آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله هفتم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۸/آبان/۱۴۰۳

دفترچه شماره یک

حسابان و ریاضیات پایه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	هندسه	بودجه‌بندی دروس
حسابان (۱) فصل ۴ (درس ۴) صفحهٔ ۱۱۰ تا ۱۱۲ حسابان (۲) فصل ۲ صفحهٔ ۲۳ تا ۴۴	آمار و احتمال فصل ۳ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۶۹ تا ۸۶ ریاضیات گسسته فصل ۱ (درس ۳) صفحهٔ ۱۸ تا ۳۰	هندسه (۲) فصل ۱ (درس ۲) صفحهٔ ۱۸ تا ۲۳ هندسه (۳) فصل ۱ (از ابتدای دترمینان و کاربردهای آن) و فصل ۲ (درس ۱) صفحهٔ ۲۶ تا ۳۹	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۵ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

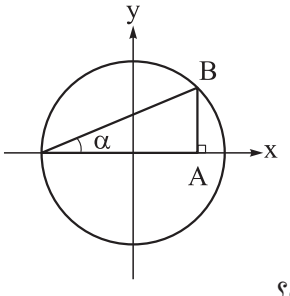
ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

حسابان و ریاضیات پایه

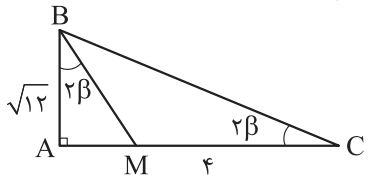
۱- در دایرهٔ مثلثاتی شکل زیر، اگر $AB = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$ باشد، مقدار $\tan ۲\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۷}$

۳) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۷}$

۲- در شکل زیر، اگر $AB = \sqrt{۱۲}$ و $MC = ۴$ باشد، حاصل عبارت $\sin\beta\cos ۵\beta$ کدام است؟



۱) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

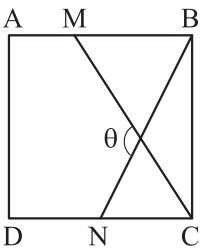
۳- اگر $\sin(\frac{\pi}{۳}-x)+\sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$ باشد، مقدار $\cos(x-\frac{\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۷}}{۳}$

۴- اگر $\sin^۴\theta+\cos^۴\theta = \frac{۵}{۶}$ باشد، مقدار عبارت $\cos ۴\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

۵- در مربع شکل زیر، $AB = ۳AM$ و $DN = NC$ است. مقدار $\tan ۲\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۵۶}{۳۳}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۱۹}{۱۱}$

۶- اگر $۲\sin x - \cos x = ۱$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{۴}-۲x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{۱۷}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۱۴}{۳۱}$ ۳) $-\frac{۲۴}{۷}$ ۴) $-\frac{۳۱}{۱۷}$

۷- به ازای کدام مقدار طبیعی n، $\tan\frac{\pi}{n}$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^۲ + ۲\sqrt{۳}x - ۱ = ۰$ است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۸- جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x + m = ۰$ عبارت‌اند از $\tan\alpha$ و $\cot\beta$. اگر $\tan(\beta-\alpha) = ۲$ باشد، مقدار m کدام است؟

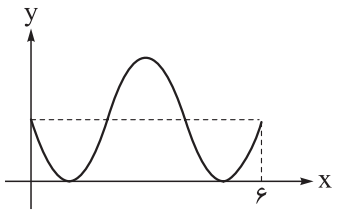
۱) -۹ ۲) -۴ ۳) -۷ ۴) -۶

محل انجام محاسبات

۹- مقادیر عددی ماکزیمم، دورهٔ تناوب و مینیمم تابع $f(x)=۴+a\sin\frac{\pi x}{a}$ با همین ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی هستند. مقدار $f(\frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) $۴+\sqrt{۳}$ ۲) ۵ ۳) $۴-\sqrt{۳}$ ۴) ۳

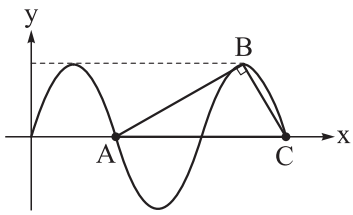
۱۰- قسمتی از نمودار تابع $y=۲+a\sin bx$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $|ab|$ چند برابر مقدار عددی دورهٔ تناوب تابع است؟



۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) ۲π

۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

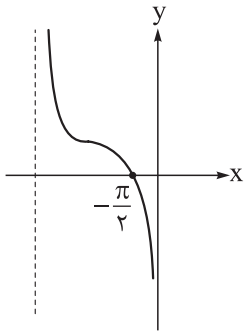
۱۱- بخشی از نمودار تابع $y=a\sin ۲\pi x$ در شکل زیر رسم شده است. اگر مثلث ABC در رأس B قائم‌الزاویه باشد، مساحت آن کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲- نمودار تابع $f(x)=۱-\cot(mx)$ در یک دوره تناوب آن، در شکل زیر رسم شده است. طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع روی آن اکیداً نزولی است، کدام است؟



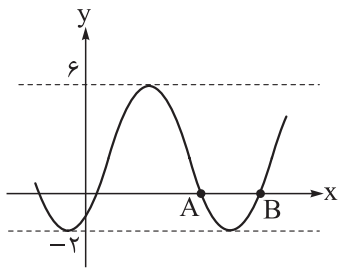
۱) $\frac{\pi}{۲}$

۲) π

۳) ۲π

۴) ۴π

۱۳- بخشی از نمودار تابع $f(x)=a\cos(bx+\frac{\pi}{۶})+c$ به صورت زیر است. اگر طول پاره‌خط AB برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد، حاصل $c+ab$ کدام است؟



۱) -۶

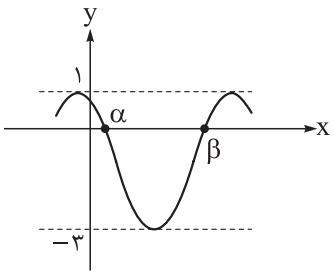
۲) ۱۰

۳) -۱۰

۴) ۶

محل انجام محاسبات

۱۴- بخشی از نمودار تابع $f(x)=a-b\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$ به صورت زیر است. حاصل $\beta-\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{2}$

۲) $\frac{5\pi}{6}$

۳) $\frac{2\pi}{3}$

۴) $\frac{3\pi}{4}$

۱۵- بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ $\cos 3x+\sin x=0$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{19\pi}{12}$ ۲) $\frac{23\pi}{12}$ ۳) $\frac{15\pi}{8}$ ۴) $\frac{12\pi}{8}$

۱۶- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\cos^2 2x+\cos^2 x=1$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۷- معادلهٔ $\tan^2 x+3\cot^2 x=4$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

۱۸- یکی از جواب‌های معادلهٔ $\sin(\frac{\pi}{4}-x)+a\cos(\frac{\pi}{4}+x)=1$، $x=\frac{\pi}{12}$ است. مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{8\pi}{3}$ ۳) 2π ۴) $\frac{4\pi}{3}$

محل انجام محاسبات

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

۱۹- اگر میانگین داده‌های $3x_n - 1, \ldots, 3x_2 - 1, 3x_1 - 1$ برابر با ۲۰ باشد، میانگین داده‌های $\frac{1}{2}x_1 + 3, \frac{1}{2}x_2 + 3, \ldots, \frac{1}{2}x_n + 3$ چه‌قدر است؟

۱) ۶/۵ ۲) ۷ ۳) ۷/۵ ۴) ۸

۲۰- ۱۰ تمبر ۸۰۰تومانی و به مقدار دلخواه، تمبر ۵۰۰تومانی داریم. به چند طریق می‌توان نامه‌ای که نیاز به ۱۳۰۰۰ تومان تمبر دارد را با استفاده از این تمبرها آمادهٔ ارسال کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱- از معادلهٔ $7^n \overset{19}{\equiv} 1$ چند جواب دورقمی برای n به دست می‌آید؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۳۰

۲۲- میانگین ۵ دادهٔ x_1, x_2, x_3, x_4 و x_5 برابر $\bar{x}$ و $x_1 - \bar{x} = 1$، $x_2 - \bar{x} = 2$، $x_3 - \bar{x} = 3$، $x_4 - \bar{x} = a$ و $x_5 - \bar{x} = b$ است. با حذف یکی از داده‌ها میانگین تغییری نمی‌کند. در این صورت کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

۱) کوچک‌ترین داده ۶ واحد از میانگین داده‌ها کم‌تر است.
۲) کوچک‌ترین داده ۳ واحد از میانگین داده‌ها کم‌تر است.
۳) بزرگ‌ترین داده ۱ واحد از میانگین داده‌ها بیشتر است.
۴) بزرگ‌ترین داده ۶ واحد از میانگین داده‌ها بیشتر است.

۲۳- جدول فراوانی تعدادی دادهٔ آماری به صورت زیر است. در نمودار دایره‌ای این داده‌ها، اختلاف بزرگ‌ترین زاویه و کوچک‌ترین زاویه چه‌قدر است؟

دسته	$a-10$	$10-(a+4)$	$b-c$	$c-16$
فراوانی	b	$a+2$	$c+10$	۴

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۶ ۴) ۱۴۰

۲۴- معادلهٔ سیالهٔ $21x + 14y + 2a = 4$ به ازای چند عدد طبیعی کم‌تر از ۵۰ برای a دارای جواب است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم $(42!)^{200} + 3^{200} + 7^{200}$ بر ۲۱ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

۲۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 23^{51} - 11^{51} - 12^{51}$ بر عدد ۱۳۲ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۰

۲۷- از معادلهٔ $2x^2 + 2 \overset{7}{\equiv} 5x$ چند جواب طبیعی دورقمی برای x به دست می‌آید؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۲۸- باقی‌ماندهٔ عدد 6^{79} بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

محل انجام محاسبات

هندسه

۲۹- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به طوری که $a_{ij}=\begin{cases} j-i & ; i>j \\ i^۲-j & ; i=j \\ j+i & ; i<j \end{cases}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۴

۳۰- اگر $A=\begin{bmatrix} |A| & -۱۳ & ۸ \\ ۱ & |A| & ۱ \\ ۱ & ۲ & |A| \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس $A+I$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۱- اگر برای ماتریس $A_{۲\times ۲}$ تساوی $A^۲=۲A+۳I$ برقرار باشد، آن‌گاه $|A-I|$ کدام است؟

۱) ± ۲ ۲) ± ۴ ۳) ± ۶ ۴) ± ۳

۳۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A|\,|A|-۲||$ کدام است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۶ ۳) -۱۶ ۴) -۱۲۸

۳۳- صفحه‌ای، تمام مولدهای یک رویهٔ مخروطی را قطع کرده است. مقطع حاصل کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) نقطه ۲) دایره ۳) بیضی ۴) سهمی

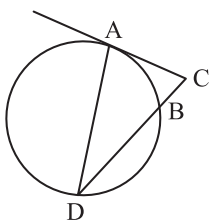
۳۴- چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ از پاره‌خط AB و به فاصلهٔ ۴ از وسط آن باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) به طول AB بستگی دارد.

۳۵- زاویهٔ xOy و خط d مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطه‌ای داخل زاویه تعیین کنیم که از دو ضلع آن به یک فاصله و از خط d به فاصلهٔ a باشد. تعداد جواب‌ها کدام است؟

۱) یک یا بی‌شمار ۲) صفر، یک یا بی‌شمار
۳) صفر، یک، دو یا بی‌شمار ۴) صفر، دو یا بی‌شمار

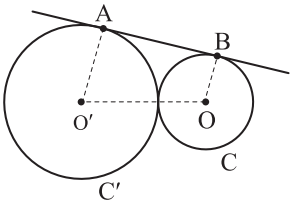
۳۶- در شکل زیر AC بر دایره مماس است. اگر $DB=AC$ باشد، آن‌گاه نسبت $\frac{AC}{BC}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

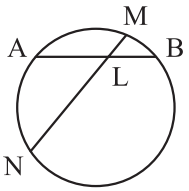
محل انجام محاسبات

۳۷- در شکل زیر، A و B نقاط تماس خط با دایره‌های مماس بر هم C(O,۴) و C′(O′,۹) هستند. مساحت چهارضلعی ABOO′ کدام است؟



۱) ۱۹/۵
۲) ۲۶
۳) ۳۹
۴) ۷۸

۳۸- مطابق شکل، دو وتر AB و MN در نقطهٔ L متقاطع‌اند. اگر $\overset{\frown}{AMB} = ۶۰^\circ$ و $۳BL = ۴ML = NL$، آن‌گاه طول MN چند برابر شعاع دایره است؟



۱) $\frac{۱۵}{۱۳}$
۲) $\frac{۱۶}{۱۳}$
۳) $\frac{۱۷}{۱۳}$
۴) $\frac{۱۸}{۱۳}$

۳۹- در دایره‌ای به شعاع ۲، وتر PQ که به فاصلهٔ $\sqrt{۳}$ از مرکز دایره است، سطح دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند. مساحت قسمت بزرگ‌تر به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱/۵
۳) ۱۱
۴) ۱۰/۵

۴۰- از نقطهٔ A خارج از دایره‌ای به مرکز O، دو مماس AT و AT′ را بر آن رسم می‌کنیم. اگر $T\hat{A}T' = ۳۰^\circ$، آن‌گاه مساحت چهارضلعی ATOT′ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}AT^۲$
۲) $\frac{۱}{۴}OA^۲$
۳) $\frac{۱}{۲}TT'^۲$
۴) $۲OT^۲$

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله هفتم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۸/آبان/۱۴۰۳

دفترچه شماره دو

بودجه‌بندی دروس

فیزیک	شیمی
فیزیک (۱) فصل ۵ صفحهٔ ۱۲۷ تا ۱۴۹ فیزیک (۳) فصل ۲ صفحهٔ ۲۹ تا ۶۰	شیمی (۲) فصل ۱ (تا ابتدای نفت، هدیه‌ای شگفت انگیز) صفحهٔ ۱ تا ۲۹ شیمی (۳) فصل ۱ (ازابتدای pH، مقیاسی برای تعیین میزان اسیدی بودن) و فصل ۲ (تا ابتدای سلول سوختی، منبعی برای تولید انرژی سبز) صفحهٔ ۲۴ تا ۵۰

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۸۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	
مجموع	۶۵ سؤال			۸۰ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

فیزیک دوازدهم

۴۱- قایقرانی درون یک قایق قرار دارد و روی آب آرام دریاچه به آرامی حرکت می‌کند. واکنش نیروهای وارد بر قایقران به چه جسم‌هایی وارد می‌شود؟

۱) آب، هوا، قایق، پارو
۲) کرهٔ زمین، قایق، هوا، آب
۳) کرهٔ زمین، قایق، پارو، هوا
۴) کرهٔ زمین، آب، پارو، قایق

۴۲- جسمی به جرم ۴ kg هم‌زمان تحت تأثیر سه نیروی $\vec{F}_1 = (12\ N)\vec{i} + (-9\ N)\vec{j}$، $\vec{F}_2 = (-9\ N)\vec{i} + (12\ N)\vec{j}$ و $\vec{F}_3$ قرار می‌گیرد و از حال سکون با شتاب $5\ m/s^2$ در جهت مخالف محور x شروع به حرکت می‌کند. نیروی $\vec{F}_3$ کدام است؟

۱) $(-19\ N)\vec{i} + (9\ N)\vec{j}$
۲) $(13\ N)\vec{i} + (9\ N)\vec{j}$
۳) $(17\ N)\vec{i} + (-3\ N)\vec{j}$
۴) $(-23\ N)\vec{i} + (-3\ N)\vec{j}$

۴۳- دو جعبهٔ سبک و سنگینِ هم‌جنس را با تندی‌های اولیهٔ یکسان روی یک سطح افقی پرتاب می‌کنیم. کدام گزینه در مورد زمان توقف جعبه‌ها درست است؟ ($g = 9/8\ N/kg$ و $\mu_k \neq 0$)

۱) جعبهٔ سنگین‌تر زودتر متوقف می‌شود؛ زیرا جرم بیشتری دارد و تمایل آن به ایستادن بیشتر است.
۲) جعبهٔ سنگین‌تر زودتر متوقف می‌شود؛ زیرا جرم بیشتری دارد و نیروی اصطکاک آن بزرگ‌تر است.
۳) هر دو جعبه در زمان‌های یکسان متوقف می‌شوند؛ زیرا شتاب توقف آن‌ها برابر است.
۴) جعبه‌ای زودتر متوقف می‌شود که سطح تماس بیشتری با زمین داشته باشد؛ زیرا نیروی اصطکاک آن بزرگ‌تر است.

۴۴- شخصی به جرم ۸۰ kg روی یک ترازو ایستاده و فنری با ثابت $5\ N/cm$ را که از سقف بالای سرش آویزان است، در راستای قائم رو به پایین می‌کشد. اگر با این کار طول فنر ۱۶cm افزایش یابد، ترازو چه عددی را برحسب نیوتون نشان می‌دهد؟ ($g = 10\ N/kg$)

۱) ۷۲۰
۲) ۸۳۰
۳) ۸۸۰
۴) ۷۸۰

۴۵- شخصی به جرم ۷۸ kg درون آسانسوری قرار دارد. اگر آسانسور با شتاب رو به پایین $1/5\ m/s^2$ به طرف پایین حرکت کند، اندازهٔ نیرویی که کرهٔ زمین بر شخص وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10\ m/s^2$)

۱) ۷۸۰
۲) ۸۹۷
۳) ۷۳۹/۵
۴) ۱۳۰/۵

۴۶- نردبانی به جرم ۱۶ kg به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه دارد و پایهٔ آن روی سطح افقی در آستانهٔ سُرخوردن قرار دارد. در این حالت شخصی به جرم ۴۸ kg از نردبان بالا رفته و بر روی یکی از پله‌های نردبان می‌ایستد. اگر با ایستادن شخص بر روی نردبان، نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، ۶۰۰ N افزایش یابد و هم‌چنان پایهٔ آن روی سطح افقی در آستانهٔ سُرخوردن باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین نردبان و سطح افق چه‌قدر است؟ ($g = 10\ N/kg$)

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{3}{4}$

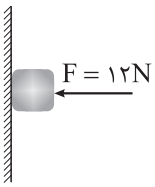
محل انجام محاسبات

۴۷- در شکل زیر، جسمی به جرم $50\ kg$ توسط ریسمان سبکی ثابت نگه داشته شده است. اگر بیشینهٔ نیروی کشش قابل تحمل این ریسمان $540\ N$ باشد، حداکثر بزرگی شتاب برای بالاکشیدن جسم به طوری که ریسمان پاره نشود، چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(g = 10\ N/kg)$



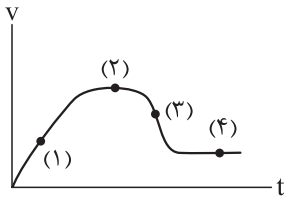
۱) ۰/۸
۲) ۰/۶
۳) ۰/۵
۴) ۰/۴

۴۸- در شکل زیر، نیروی ۱۲ نیوتونی افقی به جسمی ساکن به جرم $500\ g$ که به دیوار تکیه داده شده، وارد می‌شود. نیروی سطح دیوار بر جسم چند نیوتون است؟ $(g = 10\ N/kg$ و $\mu_s = \frac{3}{4})$



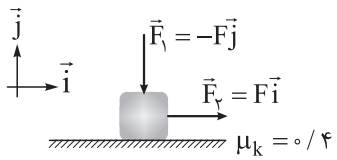
۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) ۱۵

۴۹- نمودار تغییرات تندی برحسب زمان چتربازی که از یک بالگرد در حال سکون به بیرون می‌پرد و مدتی پس از پرش، چتر خود را باز می‌کند، مطابق شکل زیر است. در کدام مرحله بزرگی نیروی مقاومت هوا بیشتر از بزرگی نیروی وزن چترباز است؟



۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۲

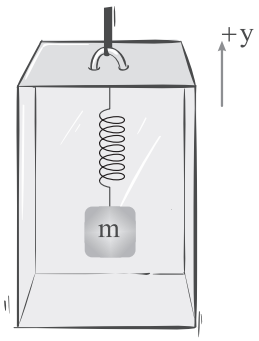
۵۰- در شکل زیر، جسمی به جرم $3\ kg$ و با تندی ثابت $2\ m/s$ بر روی سطح افقی در حرکت است. اگر بزرگی هر یک از نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را $10\ N$ افزایش دهیم، شتاب حرکت جسم چند متر بر مربع ثانیه خواهد شد؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

محل انجام محاسبات

۵۱- مطابق شکل، جسمی به جرم $3\,kg$ توسط فنری با ثابت $4/5\,N/cm$ به سقف یک آسانسور متصل است و آسانسور از حال سکون به طرف پایین شروع به حرکت می‌کند. زمانی که شتاب آسانسور $\vec{a}_1 = (-1/2\,m/s^2)\vec{j}$ باشد، طول فنر L_1 و هنگامی که شتاب آسانسور $\vec{a}_2 = (+1/8\,m/s^2)\vec{j}$ می‌شود، طول فنر L_2 می‌شود. مقدار $L_2 - L_1$ چند سانتی‌متر است؟ $(g = 9/8\,m/s^2)$



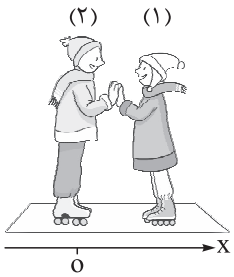
۱) $+2$

۲) -2

۳) $+0/5$

۴) $-0/5$

۵۲- مطابق شکل دو نفر به جرم‌های $m_1 = 60\,kg$ و $m_2 = 80\,kg$، مقابل یکدیگر قرار دارند. اگر یکی از آن‌ها در مدت $0/2\,s$ با نیروی $F = 120\,N$ دیگری را هُل دهد، فاصلهٔ میان دو شخص $3/2\,s$ پس از شروع هُل‌دادن چند سانتی‌متر می‌شود؟ (از اصطکاک سطح افقی چشم‌پوشی کنید.)



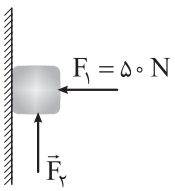
۱) ۲۳۴

۲) ۲۲۴

۳) ۲۱۰

۴) ۲۱۷

۵۳- در شکل زیر، هنگامی که بزرگی نیروی $\vec{F}_2$ را از $10\,N$ به $40\,N$ می‌رسانیم، بزرگی نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند، تغییر نخواهد کرد. اگر در هر دو حالت جسم در آستانهٔ حرکت باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح چه‌قدر است؟



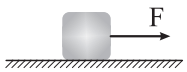
۱) $0/3$

۲) $0/4$

۳) $0/5$

۴) $0/6$

۵۴- جسمی به جرم $5\,kg$ روی یک سطح افقی ساکن است و با نیروی افقی $F = 20\,N$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. اگر $1/5\,s$ پس از شروع حرکت، نیروی F حذف شود و بزرگی شتاب توقف جسم ۳ برابر شتاب تندشوندهٔ آن باشد، مسافت طی‌شده توسط جسم در کل زمان حرکت چند سانتی‌متر است؟



۱) ۷۵

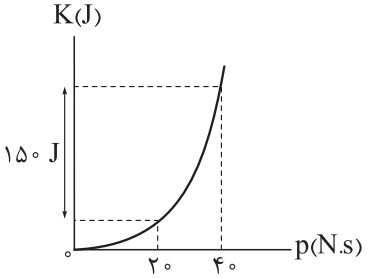
۲) ۱۰۰

۳) ۱۵۰

۴) ۱۷۵

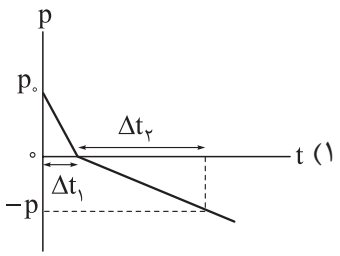
محل انجام محاسبات

۵۵- نمودار تغییرات انرژی جنبشی برحسب تکانه برای جسمی به جرم m مطابق شکل است. m چند کیلوگرم است؟

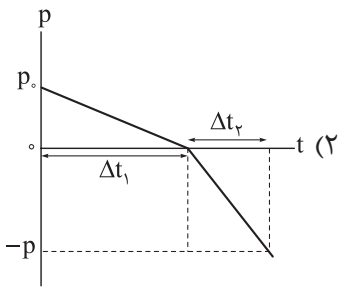


۱) ۲/۵
۲) ۰/۲۵
۳) ۰/۴
۴) ۴

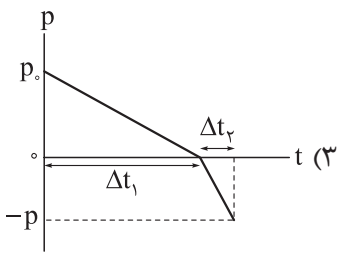
۵۶- جسمی در هوا و در راستای قائم با سرعت اولیهٔ v_0 به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت جسم را ثابت فرض کنیم، کدام نمودار تکانه ـ زمان از لحظهٔ پرتاب تا برگشت به نقطهٔ پرتاب، متعلق به این حرکت است؟

۱)


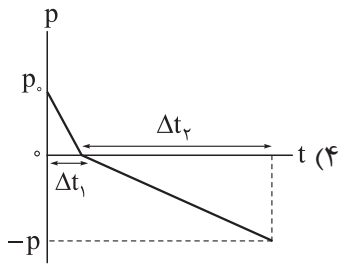
$\Delta t_1 < \Delta t_2 \, , \, p_0 > p$

۲)


$\Delta t_1 > \Delta t_2 \, , \, p_0 < p$

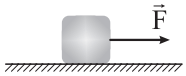
۳)


$\Delta t_1 > \Delta t_2 \, , \, p_0 > p$

۴)


$\Delta t_1 < \Delta t_2 \, , \, p_0 < p$

۵۷- جسمی به جرم ۲ kg روی یک سطح افقی به ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s = 0/5$ قرار دارد و نیروی افقی $\vec{F}$ به آن وارد می‌شود. اگر بزرگی این نیرو را به تدریج از صفر تا ۱۵ N افزایش دهیم، کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ زاویه‌ای که نیروی سطح با راستای افقی می‌سازد (α)، درست است؟ ($g = 10\,N/kg$)



الف) تا وقتی که $F < 10\,N$ است، α افزایش می‌یابد.

ب) تا وقتی که $F < 10\,N$ است، α کاهش می‌یابد.

پ) بلافاصله بعد از این‌که F اندکی از ۱۰ N بیشتر شود، α کاهش می‌یابد.

ت) بلافاصله بعد از این‌که F اندکی از ۱۰ N بیشتر شود، α افزایش می‌یابد.

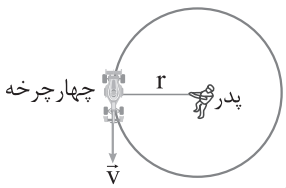
۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

محل انجام محاسبات

۵۸- تعداد دور بر دقیقهٔ میل‌لنگ یک خودرو که قطر محور آن ۴۲ mm است، ۲۴۰۰ rpm است. تندی نقطه‌ای روی لبهٔ محور این میل‌لنگ تقریباً چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ / ۴ ۳) ۴ / ۵ ۴) ۵ / ۳

۵۹- مطابق شکل، پدری فرزند ۲۵ کیلوگرمی خود را در یک چهارچرخهٔ ۵ کیلوگرمی قرار می‌دهد. یک بار با طنابی ۱ متری و بار دوم با طنابی ۲ متری چهارچرخه را روی سطح افقی بدون اصطکاک بر مسیر دایره‌ای به ترتیب با تندی‌های ثابت ۲ / ۵ m / s و ۳ m / s به حرکت درمی‌آورد. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این حرکت‌ها درست است؟



الف) نیروی کشش طناب در حرکت دوم ۱۸ درصد کم‌تر از حرکت اول است.

ب) نیروی مرکزگرای وارد بر فرزند، در حرکت دوم ۵۲ / ۵ N کم‌تر از حرکت اول است.

پ) دورهٔ تناوب چهارچرخه در حرکت دوم، $\frac{5}{3}$ برابر حرکت اول است.

ت) اندازهٔ شتاب حرکت چهارچرخه در حرکت دوم، $1/75\ m/s^2$ بیشتر از حرکت اول است.

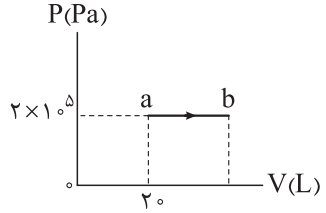
۱) الف و ب ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

۶۰- ماهواره‌های A و B در اثر نیروی گرانشی بین زمین و ماهواره، روی مدار تقریباً دایره‌ای به دور زمین می‌چرخند. جرم ماهوارهٔ A، ۲ برابر جرم ماهوارهٔ B و شعاع مدار ماهوارهٔ A، ۱ / ۵ برابر شعاع مدار ماهوارهٔ B است. انرژی جنبشی ماهوارهٔ A چند برابر انرژی جنبشی ماهوارهٔ B است؟

۱) $\sqrt{\frac{8}{3}}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{4}{3}$

فیزیک دهم

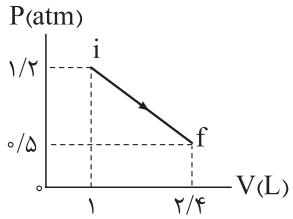
۶۱- یک گاز آرمانی فرایند ایستاوار ab را مطابق شکل طی می‌کند. اگر انرژی درونی گاز طی این فرایند ۹ kJ تغییر کند و گرمای مبادله‌شده برابر ۱۵ kJ باشد، حجم گاز در حالت b چند لیتر است؟



۱) ۳۰ ۲) ۲۸

۳) ۴۵ ۴) ۵۰

۶۲- مقداری گاز آرمانی طی فرایندی ایستاوار از حالت i به حالت f می‌رسد. گرمای مبادله‌شده بین دستگاه و محیط چند ژول است؟



۱) ۲۳۸

۲) صفر

۳) ۱۱۹

۴) باید نوع گاز مشخص باشد.

محل انجام محاسبات

۶۳- در طی یک فرایند ترمودینامیکی، مقدار معینی گاز کامل، روی محیط $150\ J$ کار انجام می‌دهد و دمایش کاهش می‌یابد. اگر در این فرایند، انرژی درونی گاز $350\ J$ تغییر کند، کدام گزینه درست است؟

۱) گاز $200\ J$ گرما به محیط می‌دهد.

۲) گاز $500\ J$ گرما به محیط می‌دهد.

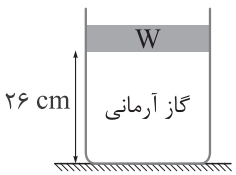
۳) گاز $200\ J$ گرما از محیط می‌گیرد.

۴) گاز $500\ J$ گرما از محیط می‌گیرد.

۶۴- در دمای $27^\circ C$ حجم اولیهٔ گاز کاملی برابر $5\ L$ است. در فشار ثابت $1/2\times10^5\ Pa$، دمای آن را به θ_2 می‌رسانیم. اگر کاری که گاز روی محیط انجام می‌دهد، $300\ J$ باشد، θ_2 چند درجهٔ سلسیوس است؟

۱) -123 ۲) 77 ۳) 177 ۴) 227

۶۵- مطابق شکل، زیر پیستون آزاد به مساحت قاعدهٔ $40\ cm^2$ و به وزن $W = 40\ N$، گاز آرمانی قرار دارد و فشار هوا $10^5\ Pa$ است. با تغییر دمای گاز در یک فرایند ایستاوار هم‌فشار، پیستون $4\ cm$ پایین می‌آید و دوباره به حال تعادل قرار می‌گیرد. اگر طی این فرایند انرژی درونی گاز $40\ J$ تغییر کرده باشد، کدام درست است؟



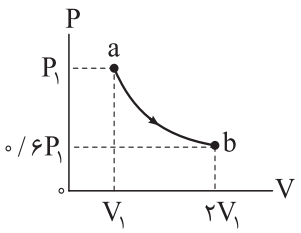
۱) گاز $57/6\ J$ گرما دریافت کرده است.

۲) گاز $57/6\ J$ گرما از دست داده است.

۳) گاز $220\ J$ گرما دریافت کرده است.

۴) گاز $220\ J$ گرما از دست داده است.

۶۶- مقداری گاز آرمانی فرایند ایستاواری را مطابق نمودار طی می‌کند. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این فرایند درست است؟



الف) فرایند هم‌دماست.

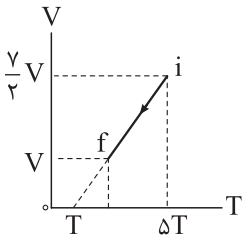
ب) فرایند بی‌دررو است.

پ) انرژی درونی گاز کم شده است.

ت) گاز گرما گرفته است.

۱) الف و ت ۲) ب و پ ۳) پ ۴) ت

۶۷- نمودار $V-T$ فرایند ایستاوار مقداری گاز آرمانی به صورت شکل زیر است. انرژی درونی این گاز در طی فرایند از حالت i تا حالت f چند برابر شده است؟



۱) $\frac{13}{5}$ ۲) $\frac{3}{7}$

۳) $\frac{25}{13}$ ۴) $\frac{15}{7}$

محل انجام محاسبات

۶۸- از سه مسیر جداگانهٔ ایستاوار هم‌دما، هم‌حجم و بی‌دررو، فشار یک گاز آرمانی را ۲۰ درصد کاهش می‌دهیم. کدام موارد درست است؟

الف) در فرایند بی‌دررو، حجم گاز ۲۵ درصد افزایش می‌یابد.

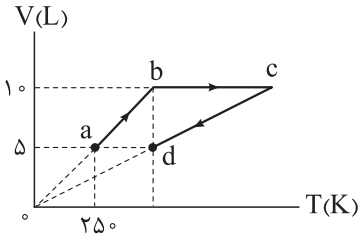
ب) در فرایند هم‌دما، حجم گاز ۲۵ درصد افزایش می‌یابد.

پ) در فرایند بی‌دررو، دمای گاز ۲۰ درصد کاهش می‌یابد.

ت) در فرایند هم‌حجم، انرژی درونی گاز ۲۰ درصد کاهش می‌یابد.

۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

۶۹- شکل زیر، مربوط به سه فرایند ترمودینامیکی ایستاوار روی دو مول گاز آرمانی است. کار کل انجام‌شده توسط محیط روی گاز در طی این فرایند چند ژول است؟ ($R = ۸ \frac{J}{mol.K}$)



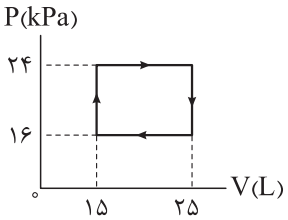
۱) ۴۰۰۰

۲) ۴۰۰۰−

۳) ۸۰۰۰

۴) ۸۰۰۰−

۷۰- چرخهٔ $P - V$ یک گاز آرمانی به شکل زیر است. کدام گزینه درست است؟



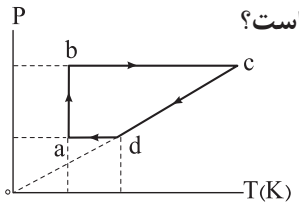
۱) گاز ۸۰ ژول گرما به محیط داده است.

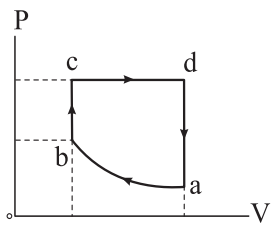
۲) گاز ۸۰ ژول گرما از محیط گرفته است.

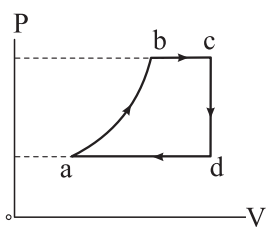
۳) گاز ۱۲۰ ژول گرما به محیط داده است.

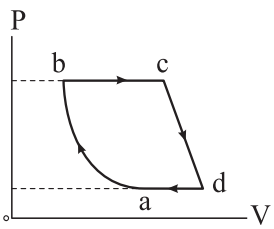
۴) گاز ۱۲۰ ژول گرما از محیط گرفته است.

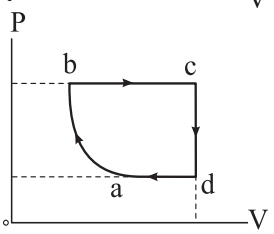
۷۱- نمودار $P - T$ مربوط به چرخهٔ گاز کاملی به شکل مقابل است. نمودار $P-V$ آن کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


محل انجام محاسبات

۷۲- کدام‌یک از عبارت‌های زیر در مورد قانون‌های ترمودینامیک درست است؟

الف) نقض قانون اول ترمودینامیک سبب نقض قانون دوم ترمودینامیک می‌شود.

ب) نقض قانون دوم ترمودینامیک سبب نقض قانون اول ترمودینامیک می‌شود.

پ) اگر قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی نقض شود، قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی هم نقض می‌شود.

۱) الف و ب ۲) الف و پ ۳) پ ۴) الف، ب و پ

۷۳- یک ماشین گرمایی در هر دقیقه، ۴۰ چرخه را می‌پیماید و در هر چرخه $3\ kJ$ گرما از منبع دمابالا می‌گیرد و $1/2\ kJ$ گرما به منبع دماپایین می‌دهد. توان خروجی این ماشین چند وات است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۸۰۰ ۴) ۱۲۰۰

۷۴- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) قایق پوت ـ پوت، نوعی اسباب‌بازی است که براساس ماشین‌های گرمایی برون‌سوز کار می‌کند.

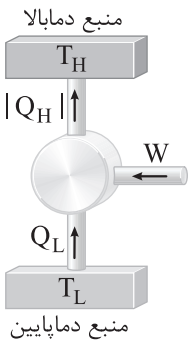
ب) ضربهٔ قدرت در ماشین گرمایی درون‌سوز بنزینی، یک فرایند هم‌دما در نظر گرفته می‌شود.

پ) محاسبه نشان می‌دهد با افزایش نسبت تراکم می‌توان بازده ماشین درون‌سوز بنزینی را افزایش داد.

ت) موتور هواپیما و برخی کشتی‌ها و موتورهای کوچک برق (ژنراتور)، ماشین گرمایی درون‌سوز هستند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۵- شکل زیر طرز کار طرح‌وار چه وسیله‌ای است و اگر توان مصرفی این وسیله $100\ W$ باشد و در مدت $1\ min$ کارکردن، $18\ kJ$ گرما به دستگاه (ماده کاری) این وسیله وارد شود، در هر دقیقه چند کیلوژول گرما به منبع دمابالا منتقل می‌شود؟



۱) ماشین گرمایی، ۱۲

۲) یخچال، ۱۲

۳) ماشین گرمایی، ۲۴

۴) یخچال، ۲۴

محل انجام محاسبات

شیمی دوازدهم

۷۶- کدام مطلب نادرست است؟

۱) دستگاه گردش خون انسان، یک سامانهٔ بازی محسوب می‌شود.

۲) تغییر رنگ کاغذ pH معیاری برای تشخیص اسیدی یا بازی بودن محلول‌ها است.

۳) همواره در یک سامانهٔ خنثی، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید با یکدیگر یکسان بوده و برابر با 10^{-7} مول بر لیتر است.

۴) هر اندازه که غلظت یکی از یون‌های هیدرونیوم یا هیدروکسید در محلولی بیشتر شود، به همان نسبت از غلظت دیگری کاسته می‌شود.

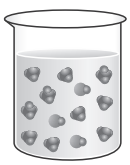
۷۷- اگر pH محلول اسید قوی HX با pH محلول اسید ضعیف HY برابر باشد، چند مورد از مطالب زیر به یقین درست است؟ $(HX = 50, HY = 60 : g.mol^{-1})$

- **شمار مول‌های آغازی دو اسید برای تشکیل دو محلول، نابرابر است.**
- **اگر غلظت محلول HX برابر با ۰/۱ مولار بوده و حجم محلول یک لیتر باشد، تفاوت جرم دو اسید حل‌شده برابر با یک گرم خواهد بود.**
- **در شرایط یکسان، سرعت واکنش نوار منیزیم با این دو محلول برابر است.**
- **اگر حجم دو محلول برابر نباشد، رسانایی الکتریکی دو محلول متفاوت خواهد بود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷۸- در دمای اتاق غلظت یون هیدروکسید در محلول ۰/۰۵ مولار هیدروکلریک اسید، به تقریب چند برابر غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۰/۰۲ مولار هیپوکلرو اسید با $K_a = 4/5\times10^{-8} mol.L^{-1}$ است؟

۱) $5/83\times10^{-9}$ ۲) $6/67\times10^{-9}$ ۳) $1/25\times10^{8}$ ۴) $1/5\times10^{8}$



۷۹- محلولی به حجم ۵۰۰ میلی‌لیتر از آمونیاک، مطابق شکل زیر در اختیار داریم. اگر ۲۵ میلی‌لیتر از این محلول با ۱۰۰ میلی‌لیتر از محلول اسید قوی HA به طور کامل واکنش دهد، pH محلول HA کدام است؟ (هر ذره را معادل ۰/۰۱ مول در نظر بگیرید.)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱/۳ ۴) ۱/۷

۸۰- چند مورد از موارد زیر درست است؟

- **تأمین انرژی (باتری‌ها، سلول سوختی و سوخت آن‌ها) و تولید مواد (مانند آبکافت و آبکاری) از قلمروهای الکتروشیمی می‌باشند.**
- **پدیده‌هایی همچون تندر و آذرخش از ماهیت الکتریکی ماده سرچشمه می‌گیرند و شامل دادوستد الکترون هستند.**
- **الکتروشیمی در تأمین انرژی سبز و پاک نقش دارد و می‌تواند در راستای پیاده‌کردن اصول شیمی سبز گام بردارد.**
- **چراغ خورشیدی شامل لامپ LED، سلول خورشیدی و باتری غیر قابل شارژ است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۸۱- با توجه به نیم‌واکنش‌های موازنه‌نشدهٔ زیر، مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در معادلهٔ کلی حاصل از جمع این دو نیم‌واکنش کدام است و به ازای مصرف کامل ۴۷/۶ گرم یون پرمنگنات (MnO_4^-) چند مول یون Fe^{3+} تولید می‌شود؟ $(Mn = 55 , O = 16 : g.mol^{-1})$

$$MnO_4^-(aq) + H^+(aq) + e^- \rightarrow Mn^{2+}(aq) + H_2O(l)$$
$$Fe^{2+}(aq) \rightarrow Fe^{3+}(aq) + e^-$$

۱) ۲ ، ۱۰ ۲) ۰/۴ ، ۱۰ ۳) ۲ ، ۱۴ ۴) ۰/۴ ، ۱۴

۸۲- اطلاعات موجود در کدام ردیف از جدول زیر نادرست است؟

گونهٔ کاهنده	نیم‌واکنش کاهش	واکنش کلی موازنه‌شده	
Zn	$Cu^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Cu(s)$	$Cu^{2+}(aq) + Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$	ردیف ۱: واکنش تیغهٔ روی با محلول مس (II) سولفات
Zn	$O_2(g) + 4e^- \rightarrow 2O^{2-}(g)$	$2Zn(s) + O_2(g) \rightarrow 2ZnO(s)$	ردیف ۲: واکنش فلز روی و گاز اکسیژن
Mg	$O_2(g) + 4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$	$2Mg(s) + O_2(g) \rightarrow 2MgO(s)$	ردیف ۳: واکنشی که در گذشته به عنوان منبع نور برای عکاسی استفاده می‌شد.
Mn	$Cu^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Cu(s)$	$Cu^{2+}(aq) + Mn(s) \rightarrow Mn^{2+}(aq) + Cu(s)$	ردیف ۴: واکنش فلز منگنز با محلول حاوی Cu^{2+}

۱) ردیف ۱ ۲) ردیف ۲
۳) ردیف ۳ ۴) ردیف ۴

۸۳- فلز روی در شرایط STP با گازهای اکسیژن و فلوئور واکنش داده و در مجموع یک مول الکترون مبادله شده است. اگر مقدار روی فلوئورید تولیدشده برابر ۲۰/۶ گرم باشد، چند لیتر گاز اکسیژن با روی واکنش داده است؟ $(Zn = 65 , F = 19 , O = 16 : g.mol^{-1})$

۱) ۳۳/۶ ۲) ۳/۳۶
۳) ۲۲/۴ ۴) ۲/۲۴

محل انجام محاسبات

۸۴- با توجه به واکنش‌های زیر که به صورت طبیعی انجام می‌شوند، چند مورد از عبارت‌های داده‌شده درست است؟

a) $۲Fe^{۳+}(aq) + Zn(s) \rightarrow ۲Fe^{۲+}(aq) + Zn^{۲+}(aq)$

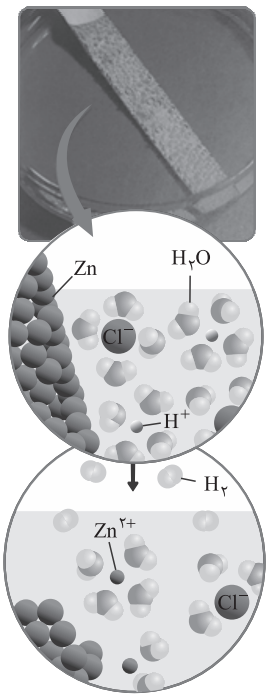
b) $Cu^{۲+}(aq) + Ni(s) \rightarrow Ni^{۲+}(aq) + Cu(s)$

c) $۲Fe^{۳+}(aq) + Sn^{۲+}(aq) \rightarrow ۲Fe^{۲+}(aq) + Sn^{۴+}(aq)$

- **در همهٔ واکنش‌های بالا مخلوط واکنش گرم‌تر می‌شود، زیرا سامانهٔ واکنش بخشی از انرژی خود را به شکل گرما به محیط می‌دهد.**
- **مقایسهٔ قدرت اکسندگی در واکنش c به‌شکل $Fe^{۳+} > Sn^{۴+}$ و مقایسهٔ قدرت کاهندگی در آن به‌شکل $Sn^{۲+} < Fe^{۲+}$ است.**
- **به ازای تولید هر مول $Fe^{۲+}$ در واکنش a، یک مول الکترون در واکنش مبادله می‌شود.**
- **در واکنش a، گونهٔ $Fe^{۳+}$ اکسنده و در واکنش b، گونهٔ Ni کاهنده است.**

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۲　　۴) ۱

۸۵- شکل زیر، واکنش فلز روی با محلول هیدروکلریک اسید را نشان می‌دهد. با توجه به آن، کدام گزینه عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟



«در این واکنش، اتم‌های روی الکترون از دست می‌دهند و ..... می‌یابند، از این‌رو اتم‌های روی نقش ..... دارند. درحالی‌که یون‌های هیدروژن، الکترون به دست می‌آورند و ..... می‌یابند، از این‌رو یون‌های هیدروژن نقش ..... دارند.

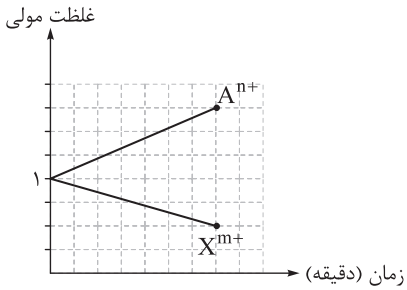
۱) اکسایش ـ اکسنده ـ کاهش ـ کاهنده
۲) کاهش ـ اکسنده ـ اکسایش ـ کاهنده
۳) کاهش ـ کاهنده ـ اکسایش ـ اکسنده
۴) اکسایش ـ کاهنده ـ کاهش ـ اکسنده

۸۶- تیغه‌ای از جنس فلز آلومینیم را درون محلولی از روی سولفات قرار می‌دهیم. اگر پس از مبادلهٔ $۱/۴۴۴۸ \times ۱۰^{۲۳}$ الکترون، ۳/۶۹ گرم به جرم تیغه افزوده شود، چند درصد از فلز روی تولیدشده، روی تیغهٔ آلومینیم رسوب کرده است؟ $(Zn = ۶۵ , Al = ۲۷ : g.mol^{-۱})$

۱) ۷۰　　۲) ۷۵
۳) ۸۰　　۴) ۸۵

محل انجام محاسبات

۸۷- با توجه به نمودار داده‌شده، که تغییرات غلظت یون‌ها را در یک سلول گالوانی استاندارد نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟ (A و X فلزند.)



$E^\circ(Al^{3+}/Al) = -1/66V \quad , \quad E^\circ(Cr^{3+}/Cr) = -0/74\ V$

$E^\circ(Fe^{2+}/Fe) = -0/44V \quad , \quad E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0/76\ V$

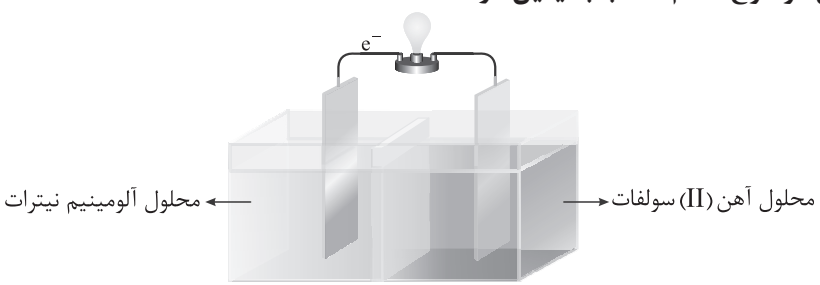
۱) A و X، می‌توانند به ترتیب، آهن و کروم باشند و $Fe^{2+}(aq)$، در سلول، نقش اکسنده دارد.

۲) در این سلولی گالوانی، به ازای مصرف ۰/۰۹ مول از فلز X، $1/0836\times10^{23}$ الکترون مبادله می‌شود.

۳)نمودار می‌تواند مربوط به سلول گالوانی، «آلومینیم ـ آهن» باشد، که مقدار n، ۱/۵ برابر مقدار m است.

۴) E° نیم‌سلول (X^{m+}/X)، از E° نیم‌سلول (A^{n+}/A) کوچک‌تر است و با گذشت زمان، از جرم تیغهٔ A کاسته می‌شود.

۸۸- شکل زیر سلول گالوانی استاندارد آلومینیم ـ آهن (Al ـ Fe) را نشان می‌دهد که در آن دو نیم‌سلول توسط دیوارهٔ متخلخل از یکدیگر جدا شده‌اند. دیوارهٔ متخلخل از جنس سفال، خاک چینی (کائولن)، آزبست یا گرد فشردهٔ شیشه است که از مخلوط‌شدن مستقیم و سریع دو الکترولیت جلوگیری می‌کند، اما برخی یون‌های موجود در دو محلول می‌توانند از آن عبور کنند. با توجه به این موضوع کدام مطلب به یقین درست است؟



۱) کاتیون‌های آلومینیم به سمت نیم‌سلول آهن حرکت می‌کنند تا شمار کاتیون‌ها در آن یکسان شود.

۲) جهت حرکت آنیون‌های سولفات و نیترات در دیوارهٔ متخلخل عکس یکدیگر است.

۳) پس از مبادلهٔ $3/612\times10^{22}$ الکترون، ۰/۰۲ مول از یون‌های آلومینیم از دیوارهٔ متخلخل عبور می‌کنند.

۴) پس از مدتی هر دو نوع یون سولفات و نیترات در نیم‌سلول آلومینیم وجود خواهند داشت.

۸۹- کدام مورد جزء شرایط لازم برای اندازه‌گیری پتانسیل استاندارد یک نیم‌سلول نیست؟

۱) دمای $25^\circ C$ ۲) غلظت یک مولار برای محلول الکترولیت

۳) فشار ۱ atm ۴) مقدار یک مول برای تیغهٔ الکترود

۹۰- اگر در سلول گالوانی استاندارد تشکیل‌شده از فلز X و فلز آهن، به ازای مصرف ۰/۰۴ مول فلز X، $7/224\times10^{22}$ الکترون مبادله شود و نسبت تغییرات جرم تیغهٔ آهن به تغییرات جرم تیغهٔ X، برابر ۰/۹۵ باشد، جرم مولی فلز X، به تقریب چند گرم بر مول است؟ $(Fe = 56\ g.mol^{-1})$

۱) ۵۹ ۲) ۷۰ ۳) ۸۸ ۴) ۹۱

محل انجام محاسبات



۹۱- آلساندرو ولتا، سلول ولتا را ابداع کرد. سلولی که از صفحه‌های دایره‌ای‌شکل از جنس مس و روی تشکیل شده و به صورت یک‌درمیان روی هم قرار گرفته‌اند و بین آن‌ها کاغذی آغشته به محلول نمک خوراکی وجود دارد.

اگر یک ولت‌سنج را به صورت Zn | (+) ولت‌سنج (−) | Cu **در یکی از این سلول‌ها قرار دهیم، حداکثر ولتاژ نشان داده شده در این سلول استاندارد کدام است؟**

$E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0/76\ V\ ,\ E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = +0/34\ V$

۱) $-0/42\ V$ ۲) $+0/42\ V$ ۳) $-1/1\ V$ ۴) $+1/1\ V$

۹۲- در یک آزمایش چهار فلز A، B، C و D رفتارهای زیر را نشان داده‌اند:

- **فقط فلزهای A و C با محلول $0/1\ M$ هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهند و گاز هیدروژن تولید می‌کنند.**
- **با قراردادن فلز C در محلول‌های حاوی یون‌های D^{2+}، B^{2+} و A^{2+} به ترتیب فلزهای D، B و A رسوب می‌کنند.**
- **یون B^{2+} اکسندهٔ قوی‌تری از D^{2+} است.**

با توجه به این داده‌ها ترتیب کاهندگی این چهار فلز به کدام صورت است؟

۱) $B < D < C < A$ ۲) $C < A < D < B$

۳) $A < C < D < B$ ۴) $B < D < A < C$

۹۳- کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟

الف) در سلول گالوانی مس ـ نقره، فلزهای مس و نقره به ترتیب کاهنده و اکسنده هستند.

ب) در واکنش بین روی و اکسیژن، ضریب الکترون در نیم‌واکنش کاهش، برابر ۴ است.

پ) اگر تیغهٔ مس را درون محلول روی سولفات قرار دهیم، پس از مدتی محلول به رنگ آبی درمی‌آید.

ت) لیتیم در میان فلزها، کم‌ترین چگالی و E° را دارد، به همین دلیل برای ساخت باتری‌های سبک‌تر، کوچک‌تر و با توانایی ذخیرهٔ انرژی بیشتر انرژی، مناسب است.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) الف ـ ت

شیمی یازدهم

۹۴- در شرایط یکسان، کدام عنصر واکنش‌پذیری کم‌تری دارد؟

۱) بریلیم ۲) بور ۳) اکسیژن ۴) فلوئور

۹۵- کدام موارد از مطالب زیر از نظر علمی صادق است؟

الف) در صورتی که عنصر X دارای رسانایی الکتریکی باشد، همهٔ عنصرهای هم‌دوره و پیش از X نیز رسانای الکتریسیته هستند.

ب) در صورتی که عنصرهای یک گروه، همگی رسانای الکتریسیته باشند، آن عناصر به یقین در دستهٔ p قرار ندارند.

پ) خواص شیمیایی همانند خواص فیزیکی عناصر، در جدول تناوبی به صورت دوره‌ای تکرار می‌شوند.

ت) تنها گروهی در جدول تناوبی که عناصر آن همهٔ حالت‌های فیزیکی در شرایط اتاق را شامل می‌شوند، شمار برابری عنصر مایع و گازی در خود دارد.

۱) الف ـ ت ۲) الف ـ پ ۳) ب ـ پ ۴) پ ـ ت

محل انجام محاسبات

۹۶- توصیف زیر نشان‌دهندهٔ یکی از عنصرهای جدول دوره‌ای عناصر است. کدام ویژگی در مورد این عنصر درست می‌باشد؟
«عنصری از دستهٔ p که شمار الکترون‌های ظرفیت اتم آن، برابر مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیتی دومین فلز جدول تناوبی عنصرها است و تفاوت عدد اتمی آن با فلز به‌کاررفته در بدنهٔ دوچرخه برابر ۸ است.»
۱) نافلزی جامد و زردرنگ است که رسانای جریان برق و گرما نیست.
۲) فلزی رسانا است که دارای ۷ الکترون با $l = ۱$ می‌باشد.
۳) شبه‌فلزی است که به عنوان عنصر اصلی سازندهٔ سلول‌های خورشیدی به کار می‌رود.
۴) عنصری با سطح صیقلی و رسانایی الکتریکی کم است که دومین عنصر شبه‌فلز در گروه خود می‌باشد.

۹۷- کدام موارد از مقایسه‌های زیر درست‌اند؟
الف) رسانایی الکتریکی: چهارمین عنصر گروه چهاردهم > چهاردهمین عنصر دورهٔ چهارم.
ب) نسبت شمار الکترون‌های با $n = ۳$ به شمار الکترون‌های با $l = ۲$: $Zn > Cr$.
پ) شمار عنصرهای دارای سطح صیقلی: دورهٔ سوم = گروه چهاردهم.
ت) شمار الکترون‌ها با $l = ۲$: فلزی واسطه که در تلویزیون رنگی کاربرد دارد > زنگ آهن.
۱) الف ـ ب ۲) پ ـ ت ۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

۹۸- کدام مطلب نادرست است؟
۱) مجموع شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها در فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از واکنش سومین عنصر گروه سیزدهم با نهمین عنصر دستهٔ p برابر ۲ است.
۲) در ترکیبی که به عنوان رنگ قرمز در نقاشی به کار می‌رود، شمار الکترون‌های با $n + l = ۴$ در کاتیون تشکیل‌دهندهٔ آن، دو برابر شمار عنصرهای نافلزی دورهٔ سوم جدول تناوبی است.
۳) در اثر تابش نور سفید به یک تکه یاقوت، طول موج‌هایی بازتاب می‌شوند که نشانی از وجود برخی ترکیب‌های فلزهای واسطه در آن است.
۴) تفاوت شمار عنصرها با تمایل به اشتراک گذاشتن الکترون در تناوب‌های دوم با تناوب چهارم جدول تناوبی، برابر با شمار عنصرهای تناوب اول است.

۹۹- با توجه به اطلاعات داده‌شده در مورد گونه‌های A تا E، کدام گزینه نادرست است؟
A: سومین عنصر تناوب سوم که خاصیت شکنندگی دارد.
B: نخستین عنصری که سه لایهٔ الکترونی پرشده از الکترون دارد.
C: عنصری هم‌دوره با چهارمین فلز قلیایی خاکی که ۵ الکترون ظرفیتی با $l = ۱$ دارد.
D: اولین عنصری که دو زیرلایهٔ نیمه‌پر دارد.
E: دومین عنصر دستهٔ p
۱) تفاوت اعداد کوانتومی اصلی و فرعی آخرین الکترون عنصر B با شمار الکترون‌های ظرفیتی عنصر E برابر است.
۲) عنصر C در دمای ۶۷۳ کلوین با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.
۳) عنصر B همانند عنصر D خاصیت چکش‌خواری دارد.
۴) نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب یونی حاصل از گونهٔ A و فلزی که در ساخت تلویزیون رنگی به کار می‌رود، برابر ۱/۵ است.

محل انجام محاسبات

۱۰۰- محلولی حاوی یون‌های Fe^{2+} و Fe^{3+} در اختیار داریم. با اضافه‌کردن ۲ / ۲۷ گرم سدیم هیدروکسید به این محلول، همهٔ یون‌های آهن رسوب می‌کنند. اگر ۴ / ۱۴ درصد جرمی رسوب حاصل‌شده سبزرنگ باشد، جرم رسوب قرمز آجری چند گرم است؟ $(Fe=56, Na=23, O=16, H=1 : g.mol^{-1})$

۱) ۲۳ / ۳ ۲) ۲۴ / ۷ ۳) ۲۱ / ۴ ۴) ۱۷ / ۸

۱۰۱- چند مورد از عبارت‌های زیر نادرست است؟ (A، B، X و Y فلزند.)

- **B می‌تواند Al و Y می‌تواند Zn باشد.** $A + X_2O \rightarrow AO + X$
- **واکنش‌پذیری A از X و B بیشتر است.** $XCl + B \rightarrow BCl_3 + X$
- **اگر عنصر X در دستهٔ s باشد، عنصر A به یقین جزء عنصرهای اصلی است.** $BF_3 + Y \rightarrow$ **انجام نمی‌شود.**
- **استخراج عنصر B از سنگ معدن آن به مراتب دشوارتر از Y و X است.**

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۲- مقدار معین سدیم نیترات مطابق معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ زیر در ظرفی در باز تجزیه می‌شود. اگر در شرایط معین بازده واکنش ۶۰ درصد باشد و ۶ / ۹ درصد از جرم مواد موجود در ظرف کاسته شود، درصد خلوص سدیم نیترات کدام است؟ (معادله موازنه شود.) $(Na=23, O=16, N=14 : g.mol^{-1})$

$$NaNO_3(s) \rightarrow NaNO_2(s) + O_2(g)$$

۱) ۴۲ / ۵ ۲) ۸۵ ۳) ۴۰ ۴) ۸۰

۱۰۳- با توجه به معادلهٔ واکنش داده‌شده، اگر ۵ / ۶ گرم $FeCr_2O_4$ با مقدار کافی از سایر واکنش‌دهنده‌ها واکنش دهد و ۱ / ۶ گرم از ماده‌ای تشکیل شود که نسبت شمار آنیون به کاتیون در آن برابر ۱ / ۵ است، بازده درصدی واکنش کدام است؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $(Fe=56, Cr=52, O=16 : g.mol^{-1})$

$$FeCr_2O_4(s) + K_2CO_3(s) + O_2(g) \rightarrow Fe_2O_3(s) + K_2CrO_4(s) + CO_2(g)$$

۱) ۷۵ ۲) ۸۰ ۳) ۸۵ ۴) ۹۰

۱۰۴- کدام‌یک از موارد زیر، از منابع موجود به صورت کلوخه‌ها و پوسته‌های کف اقیانوس، استخراج نمی‌شود؟

۱) Mg ۲) Mn
۳) Co ۴) Ni

۱۰۵- کدام مطلب در رابطه با بازیافت فلزها و از جمله فلز آهن نادرست است؟

۱) ردپای کربن دی‌اکسید را کاهش می‌دهد.
۲) سبب کاهش سرعت گرمایش جهانی می‌شود.
۳) گونه‌های زیستی بیشتری را از بین می‌برد.
۴) به توسعهٔ پایدار کشور کمک می‌کند.

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله هفتم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۸/آبان/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان
آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
هندسه	محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ کیوان صارمی ـ حمید گلزاری ـ صبا مهدوی ـ حسین هاشمی طاهری
فیزیک	امین امینی ـ علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی علیرضا عبداللهی ـ حمید فدائی‌فرد ـ فرزاد نامی ـ حامد نبی‌منصور
شیمی	مبین توکل ـ عباس سرمایه ـ محمدرضا طاهری‌نژاد ـ سجاد ططری‌فر ـ محمدرضا طهرانچی ـ محمد قهرمانی‌نژاد

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	عادل حسینی	محمدسجاد نقیه عادل حسینی سجاد داوطلب	فرزانه خاکپاش علی رضایی منصور زرکش اصفهانی
آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	مهدی خوشنویس ماهان فنی‌فر علی رضایی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	حمید فدائی‌فرد	محمد باغبان علیرضا جباری محمدجواد سورچی	امین امینی	مریم حسن‌لو مدیا عیدی احسان محمدی امیر محمودی انزابی محمدمهدی یوسفی چهرقانی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	وحید فارسیان سروش عبادی محمدرضا طاهری‌نژاد	محمد مرادی حمید ذبحی	سیدعلی حسین‌زاده هومن زندی مهدی سهامی سلطانی امیررضا نوری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

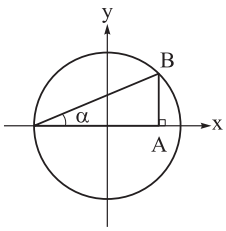
آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	منیژه حق‌دوست ـ راضیه سادات خلدی‌نسب زهرا صفری ـ محیا غنی‌فرد زهرا فرهادی‌مهر ـ مریم مسلمی‌زاده ساعده نمازی ـ مریم نوری‌نیا
رسام	مونا آندستا سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ فاطمه بخششی مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخایی مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته مهدیه گل‌پور ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com

حسابان و ریاضیات پایه

۱ در دایرهٔ مثلثاتی شکل زیر، اگر $AB=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ باشد، مقدار $\tan ۲\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۷}$

۳) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

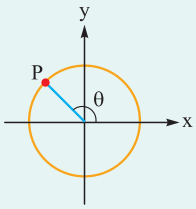
۴) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۷}$

Hint

شعاعی رو که از B می‌گذره رسم کن. می‌تونی زاویهٔ ۲α رو پیدا کنی!

درس Box

نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی



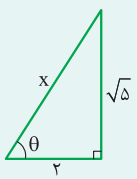
دایرهٔ مثلثاتی دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات با شعاع واحد. در این دایره، جهت مثبت زاویه را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم که مبدأ حرکت آن قسمت مثبت محور xهاست.

طول نقطهٔ P برابر $\cos\theta$ و عرض آن برابر $\sin\theta$ است:

$$P(\cos\theta,\sin\theta)$$

با داشتن یک نسبت مثلثاتی یک زاویه، برای به دست آوردن سایر نسبت‌های مثلثاتی آن، لازم نیست از اتحادهای مثلثاتی استفاده کنیم، بلکه کافی است با استفاده از نسبت مثلثاتی معلوم، یک مثلث قائم‌الزاویهٔ خاص در نظر بگیریم و سپس با استفاده از تعاریف، نسبت‌های مثلثاتی دیگر را حساب کنیم.

مثال: اگر $\tan\theta=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ باشد، $\cos\theta$ را حساب کنید.

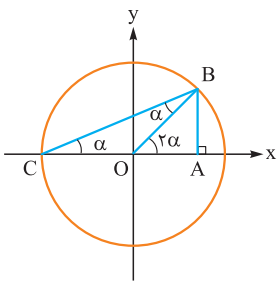


ما در این سؤال، یک مثلث قائم‌الزاویهٔ خاص را در نظر می‌گیریم که برای یک زاویهٔ حادهٔ آن، نسبت ضلع مقابل به مجاور آن برابر $\sqrt{۵}$ به ۲ باشد، مانند شکل مقابل:

در این مثلث اندازه برابر $x=\sqrt{۲^۲+(\sqrt{۵})^۲}=۳$ است، پس $\cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۲}{۳}$.

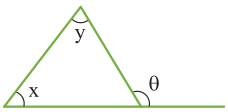
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: باید زاویهٔ ۲α را در شکل ایجاد کنیم تا بدون استفاده از اتحادهای مثلثاتی، بتوانیم نسبت‌های مثلثاتی آن را حساب کنیم. اگر شعاع OB را رسم کنیم، از آن‌جا که مثلث BOC متساوی‌الساقین است، $\hat{OBC}=\alpha$ و در نتیجه زاویهٔ AOB برای مثلث BOC خارجی محسوب می‌شود و داریم:



$$\hat{AOB}=۲\alpha$$

یادآوری: در یک مثلث، هر زاویهٔ خارجی، برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور است:

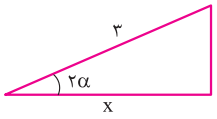


$$\theta=x+y$$

گام دوم: حالا طبق درس‌باکس، طول AB برابر $\sin ۲\alpha$ است:

$$\sin ۲\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

و مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم:



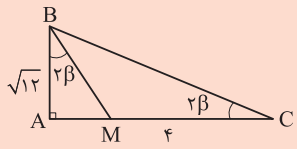
$$\Rightarrow x=\sqrt{۳^۲-(\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۷}$$

پس طبق تعریف، $\tan ۲\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan ۲\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}=\frac{\sqrt{۱۴}}{۷}$$

مشاوره در مسائلی که مبحث آن‌ها کاربرد مثلثات در هندسه است، همیشه سعی کنید با پیداکردن اندازهٔ یک قطعه یا ضلع که ممکن است در ظاهر اصلاً به خواستهٔ سؤال مربوط نباشد، اندازه‌های شکل را کامل کنید. مثلاً در این سؤال ما لازم داریم که اندازهٔ اضلاع مثلث ABC (یا مثلث کوچک‌تر ABM) را بدانیم، پس طول ضلع AM را می‌خواهیم. حال با استفاده از اندازه‌های معلوم و نسبت مثلثاتی ربط‌دهندهٔ آن‌ها، اندازهٔ مجهول را حساب می‌کنیم.

۲ در شکل زیر، اگر $AB=\sqrt{۱۲}$ و $MC=۴$ باشد، حاصل عبارت $\sin\beta\cos۵\beta$ کدام است؟



۱) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}$

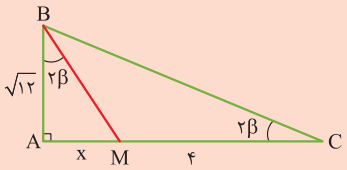
۴) $\frac{۱}{۲}$

Hint

اتحاد مربوط به کمان ۵β رو بلد نیستی! پس قطعاً β یه زاویهٔ آشناس که نسبت‌های اون معلومه یا می‌تونی حسابشون کنی. پس سعی کن شکل رو کامل کنی. یعنی AM رو به دست بیاری (چرا نمی‌ری سراغ BC؟). بعدش ۲β برات مشخص می‌شه.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: پیرو توضیحاتی که در مشاوره و hint ارائه کردیم، لازم است که طول قطعهٔ AM را به دست آوریم، پس آن را x در نظر می‌گیریم:



گام دوم: در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و ABM، اضلاع مقابل و مجاور زاویهٔ ۲β مشخص شده‌اند، پس می‌رویم سراغ $\tan۲\beta$:

$$\overset{\Delta}{ABC}:\tan۲\beta=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{۱۲}}{x+۴}\ ,\ \overset{\Delta}{ABM}:\tan۲\beta=\frac{AM}{AB}=\frac{x}{\sqrt{۱۲}}$$

گام سوم: این دو عبارت باید مساوی باشند:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۱۲}}{x+۴}=\frac{x}{\sqrt{۱۲}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^۲+۴x=۱۲ \Rightarrow$$

$$x^۲+۴x-۱۲=۰ \xrightarrow{\text{تجزیه به کمک جمله مشترک}} (x+۶)(x-۲)=۰$$

$$\xrightarrow{\text{طول مثبت است}} x=۲$$

گام چهارم: حالا مثلث ABM داریم:

$$\tan۲\beta=\frac{۲}{\sqrt{۱۲}}=\frac{۲}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow ۲\beta=۳۰^\circ \Rightarrow \beta=۱۵^\circ$$

گام پنجم: مقدار β را پیدا کردیم:

$$T=\sin\beta\cos۵\beta=\sin۱۵^\circ\cos۷۵^\circ \xrightarrow[\cos۷۵^\circ=\sin۱۵^\circ]{\text{۱۵° و ۷۵° متمم هستند}} T=\sin^۲۱۵^\circ$$

و طبق اتحاد $\sin^۲\theta=\frac{۱-\cos۲\theta}{۲}$ داریم:

$$T=\frac{۱-\cos۳۰^\circ}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}$$

۳ اگر $\sin(\frac{\pi}{۳}-x)+\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ باشد، مقدار $\cos(x-\frac{\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۷}}{۳}$

Hint چاره‌ای جز بسط عبارت $\sin(\frac{\pi}{۳}-x)$ داری؟ بسطش رو بنویس و بعدش می‌بینی که باید چکار کنی!

درس Box

اتحادهای مثلثاتی مجموع کمان و دو برابر کمان

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \Rightarrow \sin۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \cos۲\theta=\cos^۲\theta-\sin^۲\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=۲\cos^۲\theta-۱=۱-۲\sin^۲\theta \quad (*)$$

از تساوی $(*)$ دو اتحاد مهم زیر به دست می‌آیند که به فرمول‌های طلایی، اتحادهای توان‌شکن و ... معروف‌اند.

$$\cos^۲\theta=\frac{۱+\cos۲\theta}{۲}$$

$$\sin^۲\theta=\frac{۱-\cos۲\theta}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا عبارت $\sin(\frac{\pi}{۳}-x)$ را بسط می‌دهیم:

$$\sin(\frac{\pi}{۳}-x)=\sin\frac{\pi}{۳}\cos x-\sin x\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x-\frac{۱}{۲}\sin x$$

گام دوم: حالا $\sin x$ را به عبارت بالا اضافه می‌کنیم.

$$\sin(\frac{\pi}{۳}-x)+\sin x=\underbrace{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}_{\sin\frac{\pi}{۳}}\cos x+\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\cos\frac{\pi}{۳}}\sin x$$

این عبارت بسط $\sin(\frac{\pi}{۳}+x)$ است.

گام سوم: پس تا این‌جا متوجه شده‌ایم که $\sin(\frac{\pi}{۳}+x)=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ است. ما حاصل عبارت $\cos(\frac{\pi}{۶}-x)$ را می‌خواهیم که با دقت در کمان‌ها می‌بینیم که $\frac{\pi}{۳}+x$ و $\frac{\pi}{۶}-x$ متمم یکدیگرند؛ زیرا:

$$\frac{\pi}{۳}+x+\frac{\pi}{۶}-x=\frac{\pi}{۲}$$

پس کسینوس $\frac{\pi}{۶}-x$ همان سینوس $\frac{\pi}{۳}+x$ است.

$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۶}-x)=\sin(\frac{\pi}{۳}+x)=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

یادآوری: اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$ باشد، α و β را دو زاویهٔ متمم می‌نامیم و داریم:

$$\sin\alpha=\cos\beta$$

$$\cos\alpha=\sin\beta$$

۴ اگر $\sin^۴\theta+\cos^۴\theta=\frac{۵}{۶}$ باشد، مقدار عبارت $\cos ۴\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

Hint کافیه از اتحاد مربع کامل و فرمول‌های طلایی استفاده کنی.

درس Box

اتحادهای جانبی مثلثاتی

$$\sin^۴x+\cos^۴x=۱-۲\sin^۲x\cos^۲x=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲۲x$$

$$\sin^۶x+\cos^۶x=۱-۳\sin^۲x\cos^۲x=۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲۲x$$

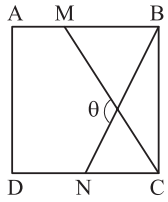
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مطابق درس‌باکس، عبارت $\sin^۴\theta+\cos^۴\theta$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin^۴\theta+\cos^۴\theta=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲۲\theta=\frac{۵}{۶}\Rightarrow\sin^۲۲\theta=۲(۱-\frac{۵}{۶})=\frac{۱}{۳}$$

گام دوم: حالا باید از فرمول طلایی یا اتحاد توان‌شکن استفاده کنیم تا $\sin^۲۲\theta$ را به $\cos ۴\theta$ بسط دهیم:

$$\cos ۴\theta=۱-۲\sin^۲۲\theta=۱-۲(\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}$$

۵ در مربع شکل زیر، $AB = ۳AM$ و $DN = NC$ است. مقدار $\tan ۲\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۵۶}{۳۳}$

۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) $\frac{۵}{۳}$

۴) $\frac{۱۹}{۱۱}$

Hint

آیا از روی شکل می‌تونی ۲θ رو پیدا کنی؟ خیر. پس باید اول $\tan\theta$ رو پیدا کنی، بعدش از اتحاد $\tan ۲\theta$ استفاده کنی. برای محاسبهٔ $\tan\theta$ هم باید θ رو به‌جورایی به زوایای مثلث‌های MBC و NBC ربط بدی.

درس Box

اتحاد تانژانت مجموع و تفاضل کمان

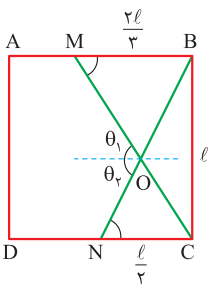
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{۱ \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

اگر α و β را مساوی بگیریم، اتحاد تانژانت دو برابر کمان به دست می‌آید.

$$\tan ۲\theta = \frac{۲\tan\theta}{۱ - \tan^۲\theta}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر طول ضلع مربع را ℓ در نظر بگیریم، با توجه به فرض‌های صورت سؤال $MB = \frac{۲}{۳}\ell$ و $NC = \frac{\ell}{۲}$ است. حال از آن‌جا که زاویهٔ θ را مستقیماً نمی‌توانیم حساب کنیم و قطعاً به زوایای مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ MBC و NBC مربوط است، لازم است جزئی را به شکل سؤال اضافه کنیم تا این رابطه نمایان شود.



خطی را موازی اضلاع AB و CD، چنان رسم می‌کنیم که از نقطهٔ O عبور کند و زاویهٔ θ را به زاویهٔ $\theta_۱$ و $\theta_۲$ تقسیم کند.

$$\theta = \theta_۱ + \theta_۲$$

گام دوم: حال طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب، می‌دانیم که $\theta_۲$ با زاویهٔ N در مثلث NBC و $\theta_۱$ با زاویهٔ M در مثلث MBC برابر است:

$$\theta_۱ = \hat{M} \ , \ \theta_۲ = \hat{N} \xrightarrow{\theta=\theta_۱+\theta_۲} \theta = \hat{M} + \hat{N}$$

گام سوم: پس برای این‌که زاویهٔ احتمالاً مشخص و آشنای θ را پیدا کنیم، بهتر است برویم سراغ $\tan\theta$، زیرا از روی اندازه‌های MB و NC، به سادگی $\tan\hat{M}$ و $\tan\hat{N}$ به دست می‌آید:

$$\tan\hat{M} = \frac{BC}{MB} = \frac{\ell}{\frac{۲\ell}{۳}} = \frac{۳}{۲} \ , \ \tan\hat{N} = \frac{BC}{NC} = \frac{\ell}{\frac{\ell}{۲}} = ۲$$

پس طبق اتحاد درس‌باکس داریم:

$$\tan\theta = \frac{\tan\hat{M} + \tan\hat{N}}{۱ - \tan\hat{M}\tan\hat{N}} = \frac{\frac{۳}{۲} + ۲}{۱ - (\frac{۳}{۲})(۲)} = \frac{\frac{۷}{۲}}{-۲} = -\frac{۷}{۴}$$

گام چهارم: در این مرحله کافی است از اتحاد تانژانت دو برابر کمان استفاده کنیم:

$$\tan ۲\theta = \frac{۲\tan\theta}{۱ - \tan^۲\theta} = \frac{۲(-\frac{۷}{۴})}{۱ - (-\frac{۷}{۴})^۲} = \frac{-\frac{۷}{۲}}{۱ - \frac{۴۹}{۱۶}} = \frac{۵۶}{۳۳}$$

۶ اگر $2\sin x - \cos x = 1$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} - 2x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{17}{24}$ ۲) $-\frac{14}{31}$

۳) $-\frac{24}{7}$ ۴) $-\frac{31}{17}$

Hint به $\tan x$ نیاز داری، پس یه کاری کن از عبارت فرض سؤال $\tan x$ رو به دست بیاری. یکی از کارهایی که می‌تونی بکنی توان‌رسانیه.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول:

نکته

$$\tan(\frac{\pi}{4} \pm \square) = \frac{1 \pm \tan \square}{1 \mp \tan \square}$$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$\tan(\frac{\pi}{4} - 2x) = \frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x} \quad (*)$$

پس به $\tan 2x$ نیاز داریم و طبیعتاً برای محاسبهٔ $\tan 2x$ هم به $\tan x$ نیاز داریم.

گام دوم: اگر طرفین تساوی صورت سؤال را به توان ۲ برسانیم، داریم:

$$4\sin^2 x + \cos^2 x - 4\sin x\cos x = 1 \Rightarrow 4\sin^2 x + \underbrace{\cos^2 x - 1}_{-\sin^2 x} - 4\sin x\cos x = 0$$

$$\Rightarrow 3\sin^2 x - 4\sin x\cos x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(3\sin x - 4\cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = 0 \\ 3\sin x - 4\cos x = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

گام سوم: به ازای هر کدام از مقادیر $\tan x$، ابتدا عبارت $\tan 2x$ و سپس عبارت $\tan(\frac{\pi}{4} - 2x)$ را حساب می‌کنیم:

- $\tan x = 0 \Rightarrow \tan 2x = 0 \xrightarrow{(*)} \tan(\frac{\pi}{4} - 2x) = 1$
- $\tan x = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan 2x = \frac{\frac{8}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = -\frac{24}{7} \xrightarrow{(*)} \tan(\frac{\pi}{4} - 2x) = \frac{1 + \frac{24}{7}}{1 - \frac{24}{7}} = -\frac{31}{17}$

۷ به ازای کدام مقدار طبیعی n، $\tan\frac{\pi}{n}$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۲\sqrt{۳}x-۱=۰$ است؟

در خود معادله صدق می‌کند.

۱) ۸

۲) ۱۲

۳) ۲۴

۴) ۳۶

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر به جای x عبارت $\tan\frac{\pi}{n}$ قرار دهیم، تساوی برقرار می‌شود:

$$\tan^۲\frac{\pi}{n}+۲\sqrt{۳}\tan\frac{\pi}{n}-۱=۰$$

گام دوم: با توجه به ضرایب معادله، این احساس می‌شود که باید از اتحاد $\tan۲\theta$ استفاده کنیم؛ زیرا:

$$۲\sqrt{۳}\tan\frac{\pi}{n}=۱-\tan^۲\frac{\pi}{n}\Rightarrow\frac{۲\tan\frac{\pi}{n}}{۱-\tan^۲\frac{\pi}{n}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\tan\frac{۲\pi}{n}=\tan\frac{\pi}{۶}$$

پس $\frac{۲\pi}{n}$ برابر $\frac{\pi}{۶}$ و در نتیجه $n=۱۲$ است.

اشاره: حواسمان هست که جواب معادلهٔ $\tan\frac{۲\pi}{n}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ به صورت $\frac{۲\pi}{n}=k\pi+\frac{\pi}{۶}$ است که از آن $n=\frac{۱۲}{۶k+۱}$ به دست می‌آید. در این تساوی فقط به ازای $k=۰$ مقدار n طبیعی است.

۸ جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x + m = ۰$ عبارت‌اند از $\tan\alpha$ و $\cot\beta$. اگر $\tan(\beta - \alpha) = ۲$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -۹ ۲) -۴ ۳) -۷ ۴) -۶

Hint باید بین اتحاد $\tan(\beta - \alpha)$ و S و P معادلهٔ درجه‌دوم رابطه برقرار کنی.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم داده‌شده، $\tan\alpha$ و $\cot\beta = \frac{۱}{\tan\beta}$ هستند. پس داریم:

مجموع جواب‌ها: $S = \tan\alpha + \frac{۱}{\tan\beta} = ۴ \Rightarrow \frac{\tan\alpha\tan\beta + ۱}{\tan\beta} = ۴$

حاصل‌ضرب جواب‌ها: $P = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = m$

گام دوم: حال از فرض دوم سؤال استفاده می‌کنیم:

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{۱ + \tan\alpha\tan\beta} = ۲$$

گام سوم: عبارت $۱ + \tan\alpha\tan\beta$ در دو عبارت مربوط به S و $\tan(\beta - \alpha)$ مشترک است. از رابطهٔ S داریم:

$$۱ + \tan\alpha\tan\beta = ۴\tan\beta$$

این تساوی را در $\tan(\beta - \alpha)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{۴\tan\beta} = ۲ \Rightarrow \tan\beta - \tan\alpha = ۸\tan\beta \Rightarrow \tan\alpha = -۷\tan\beta \text{ یا } \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \underbrace{-۷}_{m}$$

↓ این همان مقدار m است.

۹ مقادیر عددی ماکزیمم، دورهٔ تناوب و مینیمم تابع $f(x)=۴+a\sin\frac{\pi x}{a}$ با همین ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی هستند. مقدار $f(\frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) $۴+\sqrt{۳}$ ۲) ۵ ۳) $۴-\sqrt{۳}$ ۴) ۳

Hint فرمول‌های ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب که آسونن. فقط کافیه رابطهٔ جملات متوالی دنبالهٔ حسابی رو بنویسی. اونم اینه که ۲ برابر وسطی می‌شه مجموع کناری‌ها.

درس Box در توابع مثلثاتی به فرم $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$، سه فرمول بسیار مهم و اساسی را به شرح زیر داریم:

مقدار ماکزیمم: $y_{max}=c+|a|$

مقدار مینیمم: $y_{min}=c-|a|$

دورهٔ تناوب: $T=\frac{۲\pi}{|b|}$

گام اول: با استفاده از روابط درس‌باکس، مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب تابع f را برحسب a می‌نویسیم:

$$y_{max}=۴+|a|\ ,\ y_{min}=۴-|a|\ ,\ T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{a}|}=۲|a|$$

گام دوم: حال رابطهٔ مفروض بین آن‌ها را می‌نویسیم:

نکته اگر اعداد a ، b و c سه جملهٔ متوالی (یا متساوی‌الفاصله) از یک دنبالهٔ حسابی باشند، رابطهٔ $۲b=a+c$ بین آن‌ها برقرار است.

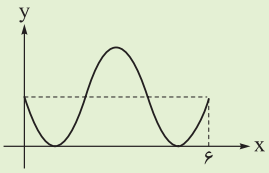
$$۲T=y_{max}+y_{min}\Rightarrow ۴|a|=۴+|a|+۴-|a|=۸\Rightarrow |a|=۲\Rightarrow a=\pm ۲$$

گام سوم: به ازای هر دو مقدار $a=\pm ۲$، ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=۴+۲\sin\frac{\pi x}{۲}$ خواهد بود.

گام چهارم: باید به جای x مقدار $\frac{۱}{۳}$ قرار دهیم تا مقدار $f(\frac{۱}{۳})$ به دست آید:

$$f(\frac{۱}{۳})=۴+۲\sin\frac{\pi}{۶}=۴+۲(\frac{۱}{۲})=۵$$

۱۰ قسمتی از نمودار تابع $y = ۲ + a\sin bx$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $|ab|$ چند برابر مقدار عددی دورهٔ تناوب تابع است؟



۱) $\frac{\pi}{۲}$

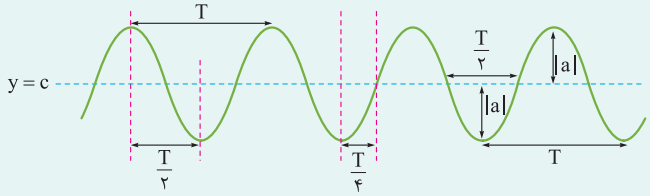
۲) ۲π

۳) $\frac{\pi}{۳}$

۴) $\frac{\pi}{۴}$

درس Box

نمودار توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ در حالت کلی به صورت زیر است:

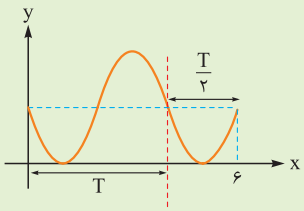


پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: کم‌ترین مقدار تابع، از روی نمودار، برابر صفر است. پس طبق فرمول‌های مهمی که در سؤال قبل یاد گرفتیم، داریم:

$$y_{min} = ۲ - |a| = ۰ \Rightarrow |a| = ۲$$

گام دوم: طبق درس‌باکس، طول بازهٔ $[۰,۶]$ برابر $۱/۵$ دورهٔ تناوب تابع است:



$$\frac{۳}{۲}T = ۶ \Rightarrow T = ۴$$

گام سوم: رابطهٔ دورهٔ تناوب را می‌نویسیم:

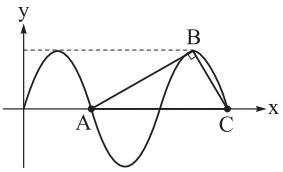
$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۴ \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{۲}$$

گام چهارم: حالا می‌رویم سراغ خواستهٔ سؤال.

$$|ab| = |a||b| = ۲ \times \frac{\pi}{۲} = \pi \Rightarrow \frac{|ab|}{T} = \frac{\pi}{۴}$$

حاصل $|ab|$، $\frac{\pi}{۴}$ برابر دورهٔ تناوب است.

۱۱ بخشی از نمودار تابع $y = a\sin 2\pi x$ در شکل زیر رسم شده است. اگر مثلث **ABC** در رأس **B** قائم‌الزاویه باشد، مساحت آن کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

۳) $\frac{1}{4}$

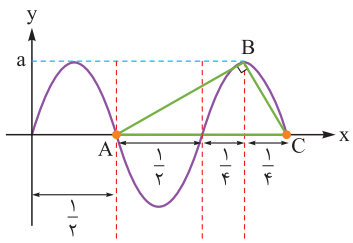
۴) $\frac{1}{2}$

Hint به شیب‌های دو پاره‌خط AB و BC فکر کن.

گام اول: دورهٔ تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

پس طبق درس‌باکس سؤال قبل، شکل سؤال را به صورت زیر تکمیل می‌کنیم:



پس مختصات نقاط A، B و C به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A(\frac{1}{2},0)\ ,\ B(\frac{5}{4},a)\ ,\ C(\frac{3}{2},0)$$

گام دوم: طبق نکتهٔ زیر، علامت a مثبت است:

نکته اگر تابع $y = a\sin bx$ در $x = 0$ صعودی باشد، $ab > 0$ و اگر نزولی باشد، $ab < 0$ است.

گام سوم: اگر مثلث ABC در رأس B قائمه باشد، حاصل‌ضرب شیب‌های دو پاره‌خط AB و BC باید -1 شود:

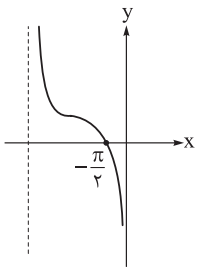
$$m_{AB} = \frac{a-0}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}} = \frac{4a}{3}\ ,\ m_{BC} = \frac{a-0}{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}} = -4a$$

$$\xrightarrow{m_{AB}.m_{BC}=-1} (\frac{4a}{3})(-4a) = -1 \Rightarrow -\frac{16}{3}a^2 = -1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

گام چهارم: با توجه به شکل، مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(x_C - x_A)y_B = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

۱۲ نمودار تابع $f(x)=۱-\cot(mx)$ در یک دوره تناوب آن، در شکل زیر رسم شده است. طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع روی آن اکیداً نزولی است، کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۲}$

۲) π

۳) ۲π

۴) ۴π

Hint طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که ... همون دورهٔ تناوب تابعه. کافیه با جای‌گذاری $-\frac{\pi}{۲}$، مقدار m رو حساب کنی.

نکته در توابع $y=a\tan bx+c$ و $y=a\cot bx+c$ داریم:

۱) فاصلهٔ بین هر دو مجانب قائم متوالی برابر دورهٔ تناوب تابع است.

۲) مقدار این دورهٔ تناوب از رابطهٔ $T=\frac{\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.

۳) این توابع روی هر بازه از دامنه‌شان اکیداً یکنوا هستند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مقدار تابع در $x=-\frac{\pi}{۲}$ برابر صفر است:

$$f(-\frac{\pi}{۲})=۱-\cot(-\frac{m\pi}{۲})=۰ \Rightarrow \cot(\frac{m\pi}{۲})=-۱$$

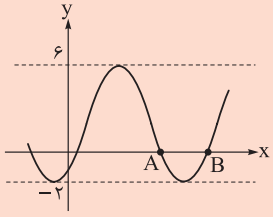
اولین کمان منفی‌ای که کتانژانت آن -۱ می‌شود، $-\frac{\pi}{۴}$ است.

$$\Rightarrow \frac{m\pi}{۲}=-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

گام دوم: طبق نکات سؤال، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع روی آن اکیداً یکنوا است، همان دورهٔ تناوب تابع است که از رابطهٔ $T=\frac{\pi}{|m|}$ به دست می‌آید:

$$\Rightarrow T=\frac{\pi}{|-\frac{۱}{۲}|}=۲\pi$$

۱۳ بخشی از نمودار تابع $f(x)=a\cos(bx+\frac{\pi}{۶})+c$ به صورت زیر است. اگر طول پاره‌خط AB برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد، حاصل $c+ab$ کدام است؟



۱) -۶

۲) ۱۰

۳) -۱۰

۴) ۶

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع را داریم:

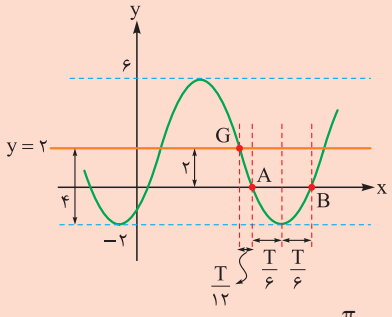
$$\begin{cases} y_{max}=c+|a|=۶ \\ y_{min}=c-|a|=-۲ \end{cases} \Rightarrow c=۲\ ,\ |a|=۴$$

و طبق نکتهٔ زیر، علامت a منفی است:

$$a=-۴$$

نکته تابع $y=a\cos bx$، اگر در $x=۰$ ماکزیمم داشته باشد، $a>۰$ و اگر مینیمم داشته باشد، $a<۰$ است.

گام دوم: نمودار رسم‌شدهٔ صورت سؤال را با رسم خط $y=۲$ تکمیل می‌کنیم:



چون اختلاف عرض نقطهٔ A و مقدار مینیمم برابر $\frac{|a|}{۲}$ است، تابع از نقطهٔ G تا نقطهٔ A به اندازهٔ $\frac{۱}{۱۲}$ دورهٔ تناوب خود را طی می‌کند. به همین ترتیب از نقطهٔ A تا نقطهٔ مینیمم و همچنین از نقطهٔ مینیمم تا نقطهٔ B، برابر $\frac{۱}{۶}$ دورهٔ تناوب است.

گام سوم: این یعنی طول پاره‌خط AB برابر $\frac{۱}{۳}$ دورهٔ تناوب تابع و طبق فرض برابر $\frac{\pi}{۳}$ است.

$$x_B-x_A=\frac{T}{۳}=\frac{\pi}{۳} \Rightarrow T=\pi$$

دورهٔ تناوب هم که از رابطهٔ $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ به دست می‌آید:

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=۲$$

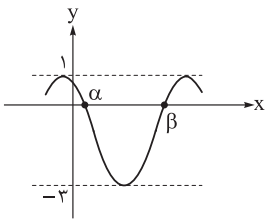
با توجه به این‌که انتقال افقی نمودار کم‌تر از $\frac{\pi}{۲}$ است $(f(x)=۲-۴\cos(bx+\frac{\pi}{۶}))$ و این‌که علامت a را منفی در نظر گرفتیم، پس b را باید مثبت در نظر بگیریم: (انتقال افقی)

$$b=۲$$

گام چهارم: در نهایت داریم:

$$c+ab=۲+(-۴)(۲)=-۶$$

۱۴ بخشی از نمودار تابع $f(x)=a-b\sin(\frac{\pi}{۳}-۲x)$ به صورت زیر است. حاصل $\beta-\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۲}$

۲) $\frac{۵\pi}{۶}$

۳) $\frac{۲\pi}{۳}$

۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

مشاوره این سؤال تقریباً شبیه سؤال قبلی است و ما در این‌جا این تیپ سؤال را با روش دیگری حل می‌کنیم. اگر در سؤال قبلی با فاصله‌های افقی نقاط A، G و B ارتباط برقرار نکردید، می‌توانید روش معادلهٔ مثلثاتی را طبق الگوی سؤال حاضر امتحان کنید.

Hint a و b که به دست میاد و برای α و β معادلهٔ مثلثاتی حل کن.

درس Box

معادلهٔ مثلثاتی، معادله‌ای است که متغیر مجهول ما در کمان یک نسبت مثلثاتی قرار دارد، مثل $\sin(x^۲-۱)=\frac{۵}{۷}$ یا $\tan\sqrt{۲x}=x^۲+۱$.

ساده‌ترین و ابتدایی‌ترین معادله‌های مثلثاتی و جواب‌های آن‌ها را به شرح زیر می‌بینید:

$$\sin\square=\sin\theta_{۰}\Rightarrow\square=\begin{cases}۲k\pi+\theta_{۰}\\ ۲k\pi+\pi-\theta_{۰}\end{cases}$$

$$\cos\square=\cos\theta_{۰}\Rightarrow\square=۲k\pi\pm\theta_{۰}$$

$$\tan\square=\tan\theta_{۰}\Rightarrow\square=k\pi+\theta_{۰}$$

که در آن‌ها k عددی صحیح است و $\square$ یک چندجمله‌ای درجه‌اول (خطی) برحسب x است.

پاسخ خیلی تشریحی

$$f(x)=a+b\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})$$

گام اول: مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع را داریم:

$$\begin{cases}y_{max}=a+|b|=۱\\ y_{min}=a-|b|=-۳\end{cases}\Rightarrow a=-۱,|b|=۲$$

اما چون انتقال افقی تابع $y=\sin x$ کم‌تر از $\frac{\pi}{۲}$ است و هم‌چنین تابع در $x=۰$ نزولی است. پس $b=-۲$ را قبول می‌کنیم:

$$f(x)=-۲\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})-۱$$

گام دوم: α و β صفرهای تابع هستند، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$-۲\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})-۱=۰\Rightarrow\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\\ \text{یا}\\ ۲x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

(چرا؟)

گام سوم: جواب‌های مثبت معادله را اگر به ترتیب بنویسیم داریم:

$$x=\frac{\pi}{۱۲},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۱۳\pi}{۱۲},\frac{۷\pi}{۴},\frac{۲۵\pi}{۱۲},\dots$$

که α اولین و β دومین جواب مثبت است:

$$\alpha=\frac{\pi}{۱۲},\ \beta=\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow\beta-\alpha=\frac{۳\pi}{۴}-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۲\pi}{۳}$$

۱۵ بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ $\cos ۳x + \sin x = ۰$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۹\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{۲۳\pi}{۱۲}$

۳) $\frac{۱۵\pi}{۸}$ ۴) $\frac{۱۲\pi}{۸}$

Hint نسبت رو تغییر بده، یا sin رو به cos تبدیل کن یا cos رو به sin.

درس Box در بعضی از معادلات زاویهٔ $\theta_{\circ}$ جزء زوایای آشنا نیست و برحسب x نوشته شده است، مثل $\tan ۳x = \tan x$. در این معادلات یکی از این کمان‌های ورودی را به عنوان $\theta_{\circ}$ انتخاب می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\tan ۳x = \tan \underbrace{x}_{\theta_{\circ}} \Rightarrow ۳x = k\pi + x \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به خاطر دامنه k نباید فرد باشد}} x = k\pi$$

و در برخی از معادلات، با استفاده از اتحادهای $\frac{k\pi}{۲} + \alpha$، نسبت‌ها را به یکدیگر تبدیل می‌کنیم تا در طرفین تساوی فقط یک نسبت مثلثاتی داشته باشیم. مثل معادلهٔ $\tan(\frac{\pi}{۸} - ۲x) = \cot ۳x$. می‌توانیم tan را به cot تبدیل کنیم یا برعکس.

$$\cot ۳x = \tan(\frac{\pi}{۲} - ۳x) \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{۸} - ۲x) = \tan(\underbrace{\frac{\pi}{۲} - ۳x}_{\theta_{\circ}}) \Rightarrow \frac{\pi}{۸} - ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۳x \Rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۸}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** معادله را به صورت $\cos ۳x = -\sin x$ بازنویسی می‌کنیم؛ بهتر است $-\sin x$ را برحسب cos بنویسیم. با توجه به اتحاد $\cos(\frac{\pi}{۲} + \square) = -\sin \square$ داریم:

$$\cos ۳x = \cos(\frac{\pi}{۲} + x)$$

گام دوم: حال $\theta_{\circ}$ را $\frac{\pi}{۲} + x$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$۳x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} + x) \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ \text{یا} \\ ۳x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸} \end{cases}$$

گام سوم: با مقداردهی متفاوت k جواب‌های بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت می‌شوند از $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۸}$، $\frac{۷\pi}{۸}$، $\frac{۱۱\pi}{۸}$ و $\frac{۱۵\pi}{۸}$ که بزرگ‌ترین آن‌ها $\frac{۱۵\pi}{۸}$ است.

۱۶ تعداد جواب‌های معادلهٔ $\cos^۲ ۲x + \cos^۲ x = ۱$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

Hint اگر از اتحاد $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$ استفاده کنی، شبیه تیپ معادلات سؤال قبل می‌شه، با این تفاوت که توان زوج داری؛ پس یا مساوی هم هستن یا قرینه.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: می‌توانیم از اتحاد $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$ استفاده کنیم تا با عبارت $\cos^۲ ۲x = ۴\cos^۴ x - ۴\cos^۲ x + ۱$ در معادله مواجه شویم، که این راه منطقی به نظر نمی‌رسد. راه ساده‌ترمان این است که معادله را به صورت $\cos^۲ ۲x = ۱ - \cos^۲ x$ بازنویسی کنیم که خواهیم داشت:

$$\cos^۲ ۲x = \sin^۲ x$$

گام دوم: این یعنی در حالت $\cos ۲x = \sin x$ یا $\cos ۲x = -\sin x$ را داریم که هر کدام با الگو و درس‌باکس سؤال قبل، قابل حل هستند:

$$\begin{cases} \cos ۲x = \sin x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ \text{یا} \\ ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + x \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases} \\ \cos ۲x = -\sin x = \cos(\frac{\pi}{۲} + x) \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + x \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

گام سوم: جواب‌های بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۶}$، $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۵\pi}{۶}$، $\frac{۷\pi}{۶}$، $\frac{۳\pi}{۲}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$ که تعداد آن‌ها برابر ۶ است.

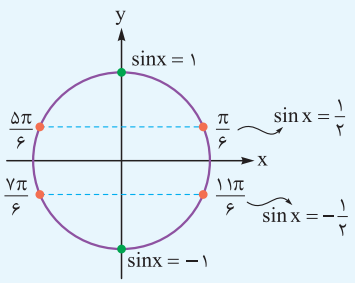
یه جور دیگه

در مرحلهٔ $\cos ۲x = \pm\sin x$ می‌توانستیم از اتحاد $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$ استفاده کنیم و ۲ معادلهٔ درجه‌دوم با تغییر متغیر $t = \sin x$ حل کنیم:

$$\begin{cases} ۱ - ۲\sin^۲ x = \sin x \Rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰ \xrightarrow{t=\sin x} ۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = \sin x = -۱ \\ \text{یا} \\ t = \sin x = \frac{۱}{۲} \end{cases} \\ ۱ - ۲\sin^۲ x = -\sin x \Rightarrow ۲\sin^۲ x - \sin x - ۱ = ۰ \xrightarrow{t=\sin x} ۲t^۲ - t - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = \sin x = ۱ \\ t = \sin x = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \end{cases}$$

نکته در خیلی از معادلاتی که تعداد جواب‌ها را در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ یا $[۰,۲\pi]$ می‌خواهند، یک راه ساده می‌تواند مشخص‌کردن انتهای کمان جواب‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی باشد.

با رسم دایرهٔ مثلثاتی، جواب‌ها را مشخص می‌کنیم:



پس تعداد جواب‌ها برابر ۶ است.

۱۷ معادلهٔ $\tan^۲ x + ۳\cot^۲ x = ۴$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

Hint cot رو به tan تبدیل کن و از تغییر متغیر $u = \tan^۲ x$ استفاده کن. چون تعداد رو در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ ازت می‌خواد، بهتره دایرهٔ مثلثاتی بکشی.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** $\cot x$ را به صورت $\frac{۱}{\tan x}$ می‌نویسیم:

$$\tan^۲ x + \frac{۳}{\tan^۲ x} = ۴ \xrightarrow[\tan x \neq ۰]{\times \tan^۲ x} \tan^۴ x + ۳ = ۴\tan^۲ x$$

گام دوم: حال این معادله درجه‌چهار دومجذوری را با تغییر متغیر $u = \tan^۲ x$ حل می‌کنیم:

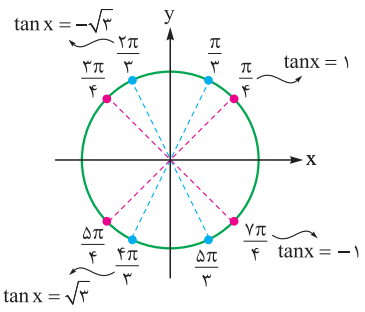
$$u^۲ + ۳ = ۴u \Rightarrow u^۲ - ۴u + ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} u = ۱ \text{ یا } ۳$$

گام سوم: معادله را برحسب $\tan x$ می‌نویسیم:

$$\tan^۲ x = ۱ \Rightarrow \tan x = \pm ۱$$

$$\tan^۲ x = ۳ \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{۳}$$

گام چهارم: انتهای کمان‌های جواب را روی دایرهٔ مثلثاتی معین می‌کنیم:



با توجه به شکل، تعداد جواب‌ها برابر ۸ است.

۱۸ یکی از جواب‌های معادلهٔ $\sin(\frac{\pi}{4}-x)+a\cos(\frac{\pi}{4}+x)=1$، $x=\frac{\pi}{12}$ است. مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{8\pi}{3}$ ۳) 2π ۴) $\frac{4\pi}{3}$

Hint $x=\frac{\pi}{12}$ رو جای‌گذاری کن و a را به دست بیار، بعدش می‌بینی که $\frac{\pi}{4}-x$ و $\frac{\pi}{4}+x$ متمم هستن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** طبیعتاً برای حل معادله در حالت کلی، به مقدار a نیاز داریم، پس $x=\frac{\pi}{12}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12})+a\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12})=1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6}+a\cos\frac{\pi}{3}=1 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}a=1 \Rightarrow a=1$$

گام دوم: پس معادله $\sin(\frac{\pi}{4}-x)+\cos(\frac{\pi}{4}+x)=1$ است. چون $\frac{\pi}{4}-x$ و $\frac{\pi}{4}+x$ متمم هستند، $\sin(\frac{\pi}{4}-x)$ را به صورت $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ می‌نویسیم:

$$\Rightarrow 2\cos(\frac{\pi}{4}+x)=1 \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{1}{2}$$

گام سوم: در این معادله $\theta_0=\frac{\pi}{3}$ است.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}+x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{12} \\ \text{یا} \\ x=2k\pi-\frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

گام چهارم: جواب‌های بازهٔ $(0,2\pi)$ فقط $x=\frac{\pi}{12}$ و $x=\frac{17\pi}{12}$ هستند که مجموع این دو جواب برابر $\frac{18\pi}{12}=\frac{3\pi}{2}$ است.

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

۱۹ اگر میانگین داده‌های $3x_n - 1, \ldots, 3x_2 - 1, 3x_1 - 1$ برابر با ۲۰ باشد، میانگین داده‌های $\frac{1}{2}x_n + 3, \ldots, \frac{1}{2}x_2 + 3, \frac{1}{2}x_1 + 3$ چه‌قدر است؟

۱) ۶/۵ ۲) ۷ ۳) ۷/۵ ۴) ۸

Hint

ابتدا میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ رو به دست بیار.

درس Box

- اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، میانگین آن‌ها نیز با همان مقدار ثابت جمع خواهد شد.
- اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آن‌ها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض کنیم $\bar{x}$ میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ باشد، در این صورت میانگین داده‌های $3x_1 - 1, 3x_2 - 1, \ldots, 3x_n - 1$ برابر است با $3\bar{x} - 1$.

از طرفی می‌دانیم میانگین این داده‌ها برابر ۲۰ است، پس داریم:

$$3\bar{x} - 1 = 20 \Rightarrow \bar{x} = \frac{21}{3} = 7$$

گام دوم: حال با داشتن میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$، میانگین داده‌های $\frac{1}{2}x_1 + 3, \frac{1}{2}x_2 + 3, \ldots, \frac{1}{2}x_n + 3$ را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{1}{2}\bar{x} + 3 = \frac{1}{2} \times 7 + 3 = 6/5$$

۲۰ ۱۰ تمبر ۸۰۰تومانی و به مقدار دلخواه، تمبر ۵۰۰تومانی داریم. به چند طریق می‌توان نامه‌ای که نیاز به ۱۳۰۰۰ تومان تمبر دارد را با استفاده از این تمبرها آمادهٔ ارسال کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره در بخش نظریهٔ اعداد، معادلهٔ سیاله پای ثابت تست‌های کنکوره.

درس Box

- هر معادله با ضرایب (a,b,c) و جواب‌های صحیح (x,y)، به صورت $ax+by=c$ را یک معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم.
- معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ به دو صورت زیر می‌تواند به یک معادلهٔ همنهشتی (با مجهول x و y) تبدیل شود.

۱) $ax \overset{b}{\equiv} c$

۲) $by \overset{a}{\equiv} c$

تذکر: شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $(a,b)\mid c$.

- چنان‌چه x_0 و y_0 جواب‌های اولیهٔ معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ باشد، آن‌گاه جواب‌های کلی آن به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases}$$

که در آن $(a,b)=d$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تعداد تمبر ۸۰۰ تومانی را x و تعداد تمبر ۵۰۰ تومانی را y در نظر می‌گیریم؛ پس داریم:

$$800x+500y=13000$$

گام دوم: دو طرف معادله را بر ۱۰۰ تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین:

$$8x+5y=130$$

دقت کنید که $x \le 10$ است.

گام سوم: با معادلهٔ سیاله سروکار داریم. $x_0=0$ و $y_0=26$ یک جواب اولیه برای معادلهٔ سیالهٔ $8x+5y=130$ است؛ پس داریم:

$$\begin{cases} x = 0+5k \\ y = 26-8k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5k \\ y = 26-8k \end{cases}, \quad (8,5)=1$$

گام چهارم: از آن‌جایی که تعداد تمبرها نمی‌تواند منفی باشد و از طرفی ۱۰ تمبر ۸۰۰ تومانی داریم؛ پس:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \Rightarrow 0 \le 5k \le 10 \Rightarrow 0 \le k \le 2 \\ 0 \le y \Rightarrow 0 \le 26-8k \Rightarrow k \le \frac{26}{8} = 3/25 \end{cases} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0,1,2$$

گام پنجم:

$$k=0 \Rightarrow x=0, y=26$$

$$k=1 \Rightarrow x=5, y=18$$

$$k=2 \Rightarrow x=10, y=10$$

۲۱ از معادلهٔ $۷^{n} \overset{۱۹}{\equiv} ۱$ چند جواب دورقمی برای n به دست می‌آید؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۳۰

نکته

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^{n} \overset{m}{\equiv} b^{n}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به دنبال توانی از ۷ هستیم که به پیمانهٔ ۱۹ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۱- داشته باشد.

$۷^{۱} \overset{۱۹}{\equiv} ۷$

$\times ۷$

$۷^{۲} \overset{۱۹}{\equiv} ۴۹ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱$

$\times ۷$

$۷^{۳} \overset{۱۹}{\equiv} ۷۷ \overset{۱۹}{\equiv} ۱$

گام دوم: طرفین رابطهٔ همنهشتی اخیر را به توان k می‌رسانیم:

$$۷^{۳} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{طرفین به توان } k} ۷^{۳k} \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

بنابراین اعداد مضرب ۳ در همنهشتی صدق می‌کنند که در بین آن‌ها دنبال اعداد دورقمی هستیم.

گام سوم: تعداد اعداد دورقمی مضرب ۳ از $۱۲ = ۳ \times ۴$ تا $۹۹ = ۳ \times ۳۳$ برابر ۳۰ تا است.

یه جور دیگه

تعداد اعداد دورقمی مضرب ۳ برابر است با:

$$\left[\frac{۹۹}{۳}\right] - \left[\frac{۹}{۳}\right] = ۳۳ - ۳ = ۳۰$$

$\left[\frac{۹۹}{۳}\right]$: اعداد مضرب ۳ کم‌تر از ۱۰۰

$\left[\frac{۹}{۳}\right]$: یک‌رقمی‌های مضرب ۳

۲۲ میانگین ۵ دادهٔ x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 برابر $\bar{x}$ و $x_1-\bar{x}=1$، $x_2-\bar{x}=2$، $x_3-\bar{x}=3$، $x_4-\bar{x}=a$ و $x_5-\bar{x}=b$ است. با حذف یکی از داده‌ها میانگین تغییری نمی‌کند. در این صورت کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

۱) کوچک‌ترین داده ۶ واحد از میانگین داده‌ها کم‌تر است.

۲) کوچک‌ترین داده ۳ واحد از میانگین داده‌ها کم‌تر است.

۳) بزرگ‌ترین داده ۱ واحد از میانگین داده‌ها بیشتر است.

۴) بزرگ‌ترین داده ۶ واحد از میانگین داده‌ها بیشتر است.

نکته

۱) برای داده‌های x_1، x_2، ... x_n با میانگین $\bar{x}$ داریم:

$$(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\ldots(x_n-\bar{x})=(x_1+x_2+\ldots+x_n)-n\bar{x}=n\bar{x}-n\bar{x}=0$$

۲) اگر داده‌ای را از بین داده‌ها حذف کنیم و میانگین تغییر نکند، آن داده با میانگین برابر بوده است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق نکتهٔ (۱)، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین همواره برابر صفر است؛ بنابراین:

$$1+2+3+a+b=0 \Rightarrow a+b=-6$$

گام دوم: با حذف یکی از داده‌ها، میانگین تغییری نکرده پس این داده با میانگین برابر بوده؛ بنابراین اختلاف این داده از میانگین صفر است؛ در نتیجه a یا b برابر صفر است. فرض کنیم $a=0$؛ پس $b=-6$.

گام سوم: کم‌ترین اختلاف داده از میانگین مربوط به کوچک‌ترین داده است که برابر ۶- است؛ پس داریم:

$$b=-6 \Rightarrow x_i-\bar{x}=-6 \Rightarrow x_i=\bar{x}-6$$

۲۳ جدول فراوانی تعدادی دادهٔ آماری به صورت زیر است. در نمودار دایره‌ای این داده‌ها، اختلاف بزرگ‌ترین زاویه و کوچک‌ترین زاویه چه‌قدر است؟

دسته	$a-10$	$10-(a+4)$	$b-c$	$c-16$
فراوانی	b	$a+2$	$c+10$	۴

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۶ ۴) ۱۴۰

درس Box

در جدول فراوانی متغیرهای پیوسته، دامنهٔ تغییرات برابر اختلاف بزرگ‌ترین داده و کوچک‌ترین داده است. هم‌چنین طول دسته از تقسیم دامنهٔ تغییرات بر تعداد دسته‌ها به دست می‌آید.

زاویهٔ مرکزی هر قطاع در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\theta_i = \frac{f_i}{\sum f_i} \times ۳۶۰^\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اختلاف کران بالای دستهٔ اول و چهارم با ۳ برابر طول دسته برابر است؛ پس داریم:

$$(۱۶-۱۰) = ۳ \times \text{طول دسته} \Rightarrow \text{طول دسته} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

گام دوم: حال با داشتن طول دسته، مقادیر a، b و c را به دست می‌آوریم و سپس جدول فراوانی داده‌ها را تکمیل می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۱۰-a=۲ \Rightarrow a=۸ \\ ۱۶-c=۲ \Rightarrow c=۱۴ \\ c-b=۲ \xrightarrow{c=۱۴} b=۱۲ \end{cases} \Rightarrow$$

دسته	۸ ـ ۱۰	۱۰ ـ ۱۲	۱۲ ـ ۱۴	۱۴ ـ ۱۶
فراوانی	۱۲	۱۰	۲۴	۴

گام سوم: کوچک‌ترین زاویه مربوط به دستهٔ $(۱۶ - ۱۴)$ با کم‌ترین فراوانی و بزرگ‌ترین زاویه مربوط به دستهٔ $(۱۴ - ۱۲)$ با بیشترین فراوانی است؛ بنابراین:

$$\theta_i = \frac{f_i}{\sum f_i} \times ۳۶۰^\circ \Rightarrow \theta_۳ - \theta_۴ = \frac{۲۴-۴}{۵۰} \times ۳۶۰^\circ = ۱۴۴^\circ$$

۳۴ معادلهٔ سیالهٔ $۲۱x+۱۴y+۲a=۴$ به ازای چند عدد طبیعی کم‌تر از ۵۰ برای a دارای جواب است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

Hint *برو سراغ شرط جواب معادلهٔ سیاله.*

نکته شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $(a,b)\mid c$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** بررسی شرط داشتن جواب معادلهٔ سیاله:

$$۲۱x+۱۴y=۴-۲a \xrightarrow{\text{شرط جواب}} (۲۱,۱۴)\mid ۴-۲a \Rightarrow ۷\mid ۴-۲a$$

گام دوم:

$$۷\mid ۴-۲a \Rightarrow ۴-۲a\overset{۷}{\equiv}۰ \Rightarrow ۴\overset{۷}{\equiv}۲a \xrightarrow{(۲,۷)=۱} ۲\overset{۷}{\equiv}a$$

بنابراین $a=۷k+۲$ ، $(k\in\mathbb{Z})$.

گام سوم: به دست آوردن اعداد طبیعی کم‌تر از ۵۰ برای a :

$$۱\le a\le ۵۰ \Rightarrow ۱\le ۷k+۲\le ۵۰ \Rightarrow k=۰,۱,۲,...,۶$$

در نتیجه معادلهٔ سیاله به ازای ۷ عدد طبیعی کم‌تر از ۵۰ برای a ، دارای جواب است.

۲۵ باقی‌ماندهٔ تقسیم $(۴۲!)^{۲۰۰} + ۳^{۲۰۰} + ۷^{۲۰۰}$ بر ۲۱ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

نکته

۱) برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره داریم:

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

۲)

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

۳) عدد $n!$ بر هر عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n بخش‌پذیر است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عدد $۴۲!$ مضرب ۲۱ است، پس بر ۲۱ بخش‌پذیر است.

گام دوم: طبق اتحاد نکتهٔ ۱ داریم:

$$۷^{۲۰۰} + ۳^{۲۰۰} \overset{۳\times۷}{\equiv} (۷+۳)^{۲۰۰} \Rightarrow ۷^{۲۰۰} + ۳^{۲۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} ۱۰^{۲۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} (۱۰۰)^{۱۰۰}$$

$$۱۰۰ \overset{۲۱}{\equiv} ۱۶ \Rightarrow ۱۰۰^{۱۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} ۱۶^{۱۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} ۲^{۴۰۰} \quad (۱)$$

$$۲^۶ \overset{۲۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۲}} (۲^۶)^{۶۶} \overset{۲۱}{\equiv} ۱^{۶۶} \Rightarrow ۲^{۳۹۶} \overset{۲۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۲^۴} ۲^{۴۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} ۱۶ \quad (۲)$$

گام سوم: از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$۷^{۲۰۰} + ۳^{۲۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} ۲^{۴۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} ۱۶$$

۲۶ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = ۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۰

Hint *مشابه تمرین کتاب درسی.*

نکته برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره داریم:

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در اتحاد بالا قرار می‌دهیم؛ $a = ۱۱$، $b = ۱۲$ و $n = ۵۱$؛ پس داریم:

$$(۱۱+۱۲)^{۵۱} \overset{۱۱\times۱۲}{\equiv} ۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱} \Rightarrow ۲۳^{۵۱} \overset{۱۳۲}{\equiv} ۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱}$$

گام دوم:

$$۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱} \overset{۱۳۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow A \overset{۱۳۲}{\equiv} ۰$$

عدد A بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است؛ پس باقی‌ماندهٔ A بر عدد ۱۳۲ برابر صفر است.

۲۷ از معادلهٔ $2x^2 + 2 \overset{7}{\equiv} 5x$ چند جواب طبیعی دورقمی برای x به دست می‌آید؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

نکته اگر p عددی اول، $a, b \in \mathbb{Z}$ و $ab \overset{p}{\equiv} 0$، آن‌گاه $a \overset{p}{\equiv} 0$ یا $b \overset{p}{\equiv} 0$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا $5x$ را به طرف چپ معادله می‌بریم؛ پس داریم:

$$2x^2 - 5x + 2 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow (2x-1)(x-2) \overset{7}{\equiv} 0$$

گام دوم: چون پیمانه عددی اول است؛ بنابراین حتماً یکی از پرانتزها مضرب ۷ است؛ در نتیجه:

$$\begin{cases} 2x - 1 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 2x \overset{7}{\equiv} 1 \overset{7}{\equiv} 8 \xrightarrow{(2,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 4 \\ \text{یا} \\ x - 2 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{7}{\equiv} 2 \end{cases}$$

پس باقی‌ماندهٔ x بر ۷ برابر ۲ یا ۴ است؛ یعنی $x = 7k + 2$ یا $x = 7k + 4$.

گام سوم: حال تعداد جواب‌های طبیعی و دورقمی x را به دست می‌آوریم.

$$10 \le x \le 99 \Rightarrow \begin{cases} 10 \le 7k + 2 \le 99 \Rightarrow k = 2, 3, \ldots, 13 & \text{دوازده جواب} \\ 10 \le 7k + 4 \le 99 \Rightarrow k = 1, 2, \ldots, 13 & \text{سیزده جواب} \end{cases}$$

پس در مجموع ۲۵ جواب طبیعی دورقمی برای x وجود دارد.

۲۸ باقی‌ماندهٔ عدد $۶^{۷۹}$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

نکته اگر p عدد اول و a عددی صحیح باشد به طوری که $p \nmid a$، در این صورت:

$$a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** طبق نکتهٔ بالا، $۶^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$.

گام دوم: کافی است باقی‌ماندهٔ $۷^{۹}$ را بر ۱۲ به دست آوریم:

$$۷^{۲} \overset{۱۲}{\equiv} ۴۹ \overset{۱۲}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان } ۴} (۷^{۲})^{۴} \overset{۱۲}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۹} \overset{۱۲}{\equiv} ۷$$

گام سوم: باقی‌ماندهٔ $۷^{۹}$ بر ۱۲ برابر ۷ است، پس می‌توانیم بنویسیم $۷^{۹} = ۱۲k + ۷$؛ بنابراین:

$$۶^{۷^{۹}} = ۶^{۱۲k+۷} = (۶^{۱۲})^{k} \times ۶^{۷}$$

گام چهارم: می‌دانیم $۶^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$؛ پس داریم:

$$(۶^{۱۲})^{k} \times ۶^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \times ۶^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} (۶^{۲})^{۳} \times ۶ \overset{۱۳}{\equiv} (-۳)^{۳} \times ۶ \overset{۱۳}{\equiv} -۶ \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$

$۶^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$ ، $۳۶ \overset{۱۳}{\equiv} -۳$ ، $-۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} -۱$

هندسه

۲۹ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به طوری که $a_{ij}=\begin{cases} j-i & ; i>j \\ i^۲-j & ; i=j \\ j+i & ; i<j \end{cases}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۳۲

۲) ۱۶

۳) ۸

۴) ۴

مشاوره مشابه این سؤال را بارها در امتحان نهایی داشته‌ایم.

درس Box

نمایش ماتریس: درایه‌های یک ماتریس را به این صورت نشان می‌دهیم:

$$A_{m\times n}=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

الف) i : شمارهٔ سطر

ب) j : شمارهٔ ستون

پ) a_{ij} : درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس A

ت) m : تعداد سطرها

ث) n : تعداد ستون‌ها

ج) $m\times n$: مرتبهٔ ماتریس

نکته

در ماتریس‌های مربعی برای درایه‌های واقع بر قطر اصلی داریم $i=j$، برای درایه‌های بالای قطر اصلی داریم $i<j$ و برای درایه‌های پایین قطر اصلی داریم $i>j$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (به دست آوردن ماتریس A): درایه‌های ماتریس A را یکی‌یکی با توجه به رابطهٔ داده‌شده به دست می‌آوریم، برای انجام این کار، به نکته‌ای که در درس‌باکس گفته‌ایم، دقت کنید.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ & ۵ \\ -۲ & -۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

گام دوم (محاسبهٔ دترمینان ماتریس A): سطر اول را در نظر گرفته و دترمینان ماتریس را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|=۰-۳\underbrace{\begin{vmatrix} -۱ & ۵ \\ -۲ & ۶ \end{vmatrix}}_{-۶-(-۱۰)=۴}+۴\underbrace{\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{vmatrix}}_{۱-(-۴)=۵}=-۱۲+۲۰=۸$$

۳۰ اگر $A=\begin{bmatrix} |A| & -۱۳ & ۸ \\ ۱ & |A| & ۱ \\ ۱ & ۲ & |A| \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس $A+I$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (محاسبهٔ $|A|$)**: سطر اول ماتریس را در نظر می‌گیریم، با استفاده از فرمول دترمینان داریم:

$$A=\begin{bmatrix} |A| & -۱۳ & ۸ \\ ۱ & |A| & ۱ \\ ۱ & ۲ & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=|A|(|A|^۲-۲)+۱۳(|A|-۱)+۸(۲-|A|)$$

$$\Rightarrow |A|^۳-۲|A|+۱۳|A|-۱۳+۱۶-۸|A|=|A| \Rightarrow \underbrace{|A|^۳+۲|A|+۳=۰}_{(|A|^۳+۱)+۲(|A|+۱)=۰}$$

$$\Rightarrow (|A|+۱)(|A|^۲-|A|+۱)+۲(|A|+۱)=(|A|+۱)(|A|^۲-|A|+۱+۲)=(|A|+۱)(\underbrace{|A|^۲-|A|+۳}_{\Delta=(-۱)^۲-۴(۱)(۳)=-۱۱<۰})=۰$$

$$\Rightarrow |A|=-۱$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): ماتریس A را با جای‌گذاری مقدار $|A|$ به دست می‌آوریم، سپس ماتریس $A+I$ را به دست می‌آوریم و در نهایت مجموع درایه‌های قطر فرعی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & -۱۳ & ۸ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A+I=\begin{bmatrix} ۰ & -۱۳ & ۸ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر فرعی}} ۱+۰+۸=۹$$

۳۱ اگر برای ماتریس $A_{۲\times ۲}$ تساوی $A^۲ = ۲A + ۳I$ برقرار باشد، آن‌گاه $|A - I|$ کدام است؟

۱) ± ۲ ۲) ± ۴ ۳) ± ۶ ۴) ± ۳

درس Box

۱) برای هر ماتریس مربعی مانند A و ماتریس همانی هم‌مرتبه با آن، اتحادهای جبری برقرار است، مثلاً:

$$(A-I)^۲ = A^۲ - ۲AI + I^۲ = A^۲ - ۲A + I$$

۲) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، مثلاً:

$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} = abc \,,\ \begin{vmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{vmatrix} = k^۳$$

۳) اگر k عدد حقیقی و I ماتریس همانی از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه: الف) $|I| = ۱$ ب) $|kI| = k^n$

۴) فرض کنیم $A_{n\times n}$ ماتریس دلخواه و m یک عدد طبیعی باشد، در این صورت: $|A^m| = |A|^m$

۵) اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه: $|kA| = k^n |A|$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (اضافه‌کردن I به دو طرف تساوی): برای ایجاد $A - I$، ابتدا تساوی را به صورت $A^۲ - ۲A = ۳I$ نوشته و I را به طرفین آن اضافه می‌کنیم تا با استفاده از اتحاد مربع کامل، $A - I$ را بسازیم.

$$A^۲ = ۲A + ۳I \Rightarrow A^۲ - ۲A + I = ۴I \Rightarrow (A-I)^۲ = ۴I$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): از دو طرف تساوی بالا دترمینان می‌گیریم.

$$(A-I)^۲ = ۴I \Rightarrow |A-I|^۲ = ۱۶ \Rightarrow |A-I| = \pm ۴$$

۳۲ اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & -۵\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $||-۲A|A|$ کدام است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۶

۳) −۱۶ ۴) −۱۲۸

درس Box

۱) درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس AB از ضرب سطر iاُم ماتریس A در ستون jاُم ماتریس B به دست می‌آید.

۲) اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه: $|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$

۳) اگر همهٔ درایه‌های ماتریس $n\times n$ را در عدد حقیقی k ضرب کنیم، دترمینان ماتریس k^n برابر می‌گردد. یعنی:

$$|kA_{n\times n}|=k^n|A|$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ A): ابتدا دو ماتریس داده‌شده را در هم ضرب می‌کنیم و A را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & -۵\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳+۴-۱ & ۹-۱۰+۰\\ -۲-۲+۳ & ۶+۵+۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۱۱\end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبهٔ |A|):

$$|A|=\begin{vmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۱۱\end{vmatrix}=۰-(-۱)(-۱)=-۱$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): حال با توجه به این‌که ماتریس A از مرتبهٔ ۲ است، مقدار $||-۲A|A|$ را به دست می‌آوریم:

$$||-۲A|A||=|(-۲)^۲|A||A||=|۴|A||A|=(۴|A|)^۲|A|=۱۶|A|^۳\overset{|A|=-۱}{=\!=\!=}-۱۶$$

۳۳ صفحه‌ای، تمام مولدهای یک رویهٔ مخروطی را قطع کرده است. مقطع حاصل کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) نقطه

۲) دایره

۳) بیضی

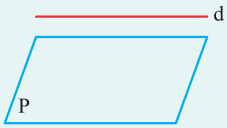
۴) سهمی

مشاوره با حالت‌های مختلف برش یک سطح مخروطی در فصل ۴ کتاب هندسهٔ ۱ آشنا شده‌اید و در فصل دوم کتاب هندسهٔ ۳ به طور کامل آن‌ها را می‌آموزید. برای حل این سؤال‌ها، باید تعریف مولد و محور سطح مخروطی را حتماً بدانید.

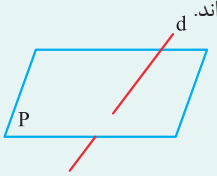
Hint هیچ مولدی نباید به تمامی درون صفحه باشد یا به تمامی خارج صفحه باشد.

درس Box خط d و صفحهٔ P در فضا سه وضعیت می‌تواند داشته باشد:

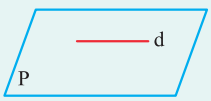
۱) موازی: اگر خط d با صفحهٔ P نقطهٔ مشترکی نداشته باشد، می‌گوییم d و P با هم موازی‌اند.



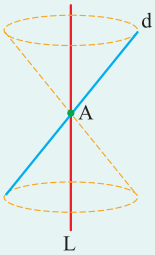
۲) متقاطع: اگر خط d و صفحهٔ P دقیقاً در یک نقطه مشترک باشند، می‌گوییم d و P با هم متقاطع‌اند.



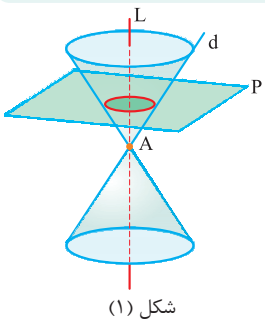
۳) منطبق: اگر خط d به تمامی در صفحهٔ P واقع باشد، می‌گوییم d بر P منطبق است.



فرض کنید دو خط d و L در نقطهٔ A متقاطع (غیرعمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط L را یک سطح (رویه) مخروطی می‌نامیم. در این حالت خط L را محور، نقطهٔ A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.



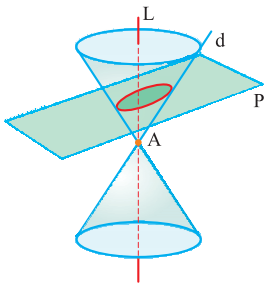
پاسخ خیلی تشریحی ✔ در شکل (۱) که مقطع دایره است، می‌بینید که صفحهٔ P با تمام مولدها متقاطع است و در حالت خاص اگر P به موازات خود پایین بیاید تا از A بگذرد، مقطع به جای دایره، یک نقطه (نقطهٔ A) خواهد بود.



شکل (۱)

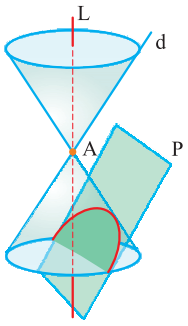
در شکل (۲) که مقطع بیضی است هم صفحهٔ P، با تمام مولدها متقاطع است.

پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) قابل قبول‌اند.



شکل (۲)

اما در شکل (۳) که مقطع سهمی است، صفحهٔ P با یکی از مولدها (خط d) موازی است پس خط d را قطع نمی‌کند، پس گزینهٔ (۴) قابل قبول نیست.



شکل (۳)

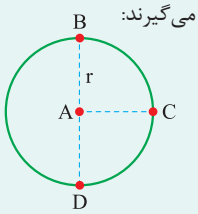
۳۴ چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ از پاره‌خط **AB** و به فاصلهٔ ۴ از وسط آن باشد؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) صفر
۴) به طول AB بستگی دارد.

درس Box

مجموعهٔ نقاط با فاصلهٔ ثابت از یک نقطه

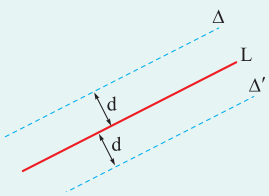
مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت A به فاصلهٔ r باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع r قرار می‌گیرند:



پس برای ترسیم مجموعهٔ نقاطی مانند M که در ویژگی $AM = r$ صدق می‌کنند، باید دایره‌ای به مرکز A و شعاع r رسم کنیم.

مجموعهٔ نقاط با فاصلهٔ ثابت از یک خط

نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ d از خط l قرار داشته باشند، روی دو خط موازی l در دو طرف آن هستند:

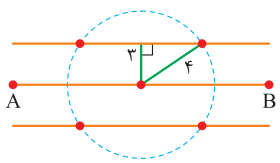


پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: همهٔ نقاطی که از AB به فاصلهٔ ۳ هستند روی دو خط موازی با آن و به فاصلهٔ ۳ از آن هستند و همهٔ نقاطی که از وسط AB به فاصلهٔ ۴ هستند، روی یک دایره به شعاع ۴ و به مرکز وسط AB هستند؛ پس شکل زیر را خواهیم داشت.



گام دوم (نقاط به فاصلهٔ ۴ از وسط AB): نقاط برخورد دایره با خطوط موازی با پاره‌خط AB، ۴ نقطه است؛ پس ۴ نقطه با این ویژگی داریم.



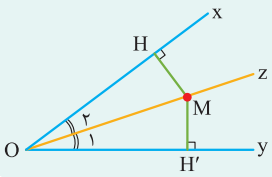
۳۵ زاویهٔ **xOy** و خط **d** مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطه‌ای داخل زاویه تعیین کنیم که از دو ضلع آن به یک فاصله و از خط **d** به فاصلهٔ **a** باشد. تعداد جواب‌ها کدام است؟

۱) یک یا بی‌شمار
۲) صفر، یک یا بی‌شمار
۳) صفر، یک، دو یا بی‌شمار
۴) صفر، دو یا بی‌شمار

درس Box

نیمساز

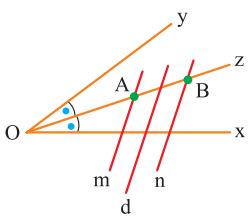
نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع زاویه به فاصلهٔ یکسان قرار دارند:



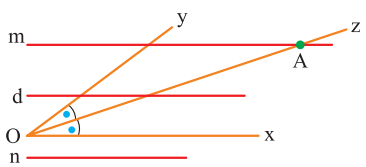
$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Leftrightarrow MH = MH'$$

پاسخ خیلی تشریحی

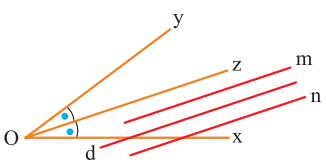
مکان هندسی نقاطی داخل یک زاویه که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله هستند، نیمساز آن زاویه می‌باشد. هم‌چنین مکان هندسی نقاطی که از خط معلوم d به فاصلهٔ معلوم a هستند، دو خط m و n موازی d و به فاصلهٔ a در دو طرف آن می‌باشند، محل(های) برخورد این دو مکان جواب سؤال است و حالت‌های زیر ممکن است:



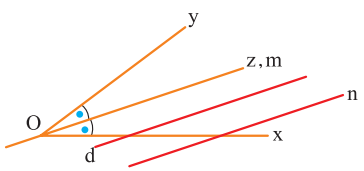
دو جواب (نقطه‌های A و B)



یک جواب (نقطهٔ A)

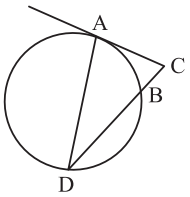


صفر جواب



نیم‌خط Oz منطبق بر m است؛ پس بی‌شمار جواب دارد.

۳۶ در شکل زیر **AC** بر دایره مماس است. اگر **DB = AC** باشد، آن‌گاه نسبت $\frac{AC}{BC}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

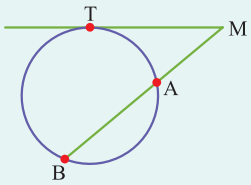
۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\sqrt{2}$

۴) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

درس Box

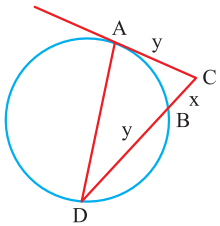
اگر از یک نقطهٔ خارج دایره، یک مماس و یک قاطع بر آن دایره رسم کنیم، مربع طول مماس برابر است با حاصل‌ضرب دو قطعهٔ قاطع؛ یعنی در شکل مقابل داریم:



$$MT^2 = MA \cdot MB$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (نوشتن رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع دایره): فرض کنیم $AC = DB = y$ و $BC = x$، داریم:



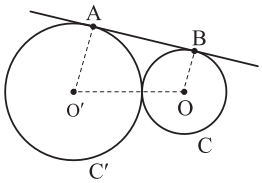
بنا به رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع می‌توان نوشت:

$$AC^2 = BC \cdot CD \Rightarrow y^2 = x(x+y) \Rightarrow y^2 = x^2 + xy$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): برای به دست آوردن $\frac{y}{x}$ عبارت‌به‌دست آمده در گام اول را به x^2 تقسیم می‌کنیم. آن‌گاه داریم:

$$(\frac{y}{x})^2 = 1 + \frac{y}{x} \xrightarrow{\frac{y}{x}=t} t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \xrightarrow{t>0} t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

۳۷ در شکل زیر، **A** و **B** نقاط تماس خط با دایره‌های مماس بر هم **C(O,۴)** و **C′(O′,۹)** هستند. مساحت چهارضلعی **ABOO′** کدام است؟



۱) ۱۹/۵

۲) ۲۶

۳) ۳۹

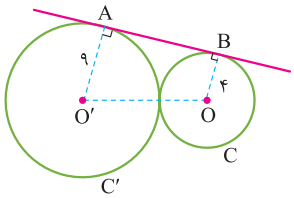
۴) ۷۸

درس Box طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس‌خارج به شعاع‌های R و R' برابر است با: $۲\sqrt{RR'}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ طول مماس‌مشترک خارجی):

مطابق شکل، با توجه به آن‌چه در درس‌باکس گفتیم، داریم:



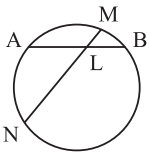
$$AB = ۲\sqrt{۴\times ۹} = ۱۲$$

گام دوم (محاسبهٔ مساحت چهارضلعی):

$O'A$ و OB بر AB عمود هستند، زیرا خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است، پس BO و AO' با هم موازی هستند و چهارضلعی $ABOO'$ ذوزنقه است؛ بنابراین مساحت آن برابر است با: $S = \frac{۱}{۲}(AO' + BO)\,.\,AB$؛ پس:

$$S = \frac{۹+۴}{۲}\times ۱۲ = ۱۳\times ۶ = ۷۸$$

۳۸ مطابق شکل، دو وتر **AB** و **MN** در نقطهٔ **L** متقاطع‌اند. اگر $\overset{\frown}{AMB} = ۶۰^\circ$ و $۳BL = ۴ML = NL$، آن‌گاه طول **MN** چند برابر شعاع دایره است؟

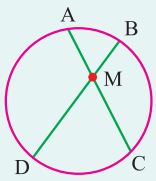


۱) $\frac{۱۵}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۸}{۱۳}$

درس Box

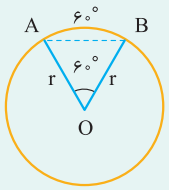
۱) رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در دایره:

هرگاه مطابق شکل، دو وتر، داخل دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:



$$MA \times MC = MB \times MD$$

۲) وتر نظیر کمان ۶۰ درجه در دایره، با شعاع دایره برابر است و بالعکس.

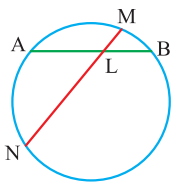


$$\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ \Leftrightarrow AB = r$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (محاسبهٔ طول AB بر حسب شعاع):** AB وتر نظیر کمان ۶۰° درجه است، پس طول آن برابر با شعاع دایره است؛ پس

$$AB = R$$

اگر شعاع دایره را R در نظر بگیریم، داریم:



گام دوم (محاسبهٔ NL برحسب R): برای ساده‌ترشدن نوشتن راه حل، طول NL را x در نظر می‌گیریم، آن‌گاه براساس فرض مسئله داریم:

$$NL = x \Rightarrow BL = \frac{x}{۳}, ML = \frac{x}{۴}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ طولی بین وترهای متقاطع در دایره، مقدار x را برحسب R به دست می‌آوریم:

$$AL \cdot BL = ML \cdot NL \Rightarrow (R - \frac{x}{۳}) \times \frac{x}{۳} = \frac{x}{۴} \times x \Rightarrow (R - \frac{x}{۳})\frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۴}x \Rightarrow ۱۲(R - \frac{x}{۳}) = ۹x$$

$$\Rightarrow ۱۲R - ۴x = ۹x \Rightarrow ۱۳x = ۱۲R \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۱۳}R$$

گام سوم (محاسبهٔ ML برحسب R):

$$ML = \frac{x}{۴} = \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۱}{۴}R = \frac{۳}{۱۳}R$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طول MN برابر است با $ML + NL$، طبق مقادیر به‌دست‌آمده در گام‌های دوم و سوم داریم:

$$MN = \frac{۳}{۱۳}R + \frac{۱۲}{۱۳}R = \frac{۱۵}{۱۳}R$$

۳۹ در دایره‌ای به شعاع ۲، وتر PQ که به فاصلهٔ $\sqrt{۳}$ از مرکز دایره است، سطح دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند. مساحت قسمت بزرگ‌تر به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱/۵ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰/۵

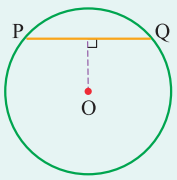
مشاوره در این سؤال باید بتوانید مساحت قطعهٔ مورد نظر را حساب کنید. محاسبهٔ مساحت قطعه در دایره، یکی از تمرین‌های کتاب درسی هندسهٔ ۲ است که حتماً باید آن را بلد باشید.

Hint

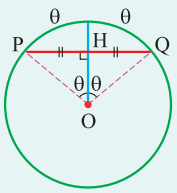
$\overset{\frown}{PQ} = ۶۰^\circ$

درس Box

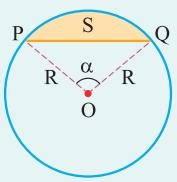
اگر دو نقطهٔ P و Q روی دایره‌ای به شعاع r واقع باشند، به طوری که $\overset{\frown}{PQ} = ۶۰^\circ$ آن‌گاه طول PQ برابر با r و فاصلهٔ PQ از مرکز دایره برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}r$ است، عکس این مطلب هم صحیح است.



۲) شعاع عمود بر هر وتر در یک دایره، آن وتر و کمان روبه‌روی آن را نصف می‌کند.



۳) قسمتی از سطح دایره که بین یک وتر و کمان متناظر آن قرار دارد، قطعه نامیده می‌شود. برای محاسبهٔ مساحت قطعهٔ مشخص‌شده در شکل، باید مساحت مثلث OPQ را از مساحت قطاع OPQ کم کنید، می‌توانید فرمول آن را هم حفظ کنید:

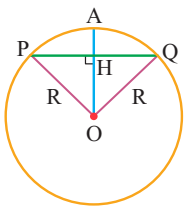


$$S = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲}\alpha R^۲ - \frac{۱}{۲}R^۲\sin\alpha \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}R^۲(\alpha - \sin\alpha)$$

(حواستان باشد که در این فرمول، باید α برحسب رادیان باشد.)

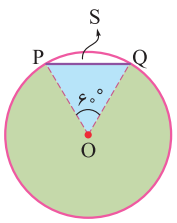
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: (رسم شکل مناسب محاسبهٔ $P\hat{O}Q$): با توجه به صورت سؤال، فاصلهٔ وتر PQ از مرکز دایره برابر است با $\sqrt{۳}$ و شعاع دایره $r = ۲$ است، یعنی $OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}r$، پس: $\overset{\frown}{PQ} = ۶۰^\circ$



بنابراین $\alpha = \underbrace{P\hat{O}Q}_{\text{زاویهٔ مرکزی}} = ۶۰^\circ$

گام دوم: (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): با استفاده از قسمت (۳) درس‌باکس، ابتدا مساحت قطعهٔ روبه‌روی زاویهٔ POQ را حساب می‌کنیم، توجه کنید که $\alpha = ۶۰^\circ = \frac{\pi}{۳}$.



$$S = \frac{۱}{۲}R^۲(\alpha - \sin\alpha) \xrightarrow[R=۲]{\alpha=\frac{\pi}{۳}} S = \frac{۱}{۲}\times ۴(\frac{\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}) \Rightarrow S = \frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۳}$$

با در نظر گرفتن $\pi \simeq ۳/۱۵$ و $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$، مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده را به دست می‌آوریم که برابر است با $S_{\text{دایره}} - S$، یعنی:

$$\pi(۲)^۲ - (\frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۳}) = \frac{۱۰\pi}{۳} + \sqrt{۳} \simeq ۱۰/۰۵ + ۱/۷ = ۱۱/۷۵$$

۴۰ از نقطهٔ **A** خارج از دایره‌ای به مرکز **O**، دو مماس **AT** و **AT′** را بر آن رسم می‌کنیم. اگر $T\hat{A}T' = ۳۰^\circ$، آن‌گاه مساحت چهارضلعی **ATOT′** کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}AT^۲$

۲) $\frac{۱}{۴}OA^۲$

۳) $\frac{۱}{۲}TT'^۲$

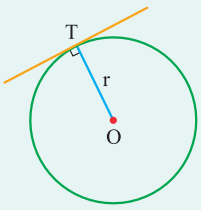
۴) $۲OT^۲$

مشاوره خاصیت مماس‌هایی که از نقطه‌ای خارج از دایره بر آن رسم می‌شوند، چندین بار در کنکورهای قبل مورد پرسش قرار گرفته و موضوع مهمی است، که در این‌جا با مبحث «مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌های حادهٔ ۱۵° و ۷۵°» ترکیب شده است.

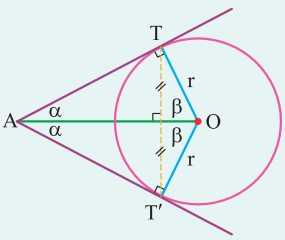
Hint از O به T وصل کنید.

درس Box

۱) هر جا صحبت از مماس بر دایره بود، اولین کاری که باید بکنید، این است که از مرکز دایره به نقطهٔ تماس وصل کنید و حواستان باشد که شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است.



۲) از هر نقطه بیرون یک دایره، می‌توان دو مماس بر آن دایره رسم کرد، مثلاً مطابق شکل، از نقطهٔ A دو مماس AT و AT′ را بر دایره رسم کرده‌ایم، اگر از O به T و T′ وصل کنیم، آن‌گاه دو مثلث ATO و AT′O همنهشت هستند و از این همنهشتی نتیجه‌های زیر حاصل می‌شود:

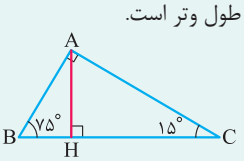


الف) $AT = AT'$

ب) AO نیمساز $T\hat{A}T'$ و $T\hat{O}T'$ است.

پ) AO عمودمنصف TT′ است.

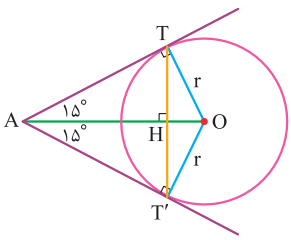
۳) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویه‌های حادهٔ آن ۱۵° و ۷۵° هستند، طول ارتفاع وارد بر وتر، ربع طول وتر است.



$AH = \frac{۱}{۴}BC$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: (رسم شکل مناسب) با توجه به صورت سؤال و درس‌باکس، شکل مناسب برای حل سؤال را رسم می‌کنیم.



گام دوم: (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال) با توجه به شکل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ATO داریم: $TH = \frac{۱}{۴}OA$

پس: $S_{ATO} = \frac{۱}{۲}TH.OA = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴}OA)OA = \frac{۱}{۸}OA^۲$

بنابراین: $S_{ATOT'} = ۲S_{ATO} = ۲(\frac{۱}{۸}OA^۲) = \frac{۱}{۴}OA^۲$

فیزیک دوازدهم

۴۱ قایقرانی درون یک قایق قرار دارد و روی آب آرام دریاچه به آرامی حرکت می‌کند. واکنش نیروهای وارد بر قایقران به چه جسم‌هایی وارد می‌شود؟

۱) آب، هوا، قایق، پارو
۲) کرهٔ زمین، قایق، هوا، آب
۳) کرهٔ زمین، قایق، پارو، هوا
۴) کرهٔ زمین، آب، پارو، قایق

درس Box

واکنش هر نیرویی به منشأ آن نیرو وارد می‌شود. به مثال‌های زیر دقت کنید:

- واکنش نیروی وزن، بر زمین وارد می‌شود.
- واکنش نیروی عمودی سطح، بر سطح وارد می‌شود.
- واکنش نیروی مقاومت هوا، بر هوا وارد می‌شود.
- واکنش نیروی کشش طناب، بر طناب وارد می‌شود.
- واکنش نیروی کشسانی فنر، بر فنر وارد می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

نیروهایی که بر قایقران وارد می‌شوند، عبارت‌اند از:

۱) نیروی وزن ۲) نیروی عمودی سطح ۳) نیروی اصطکاک ۴) نیروی پارو بر دست قایقران ۵) نیروی مقاومت هوا

واکنش نیروی وزن به کرهٔ زمین، واکنش نیروهای عمودی سطح و اصطکاک بر قایق، واکنش نیروی پارو بر دست قایقران بر پارو و واکنش نیروی مقاومت هوا بر هوا وارد می‌شود.

تیزبازی

آب به طور مستقیم به قایقران نیرو وارد نمی‌کند؛ بنابراین واکنش هیچ‌کدام از نیروهای وارد بر قایقران به آب وارد نمی‌شود. (رد گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴))

۴۲ جسمی به جرم ۴ kg هم‌زمان تحت تأثیر سه نیروی $\vec{F}_1 = (12\ N)\vec{i} + (-9\ N)\vec{j}$ ، $\vec{F}_2 = (-9\ N)\vec{i} + (12\ N)\vec{j}$ و $\vec{F}_3$ قرار می‌گیرد و از حال سکون با شتاب $5\ m/s^2$ در جهت مخالف محور x شروع به حرکت می‌کند. نیروی $\vec{F}_3$ کدام است؟

۱) $(-19\ N)\vec{i} + (9\ N)\vec{j}$

۲) $(13\ N)\vec{i} + (9\ N)\vec{j}$

۳) $(17\ N)\vec{i} + (-3\ N)\vec{j}$

۴) $(-23\ N)\vec{i} + (-3\ N)\vec{j}$

Hint اول بردار نیروی خالص رو از روی جرم و شتاب به دست بیار، بعدش بردار $\vec{F}_3$ رو به دست بیار.

درس Box طبق قانون دوم نیوتون، اگر شتاب را به صورت بردار یکه داشته باشیم، می‌توانیم نیروی خالص را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \Rightarrow F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** بردار شتاب را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که جسم با شتاب $5\ m/s^2$ در خلاف جهت محور x، شروع به حرکت می‌کند (تندشونده) داریم:

$$\vec{a} = -5(m/s^2)\vec{i}$$

گام دوم: بردار نیروی خالص وارد بر جسم را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \xrightarrow[m=4kg]{\vec{a}=-5(m/s^2)\vec{i}} \vec{F}_{net} = 4\times(-5\vec{i}) = -20\,(N)\vec{i}$$

گام سوم: نیروی $\vec{F}_3$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow -20\vec{i} = (12\vec{i} - 9\vec{j}) + (-9\vec{i} + 12\vec{j}) + \vec{F}_3$$

$$\Rightarrow \vec{F}_3 = -20\vec{i} - 12\vec{i} + 9\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{j} = -23\vec{i} - 3\vec{j}\,(N)$$

۴۳ دو جعبهٔ سبک و سنگینِ هم‌جنس را با تندی‌های اولیهٔ یکسان روی یک سطح افقی پرتاب می‌کنیم. کدام گزینه در مورد زمان توقف جعبه‌ها درست است؟ $(\mu_k \neq 0 \text{ و } g = 9/8\ N/kg)$

۱) جعبهٔ سنگین‌تر زودتر متوقف می‌شود؛ زیرا جرم بیشتری دارد و تمایل آن به ایستادن بیشتر است.

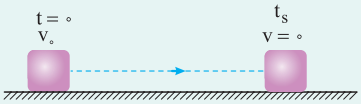
۲) جعبهٔ سنگین‌تر زودتر متوقف می‌شود؛ زیرا جرم بیشتری دارد و نیروی اصطکاک آن بزرگ‌تر است.

۳) هر دو جعبه در زمان‌های یکسان متوقف می‌شوند؛ زیرا شتاب توقف آن‌ها برابر است.

۴) جعبه‌ای زودتر متوقف می‌شود که سطح تماس بیشتری با زمین داشته باشد؛ زیرا نیروی اصطکاک آن بزرگ‌تر است.

درس Box

هنگامی که مطابق شکل زیر، جسمی را بر روی سطح افقی پرتاب می‌کنیم، زمان توقف جسم از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$F_{net} = f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg = ma \Rightarrow \underset{\text{شتاب توقف}}{a_s} = \mu_k g \xrightarrow{t_s = \frac{v_\circ}{a_s}} \underset{\text{زمان توقف (s)}}{t_s} = \frac{\overset{\text{تندی اولیه (m/s)}}{v_\circ}}{\underset{\text{ضریب اصطکاک جنبشی}}{\mu_k}\ \underset{\text{شتاب گرانش } (m/s^2)}{g}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق رابطه‌ای که در درس‌باکس آورده‌ایم، درمی‌یابیم زمان توقف جسمی که بر روی سطح افقی پرتاب شده است، وابسته به جنس سطوح و تندی اولیه (تندی پرتاب) است و به جرم ربطی ندارد؛ بنابراین با توجه به یکسان‌بودن تندی اولیه و جنس، هر دو جسم در زمان‌های یکسان متوقف می‌شوند.

۴۴ شخصی به جرم $80\ kg$ روی یک ترازو ایستاده و فنری با ثابت $5\ N/cm$ را که از سقف بالای سرش آویزان است، در راستای قائم رو به پایین می‌کشد. اگر با این کار طول فنر $16\ cm$ افزایش یابد، ترازو چه عددی را برحسب نیوتون نشان می‌دهد؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۷۲۰ ۲) ۸۳۰ ۳) ۸۸۰ ۴) ۷۸۰

درس Box

نیروی کشسانی فنر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F_e = k\,x$$

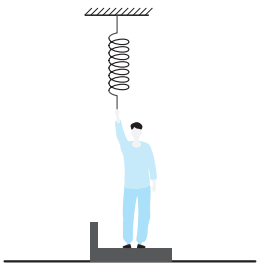
(F_e: نیروی کشسانی فنر (N)، k: ثابت فنر، x: تغییر طول فنر)

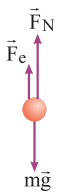
دقت کنید که اگر در رابطهٔ بالا، k برحسب N/m و x برحسب m یا k برحسب N/cm و x برحسب cm باشد، F برحسب N به دست می‌آید.

نکته عددی که ترازو برحسب نیوتون نشان می‌دهد برابر با نیروی عمودی سطح (F_N) است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروهای وارد بر شخص را رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:





گام دوم: نیروی کشسانی فنر را به دست می‌آوریم. دقت کنید با توجه به این‌که فنر آویزان از سقف کشیده شده است، جهت نیروی کشسانی فنر رو به بالا است.

$$F_e = kx \xrightarrow[x=16\ cm]{k=5\ N/cm} F_e = 5\times 16 = 80\ N$$

گام سوم: با توجه به نیروهای وارد بر شخص و ساکن‌بودن شخص، نیروی عمودی سطح (F_N) وارد بر شخص (همان عددی که ترازو نشان می‌دهد) را به دست می‌آوریم:

$$F_{net} = 0 \Rightarrow mg = F_N + F_e \Rightarrow 800 = F_N + 80 \Rightarrow F_N = 720\ N$$

۴۵ شخصی به جرم $78\ kg$ درون آسانسوری قرار دارد. اگر آسانسور با شتاب رو به پایین $1/5\ m/s^2$ به طرف پایین حرکت کند، اندازهٔ نیرویی که کرهٔ زمین بر شخص وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۷۸۰
۲) ۸۹۷
۳) ۷۳۹/۵
۴) ۱۳۰/۵

درس Box

نیروی گرانش کرهٔ زمین بر یک جسم، همان نیروی وزن جسم است که در هر شرایطی وقتی که جسم بر روی سطح زمین یا ارتفاع ناچیزی از سطح زمین قرار دارد، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$W = mg$$

W: وزن جسم (N) ← m: جرم (kg)

$g \simeq 10\ m/s^2$: شتاب گرانش

پاسخ خیلی تشریحی ✔

نیرویی که از طرف کرهٔ زمین بر شخص وارد می‌شود، همان نیروی وزن است که طبق رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$W = mg \xrightarrow[g=10\ m/s^2]{m=78\ kg} W = 78 \times 10 = 780\ N$$

گول نخوری ✘

اگر برای محاسبهٔ نیرویی که کرهٔ زمین به شخص وارد می‌کنه، از شتاب آسانسور استفاده کنی، توی دام گزینهٔ (۲) می‌افتی!

$$F = mg + ma = m(g + a) = 78(10 + 1/5) = 897\ N$$ ✘

این نیروی F که محاسبه کردیم، نیروی عمودی سطحی است که از طرف کف آسانسور به شخص وارد می‌شود.

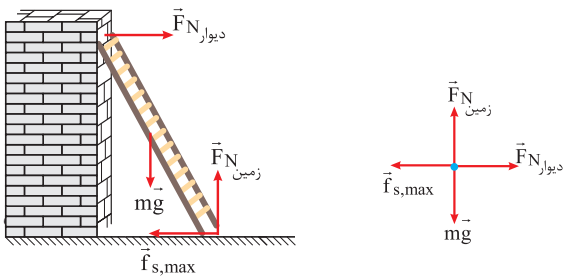
۴۶ نردبانی به جرم ۱۶ kg به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه دارد و پایهٔ آن روی سطح افقی در آستانهٔ سُرخوردن قرار دارد. در این حالت شخصی به جرم ۴۸ kg از نردبان بالا رفته و بر روی یکی از پله‌های نردبان می‌ایستد. اگر با ایستادن شخص بر روی نردبان، نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، ۶۰۰ N افزایش یابد و همچنان پایهٔ آن روی سطح افقی در آستانهٔ سُرخوردن باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین نردبان و سطح افق چه‌قدر است؟ $(g = 10\,N/kg)$

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مطابق شکل‌های زیر، هر یک از حالت‌ها را با توجه به این‌که نردبان در آستانهٔ سُرخوردن قرار دارد، بررسی می‌کنیم:

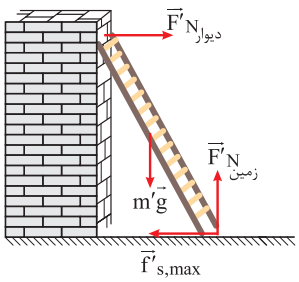
حالت اول:



$$\text{در آستانهٔ سُرخوردن} \Rightarrow F_{net} = 0 \begin{cases} f_{s,max} = F_{N_{دیوار}} \\ F_{N_{زمین}} = mg = 16 \times 10 = 160\ N \end{cases}$$

$$R_{زمین} = \sqrt{F_{N_{زمین}}^2 + f_{s,max}^2} \Rightarrow R_{زمین} = \sqrt{160^2 + f_{s,max}^2}$$

حالت دوم:



$$\text{در آستانهٔ سُرخوردن} \Rightarrow F_{net} = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_{s,max} = F'_{N_{دیوار}} \\ F'_{N_{زمین}} = m'g = (16+48)10 = 640\ N \end{cases}$$

حالا با توجه به این‌که نیروی سطح افقی بر نردبان ۶۰۰ N افزایش یافته، داریم:

$$R'_{زمین} = \sqrt{F'^2_{N_{زمین}} + f'^2_{s,max}} \Rightarrow R_{زمین} + 600 = \sqrt{640^2 + f'^2_{s,max}}$$

$$\xrightarrow{R_{زمین} = \sqrt{160^2 + f_{s,max}^2}} \sqrt{160^2 + f_{s,max}^2} + 600 = \sqrt{640^2 + f'^2_{s,max}}$$

$$\xrightarrow[f'_{s,max} = \mu_s F'_N = 640\mu_s]{f_{s,max} = \mu_s F_N = 160\mu_s} \sqrt{160^2 + (160\mu_s)^2} + 600 = \sqrt{640^2 + (640\mu_s)^2}$$

$$\Rightarrow 160\sqrt{1+\mu_s^2} + 600 = 640\sqrt{1+\mu_s^2} \Rightarrow 480\sqrt{1+\mu_s^2} = 600 \Rightarrow \sqrt{1+\mu_s^2} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 1 + \mu_s^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \mu_s^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \mu_s = \frac{3}{4}$$

۴۷ در شکل زیر، جسمی به جرم $۵۰\ kg$ توسط ریسمان سبکی ثابت نگه داشته شده است. اگر بیشینهٔ نیروی کشش قابل تحمل این ریسمان $۵۴۰\ N$ باشد، حداکثر بزرگی شتاب برای بالاکشیدن جسم به طوری که ریسمان پاره نشود، چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) ۰/۸

۲) ۰/۶

۳) ۰/۵

۴) ۰/۴

درس Box

برای محاسبهٔ نیروی کشش طناب یا ریسمان (T) فرمول خاصی نداریم. باید طبق مراحل زیر پیش برویم:

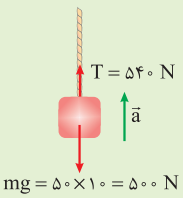
۱) نیروهای وارد بر جسمی که به ریسمان متصل است را رسم کنیم.

۲) نیروی خالص وارد بر جسم را با توجه به شتاب جسم حساب کنیم.

۳) نیروی کشش طناب را با توجه به نیروی خالص و نیروهای دیگر به دست آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروهای وارد بر جسم را با فرض این‌که نیروی کشش ریسمان حداکثر مقدار خود، یعنی $۵۴۰\ N$ است، رسم می‌کنیم:



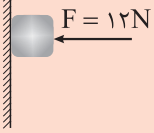
گام دوم: نیروی خالص وارد بر جسم را حساب می‌کنیم:

$$F_{net} = T - mg = ۵۴۰ - ۵۰۰ = ۴۰\ N$$

گام سوم: حداکثر شتاب رو به بالای جسم را به دست می‌آوریم. طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow ۴۰ = ۵۰a \Rightarrow a = ۰/۸\ m/s^۲$$

۴۸ در شکل زیر، نیروی ۱۲ نیوتونی افقی به جسمی ساکن به جرم ۵۰۰ g که به دیوار تکیه داده شده، وارد می‌شود. نیروی سطح دیوار بر جسم چند نیوتون است؟ ($g = ۱۰ N/kg$ و $\mu_s = \frac{۳}{۴}$)



۱) ۹ ۲) ۱۲

۳) ۱۳ ۴) ۱۵

درس Box

برای محاسبهٔ نیروی اصطکاک وارد بر یک جسم ساکن، طبق مراحل زیر پیش می‌رویم:

۱) نیروهای وارد بر جسم (به‌جز نیروی اصطکاک) را رسم می‌کنیم.

۲) نیروی عمودی سطح (F_N) را حساب می‌کنیم.

۳) نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را طبق رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N$$

($f_{s,max}$: بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی (N)، μ_s: ضریب اصطکاک ایستایی، F_N: نیروی عمودی سطح (N))

۴) نیروی خالصی که در راستای سطح بر جسم وارد می‌شود (بدون در نظر گرفتن اصطکاک) که همان نیروی محرک جسم است را حساب می‌کنیم.

۵) نیروی محرک را با نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه مقایسه می‌کنیم و مطابق الگوی زیر نیروی اصطکاک را به دست می‌آوریم:

$F_{محرک} \le f_{s,max} \Rightarrow$ جسم ساکن است: $f_s = F_{محرک}$ (f_s: اصطکاک ایستایی)

$F_{محرک} > f_{s,max} \Rightarrow$ جسم حرکت می‌کند: $f_k = \mu_k F_N$ (f_k: اصطکاک جنبشی، μ_k: ضریب اصطکاک جنبشی، F_N: نیروی عمودی سطح)

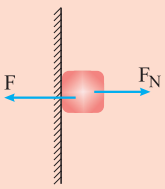
نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، برایند دو نیروی عمود بر هم F_N و f است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$R = \sqrt{F_N^۲ + f^۲}$$

(R: نیروی سطح بر جسم، F_N: نیروی عمودی سطح، f: نیروی اصطکاک)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نیروی عمودی سطح (F_N) را به دست می‌آوریم:



$$F_N = F = ۱۲ N$$

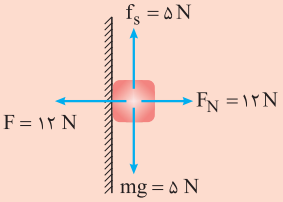
گام دوم: نیروی محرک جسم را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که در راستای دیوار (قائم) غیر از نیروی اصطکاک فقط نیروی وزن رو به پایین به جسم وارد می‌شود، نیروی محرک همان نیروی وزن است.

$$F_{محرک} = mg = ۰/۵ \times ۱۰ = ۵ N$$

گام سوم: نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را حساب می‌کنیم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N = ۱۲N]{\mu_s = \frac{۳}{۴}} f_{s,max} = \frac{۳}{۴} \times ۱۲ = ۹ N$$

گام چهارم: نیروی اصطکاک وارد بر جسم را حساب می‌کنیم. به شکل زیر توجه کنید:

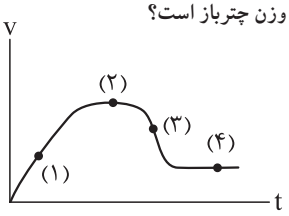


$F_{محرک} < f_{s,max} \Rightarrow$ جسم ساکن است: $f_s = F_{محرک} = ۵ N$

گام پنجم: نیروی سطح بر جسم را به دست می‌آوریم:

$$R = \sqrt{F_N^۲ + f_s^۲} \xrightarrow[f_s = ۵N]{F_N = ۱۲N} R = \sqrt{۱۲^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳ N$$

۴۹ نمودار تغییرات تندی برحسب زمان چتربازی که از یک بالگرد در حال سکون به بیرون می‌پرد و مدتی پس از پرش، چتر خود را باز می‌کند، مطابق شکل زیر است. در کدام مرحله بزرگی نیروی مقاومت هوا بیشتر از بزرگی نیروی وزن چترباز است؟



۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به این‌که در تمام مراحل، چترباز رو به پایین حرکت می‌کند، جهت نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت و رو به بالاست. از طرفی جهت نیروی وزن رو به پایین است.

حالا در هر مرحله، نیروی مقاومت هوا (f_D) را با وزن چترباز (mg) مقایسه می‌کنیم:

مرحلهٔ (۱): چترباز به صورت تندشونده رو به پایین حرکت می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$\text{جهت شتاب رو به پایین} \Rightarrow \text{جهت نیروی خالص رو به پایین} \Rightarrow f_D < mg$$

مرحلهٔ (۲): چترباز با تندی ثابت (تندی حدی با چتر بسته) رو به پایین حرکت می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$a = 0 \Rightarrow F_{net} = 0 \Rightarrow f_D = mg$$

مرحلهٔ (۳): چترباز به صورت کندشونده رو به پایین حرکت می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$\text{جهت شتاب رو به بالا} \Rightarrow \text{جهت نیروی خالص رو به بالا} \Rightarrow f_D > mg$$

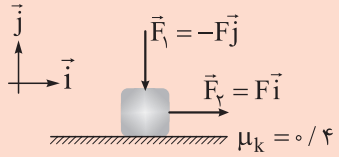
مرحلهٔ (۴): چترباز با تندی ثابت (تندی حدی با چتر باز) رو به پایین حرکت می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$a = 0 \Rightarrow F_{net} = 0 \Rightarrow f_D = mg$$

بنابراین در مرحلهٔ (۳) نیروی مقاومت هوا، از وزن چترباز بیشتر است.

یه‌جور دیگه با توجه به این‌که به چترباز دو نیروی رو به بالای $\vec{f}_D$ و رو به پایین $m\vec{g}$ وارد می‌شود و جهت حرکت چترباز رو به پایین است، اگر $f_D > mg$ باشد، نیروی خالص و شتاب حرکت رو به بالا خواهد بود و چون جهت شتاب و سرعت مخالف یکدیگرند، حرکت کندشونده می‌شود؛ بنابراین باید مرحله‌ای را انتخاب کنیم که حرکت کندشونده است، یعنی نمودار $v-t$ به محور t نزدیک می‌شود که تنها در مرحلهٔ (۳) این شرایط را داریم.

۵۰ در شکل زیر، جسمی به جرم $3kg$ با تندی ثابت $2\ m/s$ بر روی سطح افقی در حرکت است. اگر بزرگی هر یک از نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را $10\ N$ افزایش دهیم، شتاب حرکت جسم چند متر بر مربع ثانیه خواهد شد؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) $1/5$ ۲) 2 ۳) $2/5$ ۴) 3

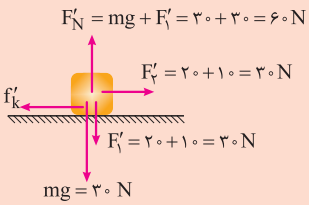
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مقدار F را به دست می‌آوریم. با توجه به حرکت جسم با تندی ثابت، داریم:

$$F_{net} = 0 \Rightarrow F_2 = f_k \xrightarrow{f_k = \mu_k F_N} F_2 = \mu_k F_N \xrightarrow{F_N = mg + F_1} F_2 = \mu_k (mg + F_1)$$

$$\xrightarrow[\mu_k = 0/4]{F_2 = F_1 = F,\ m = 3kg} F = 0/4(30 + F) = 12 + 0/4F \Rightarrow 0/6F = 12 \Rightarrow F = 20\ N$$

گام دوم: نیروی خالص را در حالت جدید به دست می‌آوریم. مطابق شکل زیر داریم:



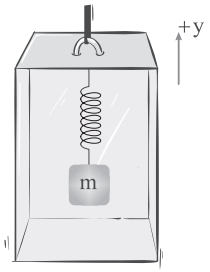
$$f'_k = \mu_k F'_N \xrightarrow[F'_N = 60\ N]{\mu_k = 0/4} f'_k = 0/4 \times 60 = 24\ N$$

$$F'_{net} = F'_2 - f'_k \Rightarrow F'_{net} = 30 - 24 = 6\ N$$

گام سوم: شتاب جسم را در حالت جدید حساب می‌کنیم:

$$a' = \frac{F'_{net}}{m} \xrightarrow[m = 3kg]{F'_{net} = 6\ N} a' = \frac{6}{3} = 2\ m/s^2$$

۵۱ مطابق شکل، جسمی به جرم $3\ kg$ توسط فنری با ثابت $4/5\ N/cm$ به سقف یک آسانسور متصل است و آسانسور از حال سکون به طرف پایین شروع به حرکت می‌کند. زمانی که شتاب آسانسور $\vec{a}_1 = (-1/2\ m/s^2)\vec{j}$ باشد، طول فنر L_1 و هنگامی که شتاب آسانسور $\vec{a}_2 = (+1/8\ m/s^2)\vec{j}$ می‌شود، طول فنر L_2 می‌شود. مقدار $L_2 - L_1$ چند سانتی‌متر است؟ $(g = 9/8\ m/s^2)$



۱) $+2$

۲) -2

۳) $+0/5$

۴) $-0/5$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروی کشسانی فنر را در هر دو حالت حساب می‌کنیم. با توجه به این‌که جهت شتاب در حالت اول رو به پایین و در حالت دوم رو به بالا است، داریم:

$$F_1 = m(g - a_1) \xrightarrow[g=9/8\ m/s^2,\ a_1=1/2\ m/s^2]{m=3kg} F_1 = 3(9/8 - 1/2) = 3 \times 8/6 = 25/8\ N$$

$$F_2 = m(g + a_2) \xrightarrow[g=9/8\ m/s^2,\ a_2=1/8\ m/s^2]{m=3kg} F_2 = 3(9/8 + 1/8) = 3 \times 11/6 = 34/8\ N$$

گام دوم: تغییر طول فنر را در هر یک از حالت‌ها، حساب می‌کنیم:

$$F_e = kx \xrightarrow[k=4/5\ N/cm]{F_1=25/8N} 25/8 = 4/5x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{25/8}{4/5}\ cm$$

$$F_e = kx \xrightarrow[k=4/5\ N/cm]{F_2=34/8N} 34/8 = 4/5x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{34/8}{4/5}\ cm$$

گام سوم: اختلاف طول فنر در دو حالت $(L_2 - L_1)$ را به دست می‌آوریم:

$$L_2 - L_1 = x_2 - x_1 = \frac{34/8}{4/5} - \frac{25/8}{4/5} = \frac{9}{4/5} = 2\ cm$$

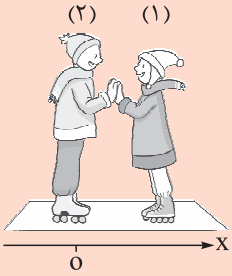
به‌جور دیگه

می‌دانیم ثابت فنر از رابطهٔ $k = \frac{\Delta F}{\Delta L}$ به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$\begin{cases} F_1 = m(g - a_1) \\ F_2 = m(g + a_2) \end{cases} \Rightarrow F_2 - F_1 = m(a_2 + a_1) = 3\overbrace{(1/8 + 1/2)}^{3} = 9\ N$$

$$k = \frac{F_2 - F_1}{L_2 - L_1} \Rightarrow 4/5 = \frac{9}{L_2 - L_1} \Rightarrow L_2 - L_1 = 2\ cm$$

۵۲ مطابق شکل دو نفر به جرم‌های $m_۱ = ۶۰\ kg$ و $m_۲ = ۸۰\ kg$، مقابل یکدیگر قرار دارند. اگر یکی از آن‌ها در مدت $۰/۲\ s$ با نیروی $F = ۱۲۰\ N$ دیگری را هُل دهد، فاصلهٔ میان دو شخص $۳/۲\ s$ پس از شروع هُل‌دادن چند سانتی‌متر می‌شود؟ (از اصطکاک سطح افقی چشم‌پوشی کنید.)



۱) ۲۳۴ ۲) ۲۲۴ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۱۷

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا مقدار شتاب هر یک را حساب می‌کنیم. می‌دانیم طبق قانون سوم نیوتون $\vec{F}_{۱۲} = -\vec{F}_{۲۱}$ است؛ بنابراین داریم:

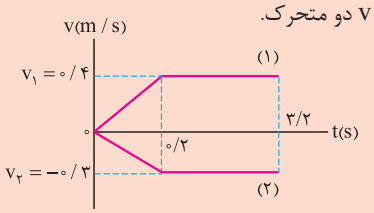
$$\begin{cases} F_{۱۲} = F_{۲۱} = ۱۲۰\ N \\ m_۱ = ۶۰\ kg \\ m_۲ = ۸۰\ kg \end{cases} \quad a = \frac{F}{m} \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = \frac{۱۲۰}{۶۰} = ۲\ m/s^۲ \\ a_۲ = \frac{۱۲۰}{۸۰} = ۱/۵\ m/s^۲ \end{cases}$$

گام دوم: نمودار سرعت ـ زمان حرکت هر یک از دو متحرک را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار $v - t$ به چند مورد زیر توجه کنید:

۱) از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = ۰/۲\ s$ دو متحرک با شتاب ثابت و در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند؛ پس اگر شخص (۱) در جهت محور x حرکت کند، شخص (۲) باید خلاف جهت محور حرکت کند و نمودار $v - t$ آن زیر محور t باشد.

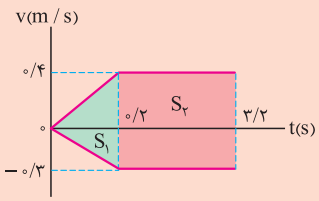
۲) با توجه به نبودن اصطکاک، از لحظهٔ $t = ۰/۲\ s$ تا $t = ۳/۲\ s$ دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند.

۳) فاصلهٔ میان دو شخص برابر است با مجموع مقادیر مساحت محصور نمودار $v - t$ دو متحرک.



$$v = at + \cancel{v_۰} \Rightarrow \begin{cases} v_۱ = ۲ \times ۰/۲ = ۰/۴\ m/s \\ v_۲ = (-۱/۵) \times ۰/۲ = -۰/۳\ m/s \end{cases}$$

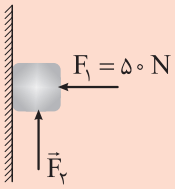
گام سوم: فاصلهٔ دو جسم را در لحظهٔ $t = ۳/۲\ s$ به دست می‌آوریم. با توجه به مساحت محصور نمودار $v - t$ با محور t داریم:



$$\begin{cases} S_۱ = \frac{۰/۷ \times ۰/۲}{۲} = ۰/۰۷ \\ S_۲ = ۳ \times ۰/۷ = ۲/۱ \end{cases}$$

$$d = S_۱ + S_۲ = ۰/۰۷ + ۲/۱ = ۲/۱۷\ m = ۲۱۷\ cm$$

۵۳ در شکل زیر، هنگامی که بزرگی نیروی $\vec{F}_2$ را از $10\ N$ به $40\ N$ می‌رسانیم، بزرگی نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند، تغییر نخواهد کرد. اگر در هر دو حالت جسم در آستانهٔ حرکت باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح چه‌قدر است؟

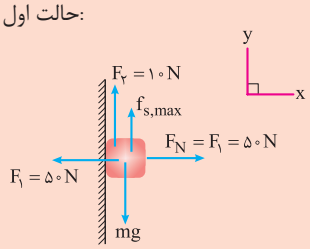


۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۵
۴) ۰/۶

پاسخ خیلی تشریحی ✔

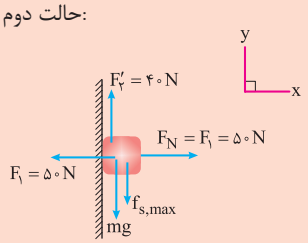
با توجه به این‌که جسم در هر دو حالت ساکن است، برای محاسبهٔ حداقل ضریب اصطکاک ایستایی باید جسم را در هر دو حالت در آستانهٔ لغزش فرض کنیم. از طرفی با توجه به این‌که مقدار F_2 حالت اول کم‌تر از حالت دوم است، در حالت اول جسم را در آستانهٔ لغزش رو به پایین و در حالت دوم جسم را در آستانهٔ لغزش رو به بالا فرض می‌کنیم؛ بنابراین مطابق شکل زیر داریم:

حالت اول:



$$F_{net(y)} = 0 \Rightarrow f_{s,max} + 10 = mg \quad (I)$$

حالت دوم:



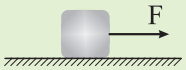
$$F_{net(y)} = 0 \Rightarrow f_{s,max} + mg = 40 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{I,II} \begin{cases} f_{s,max} + 10 = mg \\ f_{s,max} + mg = 40 \end{cases} \Rightarrow 2f_{s,max} = 30 \Rightarrow f_{s,max} = 15\ N$$

حالا مقدار حداقل ضریب اصطکاک ایستایی را حساب می‌کنیم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \Rightarrow 15 = \mu_s \times 50 \Rightarrow \mu_s = 0/3$$

۵۴ جسمی به جرم $5\ kg$ روی یک سطح افقی ساکن است و با نیروی افقی $F = 20\ N$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. اگر $1/5\ s$ پس از شروع حرکت، نیروی F حذف شود و بزرگی شتاب توقف جسم ۳ برابر شتاب تندشوندهٔ آن باشد، مسافت طی‌شده توسط جسم در کل زمان حرکت چند سانتی‌متر است؟

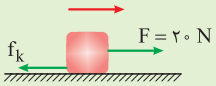


۱) ۷۵ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۷۵

پاسخ خیلی تشریحی ✔

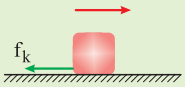
گام اول: نیروی اصطکاک جنبشی را به دست می‌آوریم. مطابق شکل زیر داریم:

حالت اول:



$$F_{net} = F - f_k = 20 - f_k$$

حالت دوم:



$$F'_{net} = -f_k$$

$$F_{net} = ma \xrightarrow{\text{m ثابت}} \frac{F'_{net}}{F_{net}} = \frac{a'}{a} \xrightarrow[F_{net}=20-f_k\ ,\ F'_{net}=-f_k]{a'=-3a} \frac{-f_k}{20-f_k} = -3$$

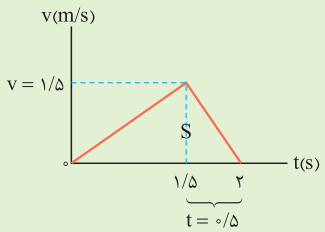
$$\Rightarrow 60 - 3f_k = f_k \Rightarrow 4f_k = 60 \Rightarrow f_k = 15\ N$$

گام دوم: شتاب جسم را در دو حالت حساب می‌کنیم:

$$a = \frac{F_{net}}{m} \Rightarrow a = \frac{20-15}{5} = 1\ m/s^2$$

$$a' = -3a \Rightarrow a' = -3\ m/s^2$$

گام سوم: نمودار $v - t$ حرکت را رسم می‌کنیم و با استفاده از سطح زیر نمودار، مسافت طی‌شده را به دست می‌آوریم:

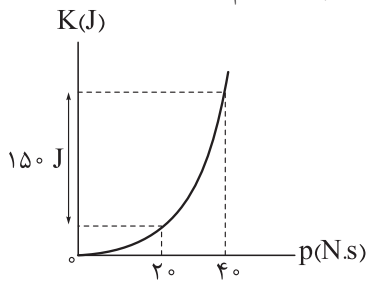


$$v = at + \cancel{v_0} \Rightarrow v = 1 \times 1/5 = 1/5\ m/s$$

$$a' = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -3 = \frac{0 - 1/5}{t} \Rightarrow t = 0/5\ s$$

$$\ell = S = \frac{2 \times 1/5}{2} = 1/5\ m = 150\ cm$$

۵۵ نمودار تغییرات انرژی جنبشی برحسب تکانه برای جسمی به جرم **m** مطابق شکل است. **m** چند کیلوگرم است؟



۱) ۲/۵ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۴ ۴) ۴

درس Box

رابطهٔ انرژی جنبشی برحسب تکانه، مطابق زیر است:

$$K=\frac{p^{۲}}{۲m}$$

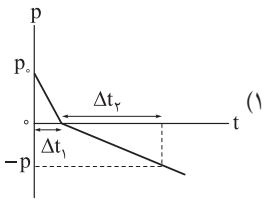
K: انرژی جنبشی (J)، p: تکانه $(\frac{kg.m}{s})$، m: جرم (kg)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به نمودار انرژی جنبشی جسم برحسب تکانه و رابطهٔ $K=\frac{p^{۲}}{۲m}$ داریم:

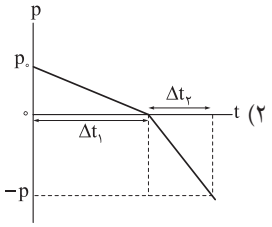
$$K=\frac{p^{۲}}{۲m} \Rightarrow K_{۲}-K_{۱}=\frac{p_{۲}^{۲}-p_{۱}^{۲}}{۲m} \xrightarrow[p_{۱}=۲۰\,N.s\,,\,p_{۲}=۴۰\,N.s]{K_{۲}-K_{۱}=۱۵۰\,J} ۱۵۰=\frac{۴۰^{۲}-۲۰^{۲}}{۲m}=\frac{۱۶۰۰-۴۰۰}{۲m}$$

$$\Rightarrow ۳۰۰m=۱۲۰۰ \Rightarrow m=۴\,kg$$

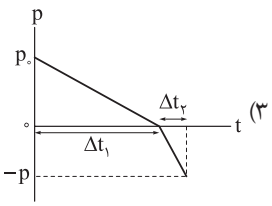
۵۶ جسمی در هوا و در راستای قائم با سرعت اولیهٔ v_0 به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت جسم را ثابت فرض کنیم، کدام نمودار تکانه ـ زمان از لحظهٔ پرتاب تا برگشت به نقطهٔ پرتاب، متعلق به این حرکت است؟

۱)


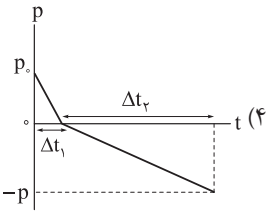
$\Delta t_1 < \Delta t_2 \, , \, p_0 > p$

۲)


$\Delta t_1 > \Delta t_2 \, , \, p_0 < p$

۳)


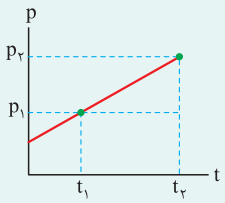
$\Delta t_1 > \Delta t_2 \, , \, p_0 > p$

۴)


$\Delta t_1 < \Delta t_2 \, , \, p_0 < p$

درس Box

شیب نمودار تکانه ـ زمان با نیروی خالص وارد بر جسم متناسب است. مطابق شکل مقابل داریم:



$$F_{net} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1}$$

F_{net}: نیروی خالص (N) ← Δp: تغییر تکانه $(\frac{kg.m}{s})$ ، Δt: زمان (s)

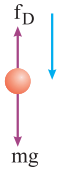
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بزرگی نیروی خالص و شتاب را در حرکت رو به بالا و حرکت رو به پایین با هم مقایسه می‌کنیم:



$$F_{net} = mg + f_D$$

$$a = \frac{F_{net}}{m} = g + \frac{f_D}{m}$$

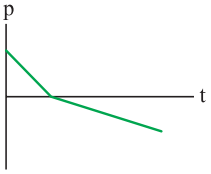


$$F'_{net} = mg - f_D$$

$$a' = \frac{F'_{net}}{m} = g - \frac{f_D}{m}$$

$F_{net} > F'_{net}$ ، $a > a'$

گام دوم: شکل کلی نمودار $p-t$ را رسم می‌کنیم. با توجه به این‌که جهت نیروی خالص رو به پایین و حرکت جسم ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است، از طرفی مقدار نیروی خالص (شیب نمودار $p-t$) در حرکت رو به بالا بیشتر از حرکت رو به پایین است، شکل کلی نمودار $p-t$ مطابق شکل مقابل است:



بنابراین گزینهٔ (۲) و (۳) رد می‌شوند.

گام سوم: تکانهٔ اولیه (p_0) را با مقدار تکانهٔ نهایی (p) و مدت‌زمان‌های Δt_1 و Δt_2 را با هم مقایسه می‌کنیم.

با توجه به یکسان‌بودن مقدار جابه‌جایی در هر دو حالت و بزرگ‌تربودن نیروی خالص و شتاب در حالت اول، طبق معادلهٔ مستقل از زمان، مقدار v_0 و v را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2ad \Rightarrow \begin{cases} \text{حرکت رو به بالا}: 0 - v_0^2 = 2ad \Rightarrow v_0 = \sqrt{2ad} \\ \text{حرکت رو به پایین}: v^2 - 0 = 2a'd \Rightarrow v = \sqrt{2a'd} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{a'}{a}} \xrightarrow{a>a'} \frac{v}{v_0} < 1 \Rightarrow v < v_0$$

$$p = mv \xrightarrow{\text{ثابت } m} p < p_0$$

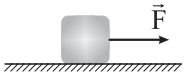
همین‌جا به جواب رسیدی و گزینهٔ (۴) هم رد شد. دیگه نیازی نداری Δtها رو مقایسه کنی!

تیزبازی برای مقایسهٔ Δt_1 و Δt_2 از معادلهٔ مستقل از شتاب استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t = d \Rightarrow \begin{cases} \text{حرکت رو به بالا}: \left(\frac{v_0 + 0}{2}\right)\Delta t_1 = d \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{2d}{v_0} \\ \text{حرکت رو به پایین}: \left(\frac{0 + v}{2}\right)\Delta t_2 = d \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{2d}{v} \end{cases}$$

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\frac{2d}{v}}{\frac{2d}{v_0}} = \frac{v_0}{v} \xrightarrow{v_0>v} \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} > 1 \Rightarrow \Delta t_2 > \Delta t_1$$

۵۷ جسمی به جرم $2\,kg$ روی یک سطح افقی به ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s = 0/5$ قرار دارد و نیروی افقی $\vec{F}$ به آن وارد می‌شود. اگر بزرگی این نیرو را به تدریج از صفر تا $15\,N$ افزایش دهیم، کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ زاویه‌ای که نیروی سطح با راستای افقی می‌سازد (α)، درست است؟ $(g = 10\,N/kg)$



الف) تا وقتی که $F < 10\,N$ است، α افزایش می‌یابد.

ب) تا وقتی که $F < 10\,N$ است، α کاهش می‌یابد.

پ) بلافاصله بعد از این‌که F اندکی از $10\,N$ بیشتر شود، α کاهش می‌یابد.

ت) بلافاصله بعد از این‌که F اندکی از $10\,N$ بیشتر شود، α افزایش می‌یابد.

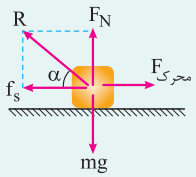
۱) الف و پ ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

درس Box

بررسی زاویهٔ بین نیروی سطح بر جسم با راستای افقی (α): اگر جسمی مطابق شکل زیر ساکن باشد، با افزایش نیروی محرک، نیروی اصطکاک ایستایی افزایش می‌یابد؛ در نتیجه نیروی سطح بر جسم که برایند دو نیروی F_N و f_s است، به نیروی f_s نزدیک‌تر می‌شود و زاویه‌ای که این نیرو با f_s می‌سازد، کاهش می‌یابد؛ بنابراین زاویهٔ α کاهش می‌یابد.

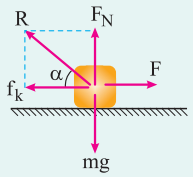
ساکن:



ساکن: $F_{محرک} \uparrow \Rightarrow f_s \uparrow \Rightarrow \alpha \downarrow$

اگر جسمی مطابق شکل زیر در حال حرکت باشد، زاویهٔ α از رابطهٔ زیر به دست می‌آید و طبق این رابطه، زاویهٔ α برای جسم در حال حرکت تنها به μ_k وابسته است.

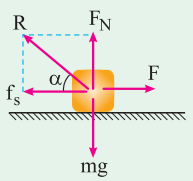
متحرک:



متحرک: $\cot\alpha = \dfrac{f_k}{F_N} = \mu_k$: ثابت μ_k : ثابت $\Rightarrow \alpha$

نکته

مطابق شکل زیر، برای جسم ساکن با افزایش F_N، زاویهٔ α افزایش و با افزایش f_s زاویهٔ α کاهش می‌یابد.



پاسخ خیلی تشریحی

باید ابتدا مشخص کنیم جسم تا چه مقدار نیروی F ساکن است؛ بنابراین باید $f_{s_{max}}$ را حساب کنیم:

$$f_{s_{max}} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N = mg = 20\,N]{\mu_s = 0/5} f_{s_{max}} = 0/5 \times 20 = 10\,N$$

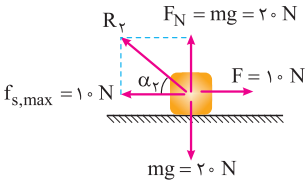
حالا طبق درس‌باکس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} 1)\ F < 10\,N \Rightarrow \text{جسم ساکن} \Rightarrow F \uparrow \Rightarrow f_s \uparrow \Rightarrow \alpha \downarrow \\ 2)\ F = 10\,N \Rightarrow \text{جسم در آستانهٔ لغزش} \\ 3)\ F > 10\,N \Rightarrow \text{جسم حرکت می‌کند.} \Rightarrow F \uparrow \Rightarrow f_k \text{: ثابت} \Rightarrow \alpha \text{: ثابت} \end{cases}$$

طبق نتیجهٔ حالت (۱)، درمی‌یابیم عبارت «الف» نادرست و عبارت «ب» درست است.

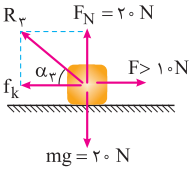
در نهایت برای بررسی عبارت «ب» و «ت» باید زاویهٔ α را در حالت‌های (۲) و (۳) با هم مقایسه کنیم.

جسم در آستانهٔ لغزش:



$$\tan\alpha_2 = \frac{20}{10} = 2$$

جسم در حال حرکت:



$$f_s < f_{s_{max}} \Rightarrow f_k < 10\ N$$

$$\tan\alpha_3 > 2$$

$$\tan\alpha_3 > \tan\alpha_2 \xrightarrow{0^\circ<\alpha\le 90^\circ} \alpha_3 > \alpha_2$$

بنابراین عبارت «پ» نادرست و عبارت «ت» درست است.

۵۸ تعداد دور بر دقیقهٔ میل‌لنگ یک خودرو که قطر محور آن **۴۲ mm** است، **۲۴۰۰ rpm** است. تندی نقطه‌ای روی لبهٔ محور این میل‌لنگ تقریباً چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۹
۲) ۱۰ / ۴
۳) ۴ / ۵
۴) ۵ / ۳

درس Box

تندی جسمی که حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

(v: تندی (m/s)، r: شعاع دایره (m)، T: دوره (s))

نکته یکای rpm، تعداد دور بر دقیقه است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** دوره را حساب می‌کنیم:

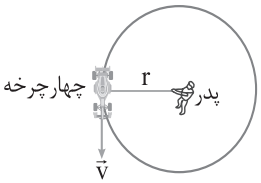
$$۲۴۰۰\ \text{rpm} \begin{cases} n = ۲۴۰۰ \\ t = ۶۰\ \text{s} \end{cases}$$

$$T = \frac{t}{n} \Rightarrow T = \frac{۶۰}{۲۴۰۰} = \frac{۱}{۴۰}\ \text{s}$$

گام دوم: تندی نقطه را بر روی لبهٔ میل‌لنگ حساب می‌کنیم:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow[T=\frac{۱}{۴۰}\ \text{s}]{r=\frac{D}{۲}=\frac{۴۲}{۲}=۲۱\ \text{mm}=۲۱\times۱۰^{-۳}\ \text{m}} v = \frac{۲\pi\times۲۱\times۱۰^{-۳}}{\frac{۱}{۴۰}} = ۱/۶۸\pi \simeq ۵/۳\ \text{m/s}$$

۵۹ مطابق شکل، پدری فرزند ۲۵ کیلوگرمی خود را در یک چهارچرخهٔ ۵ کیلوگرمی قرار می‌دهد. یک بار با طنابی ۱ متری و بار دوم با طنابی ۲ متری چهارچرخه را روی سطح افقی بدون اصطکاک بر مسیر دایره‌ای به ترتیب با تندی‌های ثابت $۲/۵\ m/s$ و $۳\ m/s$ به حرکت درمی‌آورد. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این حرکت‌ها درست است؟



الف) نیروی کشش طناب در حرکت دوم ۱۸ درصد کم‌تر از حرکت اول است.

ب) نیروی مرکزگرای وارد بر فرزند، در حرکت دوم $۵۲/۵\ N$ کم‌تر از حرکت اول است.

پ) دورهٔ تناوب چهارچرخه در حرکت دوم، $\frac{۵}{۳}$ برابر حرکت اول است.

ت) اندازهٔ شتاب حرکت چهارچرخه در حرکت دوم، $۱/۷۵\ m/s^۲$ بیشتر از حرکت اول است.

۱) الف و ب ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

درس Box

شتاب و نیروی مرکزگرا برای جسمی که با تندی v حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{شتاب مرکزگرا } (m/s^۲) \leftarrow a_c = \frac{v^۲}{r} \quad (v: \text{تندی } (m/s),\ r: \text{شعاع } (m))$$

$$\text{نیروی مرکزگرا} \leftarrow F_c = m a_c = \frac{mv^۲}{r} \quad (m: \text{جرم } (kg))$$

پاسخ خیلی تشریحی

شتاب مرکزگرا و نیروی مرکزگرای هر دو حالت را حساب می‌کنیم:

$$a_c = \frac{v^۲}{r} \Rightarrow \begin{cases} a_{c_۱} = \frac{۲/۵^۲}{۱} = ۶/۲۵\ m/s^۲ \\ a_{c_۲} = \frac{۳^۲}{۲} = ۴/۵\ m/s^۲ \end{cases} \Rightarrow a_{c_۲} - a_{c_۱} = ۴/۵ - ۶/۲۵ = -۱/۷۵\ m/s^۲$$

بنابراین عبارت «ت» نادرست است.

$$F_c = ma_c \Rightarrow \begin{cases} F_{c_۱} = ۳۰ \times ۶/۲۵ = ۱۸۷/۵\ N \\ F_{c_۲} = ۳۰ \times ۴/۵ = ۱۳۵\ N \end{cases} \Rightarrow F_{c_۲} - F_{c_۱} = ۱۳۵ - ۱۸۷/۵ = -۵۲/۵\ N$$

بنابراین عبارت «ب» درست است.

نیروی مرکزگرا توسط نیروی کشش طناب تأمین می‌شود و با آن برابر است. پس:

$$\frac{F_{c_۲} - F_{c_۱}}{F_{c_۱}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۳۵ - ۱۸۷/۵}{۱۸۷/۵} \times ۱۰۰ = ٪ -۲۸$$

بنابراین عبارت «الف» نادرست است.

تیزبازی

همین‌جا به گزینهٔ درست، یعنی گزینهٔ (۳) می‌رسیم و نیازی به مقایسهٔ دورهٔ تناوب نداریم.

برای مقایسهٔ دورهٔ تناوب چهارچرخه طبق رابطهٔ $T = \frac{۲\pi r}{v}$، داریم:

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \frac{r_۲}{r_۱} \times \frac{v_۱}{v_۲} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{۲}{۱} \times \frac{۲/۵}{۳} = \frac{۵}{۳}$$

بنابراین عبارت «پ» درست است.

۶۰ ماهواره‌های **A** و **B** در اثر نیروی گرانشی بین زمین و ماهواره، روی مدار تقریباً دایره‌ای به دور زمین می‌چرخند. جرم ماهوارهٔ **A**، ۲ برابر جرم ماهوارهٔ **B** و شعاع مدار ماهوارهٔ **A**، ۱/۵ برابر شعاع مدار ماهوارهٔ **B** است. انرژی جنبشی ماهوارهٔ **A** چند برابر انرژی جنبشی ماهوارهٔ **B** است؟

۱) $\sqrt{\frac{۸}{۳}}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) ۳ ۴) $\frac{۴}{۳}$

درس Box

در چرخش ماهواره به دور زمین، تندی ماهواره با جذر شعاع مدار ماهواره رابطهٔ معکوس دارد؛ بنابراین طبق رابطهٔ زیر داریم:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{\frac{r_۱}{r_۲}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نسبت تندی دو ماهواره را طبق درس box به دست می‌آوریم:

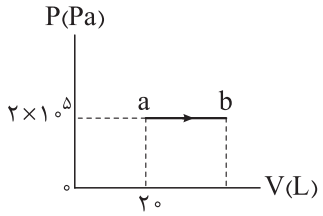
$$\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \xrightarrow{r_A=۱/۵r_B} \frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{r_B}{۱/۵r_B}}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

گام دوم: نسبت انرژی جنبشی دو ماهواره را به دست می‌آوریم:

$$\frac{K_A}{K_B}=\frac{m_A}{m_B}\times(\frac{v_A}{v_B})^۲ \Rightarrow \frac{K_A}{K_B}=۲\times(\sqrt{\frac{۲}{۳}})^۲=۲\times\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

فیزیک دهم

۶۱ یک گاز آرمانی فرایند ایستاوار **ab** را مطابق شکل طی می‌کند. اگر انرژی درونی گاز طی این فرایند **۹ kJ** تغییر کند و گرمای مبادله‌شده برابر **۱۵ kJ** باشد، حجم گاز در حالت **b** چند لیتر است؟



۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۴۵ ۴) ۵۰

Hint

ابتدا به کمک قانون اول ترمودینامیک، کار انجام‌شده در فرایند ab را به دست آورید، سپس به کمک رابطهٔ کار در فرایند هم‌فشار، حجم گاز در حالت b را پیدا کنید.

درس Box

۱) رابطهٔ قانون گازهای آرمانی (کامل):

$PV = nRT$

$P =$ فشار (Pa)

$V =$ حجم (m^3)

$n =$ تعداد مول (mol)

$R =$ ثابت گازها $(\frac{J}{mol.K})$

$T =$ دما (K)

۲) رابطهٔ قانون اول ترمودینامیک:

$\Delta U = Q + W$

$\Delta U =$ تغییر انرژی درونی گاز (J)

$Q =$ گرما (J)

$W =$ کار محیط روی دستگاه (J)

۳) محاسبهٔ کار در فرایند هم‌فشار:

$W = -P\Delta V$

$W =$ کار محیط روی دستگاه (J)

$P =$ فشار گاز (Pa)

$\Delta V =$ تغییر حجم گاز (m^3)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در این فرایند، حجم مقدار معینی گاز در فشار ثابت افزایش یافته است؛ بنابراین از آن‌جا که حجم گاز افزایش یافته، طبق رابطهٔ $PV = nRT$ دما و در نتیجه انرژی درونی آن نیز زیاد می‌شود، پس گاز گرما دریافت کرده و $Q = ۱۵\ kJ$ است.

با توجه به قانون اول ترمودینامیک، کار محیط روی دستگاه را حساب می‌کنیم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[Q=۱۵kJ]{\Delta U=۹kJ} ۹ = ۱۵ + W \Rightarrow W = -۶\ kJ$$

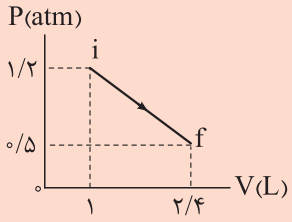
گام دوم: رابطهٔ کار در فرایند هم‌فشار ab را می‌نویسیم و از آن‌جا حجم گاز در حالت b را حساب می‌کنیم:

$$W = -P\Delta V \xrightarrow[P=۲\times۱۰^۵ Pa]{W=-۶kJ=-۶۰۰۰J} -۶\times۱۰^۳ = -۲\times۱۰^۵\Delta V$$

$$\Rightarrow \Delta V = ۳\times۱۰^{-۲} m^۳ = ۳۰\ L$$

$$\Delta V = V_b - V_a \xrightarrow[V_a=۲۰L]{\Delta V=۳۰L} ۳۰ = V_b - ۲۰ \Rightarrow V_b = ۵۰\ L$$

۶۲ مقداری گاز آرمانی طی فرایندی ایستاوار از حالت **i** به حالت **f** می‌رسد. گرمای مبادله‌شده بین دستگاه و محیط چند ژول است؟



۱) ۲۳۸
۲) صفر
۳) ۱۱۹
۴) باید نوع گاز مشخص باشد.

درس Box

۱) انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل، با حاصل‌ضرب فشار در حجم آن متناسب است.

$$PV = nRT \Rightarrow PV \propto T \left.\begin{matrix} \\ U \propto T \end{matrix}\right\} \Rightarrow U \propto PV$$

۲) مساحت سطح زیر نمودار فشار برحسب حجم (P_V)، برابر با قدرمطلق کار انجام‌شده $|W|$ است. هنگام انبساط گاز، $W < 0$ و هنگام تراکم گاز، $W > 0$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به این‌که انرژی درونی گاز با حاصل‌ضرب فشار در حجم آن متناسب است، می‌توان نوشت:

$$\frac{U_f}{U_i} = \frac{P_f V_f}{P_i V_i} = \frac{0/5 \times 2/4}{1/2 \times 1} = 1 \Rightarrow U_f = U_i \Rightarrow \Delta U = 0$$

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{\Delta U = 0} Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W$$

گام دوم: مساحت سطح زیر نمودار P_V را به دست می‌آوریم (S = مساحت ذوزنقه):

$$|W| = S = \frac{(1/2 + 0/5) \times 10^5 \times (2/4 - 1) \times 10^{-3}}{2} = \frac{1/7 \times 1/4}{2} \times 10^2$$

$$\Rightarrow |W| = 119\,J \xrightarrow{\Delta V > 0\ (\text{انبساط})} W = -119\,J$$

گام سوم: گرمای مبادله‌شده را حساب می‌کنیم:

$$Q = -W \xrightarrow{W = -119J} Q = 119\,J$$

۶۳ در طی یک فرایند ترمودینامیکی، مقدار معینی گاز کامل، روی محیط $150\ J$ کار انجام می‌دهد و دمایش کاهش می‌یابد. اگر در این فرایند، انرژی درونی گاز $350\ J$ تغییر کند، کدام گزینه درست است؟

۱) گاز $200\ J$ گرما به محیط می‌دهد.

۲) گاز $500\ J$ گرما به محیط می‌دهد.

۳) گاز $200\ J$ گرما از محیط می‌گیرد.

۴) گاز $500\ J$ گرما از محیط می‌گیرد.

Hint

ابتدا کار محیط روی دستگاه (گاز) را حساب کنید، سپس به کمک قانون اول ترمودینامیک، گرمای مبادله‌شده بین محیط و دستگاه را پیدا کنید.

درس Box

۱) انرژی درونی مقدار معینی از یک گاز کامل، فقط تابعی از دمای مطلق گاز است.

۲) در قانون اول ترمودینامیک اگر گاز از محیط گرما بگیرد، یعنی $Q>0$ و اگر گاز به محیط گرما بدهد، یعنی $Q<0$ است.

۳) کار دستگاه (گاز) روی محیط (W') با کار محیط روی دستگاه (W) قرینهٔ یکدیگرند. $(W=-W')$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با معلوم‌بودن کار گاز روی محیط (W')، کار محیط روی گاز (W) را به دست می‌آوریم:

$$W=-W' \xrightarrow{W'=150\ J} W=-150\ J$$

گام دوم: از آن‌جا که دمای گاز کاهش یافته است، پس انرژی درونی نیز کاهش پیدا کرده و می‌توان نوشت:

$$|\Delta U|=350\ J \xrightarrow{\Delta U<0} \Delta U=-350\ J$$

گام سوم: به کمک قانون اول ترمودینامیک، گرمای مبادله‌شده بین محیط و دستگاه را حساب می‌کنیم:

$$\Delta U=Q+W \xrightarrow[W=-150\ J]{\Delta U=-350\ J} -350=Q-150 \Rightarrow Q=-200\ J$$

$Q<0$ به دست آمده، یعنی گاز $200\ J$ گرما از دست داده است. این گرما به محیط داده می‌شود و گزینهٔ (۱) درست است.

۶۴ در دمای $27^\circ C$ حجم اولیهٔ گاز کاملی برابر $5\ L$ است. در فشار ثابت $1/2\times10^5\ Pa$، دمای آن را به θ_2 می‌رسانیم. اگر کاری که گاز روی محیط انجام می‌دهد، $300\ J$ باشد، θ_2 چند درجهٔ سلسیوس است؟

۱) -123 ۲) 77 ۳) 177 ۴) 227

Hint

ابتدا به کمک رابطهٔ کار در فشار ثابت، حجم گاز در حالت دوم را پیدا کنید، سپس با استفاده از معادلهٔ قانون گازهای کامل، دمای گاز در حالت دوم را حساب کنید.

درس Box

با توجه به قانون گازهای آرمانی (کامل)، برای مقدار معینی گاز کامل در فشار ثابت، می‌توان نوشت:

$$\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2}$$

$V_1=$ حجم گاز در حالت اول (m^3)

$V_2=$ حجم گاز در حالت دوم (m^3)

$T_1=$ دمای گاز در حالت اول (K)

$T_2=$ دمای گاز در حالت دوم (K)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که کار گاز (دستگاه) روی محیط (W') معلوم است، کار محیط روی دستگاه را به دست می‌آوریم:

$$W=-W' \xrightarrow{W'=300\ J} W=-300\ J$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ کار در فشار ثابت، حجم گاز در حالت دوم را پیدا می‌کنیم:

$$W=-P\Delta V=-P(V_2-V_1) \xrightarrow[P=1/2\times10^5\ Pa]{W=-300\ J,\ V_1=5L=5\times10^{-3}m^3} -300=-1/2\times10^5(V_2-5)\times10^{-3}$$

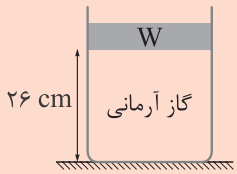
$$\Rightarrow 300=120(V_2-5) \Rightarrow V_2-5=2/5 \Rightarrow V_2=7/5\ L$$

گام سوم: دمای گاز در حالت دوم را ابتدا برحسب کلوین و سپس برحسب درجهٔ سلسیوس به دست می‌آوریم:

$$\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2} \xrightarrow[T_1=\theta_1+273=27+273=300K]{V_1=5L,\ V_2=7/5L} \frac{5}{300}=\frac{7/5}{T_2} \Rightarrow T_2=450\ K$$

$$T_2=\theta_2+273 \Rightarrow 450=\theta_2+273 \Rightarrow \theta_2=177^\circ C$$

۶۵ مطابق شکل، زیر پیستون آزاد به مساحت قاعدهٔ $40\ cm^2$ و به وزن $W = 40\ N$، گاز آرمانی قرار دارد و فشار هوا $10^5\ Pa$ است. با تغییر دمای گاز در یک فرایند ایستاوار هم‌فشار، پیستون $4\ cm$ پایین می‌آید و دوباره به حال تعادل قرار می‌گیرد. اگر طی این فرایند انرژی درونی گاز $40\ J$ تغییر کرده باشد، کدام درست است؟



۱) گاز $57/6\ J$ گرما دریافت کرده است.

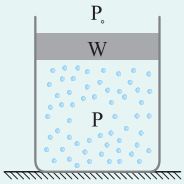
۲) گاز $57/6\ J$ گرما از دست داده است.

۳) گاز $220\ J$ گرما دریافت کرده است.

۴) گاز $220\ J$ گرما از دست داده است.

درس Box

فشار گاز زیر پیستون درون یک استوانه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$P = P_0 + \frac{F}{A} \xrightarrow{F=W} P = P_0 + \frac{W}{A}$$

P = فشار گاز (Pa)

P_0 = فشار هوای محیط (Pa)

W = وزن پیستون (N)

A = مساحت سطح پیستون (m^2)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا فشار گاز زیر پیستون را به دست می‌آوریم:

$$P = P_0 + \frac{W}{A} \xrightarrow[A=40\,cm^2=40\times10^{-4}\,m^2]{P_0=10^5\,Pa,\ W=40\,N} P = 10^5 + \frac{40}{40\times10^{-4}} = 10^5 + 10^4 \Rightarrow P = 1/1\times10^5\,Pa$$

گام دوم: حجم گاز کاهش یافته و می‌توان نوشت:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = Ah_2 - Ah_1 = A(h_2 - h_1) = A\Delta h$$

$$\xrightarrow[\Delta h=-4\,cm=-4\times10^{-2}\,m]{A=40\,cm^2=40\times10^{-4}\,m^2} \Delta V = 40\times10^{-4}(-4\times10^{-2}) = -160\times10^{-6}\,m^3$$

اکنون کار انجام‌شده توسط محیط روی گاز (دستگاه) را حساب می‌کنیم:

$$W = -P\Delta V \xrightarrow[\Delta V=-160\times10^{-6}\,m^3]{P=1/1\times10^5\,Pa} W = -1/1\times10^5\times(-160\times10^{-6}) \Rightarrow W = 1/1\times16 = 17/6\ J$$

گام سوم: با توجه به این‌که در فشار ثابت، حجم گاز کاهش یافته، پس دما و انرژی درونی آن نیز کاهش پیدا کرده است.

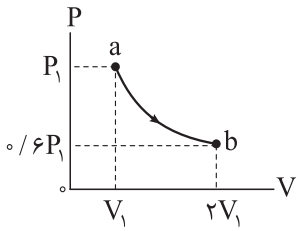
$$|\Delta U| = 40\ J \xrightarrow{\Delta U<0} \Delta U = -40\ J$$

گام چهارم: به کمک قانون اول ترمودینامیک، گرمای مبادله‌شده بین محیط و دستگاه را حساب می‌کنیم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[W=17/6\ J]{\Delta U=-40\ J} -40 = Q + 17/6 \Rightarrow Q = -57/6\ J$$

علامت منفی برای Q نشان می‌دهد که گاز این گرما را از دست داده است؛ بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۶۶ مقداری گاز آرمانی فرایند ایستاواری را مطابق نمودار طی می‌کند. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این فرایند درست است؟



الف) فرایند هم‌دماست.

ب) فرایند بی‌دررو است.

پ) انرژی درونی گاز کم شده است.

ت) گاز گرما گرفته است.

۱) الف و ت ۲) ب و پ ۳) پ ۴) ت

درس Box

۱) در فرایند بی‌دررو، $Q = 0$ است، یعنی بین دستگاه (گاز) و محیط، گرمایی مبادله نمی‌شود.

۲) در قانون اول ترمودینامیک، هنگام انبساط گاز، $W < 0$ و هنگام تراکم گاز، $W > 0$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حاصل‌ضرب فشار در حجم گاز را در حالت‌های ۱ و ۲ (a و b) با هم مقایسه می‌کنیم:

در نقطهٔ b: $P_2V_2 = 0/6P_1 \times 2V_1 = 1/2P_1V_1$

$$\Rightarrow P_2V_2 > P_1V_1 \xrightarrow{PV \propto T} T_2 > T_1 \xrightarrow{U \propto T} U_2 > U_1 \Rightarrow \Delta U > 0$$

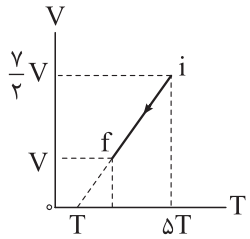
بنابراین دمای گاز افزایش یافته و انرژی درونی آن نیز بیشتر شده است. (رد عبارت‌های «الف» و «پ»)

گام دوم: از آن‌جا که گاز در طی این فرایند منبسط شده، $W < 0$ است و با استفاده از قانون اول ترمودینامیک می‌توان نوشت:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[W<0]{\Delta U>0} Q > 0$$

یعنی گاز در حین فرایند گرما دریافت کرده است؛ بنابراین بی‌دررو نیست (رد عبارت «ب») و فقط عبارت آخر درست است.

۶۷ نمودار $V-T$ فرایند ایستاوار مقداری گاز آرمانی به صورت شکل زیر است. انرژی درونی این گاز در طی فرایند از حالت i تا حالت f چند برابر شده است؟

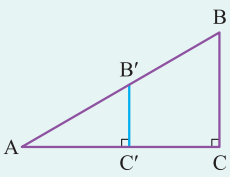


۱) $\frac{۱۳}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۷}$
۳) $\frac{۲۵}{۱۳}$
۴) $\frac{۱۵}{۷}$

Hint دمای گاز در حالت f را برحسب T پیدا کنید. نسبت انرژی درونی بین دو نقطهٔ f و i، همان نسبت دمای بین این دو نقطه است.

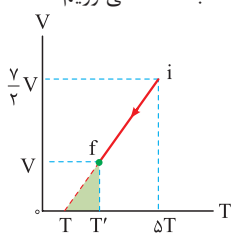
درس Box یادآوری ریاضی:

با توجه به رابطهٔ تالس، بین دو مثلث متشابه می‌توان نوشت:



$$\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** دمای گاز در حالت f را با T' نشان می‌دهیم و با توجه به رابطهٔ تالس، این دما را برحسب T به دست می‌آوریم:



$$\frac{T'-T}{۵T-T}=\frac{V}{\frac{۷}{۲}V}\Rightarrow\frac{T'-T}{۴T}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow ۷T'-۷T=۸T\Rightarrow ۷T'=۱۵T\Rightarrow T'=\frac{۱۵}{۷}T$$

گام دوم: از آن‌جا که انرژی درونی گاز با دمای مطلق گاز متناسب است، می‌توان نوشت:

$$\frac{U_f}{U_i}=\frac{T_f}{T_i}=\frac{T'}{۵T}\xrightarrow{T'=\frac{۱۵}{۷}T}\frac{U_f}{U_i}=\frac{\frac{۱۵}{۷}T}{۵T}=\frac{۱۵}{۳۵}=\frac{۳}{۷}$$

۶۸ از سه مسیر جداگانهٔ ایستاوار هم‌دما، هم‌حجم و بی‌دررو، فشار یک گاز آرمانی را ۲۰ درصد کاهش می‌دهیم. کدام موارد درست است؟

الف) در فرایند بی‌دررو، حجم گاز ۲۵ درصد افزایش می‌یابد.

ب) در فرایند هم‌دما، حجم گاز ۲۵ درصد افزایش می‌یابد.

پ) در فرایند بی‌دررو، دمای گاز ۲۰ درصد کاهش می‌یابد.

ت) در فرایند هم‌حجم، انرژی درونی گاز ۲۰ درصد کاهش می‌یابد.

۱) الف و پ ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

درس Box

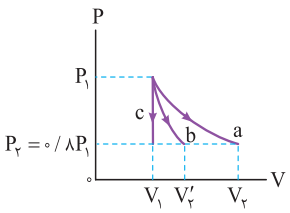
۱) در فرایند هم‌حجم برای مقدار معینی از یک گاز آرمانی، فشار با دمای مطلق متناسب است:

$$\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}$$

۲) در فرایند هم‌دما، انرژی درونی گاز ثابت می‌ماند، یعنی $\Delta U=0$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار $(P-V)$ زیر، فرایندهای هم‌دما، بی‌دررو و هم‌حجم را به ترتیب با a، b و c نشان می‌دهیم و شرایط هر فرایند را بررسی می‌کنیم:



$$P_2=P_1-0/2P_1=0/8P_1$$

گام دوم: در فرایند هم‌دما (a) می‌توان نوشت:

$$P_1V_1=P_2V_2 \xrightarrow{P_2=0/8P_1} P_1V_1=0/8P_1V_2 \Rightarrow V_2=\frac{V_1}{0/8}=1/25V_1$$

بنابراین در فرایند هم‌دما، حجم گاز ۲۵ درصد افزایش یافته و مورد «ب» درست است.

گام سوم: در فرایند بی‌دررو (b) داریم:

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2'}{T_2} \xrightarrow{P_2=0/8P_1} \frac{V_1}{T_1}=0/8\frac{V_2'}{T_2} \Rightarrow \frac{V_2'}{T_2}=1/25\frac{V_1}{T_1} \xrightarrow{T_1\neq T_2} V_2'\neq 1/25V_1$$

یعنی در فرایند بی‌دررو، حجم گاز ۲۵ درصد افزایش پیدا نکرده و مورد «الف» نادرست است.

هم‌چنین در فرایند بی‌دررو می‌توان نوشت:

$$T_2V_1=0/8T_1V_2' \xrightarrow{V_1\neq V_2'} T_2\neq 0/8T_1$$

یعنی دمای گاز ۲۰ درصد کاهش پیدا نکرده و مورد «پ» نادرست است.

گام چهارم: در فرایند هم‌حجم (c)، $V_1=V_2$ است.

$$\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2} \xrightarrow{P_2=0/8P_1} \frac{P_1}{T_1}=\frac{0/8P_1}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=0/8$$

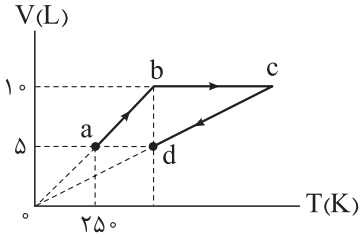
از آن‌جا که انرژی درونی مقدار معینی گاز، با دمای مطلق آن متناسب است، می‌توان نوشت:

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1}=0/8$$

یعنی انرژی درونی گاز ۲۰ درصد کاهش پیدا کرده و مورد «ت» درست است.

بنابراین موارد «ب» و «ت» درست بوده و گزینهٔ (۴) صحیح است.

۶۹ شکل زیر، مربوط به سه فرایند ترمودینامیکی ایستاوار روی دو مول گاز آرمانی است. کار کل انجام‌شده توسط محیط روی گاز در طی این فرایند چند ژول است؟ $(R = ۸\frac{J}{mol.K})$



۱) ۴۰۰۰
۲) −۴۰۰۰
۳) ۸۰۰۰
۴) −۸۰۰۰

Hint به کمک معادلهٔ حالت گاز کامل، فشار در نقطهٔ a که همان فشار در فرایند هم‌فشار ab است را محاسبه کنید. با استفاده از قضیهٔ تالس، دما در نقطهٔ b که همان دما در نقطهٔ d است را پیدا کنید، سپس یک بار دیگر از معادلهٔ حالت گاز کامل کمک بگیرید تا فشار در نقطهٔ d که همان فشار در فرایند هم‌فشار cd است، به دست آید. حالا به راحتی به کمک معادلهٔ $W = -P\Delta V$، کار محیط روی گاز در سه فرایند به دست می‌آید. کار کل هم که برابر با مجموع این سه کار است.

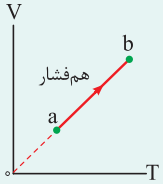
درس Box

۱) معادلهٔ حالت گاز کامل:

$PV = nRT$

P: فشار گاز (Pa)، V: حجم گاز (m^3)، n: تعداد مول گاز (mol)، T: دمای گاز (k)، R: ثابت گازها $(\frac{J}{mol.k})$

۲) طبق رابطهٔ $V = \frac{nR}{P}T$، نمودار V_T فرایند هم‌فشار، خط راستی است که امتداد آن از مبدأ مختصات عبور می‌کند.



$\text{شیب نمودار} = \frac{nR}{P}$

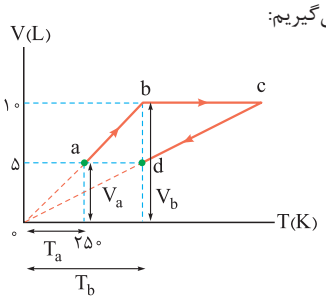
۳) رابطهٔ کار در فرایند هم‌فشار:

$W = -P\Delta V$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** امتداد نمودار فرایندهای ab و cd از مبدأ مختصات نمودار V_T می‌گذرد؛ بنابراین این دو فرایند هم‌فشارند. معادلهٔ حالت گاز کامل را برای نقطهٔ a می‌نویسیم تا فشار در نقطهٔ a که همان فشار در فرایند ab است، به دست آید:

$$P_aV_a = nRT_a \Rightarrow P_a \times ۵\times ۱۰^{-۳} = ۲\times ۸\times ۲۵۰ \Rightarrow P_a = \frac{۱۶\times \overset{۵۰}{\cancel{۲۵۰}}}{\underset{۱}{\cancel{۵}}\times ۱۰^{-۳}} = ۸\times ۱۰^{۵}\,Pa \xrightarrow{P_{ab}=P_a} P_{ab} = ۸\times ۱۰^{۵}\,Pa$$

گام دوم: فشار در فرایند cd هم همان فشار در نقطهٔ d است. برای محاسبهٔ فشار در نقطهٔ d به دما در نقطهٔ d نیاز داریم. دما در نقطهٔ d هم که همان دما در نقطهٔ b است. با توجه به شکل زیر از قضیهٔ تالس کمک می‌گیریم:



$$\frac{V_a}{T_a} = \frac{V_b}{T_b} \Rightarrow \frac{۵}{۲۵۰} = \frac{۱۰}{T_b} \Rightarrow T_b = ۵۰۰\,K \xrightarrow{T_d=T_b} T_d = ۵۰۰\,K$$

فشار در نقطهٔ d را به دست می‌آوریم:

$$P_dV_d = nRT_d \Rightarrow P_d \times ۵\times ۱۰^{-۳} = ۲\times ۸\times ۵۰۰ \Rightarrow P_d = \frac{۱۶\times ۵۰۰}{۵\times ۱۰^{-۳}} = ۱۶\times ۱۰^{۵}\,Pa$$

$$\xrightarrow{P_{cd}=P_d} P_{cd} = ۱۶\times ۱۰^{۵}\,Pa$$

گام سوم: کار محیط روی گاز در فرایند ab به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W_{ab} = -P_{ab}\Delta V_{ab} = -۸\times ۱۰^{۵}\times (۱۰-۵)\times ۱۰^{-۳} = -۴۰۰۰\,J$$

گام چهارم: کار محیط روی گاز در فرایند cd هم برابر است با:

$$W_{cd} = -P_{cd}\Delta V_{cd} = -۱۶\times ۱۰^{۵}\times (۵-۱۰)\times ۱۰^{-۳} = ۸۰۰۰\,J$$

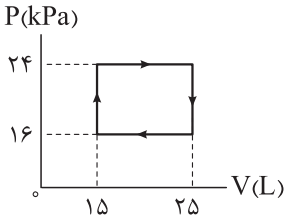
گام پنجم: چون فرایند bc هم‌حجم است، کار در این فرایند برابر صفر است؛ بنابراین کار کل محیط روی گاز در طی این سه فرایند برابر است با:

$$W_t = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} = -۴۰۰۰ + ۰ + ۸۰۰۰ = ۴۰۰۰\,J$$

گول نخوری

علامت منفی در رابطهٔ کار محیط روی گاز بسیار مهم است. هرگونه بی‌دقتی به این علامت و محاسبهٔ کار در فرایندها، ممکن است راه شما را به گزینهٔ نادرست (۲) ختم کند.

۷۰ چرخهٔ $P-V$ یک گاز آرمانی به شکل زیر است. کدام گزینه درست است؟



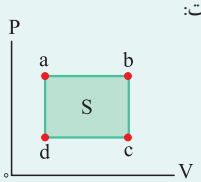
۱) گاز ۸۰ ژول گرما به محیط داده است.
۲) گاز ۸۰ ژول گرما از محیط گرفته است.
۳) گاز ۱۲۰ ژول گرما به محیط داده است.
۴) گاز ۱۲۰ ژول گرما از محیط گرفته است.

Hint

ابتدا مساحت سطح داخل چرخه که برابر قدرمطلق کار محیط روی گاز است را به دست آورید و با توجه به جهت چرخه، علامت کار را تعیین کنید، سپس به کمک قانون اول ترمودینامیک، گرما را به دست آورید و با توجه به علامت آن به جواب نهایی برسید.

درس Box

۱) مساحت سطح داخل چرخه در نمودار $P-V$، بیانگر قدرمطلق کار محیط روی گاز در این فرایند است:



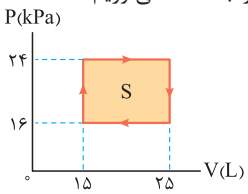
$$S=|W| \Rightarrow \begin{cases} \text{چرخهٔ ساعتگرد}: W<0 \\ \text{چرخهٔ پادساعتگرد}: W>0 \end{cases}$$

۲) تغییرات انرژی درونی در هر چرخه برابر صفر است:

$$\Delta U = Q + W = 0$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مساحت سطح داخل نمودار $P-V$ چرخه که برابر با قدرمطلق کار محیط روی گاز است را به دست می‌آوریم:



$$|W|=S \Rightarrow |W|=(۲۵-۱۵)\times۱۰^{-۳}\times(۲۴-۱۶)\times۱۰^{۳}=۸۰\,J \xrightarrow{\text{چرخهٔ ساعتگرد}} W=-۸۰\,J$$

گام دوم: طبق قانون اول ترمودینامیک، تغییر انرژی درونی گاز کامل در طی یک چرخه برابر صفر است:

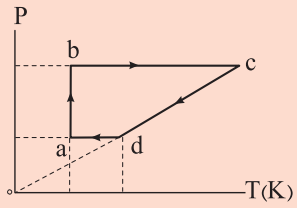
$$\Delta U=0 \Rightarrow Q+W=0 \Rightarrow Q+(-۸۰)=0 \Rightarrow Q=۸۰\,J$$

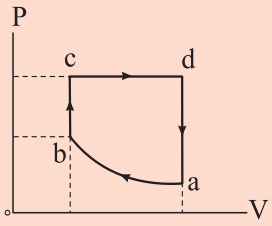
یعنی گاز $۸۰\,J$ گرما از محیط گرفته است.

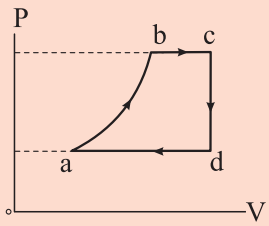
گول نخوری

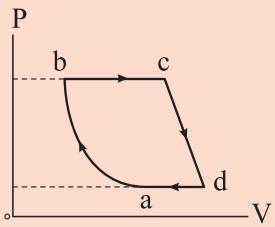
در ترمودینامیک، منفی یا مثبت بودن کار و گرما مهم است و نتایج متفاوتی دارد. برای نمونه، بی‌دقتی برای تعیین علامت W در گام اول، منجر به منفی‌شدن Q در گام دوم می‌شد و جواب شما به اشتباه گزینهٔ (۱) می‌شد.

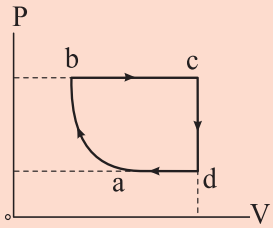
۷۱ نمودار **P_T** مربوط به چرخهٔ گاز کاملی به شکل مقابل است. نمودار **P_V** آن کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ خیلی تشریحی با توجه به نمودار P_T (شکل «الف»):

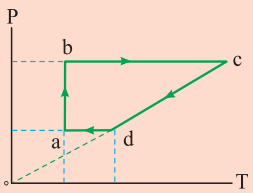
ab: فرایند هم‌دمایی است که در آن فشار افزایش یافته و در نتیجه طبق رابطهٔ $PV = nRT$، حجم کاهش می‌یابد.

bc: فرایند هم‌فشاری است که در آن دما افزایش یافته و در نتیجه طبق رابطهٔ $PV = nRT$، حجم نیز افزایش می‌یابد.

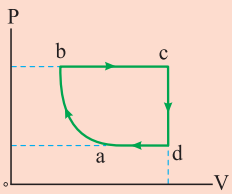
cd: امتداد این فرایند از مبدأ مختصات می‌گذرد؛ بنابراین این فرایند، هم‌حجم است که در آن فشار و دما کاهش می‌یابد.

da: فرایند هم‌فشاری است که در آن دما کاهش و طبق رابطهٔ $PV = nRT$، حجم نیز کاهش می‌یابد.

حالا با توجه به تحلیل بالا، نمودار P_V این چرخه را مطابق شکل «ب» رسم می‌کنیم:



(الف)



(ب)

۷۲ کدام‌یک از عبارت‌های زیر در مورد قانون‌های ترمودینامیک درست است؟

الف) نقض قانون اول ترمودینامیک سبب نقض قانون دوم ترمودینامیک می‌شود.

ب) نقض قانون دوم ترمودینامیک سبب نقض قانون اول ترمودینامیک می‌شود.

پ) اگر قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی نقض شود، قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی هم نقض می‌شود.

۱) الف و ب ۲) الف و پ

۳) پ ۴) الف، ب و پ

درس Box

۱) قانون اول ترمودینامیک: در یک فرایند، تغییر انرژی درونی دستگاه برابر با مجموع گرما و کار دریافتی توسط دستگاه است:

$$\Delta U = Q + W$$

۲) قانون دوم ترمودینامیک:

- بیان ماشین گرمایی: ممکن نیست دستگاه چرخه‌ای را بپیماید که در طی آن مقداری گرما را از منبع دمابالا جذب و تمام آن را به کار تبدیل کند، یعنی ممکن نیست بازده یک ماشین گرمایی برابر یک (۱۰۰ درصد) شود.
- بیان یخچالی: ممکن نیست گرما به طور خودبه‌خود از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود.

این دو بیان معادل یکدیگرند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

قانون‌های اول و دوم ترمودینامیک کاملاً مستقل از یکدیگرند، یعنی نقض یکی از قوانین منجر به نقض قانون دیگر نمی‌شود. با دو مثال، به بررسی نادرستی عبارت‌های «الف» و «ب» می‌پردازیم:

فرض کنید برای یک ماشین گرمایی، در طی یک چرخه مقادیر زیر را داشته باشیم و قانون اول نقض شود:

$$\begin{cases} W = -۱۰۰\,J \\ Q = ۱۵۰\,J \\ \Delta U = ۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta U \neq Q + W \quad \text{(نقض قانون اول)}$$

با توجه به مقادیر W و Q، بازده این ماشین یک (۱۰۰ درصد) نیست و قانون دوم نقض نمی‌شود:

$$\eta = \frac{|W|}{Q} = \frac{۱۰۰}{۱۵۰} = \frac{۲}{۳} \quad \text{(عدم نقض قانون دوم)}$$

حالا فرض کنید ماشین گرمایی دیگری داشته باشیم که در آن قانون دوم نقض شود، یعنی:

$$\begin{cases} W = -۱۰۰\,J \\ Q = ۱۰۰\,J \end{cases} \Rightarrow \eta = \frac{|W|}{Q} = \frac{۱۰۰}{۱۰۰} = ۱ \quad \text{(نقض قانون دوم)}$$

واضح است که در این ماشین قانون اول نقض نشده است، زیرا:

$$\begin{cases} Q + W = ۱۰۰ + (-۱۰۰) = ۰ \\ \Delta U = ۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta U = Q + W \quad \text{(عدم نقض قانون اول)}$$

دو بیان ماشین گرمایی و یخچالی قانون دوم ترمودینامیک معادل یکدیگرند؛ یعنی اگر قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی نقض شود، قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی نیز نقض می‌شود و برعکس.

پس عبارت «پ» درست است.

۷۳ یک ماشین گرمایی در هر دقیقه، ۴۰ چرخه را می‌پیماید و در هر چرخه **۳ kJ** گرما از منبع دماباالا می‌گیرد و **۱/۲ kJ** گرما به منبع دماپایین می‌دهد. توان خروجی این ماشین چند وات است؟

۱) ۲۰
۲) ۳۰
۳) ۸۰۰
۴) ۱۲۰۰

Hint

ابتدا مدت‌زمان هر چرخه را به دست آورید، سپس به کمک قانون پایستگی انرژی، کار انجام‌شده در هر چرخه را محاسبه کنید. در پایان همه‌چیز برای محاسبهٔ توان خروجی مهیا است.

درس Box

۱) قانون پایستگی انرژی در ماشین‌های گرمایی:

کاری که دستگاه روی محیط انجام می‌دهد.

$Q_H = |W| + |Q_L|$ ← گرمایی که دستگاه از منبع دماباالا می‌گیرد.

گرمایی که دستگاه به منبع دماپایین می‌دهد.

۲) توان: کار انجام‌شده در واحد زمان:

$$P = \frac{|W|}{\Delta t}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مدت‌زمان طی هر چرخه برابر است با:

$$\Delta t = \frac{\text{زمان کل}}{\text{تعداد چرخه}} = \frac{۶۰}{۴۰} = \frac{۳}{۲}\,s$$

گام دوم: کار انجام‌شده در هر چرخه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Q_H = |W| + |Q_L| \Rightarrow ۳ = |W| + ۱/۲ \Rightarrow |W| = ۱/۸\,kJ = ۱/۸ \times ۱۰^۳\,J$$

گام سوم: توان خروجی ماشین گرمایی را محاسبه می‌کنیم:

$$P = \frac{|W|}{\Delta t} = \frac{۱/۸ \times ۱۰^۳}{\frac{۳}{۲}} = ۱۲۰۰\,W$$

۷۴ چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) قایق پوت ـ پوت، نوعی اسباب‌بازی است که براساس ماشین‌های گرمایی برون‌سوز کار می‌کند.

ب) ضربهٔ قدرت در ماشین گرمایی درون‌سوز بنزینی، یک فرایند هم‌دما در نظر گرفته می‌شود.

پ) محاسبه نشان می‌دهد با افزایش نسبت تراکم می‌توان بازده ماشین درونسوز بنزینی را افزایش داد.

ت) موتور هواپیما و برخی کشتی‌ها و موتورهای کوچک برق (ژنراتور)، ماشین گرمایی درون‌سوز هستند.

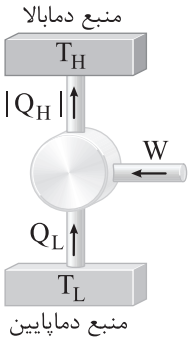
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی

هر چهار عبارت از متن کتاب درسی است. همهٔ عبارت‌ها به‌جز عبارت «ب» درست‌اند.

اما علت نادرستی عبارت «ب»: در ماشین گرمایی درون‌سوز بنزینی، مراحل ضربهٔ تراکم و ضربهٔ قدرت به سرعت رخ می‌دهند؛ بنابراین هر دوی این فرایندها بی‌دررو در نظر گرفته می‌شوند.

۷۵ شکل زیر طرز کار طرح‌وار چه وسیله‌ای است و اگر توان مصرفی این وسیله **۱۰۰ W** باشد و در مدت **۱ min** کارکردن، **۱۸ kJ** گرما به دستگاه (ماده کاری) این وسیله وارد شود، در هر دقیقه چند کیلوژول گرما به منبع دمابالا منتقل می‌شود؟



۱) ماشین گرمایی، ۱۲
۲) یخچال، ۱۲
۳) ماشین گرمایی، ۲۴
۴) یخچال، ۲۴

درس Box

قانون پایستگی انرژی در یخچال‌ها:

کاری که محیط روی یخچال انجام می‌دهد. ↑

$Q_L + W = |Q_H|$ ← گرمایی که یخچال از منبع دماپایین می‌گیرد.

↓ گرمایی که یخچال به منبع دمابالا می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شکل به ما می‌گوید که وسیله با دریافت کار، گرما را از منبع دماپایین می‌گیرد و به منبع دمابالا می‌دهد. می‌دانیم طرز کار یخچال این‌گونه است.

گام دوم: کار مصرفی یخچال در مدت یک دقیقه را به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow ۱۰۰ = \frac{W}{۶۰} \Rightarrow W = ۶۰۰۰\ J = ۶\ kJ$$

گام سوم: گرمایی که یخچال در این مدت به منبع دمابالا می‌دهد، برابر است با:

$$|Q_H| = Q_L + W = ۱۸ + ۶ = ۲۴\ kJ$$

تیزبازی البته نیاز به محاسبهٔ $|Q_H|$ نبود. می‌دانیم $|Q_H|$ باید از $Q_L = ۱۸\ kJ$ بزرگ‌تر باشد و $۲۴\ kJ$ قابل قبول است.

شیمی دوازدهم

۷۶ کدام مطلب نادرست است؟

۱) دستگاه گردش خون انسان، یک سامانهٔ بازی محسوب می‌شود.

۲) تغییر رنگ کاغذ pH معیاری برای تشخیص اسیدی یا بازی بودن محلول‌ها است.

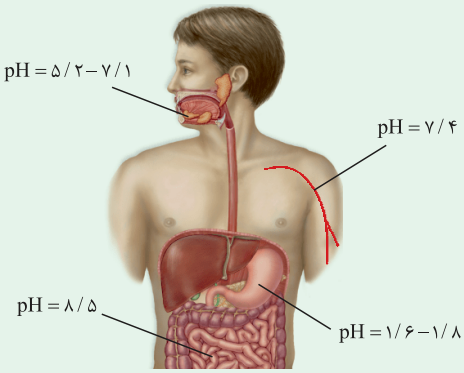
۳) همواره در یک سامانهٔ خنثی، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید با یکدیگر یکسان بوده و برابر با $۱۰^{-۷}$ مول بر لیتر است.

۴) هر اندازه که غلظت یکی از یون‌های هیدرونیوم یا هیدروکسید در محلولی بیشتر شود، به همان نسبت از غلظت دیگری کاسته می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

نکته با توجه به شکل زیر از کتاب درسی، می‌توان به اسیدی یا بازی بودن برخی محلول‌های بدن پی برد:



بزاق ← $۵/۲ < pH < ۷/۱$ ← بیشتر مواقع اسیدی

اسید معده ← $۱/۶ < pH < ۱/۸$ ← محلول اسیدی

خون ← $pH = ۷/۴$ ← محلول بازی

رودهٔ کوچک ← $pH = ۸/۵$ ← محلول بازی

گزینهٔ (۲):

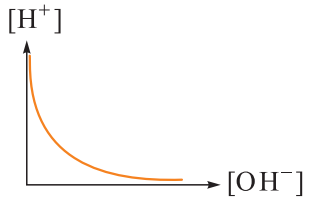
کاغذ pH

- تغییر رنگ کاغذ pH معیاری برای تشخیص اسیدی یا بازی بودن محلول‌هاست.
- به کمک رنگی که کاغذ pH در یک محلول به خود می‌گیرد، می‌توان pH تقریبی (نه دقیق) آن محلول را تعیین کرد.
- رنگ کاغذ pH در محلول‌های اسیدی به رنگ قرمز، در محلول‌های خنثی به رنگ سبز و در محلول‌های بازی به رنگ آبی تیره (بنفش) است.

گزینهٔ (۳): حواستان باشد که در هر دمایی، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در آب خالص با هم برابر است، ولی فقط در دمای اتاق (دمای $۲۵^\circ C$)، غلظت هر یک از این دو یون برابر $۱۰^{-۷}\ mol.L^{-۱}$ است.

$$[H_۳O^+] = [OH^-] = \sqrt{۱۰^{-۱۴}} = ۱۰^{-۷}\ mol.L^{-۱}$$

گزینهٔ (۴): با توجه به این‌که حاصل‌ضرب $[H^+]$ و $[OH^-]$ در محلول‌های آبی در دمای اتاق همواره برابر ۱×۱۰^{-۱۴} است، می‌توان نتیجه گرفت به هر نسبتی اندازه غلظت یکی از یون‌های هیدرونیوم یا هیدروکسید در محلولی بیشتر شود، به **همان نسبت** از غلظت دیگری کاسته می‌شود تا حاصل‌ضرب غلظت این یون‌ها در دمای اتاق برابر $۱۰^{-۱۴}$ شود.



در دمای اتاق $(۲۵^\circ C)$ ← $[H^+][OH^-] = ۱\times۱۰^{-۱۴}$ ← $[H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[OH^-]}$

- $\downarrow [H^+] \Rightarrow \uparrow [OH^-]$
- $\uparrow [H^+] \Rightarrow \downarrow [OH^-]$

۷۷ اگر pH محلول اسید قوی HX با pH محلول اسید ضعیف HY برابر باشد، چند مورد از مطالب زیر به یقین درست است؟ $(HX = ۵۰, HY = ۶۰ : g.mol^{-۱})$

- شمار مول‌های آغازی دو اسید برای تشکیل دو محلول، نابرابر است.
- اگر غلظت محلول HX برابر با ۰/۱ مولار بوده و حجم محلول یک لیتر باشد، تفاوت جرم دو اسید حل‌شده برابر با یک گرم خواهد بود.
- در شرایط یکسان، سرعت واکنش نوار منیزیم با این دو محلول برابر است.
- اگر حجم دو محلول برابر نباشد، رسانایی الکتریکی دو محلول متفاوت خواهد بود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ خیلی تشریحی

فقط عبارت سوم به یقین درست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: HX، یک اسید قوی و HY یک اسید ضعیف است؛ بنابراین برای این‌که pH دو محلول با هم برابر باشد، باید غلظت مولی محلول HX کم‌تر از محلول HY باشد. حال برای مقایسهٔ شمار مول‌های آغازی دو اسید برای تشکیل دو محلول، باید به حجم محلول نیز توجه داشته باشیم! ممکن است شمار مول‌های آغازی دو اسید HY و HX با هم برابر، اما حجم محلول HY کم‌تر باشد و در نتیجه غلظت مولی محلول HY بیشتر شود.

عبارت دوم: اگر غلظت محلول اسید HX برابر $۰/۱ mol.L^{-۱}$ باشد، چون این اسید قوی و تک‌پروتون‌دار است، در نتیجه غلظت یون H^+ نیز در این محلول برابر $۰/۱ mol.L^{-۱}$ است و به دلیل pH یکسان دو اسید، غلظت یون H^+ در محلول اسید ضعیف HY نیز برابر $۰/۱ mol.L^{-۱}$ خواهد بود. در محلول اسید ضعیف HY داریم:

$$[H^+] = M.\alpha$$

بنابراین غلظت اسید HY در محلول آن، به درجهٔ یونش آن در این شرایط بستگی دارد و لزوماً عدد مشخصی را نمی‌توان بدون دانستن درجهٔ یونش (α) برای آن در نظر گرفت و جرم اسید HY حل شده را نمی‌توان محاسبه کرد.

عبارت سوم: سرعت واکنش فلزها با محلول اسیدها به غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول بستگی دارد. از آن‌جا که pH دو محلول و در نتیجه غلظت یون H^+ در آن‌ها برابر است؛ بنابراین می‌توان گفت که در شرایط یکسان، سرعت واکنش نوار منیزیم با محلول دو اسید HX و HY برابر می‌باشد.

عبارت چهارم: رسانایی الکتریکی محلول، به غلظت یون‌های موجود در آن بستگی دارد، به طوری که هر چه مجموع غلظت یون‌های موجود در یک محلول بیشتر باشد، رسانایی الکتریکی آن محلول بیشتر است. از آن‌جا که pH محلول‌های دو اسید با هم برابر است، می‌توان گفت که غلظت یون H^+ و در نتیجه غلظت آنیون‌ها $(X^-$ و $Y^-)$ نیز در دو محلول یکسان است؛ بنابراین حتی اگر حجم دو محلول متفاوت باشد، رسانایی الکتریکی آن‌ها یکسان خواهد بود.

۷۸ در دمای اتاق غلظت یون هیدروکسید در محلول ۰/۰۵ مولار هیدروکلریک اسید، به تقریب چند برابر غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۰/۰۲ مولار هیپوکلرو اسید با $K_a = 4/5\times10^{-8}\ mol.L^{-1}$ است؟

۱) $5/83\times10^{-9}$

۲) $6/67\times10^{-9}$

۳) $1/25\times10^{8}$

۴) $1/5\times10^{8}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: هیدروکلریک اسید (HCl)، یک اسید قوی $(\alpha = 1)$ تک‌پروتون‌دار است؛ بنابراین در محلول این اسید، غلظت یون H^+ با غلظت اولیهٔ اسید برابر است. بدین ترتیب می‌توانیم غلظت یون OH^- را در این محلول محاسبه کنیم:

$$[HCl] = [H^+] = 0/05\ mol.L^{-1} \xrightarrow{[H^+].[OH^-]=10^{-14}} [OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{0/05} = 2\times10^{-13}\ mol.L^{-1}$$

گام دوم: هیپوکلرو اسید، یک اسید ضعیف است؛ در نتیجه در محلول این اسید می‌توانیم غلظت یون H^+ را با استفاده از غلظت اولیهٔ اسید و ثابت یونش به صورت تقریبی زیر محاسبه کنیم:

$$K_a < 10^{-5} \Rightarrow [H^+] = \sqrt{K_a.M} = \sqrt{4/5\times10^{-8}\times0/02} = \sqrt{9\times10^{-10}} = 3\times10^{-5}\ mol.L^{-1}$$

گام سوم: نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{غلظت یون } OH^- \text{ در محلول هیدروکلریک اسید}}{\text{غلظت یون } H^+ \text{ در محلول هیپوکلرو اسید}} = \frac{2\times10^{-13}}{3\times10^{-5}} = 6/67\times10^{-9}$$

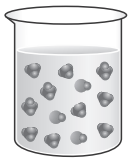
۷۹ محلولی به حجم ۵۰۰ میلی‌لیتر از آمونیاک، مطابق شکل زیر در اختیار داریم. اگر ۲۵ میلی‌لیتر از این محلول با ۱۰۰ میلی‌لیتر از محلول اسید قوی **HA** به طور کامل واکنش دهد، **pH** محلول **HA** کدام است؟ (هر ذره را معادل ۰/۰۱ مول در نظر بگیرید.)

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۱/۳

۴) ۱/۷



مشاوره مسائل مربوط به *خنثی‌شدن* اسید و باز، چه از نوع کامل و چه ناقص، محبوب دل طراحای کنکور! امکان نداره مسئله از فصل اسید و باز در کنکور داشته باشیم، اما واکنش بین آن‌ها پرسیده نشه. حتماً تست کافی از این مبحث *حل کنین* و حتماً در حل تست‌های این مبحث، گام‌به‌گام پیش برید و *اطلاعات رو با هم قاطی نکنین.*

Hint ابتدا با توجه به شکل، شمار مول‌های NH_3 موجود در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول را حساب می‌کنیم و شمار مول‌های NH_3 را در ۲۵ میلی‌لیتر از این محلول به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از رابطهٔ خنثی‌شدن کامل اسید و باز، غلظت اسید را در محلول حساب می‌کنیم که برابر با غلظت یون H^+ در آن است. در نهایت *به راهتی!* pH این محلول را با استفاده از غلظت یون H^+ در آن محاسبه می‌کنیم.

نکته ۱) هرچند می‌شه مسائل خنثی‌شدن اسید و باز رو به کمک استوکیومتری واکنش‌ها حل کرد، اما ما برای راحتی شما، یک راه حل سریع پیشنهاد می‌کنیم. شما می‌توانید در حل این‌گونه مسائل از رابطهٔ زیر استفاده کنید.

$$n_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot M_b \cdot V_b$$

حجم باز × غلظت باز × ظرفیت باز = حجم اسید × غلظت اسید × ظرفیت اسید

۲) n_a و n_b (ظرفیت اسید و باز) برابر تعداد هیدروژن اسیدی یا OH^- است که اسید و باز در واکنش شرکت داده‌اند.

n_a	اسید	n_b	باز
۱	HNO_3 , HBr , HCl	۱	NaOH , KOH
۲	H_2SO_4	۲	$Ba(OH)_2$

توجه: اگر در سؤالی با آمونیاک (NH_3) سروکار داشتید، n_b برای آن را ۱ در نظر بگیرید.

توجه: چون در دو طرف رابطهٔ $n_a.M_a.V_a = n_b.M_b.V_b$، حجم (V) وجود دارد، هیچ تفاوتی ندارد که مقدار آن برحسب لیتر باشد یا میلی‌لیتر، فقط باید یکای حجم در دو طرف معادله یکسان باشد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** غلظت آمونیاک در محلول ۵۰۰ میلی‌لیتری اولیه را حساب می‌کنیم:

آمونیاک از جمله بازهای ضعیف است؛ به طوری که در محلول آن علاوه بر مقدار کمی از یون‌های آبپوشیده، شمار بسیاری از مولکول‌های آمونیاک هم وجود دارد:

$$NH_3(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq)$$

در این محلول، ۷ ذرهٔ یونیده‌نشدهٔ آمونیاک و ۳ ذرهٔ یونیدشدهٔ آن (به یون‌های OH^- و NH_4^+)، وجود دارد؛ در نتیجه از ابتدا ۱۰ ذرهٔ آمونیاک در محلول ۵۰۰ میلی‌لیتری وجود دارد و غلظت آمونیاک (M_b) در این محلول برابر است با:

$$M_b = \frac{\text{مول } NH_3}{\text{حجم محلول}} = \frac{10 \times 0/01}{500 \times 10^{-3}} = 0/2 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: باید حساب کنیم که اگر ۲۵ میلی‌لیتر از محلول اولیه با غلظت ۰/۲ مول بر لیتر با ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول اسید قوی تک‌پروتون‌دار HA به طور کامل واکنش دهد، غلظت اسید مورد نظر چه‌قدر بوده است:

$$n_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot M_b \cdot V_b \Rightarrow 1 \times M_a \times 100 = 1 \times 0/2 \times 25 \Rightarrow M_a = 0/05 \text{ mol.L}^{-1}$$

حجم باز × غلظت باز × ظرفیت باز = حجم اسید × غلظت اسید × ظرفیت اسید

گام سوم: با توجه به این‌که HA، یک اسید قوی تک‌پروتون‌دار است، غلظت یون H^+ در محلول آن، برابر با غلظت اولیهٔ اسید است؛ در نتیجه می‌توانیم غلظت یون H^+ و pH محلول اسید را به دست آوریم:

$$[HA] = [H^+] = 0/05 \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log 0/05 = 2 - \log 5 = 2 - 0/7 = 1/3$$

۸۰ چند مورد از موارد زیر درست است؟

- تأمین انرژی (باتری‌ها، سلول سوختی و سوخت آن‌ها) و تولید مواد (مانند آبکافت و آبکاری) از قلمروهای الکتروشیمی می‌باشند.
- پدیده‌هایی همچون تندر و آذرخش از ماهیت الکتریکی ماده سرچشمه می‌گیرند و شامل دادوستد الکترون هستند.
- الکتروشیمی در تأمین انرژی سبز و پاک نقش دارد و می‌تواند در راستای پیاده‌کردن اصول شیمی سبز گام بردارد.
- چراغ خورشیدی شامل لامپ LED، سلول خورشیدی و باتری غیر قابل شارژ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول:

نکته





سه قلمرو مهم الکتروشیمی
- تأمین انرژی (مانند باتری‌ها و سلول سوختی)
- تولید مواد (مانند برقکافت و آبکاری)
- اندازه‌گیری و کنترل کیفی (اطمینان از کیفیت فراورده)

خواستون باشه که قلمرو تولید مواد در الکتروشیمی را می‌توان شامل آبکاری و برقکافت دانست؛ اما این قلمرو شامل **آبکافت** نمی‌شود!

عبارت دوم: کاملاً درست است.

عبارت سوم: کاملاً درست است.

عبارت چهارم: چراغ خورشیدی یک ابزار روشنایی است که از لامپ LED، سلول خورشیدی و **باتری قابل شارژ** تشکیل شده است.

۸۱ با توجه به نیم‌واکنش‌های موازنه‌نشدهٔ زیر، مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در معادلهٔ کلی حاصل از جمع این دو نیم‌واکنش کدام است و به ازای مصرف کامل ۴۷/۶ گرم یون پرمنگنات (MnO_4^-) چند مول یون Fe^{3+} تولید می‌شود؟ $(Mn = 55 , O = 16 : g.mol^{-1})$

$$MnO_4^-(aq) + H^+(aq) + e^- \rightarrow Mn^{2+}(aq) + H_2O(l)$$

$$Fe^{2+}(aq) \rightarrow Fe^{3+}(aq) + e^-$$

۱) ۱۰ ، ۲

۲) ۱۰ ، ۰/۴

۳) ۱۴ ، ۲

۴) ۱۴ ، ۰/۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: هر یک از نیم‌واکنش‌ها را به تنهایی موازنه می‌کنیم:

نیم‌واکنش کاهش: $MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O$

نیم‌واکنش اکسایش: $Fe^{2+} \rightarrow Fe^{3+} + e^-$

گام دوم: می‌دانیم الکترون‌های مبادله‌شده در نیم‌واکنش اکسایش با الکترون‌های مبادله‌شده در نیم‌واکنش کاهش برابر هستند؛ بنابراین ضریب الکترون را در دو نیم‌واکنش برابر می‌کنیم.

برای این کار باید ضرایب نیم‌واکنش اکسایش را در عدد ۵ ضرب کنیم. در ادامه دو نیم‌واکنش را با هم جمع می‌کنیم تا معادلهٔ کلی واکنش اکسایش ـ کاهش به دست بیاید.

نیم‌واکنش کاهش: $MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O$

نیم‌واکنش اکسایش: $5Fe^{2+} \rightarrow 5Fe^{3+} + 5e^-$

معادلهٔ کلی: $MnO_4^- + 8H^+ + 5Fe^{2+} \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O + 5Fe^{3+}$

مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها $= 1 + 8 + 5 = 14$

گام سوم: با توجه به معادلهٔ کلی موازنه‌شده، شمار مول Fe^{3+} را از روی جرم پرمنگنات (MnO_4^-) محاسبه می‌کنیم:

استفاده از کسرهای تبدیل:

$$?\,mol\,Fe^{3+} = 47/6\,g\,MnO_4^- \times \frac{1\,mol\,MnO_4^-}{119\,g\,MnO_4^-} \times \frac{5\,mol\,Fe^{3+}}{1\,mol\,MnO_4^-} = 2\,mol\,Fe^{3+}$$

یه جور دیگه

استفاده از کسرهای تناسب:

$$\frac{\text{گرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{MnO_4^-}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{Fe^{3+}}} \Rightarrow \frac{47/6}{1 \times 119} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 2\,mol$$

۸۲ اطلاعات موجود در کدام ردیف از جدول زیر نادرست است؟

	گونهٔ کاهنده	نیم‌واکنش کاهش	واکنش کلی موازنه‌شده
ردیف ۱: واکنش تیغهٔ روی با محلول مس (II) سولفات	Zn	$Cu^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Cu(s)$	$Cu^{2+}(aq)+Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq)+Cu(s)$
ردیف ۲: واکنش فلز روی و گاز اکسیژن	Zn	$O_2(g)+4e^- \rightarrow 2O^{2-}(g)$	$2Zn(s)+O_2(g) \rightarrow 2ZnO(s)$
ردیف ۳: واکنشی که در گذشته به عنوان منبع نور برای عکاسی استفاده می‌شد.	Mg	$O_2(g)+4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$	$2Mg(s)+O_2(g) \rightarrow 2MgO(s)$
ردیف ۴: واکنش فلز منگنز با محلول حاوی Cu^{2+}	Mn	$Cu^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Cu(s)$	$Cu^{2+}(aq)+Mn(s) \rightarrow Mn^{2+}(aq)+Cu(s)$

۱) ردیف ۱ ۲) ردیف ۲ ۳) ردیف ۳ ۴) ردیف ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اطلاعات ارائه‌شده در هر یک از ردیف‌ها رو زیر ذره‌بین ببریم:

ردیف ۱: واکنش تیغهٔ روی با محلول مس (II) سولفات:

نیم‌واکنش اکسایش: $Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq)+2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $Cu^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Cu(s)$

واکنش کلی اکسایش ـ کاهش: $Zn(s)+Cu^{2+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq)+Cu(s)$

در این واکنش، فلز Zn، اکسید شده و در نتیجه نقش کاهنده را دارد. هم‌چنین یون Cu^{2+}، کاهش یافته و در نتیجه نقش اکسنده را دارد.

ردیف ۲: واکنش فلز روی با گاز اکسیژن:

نیم‌واکنش اکسایش: $2Zn(s) \rightarrow 2Zn^{2+}(s)+4e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g)+4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$

واکنش کلی اکسایش ـ کاهش: $2Zn(s)+O_2(g) \rightarrow \underbrace{2Zn^{2+}(s)+2O^{2-}(s)}_{2ZnO(s)}$

در این واکنش، فلز Zn، اکسید شده و در نتیجه نقش کاهنده را دارد. هم‌چنین گاز O_2، کاهش یافته و در نتیجه نقش اکسنده را دارد؛ اما باید توجه شما را به این نکته جلب کنیم که حالت فیزیکی O^{2-} در نیم‌واکنش کاهش باید به صورت s (جامد) باشد.

ردیف ۳: واکنش فلز منیزیم با گاز اکسیژن:

توجه: در گذشته از نور حاصل از سوختن منیزیم، در عکاسی به عنوان منبع نور استفاده می‌شد. نور حاصل از سوختن این فلز، خیره‌کننده و سفیدرنگ است.

نیم‌واکنش اکسایش: $2Mg(s) \rightarrow 2Mg^{2+}(s)+4e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g)+4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$

واکنش کلی اکسایش ـ کاهش: $2Mg(s)+O_2(g) \rightarrow \underbrace{2Mg^{2+}(s)+2O^{2-}(s)}_{2MgO(s)}$

در این واکنش، فلز Mg، اکسیده شده و در نتیجه نقش کاهنده را دارد. هم‌چنین گاز O_2، کاهش یافته و در نتیجه نقش اکسنده را دارد. به علاوه اشتباه ردیف قبلی هم تکرار نشده خوشبختانه!

ردیف ۴: واکنش فلز منگنز با محلول حاوی یون‌های Cu^{2+}:

نیم‌واکنش اکسایش: $Mn(s) \rightarrow Mn^{2+}(aq)+2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $Cu^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Cu(s)$

واکنش کلی اکسایش ـ کاهش: $Mn(s)+Cu^{2+}(aq) \rightarrow Mn^{2+}(aq)+Cu(s)$

در این واکنش، فلز Mn، اکسید شده و در نتیجه نقش کاهنده را دارد. هم‌چنین یون Cu^{2+}، کاهش یافته و در نتیجه نقش اکسنده را دارد.

۸۳ فلز روی در شرایط **STP** با گازهای اکسیژن و فلوئور واکنش داده و در مجموع یک مول الکترون مبادله شده است. اگر مقدار روی فلوئورید تولیدشده برابر ۲۰/۶ گرم باشد، چند لیتر گاز اکسیژن با روی واکنش داده است؟ $(Zn = ۶۵ , F = ۱۹ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) ۳۳/۶ ۲) ۳/۳۶

۳) ۲۲/۴ ۴) ۲/۲۴

Hint

ابتدا معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش فلز روی را با هر یک از گازهای $O_۲$ و $F_۲$ می‌نویسیم، سپس مول الکترون‌های مبادله‌شده در هر واکنش را حساب می‌کنیم. در مرحلهٔ بعد با توجه به جرم $ZnF_۲$ تولیدشده، مقدار مول الکترون مبادله‌شده در این واکنش را به دست می‌آوریم و در نهایت با توجه به کل مول‌های الکترون مبادله‌شده در دو واکنش، حجم گاز $O_۲$ مصرف‌شده در واکنش با فلز روی را حساب می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

از دو واکنش مقابل کمک می‌گیریم:

$$۲Zn(s) + O_۲(g) \rightarrow ۲ZnO(s)$$

$$Zn(s) + F_۲(g) \rightarrow ZnF_۲(s)$$

در واکنش بالا ۴ مول و در واکنش پایین ۲ مول الکترون دادوستد شده، سپس با کمک جرم $ZnF_۲$ تولیدشده مقدار الکترون مبادله‌شده در واکنش دوم، مقدار الکترون مبادله شده در واکنش اول و در نهایت مقدار اکسیژن مصرفی را محاسبه می‌کنیم.

گام اول: معادلهٔ واکنش فلز Zn با گازهای $F_۲$ و $O_۲$ را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$۲Zn(s) + O_۲(g) \rightarrow ۲ZnO(s)$$

$$Zn(s) + F_۲(g) \rightarrow ZnF_۲(s)$$

گام دوم: شمار الکترون‌های مبادله‌شده در دو واکنش را حساب می‌کنیم:

نکته

اگر بخواهیم شمار مول الکترون‌های مبادله‌شده را براساس معادلهٔ موازنه‌شده به دست بیاوریم، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

تغییر بار الکتریکی اکسنده × ضریب اکسنده × شمار اتم‌ها در اکسنده = شمار مول الکترون مبادله‌شده براساس معادلهٔ موازنه‌شده

تغییر بار الکتریکی کاهنده × ضریب کاهنده × شمار اتم‌ها در کاهنده = شمار مول الکترون مبادله‌شده بر اساس معادلهٔ موازنه‌شده

بدین ترتیب با استفاده از این فرمول، می‌توانیم شمار الکترون‌های مبادله‌شده در این دو واکنش را محاسبه کنیم:

واکنش فلز روی با گاز $O_۲$:

$$\text{شمار مول } e^- \text{ مبادله‌شده} = \text{ضریب } Zn \times \text{شمار اتم‌ها در } O_۲ \times \text{تغییر بار الکتریکی} = ۱ \times ۲ \times ۲ = ۲ \times ۱ \times ۲ = ۴ \text{ mol } e^-$$

واکنش فلز روی با گاز $F_۲$:

$$\text{شمار مول } e^- \text{ مبادله‌شده} = \text{ضریب } Zn \times \text{شمار اتم‌ها در } F_۲ \times \text{تغییر بار الکتریکی} = ۱ \times ۱ \times ۲ = ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲ \text{ mol } e^-$$

گام سوم: شمار مول‌های الکترون مبادله‌شده در واکنش فلز روی با گاز $F_۲$ را با توجه به مقدار $ZnF_۲$ تولیدشده در آن به دست می‌آوریم:

$$\frac{۲۰/۶}{۱}\ g\ ZnF_۲ \times \frac{۱\ mol\ ZnF_۲}{\frac{۱۰۳}{۵}\ g\ ZnF_۲} \times \frac{۲\ mol\ e^-}{۱\ mol\ ZnF_۲} = ۰/۴\ mol\ e^-$$

بنابراین شمار مول‌های الکترون مبادله‌شده در واکنش فلز روی با گاز $O_۲$ برابر است با:

$$۱ - ۰/۴ = ۰/۶\ mol\ e^-$$

گام چهارم: *فسته نشین که دیگه آفرشه!* با توجه به شمار مول‌های الکترون مبادله‌شده در واکنش فلز روی با گاز $O_۲$، حجم گاز اکسیژن مصرفی در این واکنش را در شرایط STP محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۰/۶}{۰/۱۵}\ mol\ e^- \times \frac{۱\ mol\ O_۲}{\frac{۴}{۱}\ mol\ e^-} \times \frac{۲۲/۴\ L\ O_۲}{۱\ mol\ O_۲} = ۰/۱۵ \times ۲۲/۴ = ۱/۵ \times ۲/۲۴ = ۳/۳۶\ L\ O_۲$$

۸۴ با توجه به واکنش‌های زیر که به صورت طبیعی انجام می‌شوند، چند مورد از عبارت‌های داده‌شده درست است؟

a) $2Fe^{3+}(aq) + Zn(s) \rightarrow 2Fe^{2+}(aq) + Zn^{2+}(aq)$

b) $Cu^{2+}(aq) + Ni(s) \rightarrow Ni^{2+}(aq) + Cu(s)$

c) $2Fe^{3+}(aq) + Sn^{2+}(aq) \rightarrow 2Fe^{2+}(aq) + Sn^{4+}(aq)$

- در همهٔ واکنش‌های بالا مخلوط واکنش گرم‌تر می‌شود، زیرا سامانهٔ واکنش بخشی از انرژی خود را به شکل گرما به محیط می‌دهد.
- مقایسهٔ قدرت اکسندگی در واکنش c به شکل $Fe^{3+} > Sn^{4+}$ و مقایسهٔ قدرت کاهندگی در آن به شکل $Sn^{2+} < Fe^{2+}$ است.
- به ازای تولید هر مول Fe^{2+} در واکنش a، یک مول الکترون در واکنش مبادله می‌شود.
- در واکنش a، گونهٔ Fe^{3+} اکسنده و در واکنش b، گونهٔ Ni کاهنده است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: وقتی یک واکنش اکسایش ـ کاهش به طور خودبه‌خودی انجام می‌شود، انرژی آزاد خواهد شد. در این واکنش‌ها، که در یک سامانهٔ در حالت محلول انجام می‌شوند، بخشی از انرژی به صورت انرژی گرمایی به محیط واکنش (یعنی کل محلول) داده شده و مخلوط واکنش گرم‌تر می‌شود.

عبارت دوم: اول نقش ماده‌ها را در واکنش بررسی می‌کنیم. Sn^{2+} الکترون از دست داده، پس اکسایش می‌یابد و نقش کاهنده دارد. Fe^{3+} هم الکترون گرفته، پس کاهش می‌یابد و نقش اکسنده دارد. به همین ترتیب نقش‌های Sn^{4+} و Fe^{2+} به ترتیب اکسنده و کاهنده است.

$$\underset{\text{اکسنده}}{2Fe^{3+}} + \underset{\text{کاهنده}}{Sn^{2+}} \rightarrow \underset{\text{کاهنده}}{2Fe^{2+}} + \underset{\text{اکسنده}}{Sn^{4+}}$$

وقتی یک واکنش اکسایش ـ کاهش، به طور خودبه‌خودی انجام می‌شود، واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها بیشتر از فراورده‌ها خواهد بود؛ بنابراین قدرت کاهندگی و اکسندگی اجزای واکنش به شکل زیر است:

قدرت کاهندگی: $Sn^{2+} > Fe^{2+}$

قدرت اکسندگی: $Fe^{3+} > Sn^{4+}$

عبارت سوم: شمار مول الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش را حساب می‌کنیم:

a) $2Fe^{3+} + Zn(s) \rightarrow 2Fe^{2+}(aq) + Zn^{2+}(aq) \sim 2e^-$

شمار مول الکترون مبادله‌شده = شمار اتم‌ها در Fe^{3+} (ضریب) × تغییر بار × شمار اتم‌ها در Zn × ضریب Zn = الکترون ۲

$= 1 \times 2 \times 1 = 1 \times 1 \times 2 = 2$

حالا شمار مول الکترون‌های مبادله‌شده را به ازای یک مول Fe^{2+} محاسبه می‌کنیم.

$$?\,mol\,e^- = 1\,mol\,Fe^{2+} \times \frac{2\,mol\,e^-}{2\,mol\,Fe^{2+}} = 1\,mol\,e^-$$

عبارت چهارم:

در واکنش a، Fe^{3+} الکترون گرفته، پس کاهش می‌یابد و نقش اکسنده دارد.

a) $\underset{\text{اکسنده}}{2Fe^{3+}} + \underset{\text{کاهنده}}{Zn} \rightarrow 2Fe^{2+} + Zn^{2+}$

در واکنش b، Ni الکترون از دست داده، پس اکسایش می‌یابد و نقش کاهنده دارد.

b) $\underset{\text{اکسنده}}{Cu^{2+}} + \underset{\text{کاهنده}}{Ni} \rightarrow Ni^{2+} + Cu$

مشاوره در فصل الکتروشیمی، یکی از مهارت‌های مهم که بر شما لازمه بهش مسلط بشین، تشخیص گونه‌های کاهنده و اکسنده و اکسایش یا کاهش گونه‌های شرکت کننده است، به طوری که بارها و بارها در کنکور و امتحانات نهایی مورد پرسش واقع شده‌اند و برای تسلط به سایر مباحث این فصل نیز لازم‌اند! پس حتماً سعی کنید تسلط کافی روی این مباحث و در واکنش‌های مختلف حاصل کنید.

۸۵ شکل روبه‌رو، واکنش فلز روی با محلول هیدروکلریک اسید را نشان می‌دهد. با توجه به آن، کدام گزینه عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

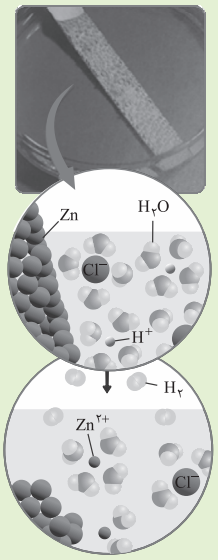
«در این واکنش، اتم‌های روی الکترون از دست می‌دهند و ..... می‌یابند، از این‌رو اتم‌های روی نقش ..... دارند. درحالی‌که یون‌های هیدروژن، الکترون به دست می‌آورند و ..... می‌یابند، از این‌رو یون‌های هیدروژن نقش ..... دارند.

۱) اکسایش ـ اکسنده ـ کاهش ـ کاهنده

۲) کاهش ـ اکسنده ـ اکسایش ـ کاهنده

۳) کاهش ـ کاهنده ـ اکسایش ـ اکسنده

۴) اکسایش ـ کاهنده ـ کاهش ـ اکسنده



پاسخ خیلی تشریحی ✔

در واکنش فلز روی با محلول هیدروکلریک اسید، اتم‌های روی الکترون از دست داده و اکسایش یافته‌اند و باعث کاهش یون‌های هیدروژن (H^+) شده‌اند؛ بنابراین **اتم‌های روی نقش کاهنده دارند، در حالی که یون‌های هیدروژن، الکترون به دست آورده و کاهش یافته‌اند و باعث اکسایش اتم‌های روی شده‌اند؛ از این‌رو یون‌های هیدروژن نقش اکسنده دارند.**

در این واکنش، معادلهٔ نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش و هم‌چنین معادلهٔ کلی به صورت زیر است:

نیم‌واکنش اکسایش: $Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow H_2(g)$

واکنش کلی اکسایش ـ کاهش: $Zn(s) + 2H^+(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + H_2(g)$

(کاهنده: $Zn(s)$، اکسنده: $2H^+(aq)$)

توجه: در این واکنش، یون‌های Cl^- ناظر *تشریف دارن* و هیچ نقشی در واکنش ندارند. اگر بخواهیم معادلهٔ واکنش را با حضور یون‌های کلرید نشون بدیم. *این‌جوری می‌شه:*

$$Zn(s) + 2HCl(aq) \rightarrow ZnCl_2(aq) + H_2(g)$$

اغلب فلزها در واکنش با محلول اسیدها، گاز هیدروژن و نمک تولید می‌کنند. با توجه به شکل که نمایی از این واکنش را نشان می‌دهد، به پرسش‌ها پاسخ دهید.

(خود را بیازمایید ۱ ـ صفحهٔ ۴۲)

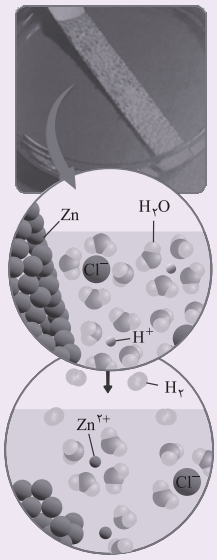
الف) کدام گونه اکسایش و کدام گونه کاهش یافته است؟ چرا؟

ب) نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش را بنویسید و موازنه کنید.

پ) نیم‌واکنش‌ها را با هم جمع کنید تا با حذف الکترون‌ها، معادلهٔ واکنش به دست آید.

ت) با خط‌زدن واژهٔ نادرست در هر مورد، عبارت داده‌شده را کامل کنید.

در این واکنش، اتم‌های روی الکترون (از دست می‌دهند / به دست می‌آورند) و (کاهش / اکسایش) می‌یابند و سبب (کاهش / اکسایش) یون‌های هیدروژن می‌شوند، از این‌رو اتم‌های روی نقش (اکسنده / کاهنده) دارند. در حالی که یون‌های هیدروژن، الکترون (از دست می‌دهند / به دست می‌آورند) و (کاهش / اکسایش) می‌یابند و سبب (کاهش / اکسایش) اتم‌های روی می‌شوند، از این‌رو یون‌های هیدروژن نقش (اکسنده / کاهنده) دارند.



۸۶ تیغه‌ای از جنس فلز آلومینیم را درون محلولی از روی سولفات قرار می‌دهیم. اگر پس از مبادلهٔ $۱/۴۴۴۸\times۱۰^{۲۳}$ الکترون، $۳/۶۹$ گرم به جرم تیغه افزوده شود، چند درصد از فلز روی تولیدشده، روی تیغهٔ آلومینیم رسوب کرده است؟ $(Zn=۶۵ , Al=۲۷ : g.mol^{-۱})$

۱) ۷۰ ۲) ۷۵ ۳) ۸۰ ۴) ۸۵

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ واکنش فلز Al با محلول حاوی یون‌های $Zn^{۲+}$ را نوشته و موازنه می‌کنیم، سپس شمار الکترون‌های مبادله‌شده در این واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$۲Al(s)+۳Zn^{۲+}(aq)\rightarrow ۲Al^{۳+}(aq)+۳Zn(s)$$

تغییر بار الکتریکی اکسنده × ضریب اکسنده × شمار اتم‌ها در اکسنده = شمار مول الکترون مبادله‌شده براساس معادلهٔ موازنه‌شده
تغییر بار الکتریکی کاهنده × ضریب کاهنده × شمار اتم‌ها در کاهنده =

تغییر بار الکتریکی: ۳ — شمار اتم‌ها در Al: ۲ — ضریب Al: ۲

ضریب $Zn^{۲+}$: ۳ — شمار اتم‌ها در $Zn^{۲+}$: ۱

شمار مول e^- مبادله‌شده در این واکنش $= ۳\times۲\times۱$ یا $۲\times۱\times۳ = ۶ mol\ e^-$

گام دوم: مقدار جرم Al مصرف‌شده در واکنش (جرم کاسته‌شده از تیغهٔ آلومینیمی) را به دست می‌آوریم:

یه‌جور دیگه

استفاده از کسرهای تبدیل:

$$۱/۴۴۴۸\times۱۰^{۲۳}e^-\times\frac{۱\ mol\ e^-}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^-}\times\frac{۲\ mol\ Al}{۶\ mol\ e^-}\times\frac{۲۷\ g\ Al}{۱\ mol\ Al}=۲/۱۶\ g\ Al$$

استفاده از کسرهای تناسب:

$$\frac{\text{جرم (گرم)}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{Al}}=\frac{\text{شمار } e^-}{\underbrace{\text{ضریب}\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}_{e^-}}\Rightarrow\frac{x\ g}{۲\times۲۷}=\frac{۱/۴۴۴۸\times۱۰^{۲۳}}{۶\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}\Rightarrow ۲/۱۶ g\ Al$$

گام سوم: جرم فلز Zn تولیدشده رو حساب می‌کنیم:

یه‌جور دیگه

استفاده از کسرهای تبدیل:

$$۱/۴۴۴۸\times۱۰^{۲۳}e^-\times\frac{۱\ mol\ e^-}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^-}\times\frac{۳\ mol\ Zn}{۶\ mol\ e^-}\times\frac{۶۵\ g\ Zn}{۱\ mol\ Zn}=۷/۸\ g\ Zn$$

استفاده از کسرهای تناسب:

$$\frac{\text{جرم (گرم)}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{Zn}}=\frac{\text{شمار } e^-}{\underbrace{\text{ضریب}\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}_{e^-}}\Rightarrow\frac{x\ g}{۳\times۶۵}=\frac{۱/۴۴۴۸\times۱۰^{۲۳}}{۶\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}\Rightarrow ۷/۸ g\ Zn$$

گام چهارم: به جرم تیغه، $۳/۶۹$ گرم افزوده شده است که این تغییر جرم ناشی از اختلاف جرم فلز روی (Zn) رسوب‌کرده بر روی تیغه، با جرم فلز آلومینیم (Al) مصرفی است؛ بنابراین اگر درصد رسوب فلز روی (Zn) بر روی تیغه را برابر x در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

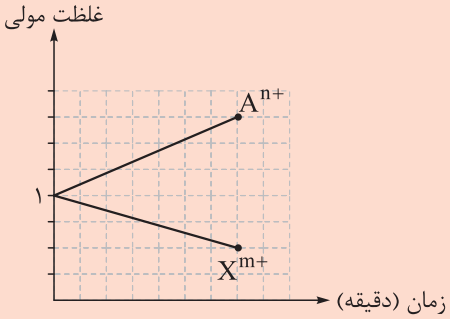
$$\text{تغییر جرم تیغهٔ آلومینیمی}=\underbrace{(۷/۸\times\frac{x}{۱۰۰})}_{\text{فلز Zn رسوب‌کرده روی تیغه}}-\underbrace{۲/۱۶}_{\text{فلز Al مصرفی}}=۳/۶۹\Rightarrow\frac{۷/۸x}{۱۰۰}=۵/۸۵\Rightarrow x=\frac{۵/۸۵\times۱۰۰}{۷/۸}=٪۷۵$$

تیزبازی

$$\frac{\text{اختلاف جرم Zn و Al (تغییر جرم تیغه)}}{\text{جرم مولی Zn}\times\text{ضریب Zn}-\text{جرم مولی Al}\times\text{ضریب Al}}=\frac{\text{شمار } e^-}{\text{ضریب}\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}$$

$$\Rightarrow\frac{۳/۶۹}{(۳\times۶۵\times\frac{x}{۱۰۰})-(۲\times۲۷)}=\frac{۱/۴۴۴۸\times۱۰^{۲۳}}{۶\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}\Rightarrow\boxed{x=٪۷۵}$$

۸۷ با توجه به نمودار داده‌شده، که تغییرات غلظت یون‌ها را در یک سلول گالوانی استاندارد نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟ (**A** و **X** فلزند.)



$E^\circ(Al^{3+}/Al) = -1/66V$ ، $E^\circ(Cr^{3+}/Cr) = -0/74\ V$

$E^\circ(Fe^{2+}/Fe) = -0/44V$ ، $E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0/76\ V$

۱) A و X، می‌توانند به ترتیب، آهن و کروم باشند و $Fe^{2+}(aq)$، در سلول، نقش اکسنده دارد.

۲) در این سلولی گالوانی، به ازای مصرف ۰/۰۹ مول از فلز X، $1/0836\times10^{23}$ الکترون مبادله می‌شود.

۳) نمودار می‌تواند مربوط به سلول گالوانی «آلومینیم ـ آهن» باشد، که مقدار n، ۱/۵ برابر مقدار m است.

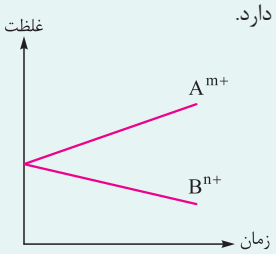
۴) E° نیم‌سلول (X^{m+}/X)، از E° نیم‌سلول (A^{n+}/A) کوچک‌تر است و با گذشت زمان، از جرم تیغهٔ A کاسته می‌شود.

درس Box

معادلهٔ کلی واکنش انجام‌شده در یک سلول گالوانی که از دو الکترود فلزی تشکیل شده است را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$nA + mB^{n+} \rightarrow nA^{m+} + mB$$

طبق این واکنش، الکترود A نقش آند (E° کم‌تر) و الکترود B، نقش کاتد (E° بیشتر) را دارد.



هم‌چنین با تولید یون A^{m+} (یون الکترود آندی)، غلظت آن در محلول افزایش یافته و با مصرف یون B^{n+} (یون الکترود کاتدی) غلظت آن در محلول کاهش می‌یابد.

نسبت تغییرات غلظت این دو یون در یک بازهٔ زمانی مشخص برابر با نسبت ضریب استوکیومتری آن‌ها در معادلهٔ کلی واکنش است.

$$\frac{\Delta[A^{m+}]}{\Delta[B^{n+}]} = \frac{\text{ضریب } A^{m+}}{\text{ضریب } B^{n+}} = \frac{n}{m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بنابراین الکترود A می‌تواند آلومینیم (E° کم‌تر با بار ۳+) و الکترود X می‌تواند آهن (E° بیشتر با بار ۲+) باشد (سلول گالوانی آلومینیم ـ آهن)؛ هم‌چنین با توجه به $n=3$ و $m=2$، مقدار n، ۱/۵ برابر مقدار m است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): A و X به ترتیب باید بتوانند یون سه بار مثبت و یون دو بار مثبت تشکیل دهند، اما اگر A و X، آهن و کروم باشند، طبق E° های داده‌شده، *قضیه برعکسه!*

درستش اینه که می‌گفت A و X به ترتیب کروم و آهن باشند.

گزینهٔ (۲): با انجام واکنش فلز X تولید می‌شود، نه مصرف! البته اگر به جای *کلمهٔ «مصرف»، کلمهٔ «تولید» می‌اومد اعداد داده‌شده درست می‌بود.*

$$2A + 3X^{2+} \rightarrow 2A^{3+} + 3X \simeq 6e^-$$

$$\text{شمار } e^- \text{ مبادله‌شده} = 0/09\ mol\ X \times \frac{6\ mol\ e^-}{3\ mol\ X} \times \frac{6/02\times10^{23}\ e^-}{1\ mol\ e^-} = 1/0836\times10^{23}\ e^-$$

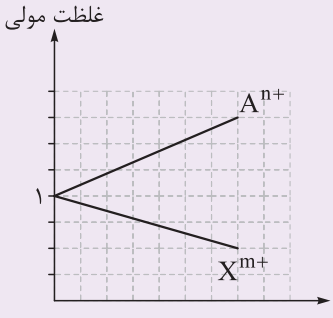
گزینهٔ (۳): با توجه به نمودار داده‌شده، در یک بازهٔ زمانی مشخص، غلظت A^{n+}، ۲ واحد افزایش و غلظت X^{m+}، ۳ واحد کاهش یافته است؛ بنابراین در سلول مورد نظر، A نقش آند (E° کم‌تر) و X نقش کاتد (E° بیشتر) را دارد و معادلهٔ کلی واکنش انجام‌شده به صورت زیر است:

$$m=2,\ n=3 \rightarrow 2A + 3X^{2+} \rightarrow 2A^{3+} + 3X$$

گزینهٔ (۴): با توجه به این‌که الکترود (X) نقش کاتد را دارد، E° آن باید از E° الکترود (A) بزرگ‌تر باشد، نه کوچک‌تر!

با توجه به نمودار داده‌شده، که تغییرات غلظت یون‌ها را در یک سلول گالوانی استاندارد نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟ (A و X فلزند.)

(تجربی داخل ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)



$$E^\circ(Al^{3+}/Al) = -1/66V \ , \ E^\circ(Cr^{3+}/Cr) = -0/74\,V$$
$$E^\circ(Mg^{2+}/Mg) = -2/37V \ , \ E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0/76\,V$$

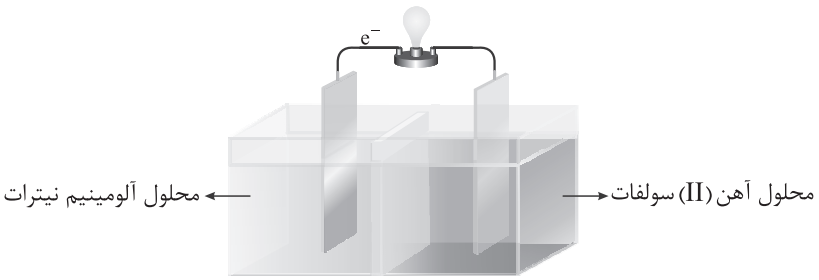
۱) A و X، می‌توانند به ترتیب، کروم و روی باشند و $Cr^{3+}(aq)$، در سلول، نقش اکسنده را دارد.

۲) در این سلولی گالوانی، به ازای مصرف ۰/۰۶ مول از فلز X، $1/0836\times10^{23}$ الکترون مبادله می‌شود.

۳) نمودار می‌تواند مربوط به سلول گالوانی، «منیزیم ـ آلومینیم» باشد، که مقدار m، ۱/۵ برابر مقدار n است.

۴) E° الکترود (X^{m+}/X)، از E° الکترود (A^{n+}/A) کوچک‌تر است و با گذشت زمان، از جرم تیغهٔ A کاسته می‌شود.

۸۸ شکل زیر سلول گالوانی استاندارد آلومینیم ـ آهن (Al ـ Fe) را نشان می‌دهد که در آن دو نیم‌سلول توسط دیوارهٔ متخلخل از یکدیگر جدا شده‌اند. دیوارهٔ متخلخل از جنس سفال، خاک چینی (کائولن)، آزبست یا گَرد فشردهٔ شیشه است که از مخلوط‌شدن مستقیم و سریع دو الکترولیت جلوگیری می‌کند، اما برخی یون‌های موجود در دو محلول می‌توانند از آن عبور کنند. با توجه به این موضوع کدام مطلب به یقین درست است؟



۱) کاتیون‌های آلومینیم به سمت نیم‌سلول آهن حرکت می‌کنند تا شمار کاتیون‌ها در آن یکسان شود.

۲) جهت حرکت آنیون‌های سولفات و نیترات در دیوارهٔ متخلخل عکس یکدیگر است.

۳) پس از مبادلهٔ $۳/۶۱۲\times۱۰^{۲۲}$ الکترون، ۰/۰۲ مول از یون‌های آلومینیم از دیوارهٔ متخلخل عبور می‌کنند.

۴) پس از مدتی هر دو نوع یون سولفات و نیترات در نیم‌سلول آلومینیم وجود خواهند داشت.

درس Box

عبور یون‌ها از دیوارهٔ متخلخل

در یک سلول گالوانی، برای این‌که تعادل بار الکتریکی در محلول‌های نیم‌سلول‌ها به هم نریزد، پس از مدتی، برخی یون‌ها از دیوارهٔ متخلخل عبور می‌کنند. از آن‌جا که در نیم‌سلول آندی، کاتیون تولید می‌شود (بار مثبت زیاد می‌شود)، آنیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل به سمت نیم‌سلول آندی مهاجرت می‌کنند تا تعادل بار الکتریکی حفظ شود. در واقع، آنیون‌های موجود در نیم‌سلول کاتدی به سمت نیم‌سلول آندی می‌روند. از آن‌جا که در نیم‌سلول کاتدی، کاتیون مصرف می‌شود (بار مثبت کم می‌شود)، کاتیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل به سمت نیم‌سلول کاتدی می‌آیند تا تعادل بار الکتریکی حفظ شود. در واقع، کاتیون‌های موجود در نیم‌سلول آندی به سمت نیم‌سلول کاتدی می‌روند.

جهت حرکت آنیون‌ها ← به سمت نیم‌سلول آندی

جهت حرکت کاتیون‌ها ← به سمت نیم‌سلول کاتدی

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با این‌که کاتیون‌های آلومینیم (نیم‌سلول آندی) به سمت نیم‌سلول آهن (نیم‌سلول کاتدی) حرکت می‌کنند، ولی لزومی ندارد که تعداد کاتیون‌ها در نیم‌سلول کاتدی برابر شوند. حرکت کاتیون‌ها صرفاً برای برقراری تعادل بار الکتریکی است.

گزینهٔ (۲): تنها آنیون‌های موجود در نیم‌سلول کاتدی (سولفات) از دیوارهٔ متخلخل عبور کرده و به سمت نیم‌سلول آندی حرکت می‌کنند. *آنیون‌های نیترات پایی نمی‌رن!*

گزینهٔ (۳): درسته که با مبادلهٔ $۳/۶۱۲\times۱۰^{۲۲}$ الکترون، ۰/۰۲ مول $Al^{۳+}$ تولید می‌شود، ولی همهٔ یون‌های $Al^{۳+}$ تولیدشده، از دیوارهٔ متخلخل عبور ایجاد نمی‌کنند! تنها مقدار اندکی از آن‌ها صرفاً برای برقراری تعادل بار الکتریکی از دیوارهٔ متخلخل عبور می‌کنند.

برای ایجاد تعادل بار الکتریکی نباید همهٔ کاتیون‌های تولیدشده از دیوارهٔ متخلخل عبور کنند، چون:

- قرار است غلظت کاتیون‌ها در نیم‌سلول آندی افزایش یابد.
- برای برقراری تعادل بار الکتریکی، شماری از آنیون‌ها هم به سمت نیم‌سلول آندی حرکت می‌کنند.

گزینهٔ (۴): در سلول گالوانی آلومینیم ـ آهن، نیم‌سلول آلومینیم (E° کم‌تر) نقش نیم‌سلول آندی و نیم‌سلول آهن (E° بیشتر) نقش نیم‌سلول کاتدی را دارد. در این سلول، آنیون‌های موجود در نیم‌سلول کاتدی (سولفات) به سمت نیم‌سلول آندی (نیم‌سلول آلومینیم) می‌روند و در نهایت در نیم‌سلول آندی (نیم‌سلول آلومینیم) هر دو نوع آنیون سولفات و نیترات (که از قبل وجود داشت) را خواهیم داشت.

۸۹ کدام مورد جزء شرایط لازم برای اندازه‌گیری پتانسیل استاندارد یک نیم‌سلول نیست؟

۱) دمای $25^\circ C$

۲) غلظت یک مولار برای محلول الکترولیت

۳) فشار ۱ atm

۴) مقدار یک مول برای تیغهٔ الکترود

پاسخ خیلی تشریحی ✔ به طور کلی هرگاه یک تیغهٔ فلزی (الکترود) درون محلولی از کاتیون‌های خودش (الکترولیت) قرار گرفته باشد، به مجموعهٔ حاصل نیم‌سلول گفته می‌شود. حالا اگر دما $25^\circ C$ و غلظت محلول الکترولیت، ۱ مولار $(1\ mol.L^{-1})$ بوده و در مورد نیم‌سلول‌هایی که دارای جزء گازی هستند، فشار گاز ۱ atm باشد، این مجموعه، نیم‌سلول استاندارد نامیده می‌شود.

ویژگی‌های نیم‌سلول استاندارد
- دما: $25^\circ C$ یا $298\ K$
- غلظت محلول الکترولیت: یک مولار
- فشار گاز (در مورد نیم‌سلول‌های دارای جزء گازی): یک اتمسفر

مشاوره یکی از مباحث چالشی و اتفاقاً پرتکرار از فصل الکتروشیمی در کنکور سراسری، سؤالات مربوط به تغییر جرم تیغه‌هاست! حواستون باشه، الان که دارین این فصل رو می‌خونین و تست می‌زنین، به انواع و اقسام سؤالات تغییر جرم تیغه‌ها مسلط بشین، به‌علاوه حل این تست‌ها را گام‌به‌گام پیش ببرین و حتماً با تحلیل، تا قاتی‌پاتی نکنین.

۹۰ اگر در سلول گالوانی استاندارد تشکیل‌شده از فلز X و فلز آهن، به ازای مصرف ۰/۰۴ مول فلز X، $7/224\times10^{22}$ الکترون مبادله شود و نسبت تغییرات جرم تیغهٔ آهن به تغییرات جرم تیغهٔ X، برابر ۰/۹۵ باشد، جرم مولی فلز X، به تقریب چند گرم بر مول است؟ $(Fe = 56\ g.mol^{-1})$

۱) ۵۹ ۲) ۷۰ ۳) ۸۸ ۴) ۹۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: باید حساب کنیم در این واکنش به ازای مصرف هر مول فلز X، چند مول الکترون مبادله می‌شود:

$$?\,mol\,e^- = 1\,mol\,X \times \frac{7/224\times10^{22}\,e^-}{0/04\,mol\,X} \times \frac{1\,mol\,e^-}{6/02\times10^{23}\,e^-} = 3\,mol\,e^-$$

گام دوم: معادلهٔ کلی واکنش انجام‌شده در این سلول گالوانی را نوشته و موازنه می‌کنیم:

در این واکنش، فلز X مصرف و فلز Fe تولید شده است؛ در نتیجه قدرت کاهندگی فلز X بیشتر از فلز آهن بوده و در واقع در این سلول، فلز X با محلول حاوی یون Fe^{2+} واکنش داده و فلز آهن و محلول حاوی یون‌های X^{n+} تولید می‌شود که باید براساس شمار الکترون‌های مبادله‌شده و شمار مول‌های فلز X، بار الکتریکی یون X^{n+} و ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ واکنش را تعیین کنیم.

معادلهٔ نیم‌واکنش‌های انجام‌شده در این سلول گالوانی به صورت زیر است:

نیم‌واکنش اکسایش: $X(s) \rightarrow X^{n+}(aq) + ne^-$

نیم‌واکنش کاهش: $Fe^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Fe(s)$

چون در این واکنش به ازای مصرف هر مول فلز X، ۳ مول e^- مبادله می‌شود، معادلهٔ نیم‌واکنش اکسایش را می‌توان به صورت $X(s) \rightarrow X^{3+}(aq) + 3e^-$ نشان داد و معادلهٔ کلی واکنش انجام‌شده در این سلول گالوانی به صورت زیر است:

$$2X(s) + 3Fe^{2+}(aq) \rightarrow 2X^{3+}(aq) + 3Fe(s)$$

گام سوم: در این واکنش به ازای مصرف دو مول فلز X، ۳ مول فلز آهن (Fe) تولید می‌شود؛ بدین ترتیب نسبت تغییر جرم دو تیغه را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$0/95 = \frac{\text{تغییر جرم تیغهٔ آهن}}{\text{تغییر جرم تیغهٔ X}} = \frac{3\times56}{2\times M_X} \Rightarrow M_X = \frac{3\times56}{2\times0/95} \simeq 88\ g.mol^{-1}$$

اگر در سلول گالوانی استاندارد تشکیل‌شده از فلز M و فلز مس، به ازای مصرف ۲ مول فلز M، $3/612\times10^{24}$ الکترون مبادله شود و نسبت تغییرات جرم تیغهٔ مس به تغییرات جرم تیغهٔ M، برابر ۱/۸۴ باشد، جرم مولی فلز M، به تقریب کدام است؟ $(Cu = 64 g.mol^{-1})$

(ریاضی ـ داخل ـ ۱۴۰۳ـ نوبت اول)

۱) ۴۵ ۲) ۵۲ ۳) ۷۰ ۴) ۵۹

۹۱ آلساندرو ولتا، سلول ولتا را ابداع کرد. سلولی که از صفحه‌های دایره‌ای‌شکل از جنس مس و روی تشکیل شده و به صورت یک‌درمیان روی هم قرار گرفته‌اند و بین آن‌ها کاغذی آغشته به محلول نمک خوراکی وجود دارد.



اگر یک ولت‌سنج را به صورت Cu — (+) ولت‌سنج (−) — Zn در یکی از این سلول‌ها قرار دهیم، حداکثر ولتاژ نشان داده شده در این سلول استاندارد کدام است؟

$$E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0/76\ V \quad , \quad E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = +0/34\ V$$

۱) $-0/42\ V$ ۲) $+0/42\ V$

۳) $-1/1\ V$ ۴) $+1/1\ V$

پاسخ خیلی تشریحی

E° فلز روی (Zn) کوچک‌تر از E° فلز مس (Cu) است و در واقع روی، فلز کاهنده‌تری نسبت به مس است. حال با توجه به نحوهٔ قرارگیری ولت‌سنج با قطب‌های مثبت و منفی در میان صفحات فلزی، چون قطب مثبت ولت‌سنج به Cu (با E° بزرگ‌تر) و قطب منفی آن به Zn (با E° کوچک‌تر) متصل است و از آن‌جا که قطب‌های همنام ولت‌سنج و سلول به هم متصل‌اند، در نتیجه در این سلول، Cu کاتد و Zn آند بوده و در واقع این مجموعه نوعی سلول گالوانی تشکیل می‌دهد و E° سلول باید مثبت باشد. ← *گزینه‌های (۱) و (۳) پَر!*

حال برای محاسبهٔ E° سلول، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده نمود:

$$E^\circ_{\text{سلول}} = \text{emf} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = +0/34 - (-0/76) = +1/1\ V$$

مشاوره سؤالات جدیدی اگر در آزمون و کنکور می‌بینید، شما را نترساند. حداقل سعی کنید متن سؤال را بخوانید و از پیش این‌طور قضاوت نکنید که لزوماً با سؤال دشواری قرار است دست و پنجه نرم کنید و خدایی نکرده، تست را چشم بسته رد نکنید. مثل همین تست که فقط ظاهرش غلط اندازه بندهٔ خدا. 😊

۹۲ در یک آزمایش چهار فلز A، B، C و D رفتارهای زیر را نشان داده‌اند:

- فقط فلزهای A و C با محلول ۰/۱M هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهند و گاز هیدروژن تولید می‌کنند.
- با قراردادن فلز C در محلول‌های حاوی یون‌های D^{2+}، B^{2+} و A^{2+} به ترتیب فلزهای D، B و A رسوب می‌کنند.
- یون B^{2+} اکسندهٔ قوی‌تری از D^{2+} است.

با توجه به این داده‌ها ترتیب کاهندگی این چهار فلز به کدام صورت است؟

۱) $B < D < C < A$

۲) $C < A < D < B$

۳) $A < C < D < B$

۴) $B < D < A < C$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا ببینیم از عبارت، چه نتیجه‌ای می‌گیریم:

- با توجه به این‌که فقط فلزهای A و C می‌توانند با محلول اسید واکنش دهند، نتیجه می‌گیریم که قدرت کاهندگی فلزهای A و C از فلزهای B و D بیشتر است.

قدرت کاهندگی: $C > B$ و $A > D$

- فلز C با هر سه یون D^{2+}، B^{2+} و A^{2+} واکنش داده است؛ بنابراین قدرت کاهندگی C از هر سه فلز بیشتر است:

قدرت کاهندگی: $C > A$، B و D

- مقایسهٔ قدرت کاهندگی فلزها، برعکس مقایسهٔ قدرت اکسندگی کاتیون‌های آن‌ها است:

قدرت کاهندگی: $D > B$

از جمع سه عبارت، نتیجه می‌گیریم که:

قدرت کاهندگی: $C > A > D > B$

در یک آزمایش چهار فلز A، B، C و D رفتارهای زیر را نشان داده‌اند:

- فقط فلزهای A و C با محلول ۰/۱M هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهند و گاز هیدروژن تولید می‌کنند.
- با قراردادن فلز C در محلول‌های حاوی یون‌های D^{2+}، B^{2+} و A^{2+} به ترتیب فلزهای D، B و A رسوب می‌کنند.
- یون B^{2+} اکسندهٔ قوی‌تری از D^{2+} است.

با توجه به این داده‌ها، ترتیب کاهندگی این چهار فلز را مشخص کنید.

(تمرین دوره‌ای ۱۲ ـ صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۹۳ کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟

الف) در سلول گالوانی مس ـ نقره، فلزهای مس و نقره به ترتیب کاهنده و اکسنده هستند.

ب) در واکنش بین روی و اکسیژن، ضریب الکترون در نیم‌واکنش کاهش، برابر ۴ است.

پ) اگر تیغهٔ مس را درون محلول روی سولفات قرار دهیم، پس از مدتی محلول به رنگ آبی درمی‌آید.

ت) لیتیم در میان فلزها، کم‌ترین چگالی و E° را دارد، به همین دلیل برای ساخت باتری‌های سبک‌تر، کوچک‌تر و با توانایی ذخیرهٔ انرژی بیشتر انرژی، مناسب است.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ ت

۳) ب ـ پ ۴) الف ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «پ» نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) *هواستون کجاست؟!* در سلول گالوانی مس ـ نقره، فلز مس گونهٔ کاهنده، اما **یون Ag^+ گونهٔ اکسنده می‌باشد.**

توجه: فلزهایی که در واکنش‌های اکسایش ـ کاهش شرکت می‌کنند، همواره کاهنده‌اند؛ زیرا فلزها هیچ وقت نمی‌توانند الکترون بگیرند و کاهش یابند (فلزها نمی‌توانند به یون منفی تبدیل شوند).

ب) نیم‌واکنش کاهش در واکنش فلز روی با گاز اکسیژن به صورت زیر است:

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$

گاز اکسیژن از مولکول‌های دواتمی O_2 تشکیل شده است. در این واکنش، هر اتم اکسیژن (O) دو الکترون به دست می‌آورد، پس می‌توان گفت هر مولکول O_2 که شامل دو اتم O است، ۴ الکترون می‌گیرد و کاهش می‌یابد.

پ) فلز مس (Cu)، قدرت کاهندگی کم‌تری نسبت به فلز روی (Zn) دارد، به همین دلیل فلز مس نمی‌تواند با محلول روی سولفات واکنش داده و جایگزین فلز روی در این محلول شود؛ بنابراین این واکنش انجام‌ناپذیر است و محلول هم‌چنان به حالت بی‌رنگ باقی می‌ماند:

$Cu(s) + ZnSO_4(aq) \rightarrow$ واکنشی انجام نمی‌شود.

نکته به شما توصیه می‌کنیم مقایسهٔ قدرت کاهندگی این فلزها و ترتیب E° *اونا رو به یاد داشته باشین:*

فلزها

- قدرت کاهندگی بیشتر از H_2 ← E° منفی (اغلب فلزها) ← ترتیب E°: $Sn > Cr > Fe > Zn > Mn > Al > Mg > Li$
- قدرت کاهندگی کم‌تر از H_2 ← E° مثبت ← ترتیب E°: $Au > Pt > Ag > Cu$

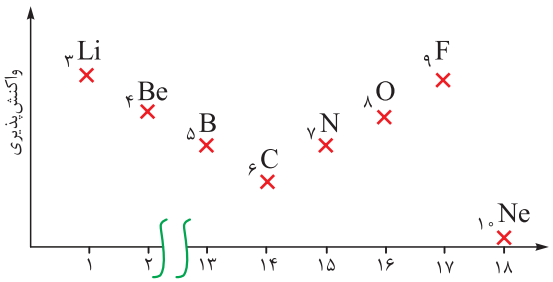
ت) لیتیم در میان فلزها کم‌ترین چگالی را دارد. *به همین دلیله* که باتری‌های ساخته‌شده از آن سبک و کوچک هستند. هم‌چنین لیتیم در میان فلزها کم‌ترین E° را دارد و قوی‌ترین کاهنده است. از این‌رو باتری‌های لیتیمی ولتاژ بالاتری ایجاد می‌کنند و توانایی ذخیرهٔ انرژی بیشتری دارند.

شیمی یازدهم

۹۴ در شرایط یکسان، کدام عنصر واکنش‌پذیری کم‌تری دارد؟

۱) بریلیم
۲) بور
۳) اکسیژن
۴) فلوئور

پاسخ خیلی تشریحی ✔ هر ۴ عنصر داده‌شده متعلق به دورهٔ دوم جدول تناوبی هستند. با توجه به نمودار روند کلی تغییر واکنش‌پذیری عنصرهای دورهٔ دوم جدول تناوبی که در تمرین‌های دوره‌ای فصل اول شیمی یازدهم *اومده*، در بین گزینه‌های داده‌شده، شبه‌فلز بور (B) کم‌ترین واکنش‌پذیری را دارد.



مشاوره این تیپ سؤال از تیرماه ۱۴۰۱ به بعد هر ساله در کنکور مطرح شده باچاشنی ابهام!

۹۵ کدام موارد از مطالب زیر از نظر علمی صادق است؟

الف) در صورتی که عنصر X دارای رسانایی الکتریکی باشد، همهٔ عنصرهای هم‌دوره و پیش از X نیز رسانای الکتریسیته هستند.

ب) در صورتی که عنصرهای یک گروه، همگی رسانای الکتریسیته باشند، آن عناصر به یقین در دستهٔ p قرار ندارند.

پ) خواص شیمیایی همانند خواص فیزیکی عناصر، در جدول تناوبی به صورت دوره‌ای تکرار می‌شوند.

ت) تنها گروهی در جدول تناوبی که عناصر آن همهٔ حالت‌های فیزیکی در شرایط اتاق را شامل می‌شوند، شمار برابری عنصر مایع و گازی در خود دارد.

۱) الف ـ ت　　۲) الف ـ پ

۳) ب ـ پ　　۴) پ ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی

موارد «الف» و «پ» درست اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در بین عناصر جدول دوره‌ای، کربن (گرافیت)، فلزات و شبه‌فلزات رسانای الکتریسیته هستند. تمام عناصر هم‌دوره و قبل از کربن رسانا هستند. در صورتی که عنصری شبه‌فلز باشد، قطعاً تمام عناصر هم‌دوره و قبل از آن یا فلزند یا شبه‌فلز. در صورتی که عنصر مفروض فلز باشد به یقین تمام عناصر هم‌دوره و قبل از آن نیز فلز هستند و رسانایی الکتریکی دارند.

ب) گروه گفته‌شده می‌تواند گروه ۱۳ یا ۱۴ باشد. گروه ۱۳ دارای یک عنصر شبه‌فلزی (بور) و ۵ عنصر فلزی است و گروه ۱۴ دارای عناصر C، Si، Ge، Sn و Pb است. همهٔ عناصر این دو گروه رسانای الکتریسیته هستند و در دستهٔ p جدول دوره‌ای قرار دارند.

پ) مطابق صفحهٔ ۹ کتاب درسی این جمله صحیح است.

ت) در بین عناصر موجود در گروه ۱۷ جدول دوره‌ای در دما و فشار اتاق، فلوئور و کلر به حالت گازی، برُم به حالت مایع، یُد و استاتین در حالت جامد قرار دارند؛ بنابراین در این گروه، در دما و فشار اتاق، ۲ عنصر گازی و یک عنصر مایع داریم.

۹۶ توصیف زیر نشان‌دهندهٔ یکی از عنصرهای جدول دوره‌ای عناصر است. کدام ویژگی در مورد این عنصر درست می‌باشد؟

«عنصری از دستهٔ **p** که شمار الکترون‌های ظرفیت اتم آن، برابر مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیتی دومین فلز جدول تناوبی عنصرها است و تفاوت عدد اتمی آن با فلز به‌کاررفته در بدنهٔ دوچرخه برابر ۸ است.»

۱) نافلزی جامد و زردرنگ است که رسانای جریان برق و گرما نیست.

۲) فلزی رسانا است که دارای ۷ الکترون با $l=1$ می‌باشد.

۳) شبه‌فلزی است که به عنوان عنصر اصلی سازندهٔ سلول‌های خورشیدی به کار می‌رود.

۴) عنصری با سطح صیقلی و رسانایی الکتریکی کم است که دومین عنصر شبه‌فلز در گروه خود می‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با استفاده از توصیف داده‌شده، *به راهتی* می‌توانیم عنصر مورد نظر را پیدا کنیم.

دومین فلز جدول دوره‌ای بریلیم ($_4Be$) است که مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیتی آن برابر ۴ است.

$$_4Be: 1s^2/2s^2 \Rightarrow \text{الکترون‌ها}(n+l)=2(\underbrace{2+0}_{2s})=4$$

با توجه به این‌که عنصر مورد نظر جزو دستهٔ p می‌باشد، پس آرایش الکترونی لایهٔ ظرفیت آن به صورت ns^2np^2 می‌باشد، یعنی عنصری از گروه چهاردهم است. از طرفی دیگر، عنصر به‌کاررفته در بدنهٔ دوچرخه تیتانیم ($_{22}Ti$) است که عدد اتمی آن با عنصر مورد نظر ۸ واحد اختلاف دارد:

$$22-x=8 \Rightarrow x=14$$

پس عنصر مورد نظر، سیلیسیم با عدد اتمی ۱۴ و اولین شبه‌فلز گروه چهاردهم جدول تناوبی است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نافلز جامد و زردرنگ، گوگرد با عدد اتمی ۱۶ می‌باشد.

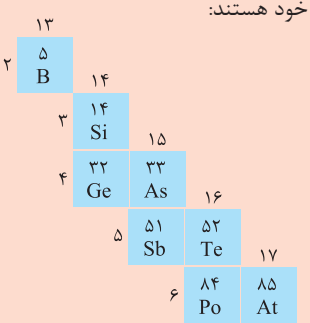
گزینهٔ (۲): آلومینیم با عدد اتمی ۱۳، ۷ الکترون با $l=1$ (زیرلایهٔ p) دارد:

$$_{13}Al: 1s^2/2s^2\underbrace{2p^6}_{l=1}/3s^2\underbrace{3p^1}_{l=1}$$

گزینهٔ (۳): سیلیسیم عنصر اصلی سازندهٔ سلول‌های خورشیدی می‌باشد که آن را به صورت مذاب طی واکنش زیر توسط کربن (C) از سنگ معدن آن (سیلیس) تهیه می‌کنند:

$$SiO_2(s)+2C(s) \xrightarrow{\Delta} Si(l)+2CO(g)$$

گزینهٔ (۴): هر یک از عنصرهای $_{32}Ge$، $_{51}Sb$ و $_{84}Po$، دومین عنصر شبه‌فلزی در گروه خود هستند:



توصیف زیر نشان‌دهندهٔ یکی از عنصرهای جدول تناوبی عنصرهاست. کدام ویژگی در مورد آن عنصر درست است؟ *(تجربی داخلی ۱۴۰۳ـ نوبت اول)*

«عنصری از دستهٔ **p** که شمار الکترون‌های ظرفیت اتم آن، برابر مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های دومین فلز جدول تناوبی عنصرها است و تفاوت عدد اتمی آن با یون فلزی موجود در ساختار صابون جامد، برابر ۵ است.»

۱) نافلزی جامد و زردرنگ که جریان برق و گرما را عبور نمی‌دهد.

۲) نافلزی که قوی‌ترین اکسندهٔ موجود در جدول تناوبی است.

۳) گازی زردرنگ که قوی‌ترین نافلز دورهٔ خود در جدول تناوبی است.

۴) ۵ درصد حجمی از مخلوط گازی که در پرکردن تایر خودرو استفاده می‌شود.

۹۷ کدام موارد از مقایسه‌های زیر درست‌اند؟

الف) رسانایی الکتریکی: چهارمین عنصر گروه چهاردهم > چهاردهمین عنصر دورهٔ چهارم.

ب) نسبت شمار الکترون‌های با $n = ۳$ به شمار الکترون‌های با $l = ۲$: $Zn > Cr$.

پ) شمار عنصرهای دارای سطح صیقلی: دورهٔ سوم = گروه چهاردهم.

ت) شمار الکترون‌ها با $l = ۲$: فلزی واسطه که در تلویزیون رنگی کاربرد دارد > زنگ آهن.

۱) الف ـ ب ۲) پ ـ ت

۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) رسانایی الکتریکی فلز قلع (Sn : چهارمین عنصر گروه چهاردهم) بیشتر از شبه‌فلز ژرمانیم (Ge : چهاردهمین عنصر دورهٔ چهارم) است.

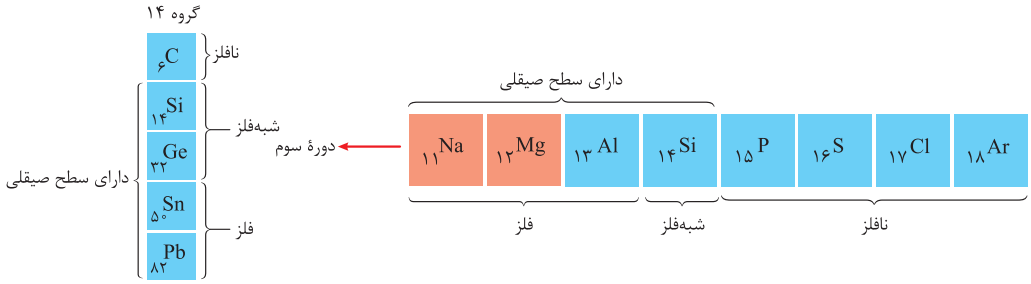
هواستون باشه که به طور کلی رسانایی الکتریکی و گرمایی فلزها بسیار بیشتر از شبه‌فلزها می‌باشد.

ب) نسبت گفته‌شده در کروم ($_{۲۴}Cr$)، بیشتر از روی ($_{۳۰}Zn$) می‌باشد:

$$_{۲۴}Cr: ۱s^۲ / ۲s^۲ ۲p^۶ / ۳s^۲ ۳p^۶ ۳d^۵ / ۴s^۱ \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌های لایهٔ سوم}}{\text{شمار الکترون‌های زیرلایهٔ } d\ (l=۲)} = \frac{۲+۶+۵}{۵} = ۲/۶$$

$$_{۳۰}Zn: ۱s^۲ / ۲s^۲ ۲p^۶ / ۳s^۲ ۳p^۶ ۳d^{۱۰} / ۴s^۲ \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌های لایهٔ سوم}}{\text{شمار الکترون‌های زیرلایهٔ } d\ (l=۲)} = \frac{۲+۶+۱۰}{۱۰} = ۱/۸$$

پ) شبه‌فلزها همانند فلزها، سطح براق و صیقلی دارند. گروه چهاردهم و دورهٔ سوم، چهار عنصر با این ویژگی دارند.



ت) اسکاندیم ($_{۲۱}Sc$)، نخستین فلز واسطه در جدول تناوبی است که در وسایل خانه مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها کاربرد دارد؛ هم‌چنین در زنگ آهن ($Fe_۲O_۳$)، یون‌های $_{۲۶}Fe^{۳+}$ و $_۸O^{۲-}$ وجود دارد؛ بنابراین الکترون‌های با $l = ۲$ موجود در کاتیون زنگ آهن بیشتر از اسکاندیم است:

$_{۲۱}Sc: [_{۱۸}Ar] ۳d^۱ / ۴s^۲$ $l = ۲$ با الکترون‌ها = ۱

$_{۲۶}Fe^{۳+}: [_{۱۸}Ar] ۳d^۵$ $l = ۲$ با الکترون‌ها = ۵

دقت کنید، در اکسیژن موجود در زنگ آهن، الکترونی با $l = ۲$ وجود ندارد.

۹۸ کدام مطلب نادرست است؟

۱) مجموع شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها در فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از واکنش سومین عنصر گروه سیزدهم با نهمین عنصر دستهٔ p برابر ۲ است.

۲) در ترکیبی که به عنوان رنگ قرمز در نقاشی به کار می‌رود، شمار الکترون‌های با $n+l=4$ در کاتیون تشکیل‌دهندهٔ آن، دو برابر شمار عنصرهای نافلزی دورهٔ سوم جدول تناوبی است.

۳) در اثر تابش نور سفید به یک تکه یاقوت، طول موج‌هایی بازتاب می‌شوند که نشانی از وجود برخی ترکیب‌های فلزهای واسطه در آن است.

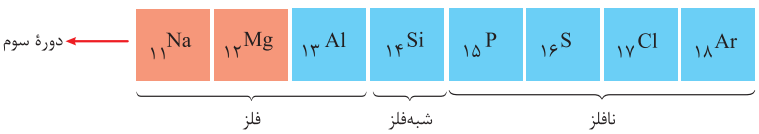
۴) تفاوت شمار عنصرها با تمایل به اشتراک گذاشتن الکترون در تناوب‌های دوم با تناوب چهارم جدول تناوبی، برابر با شمار عنصرهای تناوب اول است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): گالیم ($_{31}Ga$) سومین عنصر گروه سیزدهم و فسفر ($_{15}P$) از گروه پانزدهم جدول، نهمین عنصر دستهٔ p می‌باشد. هر یک از عنصرهای گالیم و فسفر به ترتیب با از دست دادن و گرفتن ۳ الکترون، یون پایدار تشکیل می‌دهند:

$$Ga^{3+}N^{3-} \rightarrow GaN \xrightarrow{\text{مجموع شمار کاتیون و آنیون}} 1+1=2$$

گزینهٔ (۲): آهن (III) اکسید (Fe_2O_3)، به عنوان رنگ قرمز در نقاشی به کار می‌رود که شمار الکترون‌های با $n+l=4$ $(3p)$ در کاتیون تشکیل‌دهندهٔ آن (Fe^{3+})، برابر ۶ می‌باشد، اما در دورهٔ سوم، ۴ عنصر نافلزی وجود دارد.



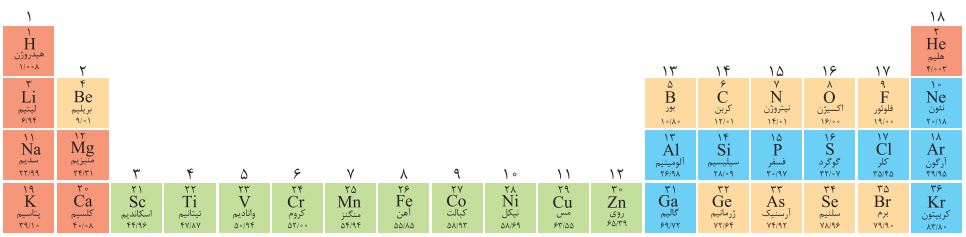
$$Fe^{3+}: 1s^2/2s^2 2p^6/3s^2 3p^6 3d^5$$

گزینهٔ (۳): در اثر تابش نور سفید به یک تکه یاقوت، رنگ سرخ از آن بازتاب می‌شود که این رنگ به دلیل وجود برخی کاتیون‌ها و ترکیب‌های فلزهای واسطه (فلزهای دستهٔ d) می‌باشد.

نکته رنگ سنگ‌های قیمتی و شیشه‌های رنگی، به دلیل وجود برخی کاتیون‌ها و ترکیب‌های فلزهای واسطه است. بر شما واجب است! که رنگ سه سنگ قیمتی را بدانید:



گزینهٔ (۴): در دورهٔ دوم، شش عنصر (Be,B,C,N,O,F) و در دورهٔ چهارم، چهار عنصر (Ge,As,Se,Br) الکترون به اشتراک می‌گذارند که تفاوت شمار این عنصرها $(۲=۴-۶)$ برابر شمار عنصرهای دورهٔ اول (H,He) جدول تناوبی است.



۹۹ با توجه به اطلاعات داده‌شده در مورد گونه‌های **A** تا **E**، کدام گزینه نادرست است؟

A: سومین عنصر تناوب سوم که خاصیت شکنندگی دارد.

B: نخستین عنصری که سه لایهٔ الکترونی پرشده از الکترون دارد.

C: عنصری هم‌دوره با چهارمین فلز قلیایی خاکی که ۵ الکترون ظرفیتی با $l=1$ دارد.

D: اولین عنصری که دو زیرلایهٔ نیمه‌پر دارد.

E: دومین عنصر دستهٔ **p**

۱) تفاوت اعداد کوانتومی اصلی و فرعی آخرین الکترون عنصر B با شمار الکترون‌های ظرفیتی عنصر E برابر است.

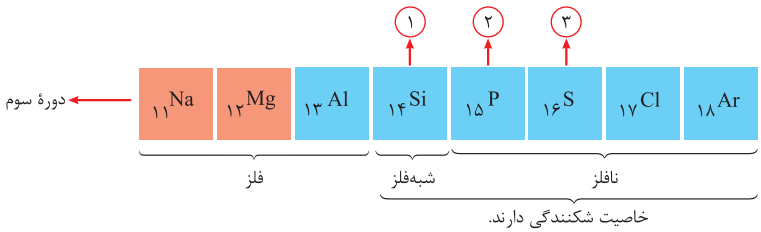
۲) عنصر C در دمای ۶۷۳ کلوین با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

۳) عنصر B همانند عنصر D خاصیت چکش‌خواری دارد.

۴) نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب یونی حاصل از گونهٔ A و فلزی که در ساخت تلویزیون رنگی به کار می‌رود، برابر ۱/۵ است.

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا *بیایید*، گونه‌های A تا E را مشخص کنیم:

A: سومین عنصری از تناوب سوم که خاصیت شکنندگی داشته باشد، عنصر گوگرد ($_{16}S$) است.



B: عنصر مس ($_{29}Cu$)، نخستین عنصر جدول تناوبی است که لایهٔ سوم آن به طور کامل از الکترون پر می‌شود.

$$_{29}Cu: 1s^2/2s^2 2p^6/\underbrace{3s^2 3p^6 3d^{10}}/4s^1$$

لایهٔ سوم پرشده است.

C: عنصر یُد ($_{53}I$) با چهارمین فلز قلیایی خاکی (استرانسیم: $_{38}Sr$) هم دوره بوده و ۷ الکترون ظرفیتی دارد که از این ۷ الکترون، ۵تای آن‌ها در زیرلایهٔ p ($l=1$) *جای گرفته‌اند*:

$$_{53}I: [_{36}Kr]4d^{10}/\underbrace{5s^2 5p^5}$$

لایهٔ ظرفیت

D: عنصر کروم ($_{24}Cr$)، اولین عنصری است که دو زیرلایهٔ نیمه‌پر دارد:

$$_{24}Cr: [_{18}Ar]\ \underbrace{3d^5/4s^1}$$

دو زیرلایهٔ نیمه‌پر

E: عنصر کربن ($_6C$)، دومین عنصر از دستهٔ p جدول تناوبی است.

حالا بریم سراغ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $(n-l)$ آخرین الکترون عنصر مس ($_{29}Cu$) برابر با شمار الکترون‌های ظرفیتی کربن ($_6C$) است:

$$_{29}Cu: [_{18}Ar]3d^{10}/4s^1 \Rightarrow \text{الکترون}(n-l)=1(4-0)=4$$

$$_6C: [_2He]: \underbrace{2s^2 2p^2} \Rightarrow \text{الکترون ظرفیتی}=2+2=4$$

لایهٔ ظرفیت

گزینهٔ (۲): ۶۷۳ کلوین برابر با $400^\circ C$ است. عنصر ید (I) در دمای **بالاتر** از $400^\circ C$ با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد (*نه فقط* $400^\circ C$).

گزینهٔ (۳): عنصر مس (B) و کروم (D)، هر دو فلز هستند و خاصیت چکش‌خواری دارند.

گزینهٔ (۴): گوگرد (عنصر A) در واکنش با فلزها به یون سولفید (S^{2-}) و اسکاندیم (فلزی که در ساخت تلویزیون رنگی به کار می‌رود) در واکنش‌ها به یون Sc^{3+} تبدیل می‌شود:

$$Sc^{3+}S^{2-} \Rightarrow Sc_2S_3 \Rightarrow \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}}=\frac{3}{2}=1/5$$

۱۰۰ محلولی حاوی یون‌های Fe^{2+} و Fe^{3+} در اختیار داریم. با اضافه‌کردن **۲۷/۲** گرم سدیم هیدروکسید به این محلول، همهٔ یون‌های آهن رسوب می‌کنند. اگر **۱۴/۴** درصد جرمی رسوب حاصل‌شده سبزرنگ باشد، جرم رسوب قرمز آجری چند گرم است؟

$(Fe=56, Na=23, O=16, H=1 : g.mol^{-1})$

۱) ۲۳/۳ ۲) ۲۴/۷

۳) ۲۱/۴ ۴) ۱۷/۸

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مول NaOH مصرف‌شده را حساب می‌کنیم:

$$mol\,NaOH = \frac{۲۷/۲}{۴۰} = ۰/۶۸\,mol$$

گام دوم: ابتدا فرض می‌کنیم x گرم رسوب داریم، سپس جرم رسوب $Fe(OH)_2$ و $Fe(OH)_3$ را محاسبه می‌کنیم و مول OH^- موجود در هر یک از رسوب‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\text{جرم رسوب سبزرنگ } Fe(OH)_2 = ۱۴/۴\times۱۰^{-۲}\,x\,g$$

$$\text{مول یون هیدروکسید} = ۱۴/۴\times۱۰^{-۲}\,x\,g\,Fe(OH)_2 \times \frac{۱\,mol\,Fe(OH)_2}{۹۰\,g\,Fe(OH)_2} \times \frac{۲\,mol\,OH^-}{۱\,mol\,Fe(OH)_2} = ۳/۲\times۱۰^{-۳}\,x\,mol\,OH^-$$

$$\text{جرم رسوب } Fe(OH)_3 = (۱-۰/۱۴۴)x = ۰/۸۵۶x\,g$$

$$mol\,OH^- = ۰/۸۵۶\,x\,g \times \frac{۱\,mol\,Fe(OH)_3}{۱۰۷\,g\,Fe(OH)_3} \times \frac{۳\,OH^-}{۱\,Fe(OH)_3} = ۰/۰۲۴\,x\,mol$$

گام سوم: مقدار x را حساب می‌کنیم و جرم رسوب قرمزرنگ $(Fe(OH)_3)$ را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} x(۲/۴\times۱۰^{-۲} + ۳/۲\times۱۰^{-۳}) = ۰/۶۸ \Rightarrow x = ۲۵\,g \\ \text{جرم رسوب قرمز رنگ} = ۰/۸۵۶\times۲۵ = ۲۱/۴\,g \end{array}\right\}$$

مشاوره مورد دوم و سوم این تست ابهام‌دار بود که برای آشنایی با سؤالات کنکور قرار داده شد.

۱۰۱ چند مورد از عبارت‌های زیر نادرست است؟ (A ، B ، X و Y فلزند.)

- B می‌تواند Al و Y می‌تواند Zn باشد.
- واکنش‌پذیری A از X و B بیشتر است.
- اگر عنصر X در دستهٔ s باشد، عنصر A به یقین جزء عنصرهای اصلی است.
- استخراج عنصر B از سنگ معدن آن به مراتب دشوارتر از Y و X است.

$A + X_2O \rightarrow AO + X$

$XCl + B \rightarrow BCl_3 + X$

$BF_3 + Y \rightarrow$ انجام نمی‌شود.

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی

تنها مورد دوم نادرست است.

عنصر فلزی که بتواند جایگزین فلز دیگر در ترکیب شود، واکنش‌پذیری بالاتری دارد؛ بنابراین:

$$\text{واکنش‌پذیری} \rightarrow \begin{cases} A > X \\ B > X \\ B > Y \end{cases}$$

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: اولاً باید واکنش‌پذیری عنصر B از Y بیشتر باشد، ثانیاً عنصر B بتواند کاتیون B^{3+} تشکیل دهد. Al از روی واکنش‌پذیرتر است و ترکیب یونی AlF_3 تشکیل می‌دهد.

عبارت دوم: نمی‌توان تعیین کرد واکنش‌پذیری A از B بیشتر است یا برعکس.

عبارت سوم: چون عنصر X جزو عناصر اصلی است و عنصر A هم باید واکنش‌پذیرتر از X باشد، لذا عنصر A هم جزو عناصر اصلی است.

عبارت چهارم: عنصر B به علت واکنش‌پذیری بیشتر از X و Y دشوارتر استخراج می‌شود.

۱۰۲ مقدار معین سدیم نیترات مطابق معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ زیر در ظرفی در باز تجزیه می‌شود. اگر در شرایط معین بازده واکنش ۶۰ درصد باشد و ۹/۶ درصد از جرم مواد موجود در ظرف کاسته شود، درصد خلوص سدیم نیترات کدام است؟ (معادله موازنه شود.)

$(Na = ۲۳, O = ۱۶, N = ۱۴ : g.mol^{-۱})$

$$NaNO_۳(s) \rightarrow NaNO_۲(s) + O_۲(g)$$

۱) ۴۲/۵ ۲) ۸۵ ۳) ۴۰ ۴) ۸۰

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جرم سدیم نیترات ناخالص اولیه را برابر ۱۰۰ گرم فرض می‌کنیم، بنابراین جرم کاسته‌شده (یا همان جرم $O_۲$ آزادشده) برابر ۹/۶ گرم خواهد بود.

گام دوم: معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$۲NaNO_۳(s) \rightarrow ۲NaNO_۲(s) + O_۲(g)$$

استفاده از کسرهای تبدیل:

$$\text{بازده واکنش} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۶۰ = \frac{۹/۶}{M_{O_۲}} \times ۱۰۰ \Rightarrow M_{O_۲} = ۱۶g$$

$$?g\ NaNO_۳ = ۱۶g\ O_۲ \times \frac{۱mol\ O_۲}{۳۲g\ O_۲} \times \frac{۲mol\ NaNO_۳}{۱mol\ O_۲} \times \frac{۸۵g\ NaNO_۳}{۱mol\ NaNO_۳} = ۸۵g\ NaNO_۳$$

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم مادهٔ خالص}}{\text{جرم مادهٔ ناخالص}} \times ۱۰۰ = \frac{۸۵}{۱۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۸۵$$

یه جور دیگه

استفاده از کسرهای تناسب:

$$\underbrace{\frac{\text{بازده واکنش} \times \text{درصد خلوص} \times \text{جرم}}{۱۰۰ \times ۱۰۰ \times \text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{NaNO_۳} = \underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{O_۲} \Rightarrow \frac{۱۰۰ \times x \times ۶۰}{۲ \times ۸۵ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰} = \frac{۹/۶}{۱ \times ۳۲} \quad \boxed{x = ٪۸۵}$$

۱۰۳ با توجه به معادلهٔ واکنش داده‌شده، اگر ۵/۶ گرم $FeCr_2O_4$ با مقدار کافی از سایر واکنش‌دهنده‌ها واکنش دهد و ۱/۶ گرم از ماده‌ای تشکیل شود که نسبت شمار آنیون به کاتیون در آن برابر ۱/۵ است، بازده درصدی واکنش کدام است؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $(Fe=56, Cr=52, O=16 : g.mol^{-1})$

$$FeCr_2O_4(s)+K_2CO_3(s)+O_2(g) \rightarrow Fe_2O_3(s)+K_2CrO_4(s)+CO_2(g)$$

۱) ۷۵ ۲) ۸۰ ۳) ۸۵ ۴) ۹۰

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$4FeCr_2O_4(s)+8K_2CO_3(s)+7O_2(g) \rightarrow 2Fe_2O_3(s)+8K_2CrO_4(s)+8CO_2(g)$$

فراورده‌ای که نسبت شمار آنیون به کاتیون در آن ۱/۵ باشد، ترکیب یونی Fe_2O_3 است. با توجه به این‌که مقدار عملی این ماده را داریم، به کمک جرم واکنش‌دهندهٔ داده‌شده $(FeCr_2O_4)$، مقدار نظری آن را محاسبه می‌کنیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$5/6\,g\,FeCr_2O_4 \times \frac{1\,mol\,FeCr_2O_4}{224\,g\,FeCr_2O_4} \times \frac{2\,mol\,Fe_2O_3}{4\,mol\,FeCr_2O_4} \times \frac{160\,g\,Fe_2O_3}{1\,mol\,Fe_2O_3} = 2\,g\,Fe_2O_3$$

حالا به راحتی می‌توان بازده درصدی واکنش را حساب کرد:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{1/6}{2} \times 100 = \%80$$

یه جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

خواستون باشه که در حل مسائل بازده درصدی به روش کسر تناسب، حتماً حتماً! بازده درصدی را باید در مقدار مربوط به واکنش‌دهنده ضرب کنیم!

$$\frac{\text{جرم} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{FeCr_2O_4}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Fe_2O_3}} \Rightarrow \frac{5/6 \times \frac{x}{100}}{4 \times 224} = \frac{1/6}{2 \times 160} \Rightarrow x = \frac{160}{2} = \%80$$

(۴۰)

با توجه به معادلهٔ داده‌شده، اگر ۳/۹۵ گرم $KMnO_4$ با مقدار کافی محلول هیدروکلریک اسید واکنش دهد و ۱۲/۷ گرم مولکول دواتمی تشکیل شود، بازده درصدی واکنش کدام است؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $(O=16, K=39, Mn=55, I=127 : g.mol^{-1})$

(ریاضی ـ داخلی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

$$KMnO_4(s)+HI(aq) \rightarrow MnI_2(aq)+H_2O(l)+KI(aq)+I_2(s)$$

۱) ۷۵ ۲) ۸۰ ۳) ۸۵ ۴) ۹۰

۱۰۴ کدام‌یک از موارد زیر، از منابع موجود به صورت کلوخه‌ها و پوسته‌های کف اقیانوس، استخراج نمی‌شود؟

۱) Mg ۲) Mn ۳) Co ۴) Ni

پاسخ خیلی تشریحی

در کف اقیانوس‌ها، مناطقی محتوی سولفید چندین فلز واسطه و مناطق دیگری به صورت کلوخه و پوسته‌هایی غنی از فلزهایی مانند منگنز (Mn)، کبالت (Co)، آهن (Fe)، نیکل (Ni)، مس (Cu) و ... یافت می‌شود.

بچه‌ها هواستون باشه که فلز منیزیم (Mg) به صورت کلوخه و پوسته در کف اقیانوس وجود ندارد و برای استخراج آن که به صورت محلول ($Mg^{2+}(aq)$) در آب دریاهاست، از روش برقکافت استفاده می‌کنند. *(با این روش تا حدودی در شیمی دهم آشنا شدین، اما به صورت کامل‌تر در فصل دوم شیمی دوازدهم آشنا خواهید شد.* ☺)

۱۰۵ کدام مطلب در رابطه با بازیافت فلزها و از جمله فلز آهن نادرست است؟

۱) ردپای کربن دی‌اکسید را کاهش می‌دهد.

۲) سبب کاهش سرعت گرمایش جهانی می‌شود.

۳) گونه‌های زیستی بیشتری را از بین می‌برد.

۴) به توسعهٔ پایدار کشور کمک می‌کند.

درس Box

بازیافت فلزات

فلزها جزو منابع تجدیدناپذیرند؛ زیرا سرعت تشکیل و جایگزین‌شدن آن‌ها در طبیعت بسیار آهسته است و تأثیر چندانی برای جبران کاهش مقدار این منابع ندارد.

در شیمی دهم آموختید که براساس توسعهٔ پایدار باید در تولید یک ماده یا عرضهٔ خدمات، همهٔ هزینه‌ها و ملاحظه‌های اقتصادی، اجتماعی و زیست‌محیطی را در نظر گرفت. به طوری که اگر مجموع هزینه‌های بهره‌برداری از یک معدن با در نظر گرفتن این ملاحظه‌ها، کم‌ترین مقدار ممکن باشد، در آن صورت در مسیر پیشرفت پایدار حرکت کرده‌ایم و ردپای زیست‌محیطی ما کاهش می‌یابد.

یکی از روش‌هایی که به توسعهٔ پایدار در یک کشور کمک می‌کند، بازیافت فلزها است. بازیافت فلزها از جمله آهن دارای مزایایی از جمله:

۱) حفظ منابع تجدیدناپذیر: با بازیافت فلزها، بخش زیادی از نیاز صنایع به استخراج فلزها کاهش می‌یابد و سنگ معدن کم‌تری استخراج خواهد شد.

۲) کاهش سرعت گرمایش جهانی: با بازیافت فلزها انرژی کم‌تری مصرف و گاز کربن دی‌اکسید (CO_2) کم‌تری نیز وارد محیط زیست می‌شود.

۳) کاهش ردپای کربن دی‌اکسید: در فرایند بازیافت فلزها، کربن دی‌اکسید کم‌تری نسبت به استخراج آن‌ها از سنگ معدن تولید می‌شود.

۴) حفظ گونه‌های زیستی: با بازیافت فلزها مواد زائد و شیمیایی کم‌تری وارد محیط زیست می‌شود و باعث حفظ گونه‌های زیستی خواهد شد.

۵) ذخیره‌کردن انرژی: برای استخراج فلز از ضایعات آن انرژی کم‌تری نسبت به استخراج فلز از سنگ معدن آن لازم است. برای مثال، از بازگردانی ۷ قوطی فولادی آن‌قدر انرژی ذخیره می‌شود که می‌توان یک لامپ ۶۰ واتی را در حدود ۲۵ ساعت روشن نگه داشت.



پاسخ خیلی تشریحی ✔ بازیافت فلزها، باعث کاهش استخراج و کاهش ورود مواد زائد و پسماندهای شیمیایی می‌شود؛ بنابراین محیط زیست کم‌تر آسیب می‌بیند و گونه‌های زیستی حفظ می‌شوند.