آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله سوم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۲۶/مرداد/۱۴۰۳

بودجه‌بندی دروس

حسابان و ریاضیات پایه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	هندسه
ریاضی (۱) فصل ۵ صفحهٔ ۹۴ تا ۱۱۷ حسابان (۱) فصل ۲ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۳۷ تا ۵۳ حسابان (۲) فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۱ تا ۱۲	آمار و احتمال فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۳۴ ریاضیات گسسته فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۱ تا ۸	هندسه (۱) فصل ۲ صفحهٔ ۲۹ تا ۵۲ هندسه (۳) فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۹ تا ۲۱

فیزیک	شیمی
فیزیک (۱) فصل ۲ (از ابتدای فشار در شاره‌ها) صفحهٔ ۳۲ تا ۵۲ فیزیک (۳) فصل ۱ (تا ابتدای حرکت با شتاب ثابت) صفحهٔ ۱ تا ۱۵	شیمی (۱) فصل ۲ و فصل ۳ (از ابتدای رفتار آب و دیگر مولکول‌ها در میدان الکتریکی تا ابتدای آیا گازها هم در آب حل می‌شوند؟) صفحهٔ ۴۵ تا ۸۴ و ۱۰۳ تا ۱۱۳ شیمی (۳) فصل ۱ (تا ابتدای اسیدها و بازها) صفحهٔ ۱ تا ۱۳

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۳۰ دقیقه
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۱۰	۱۹	۲۸	۲۰ دقیقه
هندسه	۱۲	۲۹	۴۰	۲۵ دقیقه
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۵ دقیقه
مجموع	۱۰۵ سؤال			۱۵۵ دقیقه

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

حسابان و ریاضیات پایه

۱- حداقل چند زوج مرتب از رابطهٔ $f=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z},|x|(|y|+۲)=۶\}$ باید حذف شود تا به یک تابع برسیم؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

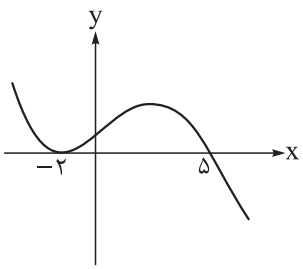
۲- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{(m-۱)x^۲-۱۲x+n}$ به صورت $\mathbb{R}-\{m\}$ است. حداقل مقدار ممکن برای mn کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۶ ۴) ۴۸

۳- دامنهٔ هر دو تابع $f(x)=۲x-a$ و $g(x)=a-x$ بازهٔ $[-۲,۱]$ است. اگر اشتراک برد دو تابع بازهٔ $[۰,۱]$ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. به ازای کدام زوج مرتب (a,b)، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{(ax+b)f(x)}$ کل اعداد حقیقی است؟



۱) $(-۱۰,-۲)$ ۲) $(-۲,۱۰)$

۳) $(۳,-۱۵)$ ۴) $(۲۰,۴)$

۵- تابع $f(x)=(ax+۶)^۲-(۳x+۲a)^۲$ به همراه تابع خطی g مفروض‌اند. اگر تابع $y=f(x)+g(x)$ همانی باشد، مقدار $g(a)$ کدام است؟

۱) ۲ یا ۳− ۲) ±۳

۳) ۲− یا ۳ ۴) ±۲

۶- دامنهٔ تابع $f(x)=۲x+\sqrt{(a-۱)x^۲+bx+a-۳}$ بازهٔ $[۲,+\infty)$ است. دامنهٔ تابع $g(x)=x-\sqrt{b-۲ax}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۲]$ ۲) $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$

۳) $[-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۴) $[۲,+\infty)$

۷- تابع $f(x)=۲x+[x]$ مفروض است. اگر $f(mf(\frac{۷}{۲}))=۴$ باشد، حاصل $[\frac{۱}{m}]$ کدام است؟

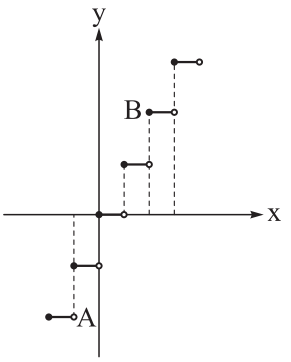
۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۸- دو تابع $f=\{(۲,۲a),(۴,۶),(۶,۲-۳a)\}$ و $y=f(b-x)$ مساوی‌اند. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۸/۴ ۲) ۲/۷ ۳) ۴/۶ ۴) ۶/۸

۹- قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{۱}{a}[۲ax]$ به صورت مقابل است. شیب خط شامل پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۳ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{x+۳}{۲}=[\frac{x+۲}{۳}]$ کدام است؟

۱) -۱۷ ۲) -۱۶

۳) -۱۲ ۴) -۲۱

۱۱- اختلاف حداقل و حداکثر مقدار تابع $f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$ کدام است؟

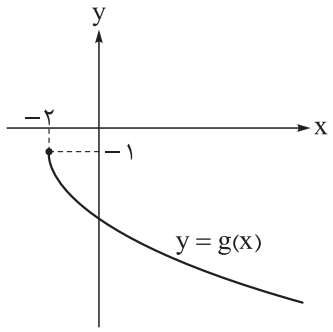
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۲- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=x^۲+۴x$ را نسبت به مبدأ مختصات ۳ واحد به چپ انتقال می‌دهیم. مجموع طول‌های نقاط تلاقی نمودار جدید با نمودار تابع f کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲

۳) ۳ ۴) -۳

۱۳- نمودار تابع g، فقط از انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و قرینه‌یابی آن نسبت به محورهای مختصات به دست آمده است. مقدار $(gof)(-۴۶)$ کدام است؟



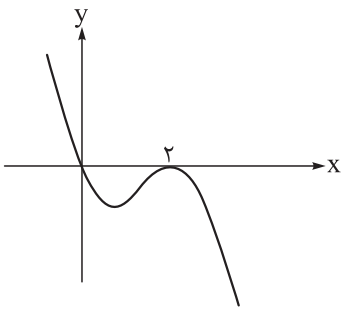
۱) -۶
۲) -۳
۳) -۴
۴) -۵

محل انجام محاسبات

۱۴- نقطهٔ $A(2,a)$ واقع بر نمودار تابع $y=2f(\frac{x-1}{3})$ با نقطهٔ $A'(b,2)$ واقع بر نمودار تابع $y=1-3f(\frac{x}{2})$ متناظر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) -2 ۴) -4

۱۵- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{xf(x)}{f(2-x)}}$ کدام است؟



۱) $(0,2)$

۲) $(-\infty,0)$

۳) $(-\infty,2)-\{0\}$

۴) $(2,+\infty)$

۱۶- نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ را نسبت به محورهای مختصات قرینه می‌کنیم و سپس آن را ۱۰ واحد به بالا انتقال می‌دهیم. مساحت بین نمودار نهایی و نمودار تابع f کدام است؟

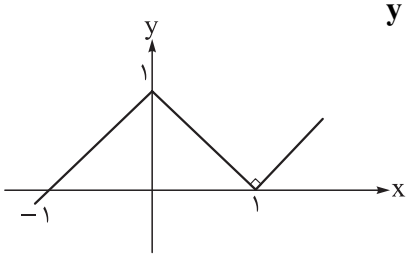
۱) ۴۲ ۲) ۴۸

۳) ۳۶ ۴) ۵۲

۱۷- چندجمله‌ای $f(x)$، n ریشهٔ دوبه‌دو متمایز دارد، به طوری‌که مجموع آن‌ها برابر ۱۲ است. اگر مجموع ریشه‌های چندجمله‌ای $f(4-3x)$ برابر ۸ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱۸- نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر نمودار تابع $y=-\frac{3}{2}x+a+f(\frac{2-3x}{2})$ فقط در بازهٔ $[m,n]$ بر محور طول‌ها منطبق باشد، حاصل $m+n+a$ کدام است؟



۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

محل انجام محاسبات

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

۱۹- کدام گزینه، یک گزاره با ارزش درست را نشان می‌دهد؟

۱) $x^۲ > ۲x$

۲) $x + ۱ > ۰$

۳) مجموع یک عدد مخالف صفر و معکوس آن، همواره مخالف ± ۱ است.

۴) حاصل‌ضرب یک عدد گویا و یک عدد گنگ، همواره یک عدد گنگ است.

۲۰- برای گزاره‌های p، q و r، ارزش کدام گزاره همواره درست است؟

۱) $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim r \wedge \sim p)$

۲) $(r \wedge \sim p) \Rightarrow (r \vee q)$

۳) $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \sim q)$

۴) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (r \vee p)$

۲۱- ارزش گزارهٔ سوری $\forall x \in \mathbb{R}; ۴x^۲ + ۱ > ۴x$ و نقیض آن در کدام گزینه آمده است؟

۱) نادرست، $\exists x \in \mathbb{Z}; ۴x^۲ + ۱ \leq ۴x$

۲) درست، $\exists x \in \mathbb{R}; ۴x^۲ + ۱ \leq ۴x$

۳) درست، $\forall x \in \mathbb{Z}; ۴x^۲ + ۱ \leq ۴x$

۴) نادرست، $\exists x \in \mathbb{R}; ۴x^۲ + ۱ \leq ۴x$

۲۲- اگر $S = \{(x,y); x \leq y \leq ۲\sqrt{x}\}$، مجموعهٔ $S \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۲۳- چند مورد از گزاره‌های زیر، مثال نقض ندارد؟

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

پ) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n - ۱$ اول است.

ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ث) اگر برای سه مجموعهٔ A، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$، آن‌گاه $B = C$.

ج) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $۴k + ۱$ مربع کامل است.

۱) ۶

۲) ۵

۳) ۴

۴) ۳

محل انجام محاسبات

۲۴- اگر $۱۰ < n < ۲۸$، به ازای چند مقدار طبیعی n، عدد $(۱+۲+\cdots+n)^۲$ بر ۴ بخش‌پذیر است؟

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۲۵- در اثبات نامساوی $(a,b \in \mathbb{R}); (a^۲+۱)(b^۲+۴) \geq ۸ab$ به روش بازگشتی، به کدام گزارهٔ همواره درست می‌رسیم؟

۱) $(ab-۱)^۲ + (b-۲a)^۲ \geq ۰$ ۲) $(ab-۲)^۲ + (b-۲a)^۲ \geq ۰$

۳) $(ab-۲)^۲ + (a-۲b)^۲ \geq ۰$ ۴) $(ab-۱)^۲ + (a-۲b)^۲ \geq ۰$

۲۶- کدام‌یک از گزاره‌های سوری زیر از لحاظ ارزش درستی با بقیه متفاوت است؟

۱) $\forall x \in \mathbb{R}; x^۲ > x$

۲) $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x+۴}{۳x} = ۲x$

۳) $\exists x \in \mathbb{R}; ۲x^۲ + ۳ < ۲\sqrt{۶}x$

۴) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^۲-۹}{x-۳} = x+۳$

۲۷- اگر U مجموعهٔ مرجع و $C = A \cup B'$، آن‌گاه مجموعهٔ $[(B-A)' \cup C] \cup [A' - (C-B')']$ برابر کدام است؟

۱) A' ۲) B

۳) C ۴) $\varnothing$

۲۸- برای این‌که ثابت کنیم «اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$، آن‌گاه $a = ۰$ یا $b = ۰$ است.» در این صورت از کدام هم‌ارزی استفاده کرده‌ایم؟

۱) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ ۲) $(p \vee q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

۳) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ ۴) $(p \vee q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

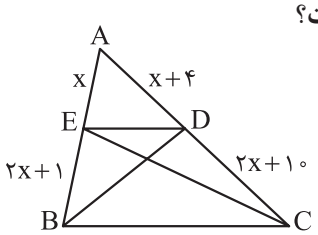
محل انجام محاسبات

هندسه دهم

۲۹- دو مثلث با محیط‌های ۱۵ و ۱۰ متشابه‌اند. اگر مساحت یکی از آن‌ها ۱۸ باشد، اختلاف مقادیر قابل قبول برای مساحت مثلث دیگر کدام است؟

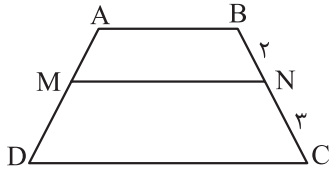
۱) ۱۵ ۲) ۳۲/۵ ۳) ۲۷ ۴) ۴۰

۳۰- مطابق شکل اگر مساحت دو مثلث CDE و BED برابر باشد، آن‌گاه $\frac{DE}{BC}$ کدام است؟



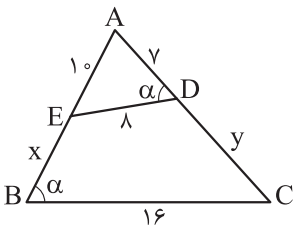
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۱۳}$ ۴) $\frac{۵}{۱۳}$

۳۱- مطابق شکل، در ذوزنقهٔ ABCD طول قاعدهٔ بزرگ سه برابر طول قاعدهٔ کوچک است. مساحت ذوزنقهٔ MNCD چند برابر مساحت ذوزنقهٔ ABNM است؟



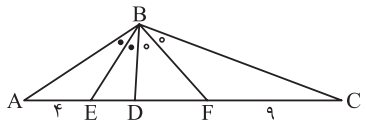
۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۱۶}{۷}$ ۴) $\frac{۱۸}{۷}$

۳۲- با توجه به شکل، حاصل $\frac{y}{x}$ کدام است؟



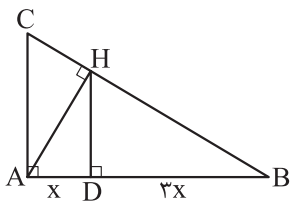
۱) ۳
۲) ۳/۵
۳) ۳/۲۵
۴) ۳/۷۵

۳۳- در مثلث ABC، نقطهٔ D روی ضلع AC چنان است که $C\hat{B}D = ۲\hat{A}$ و $A\hat{B}D = ۲\hat{C}$. اگر BE و BF به ترتیب نیمساز زاویه‌های $A\hat{B}D$ و $C\hat{B}D$ باشند، به طوری که $AE = ۴$ و $CF = ۹$، آن‌گاه طول پاره‌خط EF کدام است؟



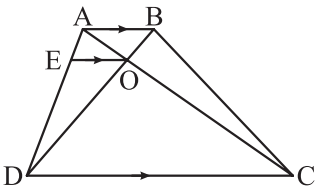
۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۸

۳۴- اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر $۸\sqrt{۳}$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۶

محل انجام محاسبات



۳۵- در ذوزنقهٔ ABCD، مطابق شکل مساحت مثلث AOE نصف مساحت مثلث DOE است. مساحت مثلث AOB چه کسری از مساحت ذوزنقهٔ ABCD است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۴}{۲۷}$

هندسه دوازدهم

۳۶- اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۲ & ۵ \\ b & -۴ & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۳ & ۲ \\ -a & -۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، ماتریس $A+\frac{b}{a}I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & -۸ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & -۹ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}$

۳۷- اگر $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ d & e & f \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $\frac{a+b+c}{d+e+f}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۸- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ و k باقی‌ماندهٔ تقسیم $i+j$ بر ۳ باشد، به طوری‌که $a_{ij}=\begin{cases} i-۲j\,,\,k=۰ \\ ۲i+j\,,\,k=۱ \\ ۲i-j\,,\,k=۲ \end{cases}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A^۲$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۸

۳۹- A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر هستند، به طوری که $A^۲=A$ و $B^۲=B$. حاصل $(A+B-AB)^۲$ کدام است؟

۱) $A+B$ ۲) I

۳) $A+B-AB$ ۴) $\bar{O}$

۴۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^۵+A^۶+A^۷$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

فیزیک دهم

۴۱- یک جسم مکعب‌مستطیل‌شکل چوبی توپر، به ابعاد a، ۲a و ۴a را از وجه‌های مختلف آن روی سطحی افقی قرار می‌دهیم. اگر اختلاف بیشینه و کمینهٔ فشار ناشی از جسم بر سطح ۱۲۰۰ Pa باشد، حجم جسم چند سانتی‌متر مکعب است؟ ($g = ۱۰ N/kg$ و چگالی چوب $۰/۸ g/cm^۳$ است.)

۱) ۱۲۵ ۲) ۸۰۰

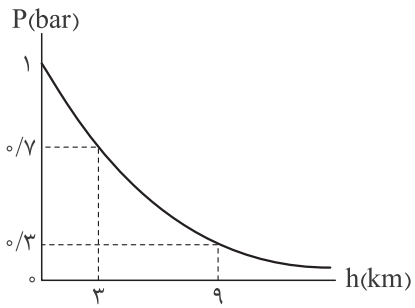
۳) ۱۰۰۰ ۴) ۸۰۰۰

۴۲- شناگری در عمق ۵متری از سطح آب دریاچه‌ای شنا می‌کند. اگر مساحت پردهٔ گوش شناگر $۰/۸ cm^۲$ باشد، اندازهٔ نیرویی که به سطح خارجی پردهٔ گوش شناگر وارد می‌شود، چند نیوتون است؟ ($g = ۱۰ N/kg$ ، $\rho_{آب} = ۱ g/cm^۳$ و $P_۰ = ۱ bar$)

۱) ۰/۴ ۲) ۱/۲

۳) ۴ ۴) ۱۲

۴۳- نمودار فشار هوا برحسب ارتفاع از سطح زمین به شکل زیر است. چگالی متوسط هوا از سطح زمین تا ارتفاع ۳ کیلومتری آن، چند برابر چگالی متوسط هوا از فاصلهٔ ۳ تا ۹ کیلومتری سطح زمین است؟



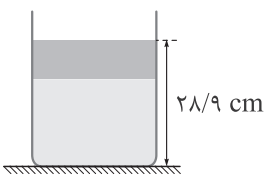
۱) $\frac{۷}{۳}$

۲) $\frac{۸}{۳}$

۳) $\frac{۱۰}{۷}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۴- در ظرف استوانه‌ای‌شکل مقابل، آب و روغن ریخته شده است. اگر فشار هوا برابر ۷۰ cmHg و جرم آب ۳ برابر جرم روغن باشد، فشار در کف ظرف چند کیلوپاسکال است؟ ($g = ۱۰ N/kg$، چگالی جیوه، آب و روغن در SI، به ترتیب ۱۳۶۰۰، ۱۰۰۰ و ۸۰۰ است.)

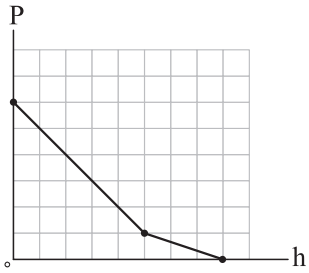


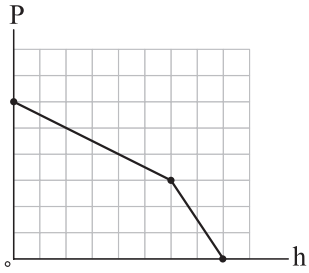
۱) ۹۵/۸۸ ۲) ۹۷/۲۴

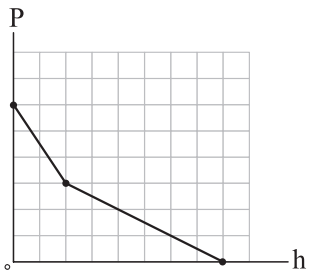
۳) ۹۷/۹۲ ۴) ۹۸/۶۰

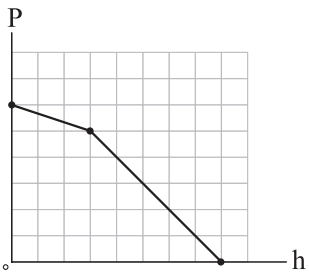
محل انجام محاسبات

۴۵- در ظرفی استوانه‌ای که روی سطح افقی قرار دارد، جرم یکسانی از دو مایع مخلوط‌نشدنی ریخته شده است. نمودار فشار پیمانه‌ای (P) برحسب فاصله از کف ظرف (h)، به صورت کدام شکل می‌تواند باشد؟

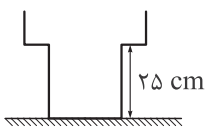
۱)


۲)


۳)


۴)


۴۶- در شکل زیر، ظرفی که از دو بخش استوانه‌ای به سطح مقطع‌های $۲۰cm^۲$ و $۳۰cm^۲$ تشکیل شده، روی سطح افقی قرار دارد. در ظرف، ابتدا $۸۰۰g$ از مایعی به چگالی $۲g/cm^۳$ و سپس $۴۰۰g$ از مایعی به چگالی $۱g/cm^۳$ می‌ریزیم. به ترتیب از راست به چپ، اندازهٔ نیرویی که مایع به کف ظرف وارد می‌کند و اندازهٔ نیرویی که ظرف به سطح افقی وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = ۱۰N/kg$، دو مایع مخلوط نمی‌شوند و جرم ظرف ناچیز است.)



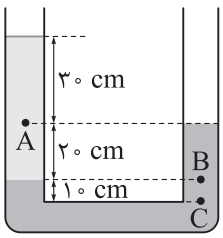
۱) ۱۲، ۱۰/۵

۲) ۱۲، ۱۱

۳) ۱۱، ۱۰/۵

۴) ۱۱، ۱۱

۴۷- در شکل مقابل، دو مایع مخلوط‌نشدنی در لولهٔ U شکل در تعادل هستند. اختلاف فشار دو نقطهٔ A و B چند برابر اختلاف فشار دو نقطهٔ C و B است؟



۱) $\frac{۴}{۵}$

۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۴}$

۴) ۵

۴۸- در یک لولهٔ Uشکل با سطح مقطع $۵cm^۲$، مقداری جیوه قرار دارد. اگر در شاخهٔ سمت راست لوله $۱۷۰g$ آب بریزیم، اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ ($\rho_{جیوه} = ۱۳/۶g/cm^۳$)

۱) ۱/۲۵

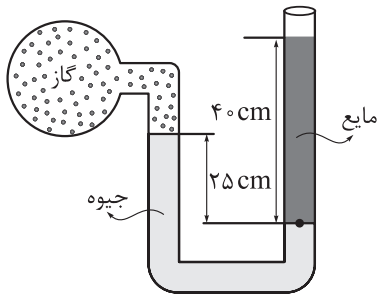
۲) ۲/۵

۳) ۱۲/۵

۴) ۲۵

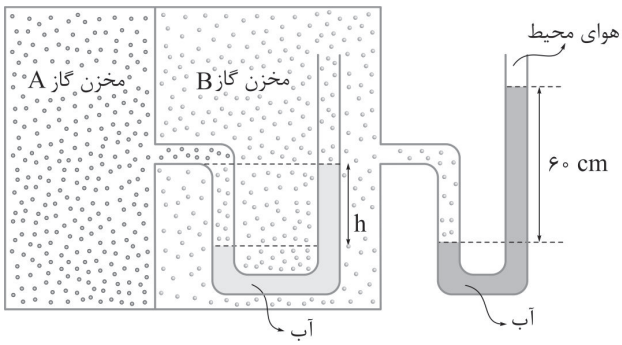
محل انجام محاسبات

۴۹- در شکل مقابل، درون لولهٔ U شکلی که به یک مخزن محتوی گاز وصل شده است، جیوه و مایعی دیگر به چگالی ρ وجود دارد. اگر فشار پیمانه‌ای درون مخزن گاز $-25\,kPa$ باشد، ρ برحسب گرم بر سانتی‌متر مکعب کدام است؟ $(g = 10\,N/kg$ و $\rho_{جیوه} = 13/6\,g/cm^3)$



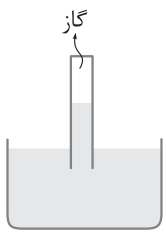
۱) ۱/۵
۲) ۱/۸
۳) ۲/۲۵
۴) ۲/۴

۵۰- در شکل مقابل، اگر فشار مخزن گاز A از فشار مخزن گاز B، ۵ درصد بیشتر باشد، h چند سانتی‌متر است؟ $(g = 10\,N/kg$، چگالی آب $1\,g/cm^3$ و فشار هوای محیط $84\,kPa$ است.)



۱) ۳۵
۲) ۳۶
۳) ۴۲
۴) ۴۵

۵۱- در شکل مقابل، لوله‌ای به سطح مقطع $10\,cm^2$، به طور وارون در ظرف حاوی مایعی به چگالی $1/7\,g/cm^3$ فرو رفته و فشار گاز حبس‌شده در انتهای لوله $70\,cmHg$ است. اگر سطح مقطع ظرف $40\,cm^2$ باشد، با خارج کردن کامل لوله از مایع، سطح آزاد مایع در ظرف چند سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود؟ $(g = 10\,N/kg$، چگالی جیوه $13/6\,g/cm^3$ و فشار هوای محیط $102\,kPa$ است.)



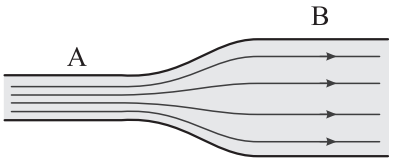
۱) ۱/۲۵
۲) ۱/۵
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۵۲- جسم A بر سطح مایعی شناور و جسم B در این مایع غوطه‌ور است. اگر جسم C را در داخل این مایع رها کنیم، شروع به پایین‌رفتن می‌کند. در صورتی که جرم سه جسم A، B و C برابر باشند، کدام مورد دربارهٔ مقایسهٔ اندازهٔ نیروی شناوری وارد بر آن‌ها (F) درست است؟

۱) $F_A = F_B > F_C$
۲) $F_C > F_A = F_B$
۳) $F_A > F_B > F_C$
۴) $F_C > F_B > F_A$

محل انجام محاسبات

۵۳- در شکل زیر، لوله‌ای که از دو بخش A و B تشکیل شده است، توسط آب پُر شده و آب درون آن به صورت لایه‌ای در جریان است. اگر قطر مقطع لوله در بخش B، ۲۵ درصد بیشتر از قطر مقطع آن در بخش A باشد، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟



الف) تندی آب در بخش B، ۲۰ درصد کم‌تر از تندی آن در بخش A است.

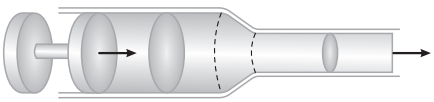
ب) تندی آب در بخش B، ۳۶ درصد کم‌تر از تندی آن در بخش A است.

پ) فشار آب در بخش B، بیشتر از فشار آن در بخش A است.

ت) فشار آب در بخش B، کم‌تر از فشار آن در بخش A است.

۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

۵۴- در شکل زیر، روغن به چگالی $0/85\ g/cm^3$ تمام حجم لولهٔ افقی را پر کرده و قطر پیستون ۲۰cm و قطر دهانهٔ خروجی لوله ۲cm است. اگر پیستون با تندی ۴cm/s به سمت راست حرکت کند، در هر دقیقه چند کیلوگرم روغن از لوله بیرون می‌ریزد؟

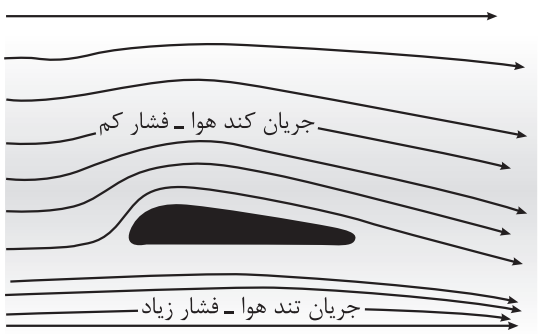


۱) $20/4\pi$ ۲) $81/6\pi$

۳) $2/04\pi$ ۴) $8/16\pi$

۵۵- کدام‌یک از شکل‌های زیر دربارهٔ تندی و فشار هوا در بالا و پایین بالِ یک هواپیمای در حال پرواز، درست است؟

۱)


۲)


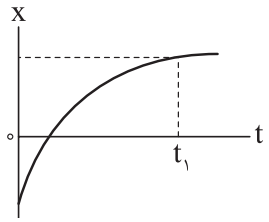
۳)


۴)


محل انجام محاسبات

فیزیک دوازدهم

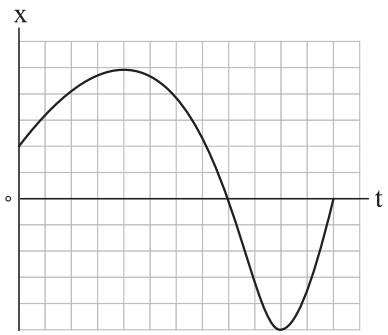
۵۶- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ حرکت این متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 درست است؟



الف) تندی متحرک در حال افزایش است.
ب) تندی متحرک در حال کاهش است.
پ) جهت حرکت متحرک یک مرتبه تغییر می‌کند.
ت) جهت بردار مکان متحرک یک مرتبه تغییر می‌کند.

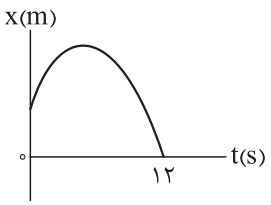
۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

۵۷- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در بازه‌ای که بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است، چند برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن در بازه‌ای است که در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؟



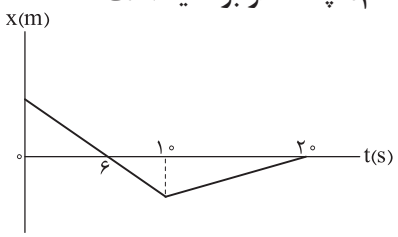
۱) ۱
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۲۵}{۶}$

۵۸- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در بازهٔ زمانی $t_1 = ۰$ تا $t_2 = ۱۲s$، تندی متوسط متحرک $۵\frac{m}{s}$ و اندازهٔ سرعت متوسط آن $۲\frac{m}{s}$ باشد، بیشینهٔ فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان چند متر است؟



۱) ۳۶ ۲) ۴۲
۳) ۴۵ ۴) ۴۸

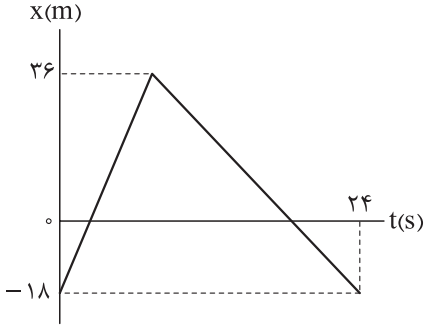
۵۹- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ $t_1 = ۲s$ برابر $۳\frac{m}{s}$ باشد، بزرگی سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2 = ۱۲s$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲/۴
۲) ۲/۱۶
۳) ۰/۲۴
۴) ۰/۲۱۶

محل انجام محاسبات

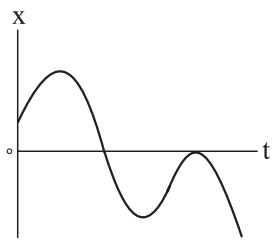
۶۰- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در این حرکت، بردار مکان متحرک چند ثانیه در جهت محور x است؟



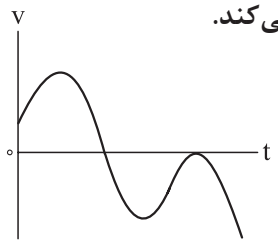
۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۶۱- دو متحرک A و B در راستای محور x حرکت می‌کنند. نمودار مکان ـ زمان متحرک A ، به شکل (الف) و نمودار سرعت ـ زمان متحرک B به شکل (ب) است. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ حرکت این دو متحرک الزاماً درست است؟

الف) جهت بردار مکان متحرک A ، دو مرتبه تغییر می‌کند.
ب) جهت حرکت متحرک A، سه مرتبه تغییر می‌کند.
پ) جهت بردار مکان متحرک B، یک مرتبه تغییر می‌کند.
ت) جهت حرکت متحرک B، سه مرتبه تغییر می‌کند.



(الف)



(ب)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۲- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) اگر در طی حرکتی، شتاب متحرک پیوسته برابر صفر باشد، سرعت متحرک در این حرکت ثابت است.
۲) اگر در طی حرکتی، شتاب متحرک پیوسته برابر صفر باشد، تندی متحرک در این حرکت ثابت است.
۳) اگر در طی حرکتی، سرعت متحرکی ثابت باشد، شتاب آن در این حرکت پیوسته برابر صفر است.
۴) اگر در طی حرکتی، تندی متحرک ثابت باشد، شتاب آن در این حرکت، پیوسته برابر صفر است.

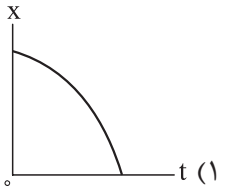
۶۳- در جدول زیر، مکان و سرعت متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در دو لحظه مشخص شده است. اگر در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، سرعت متوسط متحرک $\vec{i}(\frac{m}{s}2/4)$ و شتاب متوسط آن $\vec{i}(\frac{m}{s^2}-1/5)$ باشد، $\vec{v}_2$ در SI کدام است؟

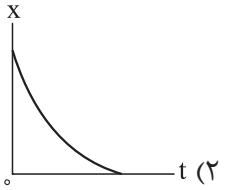
زمان (s)	مکان (m)	سرعت $(\frac{m}{s})$
t_1	$-9\vec{i}$	$5\vec{i}$
t_2	$15\vec{i}$	$\vec{v}_2$

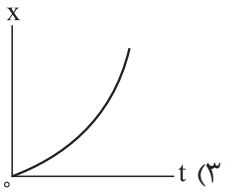
۱) $10\vec{i}$
۲) $-10\vec{i}$
۳) $20\vec{i}$
۴) $-20\vec{i}$

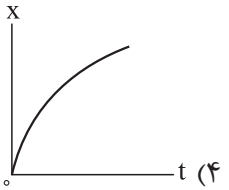
محل انجام محاسبات

۶۴- در کدام‌یک از نمودارهای مکان ـ زمان زیر، سرعت متحرک در مبدأ زمان و شتاب آن در تمام لحظه‌ها، در خلاف جهت محور x است؟

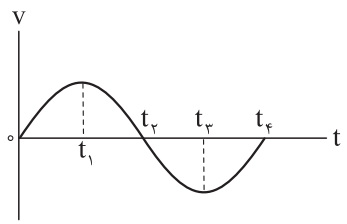
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶۵- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ حرکت این متحرک درست است؟



الف) در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، اندازهٔ شتاب متحرک در حال کاهش است.

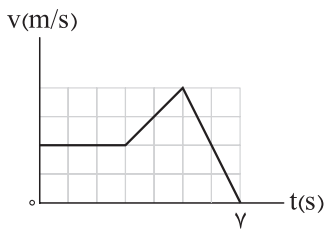
ب) در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$، تندی متحرک در حال افزایش است.

پ) در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۳$، شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.

ت) در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۴$، تندی متوسط متحرک با اندازهٔ سرعت متوسط آن برابر است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

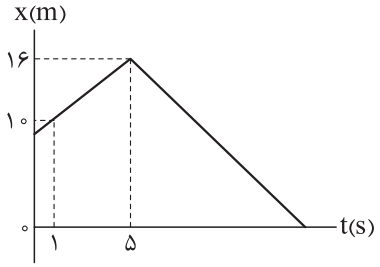
۶۶- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازهٔ شتاب متحرک در لحظهٔ $t'_۱ = ۶s$ چند برابر اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲s$ تا $t_۲ = ۷s$ است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۵}$

محل انجام محاسبات

۶۷- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۱s تا ۱۱s، برابر $۱/۸\frac{m}{s}$ باشد، شتاب متوسط آن در این بازهٔ زمانی، در SI ، کدام است؟



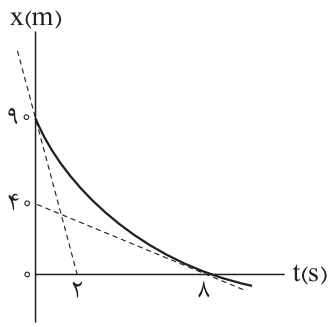
۱) $۰/۰۵\vec{i}$

۲) $۰/۳۵\vec{i}$

۳) $-۰/۰۵\vec{i}$

۴) $-۰/۳۵\vec{i}$

۶۸- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند، در SI کدام است؟ (خط‌چین‌های رسم‌شده در دو لحظهٔ $t_۲ = ۰$ و $t_۲ = ۸\,s$ بر نمودار مماس هستند.)



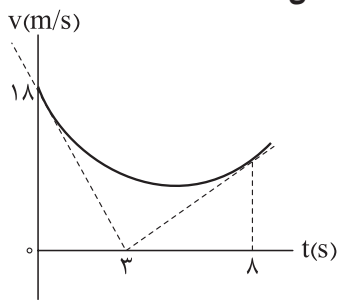
۱) $۵\vec{i}$

۲) $-۵\vec{i}$

۳) $۶/۲۵\vec{i}$

۴) $-۶/۲۵\vec{i}$

۶۹- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ شتاب متحرک در مبدأ زمان، ۳ برابر اندازهٔ شتاب آن در لحظهٔ $t = ۸s$ باشد، شتاب متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اول، برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (دو خط‌چین رسم‌شده در مبدأ زمان و لحظهٔ $t = ۸s$ بر نمودار مماس هستند.)



۱) $\vec{i}$

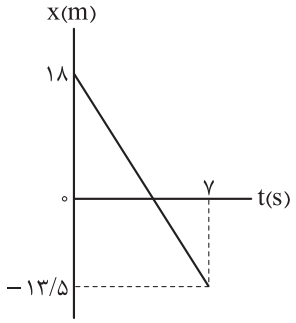
۲) $-\vec{i}$

۳) $۰/۲۵\vec{i}$

۴) $-۰/۲۵\vec{i}$

محل انجام محاسبات

۷۰- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. بردار جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی ۳s تا ۵s و نیز بردار سرعت آن در لحظهٔ t = ۲s به ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟



۱) $-۹\vec{i}$ و $-۴/۵\vec{i}$

۲) صفر و $-۴/۵\vec{i}$

۳) صفر و $۹\vec{i}$

۴) $-۹\vec{i}$ و $۹\vec{i}$

۷۱- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = -۴t + ۱۲$ است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ حرکت این متحرک درست است؟

الف) متحرک در لحظهٔ t = ۳s تغییر جهت می‌دهد.

ب) متحرک همواره در یک جهت حرکت می‌کند و اندازهٔ بردار مکان آن پیوسته در حال افزایش است.

پ) فاصلهٔ متحرک تا مبدأ در لحظه‌های $t_۱ = ۰/۵s$ و $t_۲ = ۳/۵s$ یکسان است.

ت) سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ سوم برابر سرعت متحرک در لحظهٔ t = ۴s است.

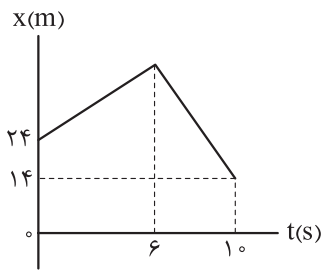
۱) الف و پ و ت

۲) الف و پ

۳) ب و ت

۴) ت

۷۲- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ $t_۱ = ۲s$، $۵\frac{m}{s}$ کم‌تر از تندی آن در لحظهٔ $t_۲ = ۸s$ باشد، بزرگی سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۳s تا ۹s چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۴

۴) ۱/۵

محل انجام محاسبات

۷۳- دو جسم A و B با سرعت‌های ثابت بر روی محور x در حرکت‌اند و هر دو هم‌زمان در یک لحظه در مبدأ از کنار هم عبور می‌کنند. اگر معادلهٔ مکان ـ زمان A در SI، $x_A = 3t - 4$ باشد و متحرک B در لحظهٔ $t_1 = 5\ s$ از مکان $x_1 = -22\ m$ عبور کند، معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B در SI کدام است؟

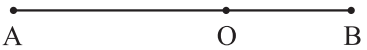
۱) $x_B = 9t - 23$

۲) $x_B = -9t + 23$

۳) $x_B = 6t - 8$

۴) $x_B = -6t + 8$

۷۴- در شکل زیر دو متحرک هم‌زمان از نقطه‌های A و B با سرعت‌های ثابت به سمت یکدیگر حرکت می‌کند و در نقطهٔ O از کنار هم می‌گذرند. در ادامه ۴ s طول می‌کشد تا متحرک اول از O به B و ۹ s طول می‌کشد تا دومی از O به A برسد. اگر تندی متحرک اول $12\ \frac{m}{s}$ باشد، چند ثانیه طول می‌کشد تا متحرک دوم از B به A برسد؟



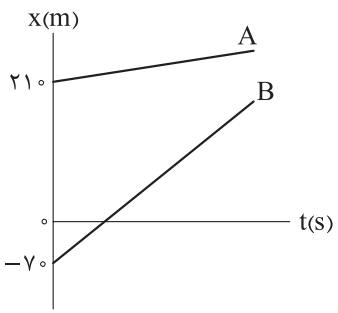
۱) ۱۰

۲) ۱۵

۳) ۱۶

۴) ۱۸

۷۵- شکل زیر، نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B را نشان می‌دهد. اگر تندی متحرک B ، $14\ \frac{m}{s}$ بیشتر از تندی متحرک A و فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر در لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک B ، ۲۵۲ m باشد، در چه لحظه‌ای برای بار دوم فاصلهٔ دو متحرک از هم ۲۵۲m می‌شود؟



۱) ۲۰

۲) ۲۲

۳) ۳۶

۴) ۳۸

محل انجام محاسبات

شیمی دهم

۷۶- کدام مطلب درست است؟

۱) همهٔ گازها نامرئی هستند به طوری که ما هوا را نمی‌توانیم ببینیم و به طور معمول وجود آن را در پیرامون خود حس نمی‌کنیم.

۲) در لایه‌های بالای هواکره با برخورد پرتوهای الکترومغناطیسی، تنها کاتیون‌های تک‌اتمی مشاهده می‌شود.

۳) بخار آب تنها در نزدیک‌ترین لایه به سطح زمین وجود دارد و به همین دلیل، تغییرات آب‌وهوا تنها در این لایه بررسی می‌شود.

۴) با افزایش ارتفاع از سطح زمین، روند تغییر دما و فشار، عکس یکدیگر عمل می‌کنند.

۷۷- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **حدود ۷۵ درصد از حجم هواکره، در نزدیک‌ترین لایه به زمین، یعنی لایهٔ تروپوسفر، قرار دارد و پس از آن، هواکره رقیق و رقیق‌تر می‌شود.**
- **بیش از ۹۹ درصد از حجم هوای پاک و خشک، تنها از دو گاز تشکیل شده است.**
- **فراوان‌ترین گاز نجیب موجود در هوا، چهارمین گاز نجیب جدول دوره‌ای عنصرها است.**
- **در فرایند کلی جداسازی اجزای هوا، سومین مادهٔ جداشده، به عنوان محیط بی‌اثر در جوشکاری به کار می‌رود.**

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۷۸- کدام مطلب درست است؟

۱) بوکسیت و سیلیس، دو نمونه از ترکیب‌های عنصرها با اکسیژن هستند که در طبیعت به طور خالص یافت می‌شوند.

۲) سنگ معدن آهن، دارای دو نوع اکسید آهن است که نسبت آنیون به کاتیون در یکی از آن‌ها، ۱/۵ برابر دیگری است.

۳) در فرمول شیمیایی ترکیب‌های دی‌کلر پنتااکسید، نیتروژن دی‌اکسید، اکسیژن دی‌فلوئورید و لیتیم اکسید، شمار اتم‌های اکسیژن از عنصر دیگر بیشتر است.

۴) در مولکول NO_2Cl، اتم نیتروژن اتم مرکزی بوده و دارای یک جفت‌الکترون ناپیوندی است.

۷۹- نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در کدام‌یک از مولکول‌های زیر، برابر با نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در ترکیب مس (II) کلرید است؟

۱) HCN ۲) گوگرد دی‌اکسید

۳) دی‌نیتروژن مونوکسید ۴) $SOCl_2$

محل انجام محاسبات

۸۰- کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟

الف) در اثر سوختن زغال‌سنگ در حضور اکسیژن، اکسیدهایی تولید می‌شود که نسبت تعداد اتم‌های اکسیژن به کل اتم‌ها در مولکول‌های آن‌ها، برابر است.

ب) اتصال محصول حاصل از سوختن کامل سوخت فسیلی به هموگلوبین، از رسیدن اکسیژن به بافت‌های بدن جلوگیری کرده و باعث مسمومیت می‌شود.

پ) مرجان‌ها، گروهی از کیسه‌تنان با اسکلت آهکی هستند که در صورت افزایش مقدار کلسیم در آب، از بین می‌روند.

ت) از واکنش همهٔ اکسیدهای فلزی و نافلزی با آب، به ترتیب باز و اسید تولید می‌شود.

۱) الف ـ ب ۲) پ ـ ت ۳) الف ـ پ ۴) الف ـ ب ـ پ ـ ت

۸۱- چه تعداد از مطالب زیر، درست است؟

- **طبق قانون بقای جرم، مجموع جرم واکنش‌دهنده‌ها و مجموع جرم فراورده‌ها ثابت است.**
- **توجیه برخی از فرایندهای شیمیایی مانند زنگ‌زدن آهن در هوای مرطوب، با قانون پایستگی جرم امکان‌پذیر است.**
- **مطابق قانون پایستگی جرم، مولکولی از بین نمی‌رود و مولکولی هم به وجود نمی‌آید.**
- **شرط موازنه‌بودن یک معادله این است که مجموع شمار اتم‌ها در دو سمت معادله، برابر باشد.**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

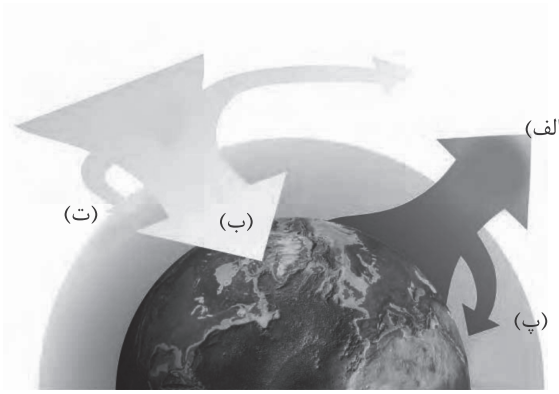
۸۲- تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش‌های a و b، پس از موازنهٔ معادلهٔ آن‌ها، کدام است؟

a) $BCl_3(g) + P_4(s) + H_2(g) \rightarrow BP(s) + HCl(l)$

b) $K_4Fe(CN)_6(aq) + H_2SO_4(aq) + H_2O(l) \rightarrow K_2SO_4(aq) + FeSO_4(aq) + (NH_4)_2SO_4(aq) + CO(g)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۳- شکل زیر، نمایی از گرمای جذب و بازتاب شده به وسیلهٔ زمین را نشان می‌دهد. چه تعداد از توصیف‌های زیر در رابطه با موارد «الف» تا «ت» مشخص‌شده در شکل، درست است؟



مورد «الف» در شکل: زمین بخش قابل توجهی از گرمای جذب‌شده را به صورت تابش فروسرخ از دست می‌دهد.

مورد «ب» در شکل: بخش عمده‌ای از این پرتوها به وسیلهٔ زمین جذب می‌شود.

مورد «پ» در شکل: بخش کوچکی از پرتوهای خورشیدی به وسیلهٔ هواکره جذب می‌شوند.

مورد «ت» در شکل: گازهای گلخانه‌ای مانع از خروج کامل گرمای آزادشده می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۸۴- کدام مطلب دربارهٔ اکسیژن و اوزون، درست است؟ $(O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) اوزون، گازی با مولکول‌های سه‌اتمی در بالاترین لایهٔ هواکره، مانند پوششی کرهٔ زمین را احاطه کرده، هرچند که مقدار آن در هواکره ناچیز است.

۲) مولکول‌های اوزون، مانع ورود بیش از ۹۰ درصد از تابش فرابنفش خورشید به سطح زمین می‌شوند تا موجودات زنده از آثار زیانبار این تابش در امان بمانند.

۳) تفاوت نقطهٔ جوش دگرشکل‌های عنصر اکسیژن برحسب درجهٔ سلسیوس، بیشتر از تفاوت جرم مولی آن‌ها برحسب گرم بر مول است.

۴) تابش پرانرژی فرابنفش، دو پیوند اشتراکی را بین دو اتم اکسیژن در اوزون می‌شکند و مولکول اوزون به یک اتم اکسیژن و یک مولکول اکسیژن تبدیل می‌شود.

۸۵- اگر حجم گاز در ظرف A، دو برابر حجم گاز در ظرف B باشد، چه تعداد از مطالب زیر در مورد این دو گاز به یقین درست است؟

- **فشار گاز در ظرف B، دو برابر فشار گاز در ظرف A است.**
- **دمای گاز در ظرف A، برحسب کلوین، دو برابر دمای گاز در ظرف B است.**
- **شمار اتم‌ها در ظرف A، دو برابر شمار اتم‌ها در ظرف B است.**
- **حاصل کسر $\frac{P \times V}{T}$ برای گازهای A و B، با یکدیگر برابر است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۶- ۱۰ گرم سدیم را در ۵۰ گرم آب می‌اندازیم. اگر هیدروژن تولیدشده با ۱۶۸۰ میلی‌لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP به طور کامل بسوزد، جرم مخلوط اولیه به چند گرم می‌رسد؟ (واکنش‌های موازنه‌نشده به صورت زیر است و $(Na = ۲۳ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

$$Na(s) + H_۲O(l) \rightarrow NaOH(aq) + H_۲(g)$$
$$H_۲(g) + O_۲(g) \rightarrow H_۲O(g)$$

۱) ۵۷/۲ ۲) ۵۷/۹ ۳) ۵۹/۷ ۴) ۵۹/۸۵

۸۷- مواد موجود در کدام گزینه همگی ناقطبی هستند؟

۱) $CH_۴ ، NO ، CO_۲$ ۲) $SO_۴^{۲-} ، NCl_۳ ، SiH_۴$

۳) $N_۲ ، CCl_۴ ، SO_۳$ ۴) $CS_۲ ، NH_۴^+ ، CH_۲Cl_۲$

۸۸- چه تعداد از مقایسه‌های زیر، در ارتباط با قدرت نیروهای بین مولکولی ماده‌های داده‌شده، درست است؟

- $I_۲ > H_۲O > C_۴H_{۱۰}$
- **اتانول > استون**
- $I_۲ > Br_۲ > Cl_۲ > F_۲$
- $CO > N_۲$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۸۹- دلیل کدام‌یک از اتفاقات زیر را نمی‌توان با پیوند هیدروژنی مرتبط دانست؟

۱) فاسدشدن گوشتی که یخ آن باز شده باشد، در اثر قراردادن مجدد آن در فریزر

۲) بیشتربودن نقطهٔ جوش اتانول نسبت به استون

۳) منفجرشدن نوشابهٔ شیشه‌ای در اثر قراردادن آن در فریزر

۴) توانایی آب برای حل‌کردن اغلب مواد

۹۰- اگر مولکول‌های حلال را با A و ذره‌های حل‌شونده را با B نمایش دهیم، در کدام مورد زیر، رابطهٔ $\frac{(A\ldots A)+(B\ldots B)}{2} < (A\ldots B)$ برقرار نیست؟

۱) استون در اتانول

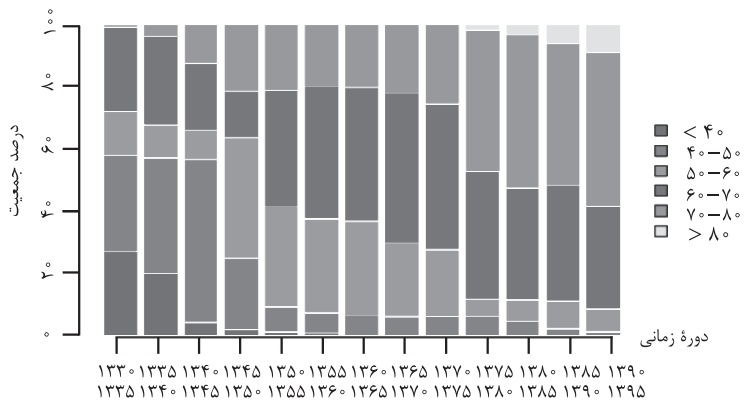
۲) باریم کلرید در آب

۳) ید در بنزین

۴) باریم سولفات در هگزان

شیمی دوازدهم

۹۱- نمودار مقابل توزیع جمعیت جهان را براساس امید به زندگی آن‌ها در دوره‌های زمانی گوناگون نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار، کدام مطلب نادرست است؟



۱) از سال ۱۳۶۰ تا ۱۳۸۰، درصد جمعیتی که امید به زندگی ۴۰ تا ۵۰ سال داشته‌اند، به تقریب ثابت بوده است.

۲) اگر جمعیت جهان در سال ۱۳۹۳، ۸ میلیارد نفر بوده باشد، حدود ۴ میلیارد نفر از آن‌ها، امید به زندگی بین ۷۰ تا ۸۰ سال داشته‌اند.

۳) از سال ۱۳۶۰، درصد جمعیتی که امید به زندگی زیر ۴۰ سال دارند، به صفر رسیده است و از حدود ۱۰ سال بعد، امید به زندگی بالای ۸۰ سال در جمعیت ظاهر شده است.

۴) با گذشت زمان، میزان امید به زندگی در سطح جهان افزایش یافته است؛ چون استفاده از صابون و توجه به نظافت و بهداشت در جوامع رو به گسترش است.

۹۲- چه تعداد از عبارت‌های زیر در رابطه با دو مادهٔ اتیلن‌گلیکول و اوره، درست است؟

- **این دو ترکیب به خوبی در یکدیگر حل می‌شوند.**
- **مولکول‌های اتیلن‌گلیکول و اوره می‌توانند با یکدیگر پیوند هیدروژنی تشکیل دهند.**
- **نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول اوره، برابر همین نسبت در مولکول اتیلن‌گلیکول است.**
- **شمار گروه‌های عاملی در مولکول اوره و اتیلن‌گلیکول با یکدیگر برابر است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۹۳- کدام مطلب نادرست است؟

۱) در فرایند انحلال، اگر ذره‌های سازندهٔ حل‌شونده با مولکول‌های حلال جاذبهٔ قوی برقرار نکنند، حل‌شونده در حلال پخش می‌شود.

۲) حالت فیزیکی آلاینده، تأثیر بسزایی در انتخاب یک پاک‌کنندهٔ مناسب دارد.

۳) حلالیت روغن زیتون در اوره به مراتب کم‌تر از حلالیت آن در هگزان است.

۴) سدیم کلرید با تشکیل جاذبه‌های یون ـ دوقطبی در حلال قطبی آب حل شده، ولی نفره کلرید در حلال ناقطبی هگزان حل نمی‌شود.

۹۴- اگر یک اسید چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، دارای ۱۴ گروه CH_2 باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر در مورد آن، نادرست است؟ $(O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1})$

الف) از واکنش آن با پتاسیم هیدروکسید، یک پاک‌کننده با حالت فیزیکی مایع تولید می‌شود.

ب) ۱۲/۵ درصد از جرم آن را عنصر اکسیژن تشکیل می‌دهد.

پ) بخش ناقطبی آن بر بخش قطبی غلبه داشته و به همین دلیل به طور خودبه‌خودی می‌تواند در آب پخش شود.

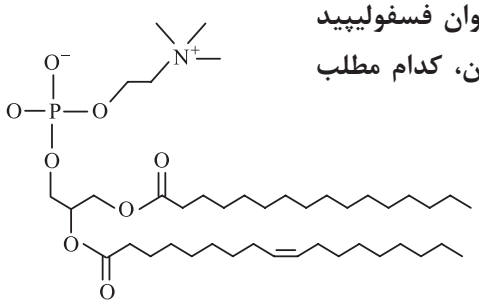
ت) محصول واکنش این ترکیب با سدیم هیدروکسید، هم در آب و هم در چربی حل می‌شود.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ پ ۳) ب ـ ت ۴) فقط پ

۹۵- اگر شمار اتم‌های کربن در یک استر سه‌عاملی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، ۱/۵ برابر شمار اتم‌های هیدروژن در یک اسید چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده بوده و جرم اتم‌های کربن در هر مول از این اسید چرب ۱۱۲ گرم بیشتر از جرم اتم‌های هیدروژن در هر مول از این استر سه‌عاملی باشد، استر مورد نظر را از واکنش یک الکل سه‌عاملی با کدام‌یک از اسیدهای زیر می‌توان تهیه کرد؟ $(C=12, H=1: g.mol^{-1})$

۱) $C_{15}H_{30}O_2$ ۲) $C_{16}H_{32}O_2$ ۳) $C_{17}H_{34}O_2$ ۴) $C_{18}H_{36}O_2$

۹۶- شکل مقابل ساختار فسفاتیدیل کولین را نشان می‌دهد که به عنوان فسفولیپید غالب در غشای بیشتر سلول‌های پستانداران وجود دارد. با توجه به آن، کدام مطلب نادرست است؟



۱) زنجیرهای هیدروکربنی، بخش آب‌گریز و بخش‌های شامل عنصرهای N، O و P، بخش‌های آبدوست این ساختار را تشکیل می‌دهند.

۲) نیروی بین مولکولی غالب در آن، همانند اسید چرب، از نوع وان‌درووالسی است.

۳) فرمول شیمیایی این ترکیب به صورت $C_{42}H_{81}NO_8P$ است.

۴) الگوی کلی این فسفولیپیدها را می‌توان به صورت  نمایش داد.

محل انجام محاسبات

۹۷- اگر ۸ گرم سدیم هیدروکسید ۹۰ درصد خالص با ۳۶ / ۴۸ گرم از یک استر سه‌عاملی باز زنجیرهای هیدروکربنی سیر شده و یکسان، به طور کامل واکنش دهد، فرمول صابون تولیدشده کدام است؟ $(Na = ۲۳, O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) $C_{۱۵}H_{۳۱}COONa$
۲) $C_{۱۶}H_{۳۳}COONa$
۳) $C_{۱۷}H_{۳۵}COONa$
۴) $C_{۱۸}H_{۳۷}COONa$

۹۸- کدام مطلب نادرست است؟

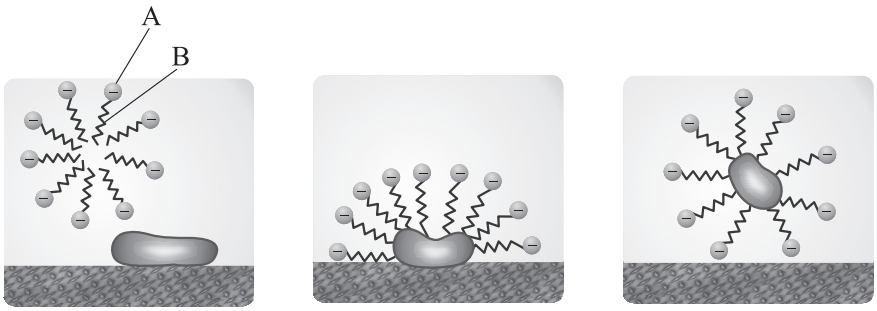
۱) اگر مقداری صابون را به مخلوط آب و روغن اضافه کنیم و آن را به هم بزنیم، یک مخلوط پایدار ایجاد می‌شود که به ظاهر همگن است.

۲) رنگ پوششی، نمونه‌ای از یک کلوئید است که نور را از خود عبور می‌دهد.

۳) ذره‌های سازندهٔ کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها، به ترتیب توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت و ذره‌های ریز ماده هستند.

۴) در بین محلول‌ها، کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها، ویژگی ته‌نشین‌شدن تنها مربوط به سوسپانسیون‌ها است.

۹۹- شکل‌های زیر، مراحل پاک‌شدن یک لکهٔ روغن از روی پارچه با صابون را نشان می‌دهند. با توجه به آن، چه تعداد از مطالب زیر درست است؟



(I) **(II)** **(III)**

- **بخش‌های A و B به ترتیب بخش‌های آبدوست و چربی‌دوست را در مولکول صابون نشان می‌دهند.**
- **مولکول‌های صابون پس از برقراری جاذبه با مولکول‌های روغن، به کمک بخش آبدوست خود در آب حل می‌شوند.**
- **مولکول‌های صابون مانند پلی بین مولکول‌های آب و روغن قرار گرفته و ذره‌های روغن را در آب پخش می‌کنند.**
- **شکل‌های (I) و (III)، به ترتیب حل‌شدن صابون در آب به کمک بخش قطبی آن و پخش‌شدن روغن در آب به کمک صابون را نشان می‌دهند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۰- مقدار کافی صابون جامد با فرمول $C_{۱۷}H_{۳۵}COONa$ را در ۱۵۰ میلی‌لیتر از محلول کلسیم کلرید با غلظت ۰ / ۲ مولار ریخته و هم می‌زنیم. اگر بعد از ۳۰ دقیقه، ۴ / ۰۴ گرم رسوب جدا شود، با فرض ثابت‌بودن سرعت تولید و جداشدن رسوب در طول انجام واکنش، چند دقیقهٔ دیگر زمان لازم است تا همهٔ کلسیم موجود در محلول به صورت کامل رسوب کند؟ $(Ca = ۴۰ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۸۵ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۵

محل انجام محاسبات

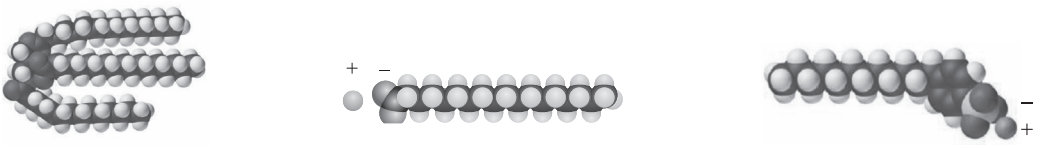
۱۰۱- چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ مدل فضاپرکن نشان داده شده، درست است؟



- **فرمول شیمیایی این ترکیب را می‌توان به صورت $C_{18}H_{29}SO_3Na$ نمایش داد.**
- **این ماده را می‌توان از بنزن و دیگر مواد اولیه در صنایع پتروشیمی، طی واکنش‌های پیچیده تولید کرد.**
- **این ترکیب می‌تواند در محیط‌های گوناگون مانند سفرهای دریایی و صنایع وابسته به آب شور، پاسخ‌گوی نیاز انسان باشد.**
- **یک نوع پاک‌کنندهٔ صابونی بوده که بخش آنیونی آن شامل یک بخش ناقطبی بزرگ و یک بخش قطبی کوچک‌تر است.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۰۲- با توجه به مدل فضاپرکن ترکیب‌های داده‌شده، کدام گزینه درست است؟



(a) **(b)** **(c)**

۱) با افزایش جمعیت جهان، برای تولید صابون در مقیاس انبوه، به مقدار زیادی از ترکیب b نیاز است.

۲) قدرت پاک‌کنندگی ترکیب c بیشتر از ترکیب b است، چون شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی بیشتری در آن وجود دارد.

۳) این شکل‌ها مدل فضاپرکن سه پاک‌کننده را نشان می‌دهند که قدرت‌های پاک‌کنندگی متفاوتی دارند.

۴) با استفاده از ترکیب a و مواد لازم دیگر، می‌توان ترکیب b را تولید کرد که قدرت پاک‌کنندگی کم‌تری از ترکیب c دارد.

۱۰۳- کدام‌یک از توصیف‌های داده‌شده با مادهٔ مورد نظر هم‌خوانی ندارد؟

الف) صابون گوگرددار: ضدعفونی‌کننده و مناسب برای از بین بردن میکروب

ب) صابون مراغه: مناسب برای موهای چرب به دلیل داشتن خاصیت بازی مناسب

پ) صابون با مادهٔ شیمیایی کلردار: مناسب برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی

ت) مواد شوینده با نمک‌های فسفات: مناسب برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی شوینده‌ها

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ ۳) ب ـ ت ۴) پ ـ ت

۱۰۴- کدام مطلب نادرست است؟

۱) پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با آلاینده‌ها تنها برهم‌کنش فیزیکی داشته، ولی پاک‌کنندهٔ خورنده، علاوه بر برهم‌کنش با آلاینده‌ها، با آن‌ها واکنش نیز می‌دهد.

۲) جوهرنمک، سود سوزآور و سفیدکننده‌ها از نظر شیمیایی فعال‌اند و خاصیت خورندگی دارند.

۳) صابون و محلول جوهر نمک، دو پاک‌کننده هستند که خاصیت اسیدی داشته و باعث تغییر رنگ کاغذ pH می‌شوند.

۴) پاک‌کننده‌های خورنده، با انجام واکنش شیمیایی، لکه‌ها و رسوب‌ها را به موادی تبدیل می‌کنند که در آب حل یا پخش می‌شوند.

محل انجام محاسبات

۱۰۵- نوعی پاک‌کننده که برای بازکردن مجاری مسدودشده در برخی وسایل و دستگاه‌های صنعتی استفاده می‌شود، به شکل پودر عرضه شده و شامل مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم است. کدام‌یک از موارد زیر، هنگام استفاده از این پاک‌کننده رخ می‌دهد؟

الف) انجام واکنش شیمیایی بین سدیم هیدروکسید و چربی و تولید صابون

ب) واردشدن ضربهٔ مکانیکی به رسوب‌ها به دلیل تولید گاز اکسیژن

پ) ذوب‌شدن چربی‌ها به دلیل انجام واکنش گرماگیر

ت) افزایش سرعت پاک‌کنندگی با استفاده از پاک‌کننده به صورت پودر

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) ب ـ ت

محل انجام محاسبات

برنامه راهبردی آزمون شروع دوازدهم از تابستان خیلی سبز برای داوطلبانی که مطالعه سر فصل های دوازدهم را از تابستان آغاز می کنند، بر اساس اصول زیر طراحی شده است:

۱- تدریس مرسوم دبیران در پایه دوازدهم

۲- پیش نیاز یا هم نیازی پایه مرتبط با سر فصل دوازدهم

۳- توجه به نحوه تدریس بر اساس پیشروی کتاب ها

۴- وزن سر فصل های هم زمان دروس پایه و دوازدهم

پایه / مرحله	اول ۱۳ تیر	دوم ۵ مرداد	سوم ۲۶ مرداد	چهارم ۱۶ شهریور	پنجم ۶ مهر
پایه	✓	✓	✓	✓	✓
دوازدهم	–	–	✓	✓	–

آزمون مرحله دوم (که در تاریخ ۵ مرداد ۱۴۰۳ برگزار شد) به شروع پیشروی دهم و یازدهم اختصاص داشت؛ چنانچه نتوانستید در این آزمون شرکت کنید، امکان برگزاری این آزمون به صورت آنلاین فراهم است.

آزمون مرحله سوم (همین دفترچه ای که در دست دارید) به ادامه پیشروی پایه و شروع پیشروی دوازدهم اختصاص دارد.

از آزمون مرحله سوم به پیشروی پایه دوازدهم به همراه پایه های مرتبط آن پرداخته می شود.

در برنامه شروع دوازدهم از تابستان، همه سر فصل های دوازدهم و پایه های مرتبط، پس از تابستان در پاییز ادامه پیدا می کند.

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله سوم

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳ | تاریخ برگزاری: ۲۶/مرداد/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف‌خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ نادر حاجی‌زاده ـ محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ کیوان صارمی حمید گلزاری ـ محسن محمدکریمی ـ محسن میراسلامی
فیزیک	علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی ـ عباس سرمایه ـ یاسر عبدالهی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	امیرحسین ابومحبوب	محمد گودرزی محمدسجاد نقیه سجاد داوطلب	شمیم پهلوان‌شریف زهرا جالینوسی ـ مهدی خوش‌نویس شقایق راهبریان ـ ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب	مهدی خوش‌نویس ـ ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	مهدی خوش‌نویس ـ ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری ـ مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمد باغبان علیرضا جباری محمدجواد سورچی	علیرضا جباری	مرضیه انتخابی‌فر ـ مهدی بابائی نرجس تیمناک ـ زهرا صفری احسان محمدی ـ امیر محمودی انزابی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	عباس سرمایه سروش عبادی یاسر عبدالهی وحید فارسیان	محمد مرادی سروش عبادی وحید فارسیان	سید علی حسین‌زاده ـ مهسا خاکی هومن زندی ـ مهدی سلطانی سهامی علی طهانی ـ علیرضا کرمانی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

حسابان و ریاضیات پایه

تست و پاسخ ۱

حداقل چند زوج مرتب از رابطهٔ $f=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z},|x|(|y|+۲)=۶\}$ باید حذف شود تا به یک تابع برسیم؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره از هر nتا زوج مرتبی که مؤلفهٔ اول یکسان دارن، باید $n-۱$ تا حذف کنی.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا باید مجموعهٔ f را تشکیل دهیم. $|x|$ و $|y|+۲$ شمارنده‌های طبیعی (همان مقسوم‌علیه‌های طبیعی) ۶ هستند، با این شرط $|y|+۲\geq ۲$ است. داریم:

$$|x|=۱\xrightarrow{|y|+۲=۶}|y|=۴$$
$$|x|=۲\xrightarrow{|y|+۲=۳}|y|=۱$$
$$|x|=۳\xrightarrow{|y|+۲=۲}|y|=۰$$

گام دوم: حالا زوج‌های مرتب f را پیدا کرده‌ایم:

$$\left.\begin{array}{l}x=-۱\Rightarrow y=-۴,۴\\x=۱\Rightarrow y=-۴,۴\\x=-۲\Rightarrow y=-۱,۱\\x=۲\Rightarrow y=-۱,۱\\x=-۳\Rightarrow y=۰\\x=۳\Rightarrow y=۰\end{array}\right\}\Rightarrow f=\{(-۱,-۴),(-۱,۴),(۱,-۴),(۱,۴),(-۲,-۱),(-۲,۱),(۲,-۱),(۲,۱),(-۳,۰),(۳,۰)\}$$

گام سوم: کافی است از بین $(-۱,-۴)$ و $(-۱,۴)$ حداقل یک زوج، از بین $(۱,-۴)$ و $(۱,۴)$ حداقل یک زوج، از بین $(-۱,-۲)$ و $(-۲,۱)$ حداقل یک زوج و از بین $(-۱,۲)$ و $(۲,۱)$ نیز حداقل یک زوج حذف کنیم که در مجموع باید حداقل چهار زوج حذف کنیم تا رابطهٔ داده‌شده تابع شود.

تست و پاسخ ۲

دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{(m-۱)x^۲-۱۲x+n}$ به صورت $\mathbb{R}-\{m\}$ است. حداقل مقدار ممکن برای mn کدام است؟ (تنها ریشهٔ مخرج)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۶ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره مخرج فقط باید یک ریشه بده، حالت درجه‌یک رو فراموش نکنی.

درس نامه تابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند و $q(x)\neq ۰$ را یک تابع گویا می‌نامیم. توابع زیر گویا هستند:

$$y=\frac{۱}{x},\ y=\frac{۲x-۱}{x+۱},\ y=\frac{۳x^{۱۱}-۳}{x^۵+۱}$$

نکتهٔ مهم تابع گویا دامنهٔ آن است: دامنهٔ تابع گویا $=\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج کسر$\}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تا این‌جا فهمیده‌ایم که مخرج باید یک ریشه داشته باشد و این در دو حالت رخ می‌دهد. حالت اول این است که مخرج اصلاً درجه‌دو نباشد:

$$m-۱=۰\Rightarrow m=۱\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲-۱}{-۱۲x+n}$$

گام دوم: در این شرایط دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{1\}$ است. یعنی $x=1$ ریشهٔ مخرج است:

$$\Rightarrow -12(1)+n=0 \Rightarrow n=12$$

در این حالت $mn=12$ است.

گام سوم: حالت دیگر این است که عبارت مخرج چندجمله‌ای درجه‌دوم باشد و ریشهٔ مضاعف $x=m$ داشته باشد.

$$\Rightarrow (m-1)x^2-12x+n=(m-1)(x-m)^2=(m-1)x^2-2m(m-1)x+(m-1)m^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12=-2m(m-1) \Rightarrow m(m-1)=6 \\ n=(m-1)m^2=\big(m(m-1)\big)\times m \xrightarrow{m(m-1)=6} n=6m \end{cases}$$

گام چهارم: از تساوی اول داریم:

$$m(m-1)=6 \Rightarrow m=-2 \text{ یا } m=3$$

به ازای $m=-2$ و $m=3$، مقادیر n به ترتیب برابر $n=-12$ و $n=18$ می‌شود. در نتیجه مقادیر mn به ترتیب برابر ۲۴ و ۵۴ است.

گام پنجم: در نتیجه کم‌ترین مقدار mn برابر ۱۲ است.

تست و پاسخ ۳

دامنهٔ هر دو تابع $f(x)=2x-a$ و $g(x)=a-x$ بازهٔ $[-2,1]$ است. اگر اشتراک برد دو تابع بازهٔ $[0,1]$ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره $x=-2$ و $x=1$ را در هر دو تابع جای‌گذاری کن. بعد از این، دانش اشتراک‌گیری بازه‌ها لازمت می‌شه.

درس‌نامه ●● تابع خطی

تابع چندجمله‌ای: هر تابع را که نمایش جبری آن، یک چندجمله‌ای جبری از یک متغیر باشد، تابع چندجمله‌ای می‌نامند.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad ; \quad a_n\neq 0$$

هر تابع که بتوان ضابطهٔ آن را به شکل $f(x)=ax+b$ یا $y=ax+b$ نوشت یک تابع خطی می‌نامند. a شیب خط و b عرض از مبدأ خط است. طول از مبدأ نیز برابر $-\frac{b}{a}$ است. معمولاً دامنه و برد تابع خطی $\mathbb{R}$ است، اما اگر دامنه بازهٔ $[x_1,x_2]$ باشد، برد، یکی از بازه‌های $[f(x_1),f(x_2)]$ یا $[f(x_2),f(x_1)]$ است.

دامنه	$\mathbb{R}$	$(-\infty,x_0]$		$[x_0,+\infty)$		$[x_1,x_2]$	
		$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
برد	$\mathbb{R}$	$[f(x_0),+\infty)$	$(-\infty,f(x_0)]$	$(-\infty,f(x_0)]$	$[f(x_0),+\infty)$	$[f(x_1),f(x_2)]$	$[f(x_2),f(x_1)]$

نیازی به حفظ کردن هم نیست. کافی است سر و ته بازهٔ دامنه را در ضابطهٔ تابع خطی جای‌گذاری کنید، سپس برد را به صورت (بزرگ‌تر، کوچک‌تر) بنویسید.

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا برد هر تابع را طبق جدول درس‌نامه، برحسب a می‌نویسیم:

$$f(x)=2x-a \Rightarrow f(-2)=-4-a \quad , \quad f(1)=2-a$$

$$\xrightarrow{\text{شیب مثبت}} R_f=[-4-a,2-a]$$

$$g(x)=a-x \Rightarrow g(-2)=a+2 \quad , \quad g(1)=a-1$$

$$\xrightarrow{\text{شیب منفی}} R_g=[a-1,a+2]$$

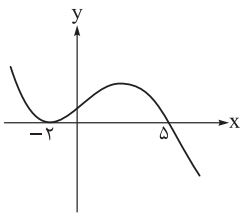
گام دوم: حال طبق فرض سؤال باید قرار دهیم: $R_f \cap R_g = [-a-۴,-a+۲] \cap [a-۱,a+۲] = [۰,۱]$

گام سوم: چون $a > ۰$ است، $-a-۴ < a-۱$ و $-a+۲ < a+۲$ است، داریم: $R_f \cap R_g = [a-۱,-a+۲] = [۰,۱] \Rightarrow a = ۱$

تست و پاسخ ۴

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. به ازای کدام زوج مرتب (a,b)، دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{(ax+b)f(x)}$ کل اعداد حقیقی است؟

زیر رادیکال همیشه بزرگ‌تر مساوی صفر است.



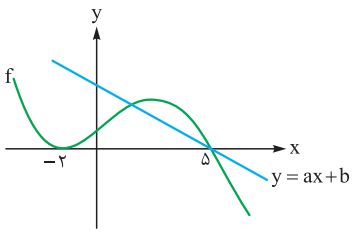
۱) $(-۱۰,-۲)$
۲) $(-۲,۱۰)$
۳) $(۳,-۱۵)$
۴) $(۲۰,۴)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** طبق تعریف دامنهٔ تابع g که $\mathbb{R}$ است، همواره $(ax+b)f(x) \geq ۰$ است: این یعنی $ax+b$ و $f(x)$ باید هم‌علامت باشند.

گام دوم: پس خط $y = ax+b$ باید مطابق شکل زیر باشد:

یعنی این خط حتماً باید با شیب منفی از نقطهٔ $(۵,۰)$ عبور کند. دقت کنید که اگر خط از نقطهٔ $(۵,۰)$ نگذرد، قطعاً بازه‌ای تولید می‌شود که در آن $f(x)$ و $ax+b$ غیر هم‌علامت‌اند که در آن صورت دامنهٔ تابع g دیگر $\mathbb{R}$ نخواهد شد.



$$\Rightarrow \begin{cases} a < ۰ \\ ۵a+b = ۰ \Rightarrow b = -۵a \end{cases}$$

این ویژگی‌ها فقط در زوج مرتب [۲] دیده می‌شود.

تست و پاسخ ۵

تابع $y = f(x)+g(x)$ به همراه تابع خطی g مفروض‌اند. اگر تابع $f(x) = (ax+۶)^۲ - (۳x+۲a)^۲$ همانی باشد، مقدار $g(a)$ کدام است؟

$y = x$

$g(x) = mx+h$

۱) ۲ یا -۳
۲) ± ۳
۳) -۲ یا ۳
۴) ± ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره تعریف‌ها رو دنبال کن ... تابع خطی ضابطه‌اش چه‌جوریه؟ تابع همانی چه‌طور؟ همین تعریف‌های ساده کلید حل سؤاله.

درس نامه

تابع همانی: تابعی که هر ورودی را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد، همانی است. مؤلفهٔ‌های اول و دوم این تابع برابرند، دامنه و برد آن نیز برابر است و ضابطهٔ آن $y = x$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = (ax+۶)^۲ - (۳x+۲a)^۲ = a^۲x^۲ + ۱۲ax + ۳۶ - ۹x^۲ - ۱۲ax - ۴a^۲$$

$$= (a^۲ - ۹)x^۲ + ۳۶ - ۴a^۲$$

$g(x) = mx+h$ را نیز $g(x)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم: تابع $y=f(x)+g(x)$ را می‌سازیم:

$$y=(a^۲-۹)x^۲+۳۶-۴a^۲+mx+h=(a^۲-۹)x^۲+mx+۳۶+h-۴a^۲$$

این تابع همانی است، پس ضرایب هر چیزی غیر از x صفر است و ضریب خود x برابر ۱ است.

$$(a^۲-۹)x^۲+mx+۳۶+h-۴a^۲=x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲-۹=۰ \Rightarrow a^۲=۹ \Rightarrow a=\pm ۳ \\ m=۱ \\ ۳۶+h-۴a^۲=۰ \xrightarrow{a^۲=۹} ۳۶+h-۳۶=۰ \Rightarrow h=۰ \end{cases}$$

گام سوم: پس تابع g نیز همانی است؛ زیرا:

$$g(x)=mx+h \xrightarrow{m=۱\,,\,h=۰} g(x)=x$$

$$\Rightarrow g(a)=g(\pm ۳)=\pm ۳$$

تست و پاسخ ۶

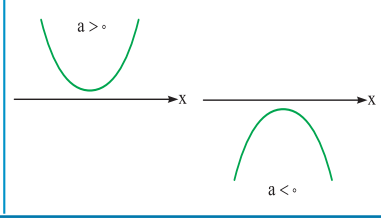
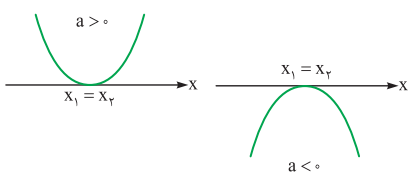
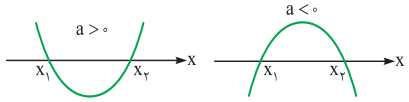
دامنهٔ تابع $f(x)=۲x+\sqrt{(a-۱)x^۲+bx+a-۳}$ بازهٔ $[۲,+\infty)$ است. دامنهٔ تابع $g(x)=x-\sqrt{b-۲ax}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۲]$
۲) $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$
۳) $[-\frac{۱}{۲},+\infty)$
۴) $[۲,+\infty)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره می‌شه تعیین علامت یک عبارت درجه‌دوم به صورت $[۲,+\infty)$ بشه؟ اگر نمی‌شه، چه چیز دیگه‌ای باید بشه؟

پاسخ تشریحی **گام اول:** وضعیت یک سهمی با محور xها یکی از حالت‌های زیر است:

$\Delta<۰$	$\Delta=۰$	$\Delta>۰$
نمودار محور xها را قطع نمی‌کند.	نمودار بر محور xها مماس است.	نمودار محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.
		

که هیچ‌کدام از حالت‌ها، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ «≥ ۰ سهمی» بازه‌ای به شکل $[x_۰,+\infty)$ نیست.

گام دوم: پس چاره این است که عبارت زیر رادیکال ضابطهٔ f اصلاً درجه‌دو نبوده است، پس درجه‌یک بوده است:

$$\xrightarrow{\text{ضریب } x^۲ \text{ صفر است.}} a-۱=۰ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow f(x)=۲x+\sqrt{bx-۲}$$

گام سوم: دامنهٔ بازهٔ $[۲,+\infty)$ است، پس $x=۲$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است:

$$۲b-۲=۰ \Rightarrow b=۱$$

گام چهارم: ضابطهٔ تابع g را تکمیل می‌کنیم:

$$g(x)=x-\sqrt{۱-۲x}$$

دامنهٔ این تابع مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۱-۲x\geq ۰$ است:

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,\frac{۱}{۲}]$$

تست و پاسخ ۷

تابع $f(x)=2x+[x]$ مفروض است. اگر $f(mf(\frac{7}{2}))=4$ باشد، حاصل $[\frac{1}{m}]$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره از براکت نترسید و اون رو به چشم یک عدد ببینید، تو این سؤال هم کافیه دو بار از ضابطهٔ f استفاده کنی، همین.

درس نامه جزء صحیح (براکت)

جزء صحیح یک عدد: جزء صحیح یک عدد صحیح برابر خود آن عدد و جزء صحیح هر عدد غیرصحیح، برابر اولین عدد صحیح سمت چپ آن عدد بر روی محور اعداد است و برای عدد حقیقی a آن را با نماد $[a]$ نمایش می‌دهیم.

جزء صحیح یک عدد حقیقی را بزرگ‌ترین عدد صحیحی در نظر می‌گیریم که کوچک‌تر یا مساوی خود آن عدد است. هر عدد حقیقی بین دو عدد صحیح متوالی یا مساوی با یکی از آن‌هاست، پس برای هر عدد حقیقی x، عدد صحیح n وجود دارد به طوری که:

$$n \le x < n+1 \xleftrightarrow{n\in\mathbb{Z}} [x]=n$$

به طور مثال داریم: $[1]=1, [-3]=-3, [1/5]=1, [\sqrt{5}]=2, [-1/3]=-2, [-\pi]=-4$

پاسخ تشریحی **گام اول:**

ابتدا $f(\frac{7}{2})$ را حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{7}{2})=2(\frac{7}{2})+[\frac{7}{2}]=7+3=10$$

گام دوم: حال $f(\frac{7}{2})$ را جای‌گذاری می‌کنیم و داریم: $f(mf(\frac{7}{2}))=f(10m)=4 \Rightarrow 20m+[10m]=4$

گام سوم: $10m$ را متغیر جدید t می‌گیریم و معادله را با t بازنویسی می‌کنیم $\Rightarrow 2t+[t]=4$

گام چهارم: $2t$ عدد صحیح است، پس بخش اعشاری عدد t برابر صفر یا $\frac{1}{2}$ است: (یعنی یا t صحیح است یا مثلاً عددی مثل $2/5$، $3/5$ و... است.)

$$\Rightarrow \begin{cases} t=k \xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{[t]=k} 2k+k=4 \Rightarrow k=\frac{4}{3}\notin\mathbb{Z} \text{ غ.ق.ق} \\ t=k+\frac{1}{2} \xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{[t]=k} 2k+1+k=4 \Rightarrow k=1 \end{cases}$$

پس $t=10m=\frac{3}{2}$ و در نتیجه $m=\frac{3}{20}$ است.

گام پنجم: خواستهٔ نهایی برابر است با: $[\frac{1}{m}]=[\frac{20}{3}]=[6/...]=6$

تست و پاسخ ۸

دو تابع $f=\{(2,2a),(4,6),(6,2-3a)\}$ و $y=f(b-x)$ مساوی‌اند. حاصل $a+b$ کدام است؟

زوج مرتب‌های یکسان دارند.

۱) ۸/۴ ۲) ۲/۷
۳) ۴/۶ ۴) ۶/۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره همیشه در بحث تساوی دو تابع، اول برید سراغ دامنه‌ها. از تساوی دو دامنه خیلی چیزا معلوم میشه، الانم همین کار رو کنید.

درس‌نامه تساوی دو تابع

دو تابع f و g مساوی هستند، اگر و فقط اگر اولاً دامنه‌هایشان مساوی باشند و دوماً در این دامنه ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ یکسان باشند.

ممکن است $f(x)$ و $g(x)$ ظاهراً برابر نباشند، اما به سادگی به هم تبدیل شوند.

به عنوان مثال دو تابع $f(x)=\frac{x}{x}$ و $g(x)=1$ مساوی نیستند؛ زیرا $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ و $D_g=\mathbb{R}$ است که طبیعتاً برابر نیستند.

اگر دو تابع به صورت نمایش زوج مرتبی نیز مساوی باشند، زوج مرتب‌ها در هر دو تابع باید عیناً یکسان باشند.

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا می‌رویم سراغ برابری دامنه‌ها. در تابع $y=f(b-x)$، ورودی f که همان $b-x$ است، باید برابر ۲، ۴ و ۶ باشد، پس دامنهٔ تابع که xها باشند، باید مجموعهٔ $\{b-2,b-4,b-6\}$ باشد. این مجموعه باید مساوی مجموعهٔ $\{2,4,6\}$ باشد و این زمانی امکان‌پذیر است که $b=8$ باشد.

گام دوم: تابع $y=f(8-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y=f(b-x)=f(8-x)=\{(2,\underbrace{2-3a}_{f(8-2)=f(6)}),(4,6),(6,\underbrace{2a}_{f(8-6)=f(2)})\}$$

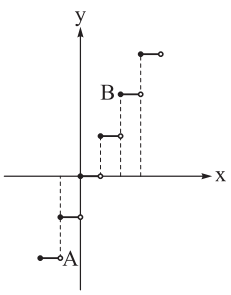
گام سوم: با مقایسهٔ این تابع با تابع زوج مرتبی صورت سؤال، مشخص می‌شود برای تساوی دو تابع، لازم است $f(2)$ و $f(6)$ برابر باشند:

$$\Rightarrow 2-3a=2a \Rightarrow a=\frac{2}{5}=0/4$$

گام چهارم: خواستهٔ نهایی برابر $a+b=8/4$ است.

تست و پاسخ ۹

قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{1}{a}[2ax]$ به صورت مقابل است. شیب خط شامل پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $\frac{10}{3}$

۲) $\frac{4}{3}$

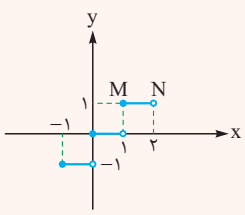
۳) ۳

۴) $\frac{8}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

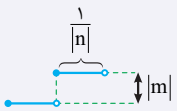
درس‌نامه رسم نمودار $y=[x]$

تابع $y=[x]$ ساده‌ترین تابع براکتی است که قسمتی از نمودار آن به صورت مقابل است:



در این تابع طول هر پاره‌خط مانند MN برابر ۱ و ارتفاع هر پله نیز برابر ۱ است.

نکته در نمودار تابع $y=m[nx]$ طول هر پاره‌خط $\frac{1}{|n|}$ و ارتفاع هر پله برابر $|m|$ است.



نکته برای رسم نمودار تابع $y=[\alpha x+\beta]$، عبارت داخل براکت را بین دو عدد صحیح متوالی (مثلاً k و $k+1$) قرار می‌دهیم داریم:

$$k\le \alpha x+\beta<k+1 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} \begin{cases} \frac{k+1-\beta}{\alpha}<x\le\frac{k-\beta}{\alpha} & ;\ \alpha<0 \\ \frac{k-\beta}{\alpha}\le x<\frac{k+1-\beta}{\alpha} & ;\ \alpha>0 \end{cases}$$

یعنی اگر $\alpha<0$، نقطهٔ انتهایی بازه توپر است و اگر $\alpha>0$، نقطهٔ ابتدایی بازه توپر است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** نقطهٔ ابتدای هر پاره‌خط توپر است، پس طبق نکته $a>0$ است.

گام دوم: طبق نکتهٔ درس‌نامه، طول هر پاره‌خط $\frac{1}{2a}$ و ارتفاع هر پله $\frac{1}{a}$ است. پس فاصلهٔ افقی نقاط A و B سه برابر طول هر پاره‌خط یعنی $\frac{3}{2a}$ و فاصلهٔ عمودی آن‌ها چهار برابر ارتفاع هر پله یعنی $\frac{4}{a}$ است.

گام سوم: پس شیب پاره‌خط AB برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{4}{a}}{\frac{3}{2a}}=\frac{8}{3}$$

تست و پاسخ ۱۰

مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{x+3}{2}=[\frac{x+2}{3}]$ کدام است؟

۱) -17 ۲) -16 ۳) -12 ۴) -21

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره در معادلات شامل عبارت جزء صحیحی، رعایت دو نکته بسیار مهم است: ۱ــ خروجی براکت همواره عدد صحیح است. ۲ــ عبارت داخل براکت بین دو عدد صحیح متوالی است. استفادهٔ متوالی از این دو نکته راه‌گشای اغلب معادلات براکتی است.

درس نامه ویژگی‌های جزء صحیح

نامساوی‌های جزء صحیح	تساوی‌های جزء صحیح
(۱) $[x]\le k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} x<k+1$	(۱) $[x]=k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\le x<k+1$
(۲) $[x]\le a \xrightarrow{a\notin\mathbb{Z}} x<[a]+1$	(۲) $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x]=x$
(۳) $[x]\ge k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} x\ge k$	(۳) $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ;\ x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ;\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$
(۴) $[x]>a \xrightarrow{a\notin\mathbb{Z}} x\ge[a]+1$	(۴) $[x+k]=[x]+k,\ k\in\mathbb{Z}$
(۵) $x-1<[x]\le x$	(۵) $[kx]=\sum_{0}^{k-1}[x+\frac{i}{k}],\ k\in\mathbb{Z}$
(۶) $0\le x-[x]<1$	در حالت خاص: $[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$

پاسخ تشریحی

گام اول: عبارت $\frac{x+3}{2}$ باید یک عدد صحیح باشد تا تساوی برقرار شود. ما این عدد را k در نظر می‌گیریم:

$$\frac{x+3}{2}=k \Rightarrow x=2k-3 \quad ;\quad k\in\mathbb{Z}$$

گام دوم: $x=2k-3$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow [\frac{2k-1}{3}]=k$$

گام سوم: حال طبق تعریف اصلی براکت داریم:

$$k \le \frac{2k-1}{3} < k+1$$

گام چهارم: دو نامساوی را حل می‌کنیم و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} k \le \frac{2k-1}{3} \Rightarrow 3k \le 2k-1 \Rightarrow k \le -1 \\ \frac{2k-1}{3} < k+1 \Rightarrow 2k-1 < 3k+3 \Rightarrow k > -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -4 < k \le -1$$

گام پنجم: به ازای مقادیر صحیح k، مقدار x را می‌یابیم:

$$x = 2k-3 \xrightarrow{k=-3,-2,-1} x = -9,-7,-5$$

گام ششم: مجموع این جواب‌ها برابر -21 است.

تست و پاسخ ۱۱

اختلاف حداقل و حداکثر مقدار تابع $f(x) = (x+|x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟ ← برد تابع

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره شروع کن به بازه‌بندی، براساس ریشهٔ داخل قدرمطلق.

پاسخ تشریحی **گام اول:** دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$D_f : \frac{2-x}{x} \ge 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} 0 < x \le 2$$

در این بازه $|x|$ همان x است، پس ضابطهٔ تابع f به صورت مقابل تکمیل می‌شود:

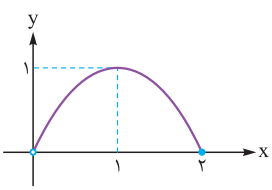
$$f(x) = 2x\sqrt{\frac{2-x}{x}} \quad ; \quad 0 < x \le 2$$

گام دوم: ضابطه را تغییر می‌دهیم:

$$2x\sqrt{\frac{2-x}{x}} = 2\sqrt{x^2 \times \frac{2-x}{x}} = 2\sqrt{x(2-x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\sqrt{x(2-x)} \quad ; \quad 0 < x \le 2$$

گام سوم: سهمی $y = x(2-x)$ را با دامنهٔ $(0,2]$ رسم می‌کنیم:



برد این تابع بازهٔ $[0,1]$ است.

گام چهارم: در نتیجه برد تابع f برابر است با: $[0,2]$. این یعنی اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار f برابر ۲ است.

تست و پاسخ ۱۲

قرینهٔ نمودار تابع $f(x) = x^2 + 4x$ را نسبت به مبدأ مختصات ← $-f(-x)$ **۳ واحد به چپ** ← $x \to x+3$ **انتقال می‌دهیم. مجموع طول‌های نقاط تلاقی نمودار جدید با نمودار تابع f کدام است؟**

۱) ۲ ۲) -2

۳) ۳ ۴) -3

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه ● تبدیل نمودار

● **تابع $f(x)$ را داریم $(k>0)$:**

عملیات	به جای x قرار دهیم $x-k$.	به‌جای x قرار دهیم $x+k$.	کل تابع را با k جمع کنیم.	کل تابع را منهای k کنیم.
ضابطه	$y=f(x-k)$	$y=f(x+k)$	$y=f(x)+k$	$y=f(x)-k$
نمودار	نمودار f را k واحد به راست می‌بریم.	نمودار f را k واحد به چپ می‌بریم.	نمودار f را k واحد بالا می‌بریم.	نمودار f را k واحد پایین می‌بریم.

● **انعکاس نسبت به محور xها و yها:**

عملیات	۱) قراردادن $-x$ به جای x در تابع	۲) کل تابع قرینه شود.	انجام هر دو عملیات (۱) و (۲)
ضابطه	$f(-x)$	$-f(x)$	$-f(-x)$
نمودار	نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود.	نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود.	نمودار f نسبت به مبدأ قرینه می‌شود.

● **رسم تابع $f(-x+k)$ یا $y=f(k-x)$ با شرط $(k>0)$:**

۱) نمودار f را k واحد به چپ می‌بریم (به زبان دیگر $f(x+k)$ را رسم می‌کنیم).

۲) نمودار به دست آمده را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم (اگر به جای x قرار دهیم $-x$، تابع $f(-x+k)$ یا $f(k-x)$ به دست می‌آید).

● **رسم تابع $y=f(-x-k)$ $(k>0)$:**

۱) نمودار f را k واحد به راست می‌بریم (در واقع تابع $y=f(x-k)$ را رسم می‌کنیم).

۲) نمودار f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم (در واقع x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم تا تابع $f(-x-k)$ به دست آید).

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ تابع مربوط به نمودار جدید که آن را g می‌نامیم، به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^2+4x \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y=-f(-x)=-((-x)^2+4(-x))=-x^2+4x$$

$$\xrightarrow[x\to(x+3)]{\text{۳ واحد به چپ}} g(x)=-(x+3)^2+4(x+3)=-x^2-2x+3$$

گام دوم: نمودار تابع جدید (g) را با تابع اولیه (f) قطع می‌دهیم؛ پس باید معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را حل کنیم:

$$\xrightarrow{f(x)=g(x)} x^2+4x=-x^2-2x+3 \Rightarrow 2x^2+6x-3=0$$

گام سوم: مجموع جواب‌های معادلهٔ بالا که همان مجموع طول‌های نقاط تلاقی نمودارهای f و g است، برابر است با:

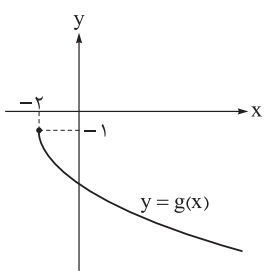
$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{6}{2}=-3$$

تست و پاسخ ۱۳

نمودار تابع g، فقط از انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{3-x}$ و قرینه‌یابی آن نسبت به محورهای مختصات به دست آمده است. مقدار $(gof)(-46)$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -3

۳) -4 ۴) -5

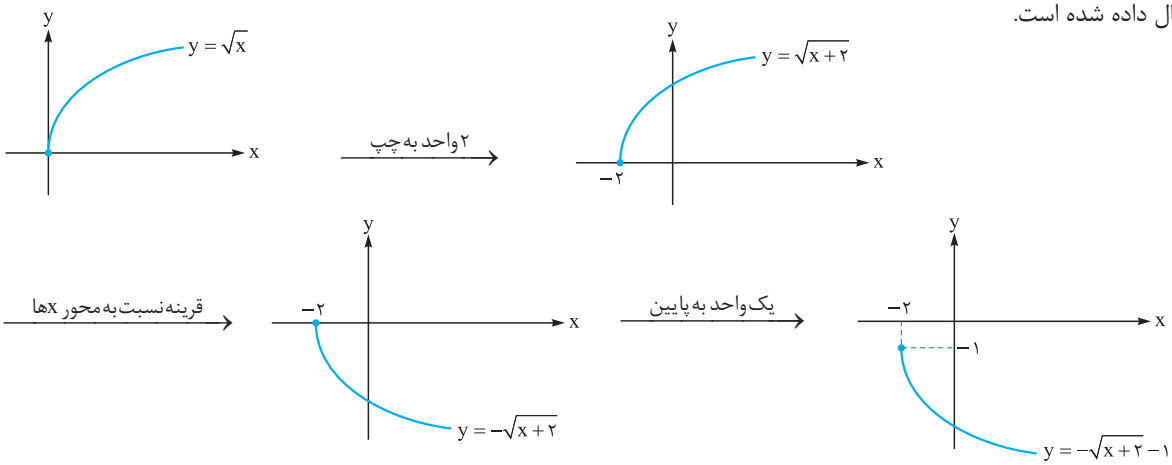


پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره کاری به ضابطهٔ f نداشته باش، ضابطهٔ g رو مستقیم (البته بدون ضریب پشت رادیکال) بنویس.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ما به خود ضابطهٔ f کاری نداریم، بلکه فقط شکل کلی آن را نیاز داریم. برای رسم نمودار تابع g نمودار تابع f را انبساط عمودی یا افقی نداده‌ایم، پس در تابع رادیکالی g نیز، قدرمطلق ضریب x و همچنین رادیکال برابر ۱ است؛ پس بدون نیاز به ضابطهٔ f، ضابطهٔ تابع g را مستقیماً می‌توانیم بنویسیم: $g(x)=-\sqrt{x+2}-1$

تابع g همان تابع $y=\sqrt{x}$ است که پس از انتقال آن به اندازهٔ ۲ واحد به چپ، نسبت به محور x ها انعکاس یافته و در انتها یک واحد به پایین انتقال داده شده است.



گام دوم: حالا خواستهٔ مسئله را حساب می‌کنیم:

$$(gof)(-۴۶)=g(\underbrace{f(-۴۶)}_{\sqrt{۳-(-۴۶)}=۷})=g(۷)=-\sqrt{۹}-۱=-۴$$

تست و پاسخ ۱۴

نقطهٔ $A(۲,a)$ واقع بر نمودار تابع $y=۲f(\frac{x-۱}{۳})$ با نقطهٔ $A'(b,۲)$ واقع بر نمودار تابع $y=۱-۳f(\frac{x}{۲})$ متناظر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) صفر — x برابر ۲ و y برابر a است.

۲) ۴

۳) ۲− — x برابر b و y برابر ۲ است.

۴) ۴− — یک نقطهٔ واحد روی $y=f(x)$ هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره ورودی‌های f و همچنین خروجی‌های اون به ازای هر دو نقطه باید برابر باشن.

درس نامه •• به دست آوردن نقطهٔ متناظر در تابع تبدیل‌یافته

فرض کنیم نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ روی نمودار تابع f باشد، یعنی $f(x_۰)=y_۰$. می‌خواهیم ببینیم این نقطه روی نمودار تابع $y=af(bx+c)+d$ به کدام نقطهٔ متناظر (A') تبدیل می‌شود. برای این منظور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) $bx+c=x_۰$ قرار می‌دهیم؛ پس $x=\frac{x_۰-c}{b}$ می‌شود.

۲) با قراردادن x در تابع تبدیل‌یافته داریم: $y=af(x_۰)+d=ay_۰+d$

یعنی نقطهٔ A به نقطهٔ $A'(\frac{x_۰-c}{b},ay_۰+d)$ تبدیل می‌شود. مثلاً برای این‌که ببینیم $(۲,-۱)$ روی نمودار تابع f به کدام نقطهٔ روی نمودار تابع $y=-۲f(۱-۲x)+۳$ تبدیل می‌شود، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}۱-۲x=۲ \Rightarrow -۲x=۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\\ y=-۲f(۲)+۳=-۲(-۱)+۳=۵\end{array}\right\} \Rightarrow A'(-\frac{۱}{۲},۵)$$

برای انجام عملیات برعکس، اگر نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی تابع $y=af(bx+c)+d$ باشد (مثل این سؤال)، با جای‌گذاری به رابطهٔ $f(x'_۰)=y'_۰$ می‌رسیم؛ پس نقطهٔ $(x'_۰,y'_۰)$ روی f قرار دارد.

پاسخ تشریحی

گام اول: مختصات نقطهٔ A را در ضابطهٔ $y=۲f(\frac{x-۱}{۳})$ قرار می‌دهیم:

$$a=۲f(\frac{۲-۱}{۳}) \Rightarrow f(\frac{۱}{۳})=\frac{a}{۲}$$

گام دوم: مختصات نقطهٔ A' را نیز در ضابطهٔ $y=1-3f(\frac{x}{2})$ قرار می‌دهیم:

$$2=1-3f(\frac{b}{2}) \Rightarrow f(\frac{b}{2})=-\frac{1}{3}$$

گام سوم: نقاط A و A' متناظر هستند؛ پس تساوی‌های گام‌های اول و دوم باید یکسان باشند:

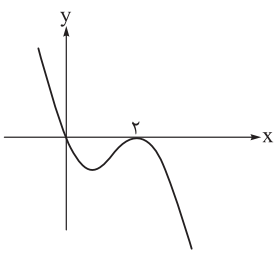
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}=\frac{b}{2} \Rightarrow b=\frac{2}{3} \\ \frac{a}{2}=-\frac{1}{3} \Rightarrow a=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

گام چهارم: مجموع a و b برابر صفر است.

تست و پاسخ ۱۵

اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{xf(x)}{f(2-x)}}$ کدام است؟

زیر رادیکال ≥ 0



۱) $(0,2)$

۲) $(-\infty,0)$

۳) $(-\infty,2)-\{0\}$

۴) $(2,+\infty)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره غالباً در سؤال‌هایی که خواستهٔ سؤال بازه است، عددگذاری یکی از راه‌های کوتاه حل سؤال است.

پاسخ تشریحی روش اول: عددگذاری می‌کنیم:

گام اول: در ۲ و ۳ اعداد منفی هستند، اما در ۱ و ۴ نیستند؛ پس یک عدد منفی دلخواه را امتحان می‌کنیم، مثلاً $x=-1$:

$$x=-1 \Rightarrow y=\sqrt{\frac{-f(-1)}{f(3)}}=\sqrt{\text{مثبت}}$$

(صورت: مثبت، مخرج: منفی)

پس اعداد منفی قابل قبول‌اند و ۱ و ۴ را رد می‌کنیم.

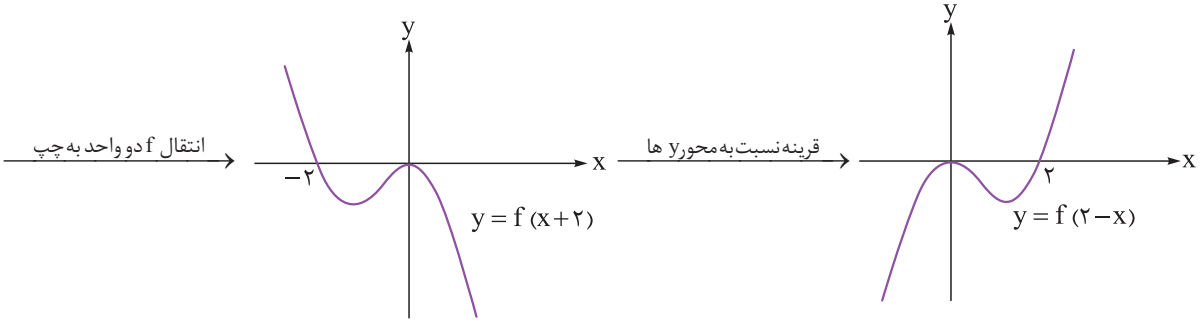
گام دوم: فرق بین ۲ و ۳ در اعداد مثبت است. یک عدد مثبت دلخواه عضو بازهٔ $(0,2)$ مثل $x=1$ را امتحان می‌کنیم:

$$x=1 \Rightarrow y=\sqrt{\frac{f(1)}{f(1)}}=\sqrt{1}=1$$

پس بعضی از اعداد مثبت هم قابل قبول‌اند و در نتیجه ۳ پاسخ درست است.

روش دوم:

گام اول: لازم است نمودار تابع $y=f(2-x)$ را رسم کنیم تا علامت آن را در بازه‌های مشخص تعیین کنیم. برای رسم آن، نمودار تابع f را ۲ واحد به چپ می‌بریم و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم:



گام دوم: جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال را تشکیل می‌دهیم:

		۰		۲	
x	−	۰	+		+
$f(x)$	+	۰	−	۰	−
$f(۲-x)$	−	۰	−	۰	+
$\frac{xf(x)}{f(۲-x)}$	+	ن	ت +	ن	ت −

البته بدون رسم نمودار هم می‌توانستیم علامت $f(۲-x)$ را در بازه‌های مختلف به دست آوریم:

$$f(۲-x)\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲-x\leq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \\ ۲-x=۲ \Rightarrow x=۰ \end{cases}$$

$$f(۲-x)<۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲-x>۰ \Rightarrow x<۲ \\ ۲-x\neq ۲ \Rightarrow x\neq ۰ \end{cases}$$

گام سوم: دامنهٔ تابع، مجموعهٔ $(-\infty,۲)-\{۰\}$ یا $(-\infty,۰)\cup(۰,۲)$ است.

تست و پاسخ ۱۶

نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را نسبت به محورهای مختصات قرینه می‌کنیم و سپس آن را ۱۰ واحد به بالا انتقال می‌دهیم. مساحت بین نمودار نهایی و نمودار تابع f کدام است؟

قرینه نسبت به مبدأ: $-f(-x)$

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۳۶ ۴) ۵۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره مساحت سطح بین دو نمودار قدرمطلقی، تیپ خیلی پرتکراری است، حتماً به آن توجه کنید.

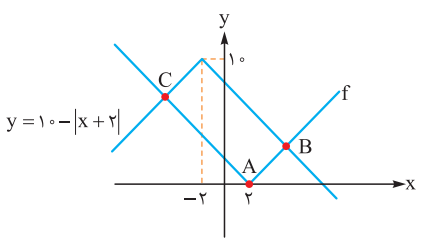
خودت حل کنی بهتره رسم نمودار قدرمطلقی که آسونه، رسم کن و مساحت یه مستطیل رو حساب کن، یه خرده هندسهٔ تحلیلی هم نیاز داری.

پاسخ تشریحی

گام اول: باید ضابطهٔ تابع جدید را طبق ترتیب تبدیل‌های گفته‌شده به دست آوریم:

$$f(x)=|x-۲| \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y=-f(-x)=-|-x-۲|=-|x+۲| \xrightarrow{\text{۱۰ واحد به بالا}} y=۱۰-|x+۲|$$

گام دوم: نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



گام سوم: سطح بین دو نمودار یک مستطیل است و برای مساحت آن کافی است طول اضلاع AB و AC را حساب کنیم که لازم است مختصات نقاط B و C را به دست آوریم:

$$B\begin{cases} y=x-۲ \\ y=-x+۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{تقاطع}} x_B-۲=-x_B+۸ \Rightarrow x_B=۵ \Rightarrow y_B=۳$$

$$C\begin{cases} y=-x+۲ \\ y=x+۱۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تقاطع}} -x_C+۲=x_C+۱۲ \Rightarrow x_C=-۵ \Rightarrow y_C=۷$$

پس مختصات نقاط B و C به صورت $B(۵,۳)$ و $C(-۵,۷)$ است.

گام چهارم: طول اضلاع AB و AC و سپس مساحت مستطیل را حساب می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۳-۰)^۲}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

$$AC=\sqrt{(-۵-۲)^۲+(۷-۰)^۲}=\sqrt{۲(۷)^۲}=۷\sqrt{۲}$$

پس مساحت برابر است با: $(۳\sqrt{۲})(۷\sqrt{۲})=۴۲$

تست و پاسخ ۱۷

چندجمله‌ای $f(x)$، n ریشهٔ دوبه‌دو متمایز دارد، به طوری‌که مجموع آن‌ها برابر ۱۲ است. اگر مجموع ریشه‌های چندجمله‌ای $f(۴-۳x)$ برابر ۸ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره این سؤال از همون مبحث نقطهٔ متناظره. ببین نقطهٔ $(\alpha,۰)$ در تابع f به چه نقطه‌ای در تابع $y=f(۴-۳x)$ نظیر می‌شه؟

پاسخ تشریحی **گام اول:** ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x)$ یا صفرهای تابع $y=f(x)$ را α_i در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\alpha_۱+\alpha_۲+\ldots+\alpha_n=۱۲$$

گام دوم: صفرهای تابع $y=f(۴-۳x)$ را برحسب α_iها به دست می‌آوریم. این صفرها را x_i می‌نامیم.

$$۴-۳x_i=\alpha_i \Rightarrow x_i=\frac{۴-\alpha_i}{۳}$$

گام سوم: مجموع x_iها را برابر ۸ قرار می‌دهیم:

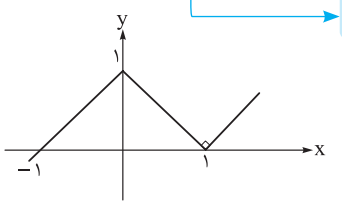
$$x_۱+x_۲+\ldots+x_n=\frac{۴-\alpha_۱}{۳}+\frac{۴-\alpha_۲}{۳}+\ldots+\frac{۴-\alpha_n}{۳}=\frac{\overbrace{(۴+۴+\ldots+۴)}^{n\text{تا}}-\overbrace{(\alpha_۱+\alpha_۲+\ldots+\alpha_n)}^{\text{برابر ۱۲ است.}}}{۳}=\frac{۴n-۱۲}{۳}=۸$$

$$\Rightarrow n=\frac{۲۴+۱۲}{۴}=۹$$

تست و پاسخ ۱۸

نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر نمودار تابع $y=-\frac{۳}{۲}x+a+f(\frac{۲-۳x}{۲})$ فقط در بازهٔ $[m,n]$ بر محور طول‌ها منطبق باشد، حاصل $m+n+a$ کدام است؟

در این بازه $y=۰$ است.



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** نمودار تابع $y=-\frac{۳}{۲}x+a+f(\frac{۲-۳x}{۲})$ در بازهٔ $[m,n]$ بر محور xها منطبق است، یعنی در این بازه عرض همهٔ نقاط برابر صفر است:

$$\xrightarrow{y=۰} ۰=-\frac{۳}{۲}x+a+f(\frac{۲-۳x}{۲}) \Rightarrow f(۱-\frac{۳}{۲}x)=\frac{۳}{۲}x-a$$

گام دوم: این یعنی در این بازه، دو تابع $y=f(۱-\frac{۳}{۲}x)$ و $y=\frac{۳}{۲}x-a=-(۱-\frac{۳}{۲}x)+۱-a$ مساوی هستند. به ضابطه‌های تابع f دقت کنید:

$$f(x)=\begin{cases}x+۱ & ; \quad x\le ۰\\ -x+۱ & ; \quad ۰\le x\le ۱\\ x-۱ & ; \quad x\ge ۱\end{cases}$$

دقت کنید که معادلهٔ خط $y=\frac{۳}{۲}x-a$ را برحسب ورودی تابع $y=f(۱-\frac{۳}{۲}x)$، یعنی $۱-\frac{۳}{۲}x$ نوشته‌ایم. با توجه به ضریب -۱، مشخص است که در بازه‌ای که ضابطهٔ تابع $-x+۱$ است، تساوی امکان‌پذیر است؛ پس داریم:

$$۰\le \square \le ۱ \Rightarrow f(\square)=-\square+۱ \xrightarrow{f(۱-\frac{۳}{۲}x)=-(۱-\frac{۳}{۲}x)+۱-a} ۱-a=۱ \Rightarrow a=۰$$

گام سوم: عبارت $۱-\frac{۳}{۲}x$ باید در محدودهٔ دامنهٔ این ضابطه باشد:

$$\Rightarrow ۰\le ۱-\frac{۳}{۲}x\le ۱ \Rightarrow -۱\le -\frac{۳}{۲}x\le ۰ \Rightarrow ۰\le x\le \frac{۲}{۳}$$

این همان بازهٔ $[m,n]$ است؛ پس: $m=۰$ و $n=\frac{۲}{۳}$

در نهایت داریم: $m+n+a=۰+\frac{۲}{۳}+۰=\frac{۲}{۳}$

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

تست و پاسخ ۱۹

کدام گزینه، یک گزاره با ارزش درست را نشان می‌دهد؟

۱) $x^۲ > ۲x$

۲) $x + ۱ > ۰$

۳) مجموع یک عدد مخالف صفر و معکوس آن، همواره مخالف ± ۱ است.

۴) حاصل‌ضرب یک عدد گویا و یک عدد گنگ، همواره یک عدد گنگ است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره برو دنبال مثال نقض.

درس‌نامه

وقتی یک گزاره داریم یا آن گزاره را رد یا اثبات می‌کنیم.

مثال نقض: مثالی است برای رد یک حکم کلی.

برای اثبات یک حکم یکی از روش‌های زیر را به کار می‌بریم:

۱) اثبات مستقیم

۲) اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

۳) برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)

۴) اثبات بازگشتی

نکته اگر a عددی حقیقی و مخالف صفر باشد، آن‌گاه:

- $a > ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{a} \geq ۲$
- $a < ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{a} \leq -۲$

پاسخ تشریحی به کمک مثال نقض سه گزینه را رد می‌کنیم:

۱) $x = ۱ \Rightarrow (۱)^۲ > ۲(۱) \Rightarrow ۱ > ۲$ ✗

۲) $x = -۲ \Rightarrow -۲ + ۱ > ۰ \Rightarrow -۱ > ۰$ ✗

۳) با توجه به نکتهٔ درس‌نامه برای عدد حقیقی و مخالفِ صفرِ a، $a + \frac{۱}{a}$ هیچ‌گاه، ± ۱ نمی‌شود. ۳ را می‌توان به کمک برهان خلف ثابت کرد.

۴) اگر a عدد گویای صفر و b عددی گنگ باشد آن‌گاه $ab = ۰$ که عددی گویا است.

تست و پاسخ ۲۰

برای گزاره‌های p، q و r، ارزش کدام گزاره همواره درست است؟

۱) $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim r \wedge \sim p)$

۲) $(r \wedge \sim p) \Rightarrow (r \vee q)$

۳) $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \sim q)$

۴) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (r \vee p)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

پاسخ تشریحی یک‌یک گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $(p\vee\sim q)\Rightarrow(\sim r\wedge\sim p)\equiv\sim(p\vee\sim q)\vee(\sim r\wedge\sim p)$

$\equiv(\sim p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim r)\equiv\sim p\wedge(q\vee\sim r)$

اگر p ارزش درست داشته باشد، ارزش این گزاره نادرست می‌شود.

۲) $(r\wedge\sim p)\Rightarrow(r\vee q)\equiv\sim(r\wedge\sim p)\vee(r\vee q)\equiv(\sim r\vee p)\vee(r\vee q)$

$\equiv\underbrace{(\sim r\vee r)}_{T}\vee(p\vee q)\equiv T$

پس این گزاره همواره درست است.

۳) $(p\vee q)\Rightarrow(r\wedge\sim q)\equiv\sim(p\vee q)\vee(r\wedge\sim q)\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(r\wedge\sim q)$

$\equiv\sim q\wedge(r\vee\sim p)$

اگر q درست باشد آن‌گاه $\sim q$ نادرست است و این گزاره نادرست می‌شود.

۴) $(\sim p\wedge q)\Rightarrow(r\vee p)\equiv\sim(\sim p\wedge q)\vee(r\vee p)\equiv(p\vee\sim q)\vee(r\vee p)\equiv p\vee(\sim q\vee r)$

اگر p و r ارزش نادرست و q ارزش درست داشته باشند، ارزش این گزاره نادرست می‌شود.

تست و پاسخ ۲۱

ارزش گزارهٔ سوری $\forall x\in\mathbb{R};4x^2+1>4x$ و نقیض آن در کدام گزینه آمده است؟

۱) نادرست، $\exists x\in\mathbb{Z};4x^2+1\leq 4x$

۲) درست، $\exists x\in\mathbb{R};4x^2+1\leq 4x$

۳) درست، $\forall x\in\mathbb{Z};4x^2+1\leq 4x$

۴) نادرست، $\exists x\in\mathbb{R};4x^2+1\leq 4x$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

سورها: عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف‌اند و به ترتیب با نمادهای $\forall$ و $\exists$ نمایش می‌دهیم.

$\forall x;p(x)\ ,\ \exists x;p(x)$

۱) گزاره‌نمای شامل سور عمومی وقتی به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود که هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

۲) گزاره‌نمای شامل سور وجودی وقتی به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

نقیض گزاره‌های سوری:

۱) $\sim(\forall x;p(x))\equiv\exists x;\sim p(x)$

۲) $\sim(\exists x;p(x))\equiv\forall x;\sim p(x)$

پاسخ تشریحی **گام اول (ارزش گزارهٔ سوری):**

$\forall x\in\mathbb{R};4x^2+1>4x$

$\forall x\in\mathbb{R};4x^2+1-4x>0\ \Rightarrow\ \forall x\in\mathbb{R};(2x-1)^2>0$

ارزش این گزاره نادرست است زیرا $x=\frac{1}{2}$، مثال نقضی برای این سور عمومی است. $x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ (2x-1)^2=0$

گام دوم (نقیض گزارهٔ سوری):

$\sim(\forall x\in\mathbb{R};4x^2+1>4x)\equiv\exists x\in\mathbb{R};\sim(4x^2+1>4x)$

$\equiv\exists x\in\mathbb{R};4x^2+1\leq 4x$

تست و پاسخ ۲۲

اگر $S=\{(x,y);x\le y\le ۲\sqrt{x}\}$، مجموعهٔ $S\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره ابتدا تعداد اعضای مجموعه را به دست بیار و بعد می‌دونی که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر ۲^n است.

پاسخ تشریحی **گام اول (مشخص‌کردن مجموعهٔ مورد نظر):**

$$S\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N})=\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{N},y\in\mathbb{N},x\le y\le ۲\sqrt{x}\}$$

گام دوم: برای به دست آورن محدودهٔ x کافی است نامساوی زیر را حل کنیم:

$$x\le ۲\sqrt{x}\Rightarrow x^۲\le ۴x\Rightarrow x^۲-۴x\le ۰\Rightarrow ۰\le x\le ۴\xrightarrow{x\in\mathbb{N}}x=۱,۲,۳,۴$$

گام سوم (پیداکردن اعضای مجموعه): کافی است به x مقدار بدهیم و y را به دست آوریم:

$$x=۱\Rightarrow ۱\le y\le ۲\Rightarrow y=۱,۲\Rightarrow (۱,۱),(۱,۲)$$

$$x=۲\Rightarrow ۲\le y\le ۲\sqrt{۲}\Rightarrow y=۲\Rightarrow (۲,۲)$$

$$x=۳\Rightarrow ۳\le y\le ۲\sqrt{۳}\Rightarrow y=۳\Rightarrow (۳,۳)$$

$$x=۴\Rightarrow ۴\le y\le ۲\sqrt{۴}\Rightarrow y=۴\Rightarrow (۴,۴)$$

$$S\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N})=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\}$$

گام چهارم (یافتن تعداد زیرمجموعه‌ها):

بنابراین این مجموعه با ۵ عضو، $۲^۵$ زیرمجموعه دارد.

تست و پاسخ ۲۳

چند مورد از گزاره‌های زیر، مثال نقض ندارد؟

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y داریم؛ $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

پ) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است.

ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ث) اگر برای سه مجموعهٔ A، B و C داشته باشیم $A\cup B=A\cup C$، آن‌گاه $B=C$.

ج) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $۴k+۱$ مربع کامل است.

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره گزاره‌های این سؤال همگی از کتاب درسی هستند، پس باید به خوبی به آن‌ها مسلط شده باشی.

پاسخ تشریحی گزاره‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم.

الف) از قدیم این را می‌دانستیم که مجموع دو عدد فرد همواره عددی زوج است. $(۲n+۱)+(۲n+۳)=۴n+۴=۲(۲n+۱)$

ب) این تساوی قطعاً همیشه برقرار نیست، مثلاً به ازای $x=۱۶$ و $y=۹$ حکم برقرار نیست.

$$\sqrt{x+y}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{۱۶}+\sqrt{۹}=۷$$

پ) باز هم مثال نقض می‌آوریم، به ازای $n=4$، $2^n-1=15$ که عدد اول نیست!

ت) این گزاره صحیح است. دو عدد گویا را $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در نظر می‌گیریم که a,b,c,d,p و q همگی عضو $\mathbb{Z}$ هستند. بنابراین:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}=\frac{p}{q} \Rightarrow \text{عددگویا}$$

ث) برای این گزاره نیز مثال نقض می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}A=\{1,2\}\\B=\{2,3\}\\C=\{1,3\}\end{array}\right\} A\cup B=A\cup C=\{1,2,3\} \quad , \quad B\neq C$$

ج) درستی این گزاره را اثبات می‌کنیم:

$$k=n(n+1)=n^2+n$$

$$4k+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$ پس مربع کامل است.

تست و پاسخ ۲۴

اگر $10<n<28$، به ازای چند مقدار طبیعی n، عدد $(1+2+\cdots+n)^2$ بر ۴ بخش‌پذیر است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره برای n، ۴ حالت $n=4t$، $n=4t+1$، $n=4t+2$ و $n=4t+3$ را بررسی کنید تا مشخص شود در کدام‌یک از حالت‌ها، عبارت صورت سؤال بر ۴ بخش‌پذیر است.

درس‌نامه ●● اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک حکم، ناگزیریم که چند حالت را در نظر بگیریم. برای مثال، برای اثبات این‌که عبارت $n(n+4)(2n+1)$ همواره مضرب ۳ است، سه حالت را برای n در نظر می‌گیریم:

$n:n=3t \Rightarrow n(n+4)(2n+1)=\underbrace{3}_{\text{عامل ۳}}t(3t+4)(6t+1)$ مضرب ۳ باشد.

$n:n=3t+1 \Rightarrow n(n+4)(2n+1)=(3t+1)(3t+5)\underbrace{(6t+3)}_{\text{عامل ۳}}$ در تقسیم به ۳ باقی‌ماندهٔ ۱ داشته باشد.

$n:n=3t+2 \Rightarrow n(n+4)(2n+1)=(3t+2)\underbrace{(3t+6)}_{\text{عامل ۳}}(6t+5)$ در تقسیم به ۳ باقی‌ماندهٔ ۲ داشته باشد.

نکته از دوران مهدکودک به یاد داریم: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

پاسخ تشریحی روش اول: ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(1+2+3+\cdots+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

واضح است که اگر $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج باشد، $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ مضرب ۴ می‌شود؛ پس به دنبال حالتی هستیم که $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج باشد.

حالا برای n چهار حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $n=4t$ باشد، داریم:
$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{4t(4t+1)}{2}=2t(4t+1) \Rightarrow \checkmark \text{ زوج است.}$$

حالت دوم: اگر $n=4t+1$ باشد، داریم:
$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(4t+1)(4t+2)}{2}=(4t+1)(2t+1) \Rightarrow \times \text{ زوج نیست.}$$

حالت سوم: اگر $n=4t+2$ باشد، داریم:
$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(4t+2)(4t+3)}{2}=(2t+1)(4t+3) \Rightarrow \times \text{ زوج نیست.}$$

حالت چهارم: اگر $n=4t+3$ باشد، داریم:
$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(4t+3)(4t+4)}{2}=(4t+3)(2t+2) \Rightarrow \checkmark \text{ زوج است.}$$

در آخر باید ببینیم چه تعداد از $10 < n < 28$ به صورت $4t$ یا $4t+3$ هستند:

$$10 < 4t < 28 \Rightarrow 2/5 < t < 7 \xrightarrow{t\in\mathbb{Z}} t = 3,4,5,6 \Rightarrow \text{۴ مقدار}$$

$$10 < 4t+3 < 28 \Rightarrow 7 < 4t < 25 \Rightarrow 1/75 < t < 6/25 \xrightarrow{t\in\mathbb{Z}} t = 2,3,4,5,6 \Rightarrow \text{۵ مقدار}$$

بنابراین جواب $4+5=9$ می‌شود.

روش دوم: می‌خواهیم $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج باشد؛ پس باید: $\frac{n(n+1)}{2} = 2k \Rightarrow n(n+1) = 4k$

n و $n+1$ دو عدد متوالی باشند که هر دو نمی‌توانند هم‌زمان زوج باشند، پس یا n باید مضرب ۴ باشد یا $n+1$:

$$n(n+1) = 4k \Rightarrow \begin{cases} n = 4t \\ n+1 = 4t \Rightarrow n = 4t-1 \end{cases}$$

ادامه مانند روش اول.

تست و پاسخ ۲۵

در اثبات نامساوی $(a,b\in\mathbb{R})$ $(a^2+1)(b^2+4) \geq 8ab$ به روش بازگشتی، به کدام گزارهٔ همواره درست می‌رسیم؟

۱) $(ab-1)^2+(b-2a)^2 \geq 0$

۲) $(ab-2)^2+(b-2a)^2 \geq 0$

۳) $(ab-2)^2+(a-2b)^2 \geq 0$

۴) $(ab-1)^2+(a-2b)^2 \geq 0$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره انواع روش‌ها برای اثبات یک گزاره را با چند مثال مختلف به ذهن خود بسپارید.

درس‌نامه در اثبات بازگشتی حکم را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا به یک عبارت بدیهی برسیم.

نکته در مثال‌های کتاب درسی همواره به یک عبارت مربع کامل بزرگ‌تر از صفر می‌رسیم.

پاسخ تشریحی

$$(a^2+1)(b^2+4) \geq 8ab$$

باید سعی کنیم با استفاده از حکم به یک عبارت بدیهی برسیم.

$$a^2b^2+4a^2+b^2+4 \geq 8ab \Leftrightarrow a^2b^2+4a^2+b^2+4-8ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2-4ab+4+4a^2-4ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ab-2)^2+(2a-b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ab-2)^2+(b-2a)^2 \geq 0$$

تست و پاسخ ۲۶

کدام یک از گزاره‌های سوری زیر از لحاظ ارزش درستی با بقیه متفاوت است؟

۱) $\forall x\in\mathbb{R}; x^2 > x$

۲) $\exists x\in\mathbb{R}; \frac{x+4}{3x} = 2x$

۳) $\exists x\in\mathbb{R}; 2x^2+3 < 2\sqrt{6}x$

۴) $\forall x\in\mathbb{R}; \frac{x^2-9}{x-3} = x+3$

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته

- گزاره‌ای با سور عمومی وقتی درست است که هیچ مثال نقضی نداشته باشد.
- گزارهٔ با سور وجودی وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ارزش هر یک از این گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

۱) این گزاره به ازای $x=0$ برقرار نیست پس دارای ارزش نادرست است.

۲) $\frac{x+4}{3x}=2x \Rightarrow x+4=6x^2 \Rightarrow 6x^2-x-4=0$

$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times(6)\times(-4)=97>0$

پس معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است؛ بنابراین مجموعه جواب این گزاره تهی نیست و ارزش آن درست است.

۳) $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0 \Rightarrow \Delta=0, a>0 \Rightarrow 2x^2-2\sqrt{6}x+3\geq 0$

چون این معادله نامنفی است و نمی‌تواند $2x^2+3<2\sqrt{6}x$ باشد، پس مجموعه جواب این گزاره تهی است در نتیجه ارزش آن نادرست است.

۴) این گزاره به ازای $x=3$ برقرار نیست، زیرا $x=3$ ریشهٔ مخرج $\frac{x^2-9}{x-3}$ است و در دامنهٔ آن نیست ولی در دامنهٔ معادلهٔ $x+3$ قرار دارد؛ پس این دو معادله دامنهٔ یکسان ندارند پس برابر نیستند.

گام دوم: ارزش گزاره‌های ۱ و ۳ و ۴ نادرست و ارزش گزارهٔ ۲ درست است.

تست و پاسخ ۲۷

اگر U مجموعهٔ مرجع و $C=A\cup B'$، آن‌گاه مجموعهٔ $[(B-A)'\cup C]\cup[A'-(C-B')']$ برابر کدام است؟

۱) A' ۲) B ۳) C ۴) $\varnothing$

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

$A-B=A\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

$(A\cup B)'=A'\cap B'$

پاسخ تشریحی **گام اول:**

$(B-A)'\cup C=(B\cap A')'\cup(A\cup B')=(A\cup B')\cup(A\cup B')$

$=A\cup B'=C \quad (1)$

گام دوم:

$(A'-(C-B')')=A'\cap(C-B')=A'\cap(C\cap B)=(A'\cap B)\cap C$

$=(A\cup B')'\cap C=(A\cup B')'\cap(A\cup B')=\varnothing \quad (2)$

گام سوم:

$\xrightarrow{(1),(2)} [(B-A)'\cup C]\cup[A'-(C-B')']=C\cup\varnothing=C$

تست و پاسخ ۲۸

برای این‌که ثابت کنیم «اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=0$، آن‌گاه $a=0$ یا $b=0$ است.» در این صورت از کدام هم‌ارزی استفاده کرده‌ایم؟

۱) $(p\wedge q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$

۲) $(p\vee q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$

۳) $(p\wedge q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r)$

۴) $(p\vee q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره بارها از مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی به‌طور مستقیم و غیرمستقیم در کنکور سؤال آمده، کتاب درسی رو خیلی خیلی دقیق بخون.

درس نامه

برای هر تعداد متناهی گزارهٔ دلخواه داریم:

$$p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

$$p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge \ldots (p_n \Rightarrow r)$$

پاسخ تشریحی روش اول:

گام اول: اگر صفربودن a را با p و صفربودن b را با q و $ab = 0$ را با r نمایش دهیم حکم را می‌توان به صورت گزارهٔ $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد.

گام دوم: با توجه به هم‌ارزی $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ ۲ پاسخ صحیح است.

روش دوم: در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های ممکن

برای a دو حالت حکم برقرار است:

۱) اگر $a = 0$ در این صورت حکم برقرار است یعنی $a = 0 \Rightarrow ab = 0 \quad (p \Rightarrow r)$

۲) اگر $a \neq 0$ باشد بنابراین a^{-1} یک عدد حقیقی است و داریم:

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0 \Rightarrow b = 0 \quad (q \Rightarrow r)$$

بنابراین $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ هر دو حالت حکم را نشان می‌دهد یعنی:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

هندسه دهم

تست و پاسخ ۲۹

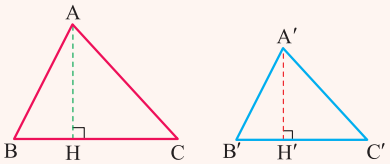
دو مثلث با محیط‌های ۱۵ و ۱۰ متشابه‌اند. اگر مساحت یکی از آن‌ها ۱۸ باشد، اختلاف مقادیر قابل قبول برای مساحت مثلث دیگر کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۲/۵ ۳) ۲۷ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه نسبت محیط‌ها و مساحت‌های دو شکل متشابه

فرض کنید ABC و $A'B'C'$ با نسبت k متشابه باشند، داریم:



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k \xrightarrow{\text{خواص تناسب}} \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=k$$

یعنی نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه، برابر با نسبت تشابه آن‌هاست.

پس:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}BC.AH}{\frac{1}{2}B'C'.A'H'}=(\frac{BC}{B'C'}).(\frac{AH}{A'H'})=k.k=k^2$$

یعنی نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر با مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.

پاسخ تشریحی **گام اول (به دست آوردن نسبت مساحت‌ها)**: می‌دانیم نسبت محیط‌ها همان نسبت تشابه است.

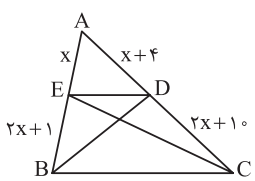
نسبت تشابه: $k=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}\rightarrow$ نسبت مساحت‌ها: $k^2=\frac{9}{4}$

گام دوم (محاسبهٔ مقادیر قابل قبول برای مساحت مثلث دیگر): یک بار مساحت ۱۸ را برای مثلث بزرگ‌تر و یک بار برای مثلث کوچک‌تر در نظر می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{S}{18}=\frac{9}{4}\Rightarrow S=\frac{81}{2}\\ \frac{18}{S}=\frac{9}{4}\rightarrow S=8\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{81}{2}-8=40/5-8=32/5$$

تست و پاسخ ۳۰

مطابق شکل اگر مساحت دو مثلث CDE و BED برابر باشد، آن‌گاه $\frac{DE}{BC}$ کدام است؟



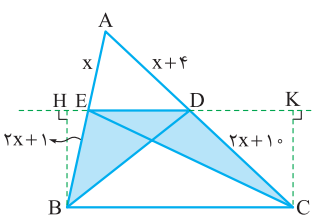
۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{4}{13}$ ۴) $\frac{5}{13}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره در برخی سؤال‌ها، تالس با مساحت مثلث ترکیب می‌شود. در این تیپ سؤال‌ها باید حواست به نسبت ارتفاع‌ها و قاعده‌ها باشد.

خودت حل کنی بهتره ارتفاع وارد بر DE را در دو مثلث CDE و BED رسم کن.

پاسخ تشریحی **گام اول (پیداکردن دو خط موازی در شکل)**: مساحت‌های دو مثلث BED و CDE با هم برابرند، پس ارتفاع‌های BH و CK را رسم می‌کنیم. چون قاعدهٔ DE در هر دو مثلث مشترک است، داریم:



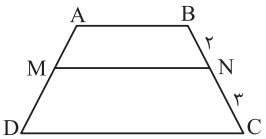
$$S_{BED}=S_{CDE}\Rightarrow \frac{1}{2}BH.DE=\frac{1}{2}CK.DE\Rightarrow BH=CK$$

بنابراین چهارضلعی BCKH مستطیل است و $DE \parallel BC$.

گام دوم (استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ABC):

$$BC\parallel ED\Rightarrow\begin{cases}\frac{AE}{BE}=\frac{AD}{CD}\Rightarrow\frac{x}{2x+1}=\frac{x+4}{2x+10}\Rightarrow 2x^2+10x=2x^2+9x+4\Rightarrow x=4\\ \frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{x}{3x+1}=\frac{4}{13}\end{cases}$$

تست و پاسخ ۳۱



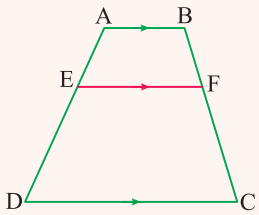
مطابق شکل، در ذوزنقهٔ ABCD طول قاعدهٔ بزرگ سه برابر طول قاعدهٔ کوچک است. مساحت ذوزنقهٔ MNCD چند برابر مساحت ذوزنقهٔ ABNM است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۱۶}{۷}$ ۴) $\frac{۱۸}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

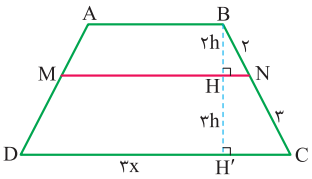
مشاوره سؤال‌های تالس ذوزنقه از پرتکرارترین‌های این فصل هستند، پس رابطه‌های آن را خوب بلد باشید.

درس‌نامه



اگر مطابق شکل، EF با قاعده‌های ذوزنقه موازی باشد، آن‌گاه $\frac{EF-AB}{CD-EF}=\frac{AE}{ED}$. (حواسمان هست که $\frac{AE}{ED}$ با $\frac{BF}{FC}$ برابر است.)

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ MN برحسب x)**: طبق رابطهٔ درس‌نامه داریم:



$$\frac{MN-AB}{CD-MN}=\frac{BN}{CN}\Rightarrow\frac{MN-x}{۳x-MN}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳MN-۳x=۶x-۲MN\Rightarrow ۵MN=۹x\Rightarrow MN=\frac{۹}{۵}x$$

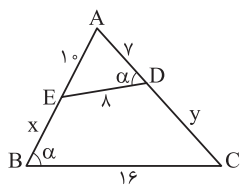
گام دوم (محاسبهٔ نسبت ارتفاع‌ها در دو ذوزنقه): با توجه به شکل و استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث BCH'، داریم:

$$MN\parallel CD\Rightarrow\frac{BH}{HH'}=\frac{BN}{NC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow BH=۲h\,,\,HH'=۳h$$

$$\frac{S_{MDCN}}{S_{AMNB}}=\frac{\frac{۱}{۲}(MN+CD).HH'}{\frac{۱}{۲}(AB+MN).BH}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۲۴}{۵}x\times۳h}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۴}{۵}x\times۲h}=\frac{۲۴\times۳}{۱۴\times۲}=\frac{۱۸}{۷}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):

تست و پاسخ ۳۲



با توجه به شکل، حاصل $\frac{y}{x}$ کدام است؟

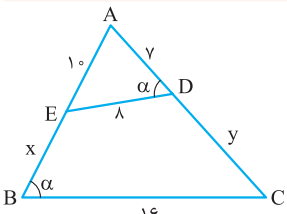
۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۳/۲۵ ۴) ۳/۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

اگر بدانیم که دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگری برابرند (که طبیعتاً زاویه‌های سوم هم برابر می‌شوند)، ثابت می‌شود که این دو مثلث با هم متشابه‌اند.

پاسخ تشریحی



دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند، زیرا:

$$\begin{cases}A\hat{B}C=A\hat{D}E=\alpha\\ B\hat{A}C=D\hat{A}E\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ADE}$$

نسبت‌های تشابه را می‌نویسیم:

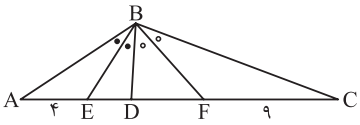
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۷}{x+۱۰}=\frac{۱۰}{۷+y}=\frac{۸}{۱۶}$$

$$\begin{cases}\frac{۷}{x+۱۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x+۱۰=۱۴\Rightarrow x=۴\\ \frac{۱۰}{۷+y}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۷+y=۲۰\Rightarrow y=۱۳\end{cases}$$

بنابراین: $\frac{y}{x}=\frac{۱۳}{۴}=۳/۲۵$

تست و پاسخ ۳۳

در مثلث ABC، نقطهٔ D روی ضلع AC چنان است که $C\hat{B}D = ۲\hat{A}$ و $A\hat{B}D = ۲\hat{C}$. اگر BE و BF به ترتیب نیمساز زاویه‌های $A\hat{B}D$ و $C\hat{B}D$ باشند، به طوری که $AE = ۴$ و $CF = ۹$، آن‌گاه طول پاره‌خط EF کدام است؟

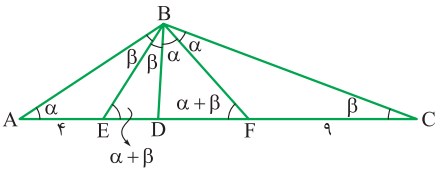


۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره با مشخص‌کردن زاویه‌های مفروض روی شکل، سعی کنید دو مثلث متشابه پیدا کنید.

پاسخ تشریحی با توجه به فرض سؤال شکل به صورت مقابل است:



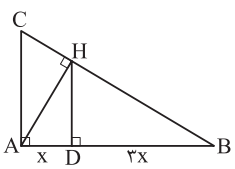
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{BCF} \text{ زاویهٔ خارجی در } B\hat{F}E = F\hat{B}C + \hat{C} = \alpha + \beta \\ \overset{\Delta}{ABE} \text{ زاویهٔ خارجی در } B\hat{E}F = A\hat{B}E + \hat{A} = \beta + \alpha \end{cases} \xrightarrow{E\hat{B}F = \alpha+\beta} E\hat{B}F = B\hat{F}E = B\hat{E}F$$

بنابراین مثلث BEF متساوی‌الاضلاع است. از طرفی چون $A\hat{B}E = \hat{C}$ و $\hat{A} = F\hat{B}C$، پس $\overset{\Delta}{ABE} \sim \overset{\Delta}{BCF}$ و در نتیجه:

$$\frac{BE}{CF} = \frac{AE}{BF} \xrightarrow{BE=BF=EF} \frac{EF}{۹} = \frac{۴}{EF} \Rightarrow EF^۲ = ۳۶ \Rightarrow EF = ۶$$

تست و پاسخ ۳۴

اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر $۸\sqrt{۳}$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره گاهی روابط طولی مثلث قائم‌الزاویه با تالس ترکیب می‌شود.

خودت حل کنی بهتره ابتدا با نوشتن رابطهٔ تالس و پس از آن با استفاده از روابط طولی مثلث قائم‌الزاویه، طول AC را برحسب x به دست بیاور و در فرمول مساحت مثلث قرار بده.

پاسخ تشریحی **گام اول (استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ABC)**: ابتدا رابطهٔ تالس جزءبه‌جزء را در مثلث ABC می‌نویسیم. چون در مرحلهٔ بعدی می‌خواهیم از روابط طولی مثلث استفاده کنیم، احتمالاً این مدل از رابطهٔ تالس که CH و BH هر دو هستند بیشتر به کارمان بیاید.

$$DH \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{CH}{BH} = \frac{۱}{۳}$$

گام دوم (استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC):

می‌خواهیم طول AC را برحسب x به دست بیاوریم، پس از این رابطه‌ها استفاده می‌کنیم:

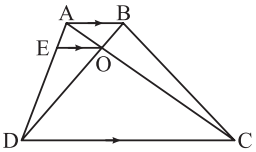
$$\begin{cases} AC^۲ = CH.BC \\ AB^۲ = BH.BC \end{cases} \Rightarrow \frac{AC^۲}{AB^۲} = \frac{CH}{BH} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \xrightarrow{AB=۴x} AC = \frac{۴x}{\sqrt{۳}}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AB.AC = ۸\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۴x)(\frac{۴x}{\sqrt{۳}}) = ۸\sqrt{۳} \Rightarrow x = \sqrt{۳} \Rightarrow AC = ۴$$

تست و پاسخ ۳۵

در ذوزنقهٔ ABCD، مطابق شکل مساحت مثلث AOE نصف مساحت مثلث DOE است. مساحت مثلث AOB چه کسری از مساحت ذوزنقهٔ ABCD است؟

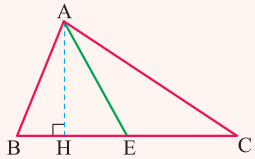


۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۴}{۲۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه نسبت مساحت‌های دو مثلث هم‌ارتفاع

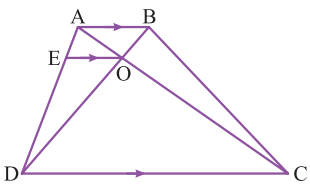
در شکل مقابل، E نقطه‌ای دلخواه روی BC است. با توجه به این‌که ارتفاع AH در مثلث‌های ABE، ACE و ABC مشترک است، داریم:



$$\frac{S_{ABE}}{S_{ACE}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BE}{\frac{۱}{۲}AH\times CE}=\frac{BE}{CE}\ \text{یا}\ \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}}=\frac{BE}{BC}\ \text{یا}\ \frac{S_{AEC}}{S_{ABC}}=\frac{EC}{BC}$$

به طور کلی اگر ارتفاع‌های دو مثلث با هم برابر باشند، نسبت مساحت‌هایشان برابر است با نسبت قاعده‌هایشان.

پاسخ تشریحی



گام اول (محاسبهٔ $\frac{S_{AOB}}{S_{ABD}}$): می‌دانیم برای دو مثلث هم‌ارتفاع، نسبت مساحت‌ها با نسبت قاعده‌های نظیر ارتفاع یکسان در هر دو مثلث، برابر است، پس داریم:

$$\frac{S_{AOE}}{S_{DOE}}=\frac{AE}{ED}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}AE=x\\DE=۲x\end{cases}$$

طبق تعمیم قضیهٔ تالس در $\overset{\Delta}{ABD}$ داریم:

$$EO\parallel AB\Rightarrow\frac{DE}{DA}=\frac{DO}{DB}\Rightarrow\frac{۲x}{۳x}=\frac{DO}{DB}=\frac{۲}{۳}$$

و چون دو مثلث AOB و ABD هم‌ارتفاع هستند، نسبت مساحت‌هایشان با نسبت قاعده‌ها برابر است و داریم:

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABD}}=\frac{OB}{DB}=\frac{۱}{۳}\quad(۱)$$

گام دوم (محاسبهٔ $\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}}$): به دلیل موازی‌بودن AB و CD، دو مثلث AOB و DOC متشابه‌اند و نسبت تشابه به صورت زیر است:

$$\frac{AB}{DC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AO}{OC}=\frac{۱}{۲}$$

و چون $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{BDC}$ هم‌ارتفاع هستند، داریم:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}}=\frac{AB}{DC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{S_{ABD}}{S_{ABD}+S_{BDC}}=\frac{S_{ABD}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{S_{ABD}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۳}\quad(۲)$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طرفین معادله‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABD}}\times\frac{S_{ABD}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{S_{ABO}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۹}$$

هندسه دوازدهم

تست و پاسخ ۳۶

اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۲ & ۵\\ b & -۴ & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & ۱\\ ۳ & ۲\\ -a & -۱\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، ماتریس $A+\frac{b}{a}I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۶ & ۰\\ ۰ & -۸\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۰ & -۹\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۹ & ۰\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره تمرینی مشابه این سؤال در کتاب درسی موجود است و در سؤال‌های امتحان نهایی نیز پرتکرار بوده است. هم‌چنین در کنکور خارج از کشور ۹۸، سؤال مشابهی طراحی شده است.

درس‌نامه

۱) ماتریس مربعی A قطری است، هرگاه تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشد.

۲) برای دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{p\times r}$، در صورتی حاصل‌ضرب AB تعریف می‌شود که $n=p$ باشد. در این صورت ماتریس AB از مرتبهٔ $m\times r$ است. دقت کنید که درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس AB برابر است با حاصل‌ضرب سطر iاُم ماتریس A در ستون jاُم ماتریس B.

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ ماتریس A)**: ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}a & ۲ & ۵\\ b & -۴ & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & ۱\\ ۳ & ۲\\ -a & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & a-۱\\ ۵b-۱۲-ab & -۸\end{bmatrix}$$

گام دوم (اعمال شرط قطری‌بودن ماتریس A): در ماتریس قطری A، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر هستند؛ پس داریم:

$$a-۱=۰ \Rightarrow a=۱$$

$$۵b-۱۲-ab=۰ \xrightarrow{a=۱} ۴b=۱۲ \Rightarrow b=۳$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): ماتریس خواسته‌شده در صورت سؤال را به دست می‌آوریم.

$$A+\frac{b}{a}I=A+۳I=\begin{bmatrix}۶ & ۰\\ ۰ & -۸\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹ & ۰\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}$$

تست و پاسخ ۳۷

اگر $\begin{bmatrix}۴\\ ۳\\ ۲\end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ ۵ & ۶ & ۷\\ d & e & f\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $\frac{a+b+c}{d+e+f}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره با توجه به مرتبهٔ ماتریس‌ها، ماتریس A را بنویسید و نگران پیداکردن درایه‌های ماتریس A نباشید.

درس‌نامه اگر B ماتریسی $m\times n$، C ماتریسی $m\times p$ و $BA=C$ باشد، آن‌گاه ماتریس A حتماً از مرتبهٔ $n\times p$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول (در نظر گرفتن ماتریس مناسب برای A)**: با توجه به مرتبهٔ ماتریس‌ها، مشخص است که A ماتریسی از مرتبهٔ ۳×۱ است، پس با فرض $A=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix}۴\\ ۳\\ ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ ۵ & ۶ & ۷\\ d & e & f\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}۴x & ۴y & ۴z\\ ۳x & ۳y & ۳z\\ ۲x & ۲y & ۲z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ ۵ & ۶ & ۷\\ d & e & f\end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): درایه‌های دو ماتریس را نظیربه‌نظیر برابر هم قرار داده و حاصل عبارت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{a+b+c}{d+e+f}=\frac{۴x+۴y+۴z}{۲x+۲y+۲z}=\frac{۴(x+y+z)}{۲(x+y+z)}=۲$$

تست و پاسخ ۳۸

اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ و k باقی‌ماندهٔ تقسیم $i+j$ بر ۳ باشد، به طوری‌که $a_{ij}=\begin{cases}i-۲j & ,k=۰\\ ۲i+j & ,k=۱\\ ۲i-j & ,k=۲\end{cases}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A^۲$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره سؤال‌های ترکیبی ماتریس با مباحث دیگر ریاضی (مانند نظریهٔ اعداد یا لگاریتم) می‌تواند از سؤال‌های مورد توجه در کنکور باشد.

خودت حل کنی بهتره با توجه به تعریف ارائه‌شده برای a_{ij}، درایه‌های ماتریس A را می‌نویسیم.

درس‌نامه

۱) سطر i ام ماتریس A^2 = سطر i ام ماتریس A × ماتریس A

۲) ستون j ام ماتریس A^2 = ستون j ام ماتریس A × ستون j ام ماتریس A

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ ماتریس A)**: ابتدا با توجه به تعریف a_{ij}، ماتریس A را با درایه‌هایش می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۲(۱)-۱ & ۱-۲(۲) & ۲(۱)+۳ \\ ۲-۲(۱) & ۲(۲)+۲ & ۲(۲)-۳ \\ ۲(۳)+۱ & ۲(۳)-۲ & ۳-۲(۳) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۵ \\ ۰ & ۶ & ۱ \\ ۷ & ۴ & -۳ \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبهٔ ستون دوم A^2): با توجه به قسمت (۲) درس‌نامه، ستون دوم ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$\text{ستون دوم } A^2 = A\times A \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۵ \\ ۰ & ۶ & ۱ \\ ۷ & ۴ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۳ \\ ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۴۰ \\ -۹ \end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A^2 برابر است با: $-۱+۴۰-۹=۳۰$

تست و پاسخ ۳۹

A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر هستند، به طوری که $A^2=A$ و $B^2=B$. حاصل $(A+B-AB)^2$ کدام است؟

۱) $A+B$ ۲) I

۳) $A+B-AB$ ۴) $\bar{O}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره مفهوم تعویض‌پذیری دو ماتریس و حالت‌های خاص آن در کتاب درسی، امتحان نهایی و به‌خصوص آزمون‌های تستی مورد تأکید فراوانی بوده است.

خودت حل کنی بهتره A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر نامیده می‌شوند، هرگاه $AB=BA$ باشد.

درس‌نامه

۱) اگر دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه $(AB)^n=A^nB^n$ است.

۲) اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، ماتریس‌های AB و BA نیز نسبت به A و B تعویض‌پذیر هستند.

۳) اتحادهای جبری فقط زمانی برای ماتریس‌ها برقرار است که ماتریس‌ها تعویض‌پذیر باشند.

پاسخ تشریحی **گام اول**: چون ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر هستند، با استفاده از اتحاد مربع سه‌جمله‌ای، حاصل عبارت $(A+B-AB)^2$ را به دست می‌آوریم:

$$(A+B-AB)^2=A^2+B^2+(AB)^2+۲AB-۲A(AB)-۲B(AB)$$

گام دوم: می‌دانیم $A^2=A$، $B^2=B$ و $AB=BA$ است، ضمن آن‌که در درس‌نامه گفتیم $(AB)^2=A^2B^2$ است و در نتیجه با جای‌گذاری این موارد داریم:

$$(A+B-AB)^2=A^2+B^2+A^2B^2+۲AB-۲A^2B-۲AB^2=A+B+AB+۲AB-۲AB-۲AB=A+B-AB$$

تست و پاسخ ۴۰

اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^۵+A^۶+A^۷$ کدام است؟

۱) -۴
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره محاسبهٔ توان‌های بزرگ ماتریس‌ها و پیداکردن روند مناسب و ارتباط آن‌ها با توان‌های کوچک‌تر از سؤال‌های مهم امتحان نهایی است و از سؤال‌های احتمالی کنکور خواهد بود.

خودت حل کنی بهتره توان‌های ماتریس را ادامه دهید تا به ماتریس I یا مضربی از آن دست پیدا کنید.

درس نامه توان‌های بزرگ ماتریس‌های مربعی مرتبهٔ ۲ معمولاً به یکی از روش‌های زیر محاسبه می‌شوند:

۱) با استفاده از استدلال استقرایی می‌توان از روی ماتریس‌های $A^۲$، $A^۳$ و ... ماتریس A^n را حدس زد.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^۳=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

از روی این ماتریس‌ها می‌توان حدس زد $A^n=\begin{bmatrix}۱ & n\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ است.

۲) توانی از ماتریس برابر ماتریس I یا مضربی از آن می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I\Rightarrow A^n=\begin{cases}A: (\text{فرد } n)\\ I: (\text{زوج } n)\end{cases}$$

پاسخ تشریحی

گام اول: ماتریس‌های $A^۲$، $A^۳$، ... را تا جایی محاسبه می‌کنیم تا به یک روند مشخص دست پیدا کنیم.

$$A^۲=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$$

گام دوم: حال به کمک ماتریس $A^۳$ می‌توانیم توان‌های بزرگ‌تر ماتریس A را محاسبه کنیم:

$$A^۵=A^۳\times A^۲=-I\times A^۲=-A^۲$$

$$A^۶=(A^۳)^۲=(-I)^۲=I$$

$$A^۷=A^۶\times A=I\times A=A$$

گام سوم: ماتریس مورد نظر در صورت سؤال را می‌نویسیم:

$$A^۵+A^۶+A^۷=-A^۲+I+A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۴ است.

فیزیک دهم

تست و پاسخ ۴۱

یک جسم مکعب‌مستطیل‌شکل چوبی توپر، به ابعاد a، ۲a و ۴a را از وجه‌های مختلف آن روی سطحی افقی قرار می‌دهیم. اگر اختلاف بیشینه و کمینهٔ فشار ناشی از جسم بر سطح ۱۲۰۰ Pa باشد، حجم جسم چند سانتی‌متر مکعب است؟ ($g = ۱۰ N/kg$ و چگالی چوب $۰/۸ g/cm^۳$ است.)

۱) ۱۲۵ ۲) ۸۰۰ ۳) ۱۰۰۰ ۴) ۸۰۰۰

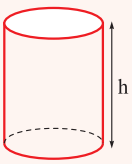
پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطهٔ $P = \rho gh$ فشار بیشینه و کمینهٔ مکعب‌مستطیل یعنی، P_{max} و P_{min} را برحسب a بنویسید و اختلاف آن‌ها را برابر با ۱۲۰۰pa قرار دهید تا a به دست آید. سپس حجم مکعب‌مستطیل را حساب کنید.

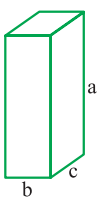
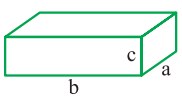
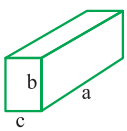
درس نامه

اگر سطح مقطع جسم جامدی در طول ارتفاع تغییر نکند *(بهشون متوازی‌السطوح هم می‌گیم)* و چگالی آن ρ باشد، در این صورت فشار آن از رابطهٔ $P = \rho gh$ به دست می‌آید.

مثلاً در استوانهٔ شکل مقابل به ارتفاع h، فشاری که استوانه به سطح افقی وارد می‌کند، از رابطهٔ $P = \rho gh$ به دست می‌آید.



برای یک مکعب‌مستطیل داریم:

		
$P = \rho ga$	$P = \rho gc$	$P = \rho gb$

می‌توانیم نتیجه بگیریم، زمانی که یک مکعب‌مستطیل طوری بر روی سطح افقی قرار گیرد که بیشترین ارتفاع (کم‌ترین سطح تماس) را داشته باشد، فشار بیشتری به سطح وارد می‌شود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** بیشینهٔ فشار وارد بر سطح از طرف جسم برابر $\rho g(۴a)$ و کمینهٔ فشار ناشی از جسم به سطح برابر $\rho g(a)$ است؛ بنابراین داریم:

$$P_{max} - P_{min} = \rho g(۴a) - \rho g(a) = \rho g(۳a) = ۱۲۰۰ \Rightarrow ۰/۸ \times ۱۰^{۳} \times ۱۰ \times ۳ \times a = ۱۲۰۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲۰} m = ۵ cm$$

گام دوم: حجم مکعب‌مستطیل را به دست می‌آوریم:

$$V = a \times ۲a \times ۴a = ۸a^{۳} = ۸(۵)^{۳} = ۱۰۰۰ cm^{۳}$$

تست و پاسخ ۴۲

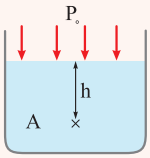
شناگری در عمق ۵متری از سطح آب دریاچه‌ای شنا می‌کند. اگر مساحت پردهٔ گوش شناگر $۰/۸ cm^۲$ باشد، اندازهٔ نیرویی که به سطح خارجی پردهٔ گوش شناگر وارد می‌شود، چند نیوتون است؟ ($g = ۱۰ N/kg$ ، $\rho_{آب} = ۱ g/cm^۳$ و $P_۰ = ۱ bar$)

۱) ۰/۴ ۲) ۱/۲ ۳) ۴ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطهٔ $P = \rho gh + P_۰$، فشار در عمق ۵متری از سطح آب را به دست آورید و در نهایت نیروی وارد بر پردهٔ گوش را با استفاده از رابطهٔ $F = PA$ حساب کنید.

درس‌نامه



- برای محاسبهٔ فشار در عمق h از سطح مایعی که چگالی آن ρ است از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$P_A = P_0 + \rho gh$$

- برای محاسبهٔ نیروی وارد بر یک جسم که فشار وارد بر آن را می‌دانیم، از رابطهٔ $F = PA$ استفاده می‌کنیم. (دقت کنید که فشار برحسب پاسگال و سطح مقطع آن برحسب مترمربع باشد.)

پاسخ تشریحی **گام اول:** فشار وارد بر گوش شناگر در عمق $h = 5\,m$ از آب را به دست می‌آوریم:

$$P = \rho_{آب} gh + P_0 = 1\times\underbrace{10^3}_{\text{تبدیل g/cm}^3\text{ به kg/m}^3}\times 10\times 5 + 10^5 = 1/5\times 10^5\ Pa$$

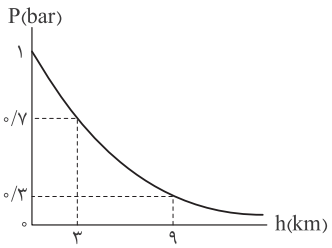
توجه کنید که هر bar معادل $10^5\ Pa$ است.

گام دوم: با توجه به این‌که مساحت پردهٔ گوش شناگر $0/8\,cm^2$ است، نیروی وارد بر سطح خارجی پردهٔ گوش او را از رابطهٔ $F = PA$ به دست می‌آوریم:

$$F = PA = 1/5\times 10^5\times 0/8\times\underbrace{10^{-4}}_{\text{تبدیل cm}^2\text{ به m}^2} = 1/2\times 10^1 = 12\,N$$

تست و پاسخ ۴۳

نمودار فشار هوا برحسب ارتفاع از سطح زمین به شکل زیر است. چگالی متوسط هوا از سطح زمین تا ارتفاع ۳ کیلومتری آن، چند برابر چگالی متوسط هوا از فاصلهٔ ۳ تا ۹ کیلومتری سطح زمین است؟



۱) $\frac{7}{3}$

۲) $\frac{8}{3}$

۳) $\frac{10}{7}$

۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

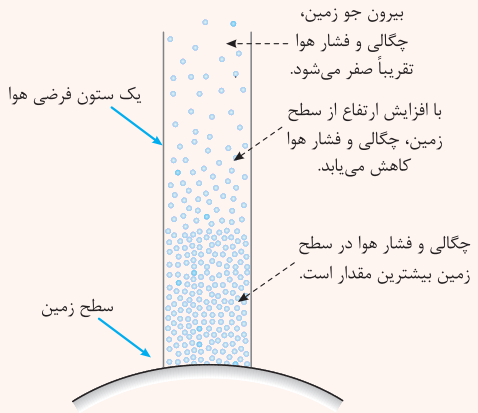
مشاوره این سؤال برگرفته از یک نمودار و تصویر مهم در فصل دوم از فیزیک دهم است. نمودارها و شکل‌ها را به دقت تحلیل کنید.

خودت حل کنی بهتره اختلاف فشار هوا بین سطح زمین و در ارتفاع $3\,km$ از سطح زمین را با توجه به نمودار به دست آورید. سپس به کمک رابطهٔ $\Delta P = \rho_{av} g\Delta h$ چگالی متوسط هوا را حساب کنید و این روند را مجدداً برای ارتفاع $3\,km$ تا ارتفاع $9\,km$ انجام دهید و در نهایت نسبت آن‌ها را به دست آورید.

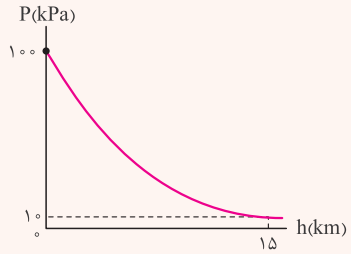
درس‌نامه

برای محاسبهٔ اختلاف فشار بین دو نقطه از هوا که اختلاف ارتفاع زیادی دارند، دیگر نمی‌توانیم از رابطهٔ $P_2 = P_1 + \rho gh$ استفاده کنیم.

علت این محدودیت این است که با افزایش ارتفاع، چگالی هوا کاهش می‌یابد در واقع به دلیل نیروی جاذبهٔ زمین، لایه‌های زیرین هوا متراکم‌تر از لایه‌های بالایی هستند، شکل مقابل، این اختلاف چگالی و فشار را نمایش می‌دهد.



شکل مقابل نمودار فشار هوا برحسب ارتفاع از سطح زمین (سطح دریای آزاد) را نشان می‌دهد.



این نمودار به صورت خطی نیست به همین دلیل برای محاسبهٔ تغییر فشار در یک فاصلهٔ معین، از چگالی متوسط استفاده می‌کنیم. بنابراین رابطه به صورت $\Delta P = \rho_{av} g \Delta h$ خواهد شد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** چگالی متوسط هوا از سطح زمین $(h = ۰)$ تا ارتفاع $h = ۳\,km$ از سطح زمین را از رابطهٔ $\Delta P = \rho_{av} g \Delta h$ به دست می‌آوریم:

$$\Delta P = \rho_{av} g \Delta h \Rightarrow P_{h=۰} - P_{h=۳km} = \rho_{av۱} g (۳\times ۱۰^{۳} - ۰)$$

$$\Rightarrow ۱۰^{۵} - ۰/۷\times ۱۰^{۵} = \rho_{av۱} \times g \times ۳\times ۱۰^{۳} \Rightarrow \rho_{av۱} = \frac{۰/۳\times ۱۰^{۵}}{۳g\times ۱۰^{۳}} = \frac{۱۰}{g}$$

گام دوم: چگالی متوسط هوا در فاصلهٔ $۳\,km$ تا $۹\,km$ از سطح زمین را با استفاده از رابطهٔ $\Delta P = \rho_{av} g \Delta h$ به دست می‌آوریم:

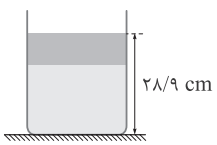
$$\Delta P = \rho_{av} g \Delta h \Rightarrow P_{h=۳km} - P_{h=۹km} = \rho_{av۲} \times g \times (۹\,km - ۳\,km)$$

$$\Rightarrow ۰/۷\times ۱۰^{۵} - ۰/۳\times ۱۰^{۵} = \rho_{av۲} \times g \times ۶\times ۱۰^{۳} \Rightarrow \rho_{av۲} = \frac{۰/۴\times ۱۰^{۵}}{۶g\times ۱۰^{۳}} = \frac{۲۰}{۳g}$$

گام سوم: نسبت چگالی متوسط هوا در گام اول $(\rho_{av۱})$ به چگالی متوسط هوا در گام دوم $(\rho_{av۲})$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\rho_{av۱}}{\rho_{av۲}} = \frac{\frac{۱۰}{g}}{\frac{۲۰}{۳g}} = \frac{۳۰g}{۲۰g} = \frac{۳}{۲}$$

تست و پاسخ ۴۴



در ظرف استوانه‌ای‌شکل مقابل، آب و روغن ریخته شده است. اگر فشار هوا برابر ۷۰cmHg و جرم آب ۳ برابر جرم روغن باشد، فشار در کف ظرف چند کیلوپاسکال است؟ ($g = ۱۰\,N/kg$، چگالی جیوه، آب و روغن در SI، به ترتیب ۱۳۶۰۰، ۱۰۰۰ و ۸۰۰ است.)

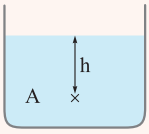
۱) ۹۵ / ۸۸ ۲) ۹۷ / ۲۴ ۳) ۹۷ / ۹۲ ۴) ۹۸ / ۶۰

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره جرم آب ۳ برابر جرم روغن است، به کمک رابطهٔ $m = \rho(Ah)$، نسبت ارتفاع‌ها را به دست آورید، سپس با توجه به این‌که مجموع ارتفاع دو مایع $۲۸/۹\,cm$ است، ارتفاع هر مایع را به دست آورید. در نهایت فشار ناشی از آب، روغن و $۷۰\,cm$ جیوه که ناشی از هواست را با رابطهٔ $P = \rho gh$ محاسبه و با هم جمع کنید تا فشار کل درکف ظرف به دست آید.

درس نامه

- برای محاسبهٔ فشار ناشی از مایعی به چگالی ρ و در عمق h از سطح آزاد آن، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:



$$P_A = \rho gh$$

- برای تبدیل فشار از $cmHg$ یا $mmHg$ به پاسکال از رابطهٔ $P = \rho gh$ در SI استفاده می‌کنیم و به جای ρ چگالی جیوه، به جای g ثابت گرانش و به جای h ارتفاع جیوه را برحسب متر قرار می‌دهیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که جرم آب ۳ برابر جرم روغن است و مجموع ارتفاع آب و روغن $28/9\,cm$ است، ارتفاع هر کدام از مایع‌ها را به دست می‌آوریم:

$$m_{آب}=3m_{روغن} \Rightarrow \rho_{آب}V_{آب}=3\rho_{روغن}V_{روغن} \Rightarrow \rho_{آب}\times A\times h_{آب}=3\rho_{روغن}\times A\times h_{روغن}$$

$$\Rightarrow 1000\times h_{آب}=3\times 800\times h_{روغن} \Rightarrow h_{آب}=2/4h_{روغن}$$

از آن‌جا که $h_{آب}+h_{روغن}=28/9\,cm$ است، داریم:

$$h_{آب}+h_{روغن}=28/9\,cm \xrightarrow{h_{آب}=2/4h_{روغن}} 2/4h_{روغن}+h_{روغن}=28/9\,cm$$

$$\Rightarrow 3/4h_{روغن}=28/9\,cm \Rightarrow h_{روغن}=8/5\,cm \Rightarrow h_{آب}=28/9-8/5=20/4\,cm$$

گام دوم: فشار ناشی از $20/4\,cm$ آب و $8/5\,cm$ روغن را به کمک رابطهٔ $P=\rho gh$ برحسب پاسکال به دست می‌آوریم:

$$P_{آب}=\rho_{آب}gh_{آب}=10^{3}\times 10\times 20/4\times 10^{-2}=2040\,Pa$$

$$P_{روغن}=\rho_{روغن}gh_{روغن}=800\times 10\times 8/5\times 10^{-2}=680\,Pa$$

گام سوم: فشار هوا $70\,cmHg$ است، به کمک رابطهٔ $P=\rho gh$ فشار هوا را برحسب پاسکال به دست می‌آوریم:

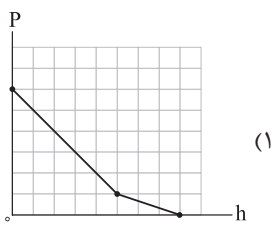
$$P_{هوا}=\rho_{جیوه}\times g\times h_{جیوه}=13600\times 10\times 70\times 10^{-2}=95200\,Pa$$

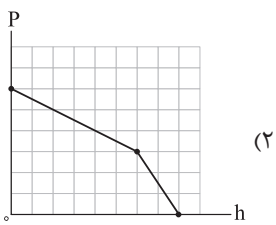
گام چهارم: فشار کل وارد بر کف ظرف ناشی از هوا، روغن و آب را به دست می‌آوریم:

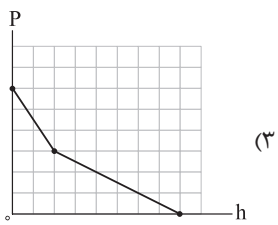
$$P_{کل\,وارد\,بر\,کف\,ظرف}=P_{هوا}+P_{روغن}+P_{آب}=95200+680+2040=97920\,Pa \Rightarrow P_{کل\,وارد\,بر\,کف\,ظرف}=97/92\,kPa$$

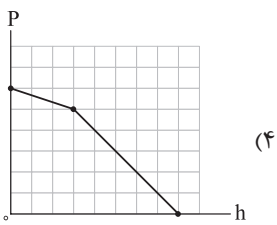
تست و پاسخ ۴۵

در ظرفی استوانه‌ای که روی سطح افقی قرار دارد، جرم یکسانی از دو مایع مخلوط‌نشدنی ریخته شده است. نمودار فشار پیمانه‌ای (P) برحسب فاصله از کف ظرف (h)، به صورت کدام شکل می‌تواند باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

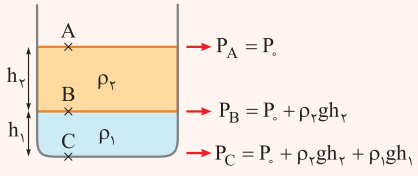
۴) 

پاسخ: گزینه ۳

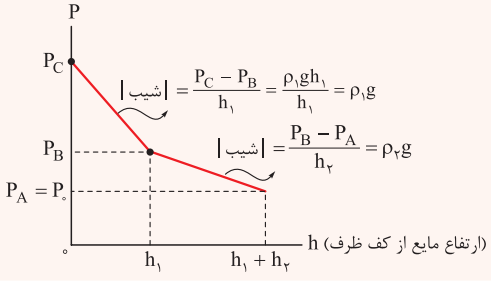
خودت حل کنی بهتره به کمک برابری جرم دو مایع، ارتفاع دو مایع را مقایسه کنید، سپس شیب مربوط به نمودار دو مایع را نسبت به هم بسنجید.

درس نامه

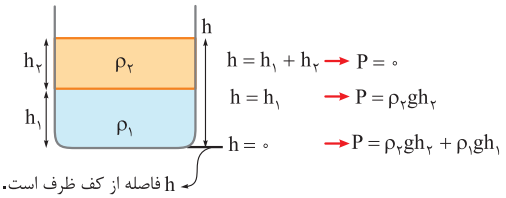
شکل مقابل دو مایع با چگالی‌های متفاوت را در یک ظرف نشان می‌دهد. اگر نمودار فشار برحسب ارتفاع مایع از کف ظرف را رسم کنیم، نمودار به صورت زیر خواهد بود.



در این نمودار اندازهٔ شیب خط برابر با ρg خواهد بود.



پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل مقابل، وضعیت قرارگیری دو مایع (۱) و (۲) را در ظرف استوانه‌ای نشان می‌دهد. فشار ناشی از مایع (فشار پیمانه‌ای) را در ۳ ارتفاع به دست می‌آوریم:

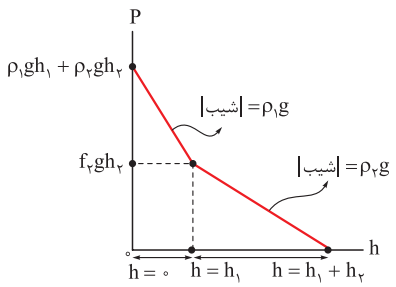


گام دوم: جرم دو مایع با هم برابر است؛ بنابراین داریم:

$$m_۱ = m_۲ \Rightarrow \rho_۱(Ah_۱) = \rho_۲(Ah_۲) \Rightarrow \rho_۱h_۱ = \rho_۲h_۲ \Rightarrow \frac{\rho_۱}{\rho_۲} = \frac{h_۲}{h_۱} \xrightarrow{\rho_۱ > \rho_۲} h_۲ > h_۱$$

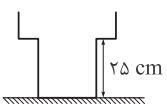
رد ۱ و ۲.

گام سوم: نمودار فشار پیمانه‌ای (P) برحسب فاصله از کف ظرف (h) باید طوری باشد که شیب در ناحیهٔ دوم که بیانگر ρg است، کم‌تر و ارتفاع مایع بیشتر باشد. بنابراین ۳ درست است. در حالی که ۴ برعکس این مورد را نشان می‌دهد و نادرست است.



تست و پاسخ ۴۶

در شکل زیر، ظرفی که از دو بخش استوانه‌ای به سطح مقطع‌های $۲۰cm^۲$ و $۳۰cm^۲$ تشکیل شده، روی سطح افقی قرار دارد. در ظرف، ابتدا ۸۰۰g از مایعی به چگالی $۲g/cm^۳$ و سپس ۴۰۰g از مایعی به چگالی $۱g/cm^۳$ می‌ریزیم. به ترتیب از راست به چپ، اندازهٔ نیرویی که مایع به کف ظرف وارد می‌کند و اندازهٔ نیرویی که ظرف به سطح افقی وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = ۱۰N/kg$، دو مایع مخلوط نمی‌شوند و جرم ظرف ناچیز است.)



۱) ۱۲، ۱۰/۵

۲) ۱۲، ۱۱

۳) ۱۱، ۱۰/۵

۴) ۱۱، ۱۱

پاسخ: گزینه ۲

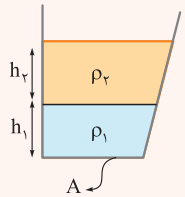
خودت حل کنی بهتره ابتدا حجم دو مایع را به دست آورید و با توجه به حجم مایع‌ها، نحوهٔ قرارگیری مایع‌ها را داخل ظرف مشخص کنید.

برای محاسبهٔ نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع‌ها، فشار وارد بر کف ظرف از طرف مایع‌ها را در سطح مقطعی که با زمین در تماس است، ضرب کنید. $(F = PA)$

برای محاسبهٔ نیرویی که کف ظرف به سطح وارد می‌کند، مجموع نیروی وزن دو مایع را به دست آورید.

درس نامه

- در شکل زیر دو مایع با چگالی‌های $\rho_۱$ و $\rho_۲$ درون ظرف قرار دارند. برای محاسبهٔ نیرویی که دو مایع به کف ظرف وارد می‌کنند، کافی است ابتدا فشار ناشی از دو مایع را به دست آوریم و در نهایت در مساحت کف ظرف ضرب کنیم.



$$F_{\text{وارد بر کف ظرف ناشی از مایع‌ها}} = P_{\text{وارد بر کف ظرف ناشی از مایع‌ها}} \times A = (\rho_۱gh_۱ + \rho_۲gh_۲)A$$

- نیرویی که کف ظرف به سطح وارد می‌کند، همان نیروی واکنش سطح است که برابر مجموع نیروی‌های وزن مایع‌ها و ظرف است.

$$F_{\text{کف ظرف به سطح}} = (m_۱ + m_۲ + m_{\text{ظرف}})g$$

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا حجم دو مایع و وضعیت قرارگیری مایع‌ها را در ظرف مشخص می‌کنیم:

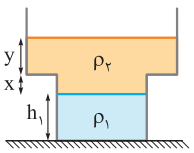
$$m_۱ = \rho_۱ V_۱ \Rightarrow ۸۰۰ = ۲ \times V_۱ \Rightarrow V_۱ = ۴۰۰ cm^۳$$

$$m_۲ = \rho_۲ V_۲ \Rightarrow ۴۰۰ = ۱ \times V_۲ \Rightarrow V_۲ = ۴۰۰ cm^۳$$

حجم قسمت پایینی ظرف برابر است با:

$$V_{\text{پایین}} = A_{\text{پایین}} \times h_{\text{پایین}} = ۲۵ \times ۲۰ = ۵۰۰ cm^۳$$

با توجه به این‌که حجم مایع سنگین‌تر (مایع با چگالی $۲ g/cm^۳$)، $۴۰۰ cm^۳$ است، وضعیت مایع‌ها را در ظرف مشخص می‌کنیم:



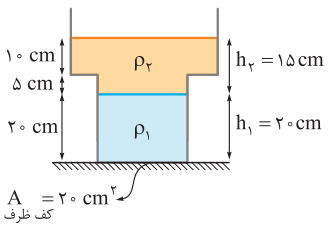
$$V_۱ = A_{\text{پایین}} \times h_۱ \Rightarrow ۴۰۰ = ۲۰ \times h_۱ \Rightarrow h_۱ = ۲۰ cm$$

$$x = ۲۵ - ۲۰ = ۵ cm$$

$$V_۲ = A_{\text{پایین}} \times x + A_{\text{بالا}} \times y$$

$$\Rightarrow ۴۰۰ = ۲۰ \times ۵ + ۳۰ \times y \Rightarrow y = ۱۰ cm$$

گام دوم: با توجه به شکل زیر که وضعیت مایع‌ها را در ظرف نشان می‌دهد، به کمک رابطهٔ $F_{\text{کف ظرف}} = P_{\text{کف ظرف}} A_{\text{کف ظرف}}$ نیروی وارد بر کف ظرف را به دست می‌آوریم:



$$P_{\text{کف ظرف ناشی از مایع}} = \rho_۱ g h_۱ + \rho_۲ g h_۲$$

$$= ۲ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۰/۲ + ۱ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۰/۱۵$$

$$= ۴۰۰۰ + ۱۵۰۰ = ۵۵۰۰ Pa$$

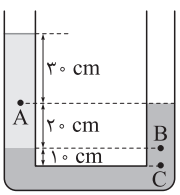
$$F_{\text{مایع به کف ظرف}} = P_{\text{کف ظرف ناشی از مایع}} \times A_{\text{کف ظرف}} = ۵۵۰۰ \times ۲۰ \times ۱۰^{-۴} = ۱۱ N$$

گام سوم: نیرویی که کف ظرف به سطح وارد می‌کند، ناشی از نیروی وزن مایع‌ها و وزن ظرف است.

$$F_{\text{ظرف به سطح}} = (m_۱ + m_۲ + m_{\text{ظرف}}) g \xrightarrow[m_۱ = ۰/۸ kg \, , \, m_۲ = ۰/۴ kg]{\text{جرم ظرف ناچیز است.}} F_{\text{ظرف به سطح}} = (۰/۸ + ۰/۴) \times ۱۰ = ۱۲ N$$

تست و پاسخ ۴۷

در شکل مقابل، دو مایع مخلوط‌نشدنی در لولهٔ U شکل در تعادل هستند. اختلاف فشار دو نقطهٔ A و B چند برابر اختلاف فشار دو نقطهٔ C و B است؟



۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

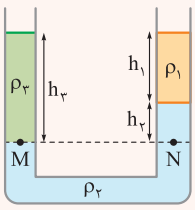
مشاوره در حل سؤال‌های مربوط به لولهٔ U شکل، مانومتر و بارومتر، معمولاً اولین قدم، برابر قراردادن فشار در دو نقطهٔ هم‌تراز در یک مایع است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا دو نقطهٔ هم‌تراز بین مرز دو مایع و مایع چگال‌تر را انتخاب کنید و با برابر قراردادن فشار این دو نقطه، اختلاف فشار بین دو نقطهٔ A و B را به دست آورید و سپس اختلاف فشار بین دو نقطهٔ B و C را به سادگی با رابطهٔ $\Delta P = \rho g \Delta h$ به دست آورید و در نهایت رابطهٔ بین چگالی دو مایع را هم با برابری فشار نقطهٔ B و نقطهٔ هم‌ترازش مشخص کنید.

درس‌نامه

برای حل سؤالات در لولهٔ U شکل، دو نقطهٔ هم‌تراز را در یک مایع انتخاب می‌کنیم و با برابر قراردادن فشار این دو نقطه، به راحتی سؤال را حل می‌کنیم. دو حالت را در شکل‌های زیر بررسی می‌کنیم:

حالت ۱:



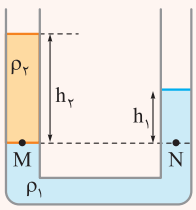
$$P_M = P_N$$

$$\rho_۳ g h_۳ + P_۰ = \rho_۱ g h_۱ + \rho_۲ g h_۲ + P_۰$$

$$\rho_۳ g h_۳ = \rho_۱ g h_۱ + \rho_۲ g h_۲$$

$$\rho_۳ h_۳ = \rho_۱ h_۱ + \rho_۲ h_۲$$

حالت ۲:



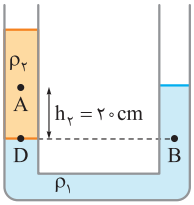
$$P_M = P_N$$

$$\rho_۲ g h_۲ + P_۰ = \rho_۱ g h_۱ + P_۰$$

$$\rho_۲ g h_۲ = \rho_۱ g h_۱$$

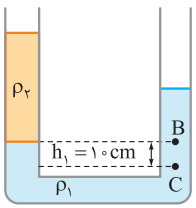
$$\rho_۲ h_۲ = \rho_۱ h_۱$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** در شکل زیر فشار در نقاط B و D که در یک مایع قرار دارند و هم‌تراز هستند، برابر است؛ بنابراین داریم:



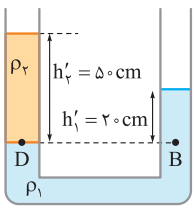
$$P_D = P_B$$
$$\Rightarrow \rho_2 g h_2 + P_A = P_B$$
$$\Rightarrow \rho_2 g h_2 = P_B - P_A$$
$$\Rightarrow \rho_2 \times g \times 0/2 = P_B - P_A$$

گام دوم: در شکل زیر دو نقطهٔ B و C در یک مایع قرار دارند و برای محاسبهٔ اختلاف فشار آن‌ها از رابطهٔ $\Delta P = \rho g \Delta h$ استفاده می‌کنیم.



$$\Delta P_{BC} = \rho_1 g h_1$$
$$\Rightarrow P_C - P_B = \rho_1 g (0/1)$$

گام سوم: اکنون می‌خواهیم رابطه‌ای بین چگالی‌های ρ_1 و ρ_2 پیدا کنیم. همان‌طور که در گام اول دیدیم، فشار در نقاط D و B با هم برابر است؛ بنابراین داریم:



$$P_D = P_B$$
$$\Rightarrow \rho_2 g h'_2 + P_0 = \rho_1 g h'_1 + P_0$$
$$\Rightarrow \rho_2 h'_2 = \rho_1 h'_1$$
$$\Rightarrow \rho_2 \times 50 = \rho_1 \times 20 \Rightarrow 2/5 \rho_2 = \rho_1$$

گام چهارم: حالا به راحتی نسبت « $P_B - P_A$ » به « $P_C - P_B$ » را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_B - P_A}{P_C - P_B} = \frac{0/2 \rho_2 g}{0/1 \rho_1 g} = 2 \times \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2\rho_2}{2/5 \rho_2} = \frac{2}{2/5} = \frac{4}{5}$$

تست و پاسخ ۴۸

در یک لولهٔ U‌شکل با سطح مقطع $5\,cm^2$، مقداری جیوه قرار دارد. اگر در شاخهٔ سمت راست لوله ۱۷۰g آب بریزیم، اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ $(\rho_{جیوه} = 13/6\,g/cm^3)$

۱) ۱/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۲۵

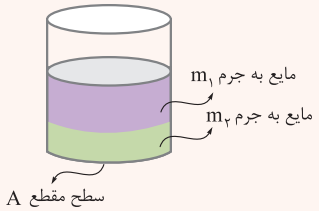
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در حل سؤال‌هایی که یک مایع به لولهٔ U‌شکل اضافه می‌شود، لولهٔ U‌شکل را در دو حالت رسم کرده و مقایسه کنید.

خودت حل کنی بهتره لولهٔ U‌شکل را پس از اضافه‌کردن آب به جیوه، رسم کنید و نقطهٔ هم‌تراز با مرز مشترک دو مایع را مشخص کنید و با برابر قراردادن فشار در این دو نقطه، اختلاف ارتفاع سطح جیوه را به دست آورید.

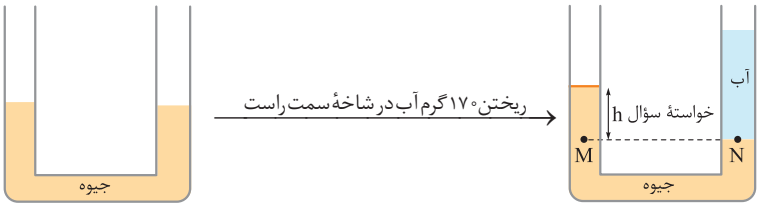
درس‌نامه

اگر یک یا چند مایع به جرم‌های m_1، m_2 و ... را درون یک ظرف متوازی‌السطوح (سطح آن در طول ارتفاع تغییر نکند، مانند استوانه و مکعب) بریزیم، برای محاسبهٔ فشار پیمانه‌ای در کف ظرف می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:



$$P = \frac{(m_1 + m_2)g}{A}$$

پاسخ تشریحی شکل‌های زیر، وضعیت مایع‌ها را قبل و بعد از ریختن آب، نشان می‌دهند:



فشار در نقاط M و N با هم برابر است؛ بنابراین داریم:

$$P_M = P_N \Rightarrow \cancel{P_\circ} + \rho_{جیوه} gh = \cancel{P_\circ} + \frac{m_{آب} g}{A}$$

$$\Rightarrow \rho_{جیوه} gh = \frac{m_{آب} g}{A} \Rightarrow \rho_{جیوه} h = \frac{m_{آب}}{A} \Rightarrow ۱۳/۶\times۱۰^{۳} \times h = \frac{۱۷۰\times۱۰^{-۳}}{۵\times۱۰^{-۴}}$$

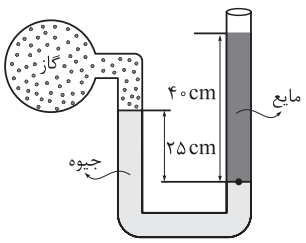
تبدیل گرم به کیلوگرم ← ۱۷۰×۱۰^{-۳}

تبدیل $cm^۲$ به $m^۲$ ← ۵×۱۰^{-۴}

$$\Rightarrow h = \frac{۱۷۰\times۱۰^{-۳}}{۱۳/۶\times۱۰^{۳} \times ۵\times۱۰^{-۴}} = ۲/۵\times۱۰^{-۲}\, m = ۲/۵\, cm$$

تست و پاسخ ۴۹

در شکل مقابل، درون لولهٔ U‌شکلی که به یک مخزن محتوی گاز وصل شده است، جیوه و مایعی دیگر به چگالی ρ وجود دارد. اگر فشار پیمانه‌ای درون مخزن گاز ۲۵kPa− باشد، ρ برحسب گرم بر سانتی‌متر مکعب کدام است؟ ($g = ۱۰ N/kg$ و $\rho_{جیوه} = ۱۳/۶ g/cm^۳$)



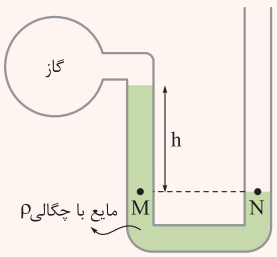
۱) ۱/۵
۲) ۱/۸
۳) ۲/۲۵
۴) ۲/۴

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره فشار نقطهٔ مرز مشترک بین دو مایع و نقطهٔ هم‌ترازش در جیوه را، برابر قرار دهید. سپس فشار پیمانه‌ای گاز $(P_{گاز} - P_\circ)$ را به دست آورید.

درس نامه

مانومتر (فشارسنج شاره‌ها) وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری فشار شارهٔ محصور و به صورت لولهٔ U‌شکل است. در شکل‌های زیر، دو حالت مختلف را برای یک مانومتر بررسی می‌کنیم.

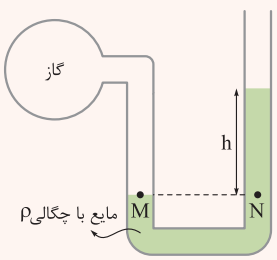


$P_M = P_N$

$P_{گاز} + \rho gh = P_\circ$

$P_{گاز} - P_\circ = -\rho gh$

فشار پیمانه‌ای گاز



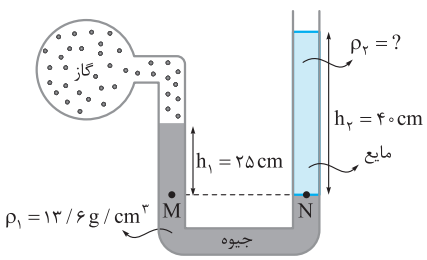
$P_M = P_N$

$P_{گاز} = \rho gh + P_\circ$

$P_{گاز} - P_\circ = \rho gh$

فشار پیمانه‌ای گاز

پاسخ تشریحی مطابق شکل، فشار در نقاط M و N با هم برابر است؛ بنابراین داریم:



$$P_M = P_N$$

$$\Rightarrow P_{گاز} + \rho_۱ gh_۱ = P_\circ + \rho_۲ gh_۲ \Rightarrow \underbrace{P_{گاز} - P_\circ}_{\text{فشار پیمانه‌ای گاز}} = \rho_۲ gh_۲ - \rho_۱ gh_۱$$

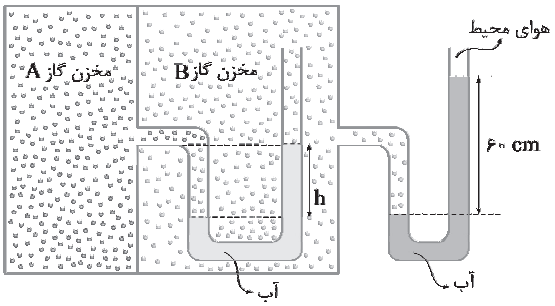
$$\Rightarrow -۲۵\times۱۰^{۳} = \rho_۲ \times ۱۰\times۰/۴ - ۱۳/۶\times۱۰^{۳} \times ۱۰\times۰/۲۵$$

$$\Rightarrow -۲۵\times۱۰^{۳} + ۱۳/۶\times۲/۵\times۱۰^{۳} = ۴\rho_۲$$

$$\Rightarrow ۹۰۰۰ = ۴\rho_۲ \Rightarrow \rho_۲ = ۲۲۵۰ kg/m^۳ = ۲/۲۵ g/cm^۳$$

تست و پاسخ ۵۰

در شکل مقابل، اگر فشار مخزن گاز A از فشار مخزن گاز B، ۵ درصد بیشتر باشد، h چند سانتی‌متر است؟ ($g = 10\,N/kg$، چگالی آب $1\,g/cm^3$ و فشار هوای محیط $84\,kPa$ است.)



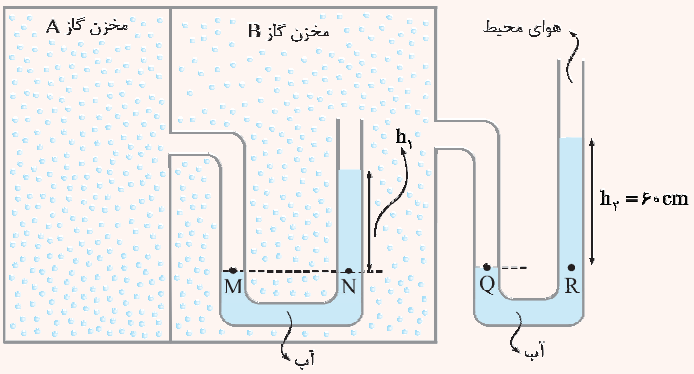
۱) ۳۵
۲) ۳۶
۳) ۴۲
۴) ۴۵

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره به کمک مساوی قراردادن فشار دو نقطهٔ هم‌تراز در لولهٔ سمت راست، فشار مخزن گاز B را به دست آورید، سپس همین فرایند را برای لولهٔ Uشکل سمت چپ انجام دهید تا ارتفاع آب بالارفته را محاسبه کنید.

درس نامه

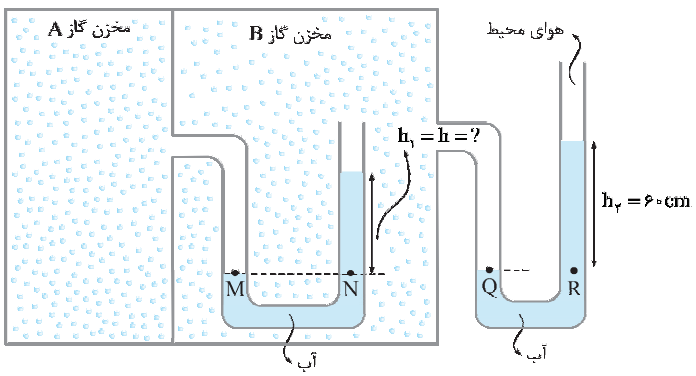
در شکل زیر، فشار مخزن گاز A از مخزن گاز B بیشتر است و مایع (۱) را به اندازهٔ h_1 بالا برده است.
هم‌چنین فشار مخزن گاز B از فشار هوا بیشتر است و مایع (۲) را به اندازهٔ h_2 بالا برده است در این صورت داریم:



$$\left.\begin{aligned} P_{gas\,A} - P_{gas\,B} &= \rho_1 g h_1 \\ P_{gas\,B} - P_\circ &= \rho_2 g h_2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{دو طرف را با هم جمع می‌کنیم.}} P_{gas\,A} - P_\circ = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$$

به عبارتی، می‌توانیم بگوییم فشار مخزن A نسبت به هوا به اندازهٔ $\rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1$ بیشتر است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** مطابق شکل زیر، فشار در نقاط M و N در لولهٔ سمت چپ و فشار در نقاط Q و R در لولهٔ سمت راست با هم برابر است.



$$P_M = P_N \Rightarrow P_{gas\,A} = \rho_{آب} g h_1 + P_{gas\,B} \quad (I)$$

$$P_Q = P_R \Rightarrow P_{gas\,B} = \rho_{آب} g h_2 + P_\circ \quad (II)$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ (II) در گام اول، $P_{gas\,B}$ را به دست می‌آوریم:

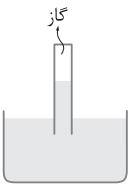
$$P_{gas\,B}=\rho_{آب}gh_{۲}+P_{۰}\Rightarrow P_{gas\,B}=۱۰^{۳}\times۱۰\times۰/۶+۸۴\times۱۰^{۳}=۹۰\times۱۰^{۳}\,Pa$$

گام سوم: با توجه به این‌که می‌دانیم فشار گاز مخزن B برابر $۹۰\times۱۰^{۳}\,Pa$ است، به کمک رابطهٔ (I)، ارتفاع h را به دست می‌آوریم.

$$P_{gas\,A}=\rho_{آب}gh_{۱}+P_{gas\,B}\xrightarrow{P_{gas\,A}=۱/۰۵P_{gas\,B}}۱/۰۵P_{gas\,B}=\rho_{آب}gh_{۱}+P_{gas\,B}$$

$$\Rightarrow ۰/۰۵P_{gas\,B}=\rho_{آب}gh_{۱}\Rightarrow ۰/۰۵\times۹۰\times۱۰^{۳}=۱۰^{۳}\times۱۰\times h_{۱}\Rightarrow h_{۱}=۰/۴۵\,m=۴۵\,cm$$

تست و پاسخ ۵۱



در شکل مقابل، لوله‌ای به سطح مقطع $۱۰\,cm^{۲}$، به طور وارون در ظرف حاوی مایعی به چگالی $۱/۷\,g/cm^{۳}$ فرو رفته و فشار گاز حبس‌شده در انتهای لوله ۷۰cmHg است. اگر سطح مقطع ظرف $۴۰\,cm^{۲}$ باشد، با خارج‌کردن کامل لوله از مایع، سطح آزاد مایع در ظرف چند سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود؟ ($g=۱۰\,N/kg$، چگالی جیوه $۱۳/۶\,g/cm^{۳}$ و فشار هوای محیط ۱۰۲kPa است.)

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

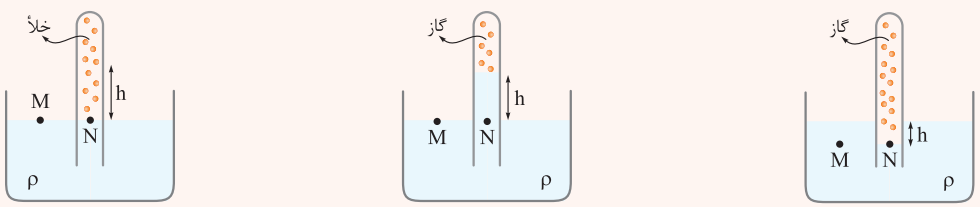
پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره با مساوی قراردادن فشار در دو نقطهٔ هم‌تراز، ارتفاع مایع بالارفته در لوله را به دست آورید، سپس حجم مایعی که در لوله بالا رفته را با تغییر حجم مایع درون ظرف، برابر قرار دهید تا ارتفاع مایع بالارفته در ظرف را به دست آورید.

درس‌نامه

فشارسنج هوا (بارومتر) وسیله‌ای برای اندازه‌گیری فشار جو است. در حل سؤالات مربوط به بارومتر کافی است مطابق شکل دو نقطهٔ هم‌تراز M و N را انتخاب کنیم و فشار در این نقاط را برابر قرار دهیم.

در شکل‌های زیر حالت‌های مختلف بارومتر را بررسی می‌کنیم.

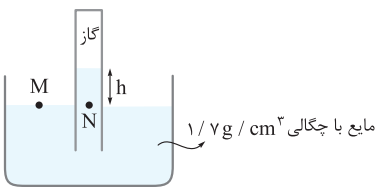


$P_M=P_N$ ، $P_{۰}=\rho gh$

$P_M=P_N$ ، $P_{۰}=\rho gh+P_{گاز}$

$P_M=P_N$ ، $P_{۰}+\rho gh=P_{گاز}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** مطابق شکل مقابل فشار در دو نقطهٔ M و N با هم برابر است.



$$P_M=P_N\Rightarrow P_{۰}=\rho_{مایع}gh+P_{گاز}\Rightarrow ۱۰۲\times۱۰^{۳}=۱/۷\times۱۰^{۳}\times۱۰\times h+P_{گاز}$$

برای تبدیل یکای فشار گاز از cmHg به Pa داریم:

$$P_{گاز}=\rho_{جیوه}gh(mHg)\Rightarrow P_{گاز}=۱۳/۶\times۱۰^{۳}\times۱۰\times۰/۷=۹۵/۲\times۱۰^{۳}\,Pa$$

$$\downarrow$$

$$۷۰\,cmHg=۰/۷\,mHg$$

بنابراین داریم: $۱۰۲\times۱۰^{۳}=۱۷h\times۱۰^{۳}+۹۵/۲\times۱۰^{۳}\xrightarrow{\div۱۰^{۳}}۱۰۲=۱۷h+۹۵/۲\Rightarrow ۶/۸=۱۷h\Rightarrow h=۰/۴\,m=۴۰\,cm$

گام دوم: با خارج‌کردن لوله، حجم مایعی که در لوله بالا رفته بود (همون ۴۰ cm که حساب کردیم) به حجم مایع درون ظرف اضافه می‌شود؛ بنابراین حجم مایع بالارفته درون لوله $(V_{۱})$ را با حجم اضافه‌شده به مایع درون ظرف $(V_{۲})$، برابر قرار می‌دهیم.

$$V_{۱}=V_{۲}\Rightarrow A_{لوله}\times h_{لوله}=A_{ظرف}\times h_{اضافه‌شده‌به‌ظرف}\Rightarrow ۱۰\times۴۰=۴۰\times h_{اضافه‌شده‌به‌ظرف}\Rightarrow h_{اضافه‌شده‌به‌ظرف}=۱۰\,cm$$

تست و پاسخ ۵۲

جسم A بر سطح مایعی شناور و جسم B در این مایع غوطه‌ور است. اگر جسم C را در داخل این مایع رها کنیم، شروع به پایین‌رفتن می‌کند. در صورتی که جرم سه جسم A، B و C برابر باشند، کدام مورد دربارهٔ مقایسهٔ اندازهٔ نیروی شناوری وارد بر آن‌ها (F) درست است؟

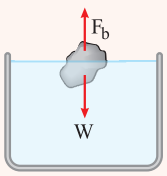
۱) $F_A = F_B > F_C$ ۲) $F_C > F_A = F_B$ ۳) $F_A > F_B > F_C$ ۴) $F_C > F_B > F_A$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

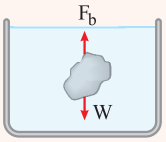
به دلیل اختلاف فشار در بالا و پایین جسمی که در یک شاره قرار دارد، نیرویی به سمت بالا بر آن وارد می‌شود که نیروی شناوری نامیده می‌شود.
جسم درون شاره می‌تواند به دو صورت کلی زیر باشد:

۱) اگر جسم در یک شاره در حالت تعادل (غوطه‌ور یا شناور) قرار داشته باشد، نیروی شناوری با نیروی وزن برابر است.



$F_b = W$

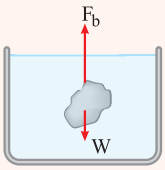
$\rho_{\text{جسم}} < \rho_{\text{مایع}}$
جسم شناور است.



$F_b = W$

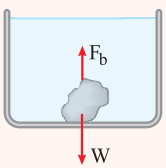
$\rho_{\text{جسم}} = \rho_{\text{مایع}}$
جسم غوطه‌ور است.

۲) اگر نیروی شناوری و نیروی وزن برابر نباشند و یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد.



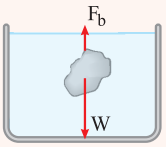
$F_b > W$

$\rho_{\text{جسم}} < \rho_{\text{مایع}}$
جسم در حال بالارفتن است.



$W > F_b$

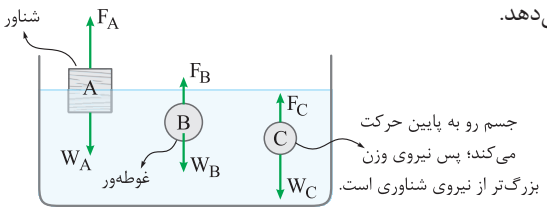
$\rho_{\text{جسم}} > \rho_{\text{مایع}}$
جسم ته‌نشین شده است.



$W > F_b$

$\rho_{\text{جسم}} > \rho_{\text{مایع}}$
جسم در حال پایین‌آمدن است.

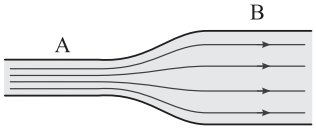
پاسخ تشریحی شکل زیر وضعیت سه جسم A، B و C را در مایع نشان می‌دهد.



$$\left.\begin{array}{l} \text{جسم A} \Rightarrow F_A = W_A \\ \text{جسم B} \Rightarrow F_B = W_B \\ \text{جسم C} \Rightarrow F_C < W_C \end{array}\right\} \xrightarrow[W_A=W_B=W_C]{m_A=m_B=m_C} F_A = F_B > F_C$$

تست و پاسخ ۵۳

در شکل زیر، لوله‌ای که از دو بخش A و B تشکیل شده است، توسط آب پُر شده و آب درون آن به صورت لایه‌ای در جریان است. اگر قطر مقطع لوله در بخش B، ۲۵ درصد بیشتر از قطر مقطع آن در بخش A باشد، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟



الف) تندی آب در بخش B، ۲۰ درصد کم‌تر از تندی آن در بخش A است.
ب) تندی آب در بخش B، ۳۶ درصد کم‌تر از تندی آن در بخش A است.
پ) فشار آب در بخش B، بیشتر از فشار آن در بخش A است.
ت) فشار آب در بخش B، کم‌تر از فشار آن در بخش A است.

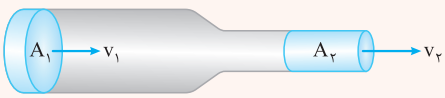
۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک معادلهٔ پیوستگی $(A_1v_1 = A_2v_2)$، نسبت تندی آب در بخش B را به تندی آن در بخش A به دست آورید. سپس به کمک اصل برنولی (فشار با تندی شاره رابطهٔ عکس دارد.) فشار بخش‌های A و B را با هم مقایسه کنید.

درس نامه

- طبق معادلهٔ پیوستگی هنگامی که یک شارهٔ تراکم‌ناپذیر، از دو سطح مقطع متفاوت لوله‌ای می‌گذرد، مقدار شاره‌ای که در مدت Δt از سطح مقطع دلخواه A_1 عبور می‌کند، با مقدار شاره‌ای که در همین مدت از سطح مقطع دلخواه دیگر مانند A_2 عبور می‌کند با هم برابر است. معادلهٔ پیوستگی به صورت زیر است:



$$A_1v_1 = A_2v_2$$

- طبق اصل برنولی، در مسیر حرکت شاره، با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک معادلهٔ پیوستگی $(A_Av_A = A_Bv_B)$، تندی شاره در قسمت‌های A و B را با هم مقایسه می‌کنیم.

$$A_Av_A = A_Bv_B \Rightarrow \frac{\pi}{4}d_A^2v_A = \frac{\pi}{4}d_B^2v_B \Rightarrow d_A^2v_A = d_B^2v_B$$

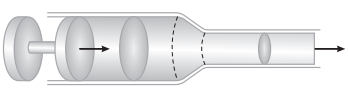
$$\xrightarrow{d_B = 1/25d_A} d_A^2 \times v_A = (1/25d_A)^2 \times v_B \Rightarrow \frac{d_A^2}{(1/25d_A)^2} = \frac{v_B}{v_A} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{1}{(\frac{5}{4})^2} = (\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25} = \frac{64}{100}$$

بنابراین تندی شاره در بخش B، ۳۶٪ کم‌تر از تندی آن در بخش A است. (گزارهٔ «ب» درست است.)

گام دوم: طبق اصل برنولی، با کاهش تندی در یک جریان لایه‌ای پایا و افقی، فشار افزایش می‌یابد؛ بنابراین فشار در بخش B بیشتر از فشار در بخش A است. (گزارهٔ «پ» درست است.)

تست و پاسخ ۵۴

در شکل زیر، روغن به چگالی $0/85\ g/cm^3$ تمام حجم لولهٔ افقی را پر کرده و قطر پیستون ۲۰cm و قطر دهانهٔ خروجی لوله ۲cm است. اگر پیستون با تندی $4\ cm/s$ به سمت راست حرکت کند، در هر دقیقه چند کیلوگرم روغن از لوله بیرون می‌ریزد؟



۱) $20/4\pi$
۲) $81/6\pi$
۳) $2/04\pi$
۴) $8/16\pi$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره آهنگ شارش حجمی شاره را با استفاده از رابطهٔ Av به دست آورید، سپس حجم خروجی شاره را در مدت‌زمان یک دقیقه محاسبه کنید و در نهایت به کمک رابطهٔ $m = \rho V$ جرم مایع خارج‌شده را در مدت‌زمان یک دقیقه به دست آورید.

درس نامه

آهنگ شارش حجمی شاره: برای شارهٔ تراکم‌ناپذیر، اگر در مدت‌زمان Δt حجم معینی از شاره به اندازهٔ ΔV و با تندی v از یک مقطع لوله به مساحت A عبور کند، داریم:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = Av$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** طبق معادلهٔ پیوستگی، آهنگ شارش حجمی شاره در کل مسیر ثابت است.

$$r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{20}{2} = 10\ cm$$

$$\text{آهنگ شارش حجمی شاره} = A_1v_1 = \pi(r_1)^2 \times v_1 = \pi(10)^2 \times 4 = 400\pi\ cm^3/s$$

توجه کنید که چون شعاع را برحسب cm و تندی را برحسب cm/s در رابطه قرار دادیم، آهنگ شارش حجمی برحسب cm^3/s به دست آمده است.

گام دوم: حجم خروجی شاره را در مدت‌زمان یک دقیقه به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = Av \Rightarrow \frac{\Delta V}{۶۰} = ۴۰۰\pi \Rightarrow \Delta V = ۲۴\pi \times ۱۰^{۳}\ cm^{۳}$$

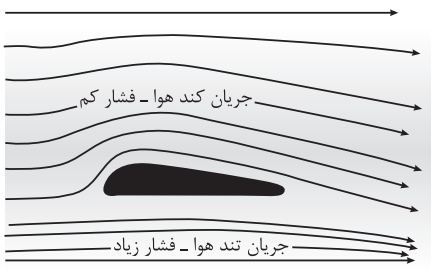
گام سوم: جرم خارج‌شده از لوله را به کمک رابطهٔ $m = \rho V$ محاسبه می‌کنیم:

$$m = \rho V = ۰/۸۵ \times ۲۴\pi \times ۱۰^{۳}\ g = ۲۰/۴\pi \times ۱۰^{۳}\ g = ۲۰/۴\pi\ kg$$

تست و پاسخ ۵۵

کدام‌یک از شکل‌های زیر دربارهٔ تندی و فشار هوا در بالا و پایین بالِ یک هواپیمای در حال پرواز، درست است؟

۱)


۲)


۳)

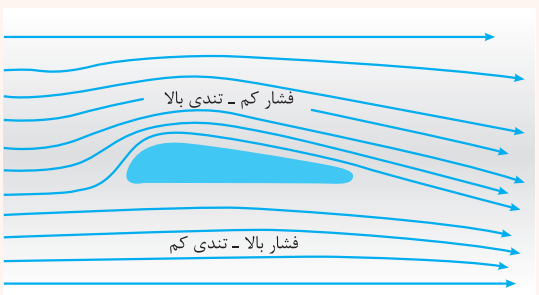

۴)


پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

طبق اصل برنولی، برای شاره‌ای که به طور لایه‌ای و در امتداد افق حرکت می‌کند، در مسیر حرکت شاره و با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد.

در مثال زیر یک کاربرد از اصل برنولی را بررسی می‌کنیم.



شکل مقابل، تصویری از بال هواپیما را نشان می‌دهد. جهت‌گیری بال متناسب با جریان هوا سبب افزایش تندی و کاهش فشار در بالای بال هواپیما می‌شود.

از آن‌جا که فشار هوای بالای بال، کم‌تر از فشار هوای زیر آن است، نیروی رو به بالای خالصی به بال هواپیما وارد می‌شود.

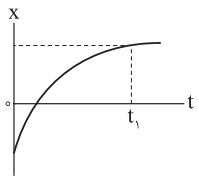
پاسخ تشریحی **گام اول:** طبق اصل برنولی با افزایش تندی شاره، فشار کاهش می‌یابد و برعکس؛ بنابراین ۲ و ۳ نادرست هستند.

گام دوم: برای یک هواپیمای در حال پرواز، نیرو باید بالابر باشد؛ بنابراین فشار در قسمت پایین بال باید بیشتر از فشار در قسمت بالای بال باشد و در ۴ به درستی این وضعیت نمایش داده شده است.

فیزیک دوازدهم

تست و پاسخ ۵۶

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ حرکت این متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 درست است؟



الف) تندی متحرک در حال افزایش است.

ب) تندی متحرک در حال کاهش است.

پ) جهت حرکت متحرک یک مرتبه تغییر می‌کند.

ت) جهت بردار مکان متحرک یک مرتبه تغییر می‌کند.

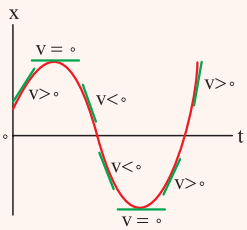
۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره این تست بر اساس یکی از پرسش‌های متن کتاب درسی فیزیک ۳ (ریاضی و تجربی) در فصل ۱ مطرح شده است.

درس‌نامه

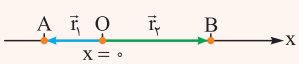
۱) شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در هر لحظهٔ دلخواه t، سرعت متحرک در آن لحظه را نشان می‌دهد و بزرگی شیب این خط، بیانگر تندی متحرک در آن لحظه است.



۲) اگر علامت سرعت متحرک، مثبت باشد یعنی متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند. در این صورت تندی و سرعت متحرک هم‌علامت‌اند. اما اگر علامت سرعت متحرکی، منفی باشد یعنی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. در این حالت تندی و سرعت متحرک مختلف‌العلامت هستند.

۳) بردار مکان یک جسم، برداری است که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند. هرگاه متحرک از مبدأ محور $(x = ۰)$ عبور کند، بردار مکان آن، تغییر جهت می‌دهد.

در شکل مقابل، نقطهٔ O به عنوان مبدأ مکان یا مبدأ محور است.



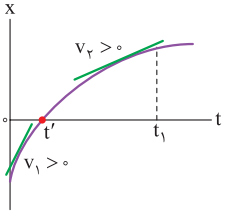
$\vec{r}_1$: بردار مکان در نقطهٔ A

$\vec{r}_2$: بردار مکان در نقطهٔ B

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به نکتهٔ (۱) درس‌نامه، در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 بزرگی شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان، به تدریج کاهش می‌یابد. یعنی تندی متحرک در حال کاهش است. (رد مورد «الف» و درستی مورد «ب»).

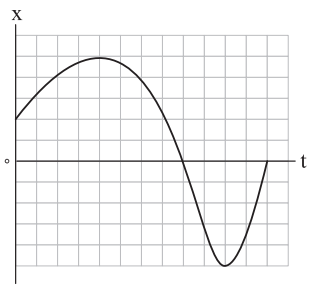
گام دوم: براساس نکتهٔ (۲) درس‌نامه، سرعت این متحرک همواره مثبت است؛ یعنی متحرک در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 همواره در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. (رد مورد «پ»).

گام سوم: در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 متحرک یک بار در لحظهٔ t' از مبدأ محور $(x = ۰)$ عبور کرده و در این لحظه، جهت بردار مکان آن تغییر کرده است. (درستی مورد «ت»).



تست و پاسخ ۵۷

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در بازه‌ای که بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است، چند برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن در بازه‌ای است که در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؟



۱) ۱

۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۲۵}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره تفاوت تندی متوسط و سرعت متوسط همواره مورد توجه طراحان سؤال‌های کنکور بوده و هست. به ویژه آن‌که مانند این تست با یک مفهوم فیزیکی دیگر مانند بردار مکان هم ترکیب شده باشد.

درس‌نامه در حرکت روی محور x تندی متوسط و سرعت متوسط از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

s_{av} : تندی متوسط $(\frac{m}{s})$

l : مسافت (m)

Δt : بازهٔ زمانی (s)

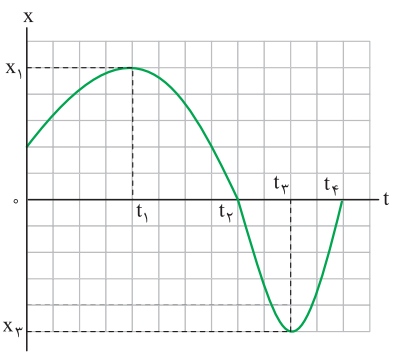
v_{av} : سرعت متوسط $(\frac{m}{s})$

Δx : جابه‌جایی (m)

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** بردار مکان متحرک در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۴$ در خلاف جهت محور x است. هر واحد طول روی محور x ها را با L و هر واحد زمان روی محور t را با T نشان می‌دهیم و تندی متوسط در این بازهٔ زمانی را به‌دست می‌آوریم:



$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۵L + ۵L}{t_۴ - t_۲} = \frac{۱۰L}{۴T} \Rightarrow s_{av} = \frac{۵}{۲} \times \frac{L}{T}$$

گام دوم: متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. اندازهٔ سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی را محاسبه می‌کنیم:

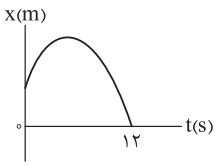
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۳ - x_۱}{t_۳ - t_۱} = \frac{-۵L - ۵L}{۶T} = -\frac{۱۰L}{۶T} \Rightarrow |v_{av}| = \frac{۵}{۳} \times \frac{L}{T}$$

گام سوم: نسبت تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4 به اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{s_{av}}{|v_{av}|}=\frac{\frac{5}{2}\times\frac{L}{T}}{\frac{5}{3}\times\frac{L}{T}}=\frac{3}{2}$$

تست و پاسخ ۵۸

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در بازهٔ زمانی $t_1=0$ تا $t_2=12s$، تندی متوسط متحرک $5\frac{m}{s}$ و اندازهٔ سرعت متوسط آن $2\frac{m}{s}$ باشد، بیشینهٔ فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان چند متر است؟

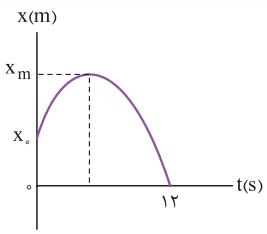


۱) ۳۶
۲) ۴۲
۳) ۴۵
۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره در این تست مانند کنکور تجربی تیر ماه ۱۴۰۲، تندی متوسط متحرک و بیشترین فاصلهٔ آن از مبدأ مکان مورد بررسی قرار می‌گیرد.

پاسخ تشریحی



گام اول: با معلوم‌بودن اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۱۲ ثانیهٔ اول حرکت، مکان اولیهٔ متحرک (x_0) را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که علامت سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی، منفی است.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=12-0=12s]{v_{av}=-2\frac{m}{s}}-2=\frac{0-x_0}{12}\Rightarrow x_0=24\,m$$

گام دوم: با استفاده از تندی متوسط متحرک در ۱۲ ثانیهٔ اول حرکت، مسافت پیموده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

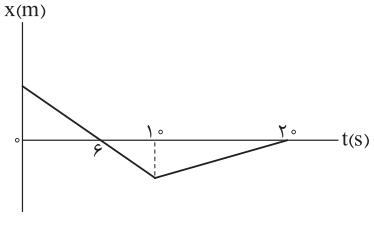
$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=12-0=12s]{s_{av}=5\frac{m}{s}}5=\frac{l}{12}\Rightarrow l=60\,m$$

گام سوم: با معلوم‌بودن مسافت پیموده‌شده، بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان (x_m) را پیدا می‌کنیم:

$$l=(x_m-24)+|(0-x_m)|\xrightarrow{l=60\,m}60=x_m-24+x_m\Rightarrow 84=2x_m\Rightarrow x_m=42\,m$$

تست و پاسخ ۵۹

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ $t_1=2s$ برابر $3\frac{m}{s}$ باشد، بزرگی سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2=12s$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲/۴
۲) ۲/۱۶
۳) ۰/۲۴
۴) ۰/۲۱۶

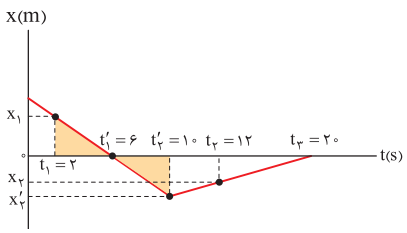
پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره اگر در سؤال‌های حرکت‌شناسی، نموداری داده شده باشد، اولین چیزی که باید به آن دقت کنید، محور عمودی نمودار است؛ چون هر یک از نمودارهای مکان ـ زمان، سرعت ـ زمان و شتاب ـ زمان ویژگی‌های خاص خودشان را دارند. مثلاً نموداری که برای این سؤال داده‌شده، با همین اعداد، در کنکور تجربی تیرماه ۱۴۰۲ با محور عمودی سرعت (v) مطرح شده بود.

خودت حل کنی بهتره مکان متحرک را به ترتیب در لحظه‌های ۲s، ۱۰s و ۱۲s به‌دست آورید و روی نمودار نشان دهید. سپس از رابطهٔ $|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}$، بزرگی سرعت متوسط را پیدا کنید.

درس‌نامه وقتی در یک بازهٔ زمانی، نمودار مکان ـ زمان به‌صورت خط راست باشد، حرکت در این بازهٔ زمانی با سرعت ثابت است. در این بازهٔ زمانی، تندی متوسط و لحظه‌ای با هم برابرند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** تندی متحرک در لحظهٔ $t_1=2s$ با بزرگی سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۱۰ s برابر است. بنابراین سرعت متوسط متحرک در این بازه برابر با $-3\frac{m}{s}$ است. (توجه داشته باشید که شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در این بازهٔ زمانی، منفی است.)



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=t'_1-t_1=6-2=4s]{v_{av}=-3\frac{m}{s},\ x'_1=0}-3=\frac{0-x_1}{4}\Rightarrow x_1=12\,m$$

گام دوم: با توجه به همنهشتی دو مثلث رنگی در نمودار، متحرک در لحظهٔ $t'_2=10\,s$ در مکان $x'_2=-x_1=-12m$ است.

گام سوم: سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۱۰ s تا ۱۲ s با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۱۰ s تا ۲۰ s برابر است. بنابراین داریم:

$$\frac{x_2-x'_2}{t_2-t'_2}=\frac{x_3-x'_2}{t_3-t'_2}\Rightarrow\frac{x_2-(-12)}{12-10}=\frac{0-(-12)}{20-10}\Rightarrow\frac{x_2+12}{2}=\frac{12}{10}$$

$$\Rightarrow x_2+12=2/4\Rightarrow x_2=-9/6\,m$$

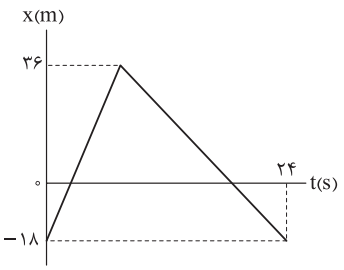
گام چهارم: بزرگی سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_1=2s$ تا $t_2=12s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{-9/6-12}{12-2}=\frac{-21/6}{10}=-2/16\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow |v_{av}|=2/16\frac{m}{s}$$

تست و پاسخ ۶۰

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در این حرکت، بردار مکان متحرک چند ثانیه در جهت محور x است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

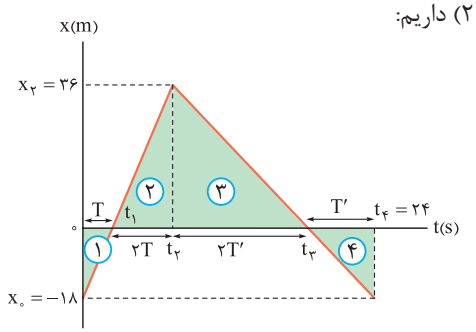
مشاوره در حل تست‌هایی که نمودار آن‌ها به صورت خطی است، نکته‌های ریاضی مربوط به تشابه مثلث‌ها کاربرد فراوانی دارند. نمونهٔ آن را در این تست می‌بینید.

خودت حل کنی بهتره لحظه‌هایی که نمودار مکان ـ زمان، محور t را قطع می‌کند، روی نمودار مشخص کنید. در بازهٔ زمانی بین این دو لحظه $x > 0$ است و بردار مکان متحرک در جهت محور x قرار می‌گیرد.

درس نامه در حرکت روی محور x وقتی متحرک در سمت مثبت محور مکان قرار دارد یعنی $x > 0$ بوده و بردار مکان متحرک در جهت محور x است. اما وقتی متحرک در سمت منفی محور مکان قرار دارد یعنی $x < 0$ بوده و بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است.

پاسخ تشریحی

گام اول: اگر بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 را با T نشان دهیم، با توجه به تشابه مثلث‌های (۱) و (۲) داریم:



$$\frac{x_2 - 0}{0 - x_0} = \frac{t_2 - t_1}{t_1 - 0} \Rightarrow \frac{36}{18} = \frac{t_2 - t_1}{T} \Rightarrow t_2 - t_1 = 2T$$

گام دوم: اگر بازهٔ زمانی t_3 تا t_4 را با T' نشان دهیم، با توجه به تشابه مثلث‌های (۳) و (۴) داریم:

$$\frac{x_2 - 0}{0 - x_0} = \frac{t_3 - t_2}{t_4 - t_3} \Rightarrow \frac{36}{18} = \frac{t_3 - t_2}{T'} \Rightarrow t_3 - t_2 = 2T'$$

گام سوم: با توجه به این‌که مدت‌زمان کل حرکت ۲۴s است می‌توان نوشت:

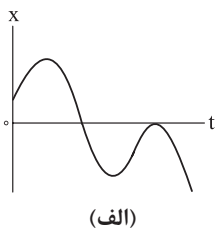
$$T + 2T + 2T' + T' = 24 \Rightarrow 3T + 3T' = 24 \Rightarrow T + T' = 8s$$

گام چهارم: در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 متحرک در سوی مثبت محور x است و بردار مکان آن در جهت محور x قرار می‌گیرد:

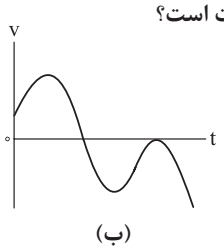
$$t_3 - t_1 = 2T + 2T' = 2(T + T') \xrightarrow{T+T'=8s} t_3 - t_1 = 2 \times 8 = 16s$$

تست و پاسخ ۶۱

دو متحرک A و B در راستای محور x حرکت می‌کنند. نمودار مکان ـ زمان متحرک A، به شکل (الف) و نمودار سرعت ـ زمان متحرک B به شکل (ب) است. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ حرکت این دو متحرک الزاماً درست است؟



(الف)



(ب)

الف) جهت بردار مکان متحرک A، دو مرتبه تغییر می‌کند.

ب) جهت حرکت متحرک A، سه مرتبه تغییر می‌کند.

پ) جهت بردار مکان متحرک B، یک مرتبه تغییر می‌کند.

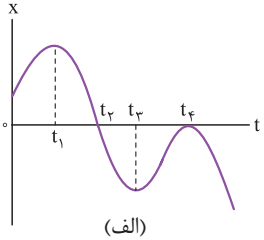
ت) جهت حرکت متحرک B، سه مرتبه تغییر می‌کند.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

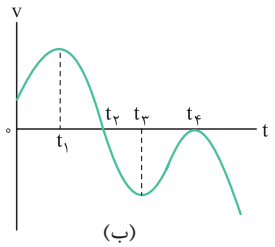
مشاوره توجه کنید که تست‌های مربوط به حرکت‌شناسی، الزاماً محاسباتی نیستند. در کنکور، انتظار چنین تست‌های مفهومی را نیز داشته باشید.

پاسخ تشریحی



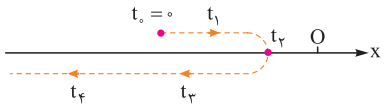
(الف)

گام اول: می‌دانیم هرگاه متحرک از مبدأ محور $(x = 0)$ عبور کند، یعنی x تغییر علامت بدهد، بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. بنابراین در نمودار «الف»، فقط در لحظهٔ t_2 جهت بردار مکان متحرک A تغییر می‌کند، پس مورد «الف» نادرست است.

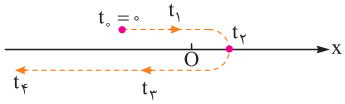


گام دوم: هرگاه جهت حرکت متحرک تغییر کند، علامت سرعت آن عوض می‌شود. در شکل (الف)، علامت سرعت متحرک A در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۳$ و $t_۴$ تغییر کرده است. بنابراین مورد «ب» درست است.

گام سوم: مکان اولیهٔ متحرک B معلوم نیست. بنابراین ممکن است متحرک B اصلاً از مبدأ محور نگذرد و جهت بردار مکان آن تغییر نکند.



و یا ممکن است متحرک B ، دو بار از مبدأ محور بگذرد. یعنی جهت بردار مکان آن دو بار تغییر کند؛ بنابراین مورد «پ» نادرست است.



گام چهارم: در شکل (ب) علامت سرعت متحرک B فقط در لحظهٔ $t_۲$ تغییر کرده است. بر این اساس جهت حرکت متحرک B فقط یک بار تغییر کرده است؛ یعنی مورد «ت» نادرست است.

تست و پاسخ ۶۲

کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) اگر در طی حرکتی، شتاب متحرک پیوسته برابر صفر باشد، سرعت متحرک در این حرکت ثابت است.

۲) اگر در طی حرکتی، شتاب متحرک پیوسته برابر صفر باشد، تندی متحرک در این حرکت ثابت است.

۳) اگر در طی حرکتی، سرعت متحرکی ثابت باشد، شتاب آن در این حرکت پیوسته برابر صفر است.

۴) اگر در طی حرکتی، تندی متحرک ثابت باشد، شتاب آن در این حرکت، پیوسته برابر صفر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

شتاب متوسط، برابر تغییرات سرعت در واحد زمان است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}$$

a_{av} : شتاب متوسط $(\frac{m}{s^۲})$

Δv : تغییر سرعت $(\frac{m}{s})$

Δt : بازهٔ زمانی (s)

$v_۱$: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱$ $(\frac{m}{s})$

$v_۲$: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲$ $(\frac{m}{s})$

شتاب حرکت در هر لحظه از زمان را شتاب لحظه‌ای و یا برای سادگی، شتاب می‌گویند. اگر شتاب متوسط در بازه‌های زمانی مختلف، یکسان باشد، شتاب لحظه‌ای با شتاب متوسط برابر می‌شود.

نکته شتاب ممکن است به علت تغییر در اندازهٔ سرعت (تندی) و یا تغییر در جهت سرعت و یا هر دوی آن‌ها به وجود آید. بنابراین در حالی‌که تندی یک متحرک ثابت است، اگر جهت حرکت آن تغییر کند، سرعت آن تغییر می‌کند و این موضوع سبب ایجاد شتاب می‌شود. مثلاً جسمی که با تندی ثابت روی مسیر دایره‌ای می‌چرخد و یا خودرویی که با تندی ثابت در یک جادهٔ مارپیچ حرکت می‌کند. شتاب غیرصفر دارند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** وقتی شتاب متحرک پیوسته برابر صفر است، یعنی شتاب لحظه‌ای با شتاب متوسط برابر است و داریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow{a=0}\Delta v=0\Rightarrow v_1=v_2$$

یعنی سرعت متحرک ثابت است و ۱ و ۳ درست هستند.

گام دوم: تندی، بزرگی سرعت متحرک است. بنابراین وقتی سرعت ثابت است، تندی نیز ثابت است. یعنی ۲ درست است.

گام سوم: با توجه به نکتهٔ درس‌نامه، ممکن است در طی حرکتی، تندی متحرک ثابت باشد، اما شتاب آن در این حرکت پیوسته برابر صفر نباشد؛ یعنی ۴ نادرست است.

تست و پاسخ ۶۳

در جدول زیر، مکان و سرعت متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در دو لحظه مشخص شده است. اگر در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، سرعت متوسط متحرک $(2/4\frac{m}{s})\vec{i}$ و شتاب متوسط آن $(-1/5\frac{m}{s^2})\vec{i}$ باشد، $\vec{v}_2$ در SI کدام است؟

زمان (s)	مکان (m)	سرعت $(\frac{m}{s})$
t_1	$-9\vec{i}$	$5\vec{i}$
t_2	$15\vec{i}$	$\vec{v}_2$

۱) $10\vec{i}$

۲) $-10\vec{i}$

۳) $20\vec{i}$

۴) $-20\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا با استفاده از سرعت متوسط متحرک، بازهٔ زمانی t_2-t_1 را به‌دست آورید. سپس با داشتن شتاب متوسط در همین بازهٔ زمانی، $\vec{v}_2$ را پیدا کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** جابه‌جایی متحرک بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 را حساب می‌کنیم و به کمک رابطهٔ سرعت متوسط، بازهٔ زمانی t_2-t_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\vec{x}=\vec{x}_2-\vec{x}_1=15\vec{i}-(-9\vec{i})=(24m)\vec{i}$$

$$\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta\vec{x}=(24m)\vec{i}]{\vec{v}_{av}=(2/4\frac{m}{s})\vec{i}}(2/4\frac{m}{s})\vec{i}=\frac{(24m)\vec{i}}{\Delta t}$$

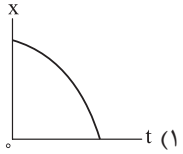
$$\Rightarrow\Delta t=t_2-t_1=10s$$

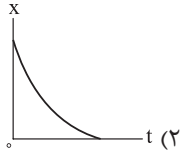
گام دوم: رابطهٔ شتاب متوسط را بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 می‌نویسیم و از آن‌جا $\vec{v}_2$ را حساب می‌کنیم:

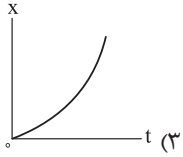
$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=10s,\ \vec{v}_1=(5\frac{m}{s})\vec{i}]{\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1}(-1/5)\vec{i}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{10}\Rightarrow-15\vec{i}=\vec{v}_2-5\vec{i}\Rightarrow\vec{v}_2=-(10\frac{m}{s})\vec{i}$$

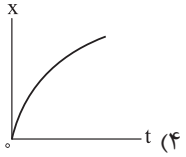
تست و پاسخ ۶۴

در کدام‌یک از نمودارهای مکان ـ زمان زیر، سرعت متحرک در مبدأ زمان و شتاب آن در تمام لحظه‌ها، در خلاف جهت محور x است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه

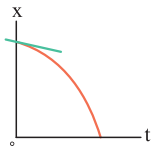
۱) شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در لحظهٔ $t=0$ سرعت متحرک در مبدأ زمان (v_0) را نشان می‌دهد.

۲) اگر گودی نمودار مکان ـ زمان، رو به بالا باشد، شتاب حرکت مثبت است و اگر گودی این نمودار، رو به پایین باشد، شتاب حرکت منفی است.

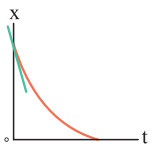


پاسخ تشریحی گزینه‌ای صحیح است که در آن، سرعت متحرک در لحظهٔ $t=0$ و شتاب متحرک در تمام لحظه‌ها، هر دو منفی باشند، یعنی $v_0<0$ و $a<0$. اکنون گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

۱) $\begin{cases} v_0<0 \\ a<0 \end{cases}$



۲) $\begin{cases} v_0<0 \\ a>0 \end{cases}$



۳) $\begin{cases} v_0>0 \\ a>0 \end{cases}$



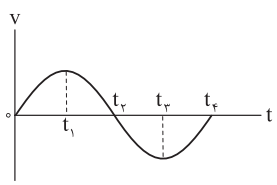
۴) $\begin{cases} v_0>0 \\ a<0 \end{cases}$



بنابراین ۱ درست است.

تست و پاسخ ۶۵

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ حرکت این متحرک درست است؟



الف) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، اندازهٔ شتاب متحرک در حال کاهش است.

ب) در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3، تندی متحرک در حال افزایش است.

پ) در بازهٔ زمانی صفر تا t_3، شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.

ت) در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4، تندی متوسط متحرک با اندازهٔ سرعت متوسط آن برابر است.

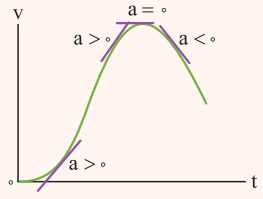
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره این تست بر اساس یکی از پرسش‌های دوره‌ای آخر فصل کتاب درسی فیزیک ۳ طرح شده است. این پرسش‌ها را جدی بگیرید.

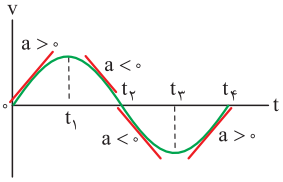
درس‌نامه

۱) شتاب در هر لحظهٔ دلخواه t برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان، در آن لحظه است.



۲) وقتی متحرک روی محور x و بدون تغییر جهت حرکت کند، تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط آن برابرند.

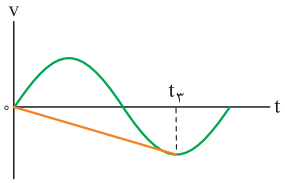
پاسخ تشریحی با استفاده از شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ شتاب حرکت در بازه‌های زمانی مختلف را روی شکل نشان می‌دهیم و گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:



الف) نادرست؛ در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 گرچه شتاب حرکت منفی است، اما اندازهٔ آن در حال افزایش است.

ب) درست؛ در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 سرعت متحرک منفی است، اما تندی متحرک که اندازهٔ سرعت آن است مثبت بوده و در حال افزایش است.

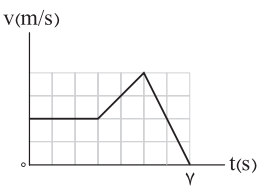
پ) درست؛ شیب خطی که دو نقطه از نمودار را در لحظه‌های ۰ و t_3 به هم وصل می‌کند منفی است. یعنی در این بازهٔ زمانی، شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.



ت) درست است؛ سرعت در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4 منفی است، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و هیچ تغییر جهتی ندارد. بنابراین تندی متوسط متحرک با اندازهٔ سرعت متوسط آن برابر است.

تست و پاسخ ۶۶

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازهٔ شتاب متحرک در لحظهٔ $t'_1 = 6s$ چند برابر اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 7s$ است؟

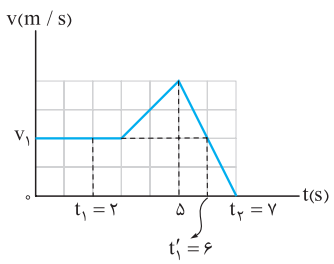


۱) ۵
۲) ۴
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره این تست بر اساس یکی از تمرین‌های متن کتاب درسی فیزیک ۳ در فصل ۱ طرح شده است. تمرین‌ها، پرسش‌ها و مثال‌های متن کتاب درسی را جدی بگیرید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در بازهٔ زمانی ۵s تا ۷s شتاب متحرک ثابت است؛ بنابراین شتاب در لحظهٔ $t'_1 = 6s$ همان شتاب متوسط در بازهٔ زمانی ۵s تا ۷s یا هر بخشی از آن است. اگر هر واحد سرعت روی محور عمودی را با v نشان دهیم، در بازهٔ زمانی ۶s تا ۷s داریم:



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_1 = \frac{v_2 - v'_1}{t_2 - t'_1} \xrightarrow{v_2 = 0 \ ,\ v'_1 = v_1 = 2v} a_1 = \frac{0 - 2v}{7 - 6} = -2v \Rightarrow |a_1| = 2v$$

گام دوم: اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 7s$ را نیز به‌دست می‌آوریم:

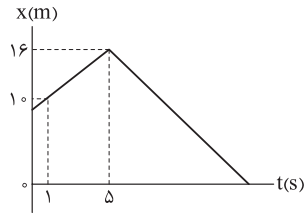
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[t_2 = 7s \ ,\ t_1 = 2s]{v_2 = 0 \ ,\ v_1 = 2v} a_2 = \frac{0 - 2v}{7 - 2} = -\frac{2}{5}v \Rightarrow |a_2| = \frac{2}{5}v$$

گام سوم: اکنون نسبت $\frac{|a_1|}{|a_2|}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{2v}{\frac{2}{5}v} = 5$$

تست و پاسخ ۶۷

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۱s تا ۱۱s، برابر $1/8\frac{m}{s}$ باشد، شتاب متوسط آن در این بازهٔ زمانی، در SI، کدام است؟



۱) $0/05\vec{i}$
۲) $0/35\vec{i}$
۳) $-0/05\vec{i}$
۴) $-0/35\vec{i}$

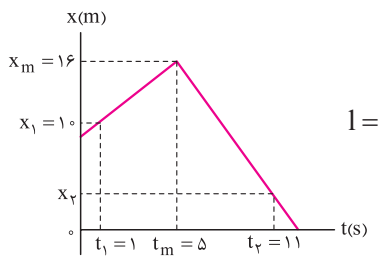
پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره ابتدا مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی ۱s تا ۱۱s و مکان متحرک در لحظهٔ $t=11s$ را حساب کنید. سپس سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1=1s$ و $t_2=11s$ را به‌دست آورید و با استفاده از آن‌ها، شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی را پیدا کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از تندی متوسط، مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی ۱s تا ۱۱s را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=11-1=10\,s]{s_{av}=1/8\frac{m}{s}}1/8=\frac{l}{10}\Rightarrow l=18\,m$$

اکنون مکان متحرک در لحظهٔ $t_2=11s$ را حساب می‌کنیم.



$$l=16-10+(16-x_2)\xrightarrow{l=18m}18=6+16-x_2\Rightarrow x_2=4m$$

گام دوم: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_1=1s$ همان سرعت متوسط در بازهٔ ۱s تا ۵s است. هم‌چنین سرعت متحرک در لحظهٔ $t_2=11s$ همان سرعت متوسط در بازهٔ ۵s تا ۱۱s است.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_1=\frac{x_m-x_1}{t_m-t_1}=\frac{16-10}{5-1}=\frac{6}{4}=1/5\frac{m}{s}$$

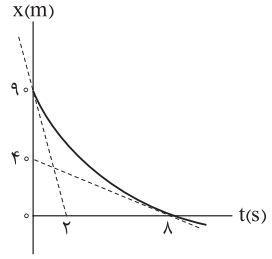
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_2=\frac{x_2-x_m}{t_2-t_m}=\frac{4-16}{11-5}=-\frac{12}{6}=-2\frac{m}{s}$$

گام سوم: شتاب متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{-2-1/5}{11-1}=-\frac{3/5}{10}=-0/35\frac{m}{s^2}\Rightarrow\vec{a}_{av}=(-0/35\frac{m}{s^2})\vec{i}$$

تست و پاسخ ۶۸

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند، در SI کدام است؟ (خط‌چین‌های رسم‌شده در دو لحظهٔ $t_1=0$ و $t_2=8\,s$ بر نمودار مماس هستند.)



۱) $5\vec{i}$
۲) $-5\vec{i}$
۳) $6/25\vec{i}$
۴) $-6/25\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره حرکت‌شناسی یکی از مباحث فیزیک دبیرستان است که دامنهٔ سؤال‌های آن بسیار وسیع و متنوع است. مثلاً شتاب متوسط فقط از روی نمودار سرعت ـ زمان به‌دست نمی‌آید، بلکه اگر به این سؤال و سؤال قبل دقت کنید، می‌بینید که با استفاده از اطلاعات روی نمودار مکان ـ زمان هم می‌توانید به شتاب متوسط برسید.

پاسخ تشریحی

گام اول: در لحظهٔ $t = 8s$ که متحرک از مبدأ محور $(x = 0)$ عبور می‌کند و علامت x عوض می‌شود، جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند.

گام دوم: شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در هر لحظه، سرعت متحرک را در آن لحظه نشان می‌دهد. بنابراین می‌توانیم سرعت متحرک در لحظه‌های $t = 0$ و $t = 8s$ را به‌دست آوریم:

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{0 - 90}{2 - 0} = -\frac{90}{2} = -45\frac{m}{s}$$

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{0 - 40}{8 - 0} = -\frac{40}{8} = -5\frac{m}{s}$$

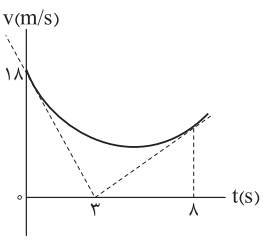
گام سوم: شتاب متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی 0 تا 8s حساب می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_{av} = \frac{-5 - (-45)}{8 - 0} = \frac{40}{8} = 5\frac{m}{s^2} \Rightarrow \Rightarrow \vec{a}_{av} = (5\frac{m}{s^2})\vec{i}$$

تکنیک از آن‌جا که گودی نمودار مکان ـ زمان رو به بالاست، از ابتدا معلوم بود که شتاب متحرک مثبت است و ۲ و ۴ رد می‌شوند.

تست و پاسخ ۶۹

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ شتاب متحرک در مبدأ زمان، ۳ برابر اندازهٔ شتاب آن در لحظهٔ $t = 8s$ باشد، شتاب متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اول، برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (دو خط‌چین رسم‌شده در مبدأ زمان و لحظهٔ $t = 8s$ بر نمودار مماس هستند.)



۱) $\vec{i}$

۲) $-\vec{i}$

۳) $0/25\vec{i}$

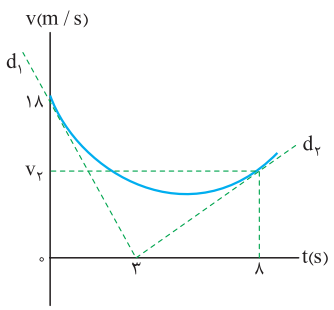
۴) $-0/25\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا شتاب و سپس سرعت متحرک را در لحظهٔ $t = 8s$ به‌دست آورید. در مرحلهٔ بعد، شتاب متوسط را در ۸ ثانیهٔ اول پیدا کنید.

پاسخ تشریحی

گام اول: می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان، شتاب لحظه‌ای را نشان می‌دهد. بر این اساس، نسبت اندازهٔ شتاب در مبدأ زمان به اندازهٔ شتاب در لحظهٔ $t = 8s$ را برابر با ۳ قرار می‌دهیم و از آن‌جا سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 8s$ (v_2) را پیدا می‌کنیم.



$$a_1 = d_1 \text{ شیب خط} = \frac{0 - 18}{3 - 0} = -6\frac{m}{s^2}$$

$$a_2 = d_2 \text{ شیب خط} = \frac{v_2 - 0}{8 - 3} = \frac{v_2}{5}\frac{m}{s^2}$$

$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = 3 \Rightarrow \frac{|-6|}{\left|\frac{v_2}{5}\right|} = 3 \Rightarrow \frac{6}{\frac{v_2}{5}} = 3 \Rightarrow \frac{v_2}{5} = 2 \Rightarrow v_2 = 10\frac{m}{s}$$

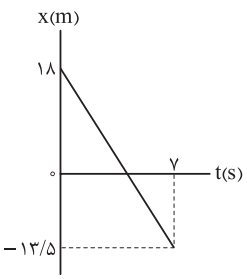
گام دوم: اکنون شتاب متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۱۰-۱۸}{۸-۰}=-۱\frac{m}{s^۲}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av}=(-۱\frac{m}{s^۲})\vec{i}$$

تست و پاسخ ۷۰

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. بردار جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی ۳s تا ۵s و نیز بردار سرعت آن در لحظهٔ $t=۲s$ به ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟



۱) $-۹\vec{i}$ و $-۴/۵\vec{i}$

۲) صفر و $-۴/۵\vec{i}$

۳) صفر و $۹\vec{i}$

۴) $-۹\vec{i}$ و $۹\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

۱) در حرکت یکنواخت روی خط راست (سرعت ثابت)، اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است. یعنی سرعت متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه، برابر سرعت لحظه‌ای آن است. $(v=v_{av})$

۲) معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت به‌صورت زیر است:

$$x=vt+x_۰$$

x : مکان متحرک در لحظهٔ $t\,(m)$

$x_۰$: مکان اولیه یا مبدأ حرکت یعنی مکان متحرک در لحظهٔ $t=۰\,(m)$

v : سرعت متحرک $(\frac{m}{s})$

t : زمان (s)

۳) در حرکت با سرعت ثابت، نمودار مکان ـ زمان به‌صورت یک خط شیب‌دار است و شیب آن، سرعت متحرک را نشان می‌دهد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** سرعت متحرک را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که نمودار مکان ـ زمان، خط راست است، سرعت ثابت بوده و سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط برابر است.

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x-x_۰}{t-t_۰}\Rightarrow v=\frac{-۱۳/۵-۱۸}{۷-۰}=\frac{-۳۱/۵}{۷}=-۴/۵\frac{m}{s}$$

از آن‌جا که سرعت ثابت است، در لحظهٔ $t=۲s$ نیز بردار سرعت برابر است با: $\vec{v}=(-۴/۵\frac{m}{s})\vec{i}$

گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را می‌نویسیم و با استفاده از آن، مکان متحرک را در دو لحظهٔ $t_۱=۳s$ و $t_۲=۵s$ به‌دست می‌آوریم.

$$x=vt+x_۰\xrightarrow[x_۰=۱۸m]{v=-۴/۵\frac{m}{s}}x=-۴/۵t+۱۸$$

$$t_۱=۳s\Rightarrow x_۱=-۴/۵\times ۳+۱۸=۴/۵m$$

$$t_۲=۵s\Rightarrow x_۲=-۴/۵\times ۵+۱۸=-۴/۵m$$

گام سوم: بردار جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱=۳s$ تا $t_۲=۵s$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta\vec{x}=\vec{x}_۲-\vec{x}_۱=(-۴/۵m)\vec{i}-(۴/۵m)\vec{i}=(-۹m)\vec{i}$$

بنابراین ۱ درست است.

تست و پاسخ ۷۱

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = -۴t + ۱۲$ است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ حرکت این متحرک درست است؟

الف) متحرک در لحظهٔ $t = ۳s$ تغییر جهت می‌دهد.

ب) متحرک همواره در یک جهت حرکت می‌کند و اندازهٔ بردار مکان آن پیوسته در حال افزایش است.

پ) فاصلهٔ متحرک تا مبدأ در لحظه‌های $t_۱ = ۰/۵s$ و $t_۲ = ۳/۵s$ یکسان است.

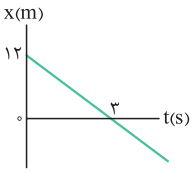
ت) سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ سوم برابر سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۴s$ است.

۱) الف و پ و ت ۲) الف و پ ۳) ب و ت ۴) ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره در مسیر آماده‌شدن برای کنکور، همیشه دنبال سؤال‌های پیچیده و عجیب و غریب نباشید، بسیاری از تست‌هایی که در کنکور مطرح می‌شوند، ساده یا متوسط هستند. مثلاً همین معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت در کنکور تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳ مطرح شده بود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک، نمودار مکان ـ زمان آن را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x = vt + x_۰ \\ x = -۴t + ۱۲ \end{cases} \Rightarrow v = -۴\frac{m}{s}\ ,\ x_۰ = ۱۲m$$

$$x = ۰ \Rightarrow ۰ = -۴t + ۱۲ \Rightarrow t = ۳s$$

گام دوم: موارد «الف» تا «ت» را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) نادرست؛ با توجه به این‌که معادلهٔ مکان متحرک از درجهٔ اول بوده و حرکت آن با سرعت ثابت است، در طول مسیر، تغییر جهت نمی‌دهد.

ب) نادرست؛ متحرک همواره در یک جهت حرکت می‌کند اما از لحظهٔ صفر تا لحظهٔ $t = ۳s$ که متحرک به مبدأ محور نزدیک می‌شود، اندازهٔ بردار مکان آن، در حال کاهش است.

پ) نادرست؛ مکان متحرک در لحظه‌های $t_۱ = ۰/۵s$ و $t_۲ = ۳/۵s$ را به‌دست می‌آوریم:

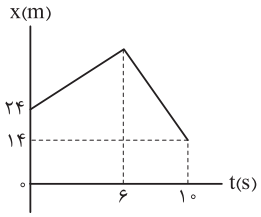
$$\begin{cases} t_۱ = ۰/۵s \Rightarrow x_۱ = -۴(۰/۵) + ۱۲ = ۱۰\,m \\ t_۲ = ۳/۵s \Rightarrow x_۲ = -۴(۳/۵) + ۱۲ = -۲\,m \end{cases} \Rightarrow |x_۱| \neq |x_۲|$$

بنابراین فاصلهٔ متحرک تا مبدأ، در دو لحظهٔ فوق، یکسان نیست.

ت) درست؛ با توجه به این‌که سرعت متحرک ثابت است، سرعت متوسط آن در هر بازهٔ زمانی، با سرعت آن در هر لحظهٔ دلخواه برابر است.

تست و پاسخ ۷۲

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند. مطابق شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ $t_۱ = ۲s$، $۵\frac{m}{s}$ کم‌تر از تندی آن در لحظهٔ $t_۲ = ۸s$ باشد، بزرگی سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۳s تا ۹s چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۴
۴) ۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه در هر بازهٔ زمانی از حرکت که سرعت ثابت است، می‌توانیم سرعت در هر لحظهٔ دلخواه را با سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی، برابر قرار دهیم. هم‌چنین در این بازهٔ زمانی، اندازهٔ سرعت متحرک با تندی آن برابر است.

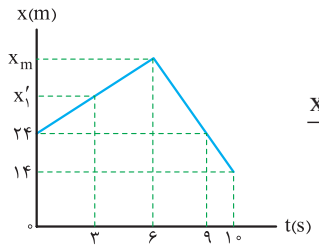
پاسخ تشریحی

گام اول: تندی متحرک در لحظهٔ $t_1 = 2s$ با سرعت متوسط در ۶ ثانیهٔ اول حرکت (v_1) برابر است. هم‌چنین تندی متحرک در لحظهٔ $t_2 = 8s$ با اندازهٔ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۶s تا ۱۰s، $(|v_2|)$ برابر است. با توجه به این مطلب، می‌توانیم بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان (x_m) را به‌دست آوریم:

$$|v_2| - v_1 = 5 \Rightarrow \left|\frac{14 - x_m}{10-6}\right| - \frac{x_m - 24}{6-0} = 5 \Rightarrow \frac{x_m - 14}{4} - \frac{x_m - 24}{6} = 5 \Rightarrow \frac{3x_m - 42}{12} - \frac{2x_m - 48}{12} = 5$$

$$\Rightarrow x_m + 6 = 60 \Rightarrow x_m = 54\,m$$

گام دوم: با توجه به شکل و نوشتن نسبت تشابه، مکان متحرک در لحظهٔ $t_1' = 3s$ را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{x_1' - 24}{3-0} = \frac{x_m - 24}{6-0} \xrightarrow{x_m = 54m} \frac{x_1' - 24}{3} = \frac{54-24}{6} \Rightarrow x_1' - 24 = 15 \Rightarrow x_1' = 39m$$

به همین ترتیب، مکان متحرک در لحظهٔ $t_2' = 9s$ را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x_2' - 14}{10-9} = \frac{x_m - 14}{10-6} \xrightarrow{x_m = 54m} \frac{x_2' - 14}{1} = \frac{54-14}{4} \Rightarrow x_2' - 14 = 10 \Rightarrow x_2' = 24m$$

گام سوم: بزرگی سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1' = 3s$ تا $t_2' = 9s$ را حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[t_2'=9s, t_1'=3s]{x_2'=24m, x_1'=39m} v_{av} = \frac{24-39}{9-3} = -2/5\frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}| = 2/5\frac{m}{s}$$

تست و پاسخ ۷۳

دو جسم A و B با سرعت‌های ثابت بر روی محور x در حرکت‌اند و هر دو هم‌زمان در یک لحظه در مبدأ از کنار هم عبور می‌کنند. اگر معادلهٔ مکان ـ زمان A در SI، $x_A = 3t - 4$ باشد و متحرک B در لحظهٔ $t_1 = 5\,s$ از مکان $x_1 = -22\,m$ عبور کند، معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B در SI کدام است؟

۱) $x_B = 9t - 23$
۲) $x_B = -9t + 23$
۳) $x_B = 6t - 8$
۴) $x_B = -6t + 8$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه وقتی دو متحرک در لحظه‌ای به هم برسند یا از کنار هم بگذرند، می‌توان در آن لحظه، معادلهٔ مکان آن‌ها را مساوی با هم قرار داد و مجهول مورد نظر را به‌دست آورد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** لحظه‌ای را که متحرک A از مبدأ مکان عبور می‌کند به‌دست می‌آوریم؛ در این لحظه $x_A = 0$ است.

$$x_A = 3t - 4 \xrightarrow{x_A = 0} 0 = 3t - 4 \Rightarrow t = \frac{4}{3}s$$

گام دوم: متحرک B نیز در لحظهٔ $t = \frac{4}{3}s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند و داریم:

$$t = \frac{4}{3}s \Rightarrow x_B = 0$$

اکنون می‌توانیم سرعت متحرک B را به‌دست آوریم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_B=\frac{x_1-x_B}{t_1-t} \xrightarrow[t=\frac{4}{3}s\ ,\ t_1=5s]{x_B=0\ ,\ x_1=-22m} v_B=\frac{(-22)-0}{5-\frac{4}{3}}=\frac{-22}{\frac{11}{3}}=-6\frac{m}{s}$$

با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B $(x_B=v_Bt+x_{0B})$ فقط 4 می‌تواند درست باشد.

البته می‌توانیم x_{0B} را به صورت زیر، محاسبه کنیم:

$$x_B=v_Bt+x_{0B} \xrightarrow{v_B=-6\frac{m}{s}} x_B=-6t+x_{0B}$$

$$\xrightarrow[x_B=0]{t=\frac{4}{3}s} 0=-6\times\frac{4}{3}+x_{0B} \Rightarrow x_{0B}=8m$$

حواستون باشه می‌توانیم لحظهٔ $t_1=5s$ را در گزینه‌ها جای‌گذاری کنیم و ببینیم در کدام گزینه، $x_B=-22m$ به‌دست می‌آید. در این صورت، همان ابتدا 1 و 3 حذف می‌شوند.

تست و پاسخ ۷۴

در شکل زیر دو متحرک هم‌زمان از نقطه‌های A و B با سرعت‌های ثابت به سمت یکدیگر حرکت می‌کند و در نقطهٔ O از کنار هم می‌گذرند. در ادامه ۴ s طول می‌کشد تا متحرک اول از O به B و ۹ s طول می‌کشد تا دومی از O به A برسد. اگر تندی متحرک اول $12\frac{m}{s}$ باشد، چند ثانیه طول می‌کشد تا متحرک دوم از B به A برسد؟

A O B

۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** رابطهٔ مسافت طی‌شده برای هر دو متحرک را از ابتدا تا لحظهٔ عبور از نقطهٔ O می‌نویسیم:

A l_1 v_B O v_A l_2 B

$$\begin{cases} l_1=v_A\Delta t \\ l_2=v_B\Delta t \end{cases} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{v_A}{v_B}$$

گام دوم: رابطهٔ مسافت طی‌شده برای دو متحرک را بعد از عبور از نقطهٔ O تا لحظهٔ رسیدن به نقاط A و B می‌نویسیم:

A v_A l_1 O v_B l_2 B

$$\begin{cases} l_1=v_B\Delta t_B \xrightarrow{\Delta t_B=9s} l_1=v_B\times 9 \\ l_2=v_A\Delta t_A \xrightarrow{\Delta t_A=4s} l_2=v_A\times 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{v_B}{v_A}\times\frac{9}{4}$$

گام سوم: از مقایسهٔ نتایج به‌دست‌آمده در گام‌های اول و دوم داریم:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{v_B}{v_A}\times\frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2=\frac{9}{4} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \frac{v_A}{v_B}=\frac{3}{2} \xrightarrow{v_A=12\frac{m}{s}} \frac{12}{v_B}=\frac{3}{2} \Rightarrow v_B=8\frac{m}{s}$$

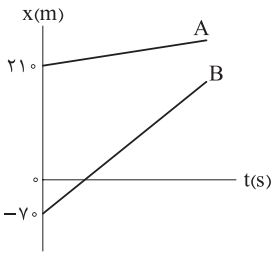
گام چهارم: کل مسیر پیموده‌شده توسط متحرک B و کل زمان حرکت آن وقتی از B به A می‌رسد را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} l_1=v_B\Delta t_B=8\times 9=72\ m \\ l_2=v_A\Delta t_A=12\times 4=48\ m \end{cases} \Rightarrow l_1+l_2=72+48=120\ m$$

$$(l_1+l_2)=v_B\times\Delta t_{BA} \xrightarrow[v_B=8\frac{m}{s}]{l_1+l_2=120\ m} 120=8\,\Delta t_{BA} \Rightarrow \Delta t_{BA}=\frac{120}{8}=15s$$

تست و پاسخ ۷۵

شکل زیر، نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B را نشان می‌دهد. اگر تندی متحرک B، $14\frac{m}{s}$ بیشتر از تندی متحرک A و فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر در لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک B، ۲۵۲ m باشد، در چه لحظه‌ای برای بار دوم فاصلهٔ دو متحرک از هم ۲۵۲m می‌شود؟



۱) ۲۰
۲) ۲۲
۳) ۳۶
۴) ۳۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

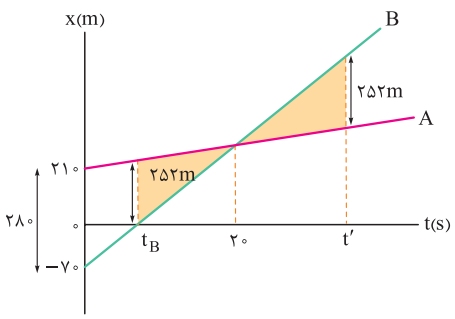
پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ مکان دو متحرک را نوشته و مساوی با هم قرار می‌دهیم تا لحظهٔ به هم رسیدن آن‌ها را به دست آوریم:

$$x_A = x_B \xrightarrow{x=vt+x_\circ} v_At + x_{\circ A} = v_Bt + x_{\circ B} \xrightarrow[x_{\circ B}=-۷۰\,m]{x_{\circ A}=۲۱۰\,m} v_At + ۲۱۰ = v_Bt - ۷۰$$

$$\Rightarrow ۲۸۰ = (v_B - v_A)t \xrightarrow{v_B - v_A = ۱۴\frac{m}{s}} ۲۸۰ = ۱۴t \Rightarrow t = \frac{۲۸۰}{۱۴} = ۲۰\,s$$

توجه کنید که چون سرعت هر دو متحرک، مثبت است؛ تندی و سرعت برای هر کدام از آن‌ها یکسان است.

گام دوم: لحظه‌ای که بردار مکان متحرک B تغییر جهت می‌دهد (t_B) همان لحظه‌ای است که متحرک B ازمبدأ محور $(x=\circ)$ می‌گذرد. در این لحظه داریم:



$$x_A - x_B = ۲۵۲m \xrightarrow{x_B=\circ} x_A = ۲۵۲m$$

گام سوم: رابطهٔ جابه‌جایی دو متحرک A و B را نسبت به هم می‌نویسیم تا t_B را به دست آوریم:

$$\Delta x = v \times \Delta t \Rightarrow ۲۸۰ - ۲۵۲ = (v_B - v_A)(t_B - \circ) \xrightarrow{v_B - v_A = ۱۴\frac{m}{s}} ۲۸ = ۱۴ \times t_B \Rightarrow t_B = ۲\,s$$

گام چهارم: با توجه به همنهشتی دو مثلث رنگ‌شده در نمودار، t' یعنی لحظه‌ای که برای بار دوم، فاصلهٔ دو متحرک از هم ۲۵۲m می‌شود را پیدا می‌کنیم:

$$t' - ۲۰ = ۲۰ - t_B \xrightarrow{t_B=۲s} t' - ۲۰ = ۲۰ - ۲ \Rightarrow t' = ۳۸\,s$$

شیمی دهم

تست و پاسخ ۷۶

کدام مطلب درست است؟

۱) همهٔ گازها نامرئی هستند به طوری که ما هوا را نمی‌توانیم ببینیم و به طور معمول وجود آن را در پیرامون خود حس نمی‌کنیم.

۲) در لایه‌های بالای هواکره با برخورد پرتوهای الکترومغناطیسی، تنها کاتیون‌های تک‌اتمی مشاهده می‌شود.

۳) بخار آب تنها در نزدیک‌ترین لایه به سطح زمین وجود دارد و به همین دلیل، تغییرات آب‌وهوا تنها در این لایه بررسی می‌شود.

۴) با افزایش ارتفاع از سطح زمین، روند تغییر دما و فشار، عکس یکدیگر عمل می‌کنند.

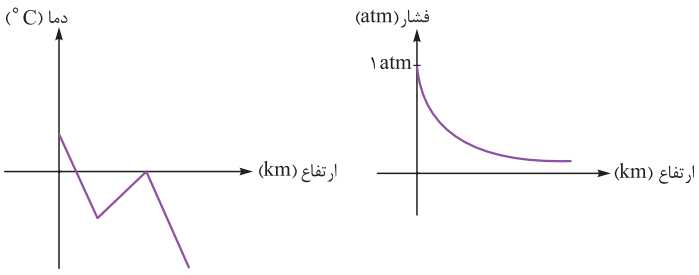
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) اغلب گازها نامرئی هستند، نه همهٔ آن‌ها! مثلاً NO_2 گازی قهوه‌ای‌رنگ و گاز کلر زردرنگ است.

۲) کاتیون‌های دواتمی O_2^+ و N_2^+ نیز مشاهده می‌شود!

۴) عکس هم نیستند! روند تغییر دما نامنظم بوده و روند تغییر فشار، به طور منظم کاهشی است. نمودارهای تقریبی زیر، این روندها *رو نشون میدن*:



تست و پاسخ ۷۷

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **حدود ۷۵ درصد از حجم هواکره، در نزدیک‌ترین لایه به زمین، یعنی لایهٔ تروپوسفر، قرار دارد و پس از آن، هواکره رقیق و رقیق‌تر می‌شود.**
- **بیش از ۹۹ درصد از حجم هوای پاک و خشک، تنها از دو گاز تشکیل شده است.**
- **فراوان‌ترین گاز نجیب موجود در هوا، چهارمین گاز نجیب جدول دوره‌ای عنصرها است.**
- **در فرایند کلی جداسازی اجزای هوا، سومین مادهٔ جداشده، به عنوان محیط بی‌اثر در جوشکاری به کار می‌رود.**

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی تنها عبارت دوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

- حدود ۷۵ درصد از **جرم** هواکره در تروپوسفر قرار دارد، نه ۷۵ درصد از حجم آن!
- مجموع درصد حجمی گازهای نیتروژن (۷۸/۰۷۹٪) و اکسیژن (۲۰/۹۵۲٪) در هوای پاک و خشک، بیش از ۹۹٪ (۹۹/۰۳۱٪) خواهد بود.
- فراوان‌ترین گاز نجیب هواکره، گاز آرگون ($_{18}Ar$)، سومین گاز نجیب جدول تناوبی (در دورهٔ سوم) است.
- در فرایند کلی جداسازی اجزای هوا، ترتیب جداشدن اجزاء به صورت ۱) $H_2O(s)$ ۲) $CO_2(s)$ ۳) $N_2(g)$ ۴) $Ar(g)$ ۵) $O_2(l)$ است.

دقت کنید که گاز آرگون (Ar) به عنوان محیط بی‌اثر در جوشکاری به کار می‌رود.

تست و پاسخ ۷۸

کدام مطلب درست است؟

۱) بوکسیت و سیلیس، دو نمونه از ترکیب‌های عنصرها با اکسیژن هستند که در طبیعت به طور خالص یافت می‌شوند.

۲) سنگ معدن آهن، دارای دو نوع اکسید آهن است که نسبت آنیون به کاتیون در یکی از آن‌ها، ۱/۵ برابر دیگری است.

۳) در فرمول شیمیایی ترکیب‌های دی‌کلر پنتااکسید، نیتروژن دی‌اکسید، اکسیژن دی‌فلوئورید و لیتیم اکسید، شمار اتم‌های اکسیژن از عنصر دیگر بیشتر است.

۴) در مولکول NO_2Cl، اتم نیتروژن اتم مرکزی بوده و دارای یک جفت‌الکترون ناپیوندی است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی نسبت آنیون به کاتیون در Fe_2O_3، برابر $\frac{3}{2}=1/5$ و این نسبت در FeO، برابر ۱ است.

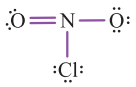
بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) بوکسیت همان Al_2O_3 به همراه ناخالصی است.

تذکر در فصل سوم شیمی دوازدهم خواهید خواند که سیلیس (SiO_2) به دو صورت خالص (کوارتز) و ناخالص (ماسه) وجود دارد.

۳) فرمول ترکیب‌های داده‌شده به صورت: $Li_2O, OF_2, NO_2, Cl_2O_5$ است. در دو ترکیب OF_2 و Li_2O، شمار اتم‌های دیگر از اکسیژن بیشتر است.

۴) نیتروژن جفت‌الکترون ناپیوندی ندارد. ساختار لوویس NO_2Cl به صورت روبه‌رو است:



تست و پاسخ ۷۹

نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در کدام‌یک از مولکول‌های زیر، برابر با نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در ترکیب مس (II) کلرید است؟

$CuCl_2$

۱) HCN ۲) گوگرد دی‌اکسید ۳) دی‌نیتروژن مونوکسید ۴) $SOCl_2$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی ابتدا نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در مس (II) کلرید را حساب می‌کنیم:

$$\text{مس (II) کلرید : } CuCl_2 \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون‌ها}}{\text{شمار آنیون‌ها}}=\frac{1}{2}$$

حالا، ساختار لوویس ۴ ترکیب داده‌شده را رسم کرده و نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی را حساب می‌کنیم:

$$HCN \Rightarrow H-C\equiv N: \Rightarrow \frac{\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی}}=\frac{4}{1}=4$$

$$\text{(گوگرد دی‌اکسید) } SO_2 \Rightarrow :\ddot{O}-\ddot{S}=\ddot{O}: \Rightarrow \frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\text{(دی‌نیتروژن مونوکسید) } N_2O \Rightarrow :N\equiv N-\ddot{O}: \Rightarrow \frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}}=\frac{4}{4}=1$$

$$SOCl_2 \Rightarrow :\ddot{Cl}-\underset{:\ddot{Cl}:}{\ddot{S}}-\ddot{O}: \Rightarrow \frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}}=\frac{3}{10}$$

تست و پاسخ ۸۰

کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟

الف) در اثر سوختن زغال‌سنگ در حضور اکسیژن، اکسیدهایی تولید می‌شود که نسبت تعداد اتم‌های اکسیژن به کل اتم‌ها در مولکول‌های آن‌ها، برابر است.

ب) اتصال محصول حاصل از سوختن کامل سوخت فسیلی به هموگلوبین، از رسیدن اکسیژن به بافت‌های بدن جلوگیری کرده و باعث مسمومیت می‌شود.

پ) مرجان‌ها، گروهی از کیسه‌تنان با اسکلت آهکی هستند که در صورت افزایش مقدار کلسیم در آب، از بین می‌روند.

ت) از واکنش همهٔ اکسیدهای فلزی و نافلزی با آب، به ترتیب باز و اسید تولید می‌شود.

۱) الف ـ ب
۲) پ ـ ت
۳) الف ـ پ
۴) الف ـ ب ـ پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی همهٔ موارد نادرست هستند.

بررسی موارد:

الف) معادلهٔ واکنش سوختن زغال‌سنگ به صورت مقابل است:

$$\text{زغال‌سنگ} + \text{اکسیژن} \Rightarrow \underset{\uparrow}{H_2O}\ \text{بخار آب} + \underset{\uparrow}{SO_2}\ \text{گوگرد دی‌اکسید} + \underset{\uparrow}{CO_2}\ \text{کربن دی‌اکسید} + \text{نور و گرما}$$

نسبت تعداد اتم‌های اکسیژن به کل اتم‌ها در اکسیدهای SO_2، CO_2 و H_2O برابر نیست!

ب) کربن مونوکسید (CO) به هموگلوبین متصل می‌شود که حاصل سوختن ناقص سوخت فسیلی است، نه کامل!

پ) با افزایش کربن دی‌اکسید (CO_2) در آب، مرجان‌ها از بین می‌روند.

ت) از واکنش اغلب آن‌ها با آب، به‌ترتیب باز و اسید تولید می‌شود، نه همهٔ آن‌ها!

تست و پاسخ ۸۱

چه تعداد از مطالب زیر، درست است؟

- **طبق قانون بقای جرم، مجموع جرم واکنش‌دهنده‌ها و مجموع جرم فراورده‌ها ثابت است.**
- **توجیه برخی از فرایندهای شیمیایی مانند زنگ‌زدن آهن در هوای مرطوب، با قانون پایستگی جرم امکان‌پذیر است.**
- **مطابق قانون پایستگی جرم، مولکولی از بین نمی‌رود و مولکولی هم به وجود نمی‌آید.**
- **شرط موازنه‌بودن یک معادله این است که مجموع شمار اتم‌ها در دو سمت معادله، برابر باشد.**

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی هیچ‌کدام از مطالب، درست نیستند.

بررسی عبارت‌ها:

- از جرم واکنش‌دهنده‌ها کم شده و به جرم فراورده‌ها اضافه می‌شود. در واقع مجموع این دو با هم برابر هستند، نه ثابت!
- میخ آهنی در هوای مرطوب زنگ می‌زند و به جرم آن اضافه می‌شود.
- اتمی از بین نمی‌رود و به وجود نمی‌آید، نه مولکولی! مثلاً در واکنش $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$، مولکول‌های H_2 و O_2 از بین رفته و مولکول H_2O به وجود می‌آید.

شرط موازنه این است که تعداد اتم‌های هر عنصر در دو طرف معادلهٔ واکنش یکسان باشد، نه مجموع شمار اتم‌ها!

مثلاً در معادلهٔ $N_2 + H_2 \rightarrow NH_3$، مجموع شمار اتم‌ها در دو سمت واکنش برابر با ۴ است، در حالی که معادلهٔ آن موازنه نشده و تعداد اتم‌های هر عنصر در دو سمت برابر نیست!

تست و پاسخ ۸۲

تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش‌های a و b، پس از موازنهٔ معادلهٔ آن‌ها، کدام است؟

a) $BCl_3(g) + P_4(s) + H_2(g) \rightarrow BP(s) + HCl(l)$

b) $K_4Fe(CN)_6(aq) + H_2SO_4(aq) + H_2O(l) \rightarrow K_2SO_4(aq) + FeSO_4(aq) + (NH_4)_2SO_4(aq) + CO(g)$

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی معادله‌های موازنه‌شده به صورت زیر هستند:

a) $4BCl_3(g) + P_4(s) + 6H_2(g) \rightarrow 4BP(s) + 12HCl(l)$

b) $K_4Fe(CN)_6(aq) + 6H_2SO_4(aq) + 6H_2O(l) \rightarrow 2K_2SO_4(aq) + FeSO_4(aq) + 3(NH_4)_2SO_4(aq) + 6CO(g)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{مجموع ضرایب مواد a} = 4+1+6+4+12 = 27 \\ \text{مجموع ضرایب مواد b} = 1+6+6+2+1+3+6 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow 27-25 = 2$$

تست و پاسخ ۸۳

شکل زیر، نمایی از گرمای جذب و بازتاب شده به وسیلهٔ زمین را نشان می‌دهد. چه تعداد از توصیف‌های زیر در رابطه با موارد «الف» تا «ت» مشخص‌شده در شکل، درست است؟



مورد «الف» در شکل: زمین بخش قابل توجهی از گرمای جذب‌شده را به صورت تابش فروسرخ از دست می‌دهد.

مورد «ب» در شکل: بخش عمده‌ای از این پرتوها به وسیلهٔ زمین جذب می‌شود.

مورد «پ» در شکل: بخش کوچکی از پرتوهای خورشیدی به وسیلهٔ هواکره جذب می‌شوند.

مورد «ت» در شکل: گازهای گلخانه‌ای مانع از خروج کامل گرمای آزادشده می‌شود.

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی با توجه به شکل کامل‌شدهٔ زیر، موارد «الف» و «ب»، درست هستند.



بررسی موارد نادرست:

موارد «پ» و «ت» به صورت جابه‌جا معرفی شده‌اند. مورد «پ» مربوط به نقش گازهای گلخانه‌ای در ممانعت از خروج کامل گرمای آزادشده و مورد «ت» به جذب بخش کوچکی از پرتوهای خورشیدی به وسیلهٔ هواکره اشاره دارد.

تست و پاسخ ۸۴

کدام مطلب دربارهٔ اکسیژن و اوزون، درست است؟ $(O = 16 : g.mol^{-1})$

۱) اوزون، گازی با مولکول‌های سه‌اتمی در بالاترین لایهٔ هواکره، مانند پوششی کرهٔ زمین را احاطه کرده، هرچند که مقدار آن در هواکره ناچیز است.

۲) مولکول‌های اوزون، مانع ورود بیش از ۹۰ درصد از تابش فرابنفش خورشید به سطح زمین می‌شوند تا موجودات زنده از آثار زیانبار این تابش در امان بمانند.

۳) تفاوت نقطهٔ جوش دگرشکل‌های عنصر اکسیژن برحسب درجهٔ سلسیوس، بیشتر از تفاوت جرم مولی آن‌ها برحسب گرم بر مول است.

۴) تابش پرانرژی فرابنفش، دو پیوند اشتراکی را بین دو اتم اکسیژن در اوزون می‌شکند و مولکول اوزون به یک اتم اکسیژن و یک مولکول اکسیژن تبدیل می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

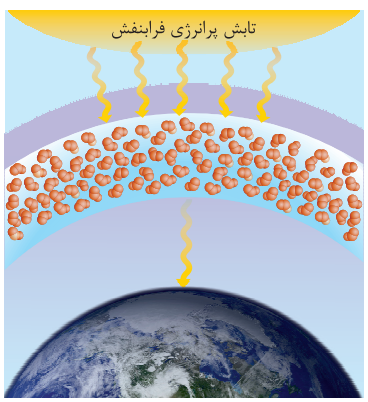
پاسخ تشریحی

تفاوت نقطهٔ جوش O_2 و O_3 برابر $71^\circ C$ $((-112^\circ C) - (-183^\circ C))$ بوده و تفاوت جرم مولی آن‌ها $16\ g.mol^{-1}$ است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱ در دومین لایهٔ هواکره (استراتوسفر)، نه بالاترین لایه!

۲ مانع ورود بخش عمده‌ای از تابش فرابنفش می‌شود. طبق شکل کتاب درسی، از هر پنج پرتو، یک پرتو عبور کرده است؛ یعنی جلوی ورود حدود ۸۰٪ پرتوها را گرفته است. (شکل روبه‌رو)



۴ یک پیوند اشتراکی را می‌شکند نه دو پیوند را!

تست و پاسخ ۸۵

اگر حجم گاز در ظرف A، دو برابر حجم گاز در ظرف B باشد، چه تعداد از مطالب زیر در مورد این دو گاز به یقین درست است؟

- **فشار گاز در ظرف B، دو برابر فشار گاز در ظرف A است.**
- **دمای گاز در ظرف A، برحسب کلوین، دو برابر دمای گاز در ظرف B است.**
- **شمار اتم‌ها در ظرف A، دو برابر شمار اتم‌ها در ظرف B است.**
- **حاصل کسر $\frac{P \times V}{T}$ برای گازهای A و B، با یکدیگر برابر است.**

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی همهٔ عبارت‌های داده‌شده، نادرست‌اند.

نکته حجم یک نمونه گاز به مقدار، دما و فشار آن وابسته است.

$$V \propto \frac{nT}{P} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} \times \frac{T_2}{T_1} \times \frac{P_1}{P_2}$$

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

- با توجه به این‌که از مقدار و دمای گازها در این دو ظرف بی‌اطلاعیم، نمی‌توانیم فشار آن‌ها را با هم مقایسه کنیم. فقط اگر تعداد مول گازها و دمای آن‌ها برابر باشد، می‌توان گفت حجم با فشار رابطهٔ وارونه دارد.
- مانند عبارت اول، بدون اطلاع از مقدار و فشار گازها، نمی‌توانیم دمای آن‌ها را با هم مقایسه کنیم.
- فرمول شیمیایی گازها مشخص نیست و نمی‌توان شمار اتم‌های آن‌ها را مقایسه کرد.
- حاصل کسر $\frac{PV}{nT}$ برای گازها با هم برابر است.

تست و پاسخ ۸۶

۱۰ گرم سدیم را در ۵۰ گرم آب می‌اندازیم. اگر هیدروژن تولیدشده با ۱۶۸۰ میلی‌لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP به طور کامل بسوزد، جرم مخلوط اولیه به چند گرم می‌رسد؟ (واکنش‌های موازنه‌نشده به صورت زیر است و $Na = 23 , O = 16 , H = 1 : g.mol^{-1}$)

$$Na(s) + H_2O(l) \rightarrow NaOH(aq) + H_2(g)$$

$$H_2(g) + O_2(g) \rightarrow H_2O(g)$$

۱) ۵۷/۲
۲) ۵۷/۹
۳) ۵۹/۷
۴) ۵۹/۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره کاهش جرم مخلوط اولیه ($10\,g\,Na + 50\,g\,H_2O = 60\,g$) به دلیل تولید گاز هیدروژن است؛ پس، کافیه که به کمک حجم O_2 در واکنش دوم، جرم H_2 را به دست بیاری و از جرم اولیهٔ مخلوط کم کنی!

پاسخ تشریحی ابتدا باید حساب کنیم که به ازای مصرف ۱۶۸۰ میلی‌لیتر گاز اکسیژن در واکنش دوم، چند گرم هیدروژن مصرف می‌شود:

$$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$$

$$1680\,mL\,O_2 \times \frac{1\,mol\,O_2}{22400\,mL\,O_2} \times \frac{2\,mol\,H_2}{1\,mol\,O_2} \times \frac{2\,g\,H_2}{1\,mol\,H_2} = \frac{\overset{3}{\cancel{168}} \times 4}{\underset{1}{\cancel{224}} \times 10} = 0/3\,g\,H_2$$

این مقدار گاز هیدروژن، در واکنش اول تولید شده و از ظرف واکنش خارج شده است:

جرم نهایی مخلوط = جرم اولیهٔ مخلوط − جرم گاز هیدروژن تولیدشده

$$= (10 + 50) - 0/3 = 59/7\,g$$

(10 ↓ Na ، 50 ↓ H_2O)

تست و پاسخ ۸۷

مواد موجود در کدام گزینه همگی ناقطبی هستند؟

۱) CH_4 ، NO ، CO_2
۲) SiH_4 ، NCl_3 ، SO_4^{2-}
۳) N_2 ، CCl_4 ، SO_3
۴) CS_2 ، NH_4^+ ، CH_2Cl_2

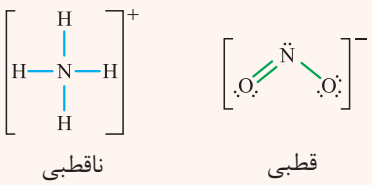
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه نحوهٔ تشخیص گونه‌های قطبی و ناقطبی

برای تشخیص سریع مولکول‌های دو تا پنج‌اتمی قطبی و ناقطبی، می‌توانید از نمودار زیر استفاده کنید.

- مولکول
  - مولکول‌های دواتمی
    - دارای دو اتم یکسان ← مولکول ناقطبی ← F_2 , O_2 , H_2 , N_2
    - دارای دو اتم غیریکسان ← مولکول قطبی ← NO , CO , HCl
  - مولکول‌های چنداتمی
    - به اتم مرکزی اتم‌های مختلفی متصل باشد. ← مولکول قطبی ← SCO , CH_2Cl_2 , HCN
    - اتم مرکزی دارای الکترون ناپیوندی باشد. ← مولکول قطبی ← SO_2 , NF_3 , $SOCl_2$, NH_3 , H_2O
    - هم اتم‌های متصل به اتم مرکزی یکسان باشند و هم اتم مرکزی الکترون ناپیوندی نداشته باشد. ← مولکول ناقطبی ← CO_2 , CH_4 , SO_3

توجه از این قواعد می‌توانید برای تعیین قطبی یا ناقطبی‌بودن یون‌های چنداتمی هم استفاده کنید؛ مثلاً NH_4^+، ناقطبی و NO_2^- قطبی است.


ناقطبی

قطبی

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) CH_4 و CO_2، ناقطبی و NO قطبی است.

۲) SO_4^{2-} و SiH_4 ناقطبی‌اند، اما NCl_3 که اتم مرکزی آن، جفت‌الکترون ناپیوندی دارد  ، قطبی است.

۳) هر سه مولکول N_2، CCl_4 و SO_3 ناقطبی‌اند.

۴) CS_2 و NH_4^+ ناقطبی‌اند، اما CH_2Cl_2 قطبی است؛ زیرا به اتم مرکزی آن، اتم‌های مختلفی متصل است.

تست و پاسخ ۸۸

چه تعداد از مقایسه‌های زیر، در ارتباط با قدرت نیروهای بین مولکولی ماده‌های داده‌شده، درست است؟

- $I_2 > H_2O > C_4H_{10}$
- اتانول > استون ← CH_3COCH_3 ، C_2H_5OH
- $I_2 > Br_2 > Cl_2 > F_2$
- $CO > N_2$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه مقایسهٔ نقطهٔ جوش و قدرت نیروهای بین مولکولی

۱) در مقایسهٔ نقطهٔ جوش و قدرت نیروهای بین مولکولی، ارجحیت با حالت فیزیکی است. اگر حالت فیزیکی دو ماده را بدانیم، خواهیم داشت:

نقطهٔ جوش: گاز < مایع < جامد

مثال: نقطهٔ جوش: $I_2(s) > Br_2(l) > Cl_2(g)$

۲) در مواد مولکولی با جرم مولی نزدیک به هم، ماده با مولکول‌های قطبی، نقطهٔ جوش بالاتری دارد:

نقطهٔ جوش: $\underset{\text{ناقطبی}}{HCl} > \underset{\text{قطبی}}{F_2}$

۳) در بین مولکول‌های ناقطبی، با افزایش جرم و حجم مولکول، نقطهٔ جوش افزایش می‌یابد.

مثال: نقطهٔ جوش: $I_2 > Br_2 > Cl_2 > F_2$

توجه هیدروکربن‌ها، ترکیب‌هایی هستند که از دو عنصر هیدروژن و کربن تشکیل شده‌اند. گشتاور دوقطبی اغلب هیدروکربن‌ها ناچیز و در حدود صفر است؛ یعنی اغلب هیدروکربن‌ها ناقطبی‌اند.

نقطهٔ جوش: $C_3H_8 > C_2H_6 > CH_4$

۴) با در نظر گرفتن مورد (۱)، به طور کلی مولکولی که می‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل دهد، نقطهٔ جوش بالاتری نسبت به مولکول‌های مشابه دارد.

مثال: نقطهٔ جوش: $H_2O > H_2S$ نقطهٔ جوش: $HF > HCl$

پاسخ تشریحی مقایسه‌های اول، سوم و چهارم درست هستند.

بررسی موارد:

- با توجه به حالت فیزیکی مواد، داریم:

نقطهٔ جوش و قدرت نیروهای بین مولکولی: $\underset{\text{گاز}}{C_4H_{10}} < \underset{\text{مایع}}{H_2O} < \underset{\text{جامد}}{I_2}$ ✓

- اتانول (C_2H_5OH) به دلیل داشتن پیوند $O-H$ و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی، نیروهای بین مولکولی قوی‌تری نسبت به استون $(CH_3-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-CH_3)$ دارد. ✗

- مولکول‌های دواتمی حاصل از عنصرهای گروه ۱۷ (X_2) ناقطبی‌اند و با افزایش جرم مولی، قدرت نیروهای بین مولکولی آن‌ها نیز افزایش می‌یابد. ✓

قدرت نیروهای بین مولکولی: $F_2 < Cl_2 < Br_2 < I_2$ (افزایش جرم مولی)

- CO مولکولی قطبی و N_2، مولکولی ناقطبی است. با توجه به برابربودن جرم مولی CO و N_2، می‌توان گفت که نیروهای بین مولکولی CO که قطبی است، قوی‌تر از N_2 ناقطبی خواهد بود. ✓

تست و پاسخ ۸۹

دلیل کدام‌یک از اتفاقات زیر را نمی‌توان با پیوند هیدروژنی مرتبط دانست؟

۱) فاسدشدن گوشتی که یخ آن باز شده باشد، در اثر قراردادن مجدد آن در فریزر

۲) بیشتربودن نقطهٔ جوش اتانول نسبت به استون

۳) منفجرشدن نوشابهٔ شیشه‌ای در اثر قراردادن آن در فریزر

۴) توانایی آب برای حل‌کردن اغلب مواد

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی آب علاوه بر موادی مانند متانول و اتانول که به دلیل تشکیل پیوند هیدروژنی در آن حل می‌شوند، مواد دیگری را نیز در خود حل می‌کند که توانایی تشکیل پیوند هیدورژنی با آب را ندارند؛ مثلاً ترکیب‌های یونی محلول در آب، با برقراری جاذبهٔ یون ـ دوقطبی در آب حل می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با قراردادن مجدد گوشت در فریزر، آب یخ می‌زند و به دلیل تشکیل پیوندهای هیدروژنی و افزایش حجم، دیوارهٔ یاخته‌ها در بافت گوشت، تخریب می‌شود.

۲) دلیل بالاتربودن نقطهٔ جوش اتانول (C_2H_5OH) نسبت به استون ($CH_3-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-CH_3$)، وجود پیوند $O-H$ در اتانول و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی مولکول‌های آن است.

۳) مانند ۱)، افزایش حجم آب هنگام یخ‌زدن (به دلیل توانایی تشکیل پیوندهای هیدروژنی)، سبب فشار به دیوارهٔ شیشه‌ای نوشابه و شکستن آن می‌شود.

تست و پاسخ ۹۰

اگر مولکول‌های حلال را با A و ذره‌های حل‌شونده را با B نمایش دهیم، در کدام مورد زیر، رابطهٔ $(A...B) > \frac{(A...A)+(B...B)}{2}$ برقرار نیست؟

۱) استون در اتانول ۲) باریم کلرید در آب ۳) ید در بنزین ۴) باریم سولفات در هگزان

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته به طور کلی، فرایند انحلال هنگامی منجر به تشکیل محلول می‌شود که میزان جاذبهٔ بین حل‌شونده و حلال در محلول، بیشتر از میانگین جاذبه‌ها در حلال خالص و حل‌شوندهٔ خالص باشد:

میانگین جاذبه‌ها در حلال خالص و حل‌شوندهٔ خالص < جاذبه‌های حل‌شونده با حلال در محلول ⟵ شرط تشکیل محلول

اگر مولکول‌های حلال را با A و ذره‌های حل‌شونده را با B نمایش دهیم، می‌توان نیروهای جاذبه در حالت خالص آن‌ها را با $A...A$ و $B...B$ نشان داد. هم‌چنین نیروهای جاذبهٔ میان ذره‌های حل‌شونده و حلال در مخلوط را می‌توان با $A...B$ نمایش داد:

شرط تشکیل محلول: $(A...B) > \frac{(A...A)+(B...B)}{2}$ یا $(A...A)+(B...B) < 2(A...B)$

واضحه که اگر $(A...B) < \frac{(A...A)+(B...B)}{2}$ باشد، حل‌شوندهٔ B در حلال A حل نشده و محلول تشکیل نمی‌شود.

پاسخ تشریحی برقرارنبودن رابطهٔ $(A...B) > \frac{(A...A)+(B...B)}{2}$، به معنی این است که A در B حل نمی‌شود. باریم سولفات ($BaSO_4$) یک ترکیب یونی است و در هگزان (C_6H_{14}) که ناقطبی است، حل نمی‌شود.*(حتی تو آب هم نامحلوله!)*.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) استون ($CH_3-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-CH_3$) و اتانول ($CH_3-CH_2-OH$)، هر دو دارای مولکول‌های قطبی بوده و به خوبی در یکدیگر حل می‌شوند.

۲) باریم کلرید یک ترکیب یونی است که می‌تواند با برقراری جاذبه‌های یون ـ دوقطبی در آب حل شود.

نکته برخی از ترکیب‌های یونی در آب رسوب تشکیل داده و نامحلول در آب محسوب می‌شوند. مانند:

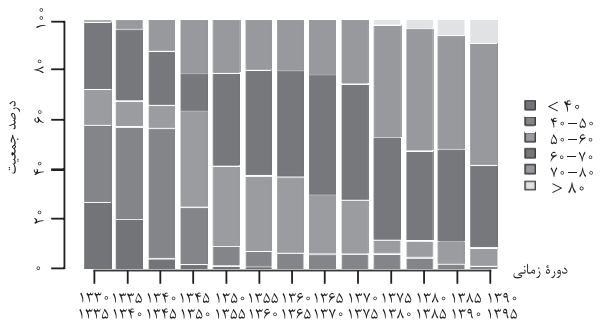
$Mg(OH)_2$، $AgCl$، $BaSO_4$، $Ca_3(PO_4)_2$، $Fe(OH)_2$، $Fe(OH)_3$، Fe_2O_3، $CaCO_3$، $Ca(RCOO)_2$، $Mg(RCOO)_2$

۳) ید (I_2) و بنزین (C_8H_{18})، هر دو دارای مولکول‌های ناقطبی هستند و از آن‌جا که «شبیه در شبیه حل می‌شود»، این دو می‌توانند با یکدیگر محلول تشکیل دهند.

شیمی دوازدهم

تست و پاسخ ۹۱

نمودار مقابل توزیع جمعیت جهان را براساس امید به زندگی آن‌ها در دوره‌های زمانی گوناگون نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار، کدام مطلب نادرست است؟



۱) از سال ۱۳۶۰ تا ۱۳۸۰، درصد جمعیتی که امید به زندگی ۴۰ تا ۵۰ سال داشته‌اند، به تقریب ثابت بوده است.

۲) اگر جمعیت جهان در سال ۱۳۹۳، ۸ میلیارد نفر بوده باشد، حدود ۴ میلیارد نفر از آن‌ها، امید به زندگی بین ۷۰ تا ۸۰ سال داشته‌اند.

۳) از سال ۱۳۶۰، درصد جمعیتی که امید به زندگی زیر ۴۰ سال دارند، به صفر رسیده است و از حدود ۱۰ سال بعد، امید به زندگی بالای ۸۰ سال در جمعیت ظاهر شده است.

۴) با گذشت زمان، میزان امید به زندگی در سطح جهان افزایش یافته است؛ چون استفاده از صابون و توجه به نظافت و بهداشت در جوامع رو به گسترش است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه ●● شاخص امید به زندگی

- شاخصی است که نشان می‌دهد با توجه به خطراتی که انسان‌ها در طول زندگی با آن مواجه هستند، به طور میانگین، چند سال در یک منطقهٔ معین و یا در کل جهان زندگی (عمر) می‌کنند.
- با گذشت زمان، به طور کلی شاخص امید به زندگی در جهان افزایش یافته است.
- امروزه، امید به زندگی بیشتر مردم دنیا در حدود ۸۰ ـ ۷۰ سال است.
- امید به زندگی شاخصی است که در کشورهای گوناگون و حتی در شهرهای یک کشور نیز با هم تفاوت دارد، زیرا این شاخص به عوامل گوناگونی بستگی دارد.
- این شاخص به عوامل مختلفی مثل سطح آگاهی مردم، سلامت جامعه، سلامت محیط زیست، نوع تغذیه، توجه به نظافت و بهداشت و ... بستگی دارد.
- میزان امید به زندگی در مناطق توسعه‌یافته و برخوردار در مقایسه با مناطق کم‌برخوردار، بیشتر است.
- **مقایسهٔ امید به زندگی در یک سال معین:** نواحی توسعه‌یافته (برخوردار) > میانگین جهانی > نواحی کم‌تر توسعه‌یافته (کم‌برخوردار)
- شیب نمودار امید به زندگی نواحی کم‌برخوردار از شیب نمودار نواحی برخوردار، بیشتر است و این یعنی در یک بازهٔ زمانی معین، رشد امید به زندگی در نواحی کم‌برخوردار بیشتر از رشد امید به زندگی در نواحی برخوردار است.

پاسخ تشریحی با توجه به نمودار، از سال ۱۳۶۰ و بعد از آن، درصد جمعیتی که امید به زندگی زیر ۴۰ سال دارند، برابر صفر است، اما تازه از سال ۱۳۷۵ (یعنی حدود ۱۵ سال بعد)، امید به زندگی بالای ۸۰ سال در جمعیت ظاهر شده است، نه ۱۰ سال بعد!

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ با توجه به نمودار، درصد مردمی که امید به زندگی آن‌ها بین ۴۰ تا ۵۰ سال است، از سال ۱۳۶۰ تا ۱۳۸۰ تقریباً ثابت است.

۲ با توجه به نمودار، در دورهٔ زمانی ۱۳۹۵ ـ ۱۳۹۰، حدود نیمی از درصد جمعیت جهان، امید به زندگی بین ۷۰ تا ۸۰ سال داشته‌اند؛ به عبارت دیگر اگر جمعیت کل جهان را در سال ۱۳۹۳، ۸ میلیارد در نظر بگیریم، تقریباً ۴ میلیارد نفر یا نیمی از این جمعیت، امید به زندگی ۸۰ ـ ۷۰ سال داشته‌اند.

۴ با گذشت زمان و نیز با گسترش استفاده از صابون و توجه به نظافت و بهداشت، آلودگی‌ها و عوامل بیماری‌زا در محیط کاهش و با افزایش سطح تندرستی و بهداشت فردی و همگانی، شاخص امید به زندگی در جهان افزایش یافته است.

تست و پاسخ ۹۲

CH_2OHCH_2OH

$CO(NH_2)_2$

چه تعداد از عبارت‌های زیر در رابطه با دو مادهٔ اتیلن‌گلیکول و اوره، درست است؟

- **این دو ترکیب به خوبی در یکدیگر حل می‌شوند.**
- **مولکول‌های اتیلن‌گلیکول و اوره می‌توانند با یکدیگر پیوند هیدروژنی تشکیل دهند.**
- **نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول اوره، برابر همین نسبت در مولکول اتیلن‌گلیکول است.**
- **شمار گروه‌های عاملی در مولکول اوره و اتیلن‌گلیکول با یکدیگر برابر است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

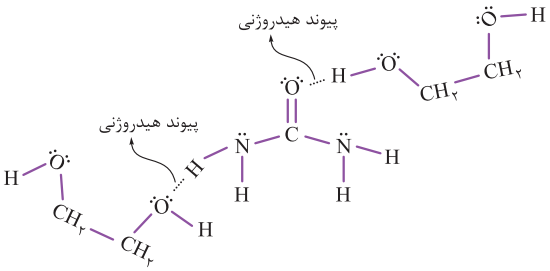
پاسخ تشریحی عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

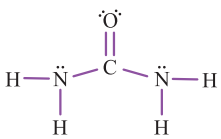
عبارت اول: اوره $(CO(NH_2)_2)$ و اتیلن‌گلیکول (CH_2OHCH_2OH) به خوبی در یکدیگر حل می‌شوند؛ زیرا هر دو قطبی هستند و هم‌چنین هر دو توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارند.

نکته توجه داشته باشید که مواد دارای پیوند هیدروژنی در حلال‌های دارای پیوند هیدروژنی به خوبی حل می‌شوند.

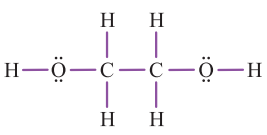
عبارت دوم: *گفتیم* که هر دو مولکول اوره و اتیلن‌گلیکول، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارند؛ زیرا در ساختار خود به ترتیب دارای پیوندهای $N-H$ و $O-H$ هستند؛ بنابراین می‌توانند با هم پیوند هیدروژنی تشکیل دهند. نمایش تعدادی از پیوندهای هیدروژنی بین اوره و اتیلن‌گلیکول به صورت مقابل است:



عبارت سوم: در ساختار مولکول اوره، ۸ جفت الکترون پیوندی و ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد که نسبت اولی به دومی برابر ۲ است، اما در ساختار مولکول اتیلن‌گلیکول، ۹ جفت الکترون پیوندی و ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد که نسبت اولی به دومی برابر ۲/۲۵ است:



اوره



اتیلن‌گلیکول

عبارت چهارم: در ساختار مولکول اوره، دو گروه عاملی آمیدی $(-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-N-)$ و در ساختار مولکول اتیلن‌گلیکول، دو گروه عاملی هیدروکسیل $(-OH)$ وجود دارد.

تست و پاسخ ۹۳

کدام مطلب نادرست است؟

۱) در فرایند انحلال، اگر ذره‌های سازندهٔ حل‌شونده با مولکول‌های حلال جاذبهٔ قوی برقرار نکنند، حل‌شونده در حلال پخش می‌شود.

۲) حالت فیزیکی آلاینده، تأثیر بسزایی در انتخاب یک پاک‌کنندهٔ مناسب دارد.

$C_{57}H_{104}O_6$

C_6H_{14}

۳) حلالیت روغن زیتون در اوره به مراتب کم‌تر از حلالیت آن در هگزان است.

$CO(NH_2)_2$

۴) سدیم کلرید با تشکیل جاذبه‌های یون ـ دوقطبی در حلال قطبی آب حل شده، ولی نفره کلرید در حلال ناقطبی هگزان حل نمی‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی در فرایند انحلال، اگر ذره‌های سازندهٔ حل‌شونده با مولکول‌های حلال جاذبهٔ مناسبی برقرار کنند، حل‌شونده در حلال حل می‌شود. در غیر این‌صورت، ذره‌های حل‌شونده کنار هم باقی می‌مانند و در حلال **پخش نمی‌شوند**.

نکته *یادتون که نرفته؟!* به طور کلی فرایند انحلال هنگامی منجر به تشکیل محلول می‌شود که میزان جاذبهٔ بین ذرات حل‌شونده و حلال در محلول، بیشتر از میانگین جاذبه‌ها در حلال خالص و حل‌شوندهٔ خالص باشد:

میانگین جاذبه‌ها در حلال خالص و حل‌شوندهٔ خالص < جاذبه‌های حل‌شونده با حلال در محلول ⟵ شرط تشکیل محلول

اگر مولکول‌های حلال را با A و ذره‌های حل‌شونده را با B نشان دهیم، برای محلول B در A، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$A...B > \frac{(A...A)+(B...B)}{۲}$$

(... نشان‌دهندهٔ جاذبهٔ بین ذرات است.)

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ با توجه به این‌که حالت فیزیکی یک ماده ناشی از ساختار، رفتار و نیروی بین مولکولی آن ماده است، بنابراین برای زدودن آلاینده‌ها، بررسی ساختار و رفتار ذره‌های سازندهٔ آلاینده‌ها و مواد شوینده و نیز نیروی بین مولکولی آن‌ها ضروری است؛ مثلاً برای از بین بردن لکهٔ شربت (مایع) بر روی لباس، کافی است از آب (مایع) استفاده شود، اما برای زدودن گل و لای (خاک رس: جامد) موجود در آب، می‌توان از کاغذ صافی (جامد) یا دستگاه تصفیهٔ آب استفاده کرد.

۳ روغن زیتون ($C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$) یک مولکول ناقطبی می‌باشد. این مولکول در اوره ($CO(NH_۲)_۲$) که یک مولکول قطبی است، حل نمی‌شود، اما در حلال‌های ناقطبی مانند هگزان ($C_۶H_{۱۴}$) به خوبی حل می‌شود.

۴ اغلب ترکیبات یونی در آب حل می‌شوند. *یکی از اون‌ها* سدیم کلرید ($NaCl$) است که به محض ورود به آب، یون‌های تفکیک‌شده توسط مولکول‌های آب، آبپوشیده شده و جاذبهٔ یون ـ دوقطبی تشکیل می‌دهند؛ اما توجه داشته باشید که نقره کلرید ($AgCl$) با وجود این‌که یک ترکیب یونی است، در آب و هگزان که به ترتیب حلال‌های قطبی و ناقطبی هستند، نامحلول است.

تست و پاسخ ۹۴

اگر یک اسید چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، دارای ۱۴ گروه $CH_۲$ باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر در مورد آن، نادرست است؟

$(O=۱۶, C=۱۲, H=۱: g.mol^{-۱})$

الف) از واکنش آن با پتاسیم هیدروکسید، یک پاک‌کننده با حالت فیزیکی مایع تولید می‌شود.

ب) ۱۲/۵ درصد از جرم آن را عنصر اکسیژن تشکیل می‌دهد.

پ) بخش ناقطبی آن بر بخش قطبی غلبه داشته و به همین دلیل به طور خودبه‌خودی می‌تواند در آب پخش شود.

ت) محصول واکنش این ترکیب با سدیم هیدروکسید، هم در آب و هم در چربی حل می‌شود.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ پ ۳) ب ـ ت ۴) فقط «پ»

پاسخ: گزینهٔ ۴

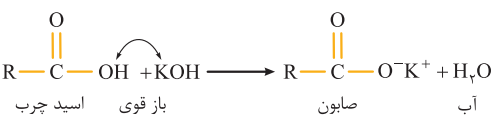
پاسخ تشریحی فقط عبارت «پ» نادرست است.

اگر اسید چرب ($RCOOH$) مورد نظر دارای ۱۴ گروه $CH_۲$ باشد، فرمول مولکولی آن به صورت $CH_۳(CH_۲)_{۱۴}COOH$ یا $C_{۱۶}H_{۳۲}O_۲$ خواهد بود.

بررسی عبارت‌ها:

الف) از واکنش کامل هر مول اسید چرب با یک مول باز قوی پتاسیم هیدروکسید (KOH)، یک مول صابون مایع و یک مول آب به دست می‌آید:

۱ مول اسید چرب + KOH ۱ مول باز قوی ⟶ ۱ مول صابون مایع + ۱ مول آب



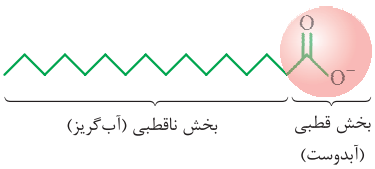
ب) درصد جرمی اکسیژن در این اسید چرب برابر است با:

$C_{16}H_{32}O_2$ جرم مولی $= 16(12) + 32 + 2(16) = 256 g.mol^{-1}$

$C_{16}H_{32}O_2$ درصد جرمی O در $= \frac{32}{256} \times 100 = \%12/5$

پ) اسیدهای چرب ناقطبی‌اند و در آب که یک حلال قطبی است، **پخش نمی‌شوند**. توجه کنید که این اسیدها هم دارای بخش قطبی (گروه کربوکسیل) و هم دارای بخش ناقطبی (زنجیر هیدروکربنی) هستند، اما به دلیل غلبهٔ بخش ناقطبی بر بخش قطبی، مولکول در مجموع ناقطبی به حساب می‌آید.

ت) محصول واکنش اسیدهای چرب با سدیم هیدروکسید، صابون است که هم در چربی و هم در آب حل می‌شود؛ به طوری که بخش ناقطبی صابون با چربی جاذبه برقرار می‌کند و بخش قطبی آن که دارای بار منفی است، با مولکول‌های آب جاذبهٔ یون ـ دوقطبی برقرار می‌کند.



تست و پاسخ ۹۵

اگر شمار اتم‌های کربن در یک استر سه‌عاملی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، ۱/۵ برابر شمار اتم‌های هیدروژن در یک اسید چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده بوده و جرم اتم‌های کربن در هر مول از این اسید چرب ۱۱۲ گرم بیشتر از جرم اتم‌های هیدروژن در هر مول از این استر سه‌عاملی باشد، استر مورد نظر را از واکنش یک الکل سه‌عاملی با کدام‌یک از اسیدهای زیر می‌توان تهیه کرد؟ $(C = 12 , H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) $C_{15}H_{30}O_2$ ۲) $C_{16}H_{32}O_2$ ۳) $C_{17}H_{34}O_2$ ۴) $C_{18}H_{36}O_2$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی ابتدا باید فرمول عمومی استر سه‌عاملی با زنجیر سیرشده و اسید چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده را بنویسیم. با توجه به این‌که اسیدهای چرب سازندهٔ استر مورد نظر یکسان است، برای پیداکردن فرمول عمومی آن، می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$C_3H_5(RCOO)_3 \xrightarrow{R:C_nH_{2n+1}\ (\text{الکیل})} C_3H_5(C_nH_{2n+1}COO)_3$

فرمول عمومی استرهای سه‌عاملی با اسیدهای چرب‌سازندهٔ یکسان:

$\Rightarrow C_{3n+6}H_{6n+8}O_6 \xrightarrow{3n+6=x} 6n+8 = 6(\frac{x-6}{3}) + 8 = 2x - 12 + 8 = 2x - 4$

فرمول عمومی استرهای سیرشده $= C_xH_{2x-4}O_6$

فرمول عمومی اسیدهای چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده $= C_yH_{2y}O_2$

با توجه به این‌که شمار اتم‌های کربن در استر مورد نظر، ۱/۵ برابر شمار اتم‌های هیدروژن در اسید چرب فرض شده است، خواهیم داشت:

$x = 1/5(2y) \Rightarrow x = 3y$

هم‌چنین جرم اتم‌های کربن در هر مول از اسید چرب مورد نظر، ۱۱۲ گرم بیشتر از جرم اتم‌های هیدروژن در هر مول از استر است:

$12y = (2x - 4) + 112 \xrightarrow{x=3y} 12y = 6y + 108 \Rightarrow 6y = 108 \Rightarrow y = 18$

$x = 3y \Rightarrow x = 3(18) = 54$

بنابراین فرمول مولکولی استر مورد نظر به صورت $C_{54}H_{104}O_6$ است.

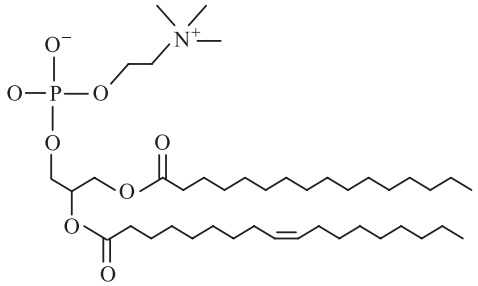
نکته اگر اسیدهای چرب سازندهٔ یک استر بلندزنجیر، یکسان باشند، برای پیداکردن فرمول این اسیدهای چرب می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

فرمول اسید چرب سازندهٔ استر سنگین $= \frac{\text{فرمول مولکولی استر سنگین} - C_3H_2}{3}$

در نتیجه برای تعیین فرمول اسید چرب سازندهٔ استر مورد نظر، می‌توان به روش زیر عمل کرد:

فرمول اسید چرب $= \frac{\text{فرمول استر سنگین} - C_3H_2}{3} = \frac{C_{54}H_{104}O_6 - C_3H_2}{3} = C_{17}H_{34}O_2$

تست و پاسخ ۹۶



شکل مقابل ساختار فسفاتیدیل کولین را نشان می‌دهد که به عنوان فسفولیپید غالب در غشای بیشتر سلول‌های پستانداران وجود دارد. با توجه به آن، کدام مطلب نادرست است؟

۱) زنجیرهای هیدروکربنی، بخش آب‌گریز و بخش‌های شامل عنصرهای N، O و P، بخش‌های آبدوست این ساختار را تشکیل می‌دهند.

۲) نیروی بین مولکولی غالب در آن، همانند اسید چرب، از نوع وان‌درواسی است.

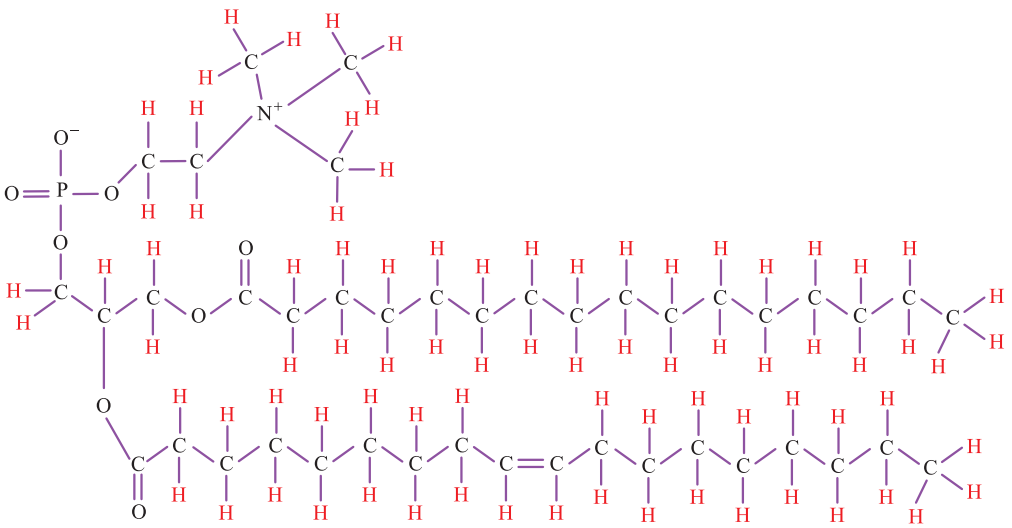
۳) فرمول شیمیایی این ترکیب به صورت $C_{۴۲}H_{۸۱}NO_۸P$ است.

۴) الگوی کلی این فسفولیپیدها را می‌توان به صورت  نمایش داد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی این ترکیب در ساختار خود دارای ۴۲ اتم کربن (C)، یک اتم نیتروژن (N)، یک اتم فسفر (P) و ۸ اتم اکسیژن (O) است.

برای پیداکردن تعداد هیدروژن‌ها *بهتره از روی ساختار بشماریم:*



این ترکیب دارای ۸۲ اتم هیدروژن و در نتیجه فرمول مولکولی آن به صورت $C_{۴۲}H_{۸۲}NO_۸P$ است.

حواستون باشه که اگه از فرمول زیر استفاده می‌کردین، ۸۰ اتم هیدروژن به دست می‌آمد! زیرا در این ترکیب، اتم‌های N و P حالت عادی خود که تنها سه پیوند اشتراکی تشکیل می‌دهند را نداشته و *مجبوریم* که از روی ساختار، *دونه‌دونه* اتم‌های هیدروژن را بشماریم:

$$\text{تعداد اتم‌های هیدروژن در ترکیب آلی با } n \text{ اتم کربن} = (\text{تعداد اتم‌های گروه } ۱۵\times۱) + (\text{تعداد پیوندهای سه‌گانه}\times۴) - (\text{تعداد پیوندهای دوگانه و حلقه}\times۲) - (۲n+۲)$$

$$\text{هیدروژن در ساختار فسفاتیدیل کولین} = [(۲\times۴۲)+۲] - \underbrace{(۲\times۴)}_{\text{پیوندهای دوگانه}} + \underbrace{(۱\times۲)}_{\text{اتم N و P}} = ۸۰$$

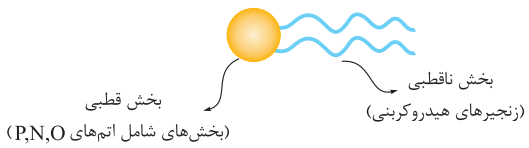
اما به هر حال، چه از روی ساختار بشماریم و چه از فرمول استفاده کنیم، در هر دو صورت با تعداد اتم‌های هیدروژن موجود در ۳ متفاوت به دست می‌آید و این گزینه نادرست است. ☺

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ زنجیرهای هیدروکربنی ترکیب داده‌شده، ناقطبی بوده و آب‌گریز (چربی‌دوست) محسوب می‌شوند و بخش‌هایی که دارای اتم‌های N، O و P هستند، به دلیل تمایل به جذب جفت‌الکترون پیوندی بیشتر، بخش قطبی مولکول به حساب می‌آیند.

۲ با توجه به این‌که بخش بزرگی از مولکول را بخش ناقطبی آن تشکیل داده است؛ بنابراین این مولکول همانند اسیدهای چرب ناقطبی بوده و نیروی بین مولکولی غالب در آن از نوع وان‌درووالسی است.

۴ ترکیب مورد نظر دارای دو زنجیر هیدروکربنی (ناقطبی) و یک سر قطبی می‌باشد؛ بنابراین الگوی آن را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:



تست و پاسخ ۹۷

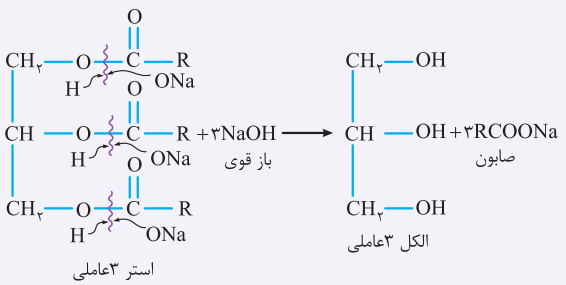
اگر ۸ گرم سدیم هیدروکسید ۹۰ درصد خالص با ۴۸/۳۶ گرم از یک استر سه‌عاملی با زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده و یکسان، به طور کامل واکنش دهد، فرمول صابون تولیدشده کدام است؟ $(Na=۲۳, O=۱۶, C=۱۲, H=۱: g.mol^{-۱})$

۱) $C_{۱۵}H_{۳۱}COONa$ ۲) $C_{۱۶}H_{۳۳}COONa$ ۳) $C_{۱۷}H_{۳۵}COONa$ ۴) $C_{۱۸}H_{۳۷}COONa$

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته از واکنش کامل هر مول استر سه‌عاملی با سه مول باز قوی سدیم هیدروکسید $(NaOH)$، سه مول صابون جامد و یک مول الکل سه‌عاملی به دست می‌آید: ۱ مول الکل سه‌عاملی + ۳ مول صابون ← ۳ مول باز قوی + ۱ مول استر سه‌عاملی

$$C_۳H_۵(RCOO)_۳ + ۳NaOH \rightarrow ۳RCOONa + C_۳H_۵(OH)_۳$$



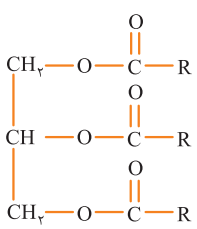
پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ واکنش انجام‌شده را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$C_۳H_۵(RCOO)_۳ + ۳NaOH \rightarrow ۳RCOONa + C_۳H_۵(OH)_۳$$

گام دوم: به کمک جرم سدیم هیدروکسید $(NaOH)$ و جرم استر، جرم مولی استر را حساب می‌کنیم:

$$\underbrace{\frac{\text{درصد خلوص}}{۱۰۰} \times \text{جرم ناخالص}}_{NaOH} = \underbrace{\text{جرم}}_{\text{استر}} \Rightarrow \frac{\frac{۸ \times \frac{۹۰}{۱۰۰}}{۳ \times ۴۰}}{} = \frac{۴۸/۳۶}{۱ \times M} \Rightarrow M = \frac{۴۸۳۶}{۶} = ۸۰۶\ g.mol^{-۱}$$ (جرم مولی استر)

گام سوم: به کمک جرم مولی استر، جرم مولی گروه R را به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow \text{جرم مولی} = ۶(۱۲) + ۵(۱) + ۶(۱۶) + ۳R = ۱۷۳ + ۳R$$

$$۱۷۳ + ۳R = ۸۰۶ \Rightarrow ۳R = ۶۳۳ \Rightarrow R = ۲۱۱ g.mol^{-۱}$$

گام چهارم: با توجه به این‌که R، گروه آلکیل است، شمار اتم‌های کربن R را محاسبه می‌کنیم:

C_nH_{2n+1} جرم مولی $= 12n + 2n + 1 = 14n + 1$

$14n + 1 = 211 \Rightarrow 14n = 210 \Rightarrow n = 15$

بنابراین زنجیر هیدروکربنی (R) استر بلندزنجیر، شامل ۱۵ اتم کربن است؛ در نتیجه فرمول صابون ایجادشده $(C_nH_{(2n+1)}COONa)$، به صورت $C_{15}H_{31}COONa$ خواهد بود.

تست و پاسخ ۹۸

کدام مطلب نادرست است؟

۱) اگر مقداری صابون را به مخلوط آب و روغن اضافه کنیم و آن را به هم بزنیم، یک مخلوط پایدار ایجاد می‌شود که به ظاهر همگن است.

۲) رنگ پوششی، نمونه‌ای از یک کلوئید است که نور را از خود عبور می‌دهد.

۳) ذره‌های سازندهٔ کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها، به ترتیب توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت و ذره‌های ریز ماده هستند.

۴) در بین محلول‌ها، کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها، ویژگی ته‌نشین‌شدن تنها مربوط به سوسپانسیون‌ها است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه ●● ویژگی‌های برخی از انواع مخلوط‌ها

نوع مخلوط / ویژگی	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کنند	نور را پخش می‌کنند	نور را عبور می‌دهند
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است / ته‌نشین می‌شود	پایدار است / ته نشین نمی‌شود	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریز ماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌ها
نمونه‌های مهم	شربت معده، دوغ، شربت خاکشیر و آب گل‌آلود	رنگ‌های پوششی، چسب‌ها، شیر، ژله، سس مایونز، مخلوط آب، صابون و روغن	محلول سدیم کلرید (نمک) در آب، آب دریا، هوا، آب‌قند، ید در هگزان

پاسخ تشریحی ذره‌های سازندهٔ کلوئیدها، توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت‌اند و این ذرات آن‌قدر بزرگ هستند که باعث پخش‌شدن نور (نه عبور آن!) می‌شوند.

بنابراین هنگام عبور نور از یک کلوئید مثل رنگ پوششی، مسیر عبور نور قابل تشخیص است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مخلوط صابون، روغن و آب، کلوئید است. کلوئیدها ناهمگن هستند، اما ظاهری همگن دارند.

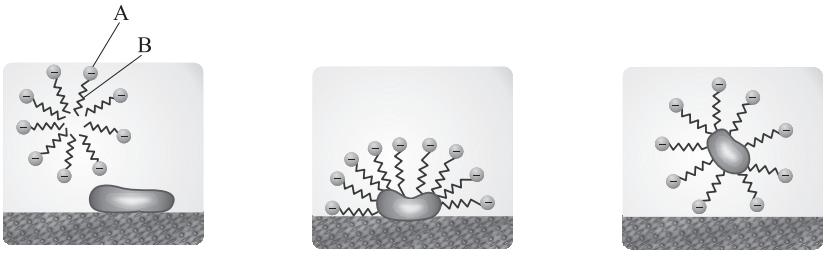


۳) ذره‌های سازندهٔ کلوئیدها، توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت و ذره‌های سازندهٔ سوسپانسیون‌ها، ذره‌های ریز ماده *(ذره‌هایی که با چشم دیده می‌شن!)* هستند.

۴) در بین این سه نوع مخلوط، تنها سوسپانسیون‌ها مخلوط‌هایی ناپایدار هستند و ذره‌های معلق موجود در آن‌ها به مرور زمان ته‌نشین می‌شوند.

تست و پاسخ ۹۹

شکل‌های زیر، مراحل پاک‌شدن یک لکهٔ روغن از روی پارچه با صابون را نشان می‌دهند. با توجه به آن، چه تعداد از مطالب زیر درست است؟



(I) (II) (III)

- **بخش‌های A و B به ترتیب بخش‌های آبدوست و چربی‌دوست را در مولکول صابون نشان می‌دهند.**
- **مولکول‌های صابون پس از برقراری جاذبه با مولکول‌های روغن، به کمک بخش آبدوست خود در آب حل می‌شوند.**
- **مولکول‌های صابون مانند پلی بین مولکول‌های آب و روغن قرار گرفته و ذره‌های روغن را در آب پخش می‌کنند.**
- **شکل‌های (I) و (III)، به ترتیب حل‌شدن صابون در آب به کمک بخش قطبی آن و پخش‌شدن روغن در آب به کمک صابون را نشان می‌دهند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

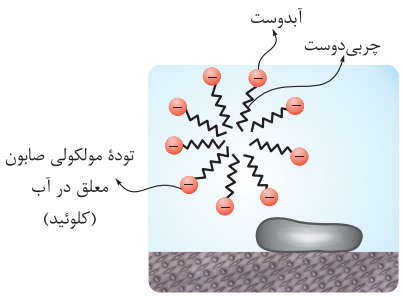
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی همهٔ عبارت‌های داده‌شده، درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول:

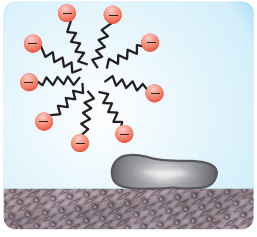
هنگامی که صابون وارد آب می‌شود، به کمک سر آبدوست خود در آن حل می‌شود. به محض حل‌شدن صابون در آب، بخش کاتیونی (مثل Na^+) از بخش آنیونی آن ($R-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O^-$) جدا شده و مولکول‌های صابون یک تودهٔ مولکولی (کلوئید) در آب تشکیل می‌دهند:



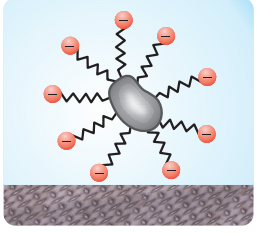
عبارت‌های دوم و سوم:

بخش آب‌گریز یا ناقطبی جزء آنیونی صابون، با مولکول‌های چربی جاذبهٔ وان‌دروالسی برقرار می‌کند و بخش قطبی یا آبدوست آن هم با مولکول‌های آب، تشکیل جاذبه می‌دهد (یون ـ دوقطبی)، گویی مولکول‌های صابون همانند پلی بین مولکول‌های آب و چربی قرار می‌گیرند. در نهایت لکهٔ چربی از پارچه جدا شده و در آب پخش می‌شود.

عبارت چهارم: شکل (I)، مربوط به لحظهٔ ورود صابون به آب و تشکیل کلوئید می‌شود و شکل (II)، مربوط به مرحلهٔ آخر پاک‌شدن لکهٔ چربی از روی پارچه و پخش‌شدن آن در آب توسط مولکول‌های صابون است:



ورود صابون به آب



زدودن لکهٔ چربی از سطح پارچه

تست و پاسخ ۱۰۰

مقدار کافی صابون جامد با فرمول $C_{۱۷}H_{۳۵}COONa$ را در ۱۵۰ میلی‌لیتر از محلول کلسیم کلرید با غلظت ۰/۲ مولار ریخته و هم می‌زنیم. اگر بعد از ۳۰ دقیقه، ۴/۰۴ گرم رسوب جدا شود، با فرض ثابت‌بودن سرعت تولید و جداشدن رسوب در طول انجام واکنش، چند دقیقهٔ دیگر زمان لازم است تا همهٔ کلسیم موجود در محلول به صورت کامل رسوب کند؟ $(Ca = ۴۰ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۸۵ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا معادلهٔ واکنش انجام‌شده را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$۲C_{۱۷}H_{۳۵}COONa(aq) + CaCl_۲(aq) \rightarrow (C_{۱۷}H_{۳۵}COO)_۲Ca(s) + ۲NaCl(aq)$$

گام دوم: مول کلسیم کلرید موجود در محلول را حساب می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولار: مول } CaCl_۲ = \frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{حجم محلول}} \Rightarrow \text{مول } CaCl_۲ = ۰/۲ \times ۰/۱۵ = ۰/۰۳ \text{ mol}$$

اگر همهٔ کلسیم موجود در کلسیم کلرید اولیه، مصرف شود و رسوب تولید کند، خواهیم داشت:

مقدار رسوب تولیدی با مصرف همهٔ کلسیم موجود در محلول $CaCl_۲$ اولیه

$$= ۰/۰۳ \text{ mol} CaCl_۲ \times \frac{۱ \text{ mol } Ca^{۲+}}{۱ \text{ mol } CaCl_۲} \times \frac{۱ \text{ mol } (C_{۱۷}H_{۳۵}COO)_۲Ca}{۱ \text{ mol } Ca^{۲+}} \times \frac{۶۰۶ g (C_{۱۷}H_{۳۵}COO)_۲Ca}{۱ \text{ mol} (C_{۱۷}H_{۳۵}COO)_۲Ca} = ۱۸/۱۸ \text{ g}$$

از ۱۸/۱۸ گرم رسوب تولیدی در پایان واکنش، ۴/۰۴ گرم آن طی ۳۰ دقیقهٔ اول تولید شده است؛ بنابراین زمان لازم برای جداشدن $۱۸/۱۸ - ۴/۰۴ = ۱۴/۱۴$ گرم رسوب باقی‌مانده با توجه به ثابت‌بودن سرعت تولید و جداشدن رسوب، برابر خواهد بود با:

$$۱۴/۱۴ \text{ g رسوب} \times \frac{۳۰ \text{ دقیقه}}{۴/۰۴ \text{ g رسوب}} = ۱۰۵ \text{ دقیقه}$$

تست و پاسخ ۱۰۱



چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ مدل فضاپرکن نشان داده شده، درست است؟

- **فرمول شیمیایی این ترکیب را می‌توان به صورت $C_{۱۸}H_{۲۹}SO_۳Na$ نمایش داد.**
- **این ماده را می‌توان از بنزن و دیگر مواد اولیه در صنایع پتروشیمی، طی واکنش‌های پیچیده تولید کرد.**
- **این ترکیب می‌تواند در محیط‌های گوناگون مانند سفرهای دریایی و صنایع وابسته به آب شور، پاسخ‌گوی نیاز انسان باشد.**
- **یک نوع پاک‌کنندهٔ صابونی بوده که بخش آنیونی آن شامل یک بخش ناقطبی بزرگ و یک بخش قطبی کوچک‌تر است.**

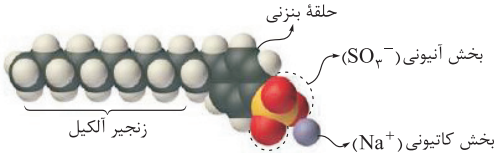
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

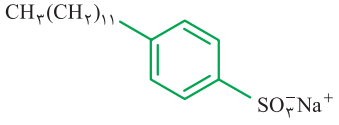
پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول، دوم و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

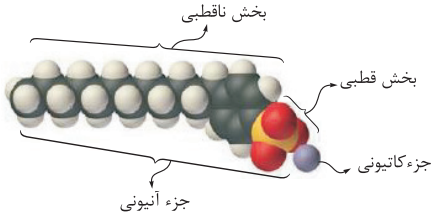
- با توجه به مدل فضاپرکن داده‌شده، فرمول شیمیایی ترکیب داده‌شده به صورت $C_{۱۸}H_{۲۹}SO_۳Na$ است:





- این ترکیب، یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی است. این پاک‌کننده‌ها را می‌توان از بنزن و دیگر مواد اولیه در صنایع پتروشیمی، طی واکنش‌های پیچیده در صنعت تولید کرد.

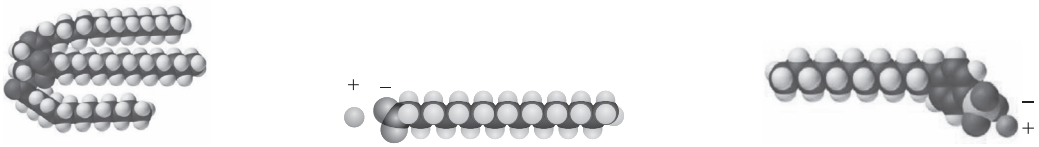
پاک‌کننده‌های غیرصابونی در آب سخت نیز خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند، زیرا با یون‌های موجود در این‌آب‌ها رسوب نمی‌دهند؛ بنابراین از این پاک‌کننده‌ها می‌توان در محیط‌های گوناگون مانند سفرهای دریایی و صنایع وابسته به آب شور (که حاوی مقادیر چشمگیری از یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} هستند.) نیز استفاده کرد.



گفتم که این ترکیب مربوط به یک پاک‌کنندهٔ *غیرصابونی* است. این پاک کننده از دو جزء کاتیونی و آنیونی تشکیل شده که جزء آنیونی آن دارای دو بخش قطبی (آبدوست) و بخش ناقطبی (آب‌گریز) می‌باشد.

تست و پاسخ ۱۰۲

با توجه به مدل فضاپرکن ترکیب‌های داده‌شده، کدام گزینه درست است؟



۱) با افزایش جمعیت جهان، برای تولید صابون در مقیاس انبوه، به مقدار زیادی از ترکیب b نیاز است.

۲) قدرت پاک‌کنندگی ترکیب c بیشتر از ترکیب b است، چون شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی بیشتری در آن وجود دارد.

۳) این شکل‌ها مدل فضاپرکن سه پاک‌کننده را نشان می‌دهند که قدرت‌های پاک‌کنندگی متفاوتی دارند.

۴) با استفاده از ترکیب a و مواد لازم دیگر، می‌توان ترکیب b را تولید کرد که قدرت پاک‌کنندگی کم‌تری از ترکیب c دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی مدل‌های فضاپرکن داده‌شده، هر یک مربوط به مواد زیر هستند:

a → استر سنگین

b → صابون

c → پاک‌کنندهٔ غیرصابونی

صابون‌ها (b) را می‌توان از واکنش اسیدهای چرب و یا استرهای سنگین (a) با مواد دیگری مثل بازهای قوی به دست آورد. صابون‌ها (b) قدرت پاک‌کنندگی کم‌تری نسبت به پاک‌کننده‌های غیرصابونی (c) دارند و برخلاف پاک‌کننده‌های غیرصابونی، در آب‌های سخت رسوب تشکیل می‌دهند.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱ برای تولید صابون (b) در مقیاس انبوه، به مقدار بسیار زیادی چربی نیاز است.

۲ قدرت پاک‌کنندگی پاک‌کننده‌های غیرصابونی (c) بیشتر از صابون (b) است؛ زیرا این پاک‌کننده‌ها با یون‌های موجود در آب سخت رسوب تشکیل نمی‌دهند. *ربطی به جفت‌الکترون ناپیوندی نداره!*

۳ ترکیب (a) استر سنگین است و پاک‌کننده نیست!

تست و پاسخ ۱۰۳

کدام‌یک از توصیف‌های داده‌شده با مادهٔ مورد نظر هم‌خوانی ندارد؟

الف) صابون گوگرددار: ضدعفونی‌کننده و مناسب برای از بین بردن میکروب

ب) صابون مراغه: مناسب برای موهای چرب به دلیل داشتن خاصیت بازی مناسب

پ) صابون با مادهٔ شیمیایی کلردار: مناسب برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی

ت) مواد شوینده با نمک‌های فسفات: مناسب برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی شوینده‌ها

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ ۳) ب ـ ت ۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های «الف» و «پ» همخوانی ندارند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) صابون گوگرددار، برای از بین بردن جوش صورت و همچنین قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

ب) صابون مراغه، یک صابون طبیعی است که افزودنی شیمیایی نداشته و قدمتی بیش از ۱۵۰ سال دارد. این صابون به دلیل خاصیت بازی مناسب برای موهای چرب استفاده می‌شود:

صابون مراغه:
- صابون طبیعی با قدمت بیش از ۱۵۰ سال
- معروف‌ترین صابون سنتی ایران
- روش تهیه: پیه گوسفند + سود سوزآور ← جوشاندن ← قالب‌گیری
- خشک‌کردن
- نداشتن افزودنی شیمیایی

داشتن خاصیت بازی مناسب ← استفاده برای موهای چرب

پ) صابون با مادهٔ شیمیایی کلردار، خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی دارد.

ت) برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی مواد شوینده، به آن‌ها نمک‌های فسفات اضافه می‌کنند؛ زیرا این نمک‌ها با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} در آب‌های سخت واکنش داده و از تشکیل رسوب و ایجاد لکه جلوگیری می‌کنند.

جمع‌بندی:

نوع افزودنی به صابون	ویژگی صابون
ترکیب‌های گوگرددار	از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی
مواد شیمیایی کلردار	خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی بیشتر
نمک‌های فسفات	جلوگیری از تشکیل رسوب و ایجاد لکه (به دلیل واکنش این نمک‌ها با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت)
جوش شیرین ($NaHCO_3$)	افزایش قدرت پاک‌کنندگی چربی‌ها (به دلیل خاصیت بازی جوش شیرین و در نتیجه واکنش آن با چربی و تولید صابون)

تست و پاسخ ۱۰۴

کدام مطلب نادرست است؟

۱) پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با آلاینده‌ها تنها برهم‌کنش فیزیکی داشته، ولی پاک‌کنندهٔ خورنده، علاوه بر برهم‌کنش با آلاینده‌ها، با آن‌ها واکنش نیز می‌دهد.

۲) جوهرنمک، سود سوزآور و سفیدکننده‌ها از نظر شیمیایی فعال‌اند و خاصیت خورندگی دارند.

۳) صابون و محلول جوهر نمک، دو پاک‌کننده هستند که خاصیت اسیدی داشته و باعث تغییر رنگ کاغذ pH می‌شوند.

۴) پاک‌کننده‌های خورنده، با انجام واکنش شیمیایی، لکه‌ها و رسوب‌ها را به موادی تبدیل می‌کنند که در آب حل یا پخش می‌شوند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی صابون، خاصیت بازی و جوهرنمک (هیدروکلریک اسید)، خاصیت اسیدی دارد. رنگ کاغذ pH در محلول‌های بازی، آبی و در محلول‌های اسیدی، سرخ است.



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، تنها براساس برهم‌کنش بین ذره‌ها عمل می‌کنند، اما پاک‌کننده‌های خورنده علاوه بر این برهم‌کنش‌ها، با آلاینده‌ها واکنش هم می‌دهند.

عملکرد پاک‌کننده‌ها: صابونی و غیرصابونی ← تنها برهم‌کنش بین ذره‌ها
خورنده ← برهم‌کنش بین ذره‌ها و هم‌چنین واکنش با آلاینده‌ها

۲) پاک‌کننده‌های خورنده مثل هیدروکلریک اسید (جوهرنمک)، سدیم هیدروکسید (سود سوزآور) و سفیدکننده‌ها از نظر شیمیایی فعال‌اند و خاصیت خورندگی دارند؛ به همین دلیل نباید با پوست تماس داشته باشند.

۴) پاک‌کننده‌های خورنده با لکه‌ها و رسوب‌هایی که به سطح می‌چسبند، واکنش شیمیایی داده و آن‌ها را به فراورده‌هایی تبدیل می‌کنند که با آب شسته می‌شوند.

تست و پاسخ ۱۰۵

نوعی پاک‌کننده که برای بازکردن مجاری مسدودشده در برخی وسایل و دستگاه‌های صنعتی استفاده می‌شود، به شکل پودر عرضه شده و شامل مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم است. کدام‌یک از موارد زیر، هنگام استفاده از این پاک‌کننده رخ می‌دهد؟

الف) انجام واکنش شیمیایی بین سدیم هیدروکسید و چربی و تولید صابون

ب) واردشدن ضربهٔ مکانیکی به رسوب‌ها به دلیل تولید گاز اکسیژن

پ) ذوب‌شدن چربی‌ها به دلیل انجام واکنش گرماگیر

ت) افزایش سرعت پاک‌کنندگی با استفاده از پاک‌کننده به صورت پودر

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

پاسخ تشریحی معادلهٔ نوشتاری واکنش این مخلوط با آب، به صورت زیر است:

فراورده‌های دیگر + گاز هیدروژن ← آب + مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید

بررسی عبارت‌ها:

الف) سدیم هیدروکسید موجود در این مخلوط می‌تواند با چربی‌ها واکنش داده و صابون تولید کند که باعث از بین رفتن بیشتر چربی‌ها می‌شود.

ب) تولید گاز هیدروژن (نه اکسیژن!) در این واکنش، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد؛ زیرا با ایجاد فشار و ضربه به رسوب‌ها، باعث باز شدن آسان‌تر لوله‌های گرفته‌شده می‌گردد.

پ) این واکنش گرماده است (نه گرماگیر!) و گرمای آزادشده می‌تواند قدرت پاک‌کنندگی را افزایش دهد و باعث نرم یا ذوب‌شدن چربی‌ها و در نتیجه آسان‌تر بازشدن لوله‌ها شود.

ت) این پاک‌کننده به شکل پودر عرضه می‌شود. *می‌دانیم که* هر چه سطح تماس بیشتر باشد، سرعت انجام واکنش نیز بیشتر خواهد بود.