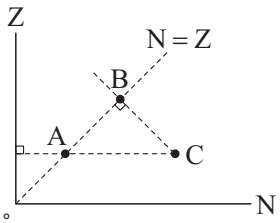
محل انجام محاسبات

۵۲- چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ هسته‌های ایزوتوپ درست است؟

- **خواص شیمیایی و فیزیکی یکسانی دارند.**
- **در جدول تناوبی عناصر، هم‌مکان هستند.**
- **تعداد نوترون‌های برابر ولی تعداد نوکلئون‌های متفاوت دارند.**

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۵۳- در نمودار عدد اتمی برحسب عدد نوترونیِ شکل زیر، اگر تعداد پروتون‌های هسته‌های A و B به ترتیب برابر ۲۰ و ۲۳ باشد، عدد جرمی هستهٔ C چقدر است و هستهٔ C با کدام هسته در جدول تناوبی عناصر هم‌مکان است؟



۱) A, ۴۳
۲) B, ۴۳
۳) A, ۴۶
۴) B, ۴۶

۵۴- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) نیروی هسته‌ای، در مقایسه با نیروی الکتریکی، ضعیف و کوتاه‌برد است.

۲) بین دو پروتون مجاور درون یک هسته، نیروی رباییش هسته‌ای وجود دارد.

۳) درون هسته، یک پروتون فقط به پروتون‌های مجاور خود نیروی دافعهٔ الکتریکی وارد می‌کند.

۴) در هسته‌های سنگین، با افزایش تعداد پروتون‌ها، تعداد نوترون‌ها نیز به همان اندازه افزایش می‌یابد.

۵۵- کدام عبارت‌های زیر دربارهٔ پرتوزایی طبیعی درست است؟

الف) در تمام فرایندهای واپاشی، تعداد نوکلئون‌های هستهٔ دختر و هستهٔ مادر یکسان است.

ب) در واپاشی β^-، پروتونی در هستهٔ مادر ناپایدار به نوترون و پوزیترون تبدیل می‌شود.

پ) اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا درحالت برانگیخته قرار می‌گیرند.

ت) در واپاشی β^+، عدد اتمی هستهٔ دختر، یک واحد کم‌تر از عدد اتمی هستهٔ مادر است.

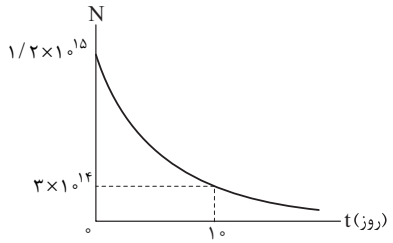
۱) الف و ب ۲) الف و پ ۳) ب و ت ۴) پ و ت

۵۶- رادون $(^{۲۲۰}_{۸۶}Rn)$ ایزوتوپ ناپایداری است که با گسیل ۳ ذرهٔ α و ۲ ذرهٔ β^- دچار واپاشی می‌شود. دراین واکنش واپاشی، اختلاف عدد نوترونی و عدد اتمی هستهٔ دختر کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۴ ۳) ۵۲ ۴) ۵۴

محل انجام محاسبات

۵۷- نمودار تعداد هسته‌های مادر پرتوزا برای بیسموت ۲۱۰ برحسب زمان به شکل زیر است. پس از چند روز ۹۳/۷۵ درصد از هسته‌های مادر یک نمونهٔ اولیه از این ماده واپاشی می‌کنند؟



۱) ۱۲/۵
۲) ۱۵
۳) ۱۷/۵
۴) ۲۰

۵۸- یک نمونه از دو مادهٔ پرتوزای A و B تشکیل شده است. نیمه‌عمر مادهٔ A ، ۴ روز و نیمه‌عمر مادهٔ B، ۵ روز است. اگر تعداد هسته‌های اولیهٔ دو ماده برابر باشد، پس از چند روز تعداد هسته‌های باقی‌ماندهٔ مادهٔ B برابر ۸۰ درصد تعداد هسته‌های باقی‌ماندهٔ نمونه می‌شود؟

۱) ۲۰
۲) ۴۰
۳) ۶۰
۴) ۸۰

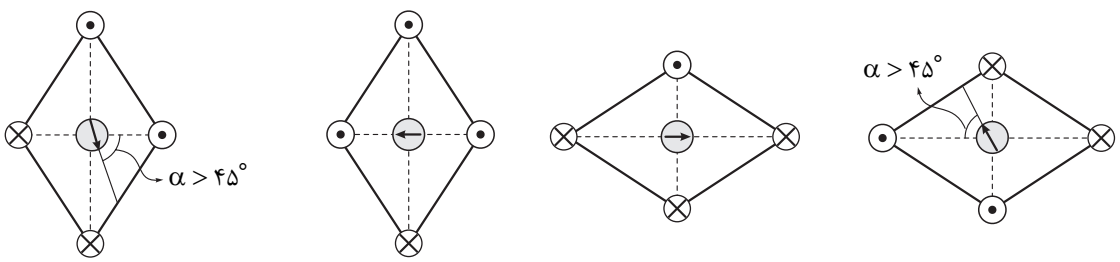
۵۹- در راکتور شکافت هسته‌ای، میله‌های کنترل که برای تنظیم آهنگ واکنش شکافت به کار می‌روند، معمولاً از کدام ماده‌ها ساخته می‌شوند؟

۱) کادمیم و بور
۲) کادمیم و گرافیت
۳) آب سنگین و بور
۴) آب سنگین و گرافیت

۶۰- در هر واکنش شکافت اورانیم ۲۳۵، حدود ۲۰۰ MeV انرژی آزاد می‌شود. برای تولید ۱۰۰ J انرژی، تقریباً چند نانوگرم اورانیم ۲۳۵ باید وارد فرایند شکافت شود؟ ($e = 1/6\times10^{-19}C$ و عدد آووگادرو $6/022\times10^{23}$ است.)

۱) ۱/۲
۲) ۲/۴
۳) ۱۲
۴) ۲۴

۶۱- در هر یک از شکل‌های زیر، چهار سیم موازی حامل جریان I در چهار رأس یک لوزی قرار گرفته‌اند. سیم‌ها همگی بلند و عمود بر صفحه‌اند. در کدام‌یک از این شکل‌ها، جهت‌گیری عقربهٔ مغناطیسی در مرکز لوزی درست نشان داده شده است؟

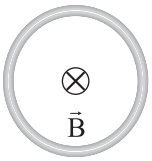


(الف) (ب) (پ) (ت)

۱) الف ـ ب
۲) الف ـ پ
۳) پ ـ ت
۴) ب ـ ت

محل انجام محاسبات

۶۲- در شکل زیر، میدان مغناطیسی حاصل از حلقهٔ حامل جریان I در مرکز حلقه، درون‌سو و اندازهٔ آن برابر $6G$ است. اگر قطر حلقه $4cm$ باشد، I چند آمپر و در چه جهتی است؟ $(\mu_0 = 12\times10^{-7}\frac{T.m}{A})$



۱) ۲۰ ـ ساعتگرد
۲) ۲۰ ـ پادساعتگرد
۳) ۴۰ ـ ساعتگرد
۴) ۴۰ ـ پادساعتگرد

۶۳- یکای فرعی شار مغناطیسی کدام است؟

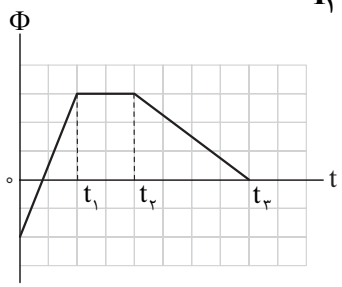
۱) $\frac{kg.m}{A.s^3}$
۲) $\frac{kg.m^2}{A.s^3}$
۳) $\frac{kg.m}{A.s^2}$
۴) $\frac{kg.m^2}{A.s^2}$

۶۴- عملکرد چه تعداد از سامانه‌های زیر براساس پدیدهٔ القای الکترومغناطیسی است؟

«تندی‌سنج دوچرخه‌های مسابقه‌ای ـ دستگاه کارت‌خوان ـ موتور الکتریکی ـ بادسنج»

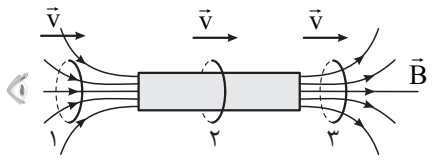
۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۶۵- نمودار شار مغناطیسی عبوری از یک حلقهٔ رسانا برحسب زمان به شکل زیر است. اگر اندازهٔ جریان الکتریکی القاشده در حلقه، در بازه‌های زمانی صفر تا t_1 و t_2 تا t_3 به ترتیب برابر I_1 و I_2 باشد، $\frac{I_2}{I_1}$ برابر کدام است؟



۱) $\frac{3}{10}$
۲) $\frac{10}{3}$
۳) $\frac{3}{5}$
۴) $\frac{5}{3}$

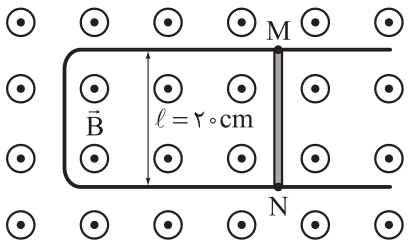
۶۶- حلقهٔ رسانایی به طرف یک آهنربای میله‌ای حرکت می‌کند. شکل زیر حلقه را در سه وضعیت ۱، ۲ و ۳ نسبت به آهنربا نشان می‌دهد. اگر جریان القاشده در حلقه در این سه وضعیت به ترتیب I_1، I_2 و I_3 باشد، از دید ناظر مشخص‌شده در شکل، کدام مورد درست است؟ (در وضعیت ۲ فاصلهٔ حلقه از دو انتهای آهنربای میله‌ای یکسان است.)



۱) I_1 و I_2 ساعتگرد و I_3 پادساعتگرد است.
۲) I_1 و I_2 پادساعتگرد و I_3 ساعتگرد است.
۳) I_3 ساعتگرد و $I_2 = 0$ است.
۴) I_1 ساعتگرد و $I_2 = 0$ است.

محل انجام محاسبات

۶۷- شکل زیر، رسانای U شکلی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به اندازهٔ ۰/۱۸T نشان می‌دهد. میدان $\vec{B}$ عمود بر صفحهٔ شکل و رو به بیرون است. میله‌ای فلزی MN به مقاومت الکتریکی ۵Ω و طول $\ell = ۲۰cm$ بین دو بازوی رسانا قرار دارد. اگر میله در مدت ۰/۳s به اندازهٔ ۲۵cm به سمت چپ جابه‌جا شود، جریان الکتریکی متوسط القاشده در آن چند میلی‌آمپر و در چه جهتی خواهد بود؟



۱) ۳۰ ـ از نقطهٔ M به نقطهٔ N

۲) ۳۰ ـ از نقطهٔ N به نقطهٔ M

۳) ۶ ـ از نقطهٔ M به نقطهٔ N

۴) ۶ ـ از نقطهٔ N به نقطهٔ M

۶۸- سطح حلقهٔ رسانایی با مساحت $۲۰۰cm^۲$ و مقاومت الکتریکی ۰/۴Ω عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. آهنگ تغییر میدان مغناطیسی چند گاوس بر ثانیه باشد تا جریان الکتریکی ۸۰μA در حلقه القا شود؟

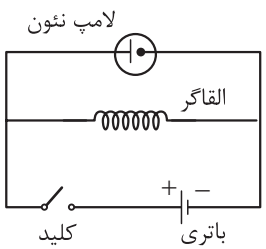
۱) ۱۶ ۲) ۱/۶ ۳) ۰/۴ ۴) ۴

۶۹- سطح حلقه‌های پیچه‌ای به مساحت $۵۰cm^۲$ که دارای ۱۰۰۰ حلقه است و با میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۰/۰۴T زاویهٔ ۵۳° می‌سازد، در مدت ۰/۰۱s می‌چرخد و عمود بر میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد. در این مدت بزرگی نیروی محرکهٔ القایی متوسط در پیچه چند ولت است؟ $(\cos ۵۳^\circ = ۰/۶)$

۱) ۰/۴ ۲) ۳/۲

۳) ۴ ۴) ۳۲

۷۰- در مدار شکل زیر ابتدا کلید باز است. کلید را در لحظهٔ $t_۱$ می‌بندیم و در لحظهٔ $t_۲$ باز می‌کنیم. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟ (مقاومت الکتریکی القاگر ناچیز است.)



۱) لامپ از لحظهٔ $t_۱$ تا لحظهٔ $t_۲$ به طور پیوسته روشن است.

۲) لامپ فقط مدت کوتاهی پس از لحظهٔ $t_۱$ روشن است.

۳) لامپ فقط مدت کوتاهی پس از لحظهٔ $t_۲$ روشن است.

۴) لامپ فقط مدت کوتاهی پس از هر دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ روشن است.

۷۱- مساحت سطح حلقه‌های یک سیم‌لولهٔ آرمانی به طول ۲۰cm برابر $۵cm^۲$ است. اگر با عبور جریان از سیم‌لوله، اندازهٔ میدان مغناطیسی در داخل آن برابر ۳۰G شود، انرژی ذخیره‌شده در سیم‌لوله در این حالت چند میلی‌ژول است؟

$$(\mu_۰ = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۷}\ \frac{T.m}{A})$$

۱) ۷/۲ ۲) ۳/۶

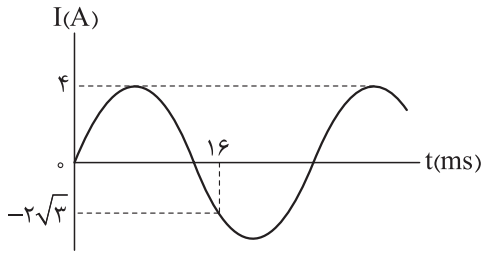
۳) ۰/۷۲ ۴) ۰/۳۶

محل انجام محاسبات

۷۲- انرژی ذخیره‌شده در القاگر حامل جریان برابر U است. در این حالت، اگر جریان عبوری از این القاگر $2A$ افزایش یابد، $56mJ$ انرژی وارد آن می‌شود و اگر جریان عبوری از آن $1A$ کاهش یابد، $22mJ$ انرژی از آن خارج می‌شود. U برابر چند میلی‌ژول است؟

۱) ۴۸ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۱۰۸

۷۳- نمودار جریان الکتریکی حاصل از یک مولد جریان متناوب که از یک رسانای اُهمی عبور می‌کند، برحسب زمان به شکل زیر است. در چه لحظه‌ای پس از لحظهٔ $t=0$ برحسب میلی‌ثانیه، توان مصرفی این رسانا برای دومین مرتبه، برابر با نصف توان مصرفی بیشینهٔ آن می‌شود؟



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۸

۷۴- معادلهٔ جریان القاشده در پیچهٔ یک مولد جریان متناوب برحسب زمان در SI به صورت $I=45\sin(50\pi t)$ است. پیچهٔ این مولد از ۵۰۰ حلقهٔ دایره‌ای‌شکل به شعاع $20cm$ تشکیل شده و مقاومت الکتریکی پیچه 20Ω است. اگر این پیچه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $0/1T$ قرار داشته باشد، در بازهٔ زمانی $t_1=\frac{1}{150}s$ تا $t_2=\frac{1}{100}s$ بار الکتریکی القاشده در پیچه چند کولن است؟ $(\pi=3)$

۱) ۱۵ ۲) ۰/۱۵
۳) ۴۵ ۴) ۰/۴۵

۷۵- کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟

۱) در مولد صنعتی جریان متناوب، پیچه ساکن است و آهنربای الکتریکی در آن می‌چرخد.
۲) یکی از مزیت‌های مهم توزیع توان الکتریکی dc بر ac آن است که افزایش و کاهش ولتاژ dc، بسیار آسان‌تر از ac است.
۳) برای انتقال توان الکتریکی در فاصله‌های دور، تا جایی که امکان دارد باید از ولتاژهای بالا و جریان‌های کم استفاده شود.
۴) با انتقال توان الکتریکی با ولتاژ بالا، می‌توان در مصرف مواد اولیهٔ ساخت سیم خطوط انتقال، صرفه‌جویی کرد.

۷۶- کدام موارد از مطالب زیر درست هستند؟

الف) دستاورد تولید اوره پس از سنتز آمونیاک صورت گرفت.

ب) در هوای آلوده علاوه بر گازهای هواکره، می‌توان اکسیدی از نیتروژن به رنگ قهوه‌ای یافت که از آرایش هشت‌تایی پیروی می‌کند.

پ) در بررسی غلظت آلاینده‌های هوا در یک کلانشهر، وقتی غلظت گاز NO در حال کاهش باشد، غلظت گازهای NO_2 و O_3 رو به افزایش می‌گذارد.

ت) در ساعات مختلف شبانه‌روز، حداکثر غلظت گاز اوزون از گاز NO_2 در هوای یک شهر آلوده، کم‌تر است.

ث) در دمای اتاق، گازهای N_2 و O_2، با یکدیگر واکنش داده و باعث افزایش غلظت گاز نیتروژن مونوکسید می‌شوند.

۱) الف ـ ب ـ ت ۲) الف ـ پ ـ ت ۳) ب ـ پ ـ ث ۴) ت ـ ث

۷۷- در واکنش فرضی $2A + Y \rightarrow D$، حداقل انرژی لازم برای انجام واکنش برابر ۱۵۰ کیلوژول است. در صورت مصرف کامل ۰/۵ مول Y در واکنش، ۱۰۰ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. بر این اساس چه تعداد از موارد زیر درست هستند؟

- **واکنش گرماده بوده و در نمودار «انرژی ـ پیشرفت» آن، اختلاف سطح انرژی قله با فراورده، برابر ۳۵۰ کیلوژول است.**
- **استفاده از کاتالیزگر مناسب می‌تواند باعث تولید ۵۰ کیلوژول گرما در ازای تولید یک مول D شود.**
- **در این واکنش، مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها از فراورده، کم‌تر است.**
- **افزایش دما در این واکنش، باعث کاهش انرژی فعال‌سازی و افزایش سرعت واکنش می‌شود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۸- کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن درست است؟

الف) در شرایط یکسان، کاتالیزگر پودر روی نسبت به توری پلاتینی، کاهش بیشتری در انرژی فعال‌سازی ایجاد می‌کند.

ب) واکنش در حضور جرقه یا توری پلاتینی با سرعت نزدیک به هم و انرژی فعال‌سازی مشابه صورت می‌گیرد.

پ) در دمای اتاق به رغم پایداری بیشتر فراورده نسبت به واکنش‌دهنده‌ها، به دلیل عدم تأمین انرژی فعال‌سازی، واکنش پیشرفت چندانی ندارد.

ت) تأثیر پودر روی و توری پلاتینی در آنتالپی واکنش، مشابه یکدیگر است.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ت

۷۹- چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ واکنش‌هایی که منجر به کاهش میزان آلاینده‌های خروجی از موتور خودروهای بنزینی می‌شود، درست است؟

- **هر سه واکنش در دمای اتاق به رغم انجام‌پذیری، سرعت چندانی ندارند.**
- **هر سه واکنش دارای $\Delta H < 0$ و E_a بسیار زیاد هستند.**
- **استفاده از توری‌هایی از جنس Pt ، Pd و Rh در خودروها، به منظور کاهش میزان آلاینده‌ها صورت می‌گیرد.**
- **هنگام روشن و گرم شدن خودرو در زمستان نسبت به تابستان، عملکرد مطلوب کاتالیزگرها، کم‌تر مشاهده می‌شود.**
- **استفاده از مش ریز به جای توری در مبدل کاتالیستی، باعث افزایش کارایی کاتالیزگر می‌شود.**

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۸۰- براساس جدول زیر، کدام مورد درست است؟ $(C = ۱۲ , N = ۱۴ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

آلاینده		CO	C_xH_y	NO
میزان آلایندگی $(g.km^{-۱})$	بدون کاتالیزگر	۵/۹۹	۱/۶۷	۱/۰۴
	با کاتالیزگر	۰/۶۱	۰/۰۷	۰/۰۴

۱) بیشترین درصد کاهش آلودگی مربوط به CO است.

۲) اگر در یک شهر، روزانه ۵۰۰۰ خودرو و هر کدام به طور میانگین ۱۰ کیلومتر تردد داشته باشند، میزان مجموع جرم آلاینده‌ها در صورت استفاده از کاتالیزگر، حدود ۴/۰ تن، کم‌تر از آلاینده‌ها در صورت عدم استفاده از مبدل کاتالیستی است.

۳) با طی‌کردن ۳۰ کیلومتر مسافت توسط یک خودرو، مجموع مول آلاینده‌های CO و NO که توسط مبدل کاتالیستی کاهش می‌یابد، برابر ۴ است.

۴) علت وجود آلاینده‌های CO و C_xH_y به ترتیب خام‌سوزی و ناقص‌سوزی بنزین است.

۸۱- کدام گزینه در مورد خودروهای دیزلی و مبدل کاتالیستی مناسب برای آن‌ها، نادرست است؟

۱) درون موتورهای دیزلی دو نوع آلاینده تولید می‌شود که برخی اتم‌های آن‌ها به آرایش هشت‌تایی پایدار نمی‌رسند.

۲) از آمونیاک برای کاهش میزان آلایندگی اکسیدهای نیتروژن و کربن استفاده می‌شود.

۳) فرایند کاهش میزان آلایندگی هیدروکربن‌ها در این خودروها به کمک کاتالیزگرها صورت می‌گیرد.

۴) حذف مقداری از گازهای CO و C_xH_y، قبل از حذف اکسیدهای نیتروژن صورت می‌گیرد.

۸۲- اگر در واکنش زیر، ضریب استوکیومتری اکسیدهای نیتروژن با هم برابر باشد، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

$$NO + NO_۲ + NH_۳ \rightarrow N_۲ + H_۲O$$

- **واکنش دارای دو اکسنده و یک کاهنده است.**
- **در واکنش موازنه‌شده، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود.**
- **اگر واکنش به‌گونه‌ای دچار تغییر شود که ضریب NO دو برابر ضریب $NO_۲$ شود، مجموع ضرایب استوکیومتری آن، برابر ۷۵ خواهد شد.**
- **در این واکنش، تنها اتم نیتروژن دچار تغییر عدد اکسایش شده است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۳- برای واکنش تعادلی $BN(s) + ۳HCl(g) \rightleftharpoons BCl_۳(g) + NH_۳(g)$، که پایداری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است، مناسب‌ترین شرایط انجام واکنش از نظر دما و فشار کدام است؟

۱) دما و فشار بالا

۲) دما و فشار پایین

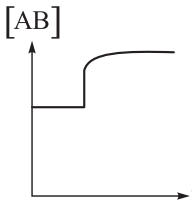
۳) دمای بالا، فشار پایین

۴) دمای پایین، فشار بالا

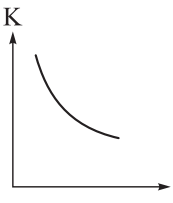
محل انجام محاسبات

۸۴- تغییر اعمال‌شده در کدام مورد بر واکنش $A(g)+B(g) \rightleftharpoons AB(g)+Q$، با نمودار ارائه‌شده هماهنگ نیست؟

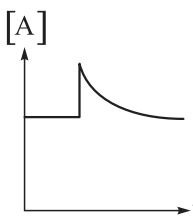
۱) کاهش حجم ظرف واکنش ← t



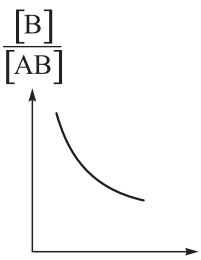
۲) افزایش دما ← t



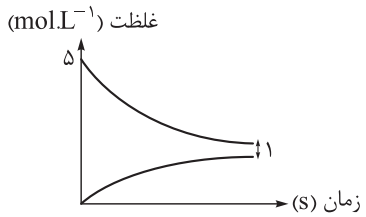
۳) افزودن مقداری $A(s)$ به ظرف واکنش ← t



۴) کاهش دما ← t



۸۵- با توجه به نمودار زیر که مربوط به واکنش گازی $2NO+O_2 \rightleftharpoons 2NO_2+Q$ در دمای $25^\circ C$ می‌باشد، ثابت تعادل این واکنش در دمای $5/12^\circ C$، کدام‌یک می‌تواند باشد؟



۱) ۳/۲

۲) ۶/۴

۳) ۹/۶

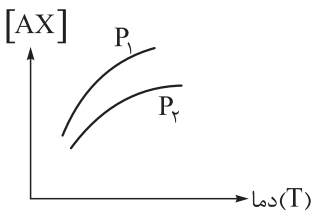
۴) ۱/۶

محل انجام محاسبات

۸۶- در یک ظرف با پیستون متحرک به حجم ۳ لیتر، سه مول از هر یک از گازهای SO_2Cl_2، SO_2 و Cl_2 در حال تعادل می‌باشد. در صورتی که حجم ظرف را در دمای ثابت به میزان دو لیتر کاهش دهیم، فشار ناشی از گازهای درون ظرف به تقریب چند برابر می‌شود؟ $SO_2Cl_2(g) \rightleftharpoons SO_2(g) + Cl_2(g)$

۱) ۰/۸۹ ۲) ۲/۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۷- نمودار زیر، تغییر غلظت مولی فراوردهٔ واکنش تعادلی $2AX(g) \rightleftharpoons 2A(g) + X_2(g)$ را در دو شرایط متفاوت نشان می‌دهد. کدام مورد، نادرست است؟



۱) مانند واکنش تولید اوزون تروپوسفری، گرماگیر است.

۲) واکنش تجزیهٔ $SO_3(g)$ به $SO_2(g)$ و $O_2(g)$ در فشار P_2، به میزان بیشتری پیش می‌رود.

۳) درصورتی که مقدار ثابت تعادل این واکنش در دمای $35^\circ C$ برابر با $2\times10^{-2}\ L.mol^{-1}$ باشد، در دمای $50^\circ C$ ثابت تعادل می‌تواند $0/01\ L.mol^{-1}$ باشد.

۴) با افزایش حجم ظرف واکنش، میزان غلظت فراورده همانند مقدار مول آن، کاهش می‌یابد.

۸۸- چند مورد از موارد زیر درست است؟

- **به‌کارگیری فناوری و تبدیل مواد خام به مواد فراوری‌شده، سبب رشد و بهره‌وری اقتصاد یک کشور می‌شود.**
- **مواد خام، مانند نمک، سنگ معدن، نفت خام و هوا هستند که فراوری نشده‌اند و با استفاده از آن‌ها می‌توان مواد شیمیایی جدیدی تولید کرد.**
- **تولید یک مادهٔ آلی جدید، می‌تواند با تغییر ساختار یا ایجاد یک یا چند گروه عاملی همراه باشد.**
- **هرچه نوع و شمار گروه‌های عاملی در مولکول هدف بیشتر باشد، ساخت آن دشوارتر بوده و به دانش پیشرفته‌تر و فناوری کارآمدتری نیاز دارد.**

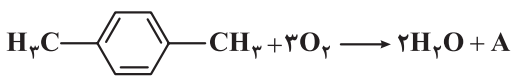
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۹- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- **در روش مستقیم تولید متانول از متان همانند روش غیرمستقیم، اتم‌های کربن اکسایش می‌یابند.**
- **باوجود غلظت بالای یون پرمنگنات (MnO_4^{2-})، باز هم شرایط مطلوب تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید تأمین نمی‌شود.**
- **پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) نوعی پلی‌استر است که از پشت هم قرار گرفتن تعداد زیادی مونومر استری تشکیل می‌شود.**
- **سرکه و افشانهٔ بی‌حس‌کنندهٔ موضعی را می‌توان به طور مستقیم از گاز اتن که مهم‌ترین خوراک صنایع پتروشیمی است، تهیه کرد.**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

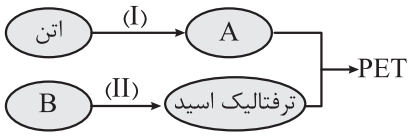
۹۰- از واکنش ۵/۳ گرم پارازایلن با خلوص ۸۰ درصد با مقدار کافی گاز اکسیژن طی واکنش زیر چند گرم آب تولید می‌شود و شمار مول پیوندهای دوگانه در فراوردهٔ آلی تولیدی به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$



۱) ۰/۲ ـ ۱/۴۴ ۲) ۰/۲ ـ ۰/۷۲ ۳) ۰/۱۲ ـ ۱/۴۴ ۴) ۰/۱۲ ـ ۰/۷۲

محل انجام محاسبات

۹۱- با توجه به شکل زیر، کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟



الف) A همانند فراوردهٔ واکنش (II)، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد.

ب) در فرایند (II) همانند فرایند (I)، دو اتم کربن اکسایش می‌یابند و شمار الکترون مبادله‌شده در واکنش‌های (I) و (II)، با یکدیگر برابر است.

پ) به ازای واکنش ۱۰۰ مول A و ۱۰ مول ترفتالیک اسید، ۱۰ مول PET و ۱۰ مول آب تولید می‌شود.

ت) اگر نوع اکسنده در واکنش‌های (I) و (II) یکسان باشد، درصد جرمی حل‌شونده در واکنش (I) از (II)، کم‌تر است.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) پ ـ ت

۹۲- کدام گزینه درست است؟

۱) واکنش $CH_4 + H_2O \rightarrow CO + 3H_2$ در دمای $350^\circ C$ و فشار $30 - 50 atm$ در حضور کاتالیزگر مناسب انجام می‌شود و یکی از مراحل غیرمستقیم تولید متانول از متان است.

۲) واکنش $C_2H_5OH(aq) + CH_3COOH(aq) \rightarrow C_2H_5COOCH_3(aq) + H_2O(l)$ مربوط به تولید حلال چسب بوده و یک واکنش استری‌شدن محسوب می‌شود.

۳) در واکنش اتن با کلر همانند واکنش اتن با هیدروژن کلرید، فراورده‌ای گازی‌شکل تولید می‌شود و کاتالیزگر واکنش اول، محلول آهن (III) کلرید است.

۴) در واکنش موازنه‌نشدهٔ $C_8H_{10} + KMnO_4 \rightarrow C_8H_6O_4 + KOH + MnO_2$، به ازای تولید ۸/۷ گرم منگنز (IV) اکسید، $1/806 \times 10^{23}$ الکترون مبادله می‌شود $(O = 16, Mn = 55 : g.mol^{-1})$.

۹۳- معادله‌های شیمیایی موازنه‌نشدهٔ زیر، تهیهٔ مادهٔ A را به دو روش نشان می‌دهد.

a) $C_6H_6 + H_2SO_4 + NaOH \rightarrow A + X + Y$

b) $C_6H_6 + C_3H_6 + O_2 \rightarrow A + Z$

با توجه به این‌که در این واکنش‌ها Y و X پسماند هستند، اما Z یک حلال صنعتی است، واکنش ..... از دیدگاه اتمی به‌صرفه‌تر است، چون ..... .

۱) a ـ شمار بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فراورده‌های سودمند تبدیل شده است

۲) a ـ زیرا C_3H_6 یک مادهٔ اولیهٔ ارزان‌قیمت است

۳) b ـ شمار بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فراورده‌های سودمند تبدیل شده است

۴) b ـ زیرا C_3H_6 یک مادهٔ اولیهٔ ارزان‌قیمت است

محل انجام محاسبات

۹۴- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **استرها دسته‌ای از مواد آلی هستند که منشأ بوی خوش شکوفه‌ها، گل‌ها، عطرها و نیز بو و طعم میوه‌ها هستند.**
- **مزهٔ ترش میوه‌هایی مانند انگور، لیموترش، کیوی، گوجه‌سبز و ...، ناشی از وجود کربوکسیلیک اسیدها در آن‌هاست.**
- **با افزایش طول زنجیر هیدروکربنی در الکل‌ها، نیروی وان‌درووالسی بر هیدروژنی غلبه می‌کند و ویژگی ناقطبی الکل، افزایش می‌یابد.**
- **مصرف بیش از اندازهٔ ویتامین موجود در هویج برای بدن مشکل خاصی ایجاد نمی‌کند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۵- کدام گزینه، عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«**شمار ..... در نخستین عضو خانواده .....، با شمار ..... ، برابر است.**»

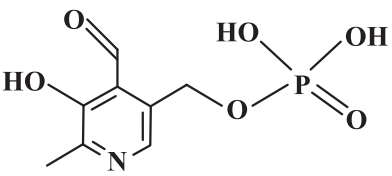
۱) اتم‌ها ـ آمین‌ها ـ گروه‌های CH_2 در ساختار استر موجود در انگور

۲) پیوندهای اشتراکی ـ استرها ـ اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی سنگین‌ترین الکل تک‌عاملی که به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

۳) اتم‌های با عدد اکسایش مثبت ـ کربوکسیلیک اسیدها ـ گروه‌های عاملی آمیدی در هر واحد تکرارشونده در ساختار کولار

۴) جفت‌الکترون‌های ناپیوندی ـ الکل‌ها ـ پیوندهای دوگانه در ساختار بنزن

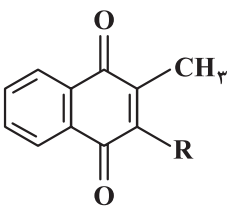
۹۶- ساختار زیر مربوط به پیریدوکسال فسفات، شکل فعال ویتامین ب۶ است که کوآنزیم برخی از واکنش‌های آنزیمی در موجودات زنده است. با توجه به آن چند مورد از موارد زیر درست است؟



- **دارای گروه‌های عاملی هیدروکسیل، آلدهید و آمین است.**
- **در ساختار آن، ۱۳ جفت‌الکترون ناپیوندی در لایهٔ آخر اتم‌ها وجود دارد.**
- **در واکنش با دو مول هیدروژن، همهٔ پیوندهای دوگانه در آن به پیوند یگانه تبدیل می‌شوند.**
- **فرمول مولکولی آن به صورت $C_8H_{10}NO_6P$ است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۷- ساختار داده‌شده، مربوط به ویتامین K با فرمول مولکولی $C_{31}H_{46}O_2$ است که در آن، R زنجیر هیدروکربنی می‌باشد. کدام موارد زیر دربارهٔ آن درست است؟ $(O = 16 g.mol^{-1})$



الف) در ساختار آن، ۴ پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن $(C=C)$ وجود دارد.

ب) برای سوختن کامل نیم‌مول از آن، به ۶۴۶ گرم گاز اکسیژن نیاز است.

پ) همانند ویتامین‌های A و D، آبگریز بوده ولی برخلاف آن‌ها، آروماتیک است.

ت) در ساختار آن، ۷۳ پیوند اشتراکی یگانه وجود دارد.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت

۳) پ ـ ت ۴) ب ـ پ

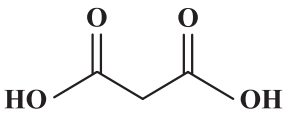
محل انجام محاسبات

۹۸- ۰/۸۵ گرم از یک ترکیب آلی به فرمول $C_xH_yN_zO_w$ با ۱/۶ گرم برم به طور کامل واکنش می‌دهد. با توجه به این‌که این ترکیب فقط یک پیوند دوگانهٔ $C=C$، یک گروه عاملی الکل و یک گروه عاملی آمین دارد، تعداد حلقه‌های موجود در این ترکیب کدام است؟

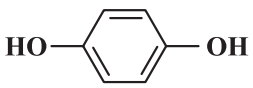
$(H=1, C=12, N=14, O=16, Br=80 : g.mol^{-1})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۹- اگر ۲۶۰۰ گرم دی‌اسید A با خلوص ۴۰ درصد با مقدار کافی دی‌الکل B با بازده ۷۵ درصد واکنش دهد، چند گرم پلی‌استر تولید می‌شود؟



(A)

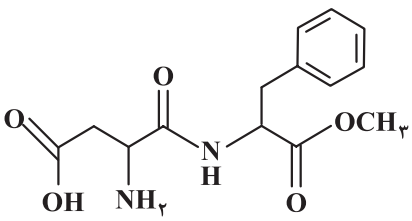


(B)

۱) ۶۶۷/۵ ۲) ۱۶۰۵
۳) ۸۰۲/۵ ۴) ۱۳۳۵

۱۰۰- با توجه به ساختار مولکول آسپارتام (شیرین‌کنندهٔ مصنوعی)، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

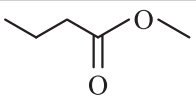
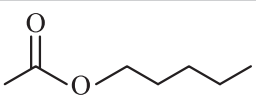
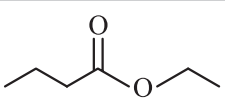
$(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$



- **نسبت جرم اتم‌های نیتروژن به اکسیژن در آن، برابر ۰/۳۵ است.**
- **نسبت تعداد اتم‌های هیدروژن به کربن در آن، به تقریب برابر ۱/۴۳ است.**
- **جرم اتم‌های کربن موجود در ۰/۲ مول از این ماده، برابر ۳۳/۶ گرم است.**
- **درصد جرمی کربن در این مولکول، به تقریب برابر ۴۷/۱۴ درصد است.**

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۱- با توجه به جدول زیر، کدام مورد نادرست است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

نام میوه	سیب	موز	آناناس
ساختار استر			

۱) جرم مولی استر موجود در آناناس، دو برابر جرم مولی استون بوده و زنجیر هیدروکربنی متصل به اتم اکسیژن در آن، دارای ۵ اتم هیدروژن است.

۲) برای تهیهٔ عامل ایجاد بوی سیب می‌توان از واکنش متانول و بوتانوئیک اسید استفاده کرد که یک واکنش اکسایش ـ کاهش محسوب می‌شود.

۳) الکل سازندهٔ بوی موز، محلول در آب است.

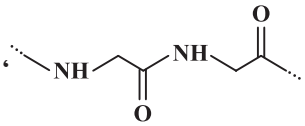
۴) درصد جرمی کربن در اسید سازندهٔ استر موجود در سیب، بیشتر از درصد جرمی کربن در استیک اسید است.

محل انجام محاسبات

۱۰۲- در ساختار کولار، اتم ..... وجود دارد و این ترکیب ..... شاخ حیوانات در ساختار خود دارای گروه عاملی آمیدی بوده و از فولاد ..... خود پنج برابر مقاوم‌تر است.

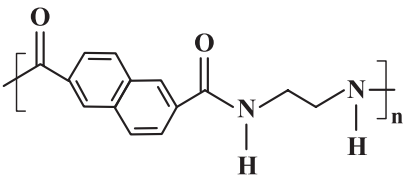
۱) اکسیژن ـ همانند ـ هم‌جرم
۲) نیتروژن ـ همانند ـ هم‌حجم
۳) اکسیژن ـ برخلاف ـ هم‌حجم
۴) نیتروژن ـ برخلاف ـ هم‌جرم

۱۰۳- اگر در مولکول استیک اسید، به جای یکی از اتم‌های هیدروژن گروه متیل، یک گروه NH_2 قرار گیرد، چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ ترکیب به‌دست‌آمده، نادرست است؟

- **ترکیب به‌دست‌آمده، دارای گروه عاملی آمیدی است.**
- **مجموع شمار جفت الکترون‌های پیوندی در آن، دو برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی لایهٔ ظرفیت اتم‌های آن است.**
- **در مقادیر زیاد، می‌تواند با مولکول‌های خود واکنش داده و پلیمری با ساختار**  **، تولید کند.**
- **این ترکیب، قادر به تشکیل پیوندهای هیدروژنی میان مولکول‌های خود می‌باشد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۴- در پلیمری با ساختار زیر، تفاوت جرم مولی دی‌آمین و دی‌اسید به‌کاررفته برای تهیهٔ آن، چند گرم است؟
$(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$



۱) ۱۵۶
۲) ۱۶۰
۳) ۱۵۲
۴) ۱۶۴

۱۰۵- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **از پلی‌لاکتیک اسید، همانند پلی‌اتن شاخه‌دار، می‌توان در ساخت کیسهٔ پلاستیکی استفاده کرد.**
- **نشاسته، پلی‌ساکاریدی است که از به هم پیوستن مولکول‌های فراورده واکنش مالتوز با آب، تولید می‌شود.**
- **برای تهیهٔ پلی‌لاکتیک اسید، باید لاکتیک اسید موجود در گیاه سیب‌زمینی را در واکنش بسپارش شرکت داد.**
- **در واکنش تهیهٔ پلیمرهایی مانند سلولز، کولار و پلی‌استرها، مونومرها با از دست دادن مولکول آب به یکدیگر متصل می‌شوند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله سیزدهم

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳ | تاریخ برگزاری: ۱۰/اسفند/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان
هندسه	محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ حمید گلزاری ـ محمد گودرزی ـ صبا مهدوی ـ حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
فیزیک	امین امینی ـ یاشار انگوتی ـ علیرضا جباری ـ مجید ساکی ـ رضا سبزمیدانی نوید شاهی ـ علیرضا عبداللهی ـ حسین عبدوی‌نژاد ـ حمید فدائی‌فرد ـ علیرضا گونه احسان محمدی ـ حامد نبی منصور ـ محمدرضا یاری ـ محمدمهدی یوسفی
شیمی	محمدعلی توسلی‌فر ـ عباس سرمایه ـ سروش عبادی ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ محمدرضا طاهری‌نژاد ـ امیرحسین مسلمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	علیرضا کاظمی‌بقا	محمدسجاد نقیه محمد گودرزی	عادل حسینی سعید خان‌بابائی منصور زرکش اصفهانی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی فرزانه خاکپاش منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی مریم نظری	فرزانه خاکپاش منصور زرکش اصفهانی علیرضا کاظمی‌بقا
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمد توکلی علیرضا جباری مریم گلی حسن‌لو	امین امینی علیرضا جباری مریم گلی حسن‌لو	سید محمود حسینی مسعود خندانی مدیا عیدی ماهان فنی‌فر احسان محمدی علی محمدی امیر محمودی انزابی ابوالفضل ناصری محمدمهدی یوسفی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	هومن زندی سروش عبادی	محمد مرادی وحید فارسیان	رامین آزادی سید علی حسین‌زاده متین قنبری آرمین عظیمی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهمی‌ها از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ راضیه سادات خلدی‌نسب زهرا صفری ـ فاطمه علی اکبری ـ محیا غنی‌فرد زهرا فرهادی‌مهر ـ محمد محمودی ـ مریم مسلمی‌زاده نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ مریم حسین‌زاده ـ زهرا داراخانی سپیده سخایی ـ الهام سهرابی ـ طاهره صادق نژاد مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته ـ مهدیه گل‌پور دریا لطفی ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com

۱ اگر $x=۲$ طول نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)=ax+\sqrt{۵-x^۲}$ باشد، مقدار مینیمم مطلق تابع چه عددی است؟

۱) $\sqrt{۵}-۲$ ۲) $-\sqrt{۵}+۲$

۳) $-۲\sqrt{۵}$ ۴) $-\sqrt{۵}$

Hint مقدار مشتق تابع را به ازای $x=۲$ برابر صفر قرار دهید.

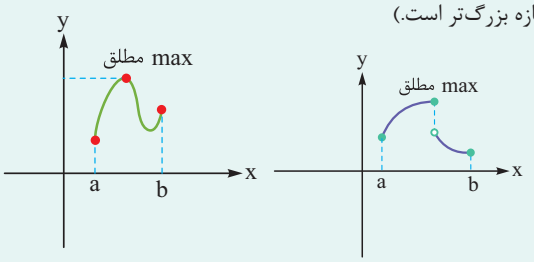
درس Box

نقاط بحرانی:

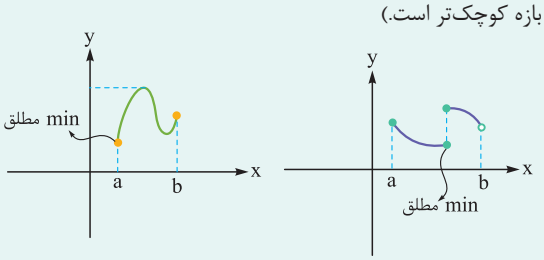
نقاطی از دامنهٔ تابع f که در آن مقدار مشتق یا برابر صفر است و یا مشتق در آن‌ها وجود ندارد، نقاط بحرانی تابع نامیده می‌شوند. نقاط سر و ته دامنه نیز جزء نقاط بحرانی به حساب می‌آیند.

اکسترمم‌های مطلق:

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ تعریف‌شده باشد، نقطهٔ $x=c$ عضو این بازه طول ماکزیمم مطلق و $f(c)$ مقدار ماکزیمم مطلق است اگر $f(c)\geq f(x)$. (یعنی $f(c)$ از هر مقدار دیگری در این بازه بزرگ‌تر است.)



اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ تعریف‌شده باشد، نقطهٔ $x=c$ عضو این بازه طول مینیمم مطلق و $f(c)$ مقدار مینیمم مطلق است، اگر $f(c)\leq f(x)$. (یعنی $f(c)$ از هر مقدار دیگری در این بازه کوچک‌تر است.)



پیداکردن مقادیر اکسترمم‌های مطلق یک تابع

۱) ابتدا طول نقاط بحرانی تابع را به دست آورید. (سر و ته دامنه را فراموش نکنید.)

۲) مقادیر تابع را به ازای طول نقاط بحرانی به دست آورید.

۳) بیشترین مقدار برابر max مطلق تابع و کم‌ترین مقدار برابر min مطلق تابع است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم تا $f'(x)$ به دست آید:

$$f'(x)=a+\left(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۵-x^۲}}\right)\Rightarrow f'(x)=a-\frac{x}{\sqrt{۵-x^۲}}$$

گام دوم: $f'(x)$ در $x=۲$ موجود است، از آن‌جا که $x=۲$ طول نقطهٔ بحرانی است؛ پس: $f'(۲)=۰$

$$f'(x)=a-\frac{x}{\sqrt{۵-x^۲}}\Rightarrow f'(۲)=a-\underbrace{\frac{۲}{\sqrt{۵-۲^۲}}}_{۱}\xrightarrow{f'(۲)=۰}۰=a-۲\Rightarrow a=۲$$

پس $f(x)=۲x+\sqrt{۵-x^۲}$.

گام سوم: برای پیداکردن طول نقاط بحرانی دیگر تابع f، ابتدا دامنهٔ آن را به دست می‌آوریم:

$$۵-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۵\Rightarrow D_f=[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]$$

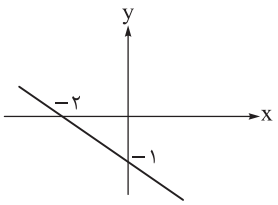
پس نقاط بحرانی تابع $x=۲$، $x=\sqrt{۵}$ و $x=-\sqrt{۵}$ هستند.

گام چهارم: حال مقادیر تابع f را به ازای طول نقاط بحرانی به دست می‌آوریم:

$$f(x)=2x+\sqrt{5-x^2} \Rightarrow \begin{cases} f(2)=2(2)+\sqrt{5-4}=5 \text{ مطلق } \max \\ f(\sqrt{5})=2(\sqrt{5})+\sqrt{5-5}=2\sqrt{5} \\ f(-\sqrt{5})=2(-\sqrt{5})+\sqrt{5-5}=-2\sqrt{5} \text{ مطلق } \min \end{cases}$$

پس مقدار min مطلق $-2\sqrt{5}$ است.

۲ نمودار وارون تابع f به شکل زیر است. تابع $y = x\sqrt{(fof)(x)-۴}$ روی کدام بازه، صعودی اکید است؟



۱) $[-۲,+\infty)$

۲) $[\frac{۱}{۲},+\infty)$

۳) $(-\infty,\frac{۱}{۳}]$

۴) $\mathbb{R}$

مشاوره در سال‌های اخیر طراحان کنکور علاقهٔ خاصی به سؤالات ترکیبی نشان داده‌اند.

Hint از روی نمودار داده‌شده ابتدا ضابطهٔ $f^{-۱}$ را پیدا کنید و با معکوس‌کردن آن به f برسید و سپس تابع مورد نظر سؤال را تشکیل دهید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$f^{-۱}: \overset{\text{شیب}}{\uparrow} m = \frac{-۱-۰}{۰-(-۲)} = \frac{-۱}{۲}$$

از $(-۲,۰)$ و $(۰,-۱)$ می‌گذرد.

با توجه به این‌که عرض از مبدأ -۱ است، ضابطهٔ $f^{-۱}$ به شکل $f^{-۱}(x) = -\frac{۱}{۲}x - ۱$ است.

گام دوم: حال ضابطهٔ وارون $f^{-۱}(x)$ یعنی $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = -\frac{۱}{۲}x - ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x = -y - ۱ \xrightarrow{\times ۲} x = -۲y - ۲ \Rightarrow f(x) = -۲x - ۲$$

گام سوم: ضابطهٔ $(fof)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = -۲x - ۲ \xrightarrow{(fof)(x)=f(f(x))} (fof)(x) = -۲(-۲x-۲) - ۲ \Rightarrow (fof)(x) = ۴x + ۲$$

گام چهارم: حال ضابطهٔ به‌دست‌آمده را در ضابطهٔ داده‌شده جای‌گذاری می‌کنیم و دامنهٔ آن را پیدا می‌کنیم:

$$y = x\sqrt{(fof)(x)-۴} \xrightarrow{(fof)(x)=۴x+۲} y = x\sqrt{۴x-۲} \xrightarrow{۴x-۲\geq ۰} x \in [\frac{۱}{۲},+\infty)$$

گام پنجم: حال مشتق تابع داده‌شده را تشکیل می‌دهیم:

$$y = x\sqrt{۴x-۲} \Rightarrow y' = \sqrt{۴x-۲} + \frac{\overset{۲}{\cancel{۴}}x}{\cancel{۲}\sqrt{۴x-۲}} \Rightarrow y' = \sqrt{۴x-۲} + \frac{۲x}{\sqrt{۴x-۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} y' = \frac{۴x-۲+۲x}{\sqrt{۴x-۲}} \Rightarrow y' = \underbrace{\frac{۶x-۲}{\sqrt{۴x-۲}}}_{\substack{\text{در دامنهٔ تابع یعنی } x\geq\frac{۱}{۲} \\ \text{همواره مثبت است.}}}$$

مشتق تابع در دامنهٔ تابع مثبت است؛ پس تابع در دامنهٔ خود یعنی $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ صعودی اکید است.

توجه: با توجه به این‌که ریشهٔ مشتق در دامنهٔ تابع قرار ندارد، نیازی به رسم جدول نمودار تابع نیست.

۳ بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=(x+a)\sqrt{۴-x}$ روی آن اکیداً نزولی است، بازهٔ $[-۳a,۴]$ است. مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم و ریشهٔ مشتق را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\sqrt{۴-x}+\frac{(-۱)}{۲\sqrt{۴-x}}(x+a)\Rightarrow f'(x)=\sqrt{۴-x}-\frac{x+a}{۲\sqrt{۴-x}}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} f'(x)=\frac{۲(۴-x)-x-a}{۲\sqrt{۴-x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۳x+۸-a}{۲\sqrt{۴-x}}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} -۳x+۸-a=۰\Rightarrow x=\frac{۸-a}{۳}$$

گام دوم: دامنهٔ تابع، $x\le ۴$ است. با توجه به ریشهٔ به‌دست‌آمده، جدول رفتار نمودار را رسم می‌کنیم. طبق فرض سؤال، تابع در بازهٔ $[-۳a,۴]$ اکیداً نزولی است؛ پس $-۳a$ همان $\frac{۸-a}{۳}$ است:

	$-\infty$	$\frac{۸-a}{۳}$		۴
f'	$+$	۰	$-$	
f	↗		↘	

$$\frac{۸-a}{۳}=-۳a\Rightarrow ۸-a=-۹a\Rightarrow ۸a=-۸\Rightarrow a=-۱$$

۴ تابع $f(x)=۲x^۳+۳ax^۲-۱۲a^۲x$ روی یک بازه با طول ۶ واحد، نزولی اکید است. طول ماکزیمم نسبی آن چه عددی است؟ $(a>۰)$

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

Hint

ریشه‌های مشتق f را به دست آورید و اختلاف آن‌ها را برابر ۶ بگذارید.

درس Box

اکسترمم‌های نسبی

اگر f یک تابع و $I\subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطهٔ c) باشد که:

۱) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x)\le f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

۲) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x)\ge f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

اگر تابع f در $x=c$، min یا max نسبی داشته باشد، می‌گوییم که $x=c$ اکسترمم نسبی تابع است.

نکته اگر $x=c$ اکسترمم نسبی باشد، $f'(x)$ در $x=c$ تغییر علامت می‌دهد. اگر تغییر علامت از $+$ به $-$ باشد max نسبی و اگر از $-$ به $+$ باشد min نسبی داریم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مشتق تابع f را به دست می‌آوریم و f' را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=۲x^۳+۳ax^۲-۱۲a^۲x\Rightarrow f'(x)=۶x^۲+۶ax-۱۲a^۲$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰}۶x^۲+۶ax-۱۲a^۲=۰\xrightarrow{\div ۶}x^۲+ax-۲a^۲=۰$$

$$\Rightarrow(x-a)(x+۲a)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=a\\x=-۲a\end{cases}\xrightarrow{a>۰}$$

		$-۲a$		a	
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
f	↗		↘		↗

گام دوم: طبق فرض سؤال، تابع f فقط در یک بازه به طول ۶، نزولی اکید است. با توجه به جدول رسم‌شده، این بازه $[-۲a,a]$ است؛ پس طول آن را برابر ۶ قرار می‌دهیم:

طول بازهٔ $[-۲a\ ,\ a]$: $a-(-۲a)=۶\Rightarrow ۳a=۶\Rightarrow a=۲$ برابر ۶ است.

گام سوم: با توجه به جدول رسم‌شده در گام اول، نقطهٔ $x=-۲a$ طول ماکزیمم نسبی تابع است، چراکه در آن مشتق از $+$ به $-$ تغییر علامت داده است؛ پس خواستهٔ سؤال که طول max نسبی است، برابر می‌شود با:

طول max نسبی : $x=-۲a\overset{a=۲}{=\!=}-۴$

۵ مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=ax(x^۲+۳x-۹)$ برابر ۵۴ است، مجموع طول و عرض نقطهٔ مینیمم نسبی تابع کدام است؟ $(a>۰)$

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) -۴ ۴) -۹

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم و f' را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=ax^۳+۳ax^۲-۹ax \Rightarrow f'(x)=۳ax^۲+۶ax-۹a \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳ax^۲+۶ax-۹a=۰$$

$$\xrightarrow[a\neq ۰]{\div ۳a} x^۲+۲x-۳=۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۳ \end{cases}$$

گام دوم: حال با توجه به ریشه‌های به‌دست‌آمده، جدول رفتار تابع را رسم می‌کنیم و در آن طول نقاط max و min نسبی را مشخص می‌کنیم:

		-۳		۱	
$\Rightarrow$	$f'(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
	$f(x)$	↗		↘		↗
			max نسبی		min نسبی	

گام سوم: به گفتهٔ سؤال، مقدار ماکزیمم نسبی برابر ۵۴ است، پس به ازای $x=-۳$، مقدار تابع باید برابر ۵۴ شود:

$$f(x)=ax(x^۲+۳x-۹) \xrightarrow[f(-۳)=۵۴]{x=-۳} ۵۴=-۳a(۹-۹-۹) \Rightarrow ۵۴=-۳a(-۹) \Rightarrow a=۲$$

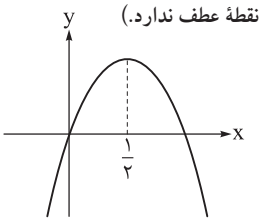
گام چهارم: حال مقدار min نسبی را با جای‌گذاری $x=۱$ در تابع به دست می‌آوریم:

$$f(x)=ax(x^۲+۳x-۹) \xrightarrow{a=۲} f(x)=۲x(x^۲+۳x-۹)$$

$$\Rightarrow f(۱)=۲(۱)(۱+۳-۹) \Rightarrow f(۱)=-۱۰$$

پس مختصات min نسبی به صورت $(۱,-۱۰)$ است که جمع مؤلفه‌های آن برابر $۱+(-۱۰)=-۹$ می‌شود.

۶ نمودار تابع $f(x)=ax^۴+bx^۳+۲x$ به شکل مقابل است. بیشترین مقدار تابع چه عددی است؟(تابع نقطهٔ عطف ندارد.)



۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۸}$
۳) $\frac{۱۵}{۸}$
۴) $\frac{۲۳}{۸}$

Hint f'' را به دست آورید و توجه کنید که f'' منفی شود. با توجه به این موضوع مقدار b را پیدا کنید و سپس $f'(\frac{۱}{۲})$ را برابر صفر قرار دهید.

درس Box

جهت تقعر

فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطهٔ x از بازهٔ باز (I) موجود باشد:

الف) اگر به ازای هر x از (I)، $f''(x)>۰$، آن‌گاه نمودار f روی بازهٔ (I) تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از (I)، $f''(x)<۰$، آن‌گاه نمودار f روی بازهٔ (I) تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر x از (I)، $f''(x)=۰$، آزمون بی‌نتیجه است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=ax^۴+bx^۳+۲x \Rightarrow f'(x)=۴ax^۳+۳bx^۲+۲ \Rightarrow f''(x)=۱۲ax^۲+۶bx$$

گام دوم: جهت تقعر منحنی همواره رو به پایین است، پس $f''(x)$ همواره منفی است و تغییر علامت ندارد، برای این‌که $f''(x)$ تغییر علامت نداشته باشد، باید $b=۰$ باشد:

$$f''(x)=\underbrace{۱۲ax^۲+۶bx}_{\text{همواره منفی}} \Rightarrow b=۰$$

گام سوم: تابع در $x=\frac{۱}{۲}$ مماس افقی دارد؛ پس $f'(\frac{۱}{۲})=۰$:

$$f'(x)=۴ax^۳+۳bx^۲+۲ \xrightarrow{b=۰} f'(x)=۴ax^۳+۲$$

$$\xrightarrow{f'(\frac{۱}{۲})=۰} ۰=۴a(\frac{۱}{۲})^۳+۲ \Rightarrow ۰=\frac{۱}{۲}a+۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}a=-۲ \Rightarrow a=-۴$$

گام چهارم: با توجه به نمودار واضح است که بیشترین مقدار تابع به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید، آن را در ضابطهٔ f جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=ax^۴+bx^۳+۲x \xrightarrow[a=-۴]{b=۰} f(x)=-۴x^۴+۲x$$

$$\Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=-۴(\frac{۱}{۲})^۴+۲(\frac{۱}{۲})=-۴(\frac{۱}{۱۶})+۱ \Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۴}+۱ \Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}$$

پس بیشترین مقدار تابع $\frac{۳}{۴}$ است.

۷ هرگاه بیشترین مقدار تابع $f(x)=x+\sqrt{۳-۳x^۲}+۲k$ برابر ۸ باشد، کم‌ترین مقدار آن کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم که بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع یا همان max و min مطلق در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتد، سر و ته دامنه نیز جزء نقاط بحرانی هستند؛ پس ابتدا دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$۳-۳x^۲\geq ۰\Rightarrow ۳x^۲\leq ۳\Rightarrow x^۲\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱\Rightarrow D_f=[-۱,۱]$$

گام دوم: از تابع f مشتق می‌گیریم و ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x+\sqrt{۳-۳x^۲}+۲k\Rightarrow f'(x)=۱+\frac{(-\overset{۳}{\cancel{۶}}x)}{\cancel{۲}\sqrt{۳-۳x^۲}}\Rightarrow f'(x)=۱-\frac{۳x}{\sqrt{۳-۳x^۲}}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} ۱-\frac{۳x}{\sqrt{۳-۳x^۲}}=۰\Rightarrow \frac{۳x}{\sqrt{۳-۳x^۲}}=۱\Rightarrow ۳x=\sqrt{۳-۳x^۲}\quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۹x^۲=۳-۳x^۲\Rightarrow ۱۲x^۲=۳\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-۱}{۲} & \times \ (\text{در}(*)\ \text{صدق نمی‌کند.}) \\ x=\frac{۱}{۲} & \checkmark \end{cases}$$

گام سوم: در گام اول $x=۱$ و $x=-۱$ و در گام دوم $x=\frac{۱}{۲}$ را به عنوان نقاط بحرانی شناختیم. حال مقادیر تابع را به ازای آن‌ها به دست می‌آوریم تا max و min مطلق تابع پیدا شود:

$$f(x)=x+\sqrt{۳-۳x^۲}+۲k\Rightarrow \begin{cases} f(۱)=۱+\sqrt{۳-۳}+۲k\Rightarrow f(۱)=۱+۲k \\ f(-۱)=-۱+\sqrt{۳-۳}+۲k\Rightarrow f(-۱)=-۱+۲k \ \text{مطلق min} \\ f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}+\underbrace{\sqrt{۳-\frac{۳}{۴}}}_{\frac{۳}{۲}}+۲k\Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=۲+۲k \ \text{مطلق max} \end{cases}$$

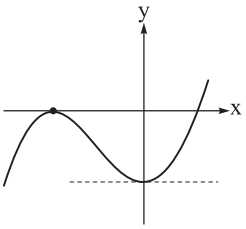
گام چهارم: دیدیم که $۲+۲k$ ماکزیمم مطلق تابع است و طبق فرض سؤال مقدار آن ۸ است؛ پس:

$$۲+۲k=۸\Rightarrow ۲k=۶\Rightarrow k=۳$$

گام پنجم: min مطلق یا کم‌ترین مقدار تابع، $-۱+۲k$ است که به ازای $k=۳$ برابر می‌شود با:

$$\text{کم‌ترین مقدار تابع}: -۱+۲\underset{۳}{k}=-۱+۲(۳)=۵$$

۸ هرگاه نمودار تابع درجه‌سوم $y=f(x)$ شکل زیر باشد و خط $y=-2-2x$ از نقاط اکسترمم آن عبور کند، مقدار $f(1)$ چه عددی است؟



۱) ۴

۲) ۶

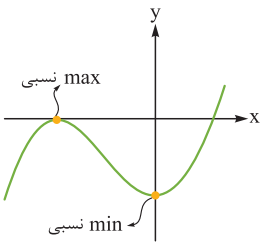
۳) ۸

۴) ۱۰

Hint در خط $y=-2-2x$ یک بار x را برابر صفر و یک بار y را برابر صفر قرار دهید تا مختصات اکسترمم‌های نسبی پیدا شود و سپس آن‌ها را در تابع مشتق آن جای‌گذاری کنید.

نکته فرم کلی تابع درجه‌سه به صورت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** بر روی نمودار، max و min نسبی را مشخص کرده‌ایم، به گفتهٔ سؤال، این نقاط بر روی خط $y=-2-2x$ قرار دارند، پس $x=0$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم تا مختصات min نسبی به دست آید. هم‌چنین $y=0$ را در آن جاگذاری می‌کنیم تا مختصات max نسبی به دست آید:



$$y=-2-2x\begin{cases}\xrightarrow{x=0} y=-2-2(0)\Rightarrow y=-2\Rightarrow \text{نسبی min}:(0,-2)\\ \xrightarrow{y=0} 0=-2-2x\Rightarrow x=-1\Rightarrow \text{نسبی max}:(-1,0)\end{cases}$$

گام دوم: فرم کلی تابع درجه‌سوم را می‌دانیم، نقاط $(0,-2)$ و $(-1,0)$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\begin{cases}\xrightarrow{(0,-2)\in f} -2=0+0+0+d\Rightarrow d=-2\\ \xrightarrow{(-1,0)\in f} 0=a(-1)+b(1)+c(-1)+\underbrace{d}_{-2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 0=-a+b-c-2\Rightarrow a-b+c=-2\qquad (*)$$

گام سوم: با توجه به نمودار، تابع در $x=0$ و $x=-1$ مماس افقی دارد؛ پس مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$\xrightarrow[f'(-1)=0]{f'(0)=0}\begin{cases}0=0+0+c\Rightarrow c=0\\ 0=3a(1)+2b(-1)+\underbrace{c}_{0}\Rightarrow 3a-2b=0\Rightarrow 3a=2b\Rightarrow b=\frac{3}{2}a\end{cases}$$

گام چهارم: روابط به‌دست‌آمده در گام سوم را در رابطهٔ $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a-b+\underbrace{c}_{0}=-2\Rightarrow a-b=-2\xrightarrow{b=\frac{3}{2}a} a-\frac{3}{2}a=-2\Rightarrow \frac{-1}{2}a=-2\Rightarrow a=4\Rightarrow b=6$$

پس ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=4x^3+6x^2-2$ است.

گام پنجم: $f(1)$ برابر می‌شود با:

$$f(1)=4(1)^3+6(1)-2\Rightarrow f(1)=8$$

۹ تابع $f(x)=\cos 2x-4\sin x$ با دامنهٔ $[0,2\pi]$ داده شده است. روی کدام بازه تابع صعودی اکید یا تقعر رو به پایین است؟

۱) $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{5\pi}{6}$

۲) $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{4\pi}{3}$

۳) $\frac{5\pi}{6}<x\le\frac{3\pi}{2}$

۴) $\frac{7\pi}{6}\le x\le 2\pi$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا از f مشتق می‌گیریم و $f'(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\cos 2x-4\sin x\Rightarrow f'(x)=-2\sin 2x-4\cos x$$

$$\xrightarrow{\sin 2x=2\sin x\cos x} f'(x)=-4\sin x\cos x-4\cos x$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از }-4\cos x} f'(x)=-4\cos x(\sin x+1)$$

گام دوم: می‌خواهیم تابع f صعودی اکید باشد، پس $f'(x)$ باید همواره مثبت باشد (در تک‌نقطه‌ها صفر نیز می‌تواند باشد):

$$f'(x)=-4\cos x(\sin x+1)\xrightarrow{f'(x)\ge 0}\underbrace{-4\cos x(\sin x+1)}_{\text{غیرمنفی}}\ge 0$$

$$\Rightarrow -4\cos x\ge 0\Rightarrow\cos x\le 0$$

گام سوم: حال $f''(x)$ را به دست می‌آوریم. برای این‌که تابع دارای تقعر رو به پایین باشد، باید f'' منفی باشد، پس:

$$f'(x)=-2\sin 2x-4\cos x\Rightarrow f''(x)=-4\cos 2x+4\sin x$$

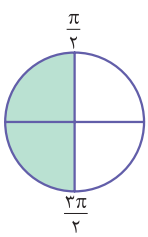
$$\xrightarrow{\cos 2x=1-2\sin^2 x} f''(x)=-4(1-2\sin^2 x)+4\sin x\Rightarrow f''(x)=-4+8\sin^2 x+4\sin x$$

$$\xrightarrow{f''(x)=0} 8\sin^2 x+4\sin x-4=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=-1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

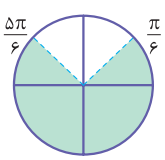
$$\Rightarrow\begin{array}{c|ccccc}\sin x & & -1 & & \frac{1}{2} & \\ \hline f''(x) & + & 0 & - & 0 & +\end{array}\Rightarrow -1<\sin x<\frac{1}{2}$$

از گام دوم و سوم نتیجه گرفتیم که $\cos x\le 0$ و $-1<\sin x<\frac{1}{2}$ پس در دامنهٔ f که $[0,2\pi]$ است داریم:

$\cos x\le 0$



و $-1<\sin x<\frac{1}{2}$



$$\xrightarrow{\cap}\frac{5\pi}{6}<x\le\frac{3\pi}{2}$$

۱۰ خطی که نقاط عطف تابع $f(x)=۲\cos^۲\frac{\pi}{۳}x-۱$ روی آن قرار دارند، کدام است؟

۱) $y=۰$ ۲) $y=-۱$

۳) $y=۲x-۱$ ۴) $y=۲x$

مشاوره نقطهٔ عطف، مبحث مخصوص رشتهٔ ریاضی است، پس می‌تواند مورد توجه طراحان کنکور قرار بگیرد.

درس Box

نقطهٔ عطف

فرض کنیم تابع f در نقطهٔ $x=c$ پیوسته است. در این صورت نقطهٔ $(c,f(c))$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) نمودار f در نقطهٔ $(c,f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر f در نقطهٔ $(c,f(c))$ تغییر کند.

برای پیداکردن نقطهٔ عطف باید نقطه یا نقاطی را پیدا کنیم که در آن f'' یا برابر صفر باشد و یا در آن‌ها وجود نداشته باشد. توجه کنید که این شرط‌ها کافی نیست و در نقاط پیداشده حتماً باید مماس وجود داشته باشد تا نقطهٔ عطف باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا $f'(x)$ سپس $f''(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=۲\cos^۲\frac{\pi}{۳}x-۱\Rightarrow f'(x)=-۴\frac{\pi}{۳}\underbrace{\cos\frac{\pi}{۳}x\sin\frac{\pi}{۳}x}_{\frac{۱}{۲}\sin ۲(\frac{\pi}{۳}x)}\Rightarrow f'(x)=-۲\frac{\pi}{۳}\sin\frac{۲\pi}{۳}x$$

$$\Rightarrow f''(x)=-۲(\frac{۲\pi^۲}{۹})\cos\frac{۲\pi}{۳}x\Rightarrow f''(x)=\frac{-۴\pi^۲}{۹}\cos\frac{۲\pi}{۳}x$$

گام دوم: می‌دانیم که نقطهٔ عطف تابع در نقاطی اتفاق می‌افتد که f'' برابر صفر است یا وجود ندارد. در این‌جا f'' در همهٔ نقاط موجود است، پس نقطهٔ عطف در $f''(x)=۰$ اتفاق می‌افتد:

$$f''(x)=\frac{-۴\pi^۲}{۹}\cos\frac{۲\pi}{۳}x\Rightarrow-\frac{۴\pi^۲}{۹}\cos\frac{۲\pi}{۳}x=۰\Rightarrow\cos\frac{۲\pi}{۳}x=۰$$

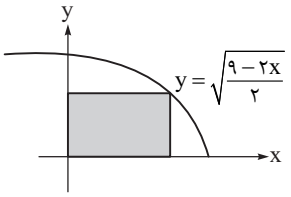
$$\xrightarrow{\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱} ۲\cos^۲\frac{\pi}{۳}x-۱=۰\Rightarrow\cos^۲\frac{\pi}{۳}x=\frac{۱}{۲}$$

گام سوم: برای این‌که نقاط عطف را به دست آوریم نیازی نیست که به صورت مستقیم x را به دست آوریم. در ضابطهٔ f به جای $\cos^۲\frac{\pi}{۳}x$، $\frac{۱}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=۲\cos^۲\frac{\pi}{۳}x-۱\xrightarrow{\cos^۲\frac{\pi}{۳}x=\frac{۱}{۲}}۲(\frac{۱}{۲})-۱=۰$$

پس نقاط عطف تابع بر روی خط $y=۰$ قرار دارند.

۱۱ حداکثر مساحت مستطیل رنگی در شکل مقابل چه عددی است؟



۱) $3\sqrt{\frac{4}{3}}$

۲) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

۳) $3\sqrt{\frac{3}{2}}$

۴) $3\sqrt{\frac{3}{4}}$

مشاوره در بین مباحث کاربرد مشتق، بهینه‌سازی همواره در همهٔ کنکورها بوده است.

Hint طول مستطیل را x و عرض آن را برابر $\sqrt{\frac{9-2x}{2}}$ در نظر بگیرید و تابع مساحت را تشکیل دهید.

درس Box

کاربرد مشتق

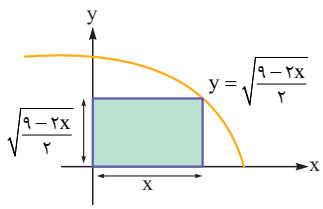
در حل سؤالات کاربرد مشتق هدف پیداکردن بیشینه و یا کمینه است، مراحل زیر را باید به ترتیب رعایت کنیم:

۱) تابع هدف را برحسب یک متغیر تشکیل دهیم.

۲) از تابع هدف مشتق بگیریم و نقاط بحرانی را پیدا کنیم.

۳) نقاط به‌دست‌آمده در مرحلهٔ دوم را در تابع هدف جاگذاری کنیم تا بیشترین مقدار و یا کم‌ترین مقدار پیدا شود.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به ضابطهٔ داده‌شده برای تابع، برای مساحت مستطیل یک تابع برحسب x تشکیل می‌دهیم:



$$S(x)=x\underbrace{\sqrt{\frac{9-2x}{2}}}_{\sqrt{4/5-x}}\Rightarrow S(x)=x\sqrt{4/5-x}$$

گام دوم: حال از تابع به‌دست‌آمده مشتق می‌گیریم و ریشهٔ آن را به دست می‌آوریم:

$$S(x)=x\sqrt{4/5-x}\Rightarrow S'(x)=\sqrt{4/5-x}+\frac{-1}{2\sqrt{4/5-x}}(x)$$

$$\Rightarrow S'(x)=\sqrt{4/5-x}-\frac{x}{2\sqrt{4/5-x}}\Rightarrow S'(x)=\frac{2(4/5-x)-x}{2\sqrt{4/5-x}}\Rightarrow S'(x)=\frac{9-3x}{2\sqrt{4/5-x}}$$

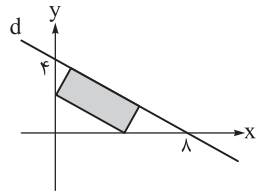
$$\xrightarrow{S'(x)=0} 9-3x=0\Rightarrow x=3$$

پس $x=3$ نقطهٔ بحرانی تابع به‌دست‌آمده است.

گام سوم: برای به دست آوردن بیشترین مقدار مساحت، $x=3$ را در تابع مساحت جاگذاری می‌کنیم:

$$S(x)=x\sqrt{4/5-x}\xrightarrow{x=3} S_{max}=3\sqrt{4/5-3}=3\sqrt{1/5}\Rightarrow S_{max}=3\sqrt{\frac{3}{2}}$$

۱۲ خط d محورهای مختصات را در نقاط (۸,۰) و (۰,۴) قطع کرده است، بیشترین مساحت مستطیل سایه‌خورده کدام است؟



۱) ۸

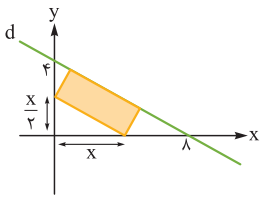
۲) $۲\sqrt{۵}$

۳) ۴

۴) $۴\sqrt{۵}$

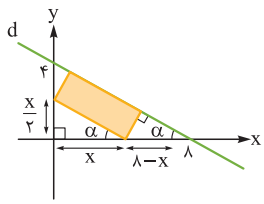
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شیب خط داده‌شده $-\frac{۱}{۲}$ است، پس شیب خط دیگر نیز که موازی آن است، $-\frac{۱}{۲}$ است. با توجه به این موضوع و قضیهٔ فیثاغورس طول مستطیل را پیدا می‌کنیم:



$$\text{طول مستطیل}: \sqrt{(\frac{x}{۲})^۲ + x^۲} = \sqrt{\frac{۵x^۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}x$$

گام دوم: باتوجه به قضیهٔ خطوط موازی و مورب، زاویه‌های برابر را مشخص کرده‌ایم، دو مثلث پایینی با هم متشابه هستند، عرض مستطیل را برابر y در نظر می‌گیریم:



$$\frac{۸-x}{\sqrt{۵}} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{۸-x}{\sqrt{۵}}$$

(روبه قائمه) (روبه α)

گام سوم: حال که طول و عرض را پیدا کرده‌ایم، تابع مساحت را تشکیل می‌دهیم و از آن مشتق می‌گیریم:

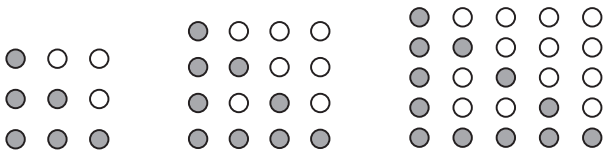
$$S(x) = \frac{\sqrt{۵}}{۲}x(\frac{۸-x}{\sqrt{۵}}) \Rightarrow S(x) = ۴x - \frac{x^۲}{۲}$$

گام چهارم: مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم تا نقطهٔ بحرانی پیدا شود و آن را در تابع مساحت قرار می‌دهیم تا بیشترین مقدار مساحت حاصل گردد:

$$S'(x) = ۰ \Rightarrow ۴ - x = ۰ \Rightarrow x = ۴ \xrightarrow{S(x)=۴x-\frac{x^۲}{۲}} S(۲) = ۱۶ - \frac{۱۶}{۲} = ۸$$

۱۳ باتوجه به الگوی زیر در شکل هشتم چه کسری از دایره‌ها رنگی شده است؟

مشاوره ردپای الگوها در کنکورهای نظام جدید مشاهده شده است و ممکن است در آینده نیز از آن‌ها سؤال طرح شود.



۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۲۴
۳) ۰/۲۷
۴) ۰/۲۸

Hint جملهٔ عمومی کل دایره‌ها به صورت $(n+2)^2$ است و دایره‌های رنگی نیز الگوی خطی تشکیل می‌دهند.

درس Box

الگوها:

الگوی خطی: الگوهایی هستند که در آن‌ها اختلاف جملات ثابت است و جملهٔ عمومی آن‌ها به صورت زیر است:

$$t_n = an + b$$

در این‌جا a همان اختلاف جملات است و b به کمک مقداردهی پیدا می‌شود.

الگوهای غیرخطی: الگوهایی که خطی نیستند را غیرخطی گوییم. اکثر این الگوها درجه دوم هستند، در الگوهای درجه‌دوم اختلافِ اختلاف ثابت است و جملهٔ عمومی آن‌ها به صورت زیر است:

$$t_n = an^2 + bn + c$$

در این‌جا a نصفِ اختلافِ اختلاف است و b و c به کمک مقداردهی به دست می‌آیند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: واضح است که کل دایره‌ها در هر شکل، تشکیل یک الگوی درجه‌دوم می‌دهند و مقدار آن‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$(n+2)^2$: تعداد کل دایره‌ها در هر شکل

گام دوم: تعداد دایره‌های رنگی با یکدیگر تشکیل یک دنبالهٔ خطی می‌دهند:

$\underset{\text{۳}}{\text{۶}},\underset{\text{۳}}{\text{۹}},\text{۱۲},\ldots$: تعداد دایره‌های رنگی

فرم کلی دنبالهٔ خطی به صورت $a_n = an + b$ است که a همان اختلاف، یعنی ۳ است، b را به کمک مقداردهی پیدا می‌کنیم:

$$a_n = ۳n + b \xrightarrow{a_۱=۶} ۶ = ۳(۱) + b \Rightarrow b = ۳ \Rightarrow a_n = ۳n + ۳$$

گام سوم: حال برای پیداکردن خواستهٔ سؤال خواهیم داشت:

$(۸+۲)^2 = ۱۰۰$: تعداد کل دایره‌ها در شکل هشتم

$۳(۸) + ۳ = ۲۷$: تعداد دایره‌های رنگی در شکل هشتم

پس $\frac{۲۷}{۱۰۰}$ دایره‌ها در شکل هشتم رنگی هستند.

۱۴ اگر a_n الگوی خطی با جملات طبیعی و $b_n = a_n^2$ الگوی درجه‌دو باشد به طوری که $b_1 = a_4$ و $b_2 = a_{12}$، مقدار b_7 کدام است؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۲۲۵ ۳) ۱۶۵ ۴) ۲۸۹

Hint

جملهٔ عمومی دنباله‌ها به صورت $a_n = an + b$، $b_n = a^2n^2 + 2nab + b^2$ است، روابط گفته شده در سؤال را در این‌ها جای‌گذاری کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: می‌دانیم که فرم کلی الگوی خطی به صورت $a_n = an + b$ است. حال با توجه به رابطهٔ $b_n = a_n^2$، جملهٔ عمومی الگوی b_n را هم به دست می‌آوریم:

$$b_n = a_n^2 \xrightarrow{a_n = an+b} b_n = (an+b)^2 \Rightarrow b_n = a^2n^2 + 2nab + b^2$$

گام دوم: با توجه به این‌که $b_1 = a_4$ و $b_2 = a_{12}$، خواهیم داشت:

$$b_1 = a_4 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 4a + b$$

$$b_2 = a_{12} \Rightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = 12a + b$$

رابطهٔ پایینی را منهای رابطهٔ بالایی می‌کنیم:

$$3a^2 + 2ab = 8a \xrightarrow[a \neq 0]{\div a} 3a + 2b = 8 \quad (*)$$

گام سوم: حال در رابطه‌های به دست آمده در گام دوم، دو طرف رابطهٔ بالایی را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4a^2 + 8ab + 4b^2 = 16a + 4b \\ 4a^2 + 4ab + b^2 = 12a + b \end{cases} \xrightarrow{\text{بالایی - پایینی}} 4ab + 3b^2 = 4a + 3b$$

$$\Rightarrow 4ab - 4a = 3b - 3b^2 \Rightarrow 4a(b-1) = 3b(1-b)$$

$$\xrightarrow{\text{اگر } b-1=0} b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \xrightarrow[3a+2b=8]{(*)} a = 2 \checkmark$$

$$\xrightarrow{\text{اگر } b-1\neq 0} 4a\,\cancel{(b-1)} = 3b\,\cancel{(1-b)} \Rightarrow -4a = 3b \Rightarrow a = \frac{-3}{4}b$$

$$\xrightarrow{(*)} 3\left(\frac{-3}{4}b\right) + 2b = 8 \Rightarrow \frac{-9}{4}b + 2b = 8 \Rightarrow b = -32,\ a = 24$$

غ. ق. ق. (چراکه بعضی جملات a_n طبیعی نمی‌شود.)

گام چهارم: حالا که a و b را داریم، b_7 را به دست می‌آوریم:

$$b_n = a^2n^2 + 2nab + b^2 \xrightarrow{a=2,b=1} b_n = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 \Rightarrow b_7 = 15^2 = 225$$

۱۵ اگر $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = 2a_n + 1$، اختلاف جملات نوزدهم و بیستم دنبالهٔ a_n چه عددی است؟

۱) 2^{20}
۲) 2^{19}
۳) $2^{21} - 1$
۴) $2^{19} - 1$

Hint با توجه به $a_1 = 1$ و رابطهٔ داده‌شده، دنبالهٔ a_n را تشکیل دهید و ببینید که اعضای a_n چه ارتباطی با دنباله‌های معروف دارند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** با توجه به رابطهٔ $a_{n+1} = 2a_n + 1$ و $a_1 = 1$، جملات a_n را می‌نویسیم:

$$a_n = 1, 3, 7, 15, \ldots$$

گام دوم: جملات دنبالهٔ ایجادشده همگی یک واحد از توان‌های ۲ کم‌تر هستند، پس a_n را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$a_n = \underset{2^1-1}{1}, 3, \underset{2^3-1}{7}, \overset{2^4-1}{\uparrow}, \overset{2^4-1}{\uparrow}15, \ldots \Rightarrow a_n = 2^n - 1$$

گام سوم: پس اختلاف جملات نوزدهم و بیستم دنبالهٔ a_n برابر می‌شود با:

$$\left.\begin{matrix} a_{19} = 2^{19} - 1 \\ a_{20} = 2^{20} - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{20} - a_{19} = 2^{20} - 1 - (2^{19} - 1) = 2^{20} - 2^{19}$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } 2^{19}} a_{20} - a_{19} = 2^{19}\underbrace{(2-1)}_{1} \Rightarrow a_{20} - a_{19} = 2^{19}$$

۱۶ در دنبالهٔ حسابی $a_n = kn + ۴$، مجموع n جملهٔ اول به صورت $S_n = ۲n^۲ + bn$ است. مجموع ۴ جملهٔ دوم آن چه عددی است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۲۴ ۳) ۱۱۶ ۴) ۱۲۰

Hint $n = ۱$ و $n = ۲$ را به S_n و a_n بدهید تا k پیدا شود.

درس Box مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از یکی از روابط زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در دنبالهٔ حسابی می‌دانیم که $S_۱ = a_۱$، پس:

$$\left.\begin{matrix} a_n = kn + ۴ \Rightarrow a_۱ = k + ۴ \\ S_n = ۲n^۲ + bn \Rightarrow S_۱ = ۲ + b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{a_۱ = S_۱} k + ۴ = ۲ + b \Rightarrow k - b = -۲ \quad (۱)$$

گام دوم: هم‌چنین می‌دانیم که $S_۲ = a_۱ + a_۲$، پس:

$$\left.\begin{matrix} a_۲ = k(۲) + ۴ \Rightarrow a_۲ = ۲k + ۴ \\ S_۲ = ۲(۲)^۲ + b(۲) \Rightarrow S_۲ = ۸ + ۲b \end{matrix}\right\}$$

$$\xrightarrow[a_۱ = k + ۴]{S_۲ = a_۱ + a_۲} ۸ + ۲b = k + ۴ + ۲k + ۴ \Rightarrow ۸ + ۲b = ۳k + ۸ \Rightarrow ۲b = ۳k \Rightarrow b = \frac{۳k}{۲} \quad (۲)$$

گام سوم: رابطهٔ (۲) را در (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(۱): k - b = -۲ \xrightarrow{(۲)} k - \frac{۳k}{۲} = -۲ \Rightarrow -\frac{k}{۲} = -۲ \Rightarrow k = ۴$$

گام چهارم: با توجه به جملهٔ عمومی داده‌شده، چهار جملهٔ دوم را به دست می‌آوریم و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$a_n = kn + ۴ \xrightarrow{k = ۴} a_n = ۴n + ۴ \Rightarrow \begin{cases} a_۵ = ۴(۵) + ۴ = ۲۴ \\ a_۶ = ۴(۶) + ۴ = ۲۸ \\ a_۷ = ۴(۷) + ۴ = ۳۲ \\ a_۸ = ۴(۸) + ۴ = ۳۶ \end{cases} \xrightarrow{(+)} ۲۴ + ۲۸ + ۳۲ + ۳۶ = ۱۲۰$$

یه‌جور دیگه در رابطهٔ $S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$، $a_n = kn + ۴$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + kn + ۴) \Rightarrow S_n = \frac{a_۱}{۲}n + \frac{k}{۲}n^۲ + ۲n \Rightarrow S_n = (\frac{a_۱}{۲} + ۲)n + \frac{k}{۲}n^۲$$

رابطهٔ به‌دست‌آمده را با $S_n = ۲n^۲ + bn$ برابر قرار می‌دهیم تا k به دست آید:

$$(\frac{a_۱}{۲} + ۲)n + \frac{k}{۲}n^۲ = ۲n^۲ + bn \Rightarrow \frac{k}{۲} = ۲ \Rightarrow k = ۴$$

ادامهٔ حل مانند روش قبلی است.

۱۷ سه جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ حسابی را به ترتیب با ۲ و ۴ و ۶ جمع می‌کنیم. سه عدد به‌دست‌آمده، دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند. قدرنسبت دنبالهٔ حسابی چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۲− ۴) صفر

مشاوره معمولاً در هر نوبت از کنکور از یکی از دنباله‌های حسابی یا هندسی یک تست طرح می‌شود، پس بر مفاهیم آن‌ها مسلط باشید.

Hint جمله‌های دنبالهٔ جدید به صورت a_1+2, a_1+d+4, a_1+2d+6 می‌شوند. شرط هندسی‌بودن دنباله را برای آن‌ها پیاده کنید.

نکته اگر سه جملهٔ متوالی a,b,c بخواهند سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، شرط زیر باید برقرار باشد:

$$b^2=ac$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** سه جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی را به صورت a_1، a_1+d و a_1+2d در نظر می‌گیریم و سپس آن‌ها را با ۲ و ۴ و ۶ به ترتیب جمع می‌کنیم:

$$a_1, a_1+d, a_1+2d \xrightarrow{\text{جمع با } 2,4,6} a_1+2, a_1+d+4, a_1+2d+6$$

دنبالهٔ جدید یک دنبالهٔ هندسی است.

گام دوم: شرط این‌که دنبالهٔ ایجادشده، یک دنبالهٔ هندسی باشد را پیاده می‌کنیم:

$$(a_1+d+4)^2=(a_1+2)(a_1+2d+6)$$

$$\Rightarrow a_1^2+d^2+16+2a_1d+8a_1+8d=a_1^2+2a_1d+6a_1+2a_1+4d+12$$

$$\Rightarrow d^2+8a_1+8d+16=8a_1+4d+12$$

$$\Rightarrow d^2+4d+4=0 \Rightarrow (d+2)^2=0 \Rightarrow d=-2$$

پس قدرنسبت دنبالهٔ حسابی اولیه، ۲− است.

نکته اگر جملات یک دنبالهٔ حسابی با جملات یک دنبالهٔ حسابی دیگر به ترتیب جمع شوند، دنبالهٔ حاصل، حسابی است.

تیزپاری با توجه به نکتهٔ گفته‌شده، دنبالهٔ حاصل هم حسابی است و هم هندسی، یعنی دنبالهٔ ثابت است و جملات با هم برابرند، در نتیجه:

$$a_1+2, a_1+d+4, a_1+2d+6 \xrightarrow[\text{هم قرار می‌دهیم.}]{\text{جملات اول و دوم را مساوی}} a_1+2=a_1+d+4$$

$$\Rightarrow 2=d+4 \Rightarrow d=-2$$

۱۸ اگر $a_n = ۳\times ۲^{۲n-۱}$، حاصل $A = \frac{۱۸}{a_۱a_۲} + \frac{۱۸}{a_۲a_۳} + ... + \frac{۱۸}{a_۹a_{۱۰}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲^{۳۶}} - \frac{۱}{۱۵}$

۲) $\frac{۱}{۲^{۳۰}} - \frac{۱}{۱۵}$

۳) $\frac{۱-۲^{-۳۲}}{۱۶}$

۴) $\frac{۲-۲^{-۳۵}}{۱۵}$

Hint با توجه به $a_n = ۳\times ۲^{۲n-۱}$، $a_n \times a_{n+۱}$ را تشکیل دهید و آن را در مخرج‌های A قرار دهید، به جملات یک دنبالهٔ هندسی می‌رسید.

درس Box مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت q از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** جملات موجود در مخرج‌های A به صورت $a_n a_{n+۱}$ است، پس ابتدا با توجه به $a_n = ۳\times ۲^{۲n-۱}$ خواهیم داشت:

$$a_n a_{n+۱} = ۳\times ۲^{۲n-۱} \times ۳\times ۲^{۲(n+۱)-۱} = ۹\times ۲^{۲n-۱} \times ۲^{۲n+۱}$$

$$\Rightarrow a_n a_{n+۱} = ۹\times ۲^{۴n} \Rightarrow a_n a_{n+۱} = ۹\times ۱۶^n$$

پس مخرج‌ها همگی برابر ۹×۱۶^n هستند و A به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$A = \frac{۱۸}{۹\times ۱۶} + \frac{۱۸}{۹\times ۱۶^۲} + ... + \frac{۱۸}{۹\times ۱۶^۹} \Rightarrow A = \frac{۲}{۱۶} + \frac{۲}{۱۶^۲} + ... + \frac{۲}{۱۶^۹}$$

گام دوم: پس جملات A یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $\frac{۱}{۱۶}$ و جملهٔ اول $\frac{۲}{۱۶}$ تشکیل داده‌اند. خواستهٔ سؤال مجموع جملات A است، پس:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$$

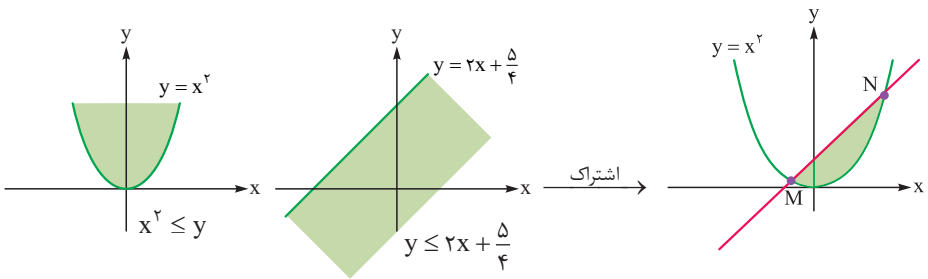
$$\xrightarrow[q=\frac{۱}{۱۶}]{n=۹, a_۱=\frac{۲}{۱۶}} S_۹ = (\frac{۲}{۱۶})(\frac{۱-(\frac{۱}{۱۶})^۹}{۱-\frac{۱}{۱۶}}) \xrightarrow[۱-\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}]{(\frac{۱}{۱۶})^۹=(۲^{-۴})^۹=۲^{-۳۶}} S_۹ = \frac{۲(۱-۲^{-۳۶})}{۱۶(\frac{۱۵}{۱۶})} \Rightarrow S_۹ = \frac{۲-۲^{-۳۵}}{۱۵}$$

۱۹ در بین نقاط عضو مجموعهٔ $S=\{(x,y)\mid x^۲\le y\le ۲x+\frac{۵}{۴}\}$ اگر کم‌ترین مقدار x را با m و بیشترین مقدار y را با n نمایش دهیم، حاصل $\frac{n}{m^۲}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۷

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (رسم نمودار): دو نمودار $y=x^۲$ و $y=۲x+\frac{۵}{۴}$ را رسم می‌کنیم. نقاطی که در دو نامعادلهٔ $x^۲\le y$ و $y\le ۲x+\frac{۵}{۴}$ صدق می‌کنند، مجموعهٔ S را مشخص می‌کنند.



مطابق شکل آخر، ناحیهٔ رنگ شده مجموعهٔ S را مشخص می‌کند و کم‌ترین مقدار x همان مؤلفهٔ اول نقطهٔ M و بیشترین مقدار y نیز همان مؤلفهٔ دوم نقطهٔ N است.

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): نقاط M و N، همان نقاط برخورد نمودارهای $y=x^۲$ و $y=۲x+\frac{۵}{۴}$ هستند.

$$\begin{cases} y=x^۲ \\ y=۲x+\frac{۵}{۴} \end{cases} \Rightarrow x^۲=۲x+\frac{۵}{۴} \Rightarrow x^۲-۲x-\frac{۵}{۴}=۰$$

$$\Rightarrow (x+\frac{۱}{۲})(x-\frac{۵}{۲})=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{۱}{۲} \\ x=\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴}) \Rightarrow m=-\frac{۱}{۲} \\ N(\frac{۵}{۲},\frac{۲۵}{۴}) \Rightarrow n=\frac{۲۵}{۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{n}{m^۲}=\frac{\frac{۲۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۲۵$$

۲۰ فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,۲,۳)$ از نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ xy کدام است؟

۱) $\sqrt{۹/۵}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$

۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۳/۵}$

Hint از رسم شکل استفاده کنید.

درس Box

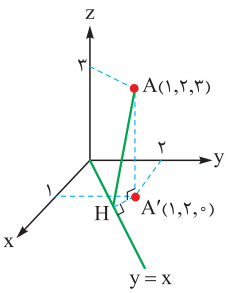
۱) فاصلهٔ نقطه از خط

فرض کنید در صفحهٔ xy، معادلهٔ خط به صورت $ax+by+c=۰$ باشد، در این صورت فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ تا خط مذکور از طریق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۲) تصویر قائم نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ بر صفحهٔ xy به صورت $A'(x_۰,y_۰,۰)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (رسم شکل مناسب):** با توجه به شکل رسم‌شده، طول پاره‌خط AH را می‌خواهیم.

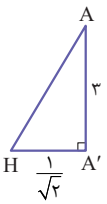


گام دوم (محاسبهٔ طول $A'H$):

تصویر قائم $A(۱,۲,۳)$ را بر صفحهٔ xy، A' می‌نامیم که مختصات آن $A'(۱,۲,۰)$ است پس $A'H$ برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,۲)$ در صفحهٔ xy از خط $y=x$ که همان نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ xy است، می‌باشد. با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از خط داریم:

$$A'H=\frac{|۲-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

گام سوم (محاسبهٔ AH): با توجه به فیثاغورس در مثلث $A'AH$ داریم:



$$AH=\sqrt{۹+\frac{۱}{۲}}=\sqrt{\frac{۱۹}{۲}}=\sqrt{۹/۵}$$

۲۱ اگر $\vec{a}=\sqrt{۳}\vec{j}\times\vec{i}+\vec{k}\times\vec{j}$ و $\vec{b}=(\sqrt{۳},۲,۱)$، آن‌گاه طول تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

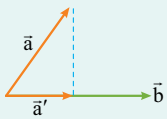
مشاوره محاسبهٔ تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر، یکی از مهم‌ترین مباحث فصل سوم کتاب هندسه ۳ است، چه در امتحان‌های نهایی، چه در کنکور. این سؤال مشابه یکی از سؤال‌های امتحان‌های نهایی گذشته طرح شده است.

درس Box

۱) طول بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ برابر است با $|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$.

۲) حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ برابر است با: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$.

۳) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی راستای بردار $\vec{b}$:



تصویر $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ با نماد $\vec{a}'$ نشان می‌دهیم، آن‌گاه:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}\Rightarrow|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

۴) ضرب داخلی و خارجی بردارهای یکه محورها:

ضرب داخلی: $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=۱$ و $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=۰$



ضرب خارجی: در جهت حرکت دوری حاصل‌ضرب خارجی هر دو بردار یکه، بردار سوم است: $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ و $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ و $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ و خلاف جهت حرکت دوری حاصل‌ضرب خارجی دو بردار یکه، قرینهٔ بردار سوم است، مثلاً $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (به دست آوردن بردار $\vec{a}$):

با توجه به درس Box، داریم $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ و $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$، پس:

$$\vec{a}=\sqrt{۳}\underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}}+\underbrace{\vec{k}\times\vec{j}}_{-\vec{i}}\Rightarrow\vec{a}=-\sqrt{۳}\vec{k}-\vec{i}=(-۱,۰,-\sqrt{۳})$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طول تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر بردار $\vec{a}$ برابر است با:

$$|\vec{b}'|=\frac{|\vec{b}\cdot\vec{a}|}{|\vec{a}|}=\frac{|-\sqrt{۳}+۰-\sqrt{۳}|}{\sqrt{۱+۰+۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

۲۲ اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند، به طوری که $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{۲}$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۶}$، آن‌گاه زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

۱) ۳۰°

۲) ۶۰°

۳) ۱۲۰°

۴) ۱۵۰°

مشاوره با سؤالی ساده از مبحث «ضرب داخلی و خارجی بردارها» مواجهیم. اگر این سؤال را حل نکرده‌اید، نشان می‌دهد که روی این مبحث تسلط کافی ندارید و باید بیشتر مطالعه کنید.

درس Box

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند که زاویهٔ بین آن‌ها θ است، آن‌گاه:

۱) حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها یک عدد است که برابر است با: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

۲) حاصل‌ضرب خارجی آن‌ها یک بردار است و طول آن برابر است با: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (استفاده از ضرب داخلی و خارجی دو بردار):

اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد، آن‌گاه:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-\sqrt{۲}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\sqrt{۶}$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طرفین دو تساوی به‌دست‌آمده در گام قبلی را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}=\frac{\sqrt{۶}}{-\sqrt{۲}}\Rightarrow\tan\theta=-\sqrt{۳}\Rightarrow\theta=۱۲۰^\circ$$

۲۳ سه نقطهٔ $(۱,۰,-۱)$، $(۲,-۱,۱)$ و $(-۳,۱,۰)$ وسط‌های اضلاع یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۱۱}$ ۲) $۶\sqrt{۶}$

۳) $۴/۵\sqrt{۱۱}$ ۴) $۴/۵\sqrt{۶}$

مشاوره این سؤال نمونهٔ ساده‌تری از سؤالی است که در کنکور ریاضی ۱۴۰۳ مطرح شده بود.

درس Box

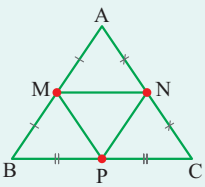
۱) اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$، آن‌گاه حاصل‌ضرب خارجی بردار $\vec{a}$ در بردار $\vec{b}$، یک بردار است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_۱&a_۲&a_۳\\ b_۱&b_۲&b_۳\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_۲&a_۳\\ b_۲&b_۳\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_۱&a_۳\\ b_۱&b_۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_۱&a_۲\\ b_۱&b_۲\end{vmatrix}\right)$$

۲) **کاربرد ضرب خارجی در مساحت متوازی‌الاضلاع و مثلث:**

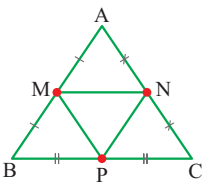
مساحت متوازی‌الاضلاعی که بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن باشد، برابر است با $|\vec{a}\times\vec{b}|$ و مساحت مثلثی که با این دو بردار پدید می‌آید برابر است با $S=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

۳) اگر وسط‌های ضلع‌های یک مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شود که کدام از آن‌ها به نسبت $\frac{۱}{۲}$ با مثلث اصلی متشابه‌اند و مساحت هر کدام $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث اصلی است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم شکل فرضی): سه نقطهٔ داده‌شده را روی مثلث ABC مشخص می‌کنیم. داریم:



$$M(۱,۰,-۱)\ ,\ N(۲,-۱,۱)\ ,\ P(-۳,۱,۰)$$

گام دوم (محاسبهٔ S_{MNP}): دو بردار $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{MP}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}=(۱,-۱,۲)\\ \overrightarrow{MP}=(-۴,۱,۱)\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&-۱&۲\\ -۴&۱&۱\end{vmatrix}=(-۳,-۹,-۳)\ \Rightarrow\ S_{MNP}=\frac{۱}{۲}|(-۳,-۹,-۳)|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲+(-۹)^۲+(-۳)^۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳^۲(۱+۹+۱)}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۱}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): همان طور که در درس Box گفتیم، داریم:

$$S_{ABC}=۴S_{MNP}\ \Rightarrow\ S_{ABC}=۴\times\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۱}=۶\sqrt{۱۱}$$

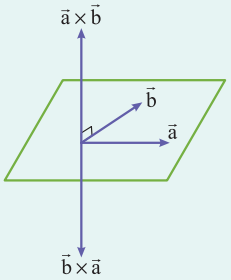
۲۴ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، هر دو به طول واحد غیرموازی و دو بردار $2x\vec{a}+\vec{b}$ و $(1-x)\vec{a}-\vec{b}$ موازی هستند. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع بناشده روی دو بردار $3x\vec{b}+2\vec{a}$ و $(2+x)\vec{a}+\vec{b}$ برابر $\frac{15}{4}$ باشد، آن‌گاه $\vec{a}\cdot\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ ۲) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\pm\frac{3}{4}$ ۴) $\pm\frac{3}{5}$

درس Box

ضرب خارجی دو بردار

برخلاف ضرب داخلی دو بردار که حاصل آن یک عدد حقیقی است، حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، یک بردار می‌باشد. حاصل‌ضرب خارجی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش داده می‌شود. $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است عمود بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$



نکات:

۱) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

۲) اگر دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند، حاصل‌ضرب خارجی آن‌ها، بردار $\vec{0}$ است.

۳) برای هر بردار مانند $\vec{a}$، داریم $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

۴) ضرب خارجی خاصیت توزیع‌پذیری دارد، یعنی $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

۵) رابطهٔ بین ضرب داخلی و ضرب خارجی:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}\times\vec{b}|^2$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ مقدار x):

چون دو بردار $2x\vec{a}+\vec{b}$ و $(1-x)\vec{a}-\vec{b}$ موازی هستند، حاصل‌ضرب خارجی آن‌ها برابر با بردار $\vec{0}$ است و داریم:

$$((1-x)\vec{a}-\vec{b})\times(2x\vec{a}+\vec{b})=\vec{0} \Rightarrow (1-x)(\vec{a}\times\vec{b})+2x(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$$

$$(1-x+2x)(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0} \Rightarrow (1+x)(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$$

اما چون دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ غیرموازی‌اند، پس $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$، لذا از تساوی فوق نتیجه می‌شود $x=-1$.

گام دوم (محاسبهٔ $|\vec{a}\times\vec{b}|$): مساحت متوازی‌الاضلاع بناشده روی دو بردار $2\vec{a}+3x\vec{b}=2\vec{a}-3\vec{b}$ و $(2+x)\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}$ برابر $\frac{15}{4}$ است پس مقدار حاصل‌ضرب خارجی این دو بردار برابر با $\frac{15}{4}$ است.

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع مطلوب}=\frac{15}{4} \Rightarrow |(\vec{a}+\vec{b})\times(2\vec{a}-3\vec{b})|=\frac{15}{4} \Rightarrow$$

$$|2\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}}-3\vec{a}\times\vec{b}+2\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{-\vec{a}\times\vec{b}}-3\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}}|=\frac{15}{4} \Rightarrow |-5(\vec{a}\times\vec{b})|=\frac{15}{4} \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{3}{4}$$

گام سوم (محاسبهٔ $\vec{a}\cdot\vec{b}$): با توجه به رابطهٔ بین ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$، داریم:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}\times\vec{b}|^2=1-(\frac{3}{4})^2=\frac{7}{16} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

۲۵ چهار نقطهٔ $A(۴,۱,۳)$، $B(۳,-۱,۲)$، $C(۲,۱,۳)$ و $D(۱,۲,۲)$ در فضا رأس‌های یک متوازی‌السطوح هستند. طول ارتفاعی از این متوازی‌السطوح که از رأس D بر قاعدهٔ شامل A، B و C وارد می‌شود، کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۵}$

۲) $\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$

۳) $۳\sqrt{۵}$

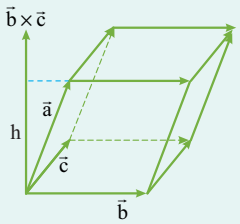
۴) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$

مشاوره سؤال‌هایی شبیه این سؤال، هم در کنکور و هم در امتحان‌های نهایی بسیار مرسوم هستند، پس سعی کنید روش حل این سؤال را خوب یاد بگیرید.

درس Box

حجم متوازی‌السطوح:

مطابق شکل، می‌دانیم مساحت قاعدهٔ متوازی‌السطوح برابر است با $|\vec{b}\times\vec{c}|$ و طول ارتفاع این متوازی‌السطوح برابر است با اندازهٔ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ یعنی $h=\frac{|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$ و از طرفی ارتفاع برابر است با حجم متوازی‌السطوح تقسیم بر مساحت قاعده، لذا حجم متوازی‌السطوح از رابطهٔ $V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$ به دست می‌آید.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$): می‌دانیم $A(۴,۱,۳)$، $B(۳,-۱,۲)$، $C(۲,۱,۳)$ و $D(۱,۲,۲)$، پس:

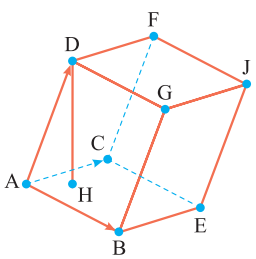
$$\overrightarrow{AB}=B-A=(-۱,-۲,-۱)$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(-۲,۰,۰)$$

$$\overrightarrow{AD}=D-A=(-۳,۱,-۱)$$

گام دوم (محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح):

حجم متوازی‌السطوح برابر با $|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|$ است. بنابراین ابتدا $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ را به دست می‌آوریم و سپس حجم متوازی‌السطوح را.



$$S_{ABEC}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|(-۱,-۲,-۱)\times(-۲,۰,۰)|=|(۰,۲,-۴)|=\sqrt{۰+۴+۱۶}=۲\sqrt{۵}$$

$$V=|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|=|(-۳,۱,-۱)\cdot(۰,۲,-۴)|=|۰+۲+۴|=۶$$

گام سوم (محاسبهٔ ارتفاع DH):

می‌دانیم حجم متوازی‌السطوح برابر است با مساحت قاعده ضربدر ارتفاع، پس:

$$V=S_{ABEC}\cdot DH\Rightarrow ۶=۲\sqrt{۵}\times DH\Rightarrow DH=\frac{۶}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$$

۲۶ دو خط متمایز در فضا مفروض‌اند. دو نقطه روی خط اول و دو نقطه روی خط دوم در نظر می‌گیریم. چند صفحه از این چهار نقطه می‌گذرد؟

۱) صفر یا یک
۲) یک یا بی‌شمار
۳) صفر یا بی‌شمار
۴) صفر، یک یا بی‌شمار

درس Box

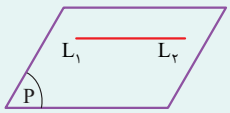
وضعیت دو خط در فضا:

۱) موازی: به دو خط که در یک صفحه باشند و هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، دو خط موازی گوییم.

۲) منطبق: به دو خط که در یک صفحه باشند و در بی‌شمار نقطه مشترک باشند، دو خط منطبق گویند.

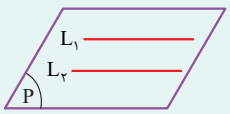
۳) متقاطع: به دو خط که در یک صفحه باشند و فقط در یک نقطه با هم مشترک‌اند دو خط متقاطع گویند.

۴) متنافر: به دو خط که هیچ صفحه‌ای از هر دوی آن‌ها عبور نکند، دو خط متنافر گوییم.



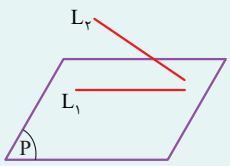
$L_1 = L_2$

حالت (۲)

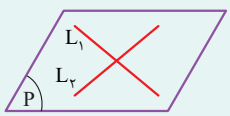


$L_1 \parallel L_2$

حالت (۱)



حالت (۴)

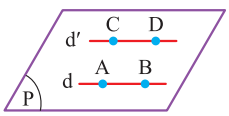


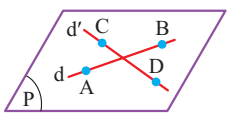
$L_1 \not\parallel L_2$

حالت (۳)

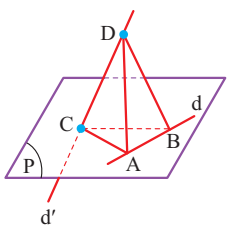
نکته همواره از دو خط متقاطع و نیز از دو خط موازی، دقیقاً یک صفحه می‌گذرد، اما هیچ صفحه‌ای وجود ندارد که شامل دو خط متنافر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی الف) اگر d و d' موازی یا متقاطع باشند در این صورت از چهار نقطهٔ مفروض سؤال، یک صفحه منحصربه‌فرد می‌گذرد.





ب) اگر d و d' متنافر باشند، آن‌گاه از چهار نقطهٔ مفروض سؤال، صفحه‌ایی نمی‌گذرد، زیرا در غیر این صورت d و d' در یک صفحه واقع می‌شوند که تناقض است.



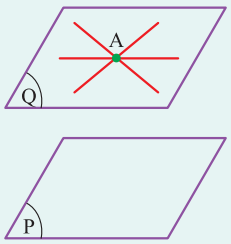
۲۷ خط **L**، صفحهٔ **P** و نقطهٔ **A** که بر **L** و **P** واقع نیست، مفروض‌اند، اگر فقط یک خط گذرنده از **A** و متقاطع با **L** و موازی با صفحهٔ **P** وجود داشته باشد، آن‌گاه چند صفحهٔ گذرنده از **A** و موازی با **L** و عمود بر صفحهٔ **P** وجود دارد؟

۱) یک یا بی‌شمار
۲) صفر یا بی‌شمار
۳) دقیقاً یک
۴) بی‌شمار

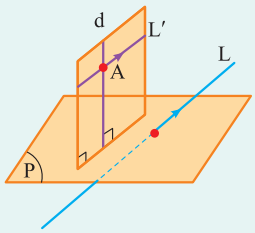
مشاوره باسؤال دشواری از مفاهیم هندسه در فضا مواجهیم. توصیه می‌کنیم از روی کتاب تستتان، سؤال‌های کنکورهای گذشته را در این قسمت، خیلی خوب تمرین کنید.

درس Box

۱) از نقطهٔ A خارج از صفحهٔ P دقیقاً یک صفحه می‌توان به موازات P رسم کرد و تمام خط‌هایی که از A گذشته و با P موازی هستند، در این صفحه قرار می‌گیرند.



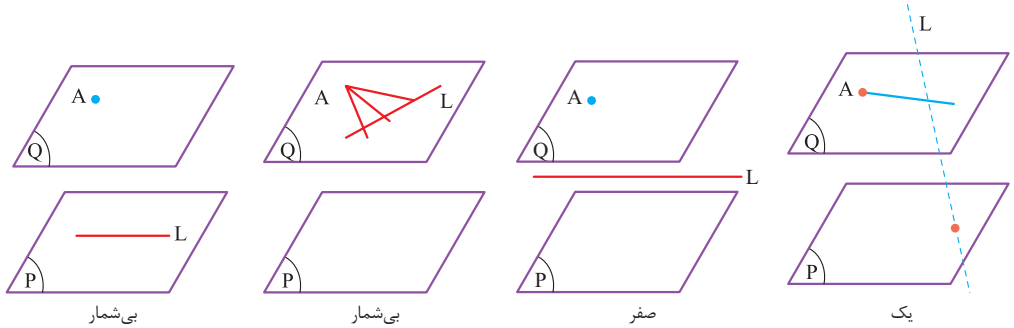
۲) برای رسم صفحه‌ای که از نقطهٔ A گذشته، با خط L موازی است و بر صفحهٔ P عمود است، از نقطهٔ A خط L' را موازی با L و خط d را عمود بر P رسم می‌کنیم. صفحهٔ گذرنده از L' و d، صفحهٔ مورد نظر است.



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (پیداکردن وضعیت خط L با صفحهٔ P):**

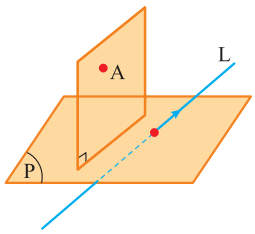
با توجه به وجود «فقط یک خط» گذرنده از A و موازی با صفحهٔ P که خط L را قطع می‌کند، نتیجه می‌گیریم خط L با صفحهٔ P متقاطع است.

دقت کنید که اگر خط L در صفحهٔ P واقع باشد، یا با آن موازی باشد، صفر یا بی‌شمار خط گذرنده از A و موازی با صفحهٔ P که خط L را قطع کند، وجود خواهد داشت (در شکل‌های زیر، Q صفحه‌ای است که از نقطهٔ A، موازی با صفحهٔ P رسم می‌شود).

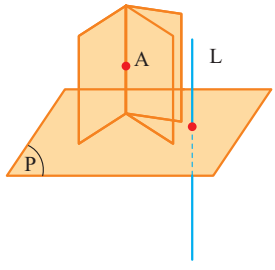


گام دوم (بررسی حالت‌های مختلف): فهمیدیم خط L با صفحهٔ P متقاطع است، پس دو حالت داریم: این خط بر صفحهٔ P عمود باشد یا نباشد.

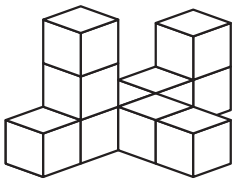
حالت اول: خط L بر صفحهٔ P عمود نیست، در این صورت فقط یک صفحه گذرنده از A و موازی با خط L و عمود بر صفحهٔ P وجود دارد.



حالت دوم: خط L بر صفحهٔ P عمود است، در این صورت بی‌شمار صفحهٔ گذرنده از A و موازی با خط L و عمود بر صفحهٔ P وجود دارد.



۲۸ قطعهٔ رسم شده در شکل از ۱۰ مکعب واحد ساخته شده است. اگر این قطعه را درون یک ظرف رنگ فرو ببریم، چند مکعب واحد وجود خواهد داشت که دقیقاً ۴ وجه آن رنگ شده است؟



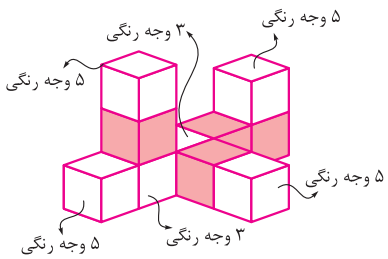
۱) ۵

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مکعب‌ها را یکی یکی بررسی کرده و تعداد وجه‌های رنگ‌شدهٔ هر کدام را می‌شماریم.



مطابق شکل، مکعب‌های علامت‌دار دارای ۴ وجه رنگ‌شده هستند.

۲۹ طول ساق‌های یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه ۳ و ۵ و حجم شکل حاصل از دوران آن حول قاعدهٔ کوچک ۳۳π است. طول قطر کوچک این ذوزنقه کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳}$

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۳\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۱۰}$

مشاوره در حل سؤال‌های قسمت «دوران» و «برش» از فصل ۴ کتاب هندسهٔ ۱ (مانند این سؤال و سؤال بعدی)، به بسیاری از فرمول‌های مربوط به شکل‌های فضایی که در سال نهم خوانده‌اید، نیاز پیدا می‌کنید، پس حتماً روی آن فرمول‌ها مسلط باشید.

درس Box

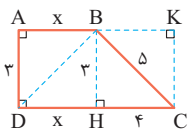
۱) حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h، برابر با $\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ است.

۲) حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر با $\pi r^۲h$ است.

۳) از دوران مستطیل حول یکی از اضلاعش استوانه و از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش مخروط قائم تشکیل می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (تشخیص شکل حاصل از دوران): ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD را در نظر می‌گیریم،



با توجه به فیثاغورس در $\overset{\triangle}{BCH}$ داریم: $BH^۲ + CH^۲ = BC^۲ \Rightarrow ۳^۲ + CH^۲ = ۵^۲$

$\Rightarrow CH = ۴$

شکل حاصل از دوران مورد نظر سؤال، استوانه‌ای است حاصل از دوران مستطیل AKCD حول AK که مخروطی حاصل از دوران مثلث BKC حول BK از آن جدا شده است.

گام دوم (محاسبهٔ x): با توجه به توضیحات داده‌شده در گام قبلی حجم استوانه به شعاع قاعدهٔ $AD = ۳$ و ارتفاع $AK = x + ۴$ را به دست آورده و حجم مخروطی با شعاع قاعدهٔ $KC = ۳$ و ارتفاع $BK = ۴$ را از آن کم می‌کنیم تا x را به دست آوریم.

$$V = \pi(۳)^۲(x+۴) - \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۴) = (۹x + ۲۴)\pi = ۳۳\pi \Rightarrow x = ۱$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): برای به دست آوردن اندازهٔ قطر کوچک ذوزنقه یا همان BD از فیثاغورس در $\overset{\triangle}{ABD}$ استفاده می‌کنیم.

$$AB^۲ + AD^۲ = BD^۲ \Rightarrow ۱^۲ + ۳^۲ = ۱۰ \Rightarrow BD = \sqrt{۱۰}$$

۳۰ صفحهٔ **P** در تقاطع با کره‌ای با شعاع **R**، بیشترین سطح مقطع ممکن را ایجاد کرده است. صفحهٔ **P** را به موازات خود چه‌قدر جابه‌جا کنیم تا مساحت مقطع جدید ۲۰ درصد مساحت کل کره باشد؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}R$ ۲) $\frac{۲}{۵}R$

۳) $\frac{۱}{۵}R$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}R$

Hint

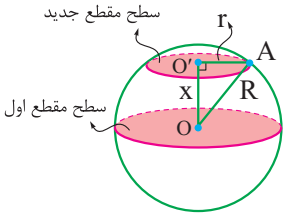
در حالت اول: صفحهٔ P از مرکز کره می‌گذرد.

درس Box

۱) مساحت کره‌ای به شعاع r، برابر با $۴\pi r^۲$.

۲) اگر صفحه‌ای یک کره را قطع کند، سطح مقطع حاصل یک دایره است و بیشترین سطح مقطع زمانی ایجاد می‌شود که صفحه، از مرکز کره بگذرد.

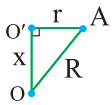
پاسخ خیلی تشریحی



گام اول (رسم شکل مناسب و تحلیل سؤال): در حالت اول، صفحهٔ P از مرکز کره می‌گذرد، اگر صفحهٔ P را به موازات خود جابه‌جا کنیم مقطع حاصل باز هم یک دایره می‌باشد، بنابراین اگر فرض کنیم دایرهٔ مد نظر سؤال دایرهٔ $C(O',r)$ است، آن‌گاه با توجه به فرض سؤال، باید:

$$\pi r^۲ = \frac{۲۰}{۱۰۰}\underbrace{(۴\pi R^۲)}_{\text{سطح کل کره}} \Rightarrow r^۲ = \frac{۴}{۵}R^۲$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): اگر مقدار جابه‌جایی صفحهٔ P را x در نظر بگیریم، مقدار x مطابق شکل برابر است با OO' که همان ضلع قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ $OO'A$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در این مثلث، داریم:



$$\Rightarrow R^۲ = r^۲ + x^۲ \Rightarrow x = \sqrt{R^۲ - r^۲} = \sqrt{R^۲ - \frac{۴}{۵}R^۲} = \sqrt{\frac{۱}{۵}R^۲} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}R$$

۳۱ در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۱۰ مهرهٔ سیاه موجود است. دو مهره به طور متوالی و بدون جاگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی دو مهرهٔ ناهمرنگ انتخاب می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۱۰}{۲۱}$

۳) $\frac{۹}{۱۴}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

درس Box

قانون احتمال کل: فرض کنید $B_۱$، $B_۲$، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم:

$$P(A)=P(B_۱)P(A\mid B_۱)+P(B_۲)P(A\mid B_۲)+\ldots+P(B_n)P(A\mid B_n)=\sum_{k=۱}^{n}P(B_k)P(A\mid B_k)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای آن‌که دو مهره ناهمرنگ باشند، باید مهرهٔ اول سفید و مهرهٔ دوم سیاه باشد و یا بلعکس.

مهرهٔ اول به احتمال $\frac{۵}{۱۵}$ سفید و به احتمال $\frac{۱۰}{۱۵}$ سیاه است.

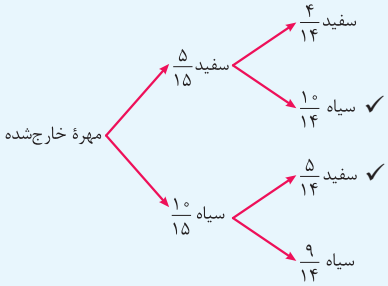
گام دوم: تعداد مهره‌های باقی‌مانده در ظرف ۱۴تا است. اگر بدانیم مهرهٔ اول سفید است، مهرهٔ دوم به احتمال $\frac{۱۰}{۱۴}$ سیاه است و اگر بدانیم مهرهٔ اول سیاه است، مهرهٔ دوم به احتمال $\frac{۵}{۱۴}$ سفید است.

گام سوم: طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{دو مهرهٔ ناهمرنگ})=\underbrace{\frac{۵}{۱۵}}_{\text{مهرهٔ اول سفید}}\times\underbrace{\frac{۱۰}{۱۴}}_{\text{مهرهٔ دوم سیاه}}+\underbrace{\frac{۱۰}{۱۵}}_{\text{مهرهٔ اول سیاه}}\times\underbrace{\frac{۵}{۱۴}}_{\text{مهرهٔ دوم سفید}}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

یه جور دیگه

از نمودار درختی، سریع‌تر به جواب می‌رسیم:



$$\Rightarrow P(\text{دو مهرهٔ ناهمرنگ})=\frac{۵}{۱۵}\times\frac{۱۰}{۱۴}+\frac{۱۰}{۱۵}\times\frac{۵}{۱۴}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

۳۲ مربع لاتین مقابل، با کدام مربع لاتین می‌تواند متعامد باشد؟

۱	۲	۳
*	۱	*
*	*	*

۱)

۳	۱	۲
۲	*	*
*	*	*

۲)

*	*	*
۲	۱	۳
*	*	۲

۳)

*	۳	*
*	*	*
۳	۱	۲

۴)

*	۲	*
۱	۳	۲
*	*	*

درس Box

مربع لاتین:

تعریف: یک جدول مربعی از اعداد ۱، ۲، ... و n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین» می‌نامیم.

به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.

دو مربع لاتین متعامد:

تعریف: فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قراردادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل می‌شود که هر خانهٔ آن حاوی یک عدد دورقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B «متعامدند» هرگاه هیچ‌یک از اعداد دورقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: مربع لاتین سؤال را تکمیل می‌کنیم.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

گام دوم: با توجه به درایهٔ سطر اول ستون سوم و سطر دوم ستون اول گزینهٔ (۱) نمی‌تواند پاسخ باشد، زیرا اگر مربع حاصل از ترکیب دو مربع لاتین را تشکیل دهیم در این دو خانه، عدد ۳۲ تکرار می‌شود.

گام سوم: با توجه به درایهٔ سطر اول ستون دوم و درایهٔ سطر سوم ستون اول، گزینهٔ (۳) نمی‌تواند پاسخ باشد، زیرا در مربع حاصل از ترکیب دو مربع لاتین، عدد ۲۳ تکرار می‌شود.

گام چهارم: با توجه به درایهٔ سطر اول ستون دوم و درایه سطر دوم ستون سوم، گزینهٔ (۴) نیز نمی‌تواند پاسخ باشد، زیرا در مربع حاصل از ترکیب دو مربع لاتین عدد ۲۲ تکرار می‌شود.

گام پنجم: مربع لاتین گزینهٔ (۲) را کامل می‌کنیم.

مربع لاتین متعامد:

۱۳	۲۲	۳۱
۳۲	۱۱	۲۳
۲۱	۳۳	۱۲

گزینهٔ (۲):

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

و چون عدد دورقمی تکراری در آن نیست، لذا دو مربع لاتین متعامدند.

۳۳ در یک دانشگاه، ۶۰ درصد جمعیت دختر و ۴۰ درصد آن پسر هستند. اگر معدل ۲۰٪ از دختران و ۱۰٪ از پسران، بالاتر از ۱۵ باشد، معدل چند درصد از دانشجویان کم‌تر یا مساوی ۱۵ است؟

۱) ۸۲

۲) ۸۳

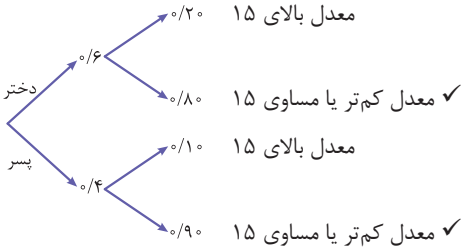
۳) ۸۴

۴) ۸۵

درس Box **حالت خاص قانون احتمال کل:** فرض کنید B پیشامدی باشد که $0 < P(B) < 1$. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم:

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(B')P(A \mid B')$$

پاسخ خیلی تشریحی از نمودار درختی استفاده می‌کنیم:



$$P(\text{معدل دانشجویان کم‌تر یا مساوی ۱۵}) = (۰/۶ \times ۰/۸) + (۰/۴ \times ۰/۹) = ۰/۸۴$$

در نتیجه معدل ۸۴ درصد از دانشجویان کم‌تر یا مساوی ۱۵ است.

۳۴ بیشترین مقدار **n** چه‌قدر باشد تا در یک کلاس ۵۱ نفری، مطمئن باشیم حداقل **n** نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

درس Box

تعمیم اصل لانه کبوتری: هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تعداد لانه‌ها برابر تعداد ماه‌های سال، یعنی $n=12$ است و هم‌چنین ۵۱ کبوتر داریم.

گام دوم:

$$51=4\times12+3 \Rightarrow k=4 \Rightarrow k+1=5$$

حداقل ۵ نفر دارای ماه تولد یکسان هستند.

۳۵ در دو جعبه به ترتیب ۹ و ۱۵ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۱ لامپ معیوب و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب قرار دارد. از جعبهٔ اول ۴ لامپ و از جعبهٔ دوم ۸ لامپ به تصادف انتخاب کرده و در جعبهٔ جدیدی قرار می‌دهیم. مشاهده می‌شود همهٔ لامپ‌های جعبهٔ جدید سالم هستند. اگر یک لامپ به تصادف از جعبهٔ جدید انتخاب کنید، با چه احتمالی متعلق به جعبهٔ دوم است؟

۱) $\frac{۸}{۱۵}$

۲) $\frac{۹}{۱۴}$

۳) $\frac{۵}{۹}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

Hint از سمت جعبهٔ سوم به مسئلهٔ انتخاب لامپ‌ها نگاه کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در مرحلهٔ اول لامپی را که از جعبهٔ سوم انتخاب می‌کنیم، دو حالت دارد: یا از لامپ‌های جعبهٔ اول است و یا از لامپ‌های جعبهٔ دوم.

انتخاب یک لامپ از جعبهٔ سوم
- $P(\text{جعبهٔ اول}) = \frac{۴}{۴+۸} = \frac{۱}{۳}$
- $P(\text{جعبهٔ دوم}) = \frac{۸}{۴+۸} = \frac{۲}{۳}$

گام دوم: در مرحلهٔ دوم، احتمال انتخاب لامپ سالم از هر کدام از جعبه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$P(\text{سالم} \mid \text{جعبهٔ اول}) = \frac{۸}{۹} \quad , \quad P(\text{سالم} \mid \text{جعبهٔ دوم}) = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵}$$

گام سوم: و طبق قاعدهٔ ضرب احتمال و احتمال کل، احتمال سالم‌بودن لامپ انتخابی را حساب می‌کنیم:

$$P(\text{سالم}) = P(\text{جعبهٔ اول})P(\text{سالم} \mid \text{جعبهٔ اول}) + P(\text{جعبهٔ دوم})P(\text{سالم} \mid \text{جعبهٔ دوم})$$

$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{۸}{۹} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۵} = \frac{۴۰+۷۲}{۱۳۵} = \frac{۱۱۲}{۱۳۵}$$

گام چهارم: حال طبق قانون بیز داریم:

$$P(\text{جعبهٔ دوم} \mid \text{سالم}) = \frac{P(\text{جعبهٔ دوم})\, P(\text{سالم} \mid \text{جعبهٔ دوم})}{P(\text{سالم})} = \frac{\frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۵}}{\frac{۱۱۲}{۱۳۵}} = \frac{\frac{۸}{۱۵}}{\frac{۱۱۲}{۱۳۵}} = \frac{۹}{۱۴}$$

۳۶ خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. احتمال آن‌که همهٔ فرزندان خانواده از یک جنسیت نباشند کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۲) $\frac{۷}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به اصل ضرب تعداد همهٔ حالت‌های ممکن برای فرزندان این خانواده برابر $۲^۴ = ۲\times۲\times۲\times۲$ است.

گام دوم: از احتمال متمم استفاده می‌کنیم. همهٔ فرزندان خانواده از یک جنسیت نباشند، متمم همهٔ فرزندان از یک جنس باشند، است؛ بنابراین $A = \{(پ,پ,پ,پ)\ ,\ (د,د,د,د)\}$ = همهٔ فرزندان خانواده از یک جنسیت باشند ، یعنی یا همه پسر هستند یا همه دختر.

گام سوم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۲^۴} = \frac{۱}{۸}$$

$A' =$ «همهٔ فرزندان خانواده یک جنسیت نباشند.»

گام چهارم:

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۸}$$

۳۷ به چند طریق می‌توان ۳ شاخه گل از بین ۵ نوع گل متفاوت، انتخاب کرد؟

۱) ۱۰

۲) ۱۵

۳) ۲۴

۴) ۳۵

درس Box

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل، یعنی برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$\begin{matrix} k=5 \\ n=3 \end{matrix} \Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = \binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$$

۳۸ تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x+y+z=11$، با شرط $x\le 7$، کدام است؟

۱) ۴۱

۲) ۴۲

۳) ۸۸

۴) ۸۹

درس Box

- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$.
- تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادلهٔ $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای به دست آوردن تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x+y+z=11$ با شرط $x\le 7$، از متمم استفاده می‌کنیم، یعنی تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x+y+z=11$ با شرط $x>7$ را از تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x+y+z=11$ کم می‌کنیم.

گام دوم: تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x+y+z=11$ برابر است با $\binom{11-1}{3-1}$.

$$\binom{11-1}{3-1}=\binom{10}{2}=45$$

گام سوم: تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x+y+z=11$ با شرط $x>7$ برابر است با:

$$x>7 \Rightarrow x-7>0 \Rightarrow x-7\ge 1$$

$$x'=x-7 \Rightarrow x=x'+7$$

$$x+y+z=11 \Rightarrow x'+y+z=4 \Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب}=\binom{4-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$$

گام چهارم: حال تعداد جواب‌های گام سوم را از تعداد جواب‌های گام اول کم می‌کنیم:

تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x+y+z=11$ با شرط $x\le 7$ $=45-3=42$

۳۹ با اعداد ۱،۱،۲،۲،۳،۳ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴

۲) ۲۱

۳) ۱۸

۴) ۱۵

درس Box

- اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدنِ آن‌ها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیا می‌گوییم.
- تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$.
- **قضیهٔ جایگشت با تکرار:** اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن‌ها از نوع kام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\times\ldots\times n_k!}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول:

حالت اول: سه رقم غیرتکراری باشند؛ با ارقام ۳، ۲، ۱ می‌توان $3!=6$ عدد سه‌رقمی نوشت.

حالت دوم: دو رقم تکراری و یک رقم غیرتکراری.

در ۶ حالت مختلف دو رقم تکراری داریم که در هر یک، تعداد حالات برابر است با:

$$\frac{3!}{2!\,1!}=3$$

(رقم تکراری)

۱۲۲ ۱۳۳ ۲۱۱

۳۲۲ ۲۳۳ ۳۱۱

گام دوم: بنابراین تعداد اعداد سه‌رقمی برابر است با:

$$6+3\times6=24$$

۴۰ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «Golzari» حداقل یکی از حروف z و r در جای خودش است؟

۱) ۱۳۲۰

۲) ۱۱۰۰

۳) ۸۸۰

۴) ۶۶۰

درس Box

اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جایگشت‌هایی که z سر جای خودش باشد را با A و جایگشت‌هایی که r سر جای خودش باشد را با B نمایش می‌دهیم.

گام دوم: کلمهٔ «Golzari» دارای ۷ حرف می‌باشد، تعداد جایگشت‌هایی که z سر جای خودش قرار بگیرد برابر است با $|A|=۶!$. هم‌چنین تعداد جایگشت‌هایی که r سر جای خودش قرار بگیرد برابر است با $|B|=۶!$.

گام سوم: جایگشت $A\cap B$ یعنی هم r هم z سر جای خودشان قرار بگیرند، پس ۵ حرف باقی می‌ماند که $۵!$ جایگشت دارند.

$$|A\cap B|=۵!$$

گام چهارم: می‌خواهیم حداقل یکی از حروف z و r در جای خودش باشد، یعنی $A\cup B$، پس طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=۶!+۶!-۵!=۷۲۰+۷۲۰-۱۲۰ \Rightarrow |A\cup B|=۱۳۲۰$$

۴۱ انرژی هر یک از فوتون‌های نور تک‌رنگی $۲\ eV$ است. اگر این نور تک‌رنگ از خلأ وارد محیط شفافی شود، طول موج آن $۱۲۴\ nm$ تغییر می‌کند. تندی نور در این محیط چند متر بر ثانیه است؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm$ و $c = ۳\times ۱۰^{۸}\ m/s)$

۱) $۲/۴\times ۱۰^{۸}$

۲) $۲/۴\times ۱۰^{۷}$

۳) ۲×۱۰^{۷}

۴) ۲×۱۰^{۸}

Hint

طول موج نور تک‌رنگ داده‌شده را در خلأ و همچنین در محیط شفافی که وارد آن می‌شود، به دست آورید، سپس با توجه به ثابت‌بودن بسامد نور در هر دو محیط، تندی آن را در محیط شفافی که وارد آن می‌شود، پیدا کنید.

درس Box

۱) انرژی هر فوتون یک نور تک‌رنگ به طول موج λ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

E: انرژی هر فوتون (eV)

h: ثابت پلانک $= ۴/۱۴\times ۱۰^{-۱۵}\ eV.s$

c: تندی نور در خلأ $= ۳\times ۱۰^{۸}\ m/s$

۲) وقتی نور از خلأ وارد محیط شفاف دیگری می‌شود، تندی و طول موج آن کاهش می‌یابد، اما بسامد آن تغییری نمی‌کند، زیرا بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و با تغییر محیط عوض نمی‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طول موج نور تک‌رنگ داده‌شده را در خلأ به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \xrightarrow[hc=۱۲۴۰\ eV\cdot nm]{E=۲\ eV} ۲ = \frac{۱۲۴۰}{\lambda} \Rightarrow \lambda = ۶۲۰\ nm$$

گام دوم: با توجه به این‌که طول موج نور در محیط شفاف، کم‌تر از طول موج آن در خلأ است، داریم:

$$\lambda - \lambda' = ۱۲۴ \Rightarrow ۶۲۰ - \lambda' = ۱۲۴ \Rightarrow \lambda' = ۴۹۶\ nm$$

گام سوم: با توجه به ثابت‌بودن بسامد نور مورد نظر در خلأ و در محیط شفاف، طول موج آن با تندی نور متناسب است:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{v'}{v} \Rightarrow \frac{۴۹۶}{۶۲۰} = \frac{v'}{۳\times ۱۰^{۸}} \Rightarrow v' = ۰/۸\times ۳\times ۱۰^{۸} = ۲/۴\times ۱۰^{۸}\ m/s$$

۴۲ یک لامپ با توان $50\ W$ و بازده ۰/۷۲ درصد، نور تک‌رنگی را با طول موج $0/55\ \mu m$ به طور یکنواخت و در تمام جهت‌های اطراف خود منتشر می‌کند. سطحی به مساحت $24\ cm^2$ در فاصلهٔ ۱۰۰ متری از لامپ و عمود بر راستای انتشار نور حاصل از آن قرار دارد. در هر دقیقه چند فوتون از لامپ به این سطح می‌رسد؟ $(\pi = 3 \text{ و } h = 6/6\times10^{-34}\ J\cdot s ,\ c = 3\times10^{8}\ m/s)$

۱) $1/2\times10^{12}$

۲) $1/2\times10^{15}$

۳) $7/2\times10^{12}$

۴) $7/2\times10^{15}$

مشاوره این تست براساس یکی از مسئله‌های دوره‌ای آخر فصل ۵ از کتاب فیزیک (۳) طرح شده است. پرسش‌ها و مسئله‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

درس Box

بازده یک وسیله از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$Ra = \frac{P_2}{P_1}\times100$$

Ra: بازده (درصد)

P_2: توان مفید خروجی (W)

P_1: توان ورودی (W)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: توان مفید خروجی از لامپ را به دست می‌آوریم:

$$Ra = \frac{P_2}{P_1}\times100 \xrightarrow[P_1=50\ W]{Ra=\%0/72} 0/72 = \frac{P_2}{50}\times100$$

$$\Rightarrow P_2 = 0/36\ W$$

گام دوم: انرژی نور خروجی از لامپ در هر دقیقه را حساب می‌کنیم:

$$P_2 = \frac{E}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=1\ min=60\ s]{P_2=0/36\ W} 0/36 = \frac{E}{60} \Rightarrow E = 21/6\ J$$

گام سوم: انرژی‌ای که به سطح مورد نظر می‌رسد، بخشی از انرژی E است. این انرژی را E_1 می‌نامیم.

$$E_1 = \frac{A_1}{A}E$$

$$\xrightarrow[A=4\pi r^2=4\times3\times100^2=12\times10^4\ m^2]{A_1=24\ cm^2=24\times10^{-4}\ m^2 ,\ E=21/6\ J} E_1 = \frac{24\times10^{-4}}{12\times10^4}\times21/6 = 2\times10^{-8}\times21/6 = 43/2\times10^{-8}\ J$$

گام چهارم: اکنون می‌توانیم تعداد فوتون‌های مربوط به انرژی E_1 را به دست آوریم:

$$E_1 = \frac{nhc}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{E_1\lambda}{hc} = \frac{43/2\times10^{-8}\times0/55\times10^{-6}}{6/6\times10^{-34}\times3\times10^{8}} = 1/2\times\frac{10^{-14}}{10^{-26}} = 1/2\times10^{12}$$

۴۳ تابع کار فلزی $3\ eV$ است. به سطح این فلز به طور جداگانه سه پرتوی نور تک‌رنگ با طول موج‌های $400\ nm$، $500\ nm$ و $600\ nm$ می‌تابد. چه تعداد از این پرتوها سبب خارج‌شدن الکترون از سطح فلز می‌شوند؟ $(hc = 1240\ eV.nm)$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

Hint

طول موج آستانه را به دست آورید و طول موج‌های داده‌شده را با آن مقایسه کنید.

درس Box

۱) طول موج آستانه (λ_0)، بیشترین طول موجی است که پدیدهٔ فوتوالکتریک به ازای آن رخ می‌دهد.

۲) رابطهٔ تابع کار (W_0):

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

W_0: تابع کار (eV)

h: ثابت پلانک $= 4/14\times10^{-15}\ eV\cdot s$

c: تندی نور در خلأ $= 3\times10^{8}\ m/s$

λ_0: طول موج آستانه (m)

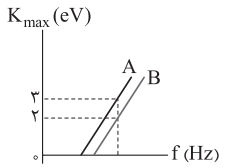
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با معلوم‌بودن تابع کار فلز، طول موج آستانهٔ مربوط به آن را به دست می‌آوریم:

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = \frac{1240}{3} = 413/3\ nm$$

گام دوم: فوتون‌هایی که طول موج آن‌ها از طول موج آستانهٔ مربوط به فلز مورد نظر کم‌تر باشد، انرژی لازم برای خارج‌کردن الکترون از سطح فلز را دارند؛ بنابراین فقط طول موج $400\ nm$ قادر است از سطح این فلز الکترون را جدا کند و گزینهٔ (۳) درست است.

۴۴ در آزمایش فوتوالکتریک، نمودار بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از سطح دو فلز **A** و **B** برحسب بسامد نور فرودی به سطح آن‌ها به شکل زیر است. اگر تابع کار یکی از این فلزها ۲۵ درصد بزرگ‌تر از تابع کار فلز دیگر باشد، تابع کار فلز **B** چند الکترون ولت است؟ **($h = ۴\times ۱۰^{-۱۵}\ eV.s$)**



۱) ۴
۲) ۴/۲۵
۳) ۴/۵
۴) ۵

Hint

با توجه به نمودار، بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از سطح دو فلز A و B را در یک بسامد معین داریم. بنابراین می‌توانید hf را بین دو معادلهٔ K_{max} حذف کنید و تابع کار هر دو فلز را پیدا کنید.

درس Box

در نمودار K_{max} برحسب بسامد، طول از مبدأ نمودار، بسامد آستانه $(f_{\circ})$ را نشان می‌دهد. هر چه $f_{\circ}$ مربوط به یک فلز بزرگ‌تر باشد، تابع کار آن نیز بزرگ‌تر است.

$$W_{\circ} = hf_{\circ}$$

$W_{\circ}$ = تابع کار (eV)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: رابطهٔ K_{max} را برای هر دو فلز A و B می‌نویسیم و سپس hf را بین دو معادلهٔ به‌دست‌آمده حذف می‌کنیم:

$$K_{max} = hf - W_{\circ}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{فلز A: } ۳ = hf - W_{\circ A} \\ \text{فلز B: } ۲ = hf - W_{\circ B} \end{array}\right\} \Rightarrow ۳-۲ = hf - W_{\circ A} - (hf - W_{\circ B}) \Rightarrow ۱ = W_{\circ B} - W_{\circ A}$$

گام دوم: با توجه به نمودار داده‌شده و داده‌های سؤال، می‌توان نوشت:

$$f_{\circ B} > f_{\circ A} \xrightarrow{W_{\circ}=hf_{\circ}} W_{\circ B} > W_{\circ A}$$

$$\Rightarrow W_{\circ B} = W_{\circ A} + ۰/۲۵W_{\circ A} = ۱/۲۵W_{\circ A}$$

از طرفی به کمک نتیجهٔ به‌دست‌آمده در گام اول داریم:

$$W_{\circ B} - W_{\circ A} = ۱ \xrightarrow{W_{\circ B}=۱/۲۵W_{\circ A}} ۱/۲۵W_{\circ A} - W_{\circ A} = ۱$$

$$\Rightarrow ۰/۲۵W_{\circ A} = ۱ \Rightarrow W_{\circ A} = ۴\ eV$$

$$W_{\circ B} = ۱/۲۵W_{\circ A} = ۱/۲۵\times ۴ = ۵\ eV$$

۴۵ در اتم هیدروژن، انرژی فوتون‌های مربوط به کدام خط طیفی برابر $۲/۳۲۵\ eV$ است؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm$ و $R = \frac{۱}{۱۰۰}(nm)^{-۱})$

۱) اولین خط رشتهٔ پاشن $(n' = ۳)$

۲) سومین خط رشتهٔ پاشن $(n' = ۳)$

۳) دومین خط رشتهٔ بالمر $(n' = ۲)$

۴) چهارمین خط رشتهٔ بالمر $(n' = ۲)$

Hint

ابتدا طول موج مربوط به فوتون داده‌شده را به دست آورید و تعیین کنید که در چه ناحیه‌ای از طیف امواج الکترومغناطیس قرار دارد، سپس از رابطهٔ ریدبرگ مقدار n و شمارهٔ خط مورد نظر را حساب کنید.

درس Box

وقتی الکترون اتم هیدروژن از یک مدار به مدار دیگری می‌رود، انرژی مبادله‌شده توسط آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$$

ΔE: انرژی (eV)

h: ثابت پلانک $= ۴/۱۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV.s$

c: تندی نور در هوا و خلأ $= ۳\times۱۰^{۸}\ m/s$

λ: طول موج (m)

رابطهٔ ریدبرگ:

$$\frac{۱}{\lambda} = R\left(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}}\right)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طول موج فوتون داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow ۲/۳۲۵ = \frac{۱۲۴۰}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{۱۶۰۰}{۳}\ nm$$

این طول موج در ناحیهٔ مرئی قرار دارد؛ بنابراین در رشتهٔ بالمر قرار دارد و $n' = ۲$ است.

گام دوم: به کمک رابطهٔ ریدبرگ، مقدار n را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\lambda} = R\left(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}}\right) \Rightarrow \frac{۱}{\frac{۱۶۰۰}{۳}} = \frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{۲^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}}\right) \Rightarrow \frac{۳}{۱۶} = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{n^{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n^{۲}} = \frac{۱}{۴} - \frac{۳}{۱۶} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow n = ۴ \Rightarrow n - n' = ۴ - ۲ = ۲$$

پس این فوتون، مربوط به دومین خط رشتهٔ بالمر است.

۴۶ در طیف گسیلی اتم هیدروژن، بلندترین طول موج کدام رشته $\frac{۴۰}{۹}\ \mu m$ است؟ $(R = ۰/۰۱\ (nm)^{-۱})$

۱) بالمر $(n' = ۲)$
۲) پاشن $(n' = ۳)$
۳) براکت $(n' = ۴)$
۴) پفوند $(n' = ۵)$

مشاوره این تست نیز براساس یکی از مثال‌های حل‌شدهٔ کتاب درسی در فصل ۵ کتاب فیزیک (۳) رشتهٔ ریاضی طرح شده است. مثال‌های کتاب درسی را به دقت مطالعه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بلندترین طول موج مربوط به کم‌ترین انرژی مبادله‌شده است؛ یعنی حالتی که الکترون اتم هیدروژن بین مدارهای n' و $(n'+۱)$ جابه‌جا می‌شود.

$$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲}) \Rightarrow \frac{۱}{\lambda_{max}} = \frac{۱}{R}(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{(n'+۱)^۲})$$

$$\xrightarrow[R=۰/۰۱\ nm^{-۱}]{\lambda_{max}=\frac{۴۰}{۹}\mu m=\frac{۴۰۰۰۰}{۹}\ nm} \frac{۹}{۴۰۰۰۰} = \frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{(n'+۱)^۲})$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۴۰۰} = \frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{(n'+۱)^۲}$$

با جای‌گذاری گزینه‌ها، معلوم می‌شود که $n' = ۴$ است.

۴۷ اگر ضریب گذردهی الکتریکی خلأ برابر ε_0، ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ برابر μ_0، ثابت ریدبرگ برابر R و انرژی یک ریدبرگ برابر E_R باشد، ثابت پلانک برابر کدام است؟

۱) $\frac{E_R\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{R}$

۲) $\frac{R\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{E_R}$

۳) $\frac{E_R}{R\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

۴) $\frac{R}{E_R\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

درس Box

۱) استخراج معادلهٔ ریدبرگ برای اتم هیدروژن، از مدل بور: فرض کنید الکترون اتم هیدروژن، در یکی از حالت‌های برانگیخته باشد و بخواهد به حالتی با انرژی کم‌تر جهش کند. به عبارت دیگر، الکترون از مدار مانای n_U به مدار مانای n_L می‌رود و فوتونی را گسیل می‌کند. بسامد فوتون گسیل‌شده برابر است با:

$$f=\frac{1}{h}(E_U-E_L)=\frac{1}{h}(-\frac{E_R}{n_U^2}-(-\frac{E_R}{n_L^2}))=\frac{1}{h}(\frac{E_R}{n_L^2}-\frac{E_R}{n_U^2})$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\lambda}=\frac{E_R}{h}(\frac{1}{n_L^2}-\frac{1}{n_U^2}) \Rightarrow \frac{1}{\lambda}=\frac{E_R}{hc}(\frac{1}{n_L^2}-\frac{1}{n_U^2})$$

بنابراین $R=\frac{E_R}{hc}$ است.

۲) بنا به نظریهٔ ماکسول، تندی انتشار همهٔ موج‌های الکترومغناطیس در خلأ، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

c: تندی انتشار موج‌های الکترومغناطیس در خلأ $= 3\times10^8\ m/s$

μ_0: تراوایی مغناطیسی خلأ $= 4\pi\times10^{-7}\ \frac{T\cdot m}{A}$

ε_0: ضریب گذردهی الکتریکی خلأ $= 8/85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{N\cdot m^2}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به نتیجهٔ به‌دست‌آمده در قسمت اول درس‌باکس داریم:

$$h=\frac{E_R}{Rc} \xrightarrow{c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}} h=\frac{E_R}{R\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}} \Rightarrow h=\frac{E_R\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{R}$$

۴۸ در مدل اتمی بور برای هیدروژن، الکترون در مدار شمارهٔ n_1 قرار دارد و انرژی آن $-3/4\ eV$ است. این الکترون با جذب فوتونی با انرژی $4/08\times10^{-19}\ J$ به مدار n_2 منتقل می‌شود. در این گذار، اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر الکترون چند برابر می‌شود؟ $(e=1/6\times10^{-19}\ C\ ,\ E_R=13/6\ eV)$

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{64}$ ۴) $\frac{1}{256}$

درس Box

۱) بنا به مدل اتمی بور، شعاع‌های مدارهای الکترون در اتم هیدروژن به صورت روبه‌رو است:

$$r_n=n^2r_1$$

r_n: شعاع مدار nام برای الکترون در اتم هیدروژن

r_1: شعاع کوچک‌ترین مدار در اتم هیدروژن

n: شمارهٔ مدار

هم‌چنین ترازهای انرژی الکترون در اتم هیدروژن از رابطهٔ روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}$$

E_n: انرژی الکترون در مدار nام اتم هیدروژن (eV)

E_R: انرژی یک ریدبرگ $=13/6\ eV$

۲) یک الکترون‌ولت، بنا به تعریف، برابر مقدار انرژی لازم برای جابه‌جایی یک الکترون، تحت ولتاژ یک ولت است.

$$1\ eV=1/6\times10^{-19}C\times1\ V=1/6\times10^{-19}\ J$$

۳) با توجه به قانون کولن، نیروی الکتریکی بین الکترون اتم هیدروژن و پروتون موجود در هستهٔ آن برابر است با:

$$F=k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\xrightarrow{|q_1|=|q_2|=e}F=\frac{ke^2}{r^2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک رابطهٔ ترازهای انرژی در اتم بور، شمارهٔ مدار n_1 را به دست می‌آوریم:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\Rightarrow E_{n_1}=-\frac{E_R}{n_1^2}\xrightarrow[E_{n_1}=-3/4\ eV]{E_R=13/6\ eV}-3/4=-\frac{13/6}{n_1^2}$$

$$\Rightarrow n_1^2=4\Rightarrow n_1=2$$

گام دوم: انرژی فوتون جذب‌شده توسط الکترون را برحسب الکترون‌ولت پیدا می‌کنیم و مشابه گام اول، شمارهٔ مدار n_2 را نیز مشخص می‌کنیم:

$$\Delta E=4/08\times10^{-19}\ J=\frac{4/08\times10^{-19}}{1/6\times10^{-19}}=2/55\ eV$$

$$\Delta E=E_2-E_1\Rightarrow E_2=E_1+\Delta E=-3/4+2/55=-0/85\ eV$$

$$E_2=-\frac{E_R}{n_2^2}\Rightarrow -0/85=-\frac{13/6}{n_2^2}\Rightarrow n_2^2=16\Rightarrow n_2=4$$

گام سوم: نسبت شعاع‌های مدارهای مربوط به n_1 و n_2 را به دست می‌آوریم:

$$r_n=n^2r_1\Rightarrow\frac{r_2}{r_1}=(\frac{n_2}{n_1})^2=(\frac{4}{2})^2=4$$

گام چهارم: با توجه به قانون کولن، نیروی الکتریکی وارد بر الکترون، با مربع فاصلهٔ الکترون از هسته، نسبت وارون دارد.

$$\frac{F_2}{F_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2=(\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16}$$

۴۹ الکترونی در چهارمین حالت برانگیختهٔ اتم هیدروژن قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، با جهش این الکترون به مدارهای پایین‌تر، به ترتیب از راست به چپ چند فوتون متفاوت در ناحیهٔ مرئی و چند فوتون متفاوت در ناحیهٔ فروسرخ می‌تواند گسیل شود؟

۱) ۱ و ۲ ۲) ۲ و ۳ ۳) ۳ و ۲ ۴) ۳ و ۳

مشاوره رشتهٔ بالمر رشتهٔ خاصیه! یه توجه ویژه بهش کنید.

درس Box

۱) برای پیداکردن شمارهٔ مداری که الکترون در آن قرار دارد (n) در kاُمین حالت برانگیخته می‌توان گفت:

$$n = k + 1$$

۲) رشته‌ها: بسته به این که مدار مقصد (n') الکترون چه شماره‌ای داشته باشد، رشته‌هایی مطابق جدول زیر تعریف می‌شوند:

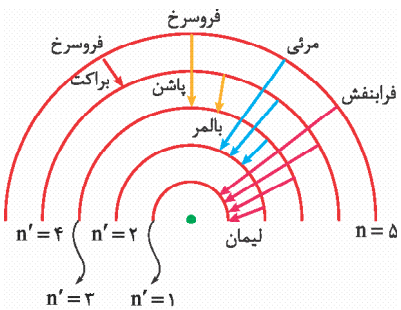
نام طیف	مقدار n'	رابطهٔ ریدبرگ مربوط به رشته	مقدارهای n	ناحیهٔ طیف
لیمان	۱	$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2})$	۲ , ۳ , ۴ , ...	فرابنفش
بالمر	۲	$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$	۳ , ۴ , ۵ , ...	فرابنفش $(2 \to 7$ تا $2 \to \infty)$ و مرئی $(2 \to 3$ تا $2 \to 6)$
پاشن	۳	$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2})$	۴ , ۵ , ۶ , ...	فروسرخ
براکت	۴	$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2})$	۵ , ۶ , ۷ , ...	فروسرخ
پفوند	۵	$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2})$	۶ , ۷ , ۸ , ...	فروسرخ

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ترازی که الکترون در آن قرار دارد، برابر است با:

$$n = 4 + 1 = 5$$

گام دوم: تمام گذارهای ممکن را باید در نظر بگیریم. مثلاً وقتی الکترون از تراز ۵ به تراز ۴ برود، انتقال الکترون از تراز ۴ به ترازهای پایین‌تر هم گذار ممکن محسوب می‌شود. پس تمام گذارهای ممکن مطابق روبه‌رو است.



تمام گذارهای موجود در رشتهٔ لیمان در طیف فرابنفش و تمام گذارهای موجود در رشته‌های پاشن، براکت و پفوند در طیف فروسرخ هستند. در این تست ۳ گذار مربوط به $2 \to 5$، $2 \to 4$ و $2 \to 3$ در ناحیهٔ مرئی است و ۳ گذار مربوط به $4 \to 5$، $3 \to 5$ و $3 \to 4$ در محدودهٔ فروسرخ است.

۵۰ الکترونی در سومین حالت برانگیختهٔ اتم هیدروژن قرار دارد. در گذاری که منجر به گسیل کم‌انرژی‌ترین فوتون شود، شعاع مدار الکترون چند نانومتر تغییر می‌کند؟ (شعاع بور برای اتم هیدروژن $5/3\times10^{-11}\,m$ است.)

۱) ۰/۲۶۵ ۲) ۰/۳۷۱

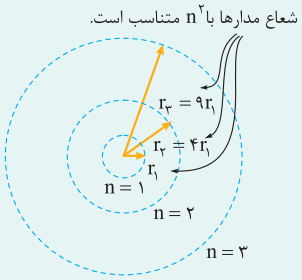
۳) ۰/۴۲۴ ۴) ۰/۷۹۵

درس Box

۱) اصطلاحات کاربردی

جمله	تعیین n و n'
بلندترین طول موج (کم‌ترین بسامد و انرژی) در یک رشتهٔ مشخص (n' مشخصه.)	از یه مدار بالاتر بیا روی n'
مثلاً: بلندترین طول موج پاشن $(n'=3)$	از ۴ بیا روی ۳
کوتاه‌ترین طول موج (بیشترین بسامد و انرژی) در یک رشتهٔ مشخص (n' مشخصه.)	از ∞ بیا روی n'
مثلاً: کوتاه‌ترین طول موج براکت $(n'=4)$	از ∞ بیا روی ۴
x امین خط در یک رشتهٔ مشخص (n' مشخصه.)	$n=n'+x$
مثلاً: چهارمین خط در رشتهٔ بالمر $(n'=2)$	$n=2+4=6$

۲) شعاع مدارهای الکترون



r_n: شعاع مدار n اُم — $r_n=a_0n^2$

a_0: شعاع کوچک‌ترین مدار (شعاع بور برای هیدروژن) — $r_1=a_0$

n: شمارهٔ مدار

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ترازی که الکترون در آن قرار دارد (n) برابر است با: $n=3+1=4$

گام دوم: برای آزادکردن کم‌ترین انرژی باید الکترون به یک مدار پایین‌تر یعنی $n'=3$ برود.

گام دوم: شعاع مدارهای ۳ و ۴ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$r_3=a_0\times3^2=9a_0$$

$$r_4=a_0\times4^2=16a_0$$

پس تغییر شعاع الکترون برابر می‌شود با:

$$\Delta r=r_4-r_3=16a_0-9a_0=7a_0\xrightarrow{a_0=5/3\times10^{-11}\,m}\Delta r=7\times5/3\times10^{-11}=37/1\times10^{-11}\,m=0/371\,nm$$

۵۱ کدام‌یک از موارد زیر، دربارهٔ فرایند گسیل القایی درست است؟

الف) در این فرایند، برخلاف فرایند گسیل خودبه‌خودی، فوتون در جهتی کاتوره‌ای گسیل می‌شود.

ب) در این فرایند، فوتون گسیلی در همان جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند.

پ) در این فرایند، انرژی فوتون ورودی از اختلاف انرژی دو تراز بالاتر و پایین‌تر باید بیشتر باشد.

ت) در این فرایند، انرژی فوتون ورودی باید با اختلاف انرژی دو تراز بالاتر و پایین‌تر دقیقاً برابر باشد.

۱) الف و پ ۲) الف و ت

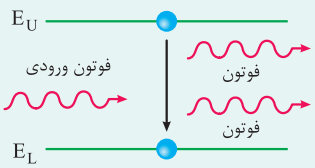
۳) ب و پ ۴) ب و ت

درس Box

گسیل القایی:

یک فوتون ورودی، الکترون را تحریک (القا) می‌کند تا به تراز پایین‌تر برود.

در این حالت، فوتون دیگری گسیل می‌شود که جهت آن، در جهت فوتون ورودی است. گسیل القایی اساس کار لیزر است.



ویژگی‌های فوتون گسیل‌شده به صورت القایی:

- ۱ فوتون وارد و ۲ فوتون خارج می‌شود و این فرایند ادامه می‌یابد.
- با افزایش تعداد فوتون‌ها، نور تقویت می‌شود.
- فوتون گسیل‌شده در جهت فوتون ورودی است.
- فوتون گسیل‌شده با فوتون ورودی همگام (هم‌فاز) است.
- انرژی فوتون ورودی با اختلاف انرژی ترازهای مبدأ و مقصد $(E_U - E_L)$ برابر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس تنها موارد «ب» و «ت» درست هستند.

۵۲ چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ هسته‌های ایزوتوپ درست است؟

- خواص شیمیایی و فیزیکی یکسانی دارند.
- در جدول تناوبی عناصر، هم‌مکان هستند.
- تعداد نوترون‌های برابر ولی تعداد نوکلئون‌های متفاوت دارند.

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

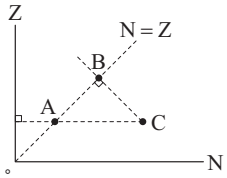
درس Box

ایزوتوپ‌ها

- هسته‌هایی که عدد اتمی (Z) یکسان، ولی عدد جرمی (A) متفاوتی دارند. (یعنی تعداد پروتون برابر و تعداد نوترون غیربرابر دارند.)
- خواص شیمیایی ایزوتوپ‌ها یکسان است.
- در جدول تناوبی هم‌مکان هستند.
- جرم هر عنصر در جدول تناوبی، برابر میانگین جرم ایزوتوپ‌های عنصر با توجه به درصد فراوانی آن‌هاست.
- ایزوتوپ‌های هر عنصر، همنام با همان عنصر است به‌جز ایزوتوپ‌های هیدروژن که به صورت $({}_{1}^{1}H)$، دوتریم $({}_{1}^{2}H)$ با نماد D و تریتیم $({}_{1}^{3}H)$ با نماد T هستند.
- اغلب ایزوتوپ‌ها ناپایدارند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس فقط مورد دوم درست است.

۵۳ در نمودار عدد اتمی برحسب عدد نوترونیِ شکل زیر، اگر تعداد پروتون‌های هسته‌های **A** و **B** به ترتیب برابر ۲۰ و ۲۳ باشد، عدد جرمی هستهٔ **C** چه‌قدر است و هستهٔ **C** با کدام هسته در جدول تناوبی عناصر هم‌مکان است؟

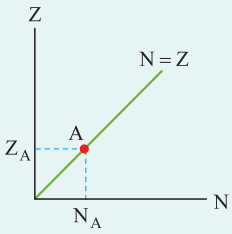


۱) A ,۴۳
۲) B ,۴۳
۳) A ,۴۶
۴) B ,۴۶

درس Box

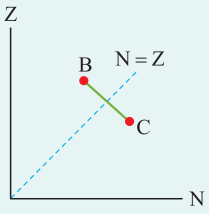
در نمودار $Z-N$

۱) هسته‌هایی که روی خط $N=Z$ قرار دارند، عدد اتمی‌شان (Z) با عدد نوترونی‌شان برابر است. $N_A = Z_A$



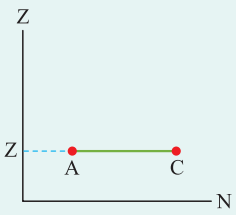
۲) هر دو هسته‌ای که روی خطی عمود بر خطِ $N=Z$ باشند، عدد جرمی (A) یکسانی دارند.

$A_B = A_C \rightarrow N_B + Z_B = N_C + Z_C$



۳) هر دو هسته‌ای که روی یک خط افقی قرار داشته باشند، عدد اتمی یکسانی دارند، یعنی ایزوتوپ هستند.

$Z_A = Z_C = Z$



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: A و C روی خطی افقی هستند، پس ایزوتوپ‌اند (هم‌مکان) و عدد اتمی یکسانی دارند.

$Z_C = Z_A \xrightarrow{Z_A=۲۰} Z_C = ۲۰$

گام دوم: B روی خطِ $N=Z$ است، پس عدد اتمی و عدد نوترونی یکسانی دارد، یعنی $N_B = ۲۳$ و عدد جرمی آن برابر می‌شود با:

$A_B = Z_B + N_B = ۲۳ + ۲۳ = ۴۶$

گام سوم: B و C روی خطی عمود بر خطِ $N=Z$ قرار گرفته‌اند، پس عدد جرمی B و C یکسان است و داریم:

$A_C = A_B = ۴۶$

۵۴ کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) نیروی هسته‌ای، در مقایسه با نیروی الکتریکی، ضعیف و کوتاه‌برد است.

۲) بین دو پروتون مجاور درون یک هسته، نیروی ربایش هسته‌ای وجود دارد.

۳) درون هسته، یک پروتون فقط به پروتون‌های مجاور خود نیروی دافعهٔ الکتریکی وارد می‌کند.

۴) در هسته‌های سنگین، با افزایش تعداد پروتون‌ها، تعداد نوترون‌ها نیز به همان اندازه افزایش می‌یابد.

درس Box

۱) نیروهای بین ذرات هسته:

در هسته دو نیروی مهم الکتروستاتیکی و هسته‌ای به صورت جدول زیر در مقایسه با یکدیگر مورد بررسی قرار می‌گیرند:

نام نیرو	نوع	بین کدام ذرات؟	تا چه فاصله‌ای؟	تأثیر	قدرت
الکتروستاتیکی (الکتریکی)	دافعه (رانشی)	فقط پروتون‌ها	بلندبُرد (در کل هسته)		ضعیف
هسته‌ای	جاذبه (ربایشی)	تمام نوکلئون‌ها بین پروتون و پروتون = بین نوترون و نوترون = بین پروتون و نوترون	کوتاه‌بُرد (فقط نوکلئون‌های مجاور)	عامل پایداری هسته	قوی

۲) در هسته‌های سنگین با افزایش تعداد پروتون‌ها، تعداد نوترون‌ها بیشتر افزایش می‌یابد، یعنی در هسته‌های سنگین و پایدار نسبت $\frac{N}{Z}$ با افزایش پروتون‌ها بیشتر می‌شود. (به شرطی که $Z > ۸۳$ نشود، زیرا هیچ هستهٔ پایداری با عدد اتمی بزرگ‌تر از ۸۳ وجود ندارد.)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس فقط گزینهٔ (۲) درست است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۱): نیروی هسته‌ای بین دو نوکلئون از نیروی الکتریکی بین دو پروتون بسیار بیشتر است.

گزینهٔ (۳): درون هسته، هر پروتون به تمام پروتون‌ها (نه فقط پروتون‌های مجاور) نیروی دافعهٔ الکتریکی وارد می‌کند.

گزینهٔ (۴): در هسته‌های سنگین، با افزایش تعداد پروتون‌ها، تعداد نوترون‌ها، بیشتر افزایش می‌یابد.

۵۵ چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ پرتوزایی طبیعی درست است؟

الف) در تمام فرایندهای واپاشی، تعداد نوکلئون‌های هستهٔ دختر و هستهٔ مادر یکسان است.

ب) در واپاشی β^-، پروتونی در هستهٔ مادر ناپایدار به نوترون و پوزیترون تبدیل می‌شود.

پ) اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا درحالت برانگیخته قرار می‌گیرند.

ت) در واپاشی β^+، عدد اتمی هستهٔ دختر، یک واحد کم‌تر از عدد اتمی هستهٔ مادر است.

۱) الف و ب ۲) الف و پ

۳) ب و ت ۴) پ و ت

درس Box

۱) پرتوزایی طبیعی:

آزادشدن ذرات یا فوتون‌هایی پرانرژی بر اثر واپاشی طبیعی (خودبه‌خودی) هستهٔ ناپایدار یک اتم.

توجه: در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا، تعداد نوکلئون‌ها پایسته است. اما این جمله به معنای یکسان‌بودنِ نوکلئون‌های مادر و دختر نیست.

۲) انواع واپاشی

نام	ویژگی
α	در هسته‌های سنگین، هستهٔ مادر ۲ پروتون و ۲ نوترون از دست می‌دهد تا به هستهٔ دختر تبدیل شود.
β^-	متداول‌ترین واپاشی که در هستهٔ مادر یک نوترون به پروتون تبدیل می‌شود تا هستهٔ دختر تشکیل شود و یک الکترون تابش می‌شود.
β^+	پروتونی در هستهٔ مادر به نوترون تبدیل می‌شود تا هستهٔ دختر تشکیل شود و یک پوزیترون تابش می‌شود.
γ	اغلب هسته‌ها پس از واپاشی α و β در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با تابش γ به حالت پایه برمی‌گردند.

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی موارد:

الف) در واپاشی α تعداد نوکلئون‌های هستهٔ مادر و هستهٔ دختر، یکسان نیست، زیرا عدد جرمی ۴ واحد کاهش می‌یابد. (نادرست)

ب) در واپاشی β^-، نوترونی در هستهٔ مادر به پروتون تبدیل می‌شود و یک الکترون تابش می‌شود. (نادرست)

پ) درست

ت) در واپاشی β^+، پروتونی در هستهٔ مادر به نوترون تبدیل می‌شود و یک پوزیترون تابش می‌شود؛ یعنی تعداد پروتون (عدد اتمی) هستهٔ دختر یک واحد کم‌تر از هستهٔ مادر است. (درست)

۵۶ رادون $(^{۲۲۰}_{۸۶}Rn)$ ایزوتوپ ناپایداری است که با گسیل ۳ ذرهٔ α و ۲ ذرهٔ β^- دچار واپاشی می‌شود. دراین واکنش واپاشی، اختلاف عدد نوترونی و عدد اتمی هستهٔ دختر کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۴ ۳) ۵۲ ۴) ۵۴

درس Box

معادلات واپاشی α و β^- به صورت زیر هستند:

۱) معادلهٔ واپاشی α

هستهٔ مادر (X) با گسیل آلفا، ۲ نوترون و ۲ پروتون از دست می‌دهد و به هستهٔ دختر (Y) تبدیل می‌شود.

$$^{A}_{Z}X \rightarrow ^{A-۴}_{Z-۲}Y + ^{۴}_{۲}He$$

۲) معادلهٔ واپاشی β^-

نوترونی در هستهٔ مادر به پروتون و الکترون (β^-) تبدیل می‌شود.

$$^{A}_{Z}X \rightarrow ^{A}_{Z+۱}Y + ^{۰}_{-۱}e^-$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ این واپاشی به صورت زیر است:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow ^{A-۱۲}_{Z-۴}Y + ۳\left(^{۴}_{۲}He\right) + ۲\left(^{۰}_{-۱}e^-\right)$$

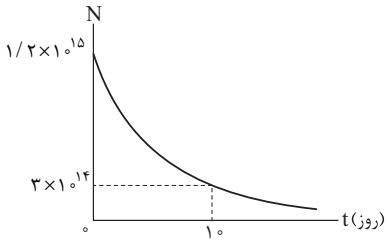
گام دوم: عدد اتمی هستهٔ دختر برابر است با: $Z' = Z - ۴ = ۸۶ - ۴ = ۸۲$

عدد جرمی هستهٔ دختر برابر است با: $A' = A - ۱۲ = ۲۲۰ - ۱۲ = ۲۰۸$

گام سوم: عدد نوترونی هستهٔ دختر برابر می‌شود با: $N' = A' - Z' = ۲۰۸ - ۸۲ = ۱۲۶$

پس اختلاف عدد نوترونی و عدد اتمی هستهٔ دختر برابر می‌شود با: $N' - Z' = ۱۲۶ - ۸۲ = ۴۴$

۵۷ نمودار تعداد هسته‌های مادر پرتوزا برای بیسموت ۲۱۰ برحسب زمان به شکل زیر است. پس از چند روز **۹۳/۷۵٪** از هسته‌های مادر یک نمونهٔ اولیه از این ماده واپاشی می‌کنند؟



۱) ۱۲/۵
۲) ۱۵
۳) ۱۷/۵
۴) ۲۰

Hint در سؤالات نیمه‌عمر کلاً اون چیزی که باقی مونده مهمه؛ پس ملاک محاسبات رو براساس اون چیزی بذارید که باقی مونده.

درس Box

۱) تعداد نیمه‌عمر (n):

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$$

n: تعداد نیمه‌عمرهای سپری‌شده

t: زمان کل

$T_{\frac{1}{2}}$: زمان یک نیمه‌عمر

۲) تعداد هسته‌های باقی‌مانده (N):

$$N = N_{\circ}(\frac{1}{2})^{n}$$

N: تعداد هسته‌های باقی‌مانده

$N_{\circ}$: تعداد هسته‌های اولیه

۳) جرم مادهٔ باقی‌مانده:

$$m = m_{\circ}(\frac{1}{2})^{n}$$

m: جرم مادهٔ باقی‌مانده

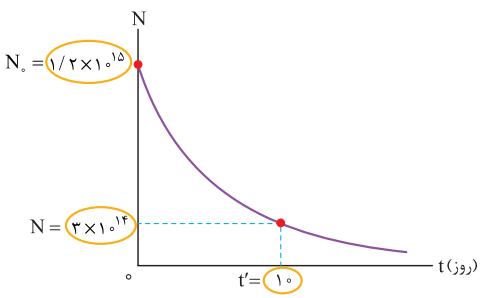
$m_{\circ}$: جرم مادهٔ اولیه

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** اگر مادهٔ اولیه را ۱۰۰ واحد فرض کنیم. جرم مادهٔ واپاشیده‌شده ۹۳/۷۵ واحد و جرم مادهٔ باقی‌مانده برابر ۶/۲۵ واحد است؛ پس می‌توان گفت:

$$m = m_{\circ}(\frac{1}{2})^{n} \Rightarrow ۶/۲۵ = ۱۰۰(\frac{1}{2})^{n} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{n} = \frac{۶/۲۵}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2})^{n} = \frac{1}{16} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{n} = (\frac{1}{2})^{۴} \Rightarrow n = ۴$$

گام دوم: با توجه به نمودار مقابل، تعداد نیمه‌عمر برابر می‌شود با:



$$N = N_{\circ}(\frac{1}{2})^{n'}$$

$$\Rightarrow ۳\times۱۰^{۱۴} = ۱/۲\times۱۰^{۱۵}(\frac{1}{2})^{n'}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^{n'} \Rightarrow n' = ۲$$

گام سوم: مدت‌زمان ۲ نیمه‌عمر، ۱۰ روز طول کشیده است؛ پس هر نیمه‌عمر برابر می‌شود با:

$$n' = \frac{t'}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow ۲ = \frac{۱۰}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = ۵\ day$$

گام چهارم: در گام اول متوجه شدیم که ۴ نیمه‌عمر برای واپاشی ۹۳ / ۷۵ درصد از اتم‌های بیسموت می‌گذرد:

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow ۴ = \frac{t}{۵} \Rightarrow t = ۲۰\ day$$

۵۸ یک نمونه از دو مادهٔ پرتوزای **A** و **B** تشکیل شده است. نیمه‌عمر مادهٔ **A**، ۴ روز و نیمه‌عمر مادهٔ **B**، ۵ روز است. پس از گذشت ۲۰ روز تعداد هسته‌های باقی‌ماندهٔ دو ماده، برابر می‌شود. چند روز دیگر بگذرد تا تعداد هسته‌های باقی‌ماندهٔ مادهٔ **B** برابر ۸۰ درصد تعداد هسته‌های باقی‌ماندهٔ نمونه شود؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰

۳) ۶۰ ۴) ۸۰

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تعداد نیمه‌عمرهای سپری‌شده پس از ۲۰ روز برای نمونه‌های A و B برابر می‌شود با:

$$n_A = \frac{۲۰}{۴} = ۵$$

$$n_B = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

گام دوم: تعداد هسته‌های باقی‌ماندهٔ A و B را پس از ۲۰ روز برابر قرار می‌دهیم تا رابطه‌ای بین تعداد هسته‌های اولیهٔ آن‌ها پیدا کنیم:

$$N_A = N_B \Rightarrow (N_۰)_A \times (\frac{۱}{۲})^{n_A} = (N_۰)_B \times (\frac{۱}{۲})^{n_B}$$

$$\Rightarrow (N_۰)_A \times (\frac{۱}{۲})^{۵} = (N_۰)_B \times (\frac{۱}{۲})^{۴} \Rightarrow (N_۰)_A = ۲(N_۰)_B$$

گام سوم: پس از طی‌شدن زمان t، نمونهٔ B ۸۰ درصد کل نمونه را تشکیل می‌دهد؛ پس مابقی آن یعنی ۲۰ درصد را نمونهٔ A تشکیل می‌دهد، پس تعداد هسته‌های باقی‌ماندهٔ B، ۴ برابر تعداد هسته‌های باقی‌ماندهٔ A است و داریم:

$$N'_B = ۴N'_A \Rightarrow (N_۰)_B \times (\frac{۱}{۲})^{n'_B} = ۴(N_۰)_A \times (\frac{۱}{۲})^{n'_A}$$

$$\xrightarrow{(N_۰)_A = ۲(N_۰)_B} (\frac{۱}{۲})^{n'_B} = ۸(\frac{۱}{۲})^{n'_A}$$

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{n'_A - n'_B} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow n'_A - n'_B = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{t}{۴} - \frac{t}{۵} = ۳ \Rightarrow t = ۶۰\ day$$

پس می‌توان گفت با گذشت ۴۰ روز دیگر، خواستهٔ سؤال، رخ می‌دهد.

۵۹ در راکتور شکافت هسته‌ای، میله‌های کنترل که برای تنظیم آهنگ واکنش شکافت به کار می‌روند، معمولاً از کدام ماده‌ها ساخته می‌شوند؟

۱) کادمیم و بور
۲) کادمیم و گرافیت
۳) آب سنگین و بور
۴) آب سنگین و گرافیت

درس Box

اجزای راکتور شکافت هسته‌ای به صورت جدول زیر هستند:

نام	کارکرد	نمونه
کُندساز	نوترون‌های آزادشده از شکافت $^{235}_{92}U$ انرژی جنبشی زیادی دارند (حدود ۲MeV) و به نوترون‌های تند معروف‌اند و احتمال جذب آن‌ها توسط $^{238}_{92}U$ بیشتر است و برای این‌که به نوترون‌های کند تبدیل شوند (انرژی حدود ۰/۰۴ eV) تا توسط $^{235}_{92}U$ جذب شوند، از کندساز استفاده می‌شود.	آب معمولی (H_2O) آب سنگین (D_2O) گرافیت (اتم‌های کربن)
سوخت هسته‌ای	هزاران میله با قطر حدود ۱ cm که حاوی ۳ درصد ایزوتوپ $^{235}_{92}U$ هستند.	ایزوتوپ اورانیم $^{235}_{92}U$
میله‌های کنترل	میله‌هایی که نوترون‌های اضافی را جذب می‌کنند تا واکنش زنجیری به صورت کنترل‌شده رخ دهد.	کادمیم بور
شارهٔ خنک‌ساز	برای انتقال گرمای راکتور به خارج استفاده می‌شود. در نوعی از راکتورها به نام آب تحت فشار (PWR)، آب در فشار بسیار بالا (حدود ۱۵۰ اتمسفر) سوخت را احاطه می‌کند و گرمای آن را می‌گیرد ولی به جوش نمی‌آید. سپس به محفظه‌ای کم‌فشار می‌رود و بخار می‌شود و توربین‌هایی را می‌چرخاند تا برق تولید شود.	آب

پاسخ خیلی تشریحی ✔ براساس درس‌باکس گزینهٔ (۱) درست است.

۶۰ در هر واکنش شکافت اورانیم ۲۳۵، حدود $200\ MeV$ انرژی آزاد می‌شود. برای تولید $100\ J$ انرژی، تقریباً چند نانوگرم اورانیم ۲۳۵ باید وارد فرایند شکافت شود؟ ($e = 1/6\times10^{-19}\ C$ و عدد آووگادرو $6/022\times10^{23}$ است.)

۱) ۱/۲ ۲) ۲/۴ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

درس Box

۱) برای تبدیل الکترون‌ولت (eV) به ژول داریم:

$$eV \xrightarrow{\times 1/6\times10^{-19}} J$$

۲) رابطهٔ تعداد اتم‌ها با جرم آن‌ها به صورت مقابل است:

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$$

m : جرم اتم‌ها

M : جرم مولی

N : تعداد اتم‌ها

N_A : عدد آووگادرو

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: انرژی آزادشده بر اثر شکافت هر اورانیم ۲۳۵ را به ژول تبدیل می‌کنیم:

$$E_1 = 200\times10^{6}\times1/6\times10^{-19} = 32\times10^{-12}\ J$$

گام دوم: اگر N عدد اورانیم شکافته شود، کل انرژی آزادشده برابر NE_1 می‌شود و N برابر می‌شود با:

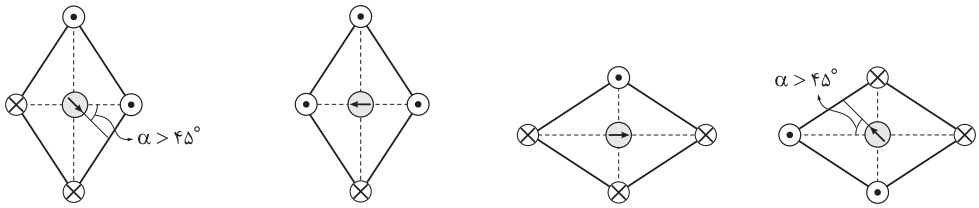
$$E = NE_1 \xrightarrow{E=100\ J} 100 = 32\times10^{-12}\times N \Rightarrow N = \frac{1}{32}\times10^{14}$$

گام سوم: جرم اورانیم شکافته‌شده برابر می‌شود با:

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M} \Rightarrow \frac{\frac{1}{32}\times10^{14}}{6/022\times10^{23}} = \frac{m}{235} \Rightarrow m \simeq 1/2\times10^{-9}\ g \simeq 1/2\ ng$$

۶۱ در هر یک از شکل‌های زیر، چهار سیم موازی حامل جریان I در چهار رأس یک لوزی قرار گرفته‌اند. سیم‌ها همگی بلند و عمود بر صفحه‌اند. در کدام‌یک از این شکل‌ها، جهت‌گیری عقربهٔ مغناطیسی در مرکز لوزی درست نشان داده شده است؟

مشاوره سؤالات مربوط به میدان مغناطیسی ناشی از سیم مستقیم محاسباتی نیست و فقط به صورت مفهومی حل می‌شوند. از آن‌ها غافل نشوید.



(الف) (ب) (پ) (ت)

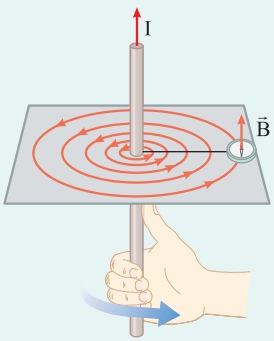
۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ

۳) پ ـ ت ۴) ب ـ ت

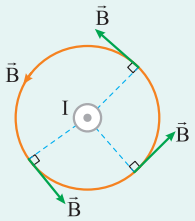
Hint جهت میدان مغناطیسی ناشی از هر یک از چهار سیم را در مرکز لوزی طبق قاعدهٔ دست راست به دست آورید و جهت میدان مغناطیسی خالص ناشی از آن‌ها را پیدا کنید و با جهت عقربهٔ مغناطیسی مقایسه کنید.

درس Box

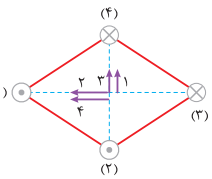
۱) سیم حامل جریان الکتریکی در اطراف خود میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند که جهت این میدان به کمک قانون دست راست مشخص می‌شود. به این صورت که اگر انگشت شست را در جهت میدان قرار دهیم، جهت خم‌شدن انگشتان دست راست، جهت میدان مغناطیسی اطراف سیم را نشان می‌دهد.



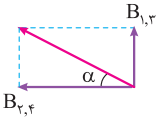
۲) اگر سیم حامل جریان به صفحه عمود باشد، بردار میدان مغناطیسی در هر نقطه از صفحه بر خطی که آن نقطه را به سیم وصل می‌کند عمود است.



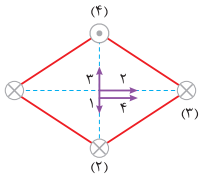
پاسخ خیلی تشریحی ✔ اندازهٔ جریان عبوری از سیم‌ها یکسان است. در هر شکل بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از هر سیم را در مرکز لوزی مشخص می‌کنیم.

الف) 

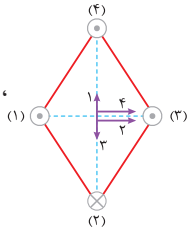
، چون فاصلهٔ دو سیم (۱) و (۳) از مرکز لوزی بیشتر است، میدان مغناطیسی ناشی از آن‌ها کوچک‌تر از میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۲) و (۴) است، پس زاویهٔ میدان مغناطیسی خالص با خط افق کوچک‌تر از ۴۵° خواهد بود. ✘



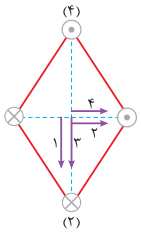
α < ۴۵°

ب) 

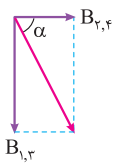
، دو سیم (۱) و (۳) از مرکز به یک فاصله هستند؛ در نتیجه میدان مغناطیسی آن‌ها برابر است و یکدیگر را خنثی می‌کنند، پس میدان مغناطیسی خالص به سمت راست خواهد بود. ✓

پ) 

، دو .سیم (۱) و (۳) از مرکز به یک فاصله هستند؛ در نتیجه میدان مغناطیسی آن‌ها برابر بوده و یکدیگر را خنثی می‌کنند، پس میدان مغناطیسی خالص به سمت راست خواهد بود. ✖

ت) 

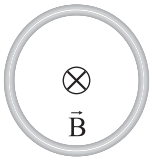
، فاصلهٔ دو سیم (۱) و (۳) از مرکز لوزی کم‌تر از فاصلهٔ سیم‌های (۲) و (۴) است، پس میدان مغناطیسی ناشی از آن‌ها در مرکز لوزی بزرگ‌تر بوده، در نتیجه میدان خالص در مرکز لوزی با سطح افقی زاویهٔ بزرگ‌تری از ۴۵° می‌سازد. ✓



$\alpha > ۴۵^\circ$

پس فقط موارد «ب» و «ت» درست رسم شده‌اند.

۶۲ در شکل زیر، میدان مغناطیسی حاصل از حلقهٔ حامل جریان I در مرکز حلقه، درون‌سو و اندازهٔ آن برابر $6\ G$ است. اگر قطر حلقه $4\ cm$ باشد، I چند آمپر و در چه جهتی است؟ $(\mu_0 = 12\times10^{-7}\ \frac{T.m}{A})$



۱) ۲۰ ـ ساعتگرد
۲) ۲۰ ـ پادساعتگرد
۳) ۴۰ ـ ساعتگرد
۴) ۴۰ ـ پادساعتگرد

Hint به کمک جهت میدان مغناطیسی داده‌شده و با استفاده از قانون دست راست، جهت جریان را مشخص کنید و سپس داده‌های سؤال را در رابطهٔ $B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$ جای‌گذاری کنید و اندازهٔ جریان را پیدا کنید.

درس Box

۱) بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز حلقهٔ حامل جریان از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

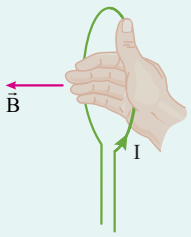
ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ $(\frac{T.m}{A})$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$

در این رابطه N تعداد حلقه‌های دایره‌ای‌شکل، I جریان عبوری از حلقه‌ها و R شعاع حلقه‌ها است.

۲) تعیین جهت خطوط میدان مغناطیسی در اطراف حلقه یا پیچه:

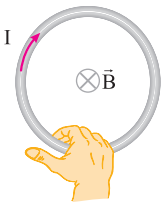
خطوط میدان مغناطیسی در اطراف حلقهٔ حامل جریان به کمک قانون دست راست مشخص می‌شود؛ به این صورت که انگشت شست دست راست را در جهت جریان قرار می‌دهیم، جهت خم‌شدن چهار انگشت، جهت میدان مغناطیسی خواهد بود.



۳) $1\ G = 10^{-4}\ T$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی حاصل از حلقه را مشخص می‌کنیم. مطابق شکل زیر جریان ساعتگرد است.



گام دوم: اندازهٔ جریان را محاسبه می‌کنیم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \Rightarrow 6\times\underbrace{10^{-4}}_{\text{تبدیل G به T}} = \frac{12\times10^{-7}\times1\times I}{2\times(\frac{4\times10^{-2}}{2})} \Rightarrow I = \frac{6\times10^{-4}\times4\times10^{-2}}{12\times10^{-7}} = 20\ A$$

۶۳ یکای فرعی شار مغناطیسی کدام است؟

۱) $\frac{kg.m}{A.s^3}$

۲) $\frac{kg.m^2}{A.s^3}$

۳) $\frac{kg.m}{A.s^2}$

۴) $\frac{kg.m^2}{A.s^2}$

Hint رابطهٔ شار مغناطیسی را بنویسید و پارامترهای آن را براساس روابط $F = ILB\sin\theta$ و $F = ma$ جای‌گذاری کنید تا به یکای فرعی شار مغناطیسی برسید.

درس Box

- نیروی وارد بر سیم حامل جریان از رابطهٔ $F = ILB\sin\theta$ محاسبه می‌شود؛ پس:

$$B = \frac{F}{IL\sin\theta}$$

- شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه در میدان مغناطیسی یکنواخت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$\Phi = B\ A\cos\theta$

B: میدان مغناطیسی (T) — A: مساحت سطح حلقه (m^2) — θ: زاویهٔ بین نیم‌خط عمود بر سطح و میدان مغناطیسی — Φ: شار عبوری (Wb)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ به کمک رابطهٔ $\Phi = BA\cos\theta$ و $F = ILB\sin\theta$ یکای Φ را به دست می‌آوریم: ($\sin\theta$ و $\cos\theta$ بدون یکا هستند بنابراین در نظر گرفته نمی‌شوند.)

$$\Phi = BA = (\frac{F}{IL})A \xrightarrow{F=ma} \Phi = \frac{ma}{IL}A \Rightarrow \text{یکای } \Phi = \frac{kg.\frac{m}{s^2}.m^2}{A.m}$$

$$\Rightarrow \text{یکای } \Phi = \frac{kg.m^2}{A.s^2}$$

۶۴ عملکرد چه تعداد از سامانه‌های زیر براساس پدیدهٔ القای الکترومغناطیسی است؟

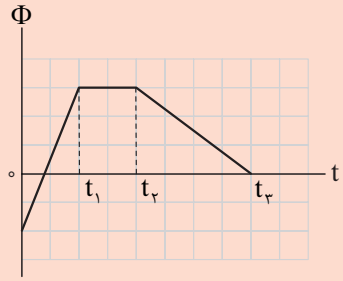
«تندی‌سنج دوچرخه‌های مسابقه‌ای ـ دستگاه کارت‌خوان ـ موتور الکتریکی ـ بادسنج»

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

مشاوره متن کتاب درسی، پرسش‌ها و فناوری و کاربرد را دقیق مطالعه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی به‌جز موتور الکتریکی، اساس کار سه مورد دیگر طبق متن کتاب درسی القای الکترومغناطیسی است. اساس کار موتور الکتریکی از طریق اثر متقابل بین میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی است.

۶۵ نمودار شار مغناطیسی عبوری از یک حلقهٔ رسانا برحسب زمان به شکل زیر است. اگر اندازهٔ جریان الکتریکی القاشده در حلقه، در بازه‌های زمانی صفر تا t_1 و t_2 تا t_3 به ترتیب برابر I_1 و I_2 باشد، $\frac{I_2}{I_1}$ برابر کدام است؟



۱) $\frac{3}{10}$

۲) $\frac{10}{3}$

۳) $\frac{3}{5}$

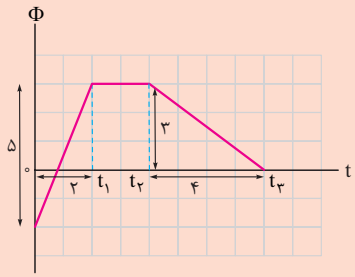
۴) $\frac{5}{3}$

Hint شیب نمودار $\Phi - t$ را در هر دو بازهٔ زمانی مورد نظر سؤال محاسبه کنید و در رابطهٔ $|I_{av}| = \frac{N}{R}\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$ جای‌گذاری کنید و نسبت $\frac{I_2}{I_1}$ را به دست آورید.

درس Box در نمودار $\Phi - t$ برای محاسبهٔ اندازهٔ جریان الکتریکی طبق رابطهٔ $|I_{av}| = \frac{N}{R}\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$، جریان متناسب با شیب نمودار است که شیب نمودار همان تغییرات شار در یک بازهٔ زمانی معین است؛ یعنی:

$$|I_{av}| = \frac{N}{R}\left|\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1}\right|$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** شیب نمودار $\Phi - t$ برابر با آهنگ تغییرات شار مغناطیسی است، پس:

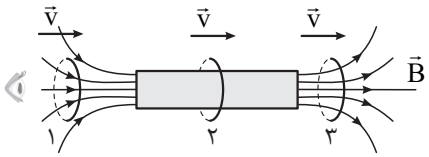


$$\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t_1} = \frac{5}{2} \quad , \quad \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t_2} = \frac{3}{4}$$

گام دوم: شیب نمودار گام اول را در رابطهٔ I_{av} جای‌گذاری می‌کنیم:

$$|I_{av}| = \frac{N}{R}\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{1}{R}(\frac{5}{2}) \\ I_2 = \frac{1}{R}(\frac{3}{4}) \end{cases} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{3}{4R}}{\frac{5}{2R}} = \frac{3}{10}$$

۶۶ حلقهٔ رسانایی به طرف یک آهنربای میله‌ای حرکت می‌کند. شکل زیر حلقه را در سه وضعیت ۱، ۲ و ۳ نسبت به آهنربا نشان می‌دهد. اگر جریان القاشده در حلقه در این سه وضعیت به ترتیب I_1، I_2 و I_3 باشد، از دید ناظر مشخص‌شده در شکل، کدام مورد درست است؟ (در وضعیت ۲ فاصلهٔ حلقه از دو انتهای آهنربای میله‌ای یکسان است.)



۱) I_1 و I_2 ساعتگرد و I_3 پادساعتگرد است.

۲) I_1 و I_2 پادساعتگرد و I_3 ساعتگرد است.

۳) I_3 ساعتگرد و $I_2 = 0$ است.

۴) I_1 ساعتگرد و $I_2 = 0$ است.

مشاوره این سؤال از مفاهیم و شکل کتاب درسی مطرح شده است.

Hint با توجه به قانون لنز در هرکدام از حالت‌ها، جهت جریان القایی را مشخص کنید و سپس گزینه‌ها را بررسی کنید.

درس Box

۱) قانون لنز بیان می‌کند که وقتی حلقه به آهنربا نزدیک می‌شود، جریان در جهتی در حلقه القا می‌شود که میدان مغناطیسی ناشی از آن با افزایش شار مغناطیسی مخالفت کند و با دورشدن حلقه از آهنربا، جریان در جهتی در حلقه القا می‌شود که میدان مغناطیسی ناشی از آن با کاهش شار مغناطیسی مخالفت می‌کند، یعنی:

وقتی حلقه به آهنربا نزدیک می‌شود: $B_{\text{اصلی}} \leftarrow \quad \leftarrow B_{\text{القایی}}$

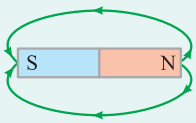
میدان القایی در جهت مخالف میدان اصلی ایجاد می‌شود تا با افزایش شار مخالفت کند.

وقتی حلقه از آهنربا دور می‌شود: $B_{\text{اصلی}} \rightarrow \quad \rightarrow B_{\text{القایی}}$

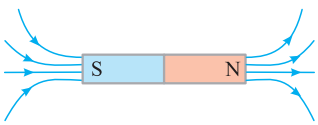
میدان القایی و میدان اصلی هم‌جهت می‌شوند تا با کاهش شار مخالفت کند.

درس‌باکس(۲) سؤال ۶۲ را مطالعه کنید.

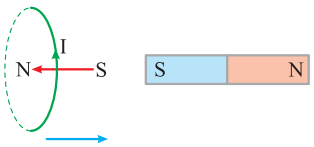
۲) خطوط میدان مغناطیسی در اطراف آهنربا از قطب N خارج‌شده و به قطب S وارد می‌شود.



پاسخ خیلی تشریحی ابتدا به کمک جهت میدان مغناطیسی رسم‌شده، قطب N و S را مشخص می‌کنیم و سپس در حالت اول جهت جریان را مشخص می‌کنیم:

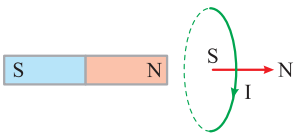


حالت اول: حلقه در حال نزدیک‌شدن به آهنربا است، پس باید در سمت راست حلقه قطب S و در سمت چپ آن قطب N ایجاد شود تا طبق قانون لنز با افزایش شار مخالفت کند. با مشخص‌شدن قطب‌های N و S در حلقه جهت میدان مغناطیسی مشخص می‌شود و به کمک قانون دست راست جهت جریان از دید ناظر پادساعتگرد می‌شود. (پادساعتگرد = I_1)



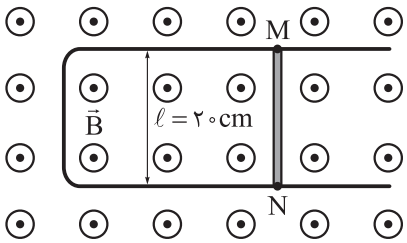
حالت دوم: چون تغییرات میدان و در نتیجه، تغییر شار مغناطیسی نداریم، جریان القایی صفر است. ($I_2 = 0$)

حالت سوم: حلقه در حال دورشدن است، پس طبق قانون لنز، باید در سمت چپ حلقه قطب مخالف با قطب N آهنربا ایجاد شود تا با دورشدن حلقه مخالفت کند، پس طبق قانون دست راست در حلقه چون میدان داخل حلقه به سمت راست است، جهت جریان از دید ناظر ساعتگرد است. (ساعتگرد = I_3)



با بررسی مطالب گفته‌شده در بالا و بررسی گزینه‌ها به جواب درست می‌رسیم.

۶۷ شکل زیر، رسانای U شکلی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به اندازهٔ $0/18\,T$ نشان می‌دهد. میدان $\vec{B}$ عمود بر صفحهٔ شکل و رو به بیرون است. میله‌ای فلزی MN به مقاومت الکتریکی $5\,\Omega$ و طول $\ell = 20\,cm$ بین دو بازوی رسانا قرار دارد. اگر میله در مدت $0/3\,s$ به اندازهٔ $25\,cm$ به سمت چپ جابه‌جا شود، جریان الکتریکی متوسط القاشده در آن چند میلی‌آمپر و در چه جهتی خواهد بود؟



۱) ۳۰ ـ از نقطهٔ M به نقطهٔ N

۲) ۳۰ ـ از نقطهٔ N به نقطهٔ M

۳) ۶ ـ از نقطهٔ M به نقطهٔ N

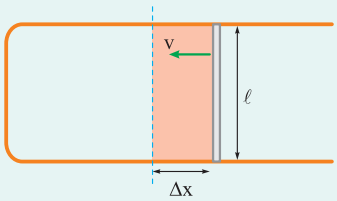
۴) ۶ ـ از نقطهٔ N به نقطهٔ M

مشاوره این تیپ سؤالات در کنکورهای ریاضی ۹۸ و تجربی ۹۶ مطرح شده است.

Hint ابتدا از رابطهٔ $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ و $I = \frac{B\ell v}{R}$، اندازهٔ جریان القایی را محاسبه کنید و سپس به کمک قانون لنز، جهت میدان القایی را مشخص کنید و در نهایت به کمک قانون دست راست در حلقه جهت میدان القایی را تعیین کنید.

درس Box

وقتی میله روی رسانای U شکل، مطابق شکل، با تندی v در مدت‌زمان Δt به اندازهٔ Δx جابه‌جا می‌شود، به دلیل این‌که مساحت حلقه تغییر می‌کند، باعث تغییر شار مغناطیسی و القای نیروی محرکهٔ القایی می‌شود.



$$\left.\begin{matrix}\Delta A = \ell \times \Delta x \\ \Delta x = v \times \Delta t\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta A = \ell v \Delta t$$

می‌دانیم جریان القایی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید که با جای‌گذاری رابطهٔ بالا به رابطهٔ جدیدی می‌رسیم:

$$|I_{av}| = \frac{1}{R}\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \xrightarrow[\Delta A = \ell v \Delta t]{\Delta\Phi = B\Delta A} |I_{av}| = \frac{1}{R}\left|\frac{B\ell v\Delta t}{\Delta t}\right| = \frac{B\ell v}{R} \Rightarrow |I_{av}| = \frac{B\,\ell\,v}{R}$$

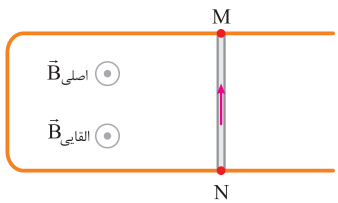
$|I_{av}|$: جریان القایی متوسط (A)؛ B: میدان مغناطیسی (T)؛ ℓ: طول میله (m)؛ v: تندی (m/s)؛ R: مقاومت Ω

درس‌باکس (۱) سؤال ۶۶ را مطالعه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق رابطه‌ای که در درس‌باکس نوشتیم جریان القایی را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}I = \frac{B\ell v}{R} \\ v = \frac{\Delta x}{\Delta t}\end{matrix}\right\} \Rightarrow I = \frac{0/18 \times 20 \times 10^{-2} \times 25 \times 10^{-2}}{5 \times 0/3} = 6 \times 10^{-3}\,A = 6\,mA$$



گام دوم: به کمک قانون لنز، جهت جریان القایی را مشخص می‌کنیم؛ با حرکت میله به سمت چپ، مساحت حلقه کاهش می‌یابد، در نتیجه باعث کاهش شار مغناطیسی می‌شود. طبق قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی القایی باید هم‌جهت با میدان اصلی باشد تا با کاهش میدان مخالفت کند؛ پس میدان مغناطیسی القایی هم برون‌سو است، پس جهت جریان القایی طبق قانون دست راست پادساعتگرد تعیین می‌شود، یعنی از نقطهٔ N به نقطهٔ M.

۶۸ سطح حلقهٔ رسانایی با مساحت $200\,cm^2$ و مقاومت الکتریکی $0/4\,\Omega$ عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. آهنگ تغییر میدان مغناطیسی چند گاوس بر ثانیه باشد تا جریان الکتریکی $80\,\mu A$ در حلقه القا شود؟

۱) ۱۶ ۲) ۱/۶ ۳) ۰/۴ ۴) ۴

مشاوره این سؤال مشابه کنکور ریاضی نوبت دوم خارج ۱۴۰۲ است.

Hint طبق رابطهٔ $|I_{av}| = \left|\frac{N}{R} A \cos\theta \frac{\Delta B}{\Delta t}\right|$، با جای‌گذاری داده‌ها، آهنگ تغییر میدان مغناطیسی را محاسبه کنید.

درس Box در حالتی که اندازهٔ میدان مغناطیسی با زمان تغییر می‌کند، اندازهٔ جریان القایی طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|I_{av}| = \left|\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{N}{R} A \cos\theta \left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)\right|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ چون سطح حلقه بر میدان مغناطیسی عمود است، زاویهٔ نیم‌خط عمود به سطح حلقه با میدان موازی خواهد بود $(\theta = 0^\circ)$؛ پس رابطهٔ بیان‌شده در درس‌باکس را می‌توانیم به صورت زیر نوشته و داده‌ها را جای‌گذاری کنیم:

$$|I_{av}| = \left|\frac{N}{R} A \left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)\right| \Rightarrow 80\times10^{-6} = \frac{1}{0/4}\times200\times10^{-4}\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{80\times10^{-6}\times0/4}{200\times10^{-4}} = 0/16\times10^{-2}\times\underbrace{10^{+4}}_{\text{تبدیل T به G}} = 16\ G/s$$

۶۹ سطح حلقه‌های پیچه‌ای به مساحت $50cm^2$ که دارای ۱۰۰۰ حلقه است و با میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $0/04T$ زاویهٔ 53° می‌سازد، در مدت $0/01s$ می‌چرخد و عمود بر میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد. در این مدت بزرگی نیروی محرکهٔ القایی متوسط در پیچه چند ولت است؟ $(\cos 53^\circ = 0/6)$

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۸ ۳) ۴ ۴) ۸

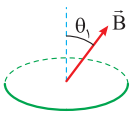
مشاوره توی تست‌هایی که تغییر زاویه باعث تغییر شار مغناطیسی شده، حواستون باشه باید زاویهٔ بین نیم‌خط عمود بر صفحه و میدان مغناطیسی را حساب کنید.

Hint بزرگی نیروی محرکهٔ القایی را از رابطهٔ $|\varepsilon_{av}| = \left|NAB\left(\frac{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{\Delta t}\right)\right|$ محاسبه کنید.

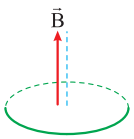
درس Box طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، با تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه، نیروی محرکه در حلقه القا می‌شود. اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$|\varepsilon_{av}| = \left|N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \Rightarrow \begin{cases} |\varepsilon_{av}| = \left|NAB\left(\frac{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{\Delta t}\right)\right| \\ |\varepsilon_{av}| = \left|NA\cos\theta\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)\right| \\ |\varepsilon_{av}| = \left|NB\cos\theta\left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)\right| \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ زاویهٔ نیم‌خط عمود بر سطح با میدان مغناطیسی مد نظر است؛ در حالت اول سطح حلقه با میدان مغناطیسی زاویهٔ 53° می‌سازد، پس مطابق شکل، زاویهٔ نیم‌خط عمود بر سطح و میدان برابر با $\theta_1 = 90 - 53 = 37^\circ$ است.



در حالت دوم، سطح حلقه عمود بر میدان قرار گرفته، پس $\theta_2 = 0^\circ$ است.

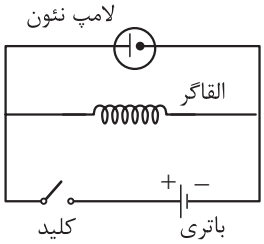


داریم:

$$|\varepsilon_{av}| = \left|NAB\frac{(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}{\Delta t}\right| = |1000\times 50\times 10^{-4}\times 0/04\times \frac{(\overset{1}{\cancel{\cos 0}} - \overset{0/8}{\cancel{\cos 37}})}{0/01}|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_{av}| = 10^3\times 50\times 10^{-4}\times 0/04\times \frac{0/2}{10^{-2}} = 4\,V$$

۷۰ در مدار شکل زیر ابتدا کلید باز است. کلید را در لحظهٔ t_1 می‌بندیم و در لحظهٔ t_2 باز می‌کنیم. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟ (مقاومت الکتریکی القاگر ناچیز است.)



۱) لامپ از لحظهٔ t_1 تا لحظهٔ t_2 به طور پیوسته روشن است.

۲) لامپ فقط مدت کوتاهی پس از لحظهٔ t_1 روشن است.

۳) لامپ فقط مدت کوتاهی پس از لحظهٔ t_2 روشن است.

۴) لامپ فقط مدت کوتاهی پس از هر دو لحظهٔ t_1 و t_2 روشن است.

Hint

در مدار با قطع و وصل کلید، تغییرات جریان عبوری از القاگر را بررسی کنید و طبق قانون لنز، جهت نیروی محرکهٔ القایی که القاگر ایجاد می‌کند را تعیین کنید.

درس Box

اگر در یک مدار، سیم‌لوله (القاگر) وجود داشته باشد، با تغییر جریان عبوری از القاگر، القاگر مانند یک مولد رفتار می‌کند و نیروی محرکهٔ القایی در مدار ایجاد می‌کند:

- اگر جریان عبوری از القاگر در حال افزایش باشد ← نیروی محرکهٔ القایی ناشی از القاگر در خلاف جهت نیروی محرکهٔ اصلی خواهد بود تا با ایجاد جریان خلاف جهت جریان اصلی با افزایش جریان مخالفت کند.
- اگر جریان عبوری از القاگر در حال کاهش باشد ← القاگر با ایجاد نیروی محرکهٔ القایی هم‌جهت با نیروی محرکهٔ مدار باعث افزایش جریان می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در حالت اول کلید باز است و جریان عبوری در مدار صفر است. پس تا لحظهٔ t_1 جریان عبوری در مدار صفر است. در لحظهٔ t_1 با وصل کلید، جریان در مدار به طور آنی برقرار می‌شود. در این حالت القاگر مانند یک باتری عمل می‌کند و نیروی محرکهٔ القایی در خلاف جهت مولد اصلی در مدار برقرار می‌کند تا از افزایش جریان جلوگیری کند. در نتیجه از شاخه‌ای که القاگر در آن وجود دارد جریان عبور نمی‌کند و تمام جریان از شاخهٔ لامپ می‌گذرد و لامپ روشن می‌شود و پس از گذر زمان چون جریان در مدار ثابت شده و القاگر مانند یک سیم بدون مقاومت رفتار می‌کند، شاخهٔ لامپ اتصال کوتاه‌شده و تمام جریان از القاگر عبور می‌کند، پس لامپ خاموش می‌شود.

در حالت دوم وقتی کلید را باز می‌کنیم در لحظهٔ t_2، به طور آنی جریان صفر می‌شود و القاگر به عنوان یک مولد هم‌جهت با مولد اصلی، نیروی محرکه ایجاد می‌کند و باعث روشن‌شدن لامپ می‌شود و پس از مدتی که جریان ثابت و صفر شود، القاگر مثل یک سیم بدون مقاومت رفتار کرده و لامپ خاموش می‌شود. طبق گفته‌ها فقط گزینهٔ (۴) درست است.

۷۱ مساحت سطح حلقه‌های یک سیم‌لولهٔ آرمانی به طول $۲۰cm$ برابر $۵cm^۲$ است. اگر با عبور جریان از سیم‌لوله، اندازهٔ میدان مغناطیسی در داخل آن برابر $۳۰G$ شود، انرژی ذخیره‌شده در سیم‌لوله در این حالت چند میلی‌ژول است؟ $(\mu_۰ = ۱۲/۵\times۱۰^{-۷}\ \frac{T.m}{A})$

۱) $۷/۲$ ۲) $۳/۶$

۳) $۰/۷۲$ ۴) $۰/۳۶$

مشاوره این سؤال مشابه کنکور ریاضی خارج ۹۴ است.

Hint

ابتدا از رابطهٔ میدان مغناطیسی سیم‌لوله، جریان عبوری را برحسب N به دست آورید، سپس ضریب القاوری را نیز برحسب N محاسبه کنید و در نهایت از رابطهٔ انرژی ذخیره‌شده $(U=\frac{۱}{۲}LI^۲)$، L و I را از رابطه‌های قبلی جای‌گذاری کنید تا انرژی ذخیره‌شده به دست آید.

درس Box

۱) میدان مغناطیسی داخل سیم‌لوله در نقطه‌های دور از لبه‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$B=\frac{\mu_۰ NI}{\ell}$

B: میدان مغناطیسی (T)، $\mu_۰$: ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ $(\frac{T.m}{A})$، N: تعداد حلقه‌ها، I: جریان عبوری (A)، ℓ: طول سیم‌لوله (m)

۲) القاگر دارای یک ضریب القاوری است که به ویژگی‌های فیزیکی آن مثل تعداد دور، سطح مقطع و جنس هستهٔ داخل آن بستگی دارد و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$L=\frac{\mu_۰ N^۲ A}{\ell}$

L: ضریب‌القاوری (H)، $\mu_۰$: ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ $(\frac{T.m}{A})$، N: تعداد حلقه‌ها، A: سطح مقطع $(m^۲)$، ℓ: طول القاگر (m)

۳) انرژی القاگر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$U=\frac{۱}{۲}LI^۲$

U: انرژی (J)، L: ضریب‌القاوری (H)، I: جریان (A)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به رابطهٔ $B=\frac{\mu_۰ NI}{\ell}$ جریان را برحسب N به دست می‌آوریم:

$$B=\frac{\mu_۰ NI}{\ell}\Rightarrow ۳۰\times۱۰^{-۴}=\frac{۱۲/۵\times۱۰^{-۷}\times N\times I}{۲۰\times۱۰^{-۲}}\Rightarrow I=\frac{۳۰\times۱۰^{-۴}\times۲۰\times۱۰^{-۲}}{۱۲/۵\times۱۰^{-۷}\times N}=\frac{۴۸۰}{N}\quad (I)$$

گام دوم: ضریب القاوری را برحسب N محاسبه می‌کنیم:

$$L=\frac{\mu_۰ N^۲ A}{\ell}=\frac{۱۲/۵\times۱۰^{-۷}\times N^۲\times۵\times۱۰^{-۴}}{۲۰\times۱۰^{-۲}}=\frac{۱۲/۵\times N^۲\times۱۰^{-۹}}{۴}\quad (II)$$

گام سوم: در رابطهٔ انرژی القاگر، L و I را از روابط (I) و (II) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$U=\frac{۱}{۲}LI^۲\xrightarrow{(I),(II)}U=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۲/۵\times N^۲\times۱۰^{-۹}}{۴}\times(\frac{۴۸۰}{N})^۲$$

$$\Rightarrow U=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۲/۵\times۱۰^{-۹}}{۴}\times(۴۸۰)^۲=۳۶\times۱۰^{-۵}J=۰/۳۶\,mJ$$

۷۲ انرژی ذخیره‌شده در القاگر حامل جریان برابر U است. در این حالت، اگر جریان عبوری از این القاگر $2A$ افزایش یابد، $56mJ$ انرژی وارد آن می‌شود و اگر جریان عبوری از آن $1A$ کاهش یابد، $22mJ$ انرژی از آن خارج می‌شود. U برابر چند میلی‌ژول است؟

۱) ۴۸ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۱۰۸

Hint یک‌بار رابطهٔ انرژی را برای افزایش $2A$ جریان و یک بار برای کاهش $1A$ جریان بنویسید و سپس ضریب القاوری را در هر دو حالت برحسب جریان I نوشته و از برابری روابط، جریان و ضریب القاوری را به دست آورید.

درس Box درس‌باکس (۳) سؤال ۷۱ را مطالعه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** انرژی ذخیره‌شده در القاگر از رابطهٔ $U=\frac{1}{2}LI^2$ محاسبه می‌شود. طبق صورت سؤال، جریان $2A$ و انرژی $56mJ$ افزایش یافته و در حالت بعد جریان $1A$ و انرژی $22mJ$ کاهش یافته، پس:

$$U+56\times10^{-3}=\frac{1}{2}L(I+2)^2\Rightarrow U+56\times10^{-3}=\frac{1}{2}L(I^2+4I+4)=\underbrace{\frac{1}{2}LI^2}_{U}+2LI+2L$$

$$\Rightarrow 56\times10^{-3}=2LI+2L\Rightarrow L=\frac{56\times10^{-3}}{2I+2}\quad (I)$$

$$U-22\times10^{-3}=\frac{1}{2}L(I-1)^2=\frac{1}{2}L(I^2+1-2I)=\underbrace{\frac{1}{2}LI^2}_{U}+\frac{1}{2}L-LI$$

$$\Rightarrow -22\times10^{-3}=\frac{1}{2}L-LI\Rightarrow L=\frac{-22\times10^{-3}}{\frac{1}{2}-I}\quad (II)$$

گام دوم: از برابری روابط (I) و (II) می‌توانیم جریان را به دست آوریم:

$$\frac{56\times10^{-3}}{2I+2}=\frac{-22\times10^{-3}}{\frac{1}{2}-I}\Rightarrow 14-28I=-22I-22\Rightarrow 36=6I\Rightarrow I=6A$$

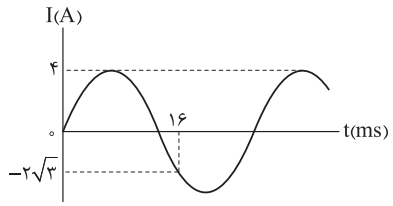
گام سوم: با جای‌گذاری جریان به‌دست‌آمده در یکی از روابط (I) یا (II)، L را محاسبه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(II)} L=\frac{-22\times10^{-3}}{\frac{1}{2}-6}=\frac{-22\times10^{-3}}{-5/5}=4\times10^{-3}H=4\ mH$$

گام آخر: L و I به‌دست‌آمده را در رابطهٔ انرژی ذخیره‌شده در القاگر جای‌گذاری می‌کنیم تا انرژی برحسب میلی‌ژول به دست آید:

$$U=\frac{1}{2}\times4\times6^2=72mJ$$

۷۳ نمودار جریان الکتریکی حاصل از یک مولد جریان متناوب که از یک رسانای اُهمی عبور می‌کند، برحسب زمان به شکل زیر است. در چه لحظه‌ای پس از لحظهٔ $t = ۰$ برحسب میلی‌ثانیه، توان مصرفی این رسانا برای دومین مرتبه، برابر با نصف توان مصرفی بیشینهٔ آن می‌شود؟



۱) ۳

۲) ۶

۳) ۹

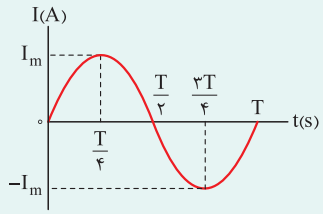
۴) ۱۸

Hint

ابتدا از مقایسهٔ توان مصرفی بیشینه و توان مصرفی رسانا، جریان عبوری (I) را به دست آورید و با نوشتن معادلهٔ جریان متناوب برحسب زمان، دورهٔ تناوب را به دست آورید و در نهایت با داشتن معادلهٔ جریان و دورهٔ تناوب، دومین مرتبه‌ای که جریان برابر I می‌شود را به دست آورید.

درس Box

جریان متناوب جریانی است که اندازه و علامت آن به صورت تابع سینوسی با زمان تغییر می‌کند که نمودار و معادلهٔ جریان برحسب زمان به صورت زیر است:



$$I = I_m \sin(\frac{۲\pi}{T}t)$$

I_m: جریان بیشینه، T: دوره(s)

توان مصرفی رسانا برابر است با:

$$P = RI^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

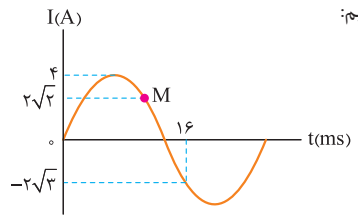
گام اول: سؤال لحظه‌ای را از ما خواسته که برای دومین مرتبه، توان مصرفی، نصف توان مصرفی بیشینه شده است، پس:

$$P_{\text{مصرفی}} = \frac{P_{max}}{۲} \Rightarrow \frac{P_{\text{مصرفی}}}{P_{max}} = \frac{۱}{۲}$$

روابط P_{max} و $P_{\text{مصرفی}}$ را می‌نویسیم تا مقدار I به دست آید:

$$\frac{P_{\text{مصرفی}}}{P_{max}} = \frac{RI^۲}{RI_{max}^۲} \Rightarrow \frac{I^۲}{(۴)^۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow I = ۲\sqrt{۲}\ A$$

گام دوم: ما باید طبق نمودار، لحظه‌ای را پیدا کنیم که جریان برای دومین مرتبه برابر $۲\sqrt{۲}A$ می‌شود، یعنی نقطهٔ M. ابتدا به کمک نمودار و با نوشتن معادلهٔ جریان برحسب زمان، دورهٔ تناوب را محاسبه می‌کنیم:



$$I = I_m \sin(\frac{۲\pi}{T}t) \Rightarrow -۲\sqrt{۳} = ۴\sin(\frac{۲\pi}{T} \times \overbrace{۱۶ \times ۱۰^{-۳}}^{\text{تبدیل ms به s}}) = ۴\sin(\frac{۳۲\pi \times ۱۰^{-۳}}{T})$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin(\frac{۳۲\pi \times ۱۰^{-۳}}{T})$$

باید زاویه‌ای را پیدا کنیم که سینوس آن برابر $\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$ می‌شود و می‌دانیم این زاویه در ربع سوم قرار دارد:

$$\frac{۳۲\pi \times ۱۰^{-۳}}{T} = \pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow T = \frac{۳۲ \times ۱۰^{-۳}}{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow T = ۲۴ \times ۱۰^{-۳}\ s$$

حالا معادلهٔ جریان ـ زمان را می‌نویسیم:

$$I = ۴\sin(\frac{۲\pi}{۲۴\times۱۰^{-۳}}t) = ۴\sin(\frac{۱۰^{۳}\pi}{۱۲}t)$$

گام سوم: برای دومین مرتبه جریان برابر $۲\sqrt{۲}\ A$ شده است که با توجه به شکل، این زاویه در ربع دوم قرار دارد:

$$۲\sqrt{۲} = ۴\sin(\frac{۱۰^{۳}\pi}{۱۲}t) \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin(\frac{۱۰^{۳}\pi}{۱۲}t) \xrightarrow{\text{در ربع دوم}} \frac{۱۰^{۳}\pi}{۱۲}t = \pi - \frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow t = ۹\times۱۰^{-۳}s = ۹\,ms$$

روش دوم: با توجه به شکل، در لحظه‌ای که در نمودار مشخص شده $(t = ۱۶\,ms)$، $I = \frac{\sqrt{۳}}{۲}I_{max}$ است و در ربع سوم قرار دارد، پس $\theta_۱ = \frac{۴\pi}{۳}$ است.

در لحظه‌ای که مد نظر ما است، جریان برابر است با:

$$\frac{P_{\text{مصرفی}}}{P_{max}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{RI^{۲}}{RI_{max}^{۲}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{۲}}{۲}I_{max}$$

که در ربع دوم است؛ یعنی: $\theta_۲ = \frac{۳\pi}{۴}$

حالا خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم؛ از نسبت $\frac{\theta_۱}{\theta_۲}$ داریم:

$$\frac{\theta_۱}{\theta_۲} = \frac{\frac{۲\pi}{T}t_۱}{\frac{۲\pi}{T}t_۲} = \frac{t_۱}{t_۲} \Rightarrow \frac{\frac{۴\pi}{۳}}{\frac{۳\pi}{۴}} = \frac{۱۶}{t_۲} \Rightarrow t_۲ = ۹\,ms$$

۷۴ معادلهٔ جریان القاشده در پیچهٔ یک مولد جریان متناوب برحسب زمان در SI به صورت $I = 45\sin(50\pi t)$ است. پیچهٔ این مولد از ۵۰۰ حلقهٔ دایره‌ای‌شکل به شعاع ۲۰cm تشکیل شده و مقاومت الکتریکی پیچه ۲۰Ω است. اگر این پیچه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۰/۱T قرار داشته باشد، در بازهٔ زمانی $t_1 = \frac{1}{150}s$ تا $t_2 = \frac{1}{100}s$ بار الکتریکی القاشده در پیچه چند کولن است؟ $(\pi = 3)$

۱) ۱۵ ۲) ۰/۱۵

۳) ۴۵ ۴) ۰/۴۵

Hint

ابتدا به کمک معادلهٔ جریان متناوب برحسب زمان، در دو لحظهٔ t_1 و t_2، زاویهٔ θ را به دست آورید، سپس با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ $\Delta q = \frac{NBA}{R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$، بار الکتریکی القاشده در پیچه را محاسبه کنید.

درس Box

برای محاسبهٔ بار الکتریکی القاشده در مدار کافی است در فرمول $|I_{av}| = \left|\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$ به جای I_{av}، برحسب Δq، $(I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t})$ رابطه را بازنویسی کنیم:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \left|\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \Rightarrow \Delta q = \left|\frac{N}{R}\Delta\Phi\right|$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق معادلهٔ جریان متناوب برحسب زمان، θ برابر $50\pi t$ است؛ پس:

$$\theta = 50\pi t \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 50\pi \times \frac{1}{150} = \frac{\pi}{3} \\ \theta_2 = 50\pi \times \frac{1}{100} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

گام دوم: با کمک رابطهٔ $\Delta q = \left|\frac{N}{R}\Delta\Phi\right|$ و با جای‌گذاری داده‌ها، بار الکتریکی القاشده را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta q = \left|\frac{N}{R}BA(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\right| = \left|\frac{500\times 0/1\times 3\times(20\times 10^{-2})^2\times(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3})}{20}\right| = \frac{500\times 0/1\times 3\times 4\times 10^{-2}\times\frac{1}{2}}{20}$$

$$\Rightarrow \Delta q = 15\times 10^{-2}\,C$$

۷۵ کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟

مشاوره در مبحث مبدل‌ها، متن کتاب درسی را دقیق مطالعه کنید.

۱) در مولد صنعتی جریان متناوب، پیچه ساکن است و آهنربای الکتریکی در آن می‌چرخد.

۲) یکی از مزیت‌های مهم توزیع توان الکتریکی dc بر ac آن است که افزایش و کاهش ولتاژ dc، بسیار آسان‌تر از ac است.

۳) برای انتقال توان الکتریکی در فاصله‌های دور، تا جایی که امکان دارد باید از ولتاژهای بالا و جریان‌های کم استفاده شود.

۴) با انتقال توان الکتریکی با ولتاژ بالا، می‌توان در مصرف مواد اولیهٔ ساخت سیم خطوط انتقال، صرفه‌جویی کرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق متن کتاب درسی عبارت گزینهٔ (۲) نادرست است.

۷۶ کدام موارد از مطالب زیر درست هستند؟

الف) دستاورد تولید اوره پس از سنتز آمونیاک صورت گرفت.

ب) در هوای آلوده علاوه بر گازهای هواکره، می‌توان اکسیدی از نیتروژن به رنگ قهوه‌ای یافت که از آرایش هشت‌تایی پیروی می‌کند.

پ) در بررسی غلظت آلاینده‌های هوا در یک کلانشهر، وقتی غلظت گاز NO در حال کاهش باشد، غلظت گازهای NO_2 و O_3 رو به افزایش می‌گذارد.

ت) در ساعات مختلف شبانه‌روز، حداکثر غلظت گاز اوزون از گاز NO_2 در هوای یک شهر آلوده، کم‌تر است.

ث) در دمای اتاق، گازهای N_2 و O_2، با یکدیگر واکنش داده و باعث افزایش غلظت گاز نیتروژن مونوکسید می‌شوند.

۱) الف ـ ب ـ ت　　۲) الف ـ پ ـ ت

۳) ب ـ پ ـ ث　　۴) ت ـ ث

درس Box

آلاینده‌های هوا:

متأسفانه! امروزه با رشد دانش و فناوری، گسترش صنایع گوناگون و با رفتارهای نادرست، دسترسی به هوای پاک محدودتر شده است، به طوری که داشتن هوای پاک، یکی از چالش‌های مهم در جهان امروز است.

هوای خشک و پاک مخلوطی از گازهای گوناگون است که به طور یکنواخت در هواکره پخش شده‌اند در حالی که هوای آلوده، حاوی گازهای مختلفی مانند SO_2، O_3، NO_2، CO، NO و C_xH_y و ذره‌های معلق و مواد آلی فرّار نیز است. هوای آلوده، به دلیل وجود آلاینده‌های مختلف، بوی بدی دارد، چهرهٔ شهر را زشت می‌کند، فرسودگی ساختمان‌ها و پوسیدگی خودروها را سرعت بخشیده و باعث ایجاد و تشدید بیماری‌های تنفسی از جمله برونشیت، آسم، سرطان ریه و حتی مرگ می‌شود.

خبرها حاکی از آن است! که آلاینده‌های C_xH_y، NO، SO_2 و CO در خروجی اگزوز خودروها وجود دارند.

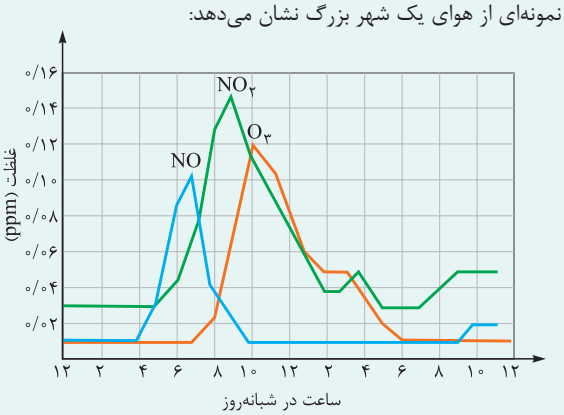
آلاینده	حاصل پیدایش	معادلهٔ شیمیایی مربوطه
C_xH_y	نامرغوب‌بودن سوخت و یا نبود اکسیژن کافی	
NO	واکنش گازهای نیتروژن و اکسیژن در دمای بالا درون موتور خودروها	$N_2(g)+O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$
SO_2	سوختن گوگرد موجود در سوخت‌های فسیلی	$S(s)+O_2(g) \rightarrow SO_2(g)$
CO	سوختن ناقص هیدروکربن‌های موجود در سوخت	$C_xH_y+(\frac{2x+y}{4})O_2(g) \rightarrow xCO(g)+\frac{y}{2}H_2O(g)$

نکته

مقایسهٔ مقدار آلاینده‌های CO، C_xH_y و NO در خروجی اگزوز خودروها به صورت زیر است:

$CO > C_xH_y > NO$: مقدار آلایندهٔ خروجی از اگزوز خودروها (برحسب گرم)

نمودار زیر غلظت آلاینده‌های NO، NO_2 و O_3 را در نمونه‌ای از هوای یک شهر بزرگ نشان می‌دهد:



NO را که قبلاً فهمیدیم از کجا میاد! بریم سراغ معادلهٔ پیدایش NO_2 و O_3:

معادلهٔ پیدایش NO_2: $2NO(g)+O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)$
(قهوه‌ای رنگ)

نکته رنگ قهوه‌ای هوای آلوده *زیر سر همین* NO_2 *هستش!* لایهٔ قهوه‌ای روشن در زمستان در سطح شهرهای بزرگ جهان و کشور *خودمون که بیشتر دیده می‌شه!*

$$NO_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{نور خورشید}} NO(g) + O_3(g)$$ معادلهٔ پیدایش O_3 (اوزون تروپوسفری)

خواستون باشه که اوزون با این‌که جزء آلاینده‌های هواست، اما جزء آلاینده‌های خروجی از اگزوز خودروها به شمار نمی‌آید، زیرا در هواکره و از واکنش گازهای نیتروژن دی‌اکسید و اکسیژن در حضور نور خورشید تولید می‌شود.

و اما نکات مهم نمودار:

الف) غلظت این آلاینده‌ها بین ساعت ۷ تا ۱۰ صبح به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

ب) از ساعت ۱۰ صبح به بعد غلظت NO ثابت و غلظت NO_2 و O_3 به طور کلی کاهش می‌یابد.

پ) مقایسهٔ بیشترین مقدار این آلاینده‌ها (ماکزیمم نمودار) در یک شبانه‌روز به صورت $NO_2 > O_3 > NO$ است.

ت) روند تغییر غلظت O_3 تقریباً شبیه NO_2 است، با این تفاوت که غلظت O_3 نسبت به غلظت NO_2 با چند ساعت تأخیر افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

آلاینده	ساعتی که مقدار آن به بیشترین حد خود می‌رسد.
NO	۷ صبح
NO_2	۹ صبح
O_3	۱۰ صبح

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد «الف»، «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی همهٔ موارد:

الف) چند نمونه فراوردهٔ حاصل از فناوری‌های شیمیایی در گذر زمان:

$$\text{انقلاب صنعتی} \rightarrow \underbrace{(NH_3)\text{تهیهٔ آمونیاک} \rightarrow (CO(NH_2)_2)\text{تهیهٔ اوره}}_{\text{کودهای شیمیایی (تأمین غذای جهان)}} \rightarrow \underbrace{(C_{20}H_{30}O)\text{A تهیهٔ ویتامین}}_{\text{افزایش مراقبت بهداشتی}} \rightarrow \underbrace{\text{ساخت مواد عایق}}_{\text{پوشش‌های دوستدار محیط‌زیست}}$$

ب) در بین آلاینده‌های هواکره، گاز NO_2 به رنگ قهوه‌ای بوده و طبق ساختار لوویس آن ($:\ddot{O}-\overset{\cdot}{N}=\ddot{O}:$) اتم نیتروژن از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نمی‌کند.

نکته در صورتی که مورد «الف» درست باشد، پس گزینه‌های (۱) یا (۲) باید جواب باشد و *بالا* چون مورد «ب» غلط است، پس جواب حتماً گزینهٔ (۲) می‌شود.

پ و ت) طبق نمودار موجود در *درس‌باکس* کاملاً درست است!

ث) گازهای N_2 و O_2 در دماهای بالا یا در مکان‌هایی که رعد و برق انجام می‌شود با یکدیگر واکنش می‌دهند.

۷۷ در واکنش فرضی $2A + Y \rightarrow D$، حداقل انرژی لازم برای انجام واکنش برابر ۱۵۰ کیلوژول است. در صورت مصرف کامل ۰/۵ مول Y در واکنش، ۱۰۰ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. بر این اساس چه تعداد از موارد زیر درست هستند؟

- واکنش گرماده بوده و در نمودار «انرژی ـ پیشرفت» آن، اختلاف سطح انرژی قله با فراورده، برابر ۳۵۰ کیلوژول است.
- استفاده از کاتالیزگر مناسب می‌تواند باعث تولید ۵۰ کیلوژول گرما در ازای تولید یک مول D شود.
- در این واکنش، مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها از فراورده، کم‌تر است.
- افزایش دما در این واکنش، باعث کاهش انرژی فعال‌سازی و افزایش سرعت واکنش می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

انرژی فعال‌سازی:

برای این‌که یک واکنش شیمیایی آغاز شود، باید واکنش‌دهنده‌ها مقدار معینی انرژی داشته باشند. به حداقل انرژی لازم برای شروع هر واکنش شیمیایی، انرژی فعال‌سازی واکنش می‌گویند.

نکته

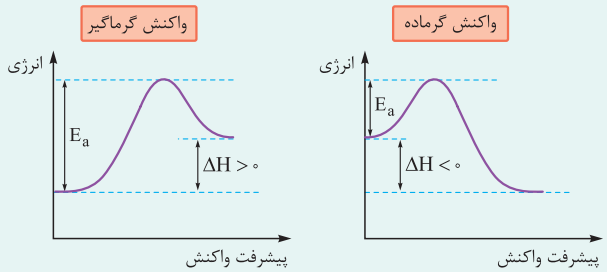
۱) انرژی فعال‌سازی را با نماد E_a نشان می‌دهند و با یکای کیلوژول (kJ) گزارش می‌کنند.

۲) یکی از روش‌های تأمین انرژی فعال‌سازی، گرمادادن به واکنش‌دهنده‌ها است. برای مثال هنگامی که نوک کبریت روی سطح زبر قوطی کشیده می‌شود، گرما تولید می‌شود که این گرما، انرژی فعال‌سازی واکنش شیمیایی انجام‌شده را تأمین می‌کند.

۳) همهٔ واکنش‌های شیمیایی صرف نظر از این‌که گرماده یا گرماگیر باشند، به انرژی فعال‌سازی نیاز دارند.

۴) در نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش، تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها با قلهٔ نمودار، انرژی فعال‌سازی واکنش (رفت) را نشان می‌دهد. با توجه به نمودارهای زیر *واضح و مبرهن* است! که در واکنش‌های گرماگیر، همواره انرژی فعال‌سازی از ΔH واکنش بیشتر است در حالی که در واکنش‌های گرماده، انرژی فعال‌سازی می‌تواند از مقدار ΔH واکنش کم‌تر یا بیشتر باشد.

یادآوری: تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، مقدار ΔH واکنش را نشان می‌دهد. در ضمن در واکنش‌های گرماگیر، واکنش‌دهنده‌ها پایدارترند، در حالی که در واکنش‌های گرماده، فراورده‌ها پایدارتر *تشریف دارن!* (پایداری با سطح انرژی رابطهٔ وارونه دارد.)



۵) هر چه انرژی فعال‌سازی واکنش بیشتر باشد، سرعت آن کم‌تر است؛ در نتیجه واکنش در شرایط دشوارتر و دمای بالاتری انجام می‌شود. (انرژی فعال‌سازی واکنش با سرعت واکنش رابطهٔ وارونه دارد.)

توجه: با افزایش دما، انرژی واکنش‌دهنده‌ها بیشتر می‌شود به طوری که شمار ذره‌هایی که در واحد زمان می‌توانند به فراورده‌ها تبدیل شوند، افزایش می‌یابد. یعنی افزایش دما باعث افزایش سرعت واکنش‌های شیمیایی می‌شود. به طور مثال گاز نیتروژن با گاز اکسیژن در دمای اتاق واکنش نمی‌دهد اما درون موتور خودرو و دمای بالاتر از $1000^\circ C$، اندکی از آن‌ها به نیتروژن مونوکسید تبدیل می‌شود:

$N_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{دمای اتاق}}$ انجام نمی‌شود.

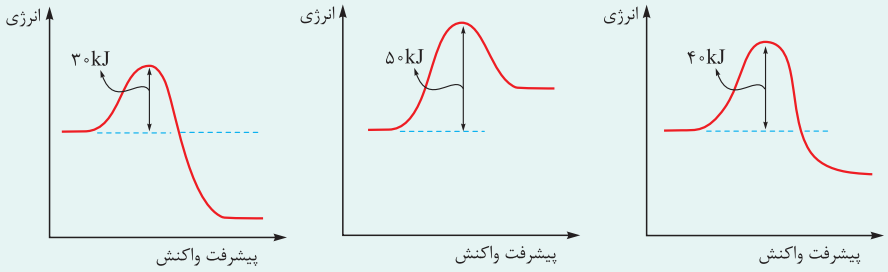
$N_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{دمای بالا}} 2NO(g)$

۶) انرژی فعال‌سازی برخی واکنش‌ها از جمله سوختن فسفر سفید، کم بوده و در دمای اتاق تأمین می‌شود، در حالی که برای برخی واکنش‌ها مانند سوختن هیدروژن این اتفاق نمی‌افتد! *به همین دلیله* که فسفر سفید برخلاف گاز هیدروژن در هوا و در دمای اتاق می‌سوزد.

سوختن گاز هیدروژن > سوختن فسفر سفید : E_a در هوا و در دمای اتاق

توجه: از آن‌جا که اگر فسفر سفید را در هوا و دمای اتاق *به حال خودش بذاریم، می‌سوزه*، آن را در آزمایشگاه، زیر آب نگه‌داری می‌کنند، در واقع آب در این‌جا یک بازدارنده است و مانع تماس اکسیژن با فسفر و در نتیجه انجام واکنش می‌شود.

تمرین: با توجه به نمودارهای زیر، نمودار ..... مربوط به یک واکنش ..... است و واکنش ..... در شرایط یکسان، سریع‌تر انجام می‌شود.



(۱) (۲) (۳)

۱) ۱ ـ گرماگیر ـ ۳
۲) ۳ ـ گرماده ـ ۲
۳) ۲ ـ گرماگیر ـ ۳
۴) ۱ ـ گرماده ـ ۲

پاسخ: گزینهٔ «۳» *(خود را بیازمایید صفحهٔ ۹۸ کتاب درسی)*

واکنش‌های (۱) و (۳) که در آن‌ها سطح انرژی فراورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها است، گرماده هستند و واکنش (۲) که در آن سطح انرژی فراورده‌ها بالاتر از واکنش‌دهنده‌ها است، گرماگیر می‌باشد. در ضمن، انرژی فعال‌سازی واکنش (۳)، از بقیهٔ واکنش‌ها کم‌تر است؛ در نتیجه در شرایط یکسان، سرعت آن بیشتر خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد اول و سوم درست‌اند.

مورد اول: برای بررسی این مورد، نمودار «انرژی ـ پیشرفت واکنش» را طبق مراحل زیر رسم می‌کنیم:

۱) حداقل انرژی لازم یعنی همان E_a یا تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده با قله، که برابر با $150\,kJ$ است.

۲) از طریق مول Y و انرژی داده‌شده، ΔH واکنش را به ازای مصرف ۱ مول Y به دست می‌آوریم:

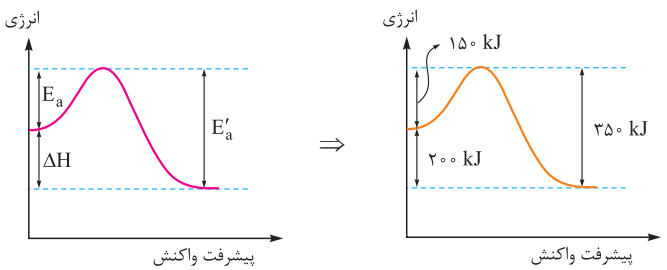
$$1\,mol\,Y \times \frac{100\,kJ}{0/5\,mol\,Y} = 200\,kJ$$

۳) با توجه به اطلاعات سؤال، چون واکنش انرژی آزاد می‌کند، پس واکنش گرماده بوده و علامت ΔH آن منفی است:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = -200\,kJ$$

۴) تفاوت سطح انرژی فراورده تا قله را به دست می‌آوریم و نمودار را رسم می‌کنیم:

$$\Delta H = (E_a)_{\text{تا قله}} - (E'_a)_{\text{تا قله}} \Rightarrow -200 = 150 - E'_a$$
$$\Rightarrow E'_a = 350\,kJ$$



مورد دوم: کاتالیزگر، ΔH واکنش را تغییر نمی‌دهد، بنابراین گرمای تولیدشده یا همان ΔH واکنش تغییر نمی‌کند!

مورد سوم: واکنش گرماده است و با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ ΔH به کمک آنتالپی پیوند می‌توان گفت مجموع آنتالپی پیوند در فراورده بیشتر از مجموع آنتالپی پیوندها در واکنش‌دهنده‌های آن است.

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در فراورده(ها)}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در واکنش‌دهنده(ها)}]$$

مورد چهارم: افزایش دما، انرژی فعال‌سازی را تغییر نمی‌دهد. با افزایش دما شمار ذره‌هایی که در واحد زمان می‌توانند به هر فراورده تبدیل شوند، افزایش می‌یابد.

۷۸ کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن درست است؟

الف) در شرایط یکسان، کاتالیزگر پودر روی نسبت به توری پلاتینی، کاهش بیشتری در انرژی فعال‌سازی ایجاد می‌کند.

ب) واکنش در حضور جرقه یا توری پلاتینی با سرعت نزدیک به هم و انرژی فعال‌سازی مشابه صورت می‌گیرد.

پ) در دمای اتاق به رغم پایداری بیشتر فراورده نسبت به واکنش‌دهنده‌ها، به دلیل عدم تأمین انرژی فعال‌سازی، واکنش پیشرفت چندانی ندارد.

ت) تأثیر پودر روی و توری پلاتینی در آنتالپی واکنش، مشابه یکدیگر است.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ

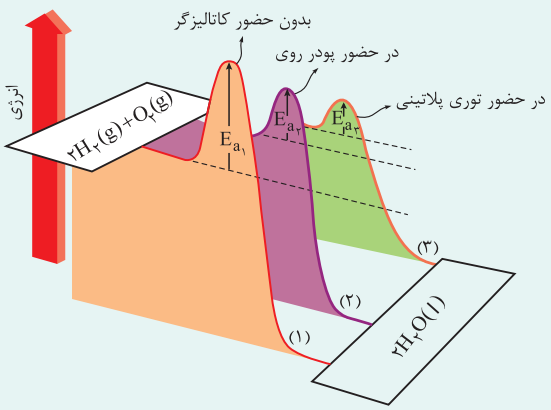
۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ت

درس Box

با توجه به جدول زیر که برخی داده‌ها برای واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن را در شرایط گوناگون نشان می‌دهد، می‌توان نتیجه گرفت که:

شرایط آزمایش	دما ($^\circ C$)	سرعت واکنش	آنتالپی واکنش (kJ)
بدون حضور کاتالیزگر	۲۵	ناچیز	-۵۷۲
ایجاد جرقه در مخلوط	۲۵	انفجاری	-۵۷۲
در حضور پودر روی	۲۵	سریع	-۵۷۲
در حضور توری پلاتینی	۲۵	انفجاری	-۵۷۲

- واکنش سوختن هیدروژن در دمای اتاق بدون حضور کاتالیزگر انجام نمی‌شود، زیرا انرژی فعال‌سازی آن بالا است.
- با ایجاد جرقه در مخلوط گازهای هیدروژن و اکسیژن، انرژی فعال‌سازی واکنش تأمین شده و واکنش به صورت انفجاری انجام می‌شود.
- فلزهای روی (Zn) و پلاتین (Pt)، کاتالیزگرهای واکنش سوختن هیدروژن هستند؛ در حضور پودر روی، واکنش سریع و در حضور توری پلاتینی، واکنش به صورت انفجاری انجام می‌شود، در واقع توری پلاتینی انرژی فعال‌سازی واکنش را بیشتر کاهش می‌دهد و کاتالیزگر مناسب‌تری برای سوختن هیدروژن است.
- انرژی فعال‌سازی واکنش با استفاده از گرما و جرقه، تأمین می‌شود.
- انرژی فعال‌سازی واکنش با استفاده از کاتالیزگر، کاهش می‌یابد.
- در همهٔ مسیرهای انجام واکنش، آنتالپی واکنش مقداری ثابت است.



پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «پ» و «ت» درست است.

بررسی همهٔ موارد:

الف) در حضور توری پلاتینی، واکنش انفجاری بوده و در حضور پودر روی، سریع است؛ پس توری پلاتینی کاهش بیشتری در انرژی فعال‌سازی ایجاد می‌کند.

ب) انرژی فعال‌سازی واکنش با استفاده از گرما تأمین می‌شود، اما با استفاده از کاتالیزگر کاهش می‌یابد.

تیزبازی تا الان موارد «الف» و «ب» غلط بودند که با ردکردن این دو مورد به گزینهٔ (۳) می‌رسیم.

پ) طبق متن کتاب درسی، *کاملاً درسته!*

ت) هر دو کاتالیزگر بوده و کاتالیزگرها آنتالپی واکنش را تغییر نمی‌دهند.

۷۹ چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ واکنش‌هایی که منجر به کاهش میزان آلاینده‌های خروجی از موتور خودروهای بنزینی می‌شود، درست است؟

- هر سه واکنش در دمای اتاق به رغم انجام‌پذیری، سرعت چندانی ندارند. ← گرماده
- هر سه واکنش دارای $\Delta H < 0$ و E_a بسیار زیاد هستند. ← سرعت کم
- استفاده از توری‌هایی از جنس Pt، Pd و Rh در خودروها، به منظور کاهش میزان آلاینده‌ها صورت می‌گیرد.
- هنگام روشن و گرم شدن خودرو در زمستان نسبت به تابستان، عملکرد مطلوب کاتالیزگرها، کم‌تر مشاهده می‌شود.
- استفاده از مش ریز به جای توری در مبدل کاتالیستی، باعث افزایش کارایی کاتالیزگر می‌شود.

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

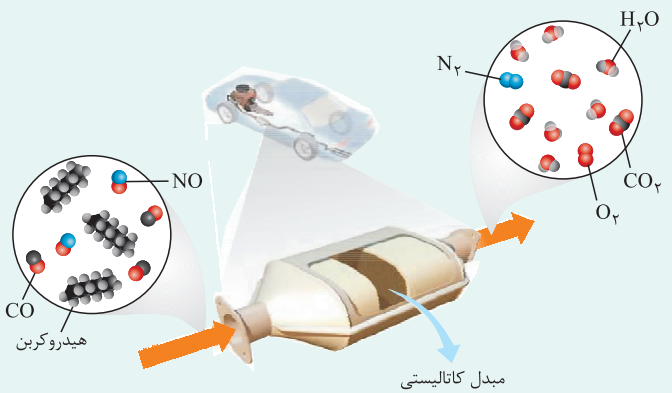
مبدل‌های کاتالیستی:

قبرها حاکی از آن است که آلاینده‌های خروجی از اگزوز خودروها، در کسری از ثانیه از موتور خودرو خارج و وارد هواکره می‌شوند؛ هم‌چنین دمای آن‌ها در این زمان بسیار کوتاه، به سرعت کاهش می‌یابد.

برای حذف یا کاهش مقدار این آلاینده‌ها (C_xH_y ،NO و CO)، از مبدل‌های کاتالیستی استفاده می‌شود. این قطعه را در مسیر خروج گازها قرار می‌دهند تا با انجام واکنش‌های مناسب، آلاینده‌ها به مواد کم خطرتری تبدیل شوند.

مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی:

این مبدل‌ها، توری‌هایی از جنس سرامیک هستند که سطح آن‌ها با فلزهای پلاتین (Pt)، پالادیم (Pd) و رودیم (Rh) پوشانده شده است. این فلزها نقش کاتالیزگر را دارند. در این مبدل‌ها واکنش‌های زیر انجام می‌شود:



۱) واکنش حذف کربن مونوکسید (سوختن): $2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)\ ,\ \Delta H < 0$ (CO در این واکنش اکسایش می‌یابد.)

۲) واکنش حذف هیدروکربن‌های نسوخته (سوختن): $C_xH_y + (x + \frac{y}{4})O_2(g) \rightarrow xCO_2(g) + \frac{y}{2}H_2O(g)\ ,\ \Delta H < 0$

۳) واکنش حذف گاز نیتروژن مونوکسید (تجزیه): $2NO(g) \rightarrow N_2(g) + O_2(g)\ ,\ \Delta H < 0$ (NO در این واکنش کاهش می‌یابد.)

نکته

۱) هر سه واکنش انجام‌شده در مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی از نوع اکسایش ـ کاهش بوده و گرماده هستند.

واکنش‌های حذف CO و NO انرژی فعال‌سازی بالایی دارند و در دماهای پایین انجام نمی‌شوند یا بسیار کند هستند، اما در دمای بالا و با استفاده از کاتالیزگر می‌توانند با سرعت بالاتری انجام شوند.

۲) از یک طرف مبدل، آلاینده‌های CO، C_xH_y و NO وارد شده و از طرف دیگر گازهای CO_2، H_2O، N_2 و O_2 خارج می‌شوند.

۳) هرچند مبدل کاتالیستی برای مدت طولانی کار می‌کند، اما پس از مدت معینی کارایی آن کاهش می‌یابد و دیگر قابل استفاده نیست.

۴) برای افزایش کارایی مبدل کاتالیستی، گاهی سرامیک را به شکل مش (دانه‌های) ریز درمی‌آورند و کاتالیزگرها را روی سطح آن می‌نشانند؛ زیرا سطح تماس مش‌ها از توری بیشتر است.

۵) در سطح سرامیک‌های درون مبدل کاتالیستی، توده‌های فلزی با قطر ۲ تا ۱۰ نانومتر وجود دارند.

۶) با وجود مبدل کاتالیستی، در هنگام روشن و گرم شدن خودرو، به‌ویژه در روزهای سرد زمستان، *باز هم سر و کلهٔ* آلاینده‌ها در گازهای خروجی پیدا می‌شود، زیرا این مبدل‌ها در دماهای پایین کارایی خود را از دست می‌دهند.

۷) با توجه به جدول صفحهٔ ۱۰۱ کتاب درسی، مقایسهٔ مقدار آلاینده‌ها در غیاب و در حضور مبدل و میزان تأثیر آن بر کاهش مقدار آلاینده‌ها به صورت زیر است:

مقدار آلاینده‌ها در غیاب و در حضور مبدل: $CO > C_xH_y > NO$

میزان تأثیر مبدل بر کاهش مقدار آلاینده (درصد کاهش آلاینده): $NO > C_xH_y > CO$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ به‌جز مورد سوم، بقیهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

بررسی همهٔ موارد:

- انرژی فعال‌سازی هر ۳ واکنش زیاد است و به همین دلیل در دمای پایین، سرعت چندانی ندارند. ✓
- مطابق با درس‌باکس کاملاً *درسته*!
- جنس توری‌ها از سرامیک است! که کاتالیزگرها روی آن نشانده می‌شوند. ✗
- مبدل‌های کاتالیستی در دمای پایین زمستان عملکرد مطلوبی ندارند. ✓
- سطح تماس مش‌ها از توری‌ها بیشتر است. ✓

۸۰ براساس جدول زیر، کدام مورد درست است؟ $(C=۱۲, N=۱۴, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$

آلاینده		CO	C_xH_y	NO
میزان آلایندگی $(g.km^{-۱})$	بدون کاتالیزگر	۵/۹۹	۱/۶۷	۱/۰۴
	با کاتالیزگر	۰/۶۱	۰/۰۷	۰/۰۴

۱) بیشترین درصد کاهش آلودگی مربوط به CO است.

۲) اگر در یک شهر، روزانه ۵۰۰۰ خودرو و هر کدام به طور میانگین ۱۰ کیلومتر تردد داشته باشند، میزان مجموع جرم آلاینده‌ها در صورت استفاده از کاتالیزگر، حدود ۰/۴ تن، کم‌تر از آلاینده‌ها در صورت عدم استفاده از مبدل کاتالیستی است.

۳) با طی‌کردن ۳۰ کیلومتر مسافت توسط یک خودرو، مجموع مول آلاینده‌های CO و NO که توسط مبدل کاتالیستی کاهش می‌یابد، برابر ۴ است.

۴) علت وجود آلاینده‌های CO و C_xH_y به ترتیب خام‌سوزی و ناقص‌سوزی بنزین است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به جدول زیر، میزان کاهش ورود آلاینده در صورت استفاده از کاتالیزگر به هواکره را حساب می‌کنیم:

آلاینده		CO	C_xH_y	NO
میزان آلایندگی $(g.km^{-۱})$	بدون کاتالیزگر	۵/۹۹	۱/۶۷	۱/۰۴
	با کاتالیزگر	۰/۶۱	۰/۰۷	۰/۰۴
میزان کاهش آلایندگی: مقدار آلاینده با کاتالیزگر − مقدار آلاینده بدون کاتالیزگر		۵/۳۸	۱/۶	۱

در آخر مجموع جرم کاهش‌یافتهٔ آلاینده‌ها را با هم جمع کرده و میزان کاهش جرم آلاینده‌ها را حساب می‌کنیم:

$$۵۰۰۰ \times ۱۰\,km \times \frac{(۱+۱/۶+۵/۳۸)g}{۱\,km} \times \frac{۱\,ton}{۱۰^{۶}\,g} \simeq ۰/۴\,ton$$

(۵۰۰۰: تعداد خودرو)

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به درصد کاهش جرم آلاینده‌ها که به صورت زیر است، متوجه می‌شویم درصد کاهش آلایندگی برای NO از همه زیادتر است:

$$\text{کاهش آلایندگی} = \frac{\text{مقدار کاهش آلاینده}}{\text{مقدار اولیهٔ آلاینده}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \begin{cases} NO : \frac{۱}{۱/۰۴} \times ۱۰۰ \simeq ٪۹۶ \\ C_xH_y : \frac{۱/۶}{۱/۶۷} \times ۱۰۰ \simeq ٪۹۵ \\ CO : \frac{۵/۳۸}{۵/۹۹} \times ۱۰۰ \simeq ٪۹۰ \end{cases}$$

گزینهٔ (۳): میزان مجموع مول آلاینده‌های CO و NO توسط مبدل کاتالیستی پس از طی مسافت ۱ کیلومتر کاهش می‌یابد، برابر با $\frac{۵/۳۸}{۲۸} + \frac{۱}{۳۰} \simeq ۰/۲۲\,mol$ است؛ بنابراین با طی‌کردن ۳۰ کیلومتر مسافت توسط یک خودرو، ۶/۶ mol آلاینده کم می‌شود:

$$۳۰\,km \times \frac{۰/۲۲\,mol}{۱\,km} = ۶/۶\,mol$$

گزینهٔ (۴): علت وجود آلایندهٔ CO به دلیل ناقص‌سوزی و C_xH_y به دلیل خام‌سوزی بنزین است.

۸۱ کدام گزینه در مورد خودروهای دیزلی و مبدل کاتالیستی مناسب برای آن‌ها، نادرست است؟

۱) درون موتورهای دیزلی دو نوع آلاینده تولید می‌شود که برخی اتم‌های آن‌ها به آرایش هشت‌تایی پایدار نمی‌رسند.

۲) از آمونیاک برای کاهش میزان آلایندگی اکسیدهای نیتروژن و کربن استفاده می‌شود.

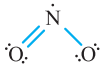
۳) فرایند کاهش میزان آلایندگی هیدروکربن‌ها در این خودروها به کمک کاتالیزگرها صورت می‌گیرد.

۴) حذف مقداری از گازهای CO و C_xH_y، قبل از حذف اکسیدهای نیتروژن صورت می‌گیرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق واکنش زیر، از آمونیاک برای کاهش میزان آلایندگی **اکسیدهای نیتروژن‌دار** استفاده می‌شود:

$$NO + NO_2 + 2NH_3 \rightarrow 2N_2 + 3H_2O$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): درون موتور خودروهای دیزلی، آلاینده‌هایی مثل CO، C_xH_y، NO، NO_2 و... تولید می‌شوند که در بین آن‌ها، دو اکسید NO و NO_2 به ترتیب با ساختار لوویس $\dot{O}=N\cdot$ و  از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نمی‌کنند.

نکته

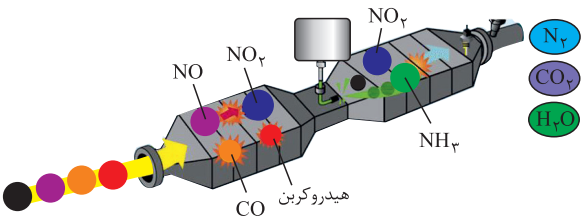
در صورتی که مجموع الکترون‌های لایهٔ ظرفیت یک ترکیب فرد باشد، آن ترکیب از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نمی‌کند:

$NO = 5 + 6 = 11$

$NO_2 = 5 + 2(6) = 17$

گزینهٔ (۳): واکنش حذف CO و C_xH_y مثل خودروهای بنزینی، به کمک کاتالیزگر انجام می‌شود.

گزینهٔ (۴): مطابق شکل زیر متوجه می‌شویم که ابتدا CO و C_xH_y و سپس اکسیدهای نیتروژن‌دار، از سوخت حذف می‌شوند.



۸۲ اگر در واکنش زیر، ضریب استوکیومتری اکسیدهای نیتروژن با هم برابر باشد، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

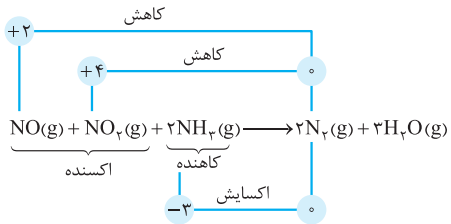
$$NO + NO_2 + NH_3 \rightarrow N_2 + H_2O$$

- واکنش دارای دو اکسنده و یک کاهنده است.
- در واکنش موازنه‌شده، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود.
- اگر واکنش به گونه‌ای دچار تغییر شود که ضریب NO دو برابر ضریب NO_2 شود، مجموع ضرایب استوکیومتری آن، برابر ۷۵ خواهد شد.
- در این واکنش، تنها اتم نیتروژن دچار تغییر عدد اکسایش شده است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی بررسی همهٔ موارد:

موارد اول، دوم و چهارم: با توجه به واکنش موازنه‌شده که به صورت زیر است می‌توان این موارد را اثبات کرد:



مورد سوم: اگر ضریب NO دو برابر ضریب NO_2 شود، اتفاق زیر می‌افتد:

$$2NO + 1NO_2 + \frac{8}{3}NH_3 \rightarrow \frac{17}{6}N_2 + 4H_2O$$

سپس همهٔ ضرایب را در ۶ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$12NO + 6NO_2 + 16NH_3 \rightarrow 17N_2 + 24H_2O$$

$$12 + 6 + 16 + 17 + 24 = 75$$

۸۳ برای واکنش تعادلی $BN(s)+3HCl(g) \rightleftharpoons BCl_3(g)+NH_3(g)$، که پایداری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است، مناسب‌ترین شرایط انجام واکنش از نظر دما و فشار کدام است؟

۱) دما و فشار بالا
۲) دما و فشار پایین
۳) دمای بالا، فشار پایین
۴) دمای پایین، فشار بالا

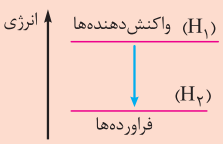
مشاوره این تست شبیه‌سازی‌شدهٔ یکی از تست‌های کنکور خارج از کشور ۱۴۰۰ است. بررسی پاسخ‌نامهٔ این تست رو به شما شدیداً توصیه می‌کنیم.

درس Box

جناب لوشاتلیه می‌فرمایید! اگر تغییری سبب به هم خوردن یک سامانهٔ تعادلی شود، تعادل در جهتی جابه‌جا می‌شود که حدالامکان اثر تغییر آن را جبران کند. با تغییر غلظت، فشار و دما می‌توان سامانهٔ تعادلی را در جهت دلخواه جابه‌جا کرد؛ در واقع با تغییر این کمیت‌ها، واکنش تعادلی در جهت معینی پیش می‌رود تا به تعادل جدید برسد. خوب یک نگاه کلی به اثر هر یک از تغییرات بیندازید:

عامل			عکس‌العمل تعادل به تغییر	چگونگی تغییر ثابت تعادل (K) با جابه‌جاشدن تعادل
تغییر غلظت		افزایش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت مصرف آن ماده	تغییر نمی‌کند.
		کاهش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت تولید آن ماده	تغییر نمی‌کند.
تغییر حجم (فشار)		افزایش حجم (کاهش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی بیشتر	تغییر نمی‌کند.
		کاهش حجم (افزایش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی کم‌تر	تغییر نمی‌کند.
تغییر دما	واکنش‌های گرماده	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت رفت)	افزایش می‌یابد.
		افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت برگشت)	کاهش می‌یابد.
	واکنش‌های گرماگیر	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت برگشت)	کاهش می‌یابد.
		افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت رفت)	افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مناسب‌ترین شرایط از نظر دما و فشار یعنی این‌که واکنش به سمت رفت پیش برود؛ پس ابتدا برویم سراغ اثر دما! چون سطح انرژی فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کم‌تر است، پس مطابق نمودار زیر واکنش گرماده بوده، پس باید دما رو کم کنیم تا واکنش به سمت رفت پیش برود:

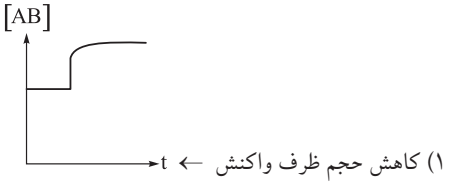


$$\left.\begin{matrix}\Delta H = H_2 - H_1 \\ H_2 < H_1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta H < 0 \Rightarrow \text{واکنش گرماده}$$

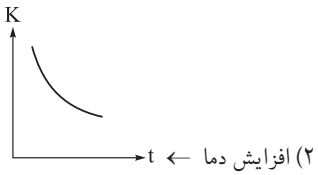
اما اثر فشار! شمار مول‌های گازی در سمت فراورده‌ها کم‌تر است، پس باید فشار را افزایش دهیم تا تعادل در جهت رفت جابه‌جا شود.

۸۴ تغییر اعمال‌شده در کدام مورد بر واکنش $A(g)+B(g) \rightleftharpoons AB(g)+Q$، با نمودار ارائه‌شده هماهنگ نیست؟

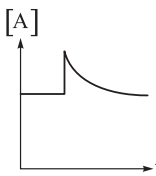
۱) کاهش حجم ظرف واکنش



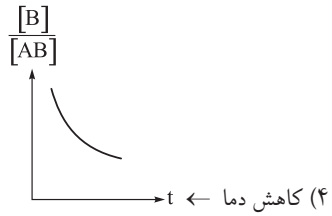
۲) افزایش دما



۳) افزودن مقداری $A(s)$ به ظرف واکنش



۴) کاهش دما



پاسخ خیلی تشریحی ✔ غلظت مواد جامد و مایع خالص در دمای ثابت، مقدار ثابتی است و با تغییر مقدار آن‌ها، غلظتشان ثابت می‌ماند. از آن‌جایی که تغییر غلظت مواد بر جابه‌جایی تعادل تأثیرگذار است، نتیجه می‌گیریم که تغییر مقدار مواد جامد و مایع خالص، تأثیری بر جابه‌جایی تعادل ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

عامل	تأثیر / نوع تعادل	جهت جابه‌جایی تعادل	سرعت واکنش‌های رفت و برگشت	غلظت مواد گازی	ثابت تعادل
افزایش فشار (کاهش حجم)	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابرند.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	افزایش	افزایش	بدون تغییر
	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابر نیستند.	به سمت شمار مول‌های گازی کم‌تر	افزایش	افزایش	بدون تغییر
	اصلاً مادهٔ گازی نداریم.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	بدون تغییر		بدون تغییر
کاهش فشار (افزایش حجم)	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابرند.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	کاهش	کاهش	بدون تغییر
	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابر نیستند.	به سمت شمار مول‌های گازی بیشتر	کاهش	کاهش	بدون تغییر
	اصلاً مادهٔ گازی نداریم.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	بدون تغییر		بدون تغییر

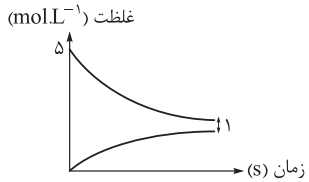
با کاهش حجم ظرف، غلظت همهٔ مواد زیاد می‌شود؛ پس ابتدا $[AB]$ زیاد می‌شود و چون واکنش با افزایش فشار در جهت رفت پیش می‌رود، بنابراین $[AB]$ در ادامه زیادتر خواهد شد.

واکنش گرماده $(A \rightleftharpoons B+Q)$	افزایش دما	جابه‌جایی تعادل در جهت مصرف گرما (جهت برگشت)	کاهش مقدار فراورده‌ها و افزایش مقدار واکنش‌دهنده‌ها	کاهش ثابت تعادل
	کاهش دما	جابه‌جایی تعادل در جهت تولید گرما (جهت رفت)	افزایش مقدار فراورده‌ها و کاهش مقدار واکنش‌دهنده‌ها	افزایش ثابت تعادل
واکنش گرماگیر $(A+Q \rightleftharpoons B)$	افزایش دما	جابه‌جایی تعادل در جهت مصرف گرما (جهت رفت)	افزایش مقدار فراورده‌ها و کاهش مقدار واکنش‌دهنده‌ها	افزایش ثابت تعادل
	کاهش دما	جابه‌جایی تعادل در جهت تولید گرما (جهت برگشت)	کاهش مقدار فراورده‌ها و افزایش مقدار واکنش‌دهنده‌ها	کاهش ثابت تعادل

در واکنش‌های گرماده با افزایش دما، K کم می‌شود.

گزینهٔ (۴): با کاهش دما، واکنش در جهت رفت پیش می‌رود، در نتیجه $[B]$ کم شده و $[AB]$ زیاد می‌شود؛ در نتیجه $\frac{[B]}{[AB]}$ کاهش می‌یابد.

۸۵ با توجه به نمودار زیر که مربوط به واکنش گازی $2NO_2 + Q \rightleftharpoons 2NO + O_2$ در دمای $25^\circ C$ می‌باشد، ثابت تعادل این واکنش در دمای $12/5^\circ C$، کدام‌یک می‌تواند باشد؟



۱) ۳/۲

۲) ۶/۴

۳) ۹/۶

۴) ۱/۶

پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا مقدار ثابت تعادل آن را حساب می‌کنیم.

منحنی نزولی که متعلق به واکنش‌دهنده یعنی NO_2 و منحنی صعودی مربوط به یکی از فراورده‌ها می‌باشد. *اگر گفتید کدوم؟ درسته* O_2! چون شیب آن از قدرمطلق شیب NO_2 کم‌تر است (ضریب NO_2 برابر ۲ و O_2 برابر یک است). اگر منحنی صعودی *می‌خواست* مربوط به NO باشد، با توجه به این‌که ضریب NO و NO_2 برابر ۲ است، پس می‌بایست شیب نمودار آن‌ها با هم برابر باشد که خوشبختانه این‌طور نیست!

از طرفی نمودار داره داد می‌زنه که در هنگام برقراری تعادل، غلظت تعادلی NO_2 از O_2، بیشتر است و تفاوت آن‌ها برابر ۱ است؛ پس می‌توان نوشت:

$$2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$$

غلظت تعادلی: $5-2x$ $\quad 2x \quad x$

$$\text{غلظت تعادلی } NO_2 - \text{غلظت تعادلی } O_2 = 1 \Rightarrow 5-2x-x=1 \Rightarrow 5-3x=1 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3}\ mol.L^{-1}$$

$$K=\frac{[NO]^2[O_2]}{[NO_2]^2}=\frac{(2x)^2(x)}{(5-2x)^2}=\frac{(\frac{4}{3})(\frac{8}{3})^2}{(5-\frac{8}{3})^2}=\frac{(\frac{4}{3})(\frac{8}{3})^2}{(\frac{7}{3})^2}$$

$$\frac{4\times8\times8\times\cancel{3}\times3}{\cancel{3}\times\cancel{3}\times7\times3\times7}=\frac{256}{147}\simeq 1/74$$

حالا با توجه به این‌که واکنش گرماگیر است، پس با کاهش دما، ثابت تعادل باید کاهش پیدا کند؛ بنابراین ثابت تعادل باید کم‌تر از ۱/۷۴ شود، در نتیجه جواب گزینهٔ (۴) است.

۸۶ در یک ظرف با پیستون متحرک به حجم ۳ لیتر، سه مول از هر یک از گازهای SO_2Cl_2، SO_2 و Cl_2 در حال تعادل می‌باشد. در صورتی که حجم ظرف را در دمای ثابت به میزان دو لیتر کاهش دهیم، فشار ناشی از گازهای درون ظرف به تقریب چند برابر می‌شود؟

$$SO_2Cl_2(g) \rightleftharpoons SO_2(g) + Cl_2(g)$$

۱) ۰/۸۹ ۲) ۲/۶ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$SO_2Cl_2 \rightleftharpoons SO_2 + Cl_2$$

مول تعادلی: ۳ ۳ ۳

حجم ظرف ۳ لیتر است؛ بنابراین مقدار K را به راحتی حساب می‌کنیم:

$$K = \frac{[\frac{3}{3}][\frac{3}{3}]}{[\frac{3}{3}]} = 1$$

با کم‌کردن حجم ظرف، فشار افزایش می‌یابد و طبق اصل لوشاتلیه تعادل در جهت تولید مقدار مول‌های گازی کم‌تر یعنی در جهت برگشت پیش می‌رود؛ پس در تعادل جدید داریم:

$$SO_2Cl_2 \rightleftharpoons SO_2 + Cl_2$$

مول تعادلی: $3+x$ $3-x$ $3-x$

هواستون باشه که چون دما ثابته، مقدار K تغییر نمی‌کنه!

با توجه به این‌که حجم ظرف ۲ لیتر کاهش یافته پس K جدید برابر است با:

$$\frac{(3-x)^2}{\frac{1}{(3+x)}} = 1 \Rightarrow 9-6x+x^2 = 3+x \Rightarrow x^2-7x+6=0$$

یادآوری: در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$، $a+b+c=0$ شود، آن‌گاه ریشه‌های معادله به صورت $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}$ خواهد بود.

$$x^2-7x+6 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=6 \end{cases}$$

اگر $x=6$ باشد، مقدار تعادلی Cl_2 و SO_2 قابل قبول نیست.

$$[SO_2Cl_2] = \frac{3+x}{1} \xrightarrow{x=1} [SO_2Cl_2] = \frac{3+1}{1} = 4\ mol.L^{-1}$$

$$[SO_2] = [Cl_2] = \frac{3-x}{1} \xrightarrow{x=1} 2\ mol.L^{-1}$$

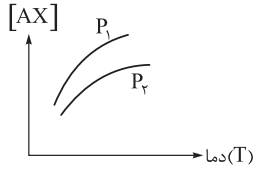
در انتها غلظت مواد گازی در حالت ثانویه را به اولیه تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\text{غلظت گاز بعد از تغییرات}}{\text{غلظت گاز قبل از تغییرات}} \Rightarrow \frac{4+2+2}{1+1+1} \simeq 2/6$$

یه جور دیگه می‌توانیم از قوانین گازها نیز استفاده کنیم:

$$\frac{P_1V_1}{n_1T_1} = \frac{P_2V_2}{n_2T_2} \xrightarrow{T_1=T_2} \frac{P_1\times 3}{9} = \frac{P_2\times 1}{8} \rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{8}{3} \simeq 2/6$$

۸۷ نمودار زیر، تغییر غلظت مولی فراوردهٔ واکنش تعادلی $2A(g)+X_2(g) \rightleftharpoons 2AX(g)$ را در دو شرایط متفاوت نشان می‌دهد. کدام مورد، نادرست است؟



۱) مانند واکنش تولید اوزون تروپوسفری، گرماگیر است.

۲) واکنش تجزیهٔ $SO_3(g)$ به $SO_2(g)$ و $O_2(g)$ در فشار P_2، به میزان بیشتری پیش می‌رود.

۳) در صورتی که مقدار ثابت تعادل این واکنش در دمای $35^\circ C$ برابر با $2\times10^{-2} L.mol^{-1}$ باشد، در دمای $50^\circ C$ ثابت تعادل می‌تواند $0/01 L.mol^{-1}$ باشد.

۴) با افزایش حجم ظرف واکنش، میزان غلظت فراورده همانند مقدار مول آن، کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با افزایش دما، $[AX]$ افزایش یافته است، یعنی با افزایش دما، تعادل در جهت رفت جابه‌جا شده است. در واکنش‌های گرماگیر($\Delta H > 0$) این اتفاق می‌افتد؛ در نتیجه با افزایش دما، ثابت تعادل بیشتر می‌شود نه کم‌تر!

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): واکنش تولید اوزون تروپوسفری همانند این واکنش، گرماگیر است:

$$NO_2(g)+O_2(g) \xrightarrow{\text{نورخورشید}} O_3+NO$$

گزینهٔ (۲): واکنش تجزیهٔ SO_3 به صورت زیر است:

$$2SO_3(g) \rightleftharpoons 2SO_2(g)+O_2(g)$$

مول مواد گازی در سمت فراورده‌ها بیشتر است، در نتیجه هر چه فشار واردشده کم‌تر باشد، واکنش بیشتر به سمت راست می‌رود؛ در نتیجه واکنش در فشار P_2 نسبت به P_1 به میزان بیشتری پیش می‌رود.

گزینهٔ (۴): در صورت افزایش حجم ظرف واکنش، غلظت همهٔ گونه‌ها کاهش می‌یابد و هم‌چنین چون تعداد مول گازی سمت واکنش‌دهنده بیشتر از فراورده است، پس واکنش در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود و مول AX، کاهش می‌یابد.

۸۸ چند مورد از موارد زیر درست است؟

- به‌کارگیری فناوری و تبدیل مواد خام به مواد فراوری‌شده، سبب رشد و بهره‌وری اقتصاد یک کشور می‌شود.
- مواد خام، مانند نمک، سنگ معدن، نفت خام و هوا هستند که فراوری نشده‌اند و با استفاده از آن‌ها می‌توان مواد شیمیایی جدیدی تولید کرد.
- تولید یک مادهٔ آلی جدید، می‌تواند با تغییر ساختار یا ایجاد یک یا چند گروه عاملی همراه باشد.
- هرچه نوع و شمار گروه‌های عاملی در مولکول هدف بیشتر باشد، ساخت آن دشوارتر بوده و به دانش پیشرفته‌تر و فناوری کارآمدتری نیاز دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره برای پاسخ به این سؤال باید با مفاهیم مواد خام، مواد فراوری‌شده، گروه عاملی و نقش فناوری در صنعت آشنا باشید.

پاسخ خیلی تشریحی همهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

بررسی *تک‌تک* عبارت‌ها:

- با تبدیل مواد خام به مواد باارزش‌تر، ارزش افزوده ایجاد می‌شود و اقتصاد کشور رشد می‌کند؛ هم‌چنین با استفاده از فناوری‌های جدید می‌توان از منابع به صورت بهینه‌تر استفاده کرد و بهره‌وری را افزایش داد.
- مواد خام، موادی هستند که به طور طبیعی یافت می‌شوند و برای تولید مواد مورد نیاز انسان، باید فراوری شوند.
- گروه‌های عاملی، گروه‌هایی از اتم‌ها هستند که خواص شیمیایی و فیزیکی یک مادهٔ آلی را تعیین می‌کنند. با تغییر ساختار یا ایجاد گروه‌های عاملی جدید، می‌توان مواد آلی جدید با خواص مورد نظر را تولید کرد.
- سنتز مولکول‌های پیچیده با گروه‌های عاملی متعدد، نیازمند واکنش‌های شیمیایی چندمرحله‌ای و شرایط خاص است که به دانش و فناوری پیشرفته‌ای نیاز دارد.

نکته فناوری، نقش مهمی در رشد و توسعهٔ صنعت و اقتصاد دارد. با استفاده از فناوری، می‌توان مواد جدید با خواص بهتر تولید کرد، از منابع به صورت بهینه‌تر استفاده کرد و بهره‌وری را افزایش داد.

۸۹ چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- در روش مستقیم تولید متانول از متان همانند روش غیرمستقیم، اتم‌های کربن اکسایش می‌یابند.
- با وجود غلظت بالای یون پرمنگنات (MnO_4^{2-})، باز هم شرایط مطلوب تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید تأمین نمی‌شود.
- پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) نوعی پلی‌استر است که از پشت هم قرار گرفتن تعداد زیادی مونومر استری تشکیل می‌شود.
- سرکه و افشانهٔ بی‌حس‌کنندهٔ موضعی را می‌توان به طور مستقیم از گاز اتن که مهم‌ترین خوراک صنایع پتروشیمی است، تهیه کرد.

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تنها عبارت اول درست است.

بررسی عبارت‌ها:

- در روش مستقیم و غیرمستقیم تولید متانول از متان، واکنش‌های زیر انجام می‌شود که در آن‌ها در نهایت اتم کربن اکسایش می‌یابد:

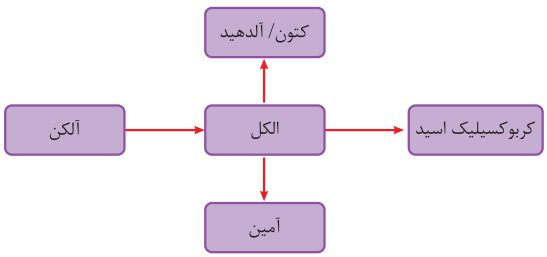
روش غیرمستقیم:

$$\begin{cases} CH_4 + H_2O \rightarrow CO + 3H_2 \\ -4 \xrightarrow{6\uparrow} +2 \\ +2 \xrightarrow{4\downarrow} -2 \\ CO + 2H_2 \rightarrow CH_3OH \end{cases}$$

روش مستقیم:

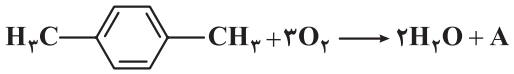
$$\begin{cases} CH_4 + O_2 \rightarrow CH_3OH \\ -4 \xrightarrow{2\uparrow} -2 \end{cases}$$

- فرمول شیمیایی یون پرمنگنات، MnO_4^- و یون منگنات، MnO_4^{2-} است! توجه کنید عدد اکسایش منگنز در پرمنگنات برابر $+7$ و در منگنات، برابر $+6$ است.
- پلی‌استرها به طور کلی از دی‌اسیدها و دی‌الکل‌ها تشکیل می‌شوند.
- طبق نمودار زیر، اتانول (الکل) به طور مستقیم و سرکه (کربوکسیلیک‌اسید) به طور غیرمستقیم از آلکن (اتن) تهیه می‌شود.



تبدیل برخی مواد آلی به یکدیگر

۹۰ از واکنش ۵/۳ گرم پارازایلن با خلوص ۸۰ درصد با مقدار کافی گاز اکسیژن طی واکنش زیر چند گرم آب تولید می‌شود و شمار مول پیوندهای دوگانه در فراوردهٔ آلی تولیدی به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$



۱) ۱/۴۴ ـ ۰/۲
۲) ۰/۷۲ ـ ۰/۲
۳) ۱/۴۴ ـ ۰/۱۲
۴) ۰/۷۲ ـ ۰/۱۲

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا واکنش را تکمیل می‌کنیم:

$$C_8H_{10} + 3O_2 \rightarrow 2H_2O + C_8H_6O_4$$

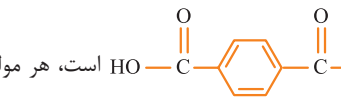
با توجه به جرم پارازایلن، جرم آب را به دست می‌آوریم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$5/3\,g\,C_8H_{10}\,\text{ناخالص} \times \frac{80\,g\,C_8H_{10}\,\text{خالص}}{100\,g\,C_8H_{10}\,\text{ناخالص}} \times \frac{1\,mol\,C_8H_{10}}{106\,g\,C_8H_{10}\,\text{خالص}} \times \frac{2\,mol\,H_2O}{1\,mol\,C_8H_{10}} \times \frac{18\,g\,H_2O}{1\,mol\,H_2O} = 1/44\,g\,H_2O$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\frac{\text{درصد خالص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{C_8H_{10}}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{H_2O}} \Rightarrow \frac{5/3 \times 80}{106 \times 100} = \frac{x}{2 \times 18} \Rightarrow x = 1/44\,gH_2O$$

فراوردهٔ آلی این واکنش، ترفتالیک اسید با ساختار  است، هر مولکول ترفتالیک اسید (A)، دارای ۵ پیوند دوگانه است.

بنابراین داریم:

استفاده از کسر تبدیل:

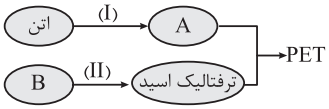
$$5/3\,gC_8H_{10}\,\text{ناخالص} \times \frac{80\,g\,C_8H_{10}\,\text{خالص}}{100\,g\,C_8H_{10}\,\text{ناخالص}} \times \frac{1\,molC_8H_{10}}{106\,g\,C_8H_{10}\,\text{خالص}} \times \frac{1\,molA}{1\,molC_8H_{10}} \times \frac{5\,mol\,\text{پیوند دوگانه}}{1\,molA}$$

$$= 0/2\,mol\,\text{پیوند دوگانه}$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{C_8H_{10}}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{\text{پیوند دوگانه A}}} \Rightarrow \frac{5/3 \times 80}{106 \times 100} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 0/2$$

۹۱ با توجه به شکل زیر، کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟



الف) A همانند فراوردهٔ واکنش **(II)**، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد.

ب) در فرایند **(II)** همانند فرایند **(I)**، دو اتم کربن اکسایش می‌یابند و شمار الکترون مبادله‌شده در واکنش‌های **(I)** و **(II)**، با یکدیگر برابر است.

پ) به ازای واکنش ۱۰۰ مول A و ۱۰ مول ترفتالیک اسید، ۱۰ مول PET و ۱۰ مول آب تولید می‌شود.

ت) اگر نوع اکسنده در واکنش‌های **(I)** و **(II)**، یکسان باشد، درصد جرمی حل‌شونده در واکنش **(I)** از **(II)**، کم‌تر است.

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ پ ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) پ ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی در نمودار داده‌شده، A اتیلن گلیکول و B پارازایلن است.

عبارت‌های «ب» و «پ» نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) اتیلن گلیکول و ترفتالیک اسید، هر دو پیوند هیدروژنی تشکیل می‌دهند.

ب) با توجه به واکنش‌های (I) و (II) و مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن، داریم:

$$\overset{-۴}{C_۲H_۴} + \text{اکسنده} \xrightarrow{\uparrow ۲e^-} \overset{-۲}{C_۲H_۴(OH)_۲}$$

$$\overset{-۱۰}{C_۸H_{۱۰}} + \text{اکسنده} \xrightarrow{\uparrow ۱۲e^-} \overset{+۲}{C_۸H_۶O_۴}$$

شمار الکترون مبادله‌شده در واکنش (I)، برابر ۲ و در واکنش (II)، برابر ۱۲ است.

پ) واکنش تولید PET به صورت زیر است:

$$n\ \text{اتیلن‌گلیکول} + n\ \text{ترفتالیک‌اسید} \rightarrow ۲nH_۲O + PET$$

بنابراین به ازای مصرف ۱۰ مول واکنش‌دهنده، ۱ مول PET و ۲۰ مول آب تولید می‌شود.

ت) در واکنش (I)، اکسندهٔ رقیق و در واکنش (II)، اکسندهٔ غلیظ مصرف می‌شود، بنابراین درصد جرمی در محلول (II) از (I) بیشتر است.

۹۲ کدام گزینه درست است؟

۱) واکنش $CH_4 + H_2O \rightarrow CO + 3H_2$ در دمای $350^\circ C$ و فشار ۳۰ ـ ۵۰atm در حضور کاتالیزگر مناسب انجام می‌شود و یکی از مراحل غیرمستقیم تولید متانول از متان است.

۲) واکنش $C_2H_5OH(aq) + CH_3COOH(aq) \rightarrow C_2H_5COOCH_3(aq) + H_2O(l)$ مربوط به تولید حلال چسب بوده و یک واکنش استری‌شدن محسوب می‌شود.

۳) در واکنش اتن با کلر همانند واکنش اتن با هیدروژن کلرید، فراورده‌ای گازی‌شکل تولید می‌شود و کاتالیزگر واکنش اول، محلول آهن (III) کلرید است.

۴) در واکنش موازنه‌نشدهٔ $C_8H_{10} + KMnO_4 \rightarrow C_8H_6O_4 + KOH + MnO_2$، به‌ازای تولید ۸/۷ گرم منگنز (IV) اکسید، $1/806 \times 10^{23}$ الکترون مبادله می‌شود $(O = 16, Mn = 55 : g.mol^{-1})$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در واکنش موازنه‌شده:

$$C_8H_{10} + 4KMnO_4 \rightarrow C_8H_6O_4 + 4KOH + 4MnO_2$$

۱۲ الکترون مبادله می‌شود، بنابراین:

$$8/7\,g\,MnO_2 \times \frac{1\,mol\,MnO_2}{87\,g\,MnO_2} \times \frac{12\,mol\,e^-}{4\,mol\,MnO_2} \times \frac{6/02 \times 10^{23}\,e^-}{1\,mol\,e^-} = 1/806 \times 10^{23}\,e^-$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): شرایط انجام واکنش (۱)، دمای $450 - 550^\circ C$ است.

گزینهٔ (۲): فراوردهٔ واکنش اتانول و استیک اسید، اتیل استات با فرمول $CH_3COOC_2H_5$ است.

گزینهٔ (۳): واکنش اتن با کلر و هیدروژن کلرید به صورت زیر است:

$$C_2H_4(g) + Cl_2(g) \xrightarrow{FeCl_3(s)} C_2H_4Cl_2(g)$$

$$C_2H_4(g) + HCl(g) \rightarrow C_2H_5Cl(g)$$

حواستون باشه که کاتالیزگر واکنش اول، محلول $FeCl_3$ نیست، بلکه $FeCl_3$ جامد (s) است.

۹۳ معادله‌های شیمیایی موازنه‌نشدهٔ زیر، تهیهٔ مادهٔ A را به دو روش نشان می‌دهد.

$$a)\ C_6H_6 + H_2SO_4 + NaOH \rightarrow A + X + Y$$

$$b)\ C_6H_6 + C_3H_6 + O_2 \rightarrow A + Z$$

با توجه به این‌که در این واکنش‌ها X و Y پسماند هستند، اما Z یک حلال صنعتی است، واکنش ..... از دیدگاه اتمی به‌صرفه‌تر است، چون ..... .

۱) a ـ شمار بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فراورده‌های سودمند تبدیل شده است

۲) a ـ زیرا C_3H_6 یک مادهٔ اولیهٔ ارزان‌قیمت است

۳) b ـ شمار بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فراورده‌های سودمند تبدیل شده است

۴) b ـ زیرا C_3H_6 یک مادهٔ اولیهٔ ارزان‌قیمت است

مشاوره برای حل این تست ابتدا باید مفهوم «به صرفه‌ترین واکنش از دیدگاه اتمی» را به خوبی درک کنید، سپس با توجه به مفهوم و اطلاعات داده‌شده در صورت تست، گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

یک واکنش شیمیایی هنگامی از دیدگاه اتمی به‌صرفه‌تر است که شمار بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فراورده‌های سودمند تبدیل شود. در این دو واکنش، فراورده‌های سودمند، موادی هستند که کاربردهای صنعتی یا تجاری دارند. با توجه به این تعریف، واکنش (b) به‌صرفه‌تر است، زیرا:

- در واکنش (a)، X و Y به عنوان پسماند تولید می‌شوند، در حالی که در واکنش (b)، Z یک حلال صنعتی و سودمند است.
- تعداد اتم‌های بیشتری از واکنش‌دهنده‌ها در واکنش (b) به فراورده‌های سودمند تبدیل می‌شوند.

نکته به‌صرفه‌ترین واکنش از دیدگاه اتمی، واکنشی است که در آن بیشترین تعداد اتم‌های واکنش‌دهنده به فراورده‌های باارزش و کاربردی تبدیل شوند.

گول نخوری ✘

گزینهٔ (۱): ممکن است برخی داوطلبان با توجه به این‌که در واکنش (a)، تعداد اتم‌های بیشتری در واکنش‌دهنده‌ها وجود دارد، این گزینه را به عنوان پاسخ صحیح انتخاب کنند، اما باید توجه داشت که نوع فراورده و کاربرد آن در صنعت مهم است.

گزینه‌های (۲) و (۴): این گزینه‌ها به‌صرفه‌تربودن واکنش را به قیمت مادهٔ اولیه نسبت می‌دهند، در حالی که موضوع تست به‌صرفه‌تربودن از دیدگاه اتمی است!

۹۴ چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- استرها دسته‌ای از مواد آلی هستند که منشأ بوی خوش شکوفه‌ها، گل‌ها، عطرها و نیز بو و طعم میوه‌ها هستند.
- مزهٔ ترش میوه‌هایی مانند انگور، لیموترش، کیوی، گوجه‌سبز و .... ناشی از وجود کربوکسیلیک اسیدها در آن‌هاست.
- با افزایش طول زنجیر هیدروکربنی در الکل‌ها، نیروی وان‌دروالسی بر هیدروژنی غلبه می‌کند و ویژگی ناقطبی الکل، افزایش می‌یابد.
- مصرف بیش از اندازهٔ ویتامین موجود در هویج برای بدن مشکل خاصی ایجاد نمی‌کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره برای پاسخ به این سؤال، باید با استرها، کربوکسیلیک اسیدها، الکل‌ها و ویتامین‌ها آشنایی داشته باشید.

پاسخ خیلی تشریحی عبارت‌های اول، دوم و سوم درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

- استرها ترکیباتی با فرمول $R-COO-R'$ هستند که از واکنش یک کربوکسیلیک اسید با یک الکل به دست می‌آیند. بسیاری از استرها دارای بوی خوش هستند و در صنایع غذایی، آرایشی و بهداشتی کاربرد دارند.
- کربوکسیلیک اسیدها ترکیباتی با فرمول $R-COOH$ بوده که دارای مزهٔ ترش هستند. بسیاری از میوه‌ها حاوی کربوکسیلیک اسید هستند. بد نیست بدانید کربوکسیلیک اسیدهایی مانند سیتریک اسید (در لیموترش)، تارتاریک اسید (در انگور) و مالیک اسید (در سیب) وجود دارند.
- الکل‌ها ترکیباتی با فرمول $R-OH$ هستند. با افزایش طول زنجیر هیدروکربنی (R)، بخش ناقطبی مولکول بزرگ‌تر شده و نیروی وان‌دروالس بین مولکول‌ها، افزایش می‌یابد؛ در نتیجه، ویژگی ناقطبی الکل افزایش و حلالیت آن در آب کاهش می‌یابد.
- ویتامین موجود در هویج، ویتامین A می‌باشد که نوعی ویتامین محلول در چربی است. مصرف بیش از اندازهٔ ویتامین‌های محلول در چربی می‌تواند منجر به مسمومیت شود. به عنوان مثال، مصرف بیش از اندازهٔ ویتامین A می‌تواند باعث تهوع، استفراغ، سردرد و مشکلات کبدی شود.

گول نخوری ممکن است برخی داوطلبان با تصور این‌که مصرف هیچ ویتامینی برای بدن مضر نیست، عبارت چهارم را درست بدانند، اما باید توجه داشت که مصرف بیش از اندازهٔ ویتامین‌های محلول در چربی، می‌تواند برای بدن مضر باشد.

۹۵ کدام گزینه، عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«شمار ..... در نخستین عضو خانواده ..... ، با شمار ..... ، برابر است.»

۱) اتم‌ها ـ آمین‌ها ـ گروه‌های CH_2 در ساختار استر موجود در انگور

$R-NH_2$ ← اتیل هپتانوات

۲) پیوندهای اشتراکی ـ استرها ـ اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی سنگین‌ترین الکل

H یا $R-COO^-$ ← C_2H_7OH

تک‌عاملی که به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

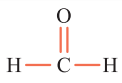
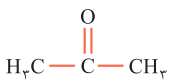
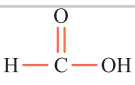
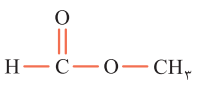
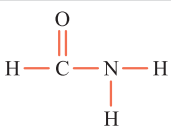
H یا $R-COOH$

۳) اتم‌های با عدد اکسایش مثبت ـ کربوکسیلیک اسیدها ـ گروه‌های عاملی آمیدی در هر واحد تکرارشونده در ساختار کولار

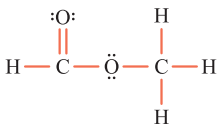
۴) جفت‌الکترون‌های ناپیوندی ـ الکل‌ها ـ پیوندهای دوگانه در ساختار بنزن

$R-OH$ ← 

نکته *اول ببین!* نخستین و ساده‌ترین عضو هر یک از خانواده‌های ترکیبات آلی که تاکنون خوانده‌ایم *رو با هم مرور کنیم؛*

ساده‌ترین عضو خانواده	نام خانواده
 متانال	آلدهیدها
 پروپانون (استون)	کتون‌ها
CH_3OH متانول	الکل‌ها
 دی‌متیل اتر	اترها
 متانوئیک اسید	کربوکسیلیک اسیدها
 متیل متانوآت	استرها
 متیل آمین	آمین‌ها
	آمیدها

پاسخ خیلی تشریحی ✔ نخستین عضو خانوادهٔ استرها، متیل متانوات $(C_2H_4O_2)$ است. *ساختار کاملشو ببینید؛*



متیل متانوآت

مشفقصه که! شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار این استر، برابر با ۸ است.

نکته

ترتیب انحلال‌پذیری الکل‌های تک‌عاملی و سیرشده به صورت زیر است:

انحلال‌پذیری در آب:

$\overbrace{CH_3OH, CH_3CH_2OH, CH_3CH_2CH_2OH}^{\text{به هر نسبتی در آب حل می‌شوند.}} > CH_3CH_2CH_2CH_2OH > CH_3(CH_2)_3OH > CH_3(CH_2)_4OH > \ldots$

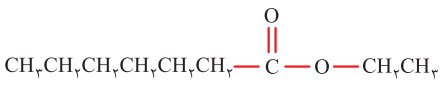
متانول — اتانول — ۱-پروپانول — ۱-بوتانول — ۱-پنتانول — ۱-هگزانول

به خوبی در آب حل می‌شوند.

بنابراین سنگین‌ترین الکلی که به هر نسبتی در آب حل می‌شود، ۱ـ پروپانول (C_3H_7OH) است. شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی این الکل نیز برابر با ۸ است.

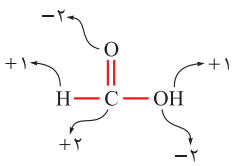
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نخستین عضو خانوادهٔ آمین‌ها، متیل آمین (CH_5N) است که مجموع شمار اتم‌ها در آن، برابر با ۷ می‌باشد، اما در ساختار اتیل هپتانوات (استر سازندهٔ طعم انگور)، ۶ گروه CH_2 وجود دارد:



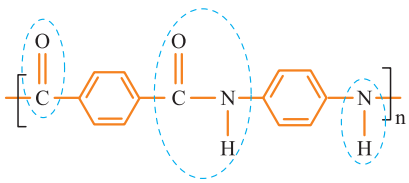
اتیل هپتانوات

گزینهٔ (۳): نخستین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها، متانوئیک اسید (CH_2O_2) است. در ساختار این اسید، اتم‌های هیدروژن و اتم کربن، دارای عدد اکسایش مثبت و اتم‌های اکسیژن، دارای عدد اکسایش منفی هستند؛ در نتیجه ۳ اتم در ساختار این اسید، عدد اکسایش مثبت دارند:

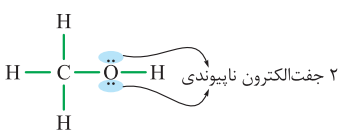


متانوئیک اسید

در حالی که در ساختار هر واحد تکرارشونده در کولار، ۲ گروه عاملی آمیدی وجود دارد:

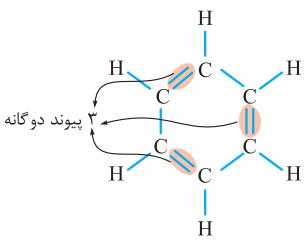


گزینهٔ (۴): نخستین عضو خانوادهٔ الکل‌ها، متانول (CH_4OH) است. در ساختار متانول، ۲ جفت‌الکترون ناپیوندی در اطراف اتم اکسیژن وجود دارد:



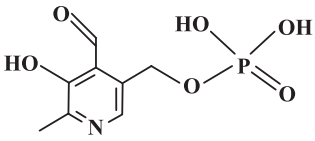
متانول

در حالی که بنزن (C_6H_6)، دارای ۳ پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن $(C=C)$ در ساختار خود است.



بنزن

۹۶ ساختار زیر مربوط به پیریدوکسال فسفات، شکل فعال ویتامین ب۶ است که کوآنزیم برخی از واکنش‌های آنزیمی در موجودات زنده است.



با توجه به آن چند مورد از موارد زیر درست است؟

- دارای گروه‌های عاملی هیدروکسیل، آلدهید و آمین است.
- در ساختار آن، ۱۳ جفت‌الکترون ناپیوندی در لایهٔ آخر اتم‌ها وجود دارد.
- در واکنش با دو مول هیدروژن، همهٔ پیوندهای دوگانه در آن به پیوند یگانه تبدیل می‌شوند.
- فرمول مولکولی آن به صورت $C_8H_{10}NO_6P$ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره برای حل این تست، باید با گروه‌های عاملی، پیوندهای دوگانه، جفت‌الکترون‌های ناپیوندی و فرمول مولکولی آشنا باشید.

پاسخ خیلی تشریحی

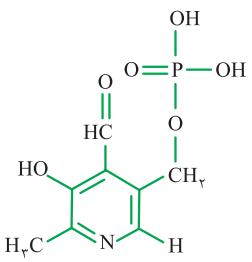
عبارت‌های دوم و چهارم درست هستند.

عبارت اول: پیریدوکسال فسفات دارای گروه‌های عاملی هیدروکسیل و آلدهید است، اما *فاقد گروه عاملی آمین* است.

عبارت دوم: برای شمارش جفت‌الکترون‌های ناپیوندی، به هر اتم اکسیژن، دو جفت‌الکترون ناپیوندی و به اتم نیتروژن، یک جفت‌الکترون ناپیوندی نسبت می‌دهیم. با جمع‌بندی این تعداد، به عدد ۱۳ می‌رسیم.

عبارت سوم: برای تبدیل هر مول پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن به یگانه، یک مول هیدروژن (H_2) لازم است. بنابراین برای این تبدیل، دو مول هیدروژن نیاز است، اما تنها پیوندهای دوگانهٔ کربن ـ کربن به یگانه تبدیل می‌شود نه همهٔ پیوندهای دوگانه!

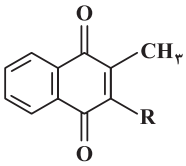
عبارت چهارم: با شمارش اتم‌های کربن، هیدروژن، نیتروژن، اکسیژن و فسفر در ساختار پیریدوکسال فسفات، به فرمول مولکولی $C_8H_{10}NO_6P$ می‌رسیم.



گول نخوری

- دام تست در این سؤال، عدم توجه به تفاوت بین گروه عاملی آمین ($R-\underset{\displaystyle R'}{\overset{\displaystyle |}{N}}-R''$) و نیتروژن موجود در حلقه است.
- هم‌چنین ممکن است داوطلب در شمارش جفت‌الکترون‌های ناپیوندی و یا محاسبهٔ تعداد مولکول‌های هیدروژن لازم برای تبدیل پیوندهای دوگانه به یگانه دچار اشتباه شود.

۹۷ ساختار داده‌شده، مربوط به ویتامین **K** با فرمول مولکولی $C_{۳۱}H_{۴۶}O_۲$ است که در آن، **R** زنجیر هیدروکربنی می‌باشد. کدام موارد زیر دربارهٔ آن درست است؟ $(O = ۱۶\,g.mol^{-۱})$



الف) در ساختار آن، ۴ پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن $(C=C)$ وجود دارد.

ب) برای سوختن کامل نیم‌مول از آن، به ۶۴۶ گرم گاز اکسیژن نیاز است.

پ) همانند ویتامین‌های **A** و **D**، آبگریز بوده ولی برخلاف آن‌ها، آروماتیک است.

ت) در ساختار آن، ۷۳ پیوند اشتراکی یگانه وجود دارد.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت

۳) پ ـ ت ۴) ب ـ پ

مشاوره سال‌هاست که در کنکورهای سراسری، یکی از سؤالات ثابت، *اینه که!* یک ترکیب *آلی بزرگ و ناشناخته می‌دن!* و عبارت‌هایی را دربارهٔ آن مطرح می‌کنند. در این تست‌ها، مهم‌ترین نکته، رعایت دقت در تمامی مراحل حل است، چراکه با کوچک‌ترین اشتباهی، هم *تست* و هم *زمان خود را از دست خواهید داد!*

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف)

نکته برای تعیین شمار اتم‌های هیدروژن در یک ترکیب آلی، می‌توان شمار اتم‌های کربن آن را شمرد و سپس تغییرات زیر را بر روی شمار اتم‌های هیدروژن آلکان هم‌کربن با آن $(C_nH_{۲n+۲})$ اعمال کرد.

- هر حلقه: $-۲H$
- هر پیوند دوگانه: $-۲H$
- هر پیوند سه‌گانه: $-۴H$
- هر اتم N یا P: $+H$
- هر اتم هالوژن $(I\text{ و }Br، Cl، F)$: $-H$
- اتم‌های O و S: بدون تغییر

شمار اتم‌های هیدروژن $= ۲n+۲-$ (شمار حلقه‌ها $\times ۲$) $-$ (شمار پیوندهای دوگانه $\times ۲$) $-$ (شمار پیوندهای سه‌گانه $\times ۴$) $+$ (شمار اتم‌های N یا P $\times ۱$) $-$ (شمار اتم‌های هالوژن $\times ۱$)

با توجه به فرمول مولکولی ویتامین K، درمی‌یابیم که این ویتامین، ۱۸ اتم هیدروژن کم‌تر از آلکان هم‌کربن خود دارد. در ساختار داده‌شده، ۶ پیوند دوگانه و ۲ حلقه وجود دارد؛ در نتیجه می‌توان گفت که گروه R نیز باید یک پیوند دوگانه در ساختار خود داشته باشد تا *فرمول مولکولی جفت و جور از آب دربیاید!*

بنابراین در ساختار این ویتامین در مجموع ۷ پیوند دوگانه وجود دارد، ۲ پیوند دوگانه $C=O$ و ۵ پیوند دوگانه $C=C$!

ب) معادلهٔ موازنه‌شدهٔ سوختن کامل ویتامین K، *این‌جوریاست:*

$$۲C_{۳۱}H_{۴۶}O_۲ + ۸۳O_۲ \rightarrow ۶۲CO_۲ + ۴۶H_۲O$$

جرم گاز $O_۲$ مورد نیاز برای سوختن کامل ۰/۵ مول ویتامین K برابر است با:

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{مول ضریب}}{\text{ویتامین K}\,(C_{۳۱}H_{۴۶}O_۲)} = \frac{\text{جرم}}{\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{O_۲}} \rightarrow \frac{۰/۵}{۲} = \frac{x}{۸۳ \times ۳۲} \rightarrow x = ۶۶۴\,g\,O_۲$$

پ) ویتامین K، با توجه به بزرگ‌تربودن بخش ناقطبی آن، در آب حل نمی‌شود ولی در چربی محلول است. در ویتامین‌های A و D نیز بخش ناقطبی (هیدروکربنی) بر بخش قطبی غلبه دارد؛ پس این مولکول‌ها هم، مانند ویتامین K در آب حل نمی‌شوند، در حالی که در چربی حل می‌شوند. هم‌چنین *هواستون باشه* که ویتامین «کا» به دلیل داشتن حلقهٔ بنزنی، ترکیب آروماتیک به شمار می‌رود، در حالی که ویتامین‌های A و D، فاقد حلقهٔ بنزنی در نتیجه غیرآروماتیک *تشریف دارن!*

ت) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار ویتامین K برابر است با:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی ویتامین } (C_{۳۱}H_{۴۶}O_۲)K = \frac{(۳۱\times۴)+(۴۶\times۱)+(۲\times۲)}{۲} = \frac{۱۷۴}{۲} = ۸۷$$

همان‌طور که گفتیم، در ساختار ویتامین K، در مجموع ۷ پیوند دوگانه وجود دارد، در نتیجه شمار پیوندهای اشتراکی یگانه در ساختار این ترکیب برابر است با:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی یگانه} = ۸۷ - ۲(۷) = ۷۳$$

۹۸ ۰/۸۵ گرم از یک ترکیب آلی به فرمول $C_xH_yN_zO_w$ با ۱/۶ گرم برم به طور کامل واکنش می‌دهد. با توجه به این‌که این ترکیب فقط یک پیوند دوگانهٔ $C=C$، یک گروه عاملی الکل و یک گروه عاملی آمین دارد، تعداد حلقه‌های موجود در این ترکیب کدام است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16, Br=80 : g.mol^{-1})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره برای حل این تست، باید با مفاهیم استوکیومتری، جرم مولی و ساختار ترکیبات آلی آشنا باشید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: محاسبهٔ مول برم

ابتدا مول واکنش داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$1/6\,g\,Br_2 \times \frac{1\,mol\,Br_2}{160\,g\,Br_2} = 0/01\,mol\,Br_2$$

گام دوم: محاسبهٔ مول ترکیب آلی

از آن‌جایی که هر مولکول Br_2 با یک پیوند دوگانهٔ $C=C$ واکنش می‌دهد و ترکیب آلی فقط یک پیوند دوگانه دارد، پس مول ترکیب آلی برابر با مول Br_2 است:

$$\text{مول } C_xH_yN_zO_w = 0/01\,mol$$

گام سوم: محاسبهٔ جرم مولی ترکیب آلی

با استفاده از جرم و مول ترکیب آلی، جرم مولی آن را محاسبه می‌کنیم:

$$1\,mol\,C_xH_yN_zO_w \times \frac{0/85\,g\,C_xH_yN_zO_w}{0/01\,mol\,C_xH_yN_zO_w} = 85\ g$$

گام چهارم: محاسبهٔ مجموع شمار اتم‌های کربن و هیدروژن

با توجه به جرم مولی ترکیب آلی و فرمول آن، می‌توانیم معادله‌ای برای جرم مولی آن بنویسیم:

$$12x+1y+14z+16w=85$$

از آن‌جایی که این ترکیب فقط یک گروه عاملی الکل و یک گروه عاملی آمین دارد، پس باید حداقل یک اتم اکسیژن و یک اتم نیتروژن در ساختار آن وجود داشته باشد. با در نظر گرفتن حداقل مقدار برای z و w $(z=w=1)$ معادله به صورت زیر درمی‌آید:

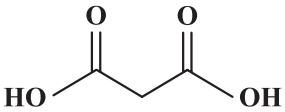
$$12x+y=55$$

با جای‌گذاری مقادیر مختلف برای y و x، به دنبال جواب‌های صحیح و منطقی برای این معادله می‌گردیم. با کمی بررسی متوجه می‌شویم که $x=4$ و $y=7$ یک جواب مناسب برای این معادله است.

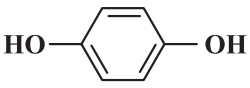
بنابراین فرمول ترکیب مورد نظر C_4H_7NO است. حالا با توجه به فرمول تعداد هیدروژن‌ها، تعداد حلقه‌های آن برابر ۱ خواهد بود:

$$7=\underbrace{(4\times2)+2}_{\substack{\text{شمار اتم‌های H}\\ \text{در آلکان هم‌کربن}}}-\underbrace{(2\times1)}_{\text{پیوند دوگانه}}-(2\times\text{تعداد حلقه})+\underbrace{1}_{\text{اتم N}} \Rightarrow \text{تعداد حلقه}=1$$

۹۹ اگر ۲۶۰۰ گرم دی‌اسید **A** با خلوص ۴۰ درصد با مقدار کافی دی‌الکل **B** با بازده ۷۵ درصد واکنش دهد، چند گرم پلی‌استر تولید می‌شود؟



(A)



(B)

۱) ۶۶۷/۵ ۲) ۱۶۰۵

۳) ۸۰۲/۵ ۴) ۱۳۳۵

Hint ابتدا معادلهٔ واکنش دی‌اسید A با دی‌الکل B و تشکیل پلی‌استر را بنویس، سپس جرم پلی‌استر حاصل را با توجه به مقدار دی‌اسید مصرفی محاسبه کن.

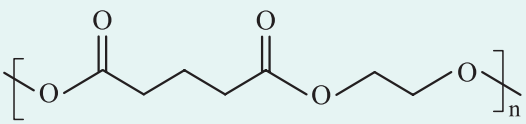
درس Box

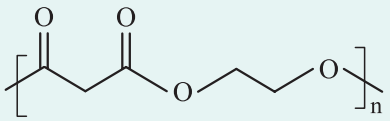
رسم ساختار پلی‌استر حاصل از واکنش یک دی‌اسید و یک دی‌الکل:

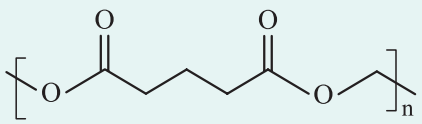
برای رسم ساختار پلی‌استر *کافیه* H موجود در گروه عاملی هیدروکسیل(OH —) و OH موجود در گروه عاملی کربوکسیل(COOH —) را حذف کرده، سپس قسمت‌های باقی‌مانده را به هم متصل کنیم.

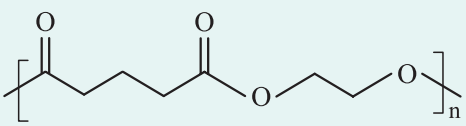
تمرین: کدام گزینه، پلی‌استر تولیدشده از واکنش اسید A و الکل B، در شرایط مناسب را به درستی نشان می‌دهد؟

$A: HOOC(CH_2)_3COOH$ $B: HOCH_2CH_2OH$

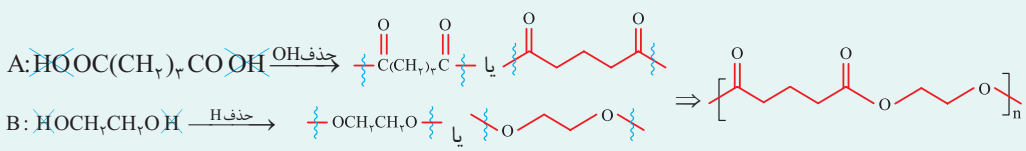
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ «۴»



نکته برای نوشتن فرمول واحد تکرارشونده در پلی‌استرها با استفاده از فرمول مولکولی دی‌الکل و دی‌اسید، کافی است ۲ گروه OH از دی‌اسید و ۲ اتم H از دی‌الکل جدا کنیم، سپس فرمول‌های باقی‌مانده را با هم جمع کنیم یا می‌شه *این‌جوری گفت*؛

$(C = C_1 + C_2)$ کربن دی‌اسید + کربن دی‌الکل = تعداد کربن در واحد تکرارشوندهٔ پلی‌استر

$(H = H_1 + H_2 - 4)$ هیدروژن دی‌اسید + هیدروژن دی‌الکل − ۴ = تعداد هیدروژن در واحد تکرارشوندهٔ پلی‌استر

$\underbrace{\text{اکسیژن دی‌الکل}}_{2} + \underbrace{\text{اکسیژن دی‌اسید}}_{4} - 2 = 4$ = تعداد اکسیژن در واحد تکرارشوندهٔ پلی‌استر

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** واکنش تولید پلی‌استر را می‌نویسیم:



$C_۴H_۴O_۴$ $\quad$ $C_۶H_۶O_۲$ $\quad$ $+(C_۹H_۶O_۴)_n$ $\quad$ $+۲nH_۲O$

یه‌جور دیگه با توجه به فرمول مولکولی دی‌اسید A و دی‌الکل B، فرمول واحد تکرارشوندهٔ پلیمر حاصل را می‌یابیم:



دی اسید A: $C_۴H_۴O_۴$ ، دی‌الکل B: $C_۶H_۶O_۲$

$$\Downarrow$$

واحد تکرارشوندهٔ پلیمر حاصل: $C = C_۱ + C_۲ = ۳ + ۶ = ۹$ ، $H = H_۱ + H_۲ - ۴ = ۴ + ۶ - ۴ = ۶$ ،

$$O = O_۱ + O_۲ - ۲ = ۴ + ۲ - ۲ = ۴$$

$\Rightarrow$ فرمول پلی‌استر: $(C_۹H_۶O_۴)_n$

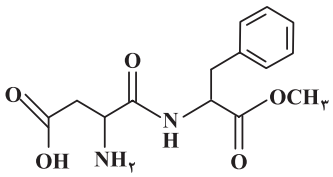
در نتیجه معادله واکنش را می‌توان به صورت مقابل نشان داد: $nC_۴H_۴O_۴ + nC_۶H_۶O_۲ \rightarrow (C_۹H_۶O_۴)_n + ۲nH_۲O$

گام دوم: جرم پلی‌استر حاصل را محاسبه می‌کنیم:

$$\underbrace{\text{جرم} \times \frac{\text{درصدخلوص}}{۱۰۰} \times \frac{\text{بازده‌درصدی}}{۱۰۰}}_{\text{دی‌اسید}} = \underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم‌مولی} \times \text{ضریب}}}_{\text{پلی‌استر}} \Rightarrow \frac{۲۶۰۰ \times \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۷۵}{۱۰۰}}{n \times ۱۰۴} = \frac{x}{۱۷۸n} \Rightarrow x = ۱۳۳۵\,g \text{ پلی‌استر}$$

۱۰۰ با توجه به ساختار مولکول آسپارتام (شیرین‌کنندهٔ مصنوعی)، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

$(H=۱, C=۱۲, N=۱۴, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$



- نسبت جرم اتم‌های نیتروژن به اکسیژن در آن، برابر ۰/۳۵ است.
- نسبت تعداد اتم‌های هیدروژن به کربن در آن، به تقریب برابر ۱/۴۳ است.
- جرم اتم‌های کربن موجود در ۰/۲ مول از این ماده، برابر ۳۳/۶ گرم است.
- درصد جرمی کربن در این مولکول، به تقریب برابر ۴۷/۱۴ درصد است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره برای حل این تست، باید از روی ساختار مولکولی آسپارتام، فرمول مولکولی آن را به دست آورده و با مفاهیم استوکیومتری آشنا باشید و بتوانید جرم اتمی، جرم مولی و درصد جرمی را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های اول و سوم درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

- ابتدا جرم اتم‌های نیتروژن و اکسیژن را در یک مولکول آسپارتام محاسبه می‌کنیم:

جرم اتم‌های نیتروژن: ۲ (تعداد اتم‌های نیتروژن) × ۱۴ (جرم مولی نیتروژن) $= ۲۸ g$

جرم اتم‌های اکسیژن: ۵ (تعداد اتم‌های اکسیژن) × ۱۶ (جرم مولی اکسیژن) $= ۸۰ g$

نسبت جرم اتم‌های نیتروژن به اکسیژن: $\frac{۲۸}{۸۰} = ۰/۳۵$

- تعداد اتم‌های هیدروژن و کربن در یک مولکول آسپارتام به ترتیب برابر ۱۸ و ۱۴ است، بنابراین نسبت تعداد اتم‌های هیدروژن به کربن برابر است با:

$$\frac{۱۸}{۱۴} \simeq ۱/۲۹$$

- برای محاسبهٔ جرم اتم‌های کربن در ۰/۲ مول آسپارتام، از روش کسر تبدیل استفاده می‌کنیم:

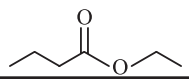
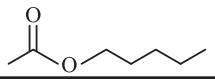
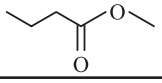
$$۰/۲ \text{mol آسپارتام} \times \frac{۱۴ \text{mol C}}{۱ \text{mol آسپارتام}} \times \frac{۱۲ \text{g C}}{۱ \text{mol C}} = ۳۳/۶ \text{g C}$$

- درصد جرمی کربن در آسپارتام برابر است با:

$$\text{درصد جرمی کربن در اسپارتام} = \frac{\text{جرم اتم‌های کربن}}{\text{جرم آسپارتام}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۶۸}{۲۹۴} \times ۱۰۰ \simeq ٪۵۷/۱$$

نکته دقت در شمارش اتم‌ها و انجام محاسبات، نقش مهمی در رسیدن به جواب صحیح دارد.

۱۰۱ با توجه به جدول زیر، کدام مورد نادرست است؟ $(H=۱, C=۱۲, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$

آناناس	موز	سیب	نام میوه
			ساختار استر

۱) جرم مولی استر موجود در آناناس، دو برابر جرم مولی استون بوده و زنجیر هیدروکربنی متصل به اتم اکسیژن در آن، دارای ۵ اتم هیدروژن است.

۲) برای تهیهٔ عامل ایجاد بوی سیب می‌توان از واکنش متانول و بوتانوئیک اسید استفاده کرد که یک واکنش اکسایش ـ کاهش محسوب می‌شود.

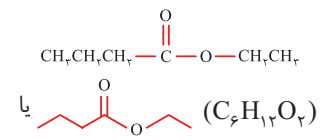
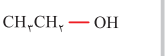
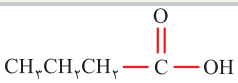
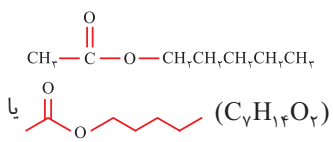
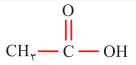
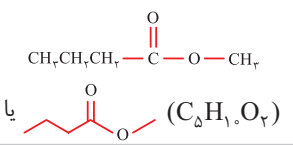
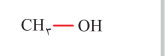
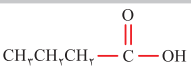
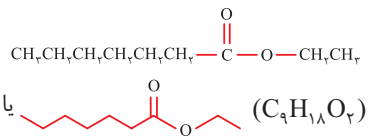
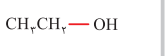
۳) الکل سازندهٔ بوی موز، محلول در آب است.

۴) درصد جرمی کربن در اسید سازندهٔ استر موجود در سیب، بیشتر از درصد جرمی کربن در استیک اسید است.

مشاوره شناسایی اسید و الکل سازندهٔ استرها از مباحث بسیار مهم است و تاکنون بارها در کنکورهای سراسری مورد پرسش واقع شده است. با حل و بررسی این تست که دربارهٔ استرهای عامل بو و طعم برخی از میوه‌ها است، می‌توانید این مبحث را به خوبی تمرین کنید.

درس Box

استرها، *عاملان اصلی!* سازندهٔ بوی گل‌ها و طعم میوه‌ها هستند. کتاب درسی به ۴ مورد خاص! در صفحه‌های ۱۱۰ و ۱۱۵ اشاره کرده که ما *همشون رو این‌جا براتون آوردیم!*

نام میوه	نام استر سازنده	ساختار استر سازنده	نام و ساختار الکل سازنده	نام و ساختار کربوکسیلیک اسید سازنده
آناناس	اتیل بوتانوات	 $(C_۶H_{۱۲}O_۲)$	 اتانول $(C_۲H_۶O)$	 بوتانوئیک اسید $(C_۴H_۸O_۲)$
موز	پنتیل اتانوات	 $(C_۷H_{۱۴}O_۲)$	 ۱ــ پنتانول $(C_۵H_{۱۲}O)$	 اتانوئیک اسید $(C_۲H_۴O_۲)$
سیب	متیل بوتانوات	 $(C_۵H_{۱۰}O_۲)$	 متانول $(CH_۴O)$	 بوتانوئیک اسید $(C_۴H_۸O_۲)$
انگور	اتیل هپتانوات	 $(C_۹H_{۱۸}O_۲)$	 اتانول $(C_۲H_۶O)$	 هپتانوئیک اسید $(C_۷H_{۱۴}O_۲)$

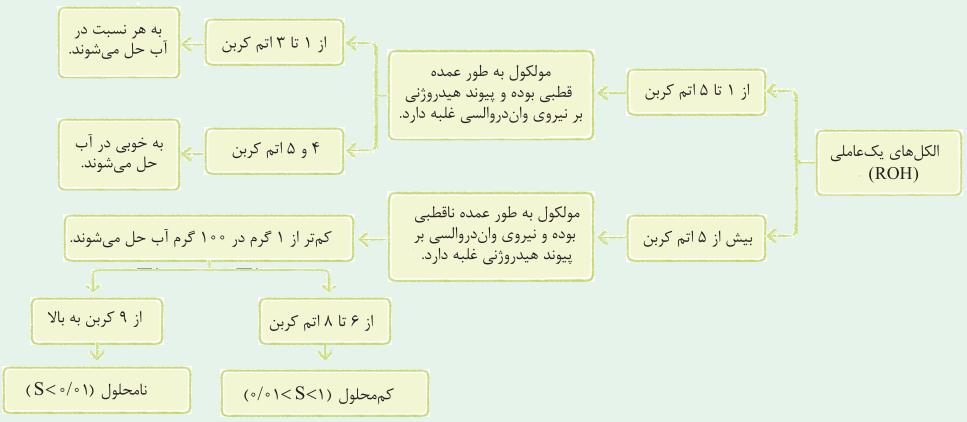
الکل و اسید سازندهٔ استر عامل بوی سیب (متیل بوتانوات)، به ترتیب متانول و بوتانوئیک اسید هستند. اما *خواستون باشه که* واکنش‌های استری‌شدن از نوع اکسایش ـ کاهش نیستند و عدد اکسایش هیچ اتمی در طی این واکنش‌ها تغییری نمی‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): بو و طعم آناناس، ناشی از وجود استری به نام اتیل بوتانوات $(C_۶H_{۱۲}O_۲)$ در آن است. فرمول مولکولی استون $C_۳H_۶O$، () است. *واضحه* که فرمول مولکولی $C_۶H_{۱۲}O_۲$، مضرب ۲ از فرمول مولکولی $C_۳H_۶O$ هستش! بنابراین جرم مولی‌اش هم *دو برابره!*

گزینهٔ (۳):

نکته



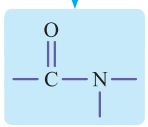
الکل سازندهٔ استر موجود در موز، ۱- پنتانول $(C_5H_{12}O)$ است که در آب به خوبی حل شده و در *واقع محلول در آبه!*

گزینهٔ (۴): اسید سازندهٔ استر موجود در سیب، بوتانوئیک اسید $(C_4H_8O_2)$ است:

$$\text{درصد جرمی کربن در بوتانوئیک اسید } (C_4H_8O_2) = \frac{4(12)}{4(12)+8(1)+2(16)} \times 100 = \%54/5$$

$$\text{درصد جرمی کربن در استیک اسید } (C_2H_4O_2) = \frac{2(12)}{2(12)+4(1)+2(16)} \times 100 = \%40$$

۱۰۲ در ساختار کولار، اتم ..... وجود دارد و این ترکیب ..... شاخ حیوانات در ساختار خود دارای گروه عاملی آمیدی بوده و از فولاد ..... خود پنج برابر مقاوم‌تر است.



۱) اکسیژن ـ همانند ـ هم‌جرم

۲) نیتروژن ـ همانند ـ هم‌حجم

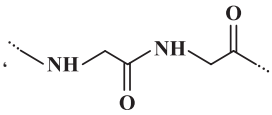
۳) اکسیژن ـ برخلاف ـ هم‌حجم

۴) نیتروژن ـ برخلاف ـ هم‌جرم

پاسخ خیلی تشریحی ✔

مو، ناخن، پوست بدن انسان، شاخ حیوانات و پشم گوسفند نمونه‌ای از پلی‌آمیدهای طبیعی هستند و کولار نیز، پلی‌آمیدی ساختگی است. در ساختار پلی‌آمیدها، اتم‌های هیدروژن، کربن، اکسیژن و نیتروژن وجود دارد. کولار پلی‌آمیدی ساختگی بوده و از فولاد هم‌جرم خود ۵ برابر مقاوم‌تر است. از کولار در تهیهٔ تایر اتومبیل، قایق بادبانی، لباس‌های مخصوص مسابقهٔ موتورسواری و جلیقه‌های ضدگلوله استفاده می‌شود.

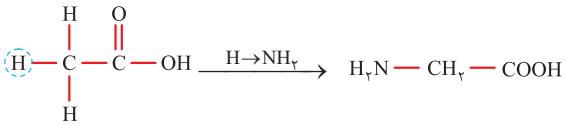
۱۰۳ اگر در مولکول استیک اسید، به جای یکی از اتم‌های هیدروژن گروه متیل، یک گروه NH_2 قرار گیرد، چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ ترکیب به‌دست‌آمده، نادرست است؟

- ترکیب به‌دست‌آمده، دارای گروه عاملی آمیدی است.
- مجموع شمار جفت الکترون‌های پیوندی در آن، دو برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی لایهٔ ظرفیت اتم‌های آن است.
- در مقادیر زیاد، می‌تواند با مولکول‌های خود واکنش داده و پلیمری با ساختار  تولید کند.
- این ترکیب، قادر به تشکیل پیوندهای هیدروژنی میان مولکول‌های خود می‌باشد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

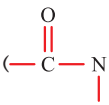
پاسخ خیلی تشریحی ✔ تنها عبارت اول، نادرست است.

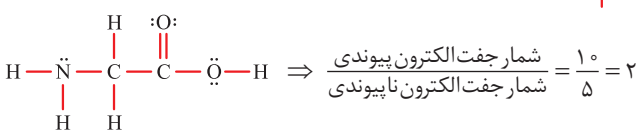
ابتدا ساختار ترکیب به‌دست‌آمده را می‌یابیم:



استیک اسید

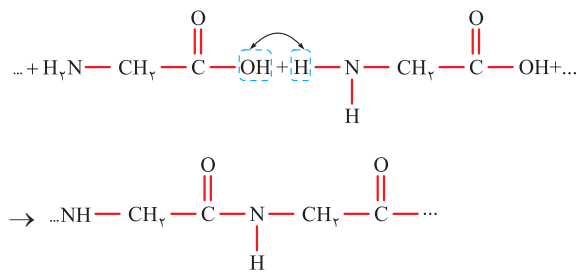
حالا! می‌ریم سراغ بررسی عبارت‌ها:

- ترکیب به‌دست‌آمده، فاقد گروه عاملی آمیدی() بوده و به همین دلیل آمید محسوب نمی‌شود.
- *خودتون ساختار لوویس کاملشو ببینید:*



$$\frac{\text{شمار جفت‌الکترون پیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون ناپیوندی}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

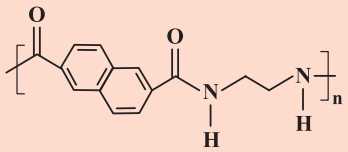
- ترکیب به‌دست‌آمده دارای هر دو گروه عاملی اسیدی و آمینی است، پس می‌تواند با مولکول‌های خود واکنش داده و در نهایت به یک پلی‌آمید تبدیل شود.



- با توجه به این‌که در ساختار ترکیب به‌دست‌آمده، اتم H متصل به اتم‌های O و N وجود دارد، در نتیجه می‌توان گفت که این ترکیب، قادر به تشکیل پیوندهای هیدروژنی میان مولکول‌های خود می‌باشد.

۱۰۴ در پلیمری با ساختار زیر، تفاوت جرم مولی دی‌آمین و دی‌اسید به‌کاررفته برای تهیهٔ آن، چند گرم است؟

$(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

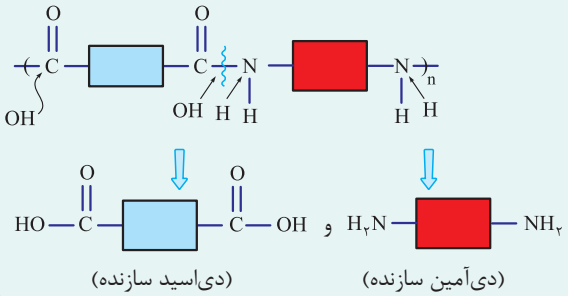


۱) ۱۵۶ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۵۲ ۴) ۱۶۴

مشاوره تعیین مونومرهای سازندهٔ پلی‌استرها و پلی‌آمیدها، از مباحثی است که بارها در کنکورهای سراسری تکرار شده و به همین دلیل *لازمه که* تسلط کافی در این مبحث حاصل کنید و بتوانید *تو سه سوت!* مونومرهای سازندهٔ پلی‌استرها و پلی‌آمیدها را شناسایی کنید.

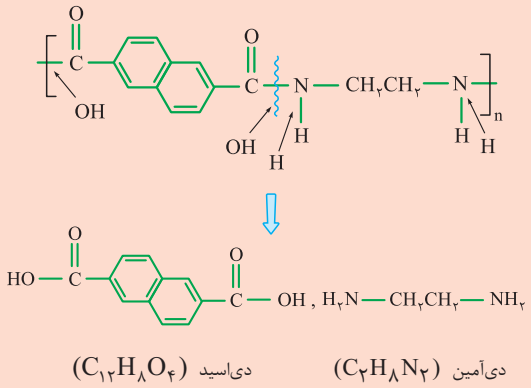
درس Box

برای تعیین اسید و آمین سازندهٔ یک پلی‌آمید، ابتدا پیوند بین عامل($-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-$) و اتم نیتروژن را در گروه آمیدی می‌شکنیم. سپس به عامل($-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-$) (یعنی قسمت اسیدی)، OH و به اتم نیتروژن (یعنی قسمت آمینی)، H اضافه می‌کنیم. همین کار را برای عامل $-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-$ و اتم نیتروژن در دو انتهای واحد تکرارشوندهٔ پلیمر نیز انجام می‌دهیم.



(دی‌اسید سازنده) (دی‌آمین سازنده)

پاسخ خیلی تشریحی

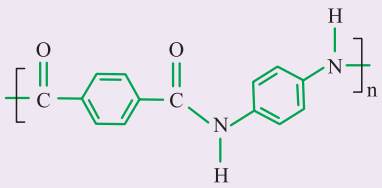


دی‌اسید $(C_{12}H_8O_4)$ دی‌آمین $(C_2H_8N_2)$

$$\Rightarrow \text{جرم‌مولی } C_{12}H_8O_4 - \text{جرم‌مولی } C_2H_8N_2$$
$$= [12(12)+8(1)+4(16)] - [2(12)+8(1)+2(14)]$$
$$= 216 - 60 = 156\,g$$

در پلیمری با ساختار زیر، تفاوت جرم مولی دی‌آمین و دی‌اسید به‌کاررفته برای تهیهٔ آن، چند گرم است؟ *(تجربی ۹۸)*

$(O=16, N=14, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$



۱) ۵۴
۲) ۵۸
۳) ۶۲
۴) ۶۴

۱۰۵ چند مورد از مطالب زیر درست است؟

پلی‌اتن سبک

- از پلی‌لاکتیک اسید، همانند پلی‌اتن شاخه‌دار، می‌توان در ساخت کیسهٔ پلاستیکی استفاده کرد.

$C_{12}H_{22}O_{11}$

- نشاسته، پلی‌ساکاریدی است که از به هم پیوستن مولکول‌های فراورده واکنش مالتوز با آب، تولید می‌شود.
- برای تهیهٔ پلی‌لاکتیک اسید، باید لاکتیک اسید موجود در گیاه سیب‌زمینی را در واکنش بسپارش شرکت داد.
- در واکنش تهیهٔ پلیمرهایی مانند سلولز، کولار و پلی‌استرها، مونومرها با از دست دادن مولکول آب به یکدیگر متصل می‌شوند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- همانند پلی‌اتن شاخه‌دار که سبک و شفاف است، از پلی‌لاکتیک اسید نیز می‌توان در ساخت کیسهٔ پلاستیکی استفاده کرد. *البته خواستون باشه که کیسهٔ پلاستیکی تهیه‌شده از پلی‌لاکتیک اسید، زیست‌تخریب‌پذیره!*
- نشاسته، پلی‌ساکاریدی است که از اتصال مولکول‌های گلوکز به یکدیگر تشکیل شده است. در واقع نشاسته یک پلیمر طبیعی است که مونومر سازندهٔ آن گلوکز می‌باشد. هم‌چنین فراوردهٔ واکنش مالتوز با آب نیز گلوکز است:

$$\underset{\text{مالتوز}}{C_{12}H_{22}O_{11}(aq)} + H_2O(l) \rightarrow \underset{\text{گلوکز}}{2C_6H_{12}O_6(aq)}$$

- *خواستون باشه که* گیاه سیب‌زمینی، حاوی لاکتیک اسید نیست. این گیاه حاوی نشاسته بوده و با استفاده از نشاستهٔ موجود در این گیاه، می‌توان لاکتیک اسید را تولید کرد. از لاکتیک اسید، در واکنش تولید پلی‌لاکتیک اسید استفاده می‌شود.
- برخلاف تهیهٔ پلی‌اتن و مشتقات آن، واکنش تهیهٔ پلی‌استرها و پلی‌آمیدها (مانند کولار) و هم‌چنین پلیمرهایی مانند سلولز و نشاسته، با تولید آب همراه است.