آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله هشتم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۰۹/آذر/۱۴۰۳

دفترچه شماره یک

بودجه‌بندی دروس

حسابان و ریاضیات پایه	هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال
حسابان (۱) فصل ۵ (درس‌های ۱ تا ۴) صفحهٔ ۱۱۳ تا ۱۴۴ حسابان (۲) فصل ۲ (درس ۲) و فصل ۳ صفحهٔ ۳۵ تا ۷۰	هندسه (۲) فصل ۱ (درس ۳) صفحهٔ ۲۴ تا ۳۰ هندسه (۳) فصل ۲ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۳۳ تا ۴۶	آمار و احتمال فصل ۳ (درس ۳) صفحهٔ ۸۷ تا ۹۶ ریاضیات گسسته فصل ۱ (درس ۳ از ابتدای معادلهٔ هم‌نهشتی) و فصل ۲ (درس ۱) صفحهٔ ۲۴ تا ۴۲

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۵ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

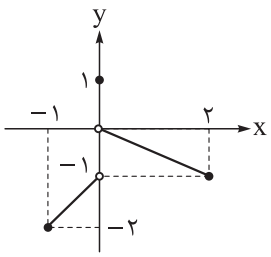
Azmoon.kheilisabz.com

حسابان و ریاضیات پایه

۱- تابع $f(x)=\begin{cases}۲x^۲+۳ax & ;\ x\le ۲\\ (a+۳)x & ;\ x>۲\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۲- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^-}[f(۲+x-x^۲)]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) صفر

۲) -۱

۳) -۲

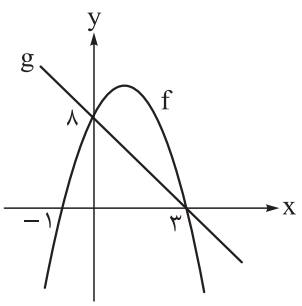
۴) -۳

۳- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x-\cos x}{۱-\tan x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) -۱

۴- نمودار تابع درجه‌دوم f و تابع خطی g در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-g(x)}{x-۳}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴۰}{۳}$

۲) ۸

۳) $-\frac{۴۰}{۳}$

۴) -۸

۵- تابع $f(x)=\frac{۴}{ax+b}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{f(x)}-۱}{x^۲-۱}=\frac{۱}{۸}$ باشد، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

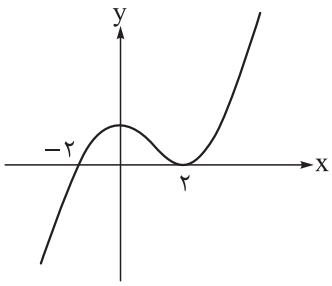
۱) ۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) -۴

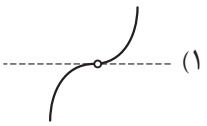
۶- اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۲x+a}}{x\sqrt{x}-۱}=-\frac{۱}{b}$ باشد، حاصل ab کدام است؟

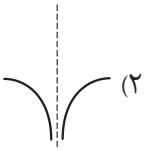
۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

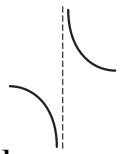
محل انجام محاسبات

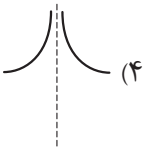
۷- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. در این صورت نمودار تابع $h(x)=\frac{(-1)^{[x]}f(-x)}{f(x)}$ در اطراف $x=2$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

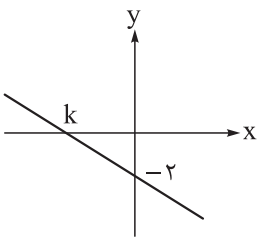
۸- اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{a^2-4x\cos\pi[x]}{2x^2-3x+1}=+\infty$ باشد، حدود a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(-2,2)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $\mathbb{R}$

۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{3x^2+4x-4}{ax^2-(a+2)x+2}$ فقط یک مجانب قائم دارد. a چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰- نمودار تابع خطی f در شکل زیر رسم شده است. اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(fof)(x)}{f^{-1}(x)}=-1$ باشد، مقدار k کدام است؟



۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$

۳) -1 ۴) -2

۱۱- توابع $f(x)=\frac{4a}{x^2+2x-3}$ و $g(x)=\frac{a}{x-1}$ مفروض‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{8}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۲- اگر $f(x)=\frac{2x^2-3x-1}{2x-\sqrt{9x^2+1}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{4x-[x]}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

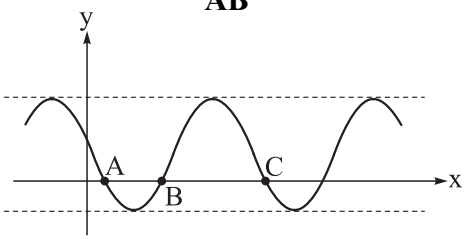
۱) $\frac{2}{15}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -1

۱۳- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{6}-2x)=0$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

محل انجام محاسبات

۱۴- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=۲\sin^۲(۲x-\frac{\pi}{۳})-\frac{۱}{۲}$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\frac{BC}{AB}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۱۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos(۲x-\frac{\pi}{۸})\sin(\frac{۳\pi}{۸}+۲x)=\frac{۱}{۲}$ در بازهٔ $(۰,\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۹\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۱۳\pi}{۴}$

۱۶- زوایای حادهٔ α و β جواب‌های معادلهٔ $۵\sin x\cos x-۵\cos^۲ x=۱$ هستند. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

۱۷- معادلهٔ $\sin ۴x-\sin ۲x+\cos ۲x=\frac{۱}{۲}$ در بازهٔ $(۰,\theta)$ چهار جواب دارد. بیشترین مقدار θ کدام است؟

۱) ۲π ۲) $\frac{۷\pi}{۶}$ ۳) $\frac{۱۹\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۳\pi}{۱۲}$

۱۸- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\sqrt{۱+\cos ۲x}}{\cos(x\sin x)}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $-\sqrt{۲}$

محل انجام محاسبات

هندسه

۱۹- دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک از آن‌ها نیست در صفحه مفروض‌اند. تعداد نقاطی که از A و B به یک فاصله و از d به فاصلهٔ ۳ واحد باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۰- دایرهٔ C به معادلهٔ $x^2+y^2-8x+6y=0$ مفروض است. مساحت ناحیهٔ محدود به مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۶ در این دایره و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن‌ها دایرهٔ C به زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود، کدام است؟

۱) 25π ۲) 34π ۳) 36π ۴) 41π

۲۱- خط به معادلهٔ $2kx+(k+1)y+2=0$، دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2=2(x-2y+2)$ را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر کدام است؟

۱) $2|k|$ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) $2|k+1|$

۲۲- شعاع کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از نقطهٔ (۱۲,۳) که بر محور xها و خط به معادلهٔ $3x=4y$ مماس باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{17}{3}$ ۴) ۵

۲۳- از دو نقطهٔ $(1,\frac{5}{2})$ و (۰,۰) مجموعاً چند مماس می‌توان بر دایرهٔ گذرنده از نقاط $(\sqrt{3},1)$ و $(1,-\sqrt{3})$ و $(3,-\sqrt{3})$ رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۴- دو دایره به معادله‌های $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$ و $x^2+y^2-2x+2y+c=0$ مماس درون هستند. مقدار c کدام است؟

۱) ۱۰/۵ ۲) ۲/۵ ۳) −۱۰/۵ ۴) −۲/۵

۲۵- معادلهٔ دایره‌ای که بر دو دایره به معادله‌های $x^2+2x+y^2=0$ و $x^2-12x+y^2+32=0$ مماس خارج است و مرکزش روی محور xها قرار دارد، خط $x=1$ را کدام عرض مثبت قطع می‌کند؟

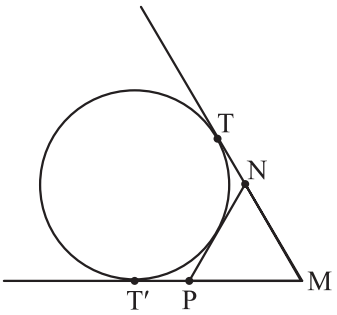
۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۲۵

۲۶- در مثلث ABC، اگر $\frac{\hat{B}}{3}=\frac{\hat{C}}{2}=20^\circ$، آن‌گاه نیمساز داخلی زاویهٔ A، عمودمنصف ضلع BC را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۱) 10° ۲) 15° ۳) 20° ۴) 25°

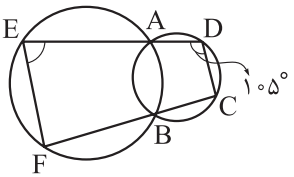
محل انجام محاسبات

۲۷- مطابق شکل از نقطهٔ M دو مماس بر دایره رسم شده و NP هم بر دایره مماس است. اگر $۶NP = ۶MN = ۵MP$. نسبت طول MP به شعاع دایره کدام است؟



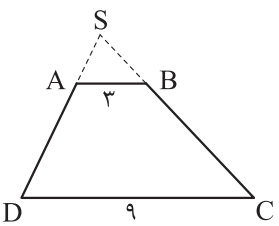
۱) ۱/۵
۲) ۱/۷۵
۳) ۲
۴) ۲/۲۵

۲۸- مطابق شکل، دو ضلع چهارضلعی CDEF از نقاط مشترک دو دایره می‌گذرند. اگر $\hat{D} = ۱۰۵^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ E چند درجه است؟



۱) ۷۵
۲) ۷۰
۳) ۶۵
۴) ۶۰

۲۹- در ذوزنقهٔ ABCD به قاعده‌های $AB = ۳$ و $CD = ۹$، نیمسازهای سه زاویهٔ A ، B و C همرس‌اند. اگر امتداد ساق‌ها همدیگر را در S قطع کنند، محیط مثلث SAB کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۹
۳) ۸
۴) ۷

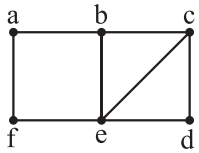
۳۰- شعاع دایرهٔ محاطی یک هشت‌ضلعی منتظم برابر با r است. اگر مساحت این هشت‌ضلعی $kr^۲$ باشد، k کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$
۲) $۸\sqrt{۲}$
۳) $۴\tan ۲۲/۵^\circ$
۴) $۸\tan ۲۲/۵^\circ$

محل انجام محاسبات

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

۳۱- در گراف شکل مقابل، چند مسیر از رأس a به رأس d وجود دارد؟



۱) ۵ ۲) ۶
۳) ۷ ۴) ۸

۳۲- یک‌سری داده‌های آماری اعداد طبیعی متمایزند و مقدار چارک اول، دوم و سوم در میان خود داده‌ها است. تعداد داده‌ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴۴ ۲) ۵۵ ۳) ۶۶ ۴) ۷۷

۳۳- با افزودن $x = 12$ به ۱۰ دادهٔ آماری، میانگین تغییری نمی‌کند، اما واریانس داده‌ها ۲ واحد کم می‌شود. ضریب تغییرات ۱۰ دادهٔ اولیه کدام است؟

۱) ۰/۲۶ ۲) ۰/۵۲ ۳) ۰/۶۵ ۴) ۰/۳۹

۳۴- در معادلهٔ $16x + 9y = 2^{12}$ مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی x کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۳ ۳) ۲۳ ۴) ۴

۳۵- اگر میانگین داده‌های دسته‌بندی‌شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دستهٔ چهارم، مقدار واریانس آن‌ها کدام است؟

نمایندهٔ دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	A	۳

۱) ۴/۸۵ ۲) ۴/۹۲
۳) ۵/۵۵ ۴) ۵/۷۴

۳۶- اگر به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$، $12n \overset{\alpha}{\equiv} 5$ ، $9n \overset{\alpha}{\equiv} -4$ و $\alpha \neq 1$ باشند، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۳۷- در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ۱۹ و خارج‌قسمت ۲۶ است. اگر $a \overset{۷}{\equiv} ۰$ باشد، رقم دهگان کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۸- در چند زیرگراف مانند G از گراف K_4 با مجموعهٔ رأس‌های $V = \{a, b, c, d\}$، تعداد یال‌های G از تعداد یال‌های $\bar{G}$ بیشتر است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۴ ۳) ۴۶ ۴) ۴۸

۳۹- به گراف C_6 دو یال اضافه می‌کنیم، به طوری که $\Delta > \delta + 1$. اگر گراف جدید فقط یک دور به طول ۴ داشته باشد، تعداد دورهای به طول ۵ در آن کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۰- در گراف G از مرتبهٔ ۵ درجه رأس‌های a، b و c یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت مخالف صفر تشکیل می‌دهند و درجهٔ دو رأس d و e نیز با هم برابر است. تعداد یال‌های گراف G برابر کدام‌یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله هشتم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۰۹/آذر/۱۴۰۳

دفترچه شماره دو

بودجه‌بندی دروس

فیزیک	شیمی
فیزیک (۲) فصل ۱ (تا ابتدای خازن) صفحهٔ ۱ تا ۳۲ فیزیک (۳) فصل ۲ (از ابتدای تکانه و قانون دوم نیوتون) و فصل ۳ (تا ابتدای موج و انواع آن) صفحهٔ ۴۶ تا ۶۹	شیمی (۲) فصل ۱ (از ابتدای نفت، هدیه‌ای شگفت‌انگیز) صفحهٔ ۲۹ تا ۵۰ شیمی (۳) فصل ۲ صفحهٔ ۳۷ تا ۶۶

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۸۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	
مجموع	۶۵ سؤال			۸۰ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

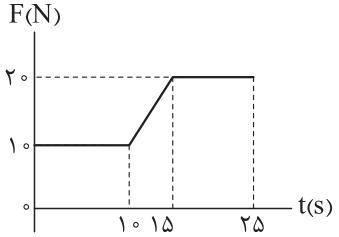
Azmoon.kheilisabz.com

فیزیک دوازدهم

۴۱- تندی یک موشک در یک بازهٔ زمانی، ۲۵ درصد افزایش یافته است. اگر در این بازهٔ زمانی، انرژی جنبشی موشک ثابت مانده باشد، اندازهٔ تکانهٔ آن چند درصد و چگونه تغییر کرده است؟

۱) ۲۰، کاهش یافته است. ۲) ۲۵، کاهش یافته است. ۳) ۲۰، افزایش یافته است. ۴) ۲۵، افزایش یافته است.

۴۲- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی برحسب زمان به شکل زیر است. اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 25s$ چند نیوتون است؟



۱) ۱۳
۲) ۱۵
۳) ۱۶ / ۲۵
۴) ۱۸ / ۷۵

۴۳- ماهواره‌ای به جرم ۲۵۰ kg در فاصلهٔ ۱۶۰۰ کیلومتری از سطح زمین قرار دارد. وزن ماهواره در این ارتفاع چند نیوتون است؟ (شتاب گرانش در سطح کرهٔ زمین ۱۰ N / kg و شعاع کرهٔ زمین ۶۴۰۰km است.)

۱) ۲۵۰۰ ۲) ۱۶۰۰ ۳) ۶۲۵ ۴) ۲۵۰

۴۴- یک دیسک افقی گردان، حول محور قائم خود می‌چرخد. دو جسم A و B به ترتیب در فاصله‌های d و 2d از مرکز دوران، روی دیسک قرار دارند و بدون آن‌که بلغزند، همراه آن می‌چرخند. اگر جرم جسم A، ۲ برابر جرم جسم B باشد، اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم A، چند برابر اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم B است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۴۵- دو ماهوارهٔ A و B با تندی ثابت روی دو مدار دایره‌ای به دور زمین در حال چرخش هستند. اگر اندازهٔ شتاب مرکزگرای ماهوارهٔ A، ۱۶ برابر اندازهٔ شتاب مرکزگرای ماهوارهٔ B باشد، دورهٔ ماهوارهٔ A چند برابر دورهٔ ماهوارهٔ B است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) ۸

۴۶- نوسانگری در راستای محور x و حول مبدأ محور، در حال حرکت هماهنگ ساده است. در بازهٔ زمانی که سرعت و شتاب نوسانگر، هر دو در جهت محور x هستند، چه تعداد از عبارت‌های زیر الزاماً درست است؟

الف) اندازهٔ بردار مکان متحرک در حال افزایش است.

ب) بردار مکان متحرک در جهت محور x است.

پ) انرژی پتانسیل نوسانگر در حال افزایش است.

ت) اندازهٔ نیروی خالص وارد بر نوسانگر در حال کاهش است.

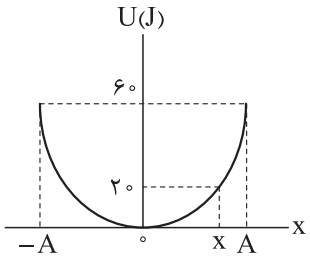
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۴۷- معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگری که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = ۰/۰۸\cos(۵\pi t)$ است. شتاب نوسانگر در لحظهٔ $t = ۰/۴۵s$، برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ $(\pi = \sqrt{۱۰})$

۱) $\sqrt{۲}\,\vec{i}$ ۲) $-\sqrt{۲}\,\vec{i}$ ۳) $۱۰\sqrt{۲}\,\vec{i}$ ۴) $-۱۰\sqrt{۲}\,\vec{i}$

۴۸- نمودار انرژی پتانسیل برحسب مکان در یک سامانهٔ جرم ـ فنر که جرم وزنهٔ آن ۲۰۰g است، مطابق شکل زیر است. تندی وزنه در مکان x چند متر بر ثانیه است؟

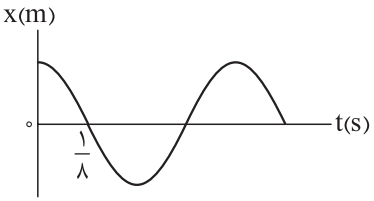


۱) ۲
۲) ۲۰
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $۱۰\sqrt{۲}$

۴۹- معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = ۰/۴\cos ۱۶\pi t$ است. در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = \frac{۱}{۶}s$، مسافت طی‌شده توسط نوسانگر چند برابر بزرگی جابه‌جایی آن است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲۲}{۳}$ ۴) ۶

۵۰- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به شکل زیر است. اگر تندی متوسط نوسانگر در مدت یک دوره برابر $۱۲\,cm/s$ باشد، سرعت متوسط آن در بازهٔ $t_۱ = ۰\,s$ تا $t_۲ = \frac{۳}{۴}\,s$، چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

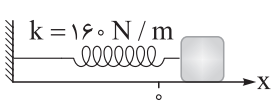


۱) $۳\vec{i}$
۲) $۴\vec{i}$
۳) $-۳\vec{i}$
۴) $-۴\vec{i}$

۵۱- معادلهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ نوسانگری در SI به صورت $x = ۰/۰۱\cos ۳\pi t$ است. بیشترین اندازهٔ سرعت متوسط نوسانگر در مدت یک ثانیه چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۵۲- در شکل زیر، معادلهٔ مکان ـ زمان جسم متصل به فنر در SI به صورت $x = ۰/۰۴\cos(\omega t)$ است. اگر جسم در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۱۲}s$ برای سومین مرتبه از فاصلهٔ ۲ سانتی‌متری مبدأ عبور کند، جرم جسم چند گرم است؟ $(\pi^۲ = ۱۰)$



۱) ۶۲/۵ ۲) ۱۲۵ ۳) ۲۵۰ ۴) ۳۷۵

محل انجام محاسبات

۵۳- معادلهٔ نیرو ـ مکان یک نوسانگر هماهنگ ساده که روی پاره‌خطی به طول ۲۰cm در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $F = -۳۰x$ است. انرژی جنبشی بیشینهٔ این نوسانگر چند ژول است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۶ ۳) ۱/۲ ۴) ۰/۳

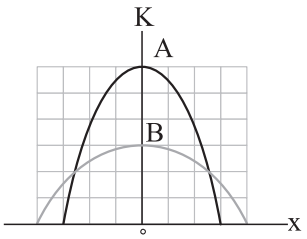
۵۴- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به جرم ۴۰۰g روی پاره‌خطی به طول ۲۰ cm در حال نوسان است. اگر نوسانگر در هر دقیقه ۶۰ مرتبه طول پاره‌خط را طی کند، در لحظه‌ای که انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن برابر است، تکانهٔ آن در SI چند واحد است؟ $(\pi = ۳)$

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵۰}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲۰}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲۵}$ ۴) $\frac{۶\sqrt{۲}}{۲۵}$

۵۵- وزنه‌ای به جرم m به فنری بسته شده است. این سامانه با دامنهٔ A حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و انرژی مکانیکی آن ۱۰J است. اگر وزنه‌ای به جرم ۲m را به همان فنر ببندیم و با همان دامنهٔ A به نوسان در آوریم، انرژی مکانیکی این سامانه چند ژول می‌شود؟ (از اتلاف انرژی چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) ۲۰

۵۶- نمودار انرژی جنبشی دو نوسانگر هماهنگ سادهٔ A و B برحسب مکان آن‌ها به شکل زیر است. اگر جرم دو نوسانگر، برابر باشد، کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ تندی بیشینه (v) و اندازهٔ شتاب بیشینهٔ (a) این دو نوسانگر درست است؟



الف) $\frac{v_A}{v_B} = ۲$ ب) $\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{۲}$

پ) $\frac{a_A}{a_B} = \frac{۸}{۳}$ ت) $\frac{a_A}{a_B} = \frac{۴}{۳}$

۱) الف و پ ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

۵۷- طول آونگ ساده‌ای برابر ۱ m است. طول این آونگ چند سانتی‌متر و چگونه تغییر کند تا بسامد نوسان‌های آن ۰/۵Hz افزایش یابد؟ $(g = \pi^۲\ N/kg)$

۱) ۲۵، کاهش یابد. ۲) ۷۵، کاهش یابد.

۳) ۲۵، افزایش یابد. ۴) ۷۵، افزایش یابد.

۵۸- طول آونگ‌های سادهٔ A ، B ، C و D که از ریسمانی افقی آویزان هستند، به ترتیب برابر ۲۰ cm ، ۴۰ cm ، ۶۰ cm و ۸۰ cm است. اگر در ریسمان نوسان‌هایی افقی با دورهٔ تناوبی در گسترهٔ ۰/۸ s تا ۱/۶ s ایجاد شود، کدام آونگ‌ها به تشدید درمی‌آیند؟ $(g = \pi^۲\ m/s^۲)$

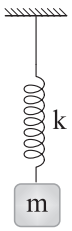
۱) A و B ۲) C و D ۳) A ، B و C ۴) B ، C و D

محل انجام محاسبات

۵۹- فنری به طول ۲۰ cm را از یک نقطه آویزان می‌کنیم و به سر دیگر آن وزنه‌ای بسته و آن را در راستای قائم به نوسان درمی‌آوریم. اگر بیشینه و کمینهٔ طول فنر در حین نوسان ۳۶ cm و ۲۴ cm باشد، بسامد زاویه‌ای نوسان‌های وزنه چند رادیان بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۶۰- در شکل زیر، اگر جرم جسم متصل به فنر برابر $m_۱$ باشد، جسم با دورهٔ تناوب ۰/۳ s و اگر جرم جسم متصل به فنر برابر $m_۲$ باشد، جسم با دورهٔ تناوب ۰/۴ s در راستای قائم به طور هماهنگ ساده نوسان می‌کند. اگر جرم جسم متصل به فنر برابر $m_۱ + m_۲$ باشد، دورهٔ تناوب آن چند ثانیه می‌شود؟



۱) ۰/۳۲ ۲) ۰/۵
۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۱۸

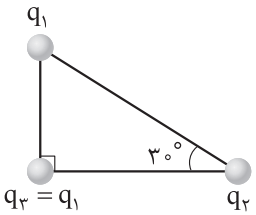
فیزیک یازدهم

۶۱- دو جسم خنثی و نارسانای A و B را با یکدیگر مالش می‌دهیم. اگر در حین مالش دو جسم، تعداد خالص الکترون مبادله‌شده بین دو جسم ۵×۱۰^{۱۰} باشد، با توجه به سری الکتریسیتهٔ مالشی زیر، بار جسم A بعد از مالش به چند نانوکولن می‌رسد؟ $(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$

انتهای مثبت سری
A
B
انتهای منفی سری

۱) ۸
۲) ۸۰
۳) −۸
۴) −۸۰

۶۲- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی رأس‌های یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارند. اگر اندازهٔ نیروی الکتریکی که بارهای $q_۱$ و $q_۲$ به بار $q_۳$ وارد می‌کنند، یکسان و برابر F باشد، اندازهٔ نیروی الکتریکی که دو بار $q_۱$ و $q_۲$ به هم وارد می‌کنند، چند برابر F است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۴

۶۳- ذره‌ای به جرم ۲ g و بار الکتریکی −۵ μC در میدان الکتریکی $\vec{E} = (۱۰^۴\ N/C)\vec{i} - (۲\times۱۰^۴\ N/C)\vec{j}$ قرار دارد. شتاب این ذره $(\vec{a})$ برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (به ذره به‌جز نیروی الکتریکی ناشی از میدان $\vec{E}$، نیروی دیگری وارد نمی‌شود.)

۱) $\vec{a} = ۲۵\vec{i} - ۵۰\vec{j}$ ۲) $\vec{a} = -۲۵\vec{i} + ۵۰\vec{j}$ ۳) $\vec{a} = ۲/۵\vec{i} - ۵\vec{j}$ ۴) $\vec{a} = -۲/۵\vec{i} + ۵\vec{j}$

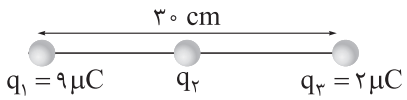
محل انجام محاسبات

۶۴- در صفحهٔ مختصات، دو بار الکتریکی نقطه‌ای که بار هر یک $-۳۲nC$ است، در مکان‌های $(۱m,۰)$ و $(۹m,۰)$ قرار دارند. میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M به مختصات $(۵m,۴m)$ برحسب نیوتون بر کولن کدام است؟

($k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}$ و بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به صورت $\vec{j}$ $\vec{i}$ است.)

۱) $۹\sqrt{۲}\ \vec{i}$ ۲) $-۹\sqrt{۲}\ \vec{j}$ ۳) $۱۸\ \vec{i}$ ۴) $-۱۸\ \vec{j}$

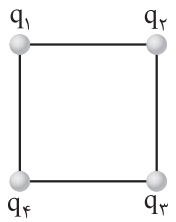
۶۵- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی خط راستی قرار دارند و نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ برابر صفر است. اگر جای بارهای $q_۲$ و $q_۳$ عوض شود، بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ برابر $۵/۴\ N$ می‌شود. $q_۲$ چند میکروکولن است؟ ($k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}$)



۱) $+۴$ ۲) -۴

۳) -۸ ۴) $+۸$

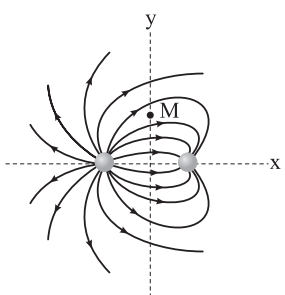
۶۶- در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی رأس‌های مربعی قرار دارند. اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر بار $q_۱$ از طرف هر یک از بارهای دیگر، یکسان است. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ برابر صفر باشد، $\left|\frac{q_۱}{q_۳}\right|$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۶۷- خطوط میدان الکتریکی اطراف دو کرهٔ فلزی باردار که روی محور x و در فاصلهٔ یکسان تا مبدأ قرار دارند، به شکل زیر است. اگر دو کره را به هم تماس داده و سپس هر یک را در مکان قبلی خود قرار دهیم، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M در چه جهتی خواهد بود؟



۱) در جهت محور x

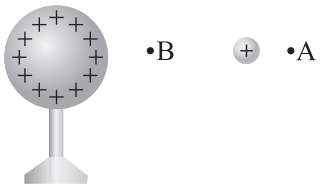
۲) در خلاف جهت محور x

۳) در جهت محور y

۴) در خلاف جهت محور y

محل انجام محاسبات

۶۸- در شکل زیر، ذرهٔ باردار مثبت و کوچکی را از نقطهٔ A به سمت کرهٔ بارداری که روی پایهٔ عایقی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم و در نقطهٔ B قرار می‌دهیم. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟



الف) در این جابه‌جایی، کار نیروی الکتریکی وارد بر ذره، مثبت است.

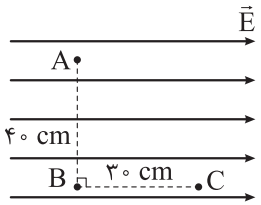
ب) در این جابه‌جایی، انرژی پتانسیل الکتریکی ذره افزایش می‌یابد.

پ) در این جابه‌جایی، اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره کاهش می‌یابد.

ت) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B، بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A است.

۱) الف ـ پ
۲) الف ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) ب ـ ت

۶۹- در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -2\ \mu C$ را در میدان الکتریکی یکنواختی با بزرگی $E = 4000\ N/C$ از نقطهٔ A تا نقطهٔ C جابه‌جا می‌کنیم. اختلاف پتانسیل الکتریکی این دو نقطه $(V_C - V_A)$ چند کیلوولت است؟

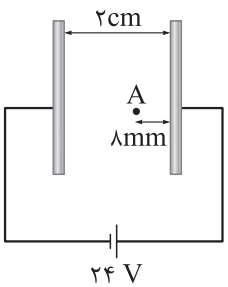


۱) ۱/۲
۲) −۱/۲
۳) ۲
۴) −۲

۷۰- بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -2mC$ را از نقطهٔ A با پتانسیل الکتریکی ۱۰V تا نقطهٔ B جابه‌جا می‌کنیم. اگر در این جابه‌جایی کار نیروی الکتریکی برابر $-0/08\ J$ باشد، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B چند ولت است؟

۱) ۳۰
۲) ۵۰
۳) −۳۰
۴) −۵۰

۷۱- در شکل زیر، دو صفحهٔ رسانای موازی به باتری وصل است. بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -5\ mC$ را در نقطهٔ A رها می‌کنیم. از این لحظه تا لحظهٔ رسیدن آن به یکی از صفحه‌ها، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند میلی‌ژول و چگونه تغییر می‌کند؟ (از اثر وزن ذره صرف نظر کنید.)



۱) ۴۸، کاهش می‌یابد.
۲) ۴۸، افزایش می‌یابد.
۳) ۷۲، کاهش می‌یابد.
۴) ۷۲، افزایش می‌یابد.

محل انجام محاسبات

۷۲- در شکل زیر، دو صفحهٔ فلزی افقی به دو سر یک باتری با اختلاف پتانسیل الکتریکی معین وصل هستند و ذرهٔ بارداری در میان این دو صفحه معلق است. اگر فاصلهٔ بین دو صفحه دو برابر شود، ذره با شتاب چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی شروع به حرکت می‌کند؟ $(g = ۱۰ N/kg)$



۱) ۵، بالا
۲) ۵، پایین
۳) ۱۰، بالا
۴) ۱۰، پایین

۷۳- ذره‌ای با بار الکتریکی q در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی یکنواختی با تندی اولیهٔ $v_۰$ پرتاب شده و پس از طی مسافت d، متوقف می‌شود. اگر این ذره، در جهت خطوط همین میدان الکتریکی با تندی $v_۰$ پرتاب شود، پس از طی مسافت $۳d$، تندی آن به v می‌رسد. v چند برابر $v_۰$ است؟ (شتاب ذره ناشی از تأثیر میدان الکتریکی است.)

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

۷۴- در شکل زیر، به جسم رسانای دوکی‌شکل که روی پایهٔ عایق قرار دارد، بار الکتریکی داده شده است. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ این جسم درست است؟



الف) میدان الکتریکی خالص در داخل جسم، برابر صفر است.

ب) پتانسیل الکتریکی تمام نقاط روی سطح جسم، برابر صفر است.

پ) بار الکتریکی فقط در سطح خارجی جسم توزیع می‌شود.

ت) تراکم بار الکتریکی در نقاط نوک‌تیز سطح جسم، بیشتر است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۵- حجم کرهٔ رسانای A، ۸ برابر حجم کرهٔ رسانای B است. اگر بار الکتریکی این دو کره برابر باشد، چگالی سطحی بار کرهٔ A، چند برابر چگالی سطحی بار کرهٔ B است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

شیمی دوازدهم

۷۶- کدام مورد درست است؟ $(Cl = ۳۵/۵, Na = ۲۳ : g.mol^{-۱})$

۱) در واکنش فلز سدیم با گاز کلر اگر ۱۴۲ گرم گونهٔ کاهنده مصرف شود، ۳۱۶ گرم فراورده تولید می‌شود.

۲) پس از موازنهٔ واکنش $Cr(s) + Fe^{۳+}(aq) \rightarrow Cr^{۳+}(aq) + Fe^{۲+}(aq)$، مجموع ضرایب گونهٔ اکسنده و گونهٔ اکسایش‌یافته، برابر ۶ می‌باشد.

۳) در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش فلز آلومینیم با محلول هیدروکلریک اسید، نسبت ضریب گونهٔ اکسنده به ضریب گاز تولیدشده، برابر ضریب گونهٔ کاهنده است.

۴) همیشه در یک واکنش اکسایش ـ کاهش موازنه‌شده، تعداد یون‌ها با بار همسان در دو سمت معادله برابر است.

۷۷- با توجه به واکنش‌های موازنه‌نشدهٔ زیر که در شرایط یکسان، به طور خودبه‌خودی انجام می‌شوند، کدام مطلب نادرست است؟ $(Zn = ۶۵\, g.mol^{-۱})$

$$I)\ Al(s) + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow$$
$$II)\ Cu^{۲+}(aq) + Mn(s) \rightarrow Cu(s) + Mn^{۲+}(aq)$$
$$III)\ Zn(s) + V^{۳+}(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + V^{۲+}(aq)$$

۱) واکنش‌پذیری فلزهای آلومینیم و منگنز، بیشتر از مس است.

۲) مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شدهٔ (I)، ۱/۶۷ برابر مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شدهٔ (III) است.

۳) فراورده‌های واکنش (I)، فلز مس و یون $Al^{۳+}(s)$ هستند.

۴) با مبادلهٔ $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳}$ الکترون در واکنش (III)، ۱۳ گرم فلز روی مصرف می‌شود.

۷۸- با توجه به جدول مقابل که داده‌هایی را از قراردادن برخی تیغه‌های فلزی در محلول مس (II) سولفات در دمای $۲۰^{\circ}C$ نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟ (از تغییر حجم محلول‌ها بر اثر انجام واکنش، چشم‌پوشی کنید؛ $(Zn = ۶۵, Fe = ۵۶, Al = ۲۷ : g.mol^{-۱})$

شمارهٔ آزمایش	نماد شیمیایی فلز	دمای مخلوط واکنش پس از مدتی ($^{\circ}C$)	جرم نهایی تیغه (g)
۱	Zn	۲۶	b
۲	Al	a	c
۳	Fe	۲۳	d

۱) اگر فلز M بتواند مس را از مس (II) سولفات آزاد کند، اما بر محلول حاوی کاتیون آهن (II) بی‌اثر باشد، به یقین دمای مخلوط واکنش فلز M با محلول مس (II) سولفات از دمای a کم‌تر است.

۲) اگر جرم یکسانی از هر تیغه را به صورت جداگانه در ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱ مولار مس (II) سولفات قرار دهیم، مقایسهٔ $c > d > b$ را برای جرم نهایی هر تیغه داریم.

۳) در صورتی که تیغه‌ای از جنس آلومینیم را در ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱ مولار مس (II) سولفات قرار دهیم و تغییرات جرم تیغه ۳/۴۵ گرم باشد، تغییر غلظت گونهٔ اکسایش‌یافته ۰/۷۵ مولار می‌باشد.

۴) اگر در آزمایش (۱) تغییر جرم تیغه ۱۰ گرم باشد و شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آزمایش (۳) برابر آزمایش (۱) باشد، در آزمایش (۳) پس از مبادلهٔ این تعداد الکترون، ۸۰ گرم به جرم تیغه افزوده می‌شود.

محل انجام محاسبات

۷۹- تیغه‌ای از یک فلز مجهول را در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول مس (II) سولفات با غلظت ۰/۳ مول بر لیتر قرار می‌دهیم. اگر بعد از بی‌رنگ‌شدن محلول، ۱/۳۵ گرم به جرم تیغه افزوده شود، فلز مجهول کدام‌یک از فلزهای زیر می‌تواند باشد؟
$(Sn = 119, Cu = 64, Fe = 56, Mn = 55, Al = 27 : g.mol^{-1})$

۱) Al　　۲) Mn　　۳) Fe　　۴) Sn

۸۰- در هر یک از روش‌های زیر مراحل تبدیل انرژی شیمیایی موجود در یک سوخت به انرژی الکتریکی نشان داده شده است. با توجه به آن، در کدام روش اتلاف انرژی به شکل گرما بیشتر است و کدام روش کارایی بالاتری دارد؟

روش (۱): انتقال سوخت → سوزاندن سوخت → تولید بخار → راه‌اندازی توربین و تولید برق → انتقال برق

روش (۲): انتقال سوخت → سلول سوختی و تولید برق

۱) روش ۱ـ روش ۱
۲) روش ۱ـ روش ۲
۳) روش ۲ـ روش ۱
۴) روش ۲ـ روش ۲

۸۱- کدام موارد زیر مطابق با اطلاعات کتاب درسی، نادرست است؟

الف) نیم‌واکنش کاهش سلول سوختی هیدروژن، مشابه نیم‌واکنش کاهش خوردگی آهن در محیط اسیدی است.
ب) تعداد الکترون‌های مبادله‌شدهٔ ناشی از مصرف یک مول H_2 در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، برابر با شمار الکترون‌های مبادله‌شدهٔ ناشی از مصرف ۰/۲۵ مول متان در سلول سوختی متان ـ اکسیژن در شرایط یکسان است.
پ) در فرایند کاهش در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، H^+ الکترون دریافت کرده و با O_2 ترکیب می‌شود.
ت) سلول‌های سوختی همانند هر سلول گالوانی دیگری سه جزء اصلی دارند.

۱) الف ـ ب　　۲) پ ـ ت
۳) الف ـ پ　　۴) ب ـ ت

۸۲- با توجه به واکنش داده‌شده، پس از موازنهٔ معادلهٔ آن کدام مورد نادرست است؟

$$I^-(aq) + MnO_4^-(aq) + H_2O(l) \rightarrow MnO_2(s) + I_2(s) + OH^-(aq)$$

۱) عدد اکسایش اتم‌های منگنز در مجموع، ۶ واحد تغییر کرده است.
۲) تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، برابر یک است.
۳) نسبت شمار آنیون(های) چنداتمی واکنش دهنده به شمارمولکول(های) چنداتمی فراورده، برابر ۰/۶۶ است.
۴) جمع جبری عدد اکسایش اتم‌های منگنز، ۱/۷۵ برابر جمع جبری عدد اکسایش اتم‌های هیدروژن است.

محل انجام محاسبات

۸۳- درستی یا نادرستی مطالب زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- **دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش عنصرهای موجود در یک گروه از جدول تناوبی، یکسان است.**
- **عدد اکسایش عنصر فلزی موجود در ترکیب CrO_5، ۱۰+ است.**
- **در ترکیب PF_5، اتم مرکزی تنها می‌تواند اکسنده باشد.**
- **سه عدد اکسایش متفاوت می‌توان برای گونه‌های مختلف مس در نظر گرفت.**
- **حداکثر عدد اکسایش نیتروژن در ترکیبات خود، با حداکثر عدد اکسایش Sc برابر است.**

۱) درست ـ درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۴) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست ـ درست

۸۴- دربارهٔ واکنش $S_2F_2 + H_2O \rightarrow S_8 + H_2S_4O_6 + HF$ پس از انجام موازنه، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **در این واکنش، عنصر گوگرد کاهنده و عنصر فلوئور اکسنده می‌باشد.**
- **به ازای تولید هر مول S_8، ۸ مول الکترون در واکنش مبادله می‌شود.**
- **مجموع اندازهٔ تغییر عدد اکسایش اتم‌های گوگرد، ۲ برابر ضریب H_2O در واکنش است.**
- **در $H_2S_4O_6$، عدد اکسایش اتم‌های گوگرد یکسان است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۵- باتری‌های «روی ـ نقره»، از جمله باتری‌های دگمه‌ای هستند که در آن‌ها واکنش: $Zn(s)+Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s)+2Ag(s)$، انجام می‌شود. با توجه به آن، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ $(Ag = 108\ g.mol^{-1})$

$$E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0/76\,V, E^\circ(Ag^+/Ag) = +0/8\,V$$

- **با مبادله $4/515\times10^{20}$ الکترون در این واکنش، ۸۱ میلی‌گرم فلز نقره تشکیل می‌شود.**
- **emf آن برابر ۰/۰۴ ولت است.**
- **اتم‌های روی و نقره در آن، به ترتیب نقش کاهنده و اکسنده را دارند.**
- **فلز روی، آند (قطب منفی) و فلز نقره، کاتد (قطب مثبت) آن را تشکیل می‌دهد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۶- کدام مورد دربارهٔ برقکافت آب، نادرست است؟

۱) با اعمال یک ولتاژ بیرونی و عبور جریان الکتریکی از درون محلول الکترولیت، می‌توان یک واکنش شیمیایی را در خلاف جهت طبیعی پیش راند.

۲) برای برقکافت آب باید مقدار زیادی الکترولیت به آب افزود؛ زیرا آب خالص رسانای الکتریکی ناچیزی دارد.

۳) در سلول الکترولیتی برقکافت آب، کاغذ pH در محلول پیرامون آند و کاتد به ترتیب به رنگ‌های قرمز و آبی درمی‌آید.

۴) در شرایط یکسان، حجم گاز آزادشده در کاتد دو برابر حجم گاز آزادشده در آند است.

محل انجام محاسبات

۸۷- کدام مورد دربارهٔ خوردگی فلزها، درست است؟

۱) ظرف نقره‌ای در اثر انجام یک واکنش اکسایش ـ کاهش، کدر شده و در اثر انجام همان واکنش جلا می‌یابد.

۲) خوردگی آهن خسارت‌های هنگفتی به اقتصاد کشورها وارد می‌کند، به طوری که سالانه یک‌چهارم از آهن تولیدی برای جایگزینی قطعه‌های خورده‌شده مصرف می‌شود.

۳) پتانسیل کاهشی همهٔ فلزها منفی بوده، اما پتانسیل کاهشی اکسیژن مثبت است؛ از این‌رو هنگامی که وسایل فلزی در هوای مرطوب قرار گیرند، یک واکنش اکسایش ـ کاهش انجام می‌شود.

۴) فراوردهٔ نهایی خوردگی آهن، از انتقال یون‌های حاصل از فرایند اکسایش و رسیدن آن‌ها به یون‌های حاصل از فرایند کاهش، تشکیل می‌شود.

۸۸- کدام موارد زیر با توجه به اطلاعات کتاب درسی، درست است؟

الف) در فرایند خوردگی آهن، آب هم نقش واکنش‌دهنده و هم نقش الکترولیت را دارد.

ب) اتم‌های آهن طی یک مرحله با O_2 و H_2O واکنش داده و رسوب قرمز آجری‌رنگ ایجاد می‌کنند.

پ) قلع به دلیل $E^\circ < 0$ با اسیدهای مواد غذایی واکنش نداده و می‌تواند در ساخت قوطی‌های کنسرو مواد غذایی به کار رود.

ت) فرایند خوردگی آهن در شرایط اسیدی تسریع شده و انرژی آزادشده طی این فرایند نیز بیشتر می‌شود.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) ب ـ ت

۸۹- شکل مقابل بخشی از یک ورقهٔ آهنی را نشان می‌دهد که با لایهٔ نازکی از قلع پوشیده شده است. با توجه به آن، کدام مطلب نادرست است؟



۱) در اثر ایجاد خراش در سطح این نوع آهن، فلز آهن خورده شده و فلز قلع در برابر خوردگی محافظت می‌شود.

۲) نیم‌واکنش موازنه‌شدهٔ اکسایش در صورت ایجاد خراش در آن، به صورت $Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$ است.

۳) نیم‌واکنش موازنه‌شدهٔ کاهش در صورت ایجاد خراش در آن، به صورت $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ است.

۴) برخلاف حلبی، از آهن گالوانیزه می‌توان برای ساختن ظروف بسته‌بندی مواد غذایی استفاده کرد.

۹۰- در صورت اکسیدشدن مقداری فلز آلومینیم و تبدیل آن به Al_2O_3، به جرم نمونهٔ جامد، ۵۶٪ افزوده شده است. در صورتی که با همین بازدهی، فلز آهن مطابق واکنش زیر دچار زنگ‌زدن شود، به جرم آهن چند درصد افزوده می‌شود؟

(واکنش‌ها موازنه شوند؛ $Fe = 56, Al = 27, O = 16, H = 1 : g.mol^{-1}$)

$$Al(s) + O_2(g) \rightarrow Al_2O_3(s)$$

$$Fe(s) + O_2(g) + H_2O(l) \rightarrow Fe(OH)_3(s)$$

۱) ۶۵ / ۴۳۵ ۲) ۵۰ / ۲۲۵ ۳) ۵۷ / ۳۷۵ ۴) ۷۲ / ۴۲۵

محل انجام محاسبات

۹۱- کدام مطلب زیر دربارهٔ آبکاری یک قاشق آهنی با فلز طلا، نادرست است؟

$(E^\circ (Au^{3+} / Au) = ۱/۵\,V , Au = ۱۹۷\,g.mol^{-۱})$

۱) با فرض رسوب نیمی از یون‌های کاهیده‌شده Au^{3+} روی قاشق آهنی، حین عبور ۰/۶ مول الکترون از سلول آبکاری، جرم قاشق به میزان ۱۹/۷ گرم افزایش می‌یابد.

۲) الکترولیت موجود در این سلول الکترولیتی، حاوی یون‌های طلا است و غلظت آن حین آبکاری تغییر محسوسی نمی‌کند.

۳) برای انجام این فرایند، الکترون‌ها از آند به سمت کاتد مهاجرت می‌نمایند.

۴) با توجه به این‌که نیم‌واکنش‌های کاتدی و آندی در این سلول مشابه یکدیگرند، E° مربوط به واکنش کلی، $۳\,V$ـ است.

۹۲- در صورتی که الکتریسیتهٔ لازم جهت انجام فرایند هال را از طریق سلول سوختی هیدروژن تأمین نماییم، برای تولید ۴۳۲ کیلوگرم فلز آلومینیم با خلوص ۵۰ درصد، در مجموع چند مول کربن دی‌اکسید و آب تولید می‌شود؟

$(Al = ۲۷\,g.mol^{-۱})$

۱) ۱۲۰۰۰ ۲) ۱۸۰۰۰ ۳) ۲۴۰۰۰ ۴) ۳۰۰۰۰

۹۳- کدام مطلب، نادرست است؟

۱) فلز اصلی سازندهٔ وسایلی مانند وسایل آشپزخانه، شیرآلات ساختمان و دستگیرهٔ در، آهن یا مس است.

۲) سطح اغلب وسایل آشپزخانه را با فلزهایی مانند نقره، کروم، نیکل و طلا می‌پوشانند.

۳) برخی از فلزها مثل آلومینیم، با این‌که اکسایش می‌یابند، اما خورده نمی‌شوند.

۴) تولید قوطی‌های آلومینیمی از فرایند هال، فقط به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیهٔ همان تعداد قوطی از قوطی‌های کهنه نیاز دارد.

شیمی یازدهم

۹۴- نفت خام در دنیای کنونی دو نقش اساسی ایفا می‌کند. این دو نقش اساسی کدام است؟

۱) منبع تأمین انرژی ـ مادهٔ اولیه برای تهیهٔ بسیاری از مواد و کالاها

۲) حل مشکل حمل‌ونقل ـ ساخت داروهای تازه

۳) سوخت در وسایل نقلیه ـ تأمین گرما و انرژی الکتریکی مورد نیاز

۴) تولید الیاف و پارچه ـ تولید پلاستیک و لاستیک

۹۵- مقداری از آلکان X را در حضور اکسیژن کافی به طور کامل می‌سوزانیم. اگر جرم آب تولیدشده در این فرایند، ۱/۵ برابر جرم آلکان مصرف‌شده باشد، چند ساختار مختلف می‌توان برای آلکان X در نظر گرفت؟

$(O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-۱})$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۹

محل انجام محاسبات

۹۶- کدام مورد، نادرست است؟

۱) آلکان‌ها دسته‌ای از هیدروکربن‌ها هستند که در آن‌ها هر اتم کربن با چهار پیوند یگانه به اتم‌های کناری متصل شده است.

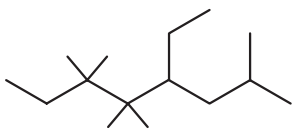
۲) در هر آلکان راست‌زنجیر، هر اتم کربن به یک یا دو اتم کربن دیگر متصل است.

۳) گران‌روی و چسبندگی گریس کم‌تر از وازلین است.

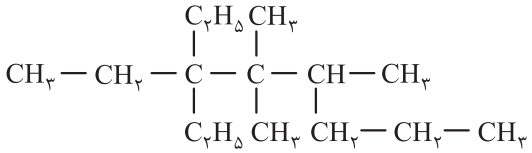
۴) افرادی که با گریس کار می‌کنند، می‌توانند در درازمدت و بدون هیچ مشکلی دستشان را با بنزین یا نفت بشویند.

۹۷- مجموع شمارهٔ شاخه‌های فرعی در نام‌گذاری کدام‌یک از آلکان‌های زیر براساس قواعد آیوپاک، کم‌تر است؟

۱)

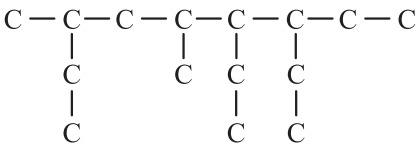


۲)

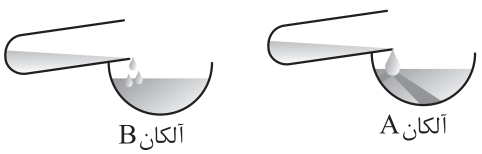


۳) $CH(C_2H_5)_2-CH(CH_3)-C(C_2H_5)_3$

۴)



۹۸- با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به دو آلکان راست‌زنجیر A و B در شرایط یکسان است، کدام مطلب نادرست است؟



۱) قدرت نیروهای بین مولکولی در آلکان A، بیشتر از آلکان B است.

۲) درصد جرمی اتم‌های کربن در آلکان A، بیشتر از آلکان B است.

۳) اگر در ساختار آلکان A، ۶ پیوند $C-C$ وجود داشته باشد، در ساختار آلکان B می‌تواند ۱۶ پیوند اشتراکی وجود داشته باشد.

۴) هر گرم از آلکان B، شامل شمار مولکول‌های کم‌تری در مقایسه با آلکان A است.

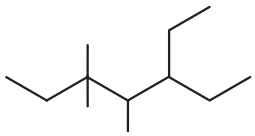
۹۹- اگر در اثر سوختن کامل نمونه‌ای شامل یک مول آلکان A و یک مول آلکین B که تعداد کربن برابری دارند، در مجموع ۱۴۴ گرم آب تولید شود، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ ($Br=80, O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1}$)

- **از آلکان A می‌توان به عنوان سوخت فندک استفاده کرد.**
- **اگر آلکان A و آلکین B راست‌زنجیر باشند، شمار گروه‌های CH_3 در آن‌ها برابر نخواهد بود.**
- **در مجموع در اثر انجام دو واکنش، ۱۷۹/۲ لیتر گاز در شرایط استاندارد تولید می‌شود.**
- **اگر نمونهٔ اولیه با استفاده از برم به طور کامل سیر شود، جرم نمونه به تقریب ۳/۸۶ برابر می‌شود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۱۰۰- نام ساختار داده‌شده کدام است و جرم مولی آن، به تقریب، چند برابر جرم مولی «۳ـاتیل ـ ۲ و ۴ـدی متیل پنتان» است؟
$(C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱})$



۱) ۳ـ اتیل ـ ۴، ۵، ۵ـ تری متیل هپتان؛ ۱/ ۳۳
۲) ۳ـ اتیل ـ ۴، ۵، ۵ـ تری متیل هپتان؛ ۱/ ۴۹
۳) ۵ـ اتیل ـ ۳، ۳، ۴ـ تری متیل هپتان؛ ۱/ ۳۳
۴) ۵ـ اتیل ـ ۳، ۳، ۴ـ تری متیل هپتان؛ ۱/ ۴۹

۱۰۱- اگر از سوختن کامل مخلوطی از اتن و اتین، ۱۹/ ۰۴ لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP، مصرف شده و حجم گاز کربن دی‌اکسید حاصل، ۵/ ۶ لیتر کم‌تر از حجم گاز اکسیژن مصرفی باشد، در مخلوط اولیه جرم اتن چند برابر جرم اتین بوده است؟
$(C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۰/ ۴۶
۲) ۰/ ۵
۳) ۲
۴) ۲/ ۱۵

۱۰۲- کدام مطلب درست است؟

۱) آلکن‌ها در ساختار خود پیوندهای دوگانهٔ کربن ـ کربن ($\diagdown C = C \diagup$) دارند.
۲) در گذشته، گاز اتن را با نام استیلن می‌خواندند.
۳) در جوشکاری کاربیدی، از سوختن گاز اتیلن، دمای لازم برای جوش‌دادن قطعه‌های فلزی تأمین می‌شود.
۴) ساده‌ترین آلکان، آلکن و سیلکوآلکان، به ترتیب یک، دو و سه کربن دارند.

۱۰۳- اگر جرم مخلوطی از گازهای اتن و اتان در واکنش با مقدار کافی بخار آب، ۴۵ درصد افزایش پیدا کند، به ترتیب از راست به چپ درصد حجمی گاز اتن در مخلوط، چند برابر درصد حجمی گاز اتان بوده و یک نمونهٔ ۵گرمی از این مخلوط، شامل چند اتم هیدروژن است؟ $(O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۰/ ۴ ـ $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳}$
۲) ۲/ ۵ ـ $۴/۸۱۶ \times ۱۰^{۲۳}$
۳) ۲/ ۵ ـ $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳}$
۴) ۰/ ۴ ـ $۴/۸۱۶ \times ۱۰^{۲۳}$

محل انجام محاسبات

۱۰۴- از واکنش ۱۲ گرم از یک هیدروکربن با ۱۳/۴۴ لیتر گاز کلر در شرایط STP، یک ترکیب سیرشده حاصل می‌شود. فرمول مولکولی این ترکیب کدام است و ۰/۰۵ مول از این هیدروکربن، با چند گرم گاز هیدروژن، به طور کامل سیر می‌شود؟ $(C=12, H=1: g.mol^{-1})$

۱) ۰/۲ ـ C_4H_6 ۲) ۰/۲ ـ C_3H_4 ۳) ۰/۱ ـ C_3H_6 ۴) ۰/۱ ـ C_3H_4

۱۰۵- کدام گزینه از نظر درستی یا نادرستی با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) در نخستین مرحلهٔ پالایش نفت خام، نمک‌ها، اسیدها و آب را جدا می‌کنند.

۲) بخش عمدهٔ هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را هیدروکربن‌های زنجیری و سیرشده تشکیل می‌دهند.

۳) کوچک‌ترین مولکول آلکان موجود در نفت سفید، شامل ۳۱ پیوند اشتراکی است.

۴) با افزایش ارتفاع در برج تقطیر، محصولات خروجی راحت‌تر از حالت مایع به گاز تبدیل می‌شوند.

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله هشتم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۰۹/آذر/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان
آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
هندسه	محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ حمید گلزاری محسن محمدکریمی ـ صبا مهدوی ـ حسین هاشمی طاهری
فیزیک	امین امینی ـ محمد باغبان ـ علیرضا جباری ـ مجید ساکی ـ رضا سبزمیدانی نوید شاهی ـ علیرضا عبداللهی ـ حمید فدائی‌فرد ـ فرزاد نامی ـ حامد نبی‌منصور
شیمی	عباس سرمایه ـ محمدرضا طاهری‌نژاد ـ سروش عبادی ـ محمد قهرمانی‌نژاد

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	عادل حسینی	محمدسجاد نقیه عادل حسینی سجاد داوطلب	زهرا جالینوسی فرزانه خاکپاش
آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	فرزانه خاکپاش علیرضا کاظمی‌بقا ماهان فنی‌فر
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی فرزانه خاکپاش منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمد باغبان علیرضا جباری محمدجواد سورچی	امین امینی	مهدی بابائی مریم حسن‌لو مدیا عیدی احسان محمدی امیر محمودی انزابی محمدمهدی یوسفی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	وحید فارسیان سروش عبادی	محمد مرادی سروش عبادی	کتایون جواهری علی حیدری احسان رحیمی پارسا مرادی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهمی‌ها از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	منیژه حق‌دوست ـ راضیه سادات خلدی‌نسب زهرا صفری ـ محیا غنی‌فرد زهرا فرهادی‌مهر ـ مریم مسلمی‌زاده ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ فاطمه بخششی مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخایی مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته مهدیه گل‌پور ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com

حسابان و ریاضیات پایه

۱ تابع $f(x)=\begin{cases}۲x^۲+۳ax & ;\ x\le ۲\\ (a+۳)x & ;\ x>۲\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

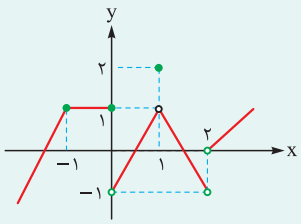
در $x=۲$ هم حد دارد.

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

Hint $x=۲$ رو تو هر دو ضابطه جای‌گذاری کن و با هم مساوی قرار بده.

درس Box تابع f در $x=x_۰$ حد دارد، اگر و فقط اگر حدهای چپ و راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند. یعنی تساوی $\lim\limits_{x\to x_۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_۰^+} f(x)$ برقرار باشد.

به عنوان مثال، تابع f که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است در $x=۰$ و $x=۲$ حد ندارد؛ زیرا:



$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=۱,\ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=-۱ \Rightarrow$ با هم برابر نیستند.

$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-۱,\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۰ \Rightarrow$ با هم برابر نیستند.

نکته برای این‌که حد یک تابع را در یک نقطهٔ خاص بررسی کنیم، اصلاً به مقدار تابع در آن نقطه کاری نداریم، یعنی ممکن است حتی در آن نقطه تابع تعریف‌نشده باشد، اما حد داشته باشد، مثل $x=۲$ در تابع بالا.

مهم: در توابع چندضابطه‌ای، برای بررسی حد تابع در نقطهٔ مرزی ضابطه‌ها، کافی است حد هر ضابطه را در این نقطه به دست آوریم و مساوی‌بودن آن‌ها را با هم بررسی کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: هر دو ضابطهٔ تابع f چندجمله‌ای هستند و هر کدام در تمام دامنه‌شان حد دارند؛ پس برای این‌که تابع f در $\mathbb{R}$ حد داشته باشد، کافی است در $x=۲$ حد داشته باشد.

نکته توابع چندجمله‌ای در $\mathbb{R}$ حد دارند.

گام دوم: طبق درس‌باکس، برای این‌که تابع f در $x=۲$ حد داشته باشد، باید حدهای چپ و راست تابع را در این نقطه با هم برابر قرار دهیم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۲x^۲+۳ax)=۲(۲)^۲+۳a(۲)=۶a+۸$$

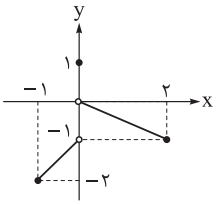
$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(a+۳)x=(a+۳)(۲)=۲a+۶$$

برابر قرار می‌دهیم:

$$۶a+۸=۲a+۶ \Rightarrow ۴a=-۲ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

نکته در توابع چندجمله‌ای، حد تابع در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-}[f(۲+x-x^۲)]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) صفر

۲) ۱−

۳) ۲−

۴) ۳−

درس Box

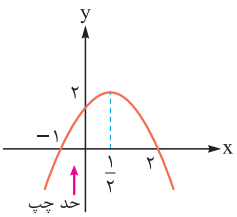
می‌خواهیم روش محاسبهٔ حد تابع مرکب fog در $x=x_۰$ را یاد بگیریم.

در این توابع باید از تابع داخلی شروع کنیم و ابتدا حد تابع g را در $x=x_۰$ حساب کنیم. فرض می‌کنیم این مقدار برابر L باشد. حال حد تابع f در $x=L$ را حساب می‌کنیم.

مهم‌ترین نکته در این محاسبه این است که بتوانیم تشخیص دهیم که تابع g از مقادیر کم‌تر از L به آن نزدیک می‌شود یا بیشتر از L. که در آن صورت باید یکی از حدهای $\lim\limits_{x\to L^-}f(x)$ یا $\lim\limits_{x\to L^+}f(x)$ را محاسبه کنیم. این نکته هنگامی حائز اهمیت می‌شود که تابع f در $x=L$ حد نداشته باشد و بسیار برایمان مهم می‌شود که حد چپ را حساب کنیم یا حد راست.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سه تابع $y=۲+x-x^۲$ ، f و $y=[x]$ ترکیب شده‌اند، پس از داخلی‌ترین تابع یعنی $y=۲+x-x^۲$ شروع می‌کنیم. نمودار این سهمی را به صورت تقریبی در شکل مقابل رسم کرده‌ایم:



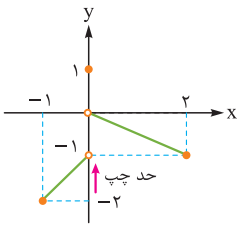
$$\lim_{x\to(-1)^-}(۲+x-x^۲)=۰$$

اما مقادیر سهمی از مقادیر کم‌تر از صفر به آن نزدیک می‌شود.

گام دوم: پس باید حد تابع f را وقتی x از سمت چپ به صفر میل می‌کند، حساب کنیم:

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(۲+x-x^۲)=\lim_{x\to۰^-}f(x)$$

و طبق نمودار صورت سؤال، حد چپ تابع f در $x=۰$ برابر -۱ است. حال مشابه کاری که برای سهمی $y=۲+x-x^۲$ انجام دادیم، این‌جا هم برای تابع f در $x=۰^-$ انجام می‌دهیم. می‌بینیم که تابع f از مقادیر کم‌تر از -۱ به آن نزدیک می‌شود.



گام سوم: در نهایت حد تابع براکتی $y=[x]$ را وقتی x از سمت چپ به -۱ میل می‌کند، حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-1)^-}[f(۲+x-x^۲)]=\lim_{x\to۰^-}[f(x)]=\lim_{x\to(-1)^-}[x]=-۲$$

مشاوره می‌توان گفت که مهم‌ترین مبحثی که در حد دبیرستان یاد می‌گیرید، حد مبهم صفر صفرم است و در یک آزمون استاندارد فصل حد، حتماً حتماً این حد را خواهید دید، این یعنی لازم است با تمرکز زیادی این مبحث را مطالعه کنید و تیپ‌های متفاوت آن را کار کنید. در این سؤال حالت مثلثاتی آن را می‌بینید.

۳ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x-\cos x}{۱-\tan x}$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $-\sqrt{۲}$

۴) -۱

Hint $\tan x$ رو به صورت $\frac{\sin x}{\cos x}$ بنویس و توی خود مخرج، مخرج‌مشترک بگیر.

درس Box اگر در تابع کسری $\frac{f}{g}$، حد هر دو تابع f و g در $x=x_۰$ برابر صفر شود، می‌گوییم حد، صفر صفرم $(\frac{۰}{۰})$ است. این حالت مبهم است و طبیعتاً باید ابهام را رفع کنیم.

رفع ابهام به این معنی است که عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج را پیدا کرده و آن‌ها را با یکدیگر ساده کنیم تا در کسر باقی‌مانده، دیگر عامل صفرکننده نداشته باشیم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مشخص است که با حد مبهم صفر صفرم مواجه هستیم!:

حد صورت: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}(\sin x-\cos x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰$

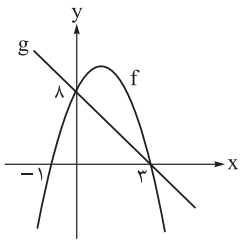
حد مخرج: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}(۱-\tan x)=۱-۱=۰$

نکته حد توابع مثلثاتی در یک نقطه، با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

گام دوم: باید عامل صفرکننده یا مبهم‌ساز را پیدا کنیم و حذف کنیم. اگر به جای $\tan x$ عبارت $\frac{\sin x}{\cos x}$ را قرار دهیم، داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x-\cos x}{۱-\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x\overbrace{(\sin x-\cos x)}^{\text{عامل صفرکننده}}}{\underbrace{\cos x-\sin x}_{\text{عامل صفرکننده}}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}(-۱)\cos x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴ نمودار تابع درجه‌دوم f و تابع خطی g در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-g(x)}{x-۳}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴۰}{۳}$
۲) ۸
۳) $-\frac{۴۰}{۳}$
۴) -۸

Hint ضابطه‌های توابع چند جمله‌ای f و g رو پیدا کن و بعدش $f(x)-g(x)$ رو تجزیه کن.

درس Box یکی از ساده‌ترین حالت‌های حد مبهم صفر صفرم، حالت $\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$ است که عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج $x-x_۰$ است و این عامل به سادگی با تجزیهٔ چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج نمایان می‌شود. در حالتی که چندجمله‌ای‌ها از درجهٔ ۳ یا بالاتر باشند، می‌توانیم عامل دیگر را با تقسیم چندجمله‌ای‌ها به دست آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** حد مخرج که برابر صفر است. با توجه به نمودار $f(۳)=g(۳)=۰$، پس حد صورت نیز برابر صفر است و برای این‌که این حد را رفع ابهام کنیم، لازم است ضابطهٔ توابع f و g را داشته باشیم.

گام دوم: تابع g خطی است که از دو نقطهٔ $(۰,۸)$ و $(۳,۰)$ می‌گذرد:

$$g:\begin{cases}\text{شیب}=m=\frac{۰-۸}{۳-۰}=-\frac{۸}{۳}\\ \text{نقطه}:(۳,۰)\end{cases}\Rightarrow y-۰=-\frac{۸}{۳}(x-۳)\Rightarrow g(x)=-\frac{۸}{۳}(x-۳)$$

ضابطهٔ تابع درجه‌دوم f را به دلیل معلوم‌بودن ریشه‌هایش به صورت $f(x)=a(x+۱)(x-۳)$ در نظر می‌گیریم:

$$\xrightarrow{f(۰)=۸} ۸=a(۱)(-۳)\Rightarrow a=-\frac{۸}{۳}\Rightarrow f(x)=-\frac{۸}{۳}(x+۱)(x-۳)$$

گام سوم: حالا می‌رویم سراغ محاسبهٔ حد:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-g(x)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{-\frac{۸}{۳}(x+۱)(x-۳)-(-\frac{۸}{۳}(x-۳))}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{-\frac{۸}{۳}\overbrace{(x-۳)}^{\text{عامل صفرکننده}}(x+۱-۱)}{\underbrace{x-۳}_{\text{عامل صفرکننده}}}=\lim_{x\to ۳}-\frac{۸}{۳}x=-۸$$

۵ تابع $f(x)=\frac{۴}{ax+b}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{f(x)}-۱}{x^۲-۱}=\frac{۱}{۸}$ باشد، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) -۴

Hint

دو مجهول داری، پس باید دو معلوم یا دو معادله داشته باشی. یه معادله مربوط به اینه که حد صورت هم صفر باشه (چرا؟) و معادلهٔ دیگه اینه که حاصل حد $\frac{۱}{۸}$ بشه.

درس Box

یکی از پرکاربردترین حالات حد مبهم صفر صفرم این است که یکی از عبارت‌های صورت و مخرج (یا هر دو) رادیکالی با فرجهٔ زوج باشد. راهکار رفع ابهام این تیپ سؤالات، استفاده از اتحاد مزدوج است، یعنی عبارت رادیکالی را که حد آن برابر صفر شده است، در مزدوج آن ضرب می‌کنیم تا عبارت صفرشونده به صورت چندجمله‌ای (یا مثلثاتی) بدون حضور رادیکال نمایان شود. از این مرحله به بعد مثل دو سؤال قبلی عمل می‌کنیم:

مثال:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}-۲x}{x-۱}\times\underbrace{\frac{\sqrt{x+۳}+۲x}{\sqrt{x+۳}+۲x}}_{\text{مزدوج}}=\lim_{x\to ۱}\frac{x+۳-۴x^۲}{(x-۱)(\sqrt{x+۳}+۲x)}=\lim_{x\to ۱}\frac{\overbrace{(x-۱)}^{\text{عامل صفرکننده}}(-۴x-۳)}{\underbrace{(x-۱)}_{\text{عامل صفرکننده}}(\sqrt{x+۳}+۲x)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{-۴x-۳}{\sqrt{x+۳}+۲x}=-\frac{۷}{۴}$$

نکته

در حد یک عبارت کسری، اگر حد یکی از عبارت‌های صورت یا مخرج صفر باشد، اما حاصل حد، عددی حقیقی و غیرصفر باشد، قطعاً حد عبارت دیگر نیز صفر است و در عمل با حد $\frac{۰}{۰}$ مواجه هستیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق نکتهٔ بالا، حد صورت کسر $\frac{\sqrt{f(x)}-۱}{x^۲-۱}$ نیز باید صفر شود؛ زیرا حد مخرج صفر شده است، اما حاصل حد، عددی غیرصفر است.

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}(\sqrt{f(x)}-۱)=۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}\sqrt{f(x)}=۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}f(x)=۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{۴}{ax+b}=\frac{۴}{a+b}=۱ \Rightarrow a+b=۴ \quad (۱)$$

گام دوم: حالا می‌رویم سراغ خود حد. ابهام حد را رفع می‌کنیم، حواسمان هست که باید عامل صفرکننده را که $x-۱$ است، از دل ضابطه بیرون بکشیم. برای این کار از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to ۱}(\frac{\sqrt{f(x)}-۱}{x^۲-۱}\times\frac{\sqrt{f(x)}+۱}{\sqrt{f(x)}+۱})=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-۱}{(x-۱)(x+۱)(\sqrt{f(x)}+۱)}$$

حالا ضابطهٔ f را جای‌گذاری می‌کنیم: $f(x)=\frac{۴}{ax+b}$ که اگر طبق رابطهٔ (۱) قرار دهیم: $b=۴-a$، داریم:

$$f(x)=\frac{۴}{ax+۴-a}$$

و در نتیجه حاصل حد را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۴}{ax+۴-a}-۱}{(x-۱)(x+۱)(\underbrace{\sqrt{f(x)}+۱}_{\text{حدش برابر ۲ می‌شه چون } \sqrt{f(x)} \text{ برابر ۱ می‌شه.}})}=\lim_{x\to ۱}\frac{۴-ax-۴+a}{(x-۱)(x+۱)(\sqrt{f(x)}+۱)(ax+۴-a)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{-a\overbrace{(x-۱)}^{\text{عامل صفرکننده}}}{\underbrace{(x-۱)}_{\text{عامل صفرکننده}}(x+۱)(\sqrt{f(x)}+۱)(ax+۴-a)}=\frac{-a}{۲\times ۲\times ۴}=-\frac{a}{۱۶}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow a=-۲$$

گام سوم: حالا از تساوی (۱) استفاده می‌کنیم و b را حساب می‌کنیم:

$$b=۴-a=۴-(-۲)=۶$$

گام چهارم: پس ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\frac{۴}{-۲x+۶}=\frac{۲}{۳-x}$ است:

$$\Rightarrow f(۲)=\frac{۲}{۳-۲}=۲$$

۶ اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۲x+a}}{x\sqrt{x}-۱}=-\frac{۱}{b}$ باشد، حاصل **ab** کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

Hint $-\frac{۱}{b}$ یه عدد حقیقیه، حد مخرج هم صفر شده. شبیه سؤال قبل حلش کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ابتدا باید حد صورت را هم برابر صفر قرار دهیم:

$$\lim_{x\to ۱}(\sqrt{x+۲}-\sqrt{۲x+a})=\lim_{x\to ۱}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲+a})=۰ \Rightarrow \sqrt{۳}=\sqrt{۲+a} \Rightarrow ۳=۲+a \Rightarrow a=۱$$

گام دوم: حالا دو بار از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم تا بتوانیم عامل صفرکننده را که $x-۱$ است، نمایان کنیم:

$$L=\lim_{x\to ۱}\Big(\underbrace{\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۲x+۱}}{x\sqrt{x}-۱}}_{\text{مزدوج}}\times\frac{\sqrt{x+۲}+\sqrt{۲x+۱}}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{۲x+۱}}\times\underbrace{\frac{x\sqrt{x}+۱}{x\sqrt{x}+۱}}_{\text{مزدوج}}\Big)$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\overbrace{((x+۲)-(۲x+۱))(x\sqrt{x}+۱)}^{\text{حد این عبارت برابر ۲ است.}}}{((x\sqrt{x})^{۲}-۱)\underbrace{(\sqrt{x+۲}+\sqrt{۲x+۱})}_{\text{حد این عبارت برابر } ۲\sqrt{۳} \text{ است.}}}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۱-x)\times ۲}{(x^{۳}-۱)\times ۲\sqrt{۳}}$$

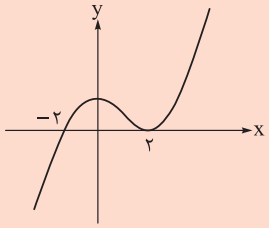
نکته در محاسبهٔ حد $\frac{۰}{۰}$، در صورت و مخرج اگر عامل ضربی مخالف صفر پیدا کردیم، بهتر است برای سادگی در نوشتن، مقدار این عبارت‌ها را قرار دهیم.

گام سوم: حالا با تجزیهٔ اتحاد چاق و لاغر، حاصل حد را پیدا می‌کنیم:

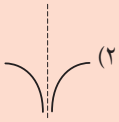
$$L=\lim_{x\to ۱}\frac{-۲(x-۱)}{۲\sqrt{۳}(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}=\frac{-۲}{۲\sqrt{۳}\times ۳}=-\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

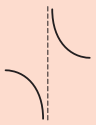
گام چهارم: حاصل حد که برابر $-\frac{۱}{b}$ بوده است، پس $b=۳\sqrt{۳}$ است؛ در نتیجه حاصل $a\times b$ برابر $۳\sqrt{۳}$ است.

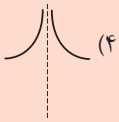
۷ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. در این صورت نمودار تابع $h(x)=\frac{(-1)^{[x]}f(-x)}{f(x)}$ در اطراف $x=2$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

درس Box

تابع کسری $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ را در نظر بگیرید. اگر حد مخرج در $x=x_0$، صفر باشد اما حد صورت صفر نباشد، حاصل حد تابع $\frac{f}{g}$ در $x=x_0$ بی‌نهایت می‌شود، $-\infty$ یا $+\infty$. برای این‌که ببینیم کدام یک از این دو درست‌اند، کافی است علامت‌های صورت و مخرج را مشخص کنیم.

مثال: می‌خواهیم حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2x[x]-3}{\sin \pi x}$ را حساب کنیم:

حد صورت: $\lim\limits_{x\to 2^-}(2x\underbrace{[x]}_{\text{برابر ۱ است}}-3)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x-3)=1$: مثبت

حد مخرج: $\lim\limits_{x\to 2^-}\sin \pi x=\sin 2\pi=0$

حد صورت مخالف صفر اما حد مخرج صفر است، در نتیجه حاصل حد قطعاً ∞ است. حالا علامت صورت که مثبت است، باید علامت مخرج را تعیین کنیم. در یک همسایگی چپ $x=2$، کمان πx در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد $(\pi x<2\pi)$ و علامت سینوس آن منفی است، پس داریم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x[x]-3}{\sin \pi x}=\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: $x=-2$ ریشهٔ سادهٔ تابع است؛ زیرا $f(-(2))=f(-2)=0$، اما $x=2$، ریشهٔ مضاعف آن است؛ زیرا نمودار در این نقطه بر محور xها مماس است. پس مرتبهٔ ریشهٔ مخرج، حداقل یک واحد از مرتبهٔ ریشهٔ صورت بیشتر است و در نتیجه حد تابع در همسایگی‌های چپ و راست $x=2$ قطعاً ∞ است.

گام دوم: حالا می‌رویم سراغ این‌که حدهای چپ و راست تابع g را در $x=2$ حساب کنیم:

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(-1)^{\overbrace{[x]}^{\text{برابر ۱ است}}}f(-x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-f(-x)}{f(x)}$

نکته

در محاسبهٔ انواع حدها، حتماً حتماً در ابتدا از شر جزء صحیح خلاص شوید؛ یعنی به جای جزء صحیح باید یک عدد صحیح قرار دهید.

اگر $x<2$ باشد، $-x>-2$ است، پس وضعیت تابع f در یک همسایگی چپ $x=2$ دقیقاً مانند وضعیت تابع $y=f(-x)$ در یک همسایگی راست $x=-2$ است و برعکس؛ بنابراین داریم:

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-\overbrace{f(-x)}^{\text{همسایگی راست }-2}}{\underbrace{f(x)}_{\text{همسایگی چپ }2}}=\frac{-(0^+)}{0^+}=-\infty$

گام سوم: همین کار را برای حد راست هم انجام می‌دهیم:

حد راست: $\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(-1)^{\overbrace{[x]}^{\text{برابر ۲ است.}}}f(-x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\overbrace{f(-x)}^{\text{همسایگی چپ }-2}}{\underbrace{f(x)}_{\text{همسایگی راست }2}}=\frac{0^-}{0^+}=-\infty$

شکل گزینهٔ (۲) این ویژگی را دارد که هر دو حد چپ و راست $-\infty$ باشد.

تیزبازی

می‌توانیم برای سادگی، ضابطهٔ تابع f را به فرم درجه‌سوم و به صورت $f(x)=(x+2)(x-2)^2$ در نظر بگیریم:

$$\Rightarrow g(x)=\frac{(-1)^{[x]}(-x+2)(-x-2)^2}{(x+2)(x-2)^2}=\frac{(-1)^{[x]+1}(x-2)(x+2)^2}{(x+2)(x-2)^2}=(-1)^{[x]+1}\frac{x+2}{x-2}$$

$$\begin{cases}\text{حد چپ: } \lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-1)^2\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\\ \text{حد راست: } \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-1)^3\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{-4}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

۸ اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^2-4x\cos\pi[x]}{2x^2-3x+1}=+\infty$ باشد، حدود a کدام است؟($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(-2,2)$

۳) $(0,2)$ ۴) $\mathbb{R}$

همسایگی چپ و راست مشخص نشده است، یعنی حد هر دو طرف باید $+\infty$ باشد.

Hint مخرج که نمی‌تونه ریشهٔ مضاعف بده، پس حدهای چپ و راست رو جداگونه حساب کن و کسر حاصل رو مثبت کن.

نکته هرگاه برای محاسبهٔ حد ـ مثل این سؤال ـ همسایگی‌های چپ یا راست نقطهٔ مورد نظر مشخص نشود، حد دو طرفه منظور سؤال است و باید حدهای چپ و راست را هر دو، برابر مقدار مورد نظر قرار دهیم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** طبق نکتهٔ بالا باید شرایطی را برقرار کنیم که حاصل هر دو حد چپ و راست $+\infty$ شود:

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{a^2-4x\cos\pi\overbrace{[x]}^{\text{برابر صفر است}}}{2x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{a^2-4x\cos 0}{\underbrace{(2x-1)}_{\text{حد این عبارت برابر ۱ است}}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{a^2-4}{x-1}=\dfrac{a^2-4}{0^-}=+\infty$

برای این‌که حاصل $+\infty$ شود، لازم که a^2-4 منفی باشد:

$$\Rightarrow a^2-4<0 \Rightarrow -2<a<2 \quad (*)$$

گام دوم:

حد راست: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a^2-4x\cos\pi\overbrace{[x]}^{\text{برابر ۱ است}}}{2x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a^2-4x\cos\pi}{(2x-1)(x-1)}=\dfrac{a^2+4}{0^+}=+\infty$

باید a^2+4 مثبت باشد که به ازای همهٔ مقادیر حقیقی a این شرط برقرار است، در نتیجه حدود a همان حدود شرط $(*)$ است.

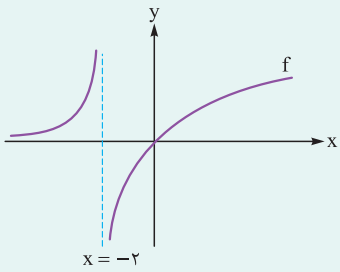
۹ نمودار تابع $f(x)=\frac{۳x^۲+۴x-۴}{ax^۲-(a+۲)x+۲}$ فقط یک مجانب قائم دارد. a چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

Hint مخرج، عبارت درجه‌دوم است و حداکثر ۲ تا ریشه داره، پس باید کاری کنی که یه ریشه‌ش بپره. یعنی یا ریشه‌ها برابر باشن یا صورت و مخرج ریشهٔ مشترک داشته باشن، که با هم ساده بشن.

درس Box

نمودار تابع f را که در شکل مقابل رسم شده است در نظر بگیرید:



خط قائم $x=-۲$ که نمودار تابع f بسیار بسیار بسیار به آن نزدیک می‌شود، اما هیچ‌گاه با آن برخورد نمی‌کند، یک مجانب قائم نمودار تابع است.

در توابع کسری، معادلهٔ مجانب‌های قائم از بین ریشه‌های مخرج انتخاب می‌شود، اما حواستان باشد که هر ریشهٔ مخرجی الزاماً معادلهٔ مجانب قائم نیست. ریشه‌ای از مخرج معادلهٔ مجانب قائم است که یا ریشهٔ مشترک با صورت نباشد یا در صورت مشترک‌بودن، مرتبهٔ ریشهٔ مخرج بیشتر از مرتبهٔ ریشهٔ صورت باشد. مثلاً خط $x=۰$ مجانب قائم نمودار تابع $y=\frac{x}{\sin^۲ x}$ است اما نمودار تابع $y=\frac{x}{\sin x}$ در $x=۰$ مجانب قائم ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** بهتر است هر کدام از چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج را تجزیه کنیم و ضابطهٔ تابع را ساده‌تر بنویسیم:

$$f(x)=\frac{(x+۲)(۳x-۲)}{(x-۱)(ax-۲)}$$

گام دوم: قطعاً $x=۱$ مجانب قائم نمودار تابع است و باید تنها مجانب هم باشد. یکی از حالت‌هایی که امکان‌پذیر است، این است که $x=۱$ تنها ریشهٔ مخرج باشد، یعنی ریشهٔ دیگر آن نیز که $x=\frac{۲}{a}$ است، برابر ۱ باشد:

$$\frac{۲}{a}=۱ \Rightarrow a=۲$$

گام سوم: یک حالت دیگر این است که $x=\frac{۲}{a}$ یکی از ریشه‌های صورت نیز باشد:

$$\frac{۲}{a}=-۲ \Rightarrow a=-۱$$

یا

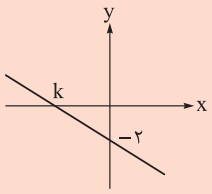
$$\frac{۲}{a}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow a=۳$$

گام چهارم: اما یکی دیگر از حالت‌هایی که امکان‌پذیر است، این است که چندجمله‌ای مخرج اساساً درجه‌دوم نباشد، یعنی درجه‌یک باشد که در آن صورت فقط یک ریشه دارد:

$$\Rightarrow a=۰$$

گام پنجم: در نهایت مقادیر قابل قبول a باید عضو مجموعهٔ $\{-۱,۰,۲,۳\}$ باشد.

۱۰ نمودار تابع خطی f در شکل زیر رسم شده است. اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(fof)(x)}{f^{-1}(x)}=-1$ باشد، مقدار k کدام است؟



۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$

۳) -1 ۴) -2

Hint ضابطه‌های f^{-1} و fof رو به دست بیار و فقط کافیه که از قضیهٔ معروف به پرتوان استفاده کنی.

درس Box

در «حد در بی‌نهایت»، x به $\pm\infty$ میل می‌کند و این را می‌دانیم که ∞ فراتر از اعداد حقیقی است و از هر عددی که به ذهنمان برسد، بزرگ‌تر (یا در اعداد منفی کوچک‌تر) است. قضیهٔ بسیار مهم و کارسازی داریم که به «قضیهٔ پرتوان» معروف است و آن هم این است که:

در حد توابع چند جمله‌ای در $\pm\infty$، همیشه جمله با بزرگ‌ترین توان را در نظر می‌گیریم و مابقی جملات را حذف می‌کنیم.

به عنوان مثال داریم:

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\underbrace{\frac{5}{3}}x^2-x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{5}{3}x^2)=+\infty$

فقط این جمله را در نظر می‌گیریم

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3+\underbrace{2x^3})=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$

فقط این جمله را در نظر می‌گیریم

این قضیه در محاسبهٔ حد توابع گویا در $\pm\infty$ بسیار مهم می‌شود، مثال‌ها را ببینید:

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-1}{2x^3-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{2x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{2x}=0$

(پرتوان: $5x^2$ و $2x^3$)

حاصل $\frac{\text{عدد}}{\infty}$ برابر صفر است.

۴) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2x^3}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$

(پرتوان: $-2x^3$ و x^2)

۵) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{4x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{4x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در ابتدا باید یک ضابطه برای f در نظر بگیریم. تابع خطی f از دو نقطهٔ $(0,-2)$ و $(k,0)$ عبور می‌کند، پس داریم:

$$y-(-2)=\frac{0-(-2)}{k-0}(x-0)\Rightarrow f(x)=\frac{2}{k}x-2$$

گام دوم: برای این‌که حاصل حد مورد نظر را بتوانیم حساب کنیم، لازم است ضابطهٔ توابع fof و f^{-1} را به دست آوریم:

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{2}{k}f(x)-2=\frac{2}{k}(\frac{2}{k}x-2)-2=\frac{4}{k^2}x-\frac{4+2k}{k}$$

$$y=f(x)=\frac{2}{k}x-2\Rightarrow x=\frac{k}{2}(y+2)=\frac{k}{2}y+k\xrightarrow{\text{جای x و y عوض شود}}f^{-1}(x)=\frac{k}{2}x+k$$

گام سوم: حالا می‌رویم سراغ حد و در آن ضابطه‌های fof و f^{-1} را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(fof)(x)}{f^{-1}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{k^2}x-\frac{4+2k}{k}}{\frac{k}{2}x+k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{k^2}x}{\frac{k}{2}x}=\frac{8}{k^3}=-1\Rightarrow k^3=-8\Rightarrow k=-2$$

(پرتوان: $\frac{4}{k^2}x$ و $\frac{k}{2}x$)

۱۱ توابع $f(x)=\frac{۴a}{x^۲+۲x-۳}$ و $g(x)=\frac{a}{x-۱}$ مفروض‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ از مبدأ مختصات کدام است؟

هر دو مجانب قائم و افقی

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۸}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

Hint ضابطهٔ تابع $f-g$ رو به دست بیار و ساده کن، ریشهٔ مخرج رو که داری، برای مجانب افقی هم از قضیهٔ پرتوان استفاده کن.

درس Box

در مورد مجانب قائم قبلاً صحبت کردیم. در این‌جا مجانب افقی را تعریف می‌کنیم و نحوهٔ محاسبهٔ آن را توضیح می‌دهیم:

اگر $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=y_۰$ باشد، خط $y=y_۰$ یک مجانب افقی نمودار تابع f است.

اگر تابع f گویا باشد، از قضیهٔ پرتوان استفاده می‌کنیم و به سادگی معادلهٔ خط مجانب افقی به دست می‌آید. مثال‌ها را ببینید:

۱) $f(x)=\frac{۳x-۱}{x^۲+x+۳}$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x}{x^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳}{x}=۰ \Rightarrow$ خط $y=۰$ مجانب افقی است.

۲) $g(x)=\frac{۲-۵x}{۷x+۱}$: $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۵x}{۷x}=-\frac{۵}{۷} \Rightarrow$ خط $y=-\frac{۵}{۷}$ مجانب افقی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در ابتدا باید ضابطهٔ تابع $f-g$ را در ساده‌ترین حالت خودش به دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{۴a}{(x-۱)(x+۳)} \\ g(x)=\frac{a}{x-۱} \end{array}\right\} \Rightarrow (f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{۴a-a(x+۳)}{(x-۱)(x+۳)}=\frac{a(\overbrace{۴-x-۳}^{\text{برابر } x-۱ \text{ است}})}{(x-۱)(x+۳)}$$

پس ضابطهٔ تابع $f-g$ به صورت $(f-g)(x)=-\frac{a}{x+۳}$ است.

گام دوم: حالا باید معادلهٔ خطوط مجانب قائم و افقی را به دست آوریم. ریشهٔ مخرج، معادلهٔ مجانب قائم را به ما می‌دهد: $x=-۳$

و برای محاسبهٔ مجانب افقی داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f-g)(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-a}{x+۳}=\frac{\text{عدد}}{\text{بی‌نهایت}}=۰$$

پس خط $y=۰$ که (همان محور xها است) معادلهٔ مجانب افقی است.

گام سوم: در نتیجه، نقطهٔ برخورد مجانب‌ها نقطهٔ $M(-۳,۰)$ است که فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات برابر ۳ است.

۱۲ اگر $f(x)=\frac{۲x^۲-۳x-۱}{۲x-\sqrt{۹x^۲+۱}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{۴x-[x]}$ کدام است؟([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{۲}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

Hint اصل و اساس، قضیهٔ پرتوانه. فقط باید معادل (یا هم‌ارز) $\sqrt{۹x^۲+۱}$ و $[x]$ رو به صورت چندجمله‌ای بنویسیم.

درس Box در «حد توابع در بی‌نهایت» راهکار اساسی این است که از قضیهٔ پرتوان استفاده کنیم، یعنی حتی اگر عبارت داده‌شده چندجمله‌ای نباشد، سعی می‌کنیم معادل یا هم‌ارزی برای آن در نظر بگیریم تا راحت‌تر بتوانیم از قضیهٔ پرتوان در چندجمله‌ای‌ها استفاده کنیم.

یکی از مهم‌ترین این هم‌ارزی‌ها به صورت زیر است:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-۱}+\dots}\simeq\begin{cases}\sqrt[n]{a}\,(x+\frac{b}{na}) & ;\ n\text{فرد}\\ \sqrt[n]{a}\,|x+\frac{b}{na}| & ;\ n\text{زوج}\end{cases}$$

به خاطر حضور قدرمطلق، رفتار این تابع در $+\infty$ و $-\infty$ تفاوت می‌کند.

نکته اگر $\lim\limits_{x\to x_۰}f(x)=\pm\infty$ باشد، $[f(x)]$ با خود $f(x)$ هم‌ارز است، یعنی در $\pm\infty$ جزء صحیح کارایی ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** در حد خواسته‌شده ضابطهٔ $f(x)$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{۴x-[x]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۲x^۲-۳x-۱}{۲x-\sqrt{۹x^۲+۱}}}{۴x-[x]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲-۳x-۱}{(۴x-[x])(۲x-\sqrt{۹x^۲+۱})}$$

گام دوم: حالا برای سادگی و هم‌چنین برای این‌که بتوانیم از قضیهٔ پرتوان استفاده کنیم، معادل‌های $[x]$ و $\sqrt{۹x^۲+۱}$ را قرار می‌دهیم:

$$[x]\simeq x$$

$$\sqrt{۹x^۲+۱}\simeq|۳x|$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{۴x-[x]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲-۳x-۱}{(۴x-x)(۲x-|۳x|)}$$

گام سوم: در xهای منفی $|۳x|$ با عبارت $-۳x$ برابر است؛ پس داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{۴x-[x]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲-۳x-۱}{۳x(۲x+۳x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲}{۱۵x^۲}=\frac{۲}{۱۵}$$

۱۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})+\cos(\frac{\pi}{۶}-۲x)=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

Hint نسبت رو تغییر بده، یا sin رو به cos تبدیل کن یا cos رو به سینوس.

درس Box معادلهٔ مثلثاتی، معادله‌ای است که متغیر مجهول ما در کمان یک نسبت مثلثاتی قرار دارد، مثل $\sin(x^۲-۱)=\frac{۵}{۷}$ یا $\tan\sqrt{۲x}=x^۲+۱$.

ساده‌ترین و ابتدایی‌ترین معادله‌های مثلثاتی و جواب‌های آن‌ها را به شرح زیر می‌بینید:

$$\sin\square=\sin\theta_{۰}\Rightarrow\square=\begin{cases}۲k\pi+\theta_{۰}\\ ۲k\pi+\pi-\theta_{۰}\end{cases}$$

$$\cos\square=\cos\theta_{۰}\Rightarrow\square=۲k\pi\pm\theta_{۰}$$

$$\tan\square=\tan\theta_{۰}\Rightarrow\square=k\pi+\theta_{۰}$$

که در آن‌ها k عددی صحیح است و $\square$ یک چندجمله‌ای درجه‌اول (خطی) برحسب x است. در بعضی از معادلات زاویهٔ $\theta_{۰}$ ناشناخته است و برحسب x نوشته شده است. مثل $\tan ۳x=\tan x$. در این معادلات یکی از این کمان‌های ورودی را به عنوان $\theta_{۰}$ انتخاب می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\tan ۳x=\tan\underbrace{x}_{\theta_{۰}}\Rightarrow ۳x=k\pi+x\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\xrightarrow{\text{به خاطر دامنه، k نباید فرد باشد}}x=k\pi$$

و در برخی از حالات، با استفاده از اتحادهای $\frac{k\pi}{۲}+\alpha$، نسبت‌ها را به یکدیگر تبدیل می‌کنیم تا در طرفین تساوی فقط یک نسبت مثلثاتی داشته باشیم. مثل معادلهٔ $\tan(\frac{\pi}{۸}-۲x)=\cot x$ می‌توانیم tan را به cot تبدیل کنیم یا برعکس:

$$\cot x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$\Rightarrow\tan(\underbrace{\frac{\pi}{۸}-۲x}_{\theta_{۰}})=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)\Rightarrow\frac{\pi}{۲}-x=k\pi+\frac{\pi}{۸}-۲x\Rightarrow x=k\pi-\frac{۳\pi}{۸}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول**: معادله را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم: $\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})=-\cos(\frac{\pi}{۶}-۲x)$

و $\cos(\frac{\pi}{۶}-۲x)$ را برحسب sin می‌نویسیم:

$$-\cos(\frac{\pi}{۶}-۲x)=-\cos(۲x-\frac{\pi}{۶})=\sin(۲x-\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۲})=\sin(۲x-\frac{۲\pi}{۳})$$

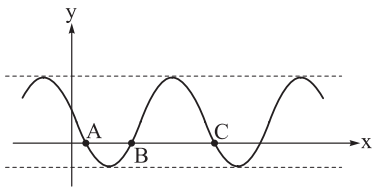
گام دوم: پس معادله به صورت زیر خواهد شد:

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})=\sin(۲x-\frac{۲\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+۲x-\frac{۲\pi}{۳}\ \text{تناقض}\times\\ ۲x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\pi-۲x+\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow ۴x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\end{cases}$$

گام سوم: جواب‌های بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به ازای $k\in\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ به دست می‌آید که تعداد آن‌ها برابر ۵ است.

۱۴ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=۲\sin^۲(۲x-\frac{\pi}{۳})-\frac{۱}{۲}$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\frac{BC}{AB}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۲

۴) $\frac{۵}{۳}$

Hint معادلهٔ $f(x)=۰$ رو حل کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نقاط A, B و C محل‌های برخورد نمودار تابع با محور xها هستند و طول آن‌ها جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند، پس معادلهٔ $۲\sin^۲(۲x-\frac{\pi}{۳})-\frac{۱}{۲}=۰$ را باید حل کنیم:

گام دوم: پس داریم:

$$۲\sin^۲(۲x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^۲(۲x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin(۲x-\frac{\pi}{۳})=\pm\frac{۱}{۲}$$

نکته جواب‌های معادلهٔ $\sin=\pm\sin\theta^\circ$ در حالت کلی به صورت $=k\pi\pm\theta^\circ$ است.

$$\Rightarrow ۲x-\frac{\pi}{۳}=k\pi\pm\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \\ ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۲} \end{cases}$$

گام سوم: جواب‌های مثبت معادله را به ترتیب می‌نویسیم:

$$x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}: x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\dots$$

$$x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۲}: x=\frac{\pi}{۱۲},\frac{۷\pi}{۱۲},\frac{۱۳\pi}{۱۲},\dots$$

و ترتیب جواب‌ها به صورت زیر است:

$$x=\frac{\pi}{۱۲},\frac{\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۱۲},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۱۳\pi}{۱۲},\frac{۵\pi}{۴},\dots$$

گام چهارم: طول نقاط A, B و C به ترتیب اولین جواب، دومین جواب و سومین جواب مثبت معادله است:

$$x_A=\frac{\pi}{۱۲}, x_B=\frac{\pi}{۴}, x_C=\frac{۷\pi}{۱۲} \Rightarrow \frac{BC}{AB}=\frac{x_C-x_B}{x_B-x_A}=\frac{\frac{۴\pi}{۱۲}}{\frac{۲\pi}{۱۲}}=\frac{۴\pi}{۲\pi}=۲$$

۱۵ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos(۲x-\frac{\pi}{۸})\sin(\frac{۳\pi}{۸}+۲x)=\frac{۱}{۲}$ در بازهٔ $(۰,\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱\pi}{۴}$

۳) $\frac{۹\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۱۳\pi}{۴}$

Hint $\frac{\pi}{۸}-۲x$ و $\frac{۳\pi}{۸}+۲x$ نسبت به هم چه وضعی دارن؟ ... آفرین! متمم هستن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: زاویه‌های $\frac{\pi}{۸}-۲x$ و $\frac{۳\pi}{۸}+۲x$ متمم هستند زیرا مجموع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{۲}$ است، پس می‌توانیم به جای $\sin(\frac{۳\pi}{۸}+۲x)$ همان $\cos(\frac{\pi}{۸}-۲x)$ یا $\cos(۲x-\frac{\pi}{۸})$ را قرار دهیم؛ بنابراین معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$\cos^۲(۲x-\frac{\pi}{۸})=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos(۲x-\frac{\pi}{۸})=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

گام دوم:

نکته جواب کلی معادلهٔ $\cos\alpha=\pm\cos\frac{\pi}{۴}$ به صورت $\alpha=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ است.

پس جواب‌های معادله به صورت زیر است:

$$۲x-\frac{\pi}{۸}=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۲x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{۳\pi}{۸} \Rightarrow x=(۴k+۳)\frac{\pi}{۱۶}$$

گام سوم: به ازای $k\in\{۰,۱,۲,۳\}$ جواب‌های بازهٔ $(۰,\pi)$ به دست می‌آید که عبارت‌اند از: $x=\frac{۳\pi}{۱۶},\frac{۷\pi}{۱۶},\frac{۱۱\pi}{۱۶},\frac{۱۵\pi}{۱۶}$

مجموع این جواب‌ها برابر است با:

$$\frac{۳\pi+۷\pi+۱۱\pi+۱۵\pi}{۱۶}=\frac{۳۶\pi}{۱۶}=\frac{۹\pi}{۴}$$

۱۶ زوایای حادهٔ α و β جواب‌های معادلهٔ $5\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 1$ هستند. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

Hint طرفین معادله رو بر $\cos^2 x$ تقسیم کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حضور $\sin x\cos x$ و $\cos^2 x$ این علامت را می‌دهد که می‌توانیم از اتحادهای دو برابر کمان استفاده کنیم:

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1+\cos 2x}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{5}{2}(\sin 2x - \cos 2x) - \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow \sin 2x - \cos 2x = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}$$

گام دوم: حالا از اتحاد $\sin\square - \cos\square = \sqrt{2}\sin(\square - \frac{\pi}{4})$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{7}{5} \Rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

گام سوم: زاویه‌ای را نمی‌شناسیم که سینوس آن $\frac{7}{5\sqrt{2}}$ باشد، پس در حالت مجهول آن را $\theta_\circ$ در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \theta_\circ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\theta_\circ}{2} + \frac{\pi}{8} \\ \text{یا} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \theta_\circ \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{8} - \frac{\theta_\circ}{2} \end{cases}$$

گام چهارم: α و β جواب‌های حاده هستند. با توجه به این‌که $\frac{7}{5\sqrt{2}}$ بسیار نزدیک ۱ است و در نتیجه $\theta_\circ$ نزدیک $\frac{\pi}{2}$ است، به ازای $k=\circ$ جواب‌های α و β به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{\theta_\circ}{2} + \frac{\pi}{8},\ \beta = \frac{5\pi}{8} - \frac{\theta_\circ}{2} \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$$

یه‌جور دیگه

طرفین تساوی را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{5\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{5\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 5\frac{\sin x}{\cos x} - 5 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

از اتحاد مقدماتی $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$5\tan x - 5 = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x - 5\tan x + 6 = \circ$$

با متغیر جدید $u = \tan x$ معادله را حل می‌کنیم:

$$u^2 - 5u + 6 = (u-2)(u-3) = \circ \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \tan x = 2 \\ u_2 = \tan x = 3 \end{cases}$$

حالا که α و β جواب‌های حادهٔ معادله هستند، داریم: $\tan\alpha = 2$ و $\tan\beta = 3$. برای محاسبهٔ $\alpha+\beta$، چون $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ را داریم، بهتر است از اتحاد تانژانت مجموع کمان استفاده کنیم:

نکته

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{2+3}{1-2\times 3} = \frac{5}{-5} = -1$$

α و β هر دو عضو بازهٔ $(\circ, \frac{\pi}{2})$ هستند، پس $\alpha+\beta$ عضو بازهٔ $(\circ, \pi)$ است و تنها زاویه‌ای از این بازه که تانژانت آن برابر -1 است، زاویهٔ $\frac{3\pi}{4}$ است، پس $\alpha+\beta = \frac{3\pi}{4}$ است.

۱۷ معادلهٔ $\sin ۴x - \sin ۲x + \cos ۲x = \frac{۱}{۲}$ در بازهٔ $(۰,\theta)$ چهار جواب دارد. بیشترین مقدار θ کدام است؟

۱) ۲π ۲) $\frac{۷\pi}{۶}$

۳) $\frac{۱۹\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۳\pi}{۱۲}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از اتحاد سینوس دو برابر کمان استفاده می‌کنیم و $\sin ۴x$ را باز می‌کنیم:

$$\sin ۴x = ۲\sin ۲x \cos ۲x$$

$$\Rightarrow ۲\sin ۲x \cos ۲x - \sin ۲x + \cos ۲x - \frac{۱}{۲} = ۰$$

گام دوم: در دو جملهٔ اول از $۲\sin ۲x$ فاکتور می‌گیریم:

$$۲\sin ۲x(\cos ۲x - \frac{۱}{۲}) + \cos ۲x - \frac{۱}{۲} = ۰$$

و با فاکتورگیری از $-\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$(\cos ۲x - \frac{۱}{۲})(۲\sin ۲x + ۱) = ۰$$

گام سوم: حاصل‌ضرب دو عبارت صفر شده است، پس حداقل یکی از آن‌ها صفر است:

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \\ \sin ۲x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \\ ۲x = ۲k\pi - \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi - \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases} \end{cases}$$

گام چهارم: جواب‌های مثبت معادله را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶} : \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}, \frac{۷\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶}, \frac{۱۳\pi}{۶}, \dots \\ x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} : \frac{۱۱\pi}{۱۲}, \frac{۲۳\pi}{۱۲}, \frac{۳۵\pi}{۱۲}, \dots \\ x = k\pi - \frac{۵\pi}{۱۲} : \frac{۷\pi}{۱۲}, \frac{۱۹\pi}{۱۲}, \frac{۳۱\pi}{۱۲}, \dots \end{cases}$$

و آن‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۷\pi}{۱۲}, \frac{۵\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۱۲}, \frac{۷\pi}{۶}, \frac{۱۹\pi}{۱۲}, \frac{۱۱\pi}{۶}, \dots$$

گام پنجم: برای این‌که بازهٔ $(۰,\theta)$ شامل چهار جواب معادله باشد، حداکثر مقدار θ برابر پنجمین جواب مثبت، یعنی $\frac{۷\pi}{۶}$ است.

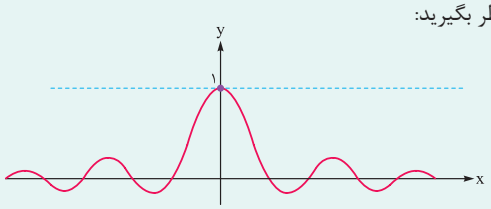
۱۸ حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\sqrt{۱+\cos ۲x}}{\cos(x\sin x)}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) $-\sqrt{۲}$

درس Box

تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ (که به تابع $y=\operatorname{sinc} x$ هم معروف است) در نظر بگیرید:



دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}-\{۰\}$ است. با توجه به نمودار، مشخص است که $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=۰$ است. هم‌چنین طول نقاط برخورد نمودار با محور xها جواب‌های معادلهٔ $\sin x=۰$ (غیر از $x=۰$) است.

نکتهٔ مهم این تابع، حد مقابل است:

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

نتیجهٔ مهمی که از این حد می‌توان گرفت این است که در کمان‌های خیلی خیلی خیلی کوچک، سینوس کمان تقریباً با خود کمان برابر است:

$$(x\to۰)\ \Rightarrow\ (\sin x\simeq x)$$

در حالت کلی اگر کمان $u(x)$ به سمت صفر میل کند، هم‌ارزی‌های مثلثاتی زیر را داریم:

$$\sin u(x)\simeq u(x)$$

$$\tan u(x)\simeq u(x)$$

$$\cos u(x)\simeq ۱-\frac{(u(x))^۲}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در ابتدا از اتحاد $\cos ۲\theta=۲\cos^۲\theta-۱$ استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\sqrt{۱+۲\cos^۲x-۱}}{\cos(x\sin x)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\sqrt{۲}\,|\cos x|}{\cos(x\sin x)}$$

$(\frac{\pi}{۲})^+$ در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد و cos آن منفی است، پس داریم:

$$L=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{-\sqrt{۲}\cos x}{\cos(x\sin x)}$$

گام دوم: متغیر سؤال را تغییر می‌دهیم. قرار می‌دهیم: $t=x-\frac{\pi}{۲}$. پس اگر $x\to(\frac{\pi}{۲})^+$، آن‌گاه $t\to۰^+$.

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to۰^+}\frac{-\sqrt{۲}\cos(t+\frac{\pi}{۲})}{\cos((t+\frac{\pi}{۲})\sin(t+\frac{\pi}{۲}))}=\lim_{t\to۰^+}\frac{\sqrt{۲}\sin t}{\cos((t+\frac{\pi}{۲})\cos t)}=\lim_{t\to۰^+}\frac{\sqrt{۲}\sin t}{\cos(t\cos t+\underbrace{\frac{\pi}{۲}\cos t}_{\text{حد این عبارت برابر }\frac{\pi}{۲}\text{ است.}})}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to۰^+}\frac{\sqrt{۲}\sin t}{-\sin(t\cos t)}$$

گام سوم: حالا وقت آن رسیده است که از هم‌ارزی‌ها استفاده کنیم:

$$L=\lim_{t\to۰^+}\frac{\sqrt{۲}t}{-t\cos t}=-\sqrt{۲}$$

هندسه

۱۹ دو نقطهٔ **A** و **B** و خط **d** که شامل هیچ‌یک از آن‌ها نیست در صفحه مفروض‌اند. تعداد نقاطی که از **A** و **B** به یک فاصله و از **d** به فاصلهٔ ۳ واحد باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

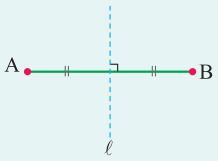
۱) صفر　　۲) ۱

۳) ۲　　۴) بی‌شمار

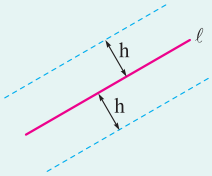
مشاوره این مدل سؤال‌ها، از سؤال‌های پرتکرار در امتحان‌های نهایی هستند، علاوه بر این‌که در کتاب درسی هم مشابه آن را داریم.

درس Box

۱) تمام نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند.

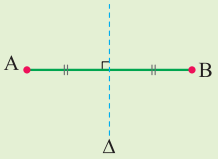


۲) تمام نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ h از خط ℓ قرار داشته باشند، روی دو خط موازی ℓ در دو طرف آن هستند:

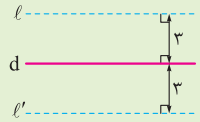


پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم مجموعه نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند): ابتدا پاره‌خط AB و سپس عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. نقاط روی عمودمنصف از A و B به یک فاصله هستند.

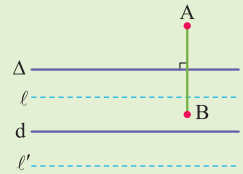


گام دوم (رسم مجموعه نقاطی که از d به فاصلهٔ ۳ هستند): دو خط موازی d و به فاصلهٔ ۳ در دو طرف d رسم می‌کنیم.

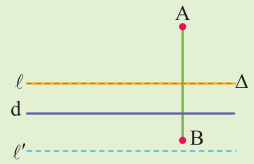


گام سوم (پیداکردن خواستهٔ سؤال): مطلوب سؤال نقاطی است که هر دو شرط گام اول و دوم را داشته باشد؛ بنابراین باید نقاط تقاطع خط Δ و خطوط ℓ یا ℓ′ را به دست بیاوریم.

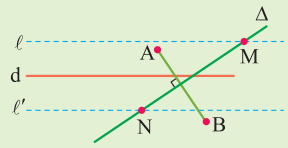
حالت اول: اگر Δ با ℓ و ℓ′ موازی باشد، مسئله هیچ جوابی ندارد، چون Δ هیچ‌کدام از خطوط ℓ یا ℓ′ را قطع نمی‌کند.



حالت دوم: اگر Δ بر ℓ و یا ℓ′ منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.



حالت سوم: اگر Δ هر دو خط ℓ و ℓ′ را قطع کند، دو جواب داریم: (نقاط M و N)



۲۰ دایرهٔ C به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۸x+۶y=۰$ مفروض است. مساحت ناحیهٔ محدود به مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۶ در این دایره و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن‌ها دایرهٔ C به زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود، کدام است؟

۱) ۲۵π ۲) ۳۴π ۳) ۳۶π ۴) ۴۱π

مشاوره سؤال ترکیبی از «مکان هندسی» و «دایره». نکات گفته‌شده در درس‌باکس را حتماً یاد بگیرید.

درس Box

معادلهٔ گستردهٔ دایره (معادلهٔ ضمنی):

معادلهٔ ضمنی یا گستردهٔ دایره به صورت زیر است:

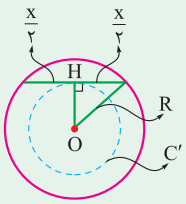
$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

که در آن:

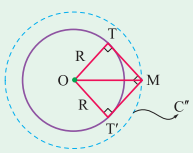
$$\text{مختصات مرکز}: O=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}) \quad , \quad \text{طول شعاع}: R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$$

نکته

۱) مکان هندسی وسط وترهایی به طول x در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R، دایرهٔ $C'(O,\sqrt{R^۲-(\frac{x}{۲})^۲})$ است.



۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن‌ها دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R به زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود، (یعنی مکان هندسی نقاطی که از آن‌ها می‌توان دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد)، دایرهٔ $C''(O,R\sqrt{۲})$ است.



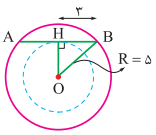
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ شعاع دایره):

ابتدا شعاع دایرهٔ C را با توجه به معادلهٔ دایره به دست می‌آوریم:

$$\text{شعاع}: R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{(-۸)^۲+۶^۲-۰}}{۲}=۵$$

گام دوم (پیداکردن مکان هندسی وسط وترهای به طول ۶):



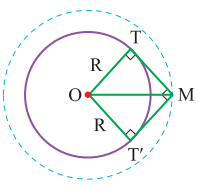
دایره‌ای به شعاع ۵ رسم می‌کنیم و وتر AB را در دایره می‌کشیم و فرض می‌کنیم $AB=۶$. حالا فاصلهٔ مرکز دایره از وتر را به دست می‌آوریم.

می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس $AH=BH=۳$ بوده و داریم:

$$\overset{\Delta}{OBH}: OH^۲=OB^۲-BH^۲=۲۵-۹=۱۶ \Rightarrow OH=۴$$

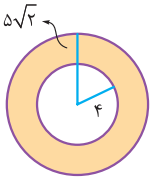
یعنی وسط چنین وتری به فاصلهٔ ۴ واحد از مرکز دایره قرار دارد و در نتیجه مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۶ در این دایره، دایرهٔ $C'(O,۴)$ است.

گام سوم (پیداکردن مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن‌ها دایره به زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود):



می‌دانیم نقاطی از صفحه که از آن‌ها دایرهٔ C به زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود، نقاطی مانند M هستند که از آن‌ها می‌توان دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد. در این صورت مطابق شکل، چهارضلعی $OTMT'$ مربعی به طول ضلع R و قطر این مربع $OM=R\sqrt{۲}$ است؛ یعنی مکان هندسی مورد نظر دایرهٔ $C''(O,۵\sqrt{۲})$ خواهد بود.

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): مساحت ناحیهٔ محدود به دو دایرهٔ به‌دست‌آمده در گام دوم و سوم را به دست می‌آوریم. دو دایرهٔ C' و C'' هم‌مرکز هستند و مساحت ناحیهٔ بین آن‌ها برابر است با:



$$S = \pi(5\sqrt{2})^2 - \pi(4)^2 = 34\pi$$

۲۱ خط به معادلهٔ $۲kx+(k+۱)y+۲=۰$، دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۲(x-۲y+۲)$ را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر کدام است؟

۱) $۲|k|$ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) $۲|k+۱|$

درس Box

۱) اگر معادلهٔ دایره‌ای به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد، آن‌گاه مختصات مرکز آن $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ و اندازهٔ شعاع آن $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ است.

۲) فاصلهٔ نقطه از خط: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با: $d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

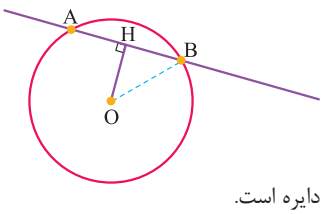
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ مرکز دایره): ابتدا معادلهٔ دایره را مرتب می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲=۲x-۴y+۴ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰$$

مختصات مرکز دایره $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ است؛ پس طبق معادلهٔ دایره $O(۱,-۲)$ مرکز دایره است.

گام دوم (محاسبهٔ فاصله مرکز از خط): برای به دست آوردن طول وتری که خط در دایره ایجاد می‌کند، مطابق شکل ابتدا باید فاصلهٔ مرکز دایره از خط را به دست آوریم:



$$OH=\frac{|۲k-۲k-۲+۲|}{\sqrt{(۲k)^۲+(k+۱)^۲}}=۰$$

فاصلهٔ مرکز از خط، صفر است؛ پس خط از مرکز دایره می‌گذرد و طول AB برابر با قطر دایره است.

گام سوم (محاسبهٔ قطر دایره):

شعاع این دایره برابر است با:

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+۴^۲-۴\times(-۴)}=۳$$

در نتیجه فاصلهٔ دو نقطهٔ برخورد خط و دایره از یکدیگر برابر با $۲R=۶$ خواهد بود.

تیزبازی اگر همان ابتدا مرکز دایره را در معادلهٔ خط داده‌شده جای‌گذاری کنی متوجه می‌شوی که مرکز در معادله صدق می‌کند؛ پس خط از مرکز دایره می‌گذرد.

۲۲ شعاع کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از نقطهٔ $(۱۲,۳)$ که بر محور xها و خط به معادلهٔ $۳x = ۴y$ مماس باشد، کدام است؟

۱) ۳
۲) $\frac{۱۰}{۳}$
۳) $\frac{۱۷}{۳}$
۴) ۵

مشاوره این سؤال، سؤال مهمی است؛ چون مشابه آن را چندین بار در کنکورهای قبل داشتیم.

درس Box

۱) شعاع دایره بر خط مماس در نقطهٔ تماس عمود است. در نتیجه فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس با شعاع دایره برابر است.

۲) اگر دایره‌ای بر محور x ها مماس باشد، آن‌گاه شعاع دایره برابر است با قدرمطلق عرض مختصات مرکز آن.

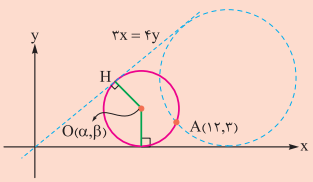
۳) فاصلهٔ نقطه از خط: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۴) معادلهٔ استاندارد دایره: معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ و شعاعش برابر R باشد، به صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (رسم شکل برای صورت سؤال):** شکل مسئله به صورت زیر است:



گام دوم (محاسبهٔ α و β): همان‌طور که در شکل معلوم است چون دایره در ربع اول بر محور xها مماس است، شعاع دایره برابر است با β و از طرف دیگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $۳x=۴y$ برابر است با شعاع دایره؛ بنابراین:

$$OH=R \Rightarrow \frac{|۳\alpha-۴\beta|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\beta \Rightarrow |۳\alpha-۴\beta|=۵\beta \Rightarrow ۳\alpha-۴\beta=\pm ۵\beta \Rightarrow \begin{cases}\alpha=۳\beta\\ \alpha=\frac{-\beta}{۳}\end{cases}$$

$\alpha=\frac{-\beta}{۳}$ غیر قابل قبول است؛ زیرا براساس شکلی که از مسئله کشیدیم، دیدیم که مرکز دایره در ناحیهٔ اول مختصات قرار دارد؛ بنابراین $\alpha=۳\beta$.

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): در گام قبلی به دست آوردیم $\alpha=۳\beta$؛ پس $O(۳\beta,\beta)$ مرکز دایره است و می‌دانیم که دایره از $A(۱۲,۳)$ می‌گذرد؛ بنابراین طبق تعریف دایره داریم:

$$OA=R \Rightarrow \sqrt{(۳\beta-۱۲)^۲+(\beta-۳)^۲}=\beta$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۹\beta^۲-۷۸\beta+۱۵۳=۰ \Rightarrow ۳\beta^۲-۲۶\beta+۵۱=۰ \Rightarrow (\beta-۳)(۳\beta-۱۷)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta=۳\\ \beta=\frac{۱۷}{۳}\end{cases} \Rightarrow R=۳ \text{ یا } R=\frac{۱۷}{۳} \Rightarrow \min(R)=۳$$

۲۳ از دو نقطهٔ $(۱,\frac{۵}{۲})$ و $(۰,۰)$ مجموعاً چند مماس می‌توان بر دایرهٔ گذرنده از نقاط $(۱,\sqrt{۳})$ و $(۱,-\sqrt{۳})$ و $(۳,-\sqrt{۳})$ رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

مشاوره نوشتن معادلهٔ دایرهٔ گذرنده از سه نقطه را در یکی از تمرین‌های کتاب درسی داریم و موضوع مهمی است.

درس Box

۱) مرکز دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویه، وسط وتر آن است.

۲) فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ از یکدیگر به صورت زیر است:

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

۳) نقطهٔ وسط پاره‌خط AB، اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ باشد، برابر است با:

$$M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$$

۴) وضعیت نقطه و دایره

اگر معادلهٔ یک دایره را به صورت $C=x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ یا $C:(x-a)^۲+(y-b)^۲-R^۲=۰$ نمایش دهیم، آن‌گاه برای پیداکردن وضعیت نقطهٔ $A(x_A,y_A)$، مختصات آن را در معادلهٔ دایره جای‌گذاری می‌کنیم.

$C(x_A,y_A)>۰\Rightarrow$ نقطهٔ A خارج دایره است.

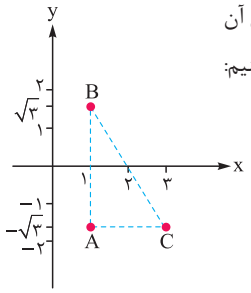
$C(x_A,y_A)=۰\Rightarrow$ نقطهٔ A روی دایره است.

$C(x_A,y_A)<۰\Rightarrow$ نقطهٔ A داخل دایره است.

از هر نقطه خارج دایره دو مماس، از نقطهٔ روی دایره یک مماس و از هر نقطه داخل دایره صفر مماس بر آن دایره می‌توان رسم کرد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم شکل): دایره‌ای که از سه نقطهٔ داده‌شده می‌گذرد، دایرهٔ محیطی مثلثی است که رئوس آن سه نقطهٔ $A(۱,-\sqrt{۳})$، $B(۱,\sqrt{۳})$، $C(۳,-\sqrt{۳})$ داده شده است. پس ابتدا مثلث را رسم می کنیم:



گام دوم (محاسبهٔ معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث): همان‌طور که در شکل مشخص است، نقاط A و B هم‌طول و نقاط A و C هم‌عرض هستند؛ پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است و مرکز دایرهٔ محیطی آن وسط وتر است: بنابراین مرکز این دایره برابر است با:

$$O(\frac{۳+۱}{۲},\frac{-\sqrt{۳}+\sqrt{۳}}{۲})\Rightarrow O(۲,۰)$$

و شعاع آن برابر است با:

$$R=\frac{۱}{۲}BC=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۳-۱)^۲+(-\sqrt{۳}-\sqrt{۳})^۲}=۲$$

است و در نهایت، معادلهٔ این دایره به صورت $(x-۲)^۲+y^۲=۴$ یا $C:(x-۲)^۲+y^۲-۴=۰$ خواهد بود.

گام سوم (جای‌گذاری نقاط در معادلهٔ دایره):

دو نقطهٔ داده‌شده را در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم:

$$(\frac{۵}{۲},۱)\Rightarrow \frac{۱}{۴}+۱-۴<۰$$

$$(۰,۰)\Rightarrow ۴-۴=۰$$

$(\frac{۵}{۲},۱)$ داخل دایره است و هیچ مماسی از آن بر دایره رسم نمی‌شود و $(۰,۰)$ روی دایره است و یک مماس از آن بر دایره رسم می‌شود؛ در نتیجه از این دو نقطه، مجموعاً یک مماس بر دایره قابل رسم است.

۲۴ دو دایره به معادله‌های $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$ و $x^2+y^2-2x+2y+c=0$ مماس‌درون هستند. مقدار c کدام است؟

۱) $10/5$ ۲) $2/5$

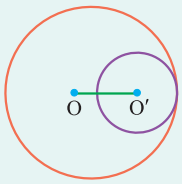
۳) $-10/5$ ۴) $-2/5$

مشاوره با سؤال نسبتاً ساده‌ای که مشابه امتحان نهایی است، مواجهیم. در آزمون‌ها این‌گونه سؤالات را نباید از دست بدهید.

درس Box

۱) معادلهٔ استاندارد دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R به صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ است.

۲) اگر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس‌درون باشند،



$OO'=|R-R'|$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ مرکز و شعاع دو دایره): مطابق فرمول، مرکز و شعاع دایرهٔ اول برابر است با:

$$O(-1,1), R=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مرکز و شعاع دایرهٔ دوم برابر است با:

$$O'(1,-1) \text{ و } R'=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{\frac{4+4-4c}{4}}=\sqrt{2-c}$$

گام دوم (محاسبهٔ مقدار c): دو دایره مماس‌درون هستند؛ پس اختلاف شعاع‌هایشان برابر با فاصلهٔ دو مرکز از یکدیگر است.

با توجه به این‌که $O(-1,1)$ و $O'(1,-1)$ است، در نتیجه فاصلهٔ دو مرکز برابر می‌شود با:

$$OO'=\sqrt{(1-(-1))^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

حالا باید $OO'=|R-R'|$؛ یعنی:

$$2\sqrt{2}=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2-c}\right| \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2-c} \rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{2}=-\sqrt{2-c}\le 0 \text{ (غ.ق.ق)} \\ -2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2-c} \Rightarrow \frac{5}{2}\sqrt{2}=\sqrt{2-c} \Rightarrow \frac{25}{2}=2-c \Rightarrow c=2-\frac{25}{2}=-10/5 \end{cases}$$

توجه کنید که حاصل رادیکال همواره عددی مثبت است، برای همین فقط $-2\sqrt{2}$ برای حل معادله قابل قبول است.

۲۵ معادلهٔ دایره‌ای که بر دو دایره به معادله‌های $x^۲+y^۲+۲x=۰$ و $x^۲+y^۲-۱۲x+۳۲=۰$ مماس‌خارج است و مرکزش روی محور xها قرار دارد، خط $x=۱$ را با کدام عرض مثبت قطع می‌کند؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۱/۵
۴) ۱/۲۵

پاسخ خیلی تشریحی

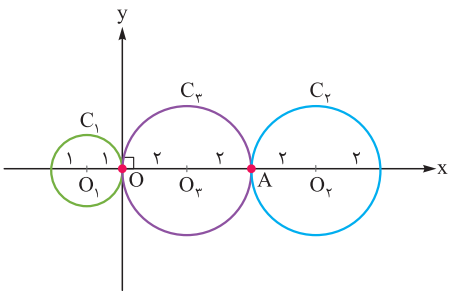
گام اول (پیداکردن مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها):

$$C_۱: x^۲+y^۲+۲x=۰ \Rightarrow O_۱(-۱,۰), R_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+۰-۰}=۱$$

$$C_۲: x^۲+y^۲-۱۲x+۳۲=۰ \Rightarrow O_۲(۶,۰), R_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱۲)^۲+۰-۴\times۳۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶}=۲$$

گام دوم (رسم شکل مناسب):

مطابق شکل دایرهٔ به مرکز $O_۳$ و شعاع $\frac{AO}{۲}$ بر دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ مماس‌خارج و مرکز آن روی محور xها قرار دارد.



گام سوم (یافتن معادلهٔ دایره):

با معلوم‌بودن مختصات مرکز و طول شعاع دایرهٔ مورد نظر، معادلهٔ آن را می‌نویسیم:

$$O_۳(۲,۰), R_۳=۲ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۰)^۲=۲^۲ \Rightarrow x^۲-۴x+y^۲=۰$$

گام چهارم (یافتن خواستهٔ سؤال): از تقاطع دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲-۴x+y^۲=۰$ با خط $x=۱$، داریم:

$$۱^۲-۴(۱)+y^۲=۰ \Rightarrow y^۲=۳ \Rightarrow y=\pm\sqrt{۳}$$

۲۶ در مثلث ABC، اگر $\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{C}}{۲}=۲۰^\circ$، آن‌گاه نیمساز داخلی زاویهٔ A، عمودمنصف ضلع BC را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۱) ۱۰°

۲) ۱۵°

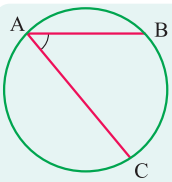
۳) ۲۰°

۴) ۲۵°

مشاوره برای حل این سؤال، باید نتیجهٔ یکی از تمرین‌های کتاب درسی را بدانید. در مطالعهٔ هندسهٔ پایه، تسلط روی کتاب درسی بسیار مهم است.

درس Box

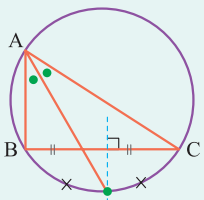
۱) اندازهٔ زاویهٔ محاطی در دایره، نصف کمان روبه‌روی آن است:



$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

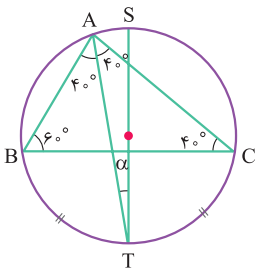
۲) مرکز دایرهٔ محیطی در هر مثلث، محل همرسی عمودمنصف‌های مثلث است.

۳) نیمساز زاویهٔ داخلی A و عمودمنصف ضلع BC در مثلث ABC همدیگر را در نقطهٔ وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ از دایرهٔ محیطی قطع می‌کنند.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ A و رسم شکل): طبق فرض مسئله، $\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{C}}{۲}=۲۰^\circ$ است؛ بنابراین $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۴۰^\circ$، در نتیجه $\hat{A}=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۴۰^\circ)=۸۰^\circ$.



نیمساز زاویهٔ داخلی $\hat{A}$ و عمودمنصف ضلع BC، همدیگر را در نقطهٔ T، وسط کمان BC از دایرهٔ محیطی قطع می‌کنند، پس با توجه به قسمت (۳) درسنامه، مثلث و دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم:

گام دوم (محاسبهٔ کمان‌ها): می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ محاطی در دایرهٔ نصف کمان روبه‌روی آن است؛ بنابراین:

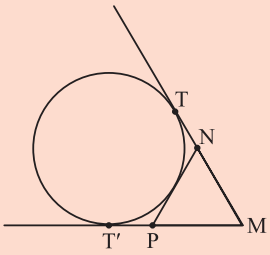
$$\overset{\frown}{BT}=\overset{\frown}{TC}=۲\times۴۰^\circ=۸۰^\circ \quad \text{و} \quad \overset{\frown}{AB}=۲\times۴۰^\circ=۸۰^\circ\,,\ \overset{\frown}{AS}=۲\alpha$$

گام سوم (محاسبهٔ خواسته سؤال):

چون TS عمودمنصف ضلع BC است، از مرکز دایرهٔ محیطی می‌گذرد؛ در نتیجه TS قطر دایره است و داریم:

$$\overset{\frown}{TS}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AS}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BT}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha+۸۰^\circ+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۱۰^\circ$$

۲۷ مطابق شکل از نقطهٔ **M** دو مماس بر دایره رسم شده و **NP** هم بر دایره مماس است. اگر $۶NP = ۶MN = ۵MP$، نسبت طول **MP** به شعاع دایره کدام است؟



۱) ۱/۵

۲) ۱/۷۵

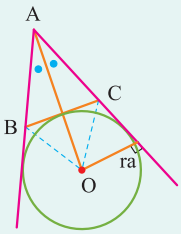
۳) ۲

۴) ۲/۲۵

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از کنکورهای اخیر طراحی شده است، حتماً می‌دانید که تسلط روی کنکورهای اخیر چه‌قدر مهم است و ممکن است هر سال، با سؤالی شبیه کنکورهای قبل هم مواجه شویم.

درس Box

۱) در شکل مقابل یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC (دایرهٔ محاطی مماس بر BC و امتدادهای AB و AC) رسم شده است، شعاع این دایره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



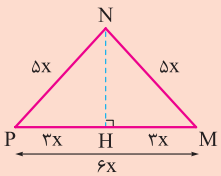
$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

که در آن، S مساحت مثلث، p نصف محیط مثلث و a طول ضلع BC است.

۲) در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع، میانه و نیمساز رأس مثلث بر هم منطبق است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (مشخص‌کردن اندازه‌ها روی مثلث MNP): طبق فرض مسئله $۶NP = ۶MN = ۵MP$؛ بنابراین برای راحت‌ترشدن محاسبات، PN و NM را $۵x$ و PM را $۶x$ در نظر می‌گیریم و ارتفاع NH را در مثلث رسم می‌کنیم. مثلث MNP متساوی‌الساقین است؛ پس ارتفاع، میانه نیز هست و شکل حاصل به صورت زیر می‌شود:



گام دوم (محاسبهٔ مساحت $\overset{\Delta}{MNP}$): طبق فیثاغورس در مثلث NHM داریم:

$$NH^۲ = NM^۲ - MH^۲ = (۵x)^۲ - (۳x)^۲ = (۴x)^۲ \Rightarrow NH = ۴x$$

حالا مساحت $\overset{\Delta}{MNP}$ را به دست می‌آوریم:

$$S_{MNP} = \frac{۱}{۲} \times ۶x \times ۴x = ۱۲x^۲$$

گام سوم (محاسبهٔ طول شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مثلث MNP):

طبق فرمول شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مثلث، داریم: $r = \frac{S}{p-NP}$؛ در نتیجه داریم:

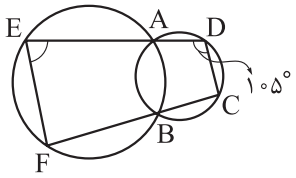
$$p = \frac{۵x + ۵x + ۶x}{۲} = ۸x$$

$$r = \frac{۱۲x^۲}{۸x - ۵x} = ۴x$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): مطلوب سؤال نسبت طول MP به شعاع دایره است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{MP}{r} = \frac{۶x}{۴x} = ۱/۵$$

۲۸ مطابق شکل، دو ضلع چهارضلعی **CDEF** از نقاط مشترک دو دایره می‌گذرند. اگر $\hat{D} = ۱۰۵^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ **E** چند درجه است؟

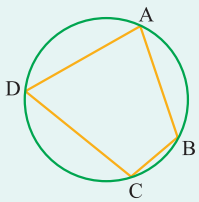


۱) ۷۵
۲) ۷۰
۳) ۶۵
۴) ۶۰

درس Box

چندضلعی را محاطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همهٔ رئوس آن بگذرد؛ در این صورت دایره را دایرهٔ محیطی آن چندضلعی می‌نامیم.

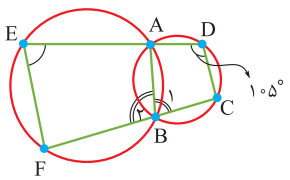
قضیه: یک چهارضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند:



$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (رسم AB و محاسبهٔ $\hat{B}_۱$ و $\hat{B}_۲$): پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.



چهارضلعی ABCD محاطی است، پس داریم:

$$\hat{B}_۱ + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{B}_۲ = ۱۰۵^\circ$$

گام دوم (محاسبهٔ $\hat{E}$): چهارضلعی ABFE نیز محاطی است و داریم:

$$\hat{E} + \hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{E} + ۱۰۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{E} = ۷۵^\circ$$

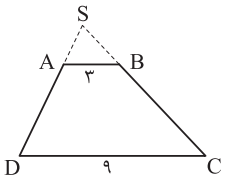
۲۹ در ذوزنقهٔ $ABCD$ به قاعده‌های $AB = ۳$ و $CD = ۹$، نیمسازهای سه زاویهٔ A، B و C همرس‌اند. اگر امتداد ساق‌ها همدیگر را در S قطع کنند، محیط مثلث SAB کدام است؟

۱) ۱۰

۲) ۹

۳) ۸

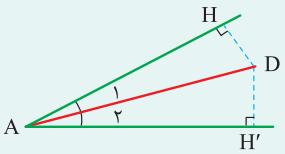
۴) ۷



مشاوره ترکیب «قضیهٔ تالس» و «چهارضلعی محیطی»، سؤال‌های ترکیبی در هندسهٔ پایه بسیار مهم هستند.

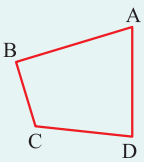
درس Box

۱) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و برعکس.



$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Leftrightarrow DH = DH'$$

۲) هر چهارضلعی که نیمسازهای زوایای آن همرس باشند محیطی است و در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر است.

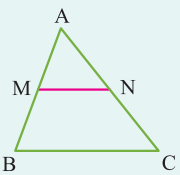


$ABCD$ محیطی است. $\Leftrightarrow AB + CD = BC + AD$

نکته اگر $(n-۱)$ تا از نیمسازهای داخلی یک nضلعی، همرس باشند می‌توان نتیجه گرفت همهٔ نیمسازهای داخلی آن همرس‌اند.

۳) قضیهٔ تالس: مطابق شکل اگر در مثلث ABC، $MN \parallel BC$ باشد، آن‌گاه:

(تالس جزءبه‌کل) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ و (تالس جزءبه‌جزء) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

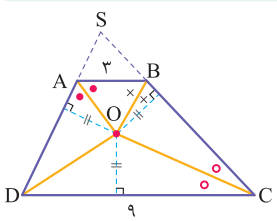


۴) ویژگی‌های تناسب: اگر دو کسر با یکدیگر مساوی باشند، نسبت مجموع صورت‌های دو کسر اولیه به مجموع مخرج‌های آن‌ها، با کسرهای اولیه برابر خواهد بود:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ $AD + BC$): نیمسازهای زوایای A، B و C در نقطهٔ O همرس‌اند؛ پس نقطهٔ O از اضلاع ذوزنقه به یک فاصله است و نیمساز زاویهٔ D نیز از نقطهٔ O می‌گذرد، یعنی نیمسازهای زوایای داخلی ذوزنقه همرس‌اند، پس ذوزنقه محیطی است و داریم:



$$AD + BC = AB + DC \Rightarrow AD + BC = ۳ + ۹ = ۱۲$$

گام دوم (محاسبهٔ $AS + BS$): $AB \parallel CD$ است، پس طبق تالس جزءبه‌کل در مثلث SDC داریم:

$$\frac{AS}{SD} = \frac{BS}{SC} = \frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۹}$$

و طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{AS + BS}{SD + SC} = \frac{۳}{۹}$$

پس می‌دانیم $AD+BC=۱۲$. حالا اگر $AS+BS$ را x فرض کنیم، داریم:

$$\frac{AS+BS}{AS+AD+BS+BC}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{x}{x+۱۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳x=x+۱۲ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow AS+BS=۶$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): $AS+BS=۶$ است، پس محیط مثلث ASB برابر است با:

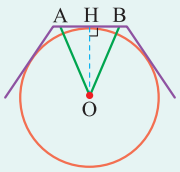
$$AS+BS+AB=۶+۳=۹$$

۳۰ شعاع دایرهٔ محاطی یک هشت‌ضلعی منتظم برابر با r است. اگر مساحت این هشت‌ضلعی kr^2 باشد، k کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$
۲) $8\sqrt{2}$
۳) $4\tan 22/5^\circ$
۴) $8\tan 22/5^\circ$

درس Box

مطابق شکل، بخشی از یک n ضلعی منتظم محیطی و دایرهٔ محاطی آن رسم شده است، داریم:



الف) $OH = r$

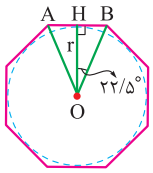
ب) $AH = BH$

پ) $A\hat{O}B = \frac{360^\circ}{n}$

ت) $A\hat{O}H = B\hat{O}H = \frac{1}{2}A\hat{O}B = \frac{180^\circ}{n}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم شکل): هشت‌ضلعی منتظم را رسم می‌کنیم و زاویهٔ مرکز آن را به دست می‌آوریم:



$$A\hat{O}B = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \Rightarrow H\hat{O}B = \frac{45^\circ}{2} = 22/5$$

گام دوم (محاسبهٔ مساحت $\overset{\Delta}{AOB}$ بر حسب شعاع دایرهٔ محاطی): OH شعاع دایرهٔ محاطی هشت‌ضلعی است؛ پس آن را r در نظر می‌گیریم و تانژانت زاویهٔ $22/5^\circ$ را می‌نویسیم:

$$\frac{BH}{r} = \tan 22/5^\circ \xrightarrow{AB=2BH} AB = 2r\tan 22/5^\circ$$

و حالا مساحت مثلث را برحسب r به دست می‌آوریم:

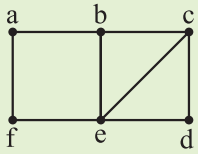
$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = r^2\tan 22/5^\circ$$

گام سوم (محاسبهٔ مساحت هشت‌ضلعی برحسب r): مساحت هشت‌ضلعی، هشت برابر مساحت مثلث AOB است، پس داریم:

$$S = 8S_{OAB} = 8r^2\tan 22/5^\circ = (8\tan 22/5)r^2$$

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

۳۱ در گراف شکل زیر، چند مسیر از رأس **a** به رأس **d** وجود دارد؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

درس Box

- **مسیر**: اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک $u-v$ مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود. به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند.
- **طول مسیر**: تعداد یال‌های موجود در آن مسیر، در واقع یکی کم‌تر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر است.
- **قرارداد**: دنبالهٔ متشکل از تنها یک رأسِ v، یک مسیر است با طول صفر از رأس v به خودش.

نکته در گراف G از مرتبهٔ p، طول هر مسیر در صورت وجود، حداکثر $(p-1)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از a دو راه داریم، می‌توانیم به b و یا به f برویم. از f تنها می‌توانیم به e برویم.

گام دوم: از b چهار مسیر به d وجود دارد:

$bed, bcd, becd, bced$

گام سوم: مسیرهای a به d که از b می‌گذرند، عبارت‌اند از:

$abcd, abced, abed, abecd$

گام چهارم: از e سه مسیر به d وجود دارد:

$ebcd, ecd, ed$

گام پنجم: مسیرهای a به d شامل یال fe، عبارت‌اند از:

$afed, afecd, afebcd$

در نتیجه همهٔ مسیرهای a به d عبارت‌اند از:

$abcd, abced, abed, abecd, afed, afecd, afebcd$

۳۲ یک سری داده‌های آماری اعداد طبیعی متمایزند و مقدار چارک اول، دوم و سوم در میان خود داده‌ها است. تعداد داده‌ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴۴
۲) ۵۵
۳) ۶۶
۴) ۷۷

درس Box

- **میانه**: عدد وسط مجموعه‌ای از داده‌ها را که از کوچک به بزرگ مرتب شده باشد، میانهٔ داده‌ها می‌گوییم و آن را با Q_2 نشان می‌دهیم.
- **چارک اول**: میانهٔ یک‌دومِ اول داده‌های مرتب‌شده را چارک اول می‌گوییم و آن را با Q_1 نشان می‌دهیم.
- **چارک سوم**: میانهٔ یک‌دومِ آخر داده‌های مرتب‌شده را چارک سوم می‌گوییم و آن را با Q_3 نشان می‌دهیم.

نکته

۱) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو عددی که در وسط قرار می‌گیرند، میانهٔ داده‌ها است.

۲) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، جملهٔ $\frac{n+1}{2}$اُم میانه است.

۳) اگر تعداد داده‌های متمایز $4k+1$ باشد، میانه از خود داده‌ها است.

۴) اگر تعداد داده‌های متمایز $4k+3$ باشد، تمام چارک‌ها از خود داده‌ها هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اگر تعداد کل داده‌ها زوج باشد، میانه، معدل (میانگین) دو دادهٔ وسطی است و از خودشان نیست؛ پس گزینه‌های (۱) و (۳) رد می‌شوند.

گام دوم: اگر تعداد کل داده‌ها $4k+1$ باشد، میانه، دادهٔ وسطی است؛ پس تعداد داده‌های هر طرف برابر $2k$ می‌شود؛ بنابراین چارک اول و سوم از خود داده‌ها نیستند؛ پس گزینهٔ (۴) رد می‌شود، زیرا:

$$۷۷ = ۴\times۱۹+۱$$

$$\underbrace{2k \quad Q_2 \quad 2k}_{\text{داده } 4k+1}$$

گام سوم: در مورد گزینهٔ (۲) که ۵۵ داده داریم، میانه، دادهٔ ۲۸اُم است $(Q_2 = \frac{۵۵+۱}{۲} = ۲۸)$ و در هر طرف ۲۷ داده داریم؛ پس دادهٔ چهاردهم $(\frac{۲۷+۱}{۲} = ۱۴)$ از ابتدا و انتهای داده‌ها برابر چارک اول و سوم می‌باشند که از خود داده‌ها هستند.

$$\underbrace{۱۳ \quad Q_1 \quad ۱۳ \quad Q_2 \quad ۱۳ \quad Q_3 \quad ۱۳}_{\text{داده } ۵۵}$$

۳۳ با افزودن $x = ۱۲$ به ۱۰ دادهٔ آماری، میانگین تغییری نمی‌کند، اما واریانس داده‌ها ۲ واحد کم می‌شود. ضریب تغییرات ۱۰ دادهٔ اولیه کدام است؟

۱) ۰/۲۶ ۲) ۰/۵۲

۳) ۰/۶۵ ۴) ۰/۳۹

درس Box

- **میانگین یا متوسط داده‌ها:** میانگین یا متوسط n دادهٔ $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n را با نماد $\bar{x}$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n} = \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}{n}$$

- **انحراف معیار داده‌ها:** اگر n داده از جامعه به صورت $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n داشته باشیم، انحراف معیار آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲}{n}} = \sqrt{\frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + (x_۲ - \bar{x})^۲ + \cdots + (x_n - \bar{x})^۲}{n}}$$

- **واریانس داده‌ها:** توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها گویند و آن را با نماد $\sigma^۲$ نشان می‌دهند.
- **ضریب تغییرات داده‌ها:** معیاری است که از تقسیم انحراف معیار داده‌ها (σ) بر میانگین آن‌ها $(\bar{x})$ به دست می‌آید و آن را با نماد CV نشان می‌دهند.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

نکته اگر داده‌ها یا داده‌هایی را به داده‌های قبلی اضافه کنیم و میانگین تغییری نکند، میانگین داده‌های اضافه‌شده برابر با میانگین داده‌های قبلی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با افزودن $x = ۱۲$ به داده‌ها، میانگین تغییری نکرده؛ بنابراین $\bar{x} = ۱۲$ بوده است.

گام دوم: واریانس ۱۰ دادهٔ اولیه برابر $\frac{\sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i - ۱۲)^۲}{۱۰}$ و واریانس جدید برابر است با $\frac{\sum_{i=۱}^{۱۱}(x_i - ۱۲)^۲}{۱۱}$. از طرفی، چون پرانتز مربوط به دادهٔ ۱۲ می‌شود $(۱۲-۱۲)^۲ = ۰$؛ پس: $\sum_{i=۱}^{۱۱}(x_i - ۱۲)^۲ = \sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i - ۱۲)^۲$.

گام سوم: اختلاف دو واریانس برابر ۲ است؛ پس داریم:

$$\frac{\sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i - ۱۲)^۲}{۱۰} - \frac{\sum_{i=۱}^{۱۱}(x_i - ۱۲)^۲}{۱۱} = ۲ \Rightarrow \sum(x_i - ۱۲)^۲ = ۲۲۰$$

گام چهارم: حال می‌توانیم واریانس ۱۰ دادهٔ اولیه را به دست آوریم:

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i - ۱۲)^۲}{۱۰} = \frac{۲۲۰}{۱۰} = ۲۲$$

گام پنجم: به دست آوردن ضریب تغییرات:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۲۲}}{۱۲} \simeq \frac{۴/۶۹}{۱۲} \simeq ۰/۳۹$$

پس ضریب تغییرات اولیه ۰/۳۹ بوده است.

۳۴ در معادلهٔ $16x+9y=2^{12}$ مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی x کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۳

۳) ۲۳ ۴) ۴

Hint معادلهٔ سیاله را به یک معادلهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۹ تبدیل کن.

درس Box

- هرگاه بخواهیم جواب‌های معادلهٔ $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $a,b,c\in\mathbb{Z}$ در این صورت معادلهٔ $ax+by=c$ را یک معادلهٔ سیاله درجه‌اول یا خطی می‌نامیم.
- شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیاله دارای جواب باشد، آن است که: $(a,b)\mid c$
- **به دست آوردن جواب‌های معادلهٔ سیاله:**

۱) معادلهٔ سیاله را تا جای ممکن ساده می‌کنیم. $ax+by=c$

۲) معادلهٔ سیاله را به یک معادلهٔ همنهشتی با مجهول x یا y تبدیل می‌کنیم.

$$ax\overset{b}{\equiv}c\quad,\quad b>0$$
$$by\overset{a}{\equiv}c\quad,\quad a>0$$

۳) یکی از دو معادلهٔ همنهشتی را حل کرده و با جاگذاری در معادلهٔ سیاله، متغیر دیگر را به دست می‌آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا شرط داشتن جواب را چک می‌کنیم:

$$(16,9)\mid 2^{12}$$

گام دوم: معادلهٔ سیاله را به یک معادلهٔ همنهشتی با مجهول x تبدیل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} 16x\overset{9}{\equiv}2^{12}\xrightarrow{(16,9)=1}x\overset{9}{\equiv}2^{8} \\ 2^3\overset{9}{\equiv}-1\xrightarrow{\text{به توان ۲}}2^6\overset{9}{\equiv}1\xrightarrow{\times 2^2}2^8\overset{9}{\equiv}4 \end{array}\right\}\Rightarrow x\overset{9}{\equiv}4$$

گام سوم:

$$x\overset{9}{\equiv}4\Rightarrow x=9k+4\xrightarrow{k=11}x=9\times 11+4=103$$
$$\xrightarrow{\text{جمع ارقام}}1+0+3=4$$

۳۵ اگر میانگین داده‌های دسته‌بندی‌شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دستهٔ چهارم، مقدار واریانس آن‌ها کدام است؟

نمایندهٔ دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	A	۳

۱) ۴/۸۵
۲) ۴/۹۲
۳) ۵/۵۵
۴) ۵/۷۴

درس Box

میانگین موزون داده‌ها: اگر n دادهٔ x_1، x_2، ... و x_n داشته باشیم، به طوری که هر یک از این داده‌ها به ترتیب دارای فراوانی f_1، f_2، ... و f_n باشند، میانگین موزون داده‌ها را با نماد $\bar{x}_w$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا فراوانی مربوط به دستهٔ ۱۸، یعنی A را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{12\times5 + 14\times7 + 16\times10 + 18A + 20\times3}{5+7+10+A+3}$$

$$\Rightarrow 16 = \frac{60+98+160+18A+60}{25+A} \Rightarrow A = 11$$

گام دوم: محاسبهٔ واریانس داده‌ها:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{5(12-16)^2 + 7(14-16)^2 + 10(16-16)^2 + 11(18-16)^2 + 3(20-16)^2}{5+7+10+11+3}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{80+28+0+44+48}{36} = \frac{200}{36} \simeq 5/55$$

۳۶ اگر به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$ ، $12n \overset{\alpha}{\equiv} 5$ ، $9n \overset{\alpha}{\equiv} -4$ و $\alpha \neq 1$ باشند، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

نکته

۱) $a \mid b \Rightarrow a \mid mb \quad m \in \mathbb{Z}$

۲) $a \mid b , a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$

۳) $ac \overset{m}{\equiv} bc , (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

۴) $\forall a,b \in \mathbb{Z} , a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b \quad (m \in \mathbb{N})$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول:

$12n \overset{\alpha}{\equiv} 5 \xrightarrow{\times 3} 36n \overset{\alpha}{\equiv} 15$

$9n \overset{\alpha}{\equiv} -4 \xrightarrow{\times 4} 36n \overset{\alpha}{\equiv} -16$

$\xrightarrow{-} 15 \overset{\alpha}{\equiv} -16 \Rightarrow 31 \overset{\alpha}{\equiv} 0 \Rightarrow \alpha = 31$

گام دوم:

$\Rightarrow 9n \overset{31}{\equiv} -4 \Rightarrow 9n \overset{31}{\equiv} \underbrace{-4+31}_{27}$

$\xrightarrow{(9,31)=1} n \overset{31}{\equiv} 3 \Rightarrow n = 31k+3 , (k \in \mathbb{Z})$

گام سوم: پیداکردن بزرگ‌ترین عدد دورقمی n:

$k = 3 \Rightarrow n = 31 \times 3 + 3 = 96 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 9+6 = 15$

۳۷ در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ۱۹ و خارج‌قسمت ۲۶ است. اگر $a \overset{۷}{\equiv} ۰$ باشد، رقم دهگان کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

Hint قضیهٔ تقسیم رو بنویس و از همنهشتی استفاده کن.

درس Box **قضیهٔ تقسیم:** اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این صورت اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به طوری که $a = bq + r$ و $۰ \le r < b$.

a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** طبق قضیهٔ تقسیم $r = ۱۹$ و $q = ۲۶$؛ پس داریم: $۱۹ < b \,,\, a = ۲۶b + ۱۹$

گام دوم: پیداکردن مقدار b:

$$\begin{cases} a = ۲۶b + ۱۹ \\ a \overset{۷}{\equiv} ۰ \end{cases} \Rightarrow ۲۶b + ۱۹ \overset{۷}{\equiv} ۰ \xrightarrow[۱۹ \overset{۷}{\equiv} ۵]{۲۶ \overset{۷}{\equiv} ۵} ۵b + ۵ \overset{۷}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۵b \overset{۷}{\equiv} -۵ \xrightarrow{(۵,۷)=۱} b \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow b = ۷q - ۱ \quad , \quad q \in \mathbb{Z}$$

گام سوم: پیداکردن کوچک‌ترین عدد طبیعی a:

$$b > ۱۹ \xrightarrow{q=۳} b = ۷ \times ۳ - ۱ = ۲۰$$

$$\Rightarrow a = ۲۶ \times ۲۰ + ۱۹ = ۵۳۹ \Rightarrow \text{رقم دهگان} = ۳$$

۳۸ در چند زیرگراف مانند G از گراف K_4 با مجموعهٔ رأس‌های $V=\{a,b,c,d\}$، تعداد یال‌های G از تعداد یال‌های $\bar{G}$ بیشتر است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۴ ۳) ۴۶ ۴) ۴۸

درس Box

- **زیرگراف:** یک زیرگراف از گراف G، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف G و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های G باشد.
- **مکمل یک گراف:** مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا $\bar{G}$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس گراف G است و بین دو رأس از G^c یک یال است، اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد.
- **گراف کامل:** گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر، مجاور باشد گراف کامل می‌نامیم. گرافِ کاملِ nرأسی را با نماد K_n نمایش می‌دهیم.

K_n یک گراف nرأسی و $(n-1)$ـ منتظم با $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است.

نکته

۱) اگر G یک گراف با n رأس و V یک رأسِ آن باشد و $d_G(V)$ و $d_{\bar{G}}(V)$ به ترتیب درجهٔ رأس V در گراف‌های G و $\bar{G}$ باشند، آن‌گاه:

$$d_G(V)+d_{\bar{G}}(V)=n-1$$

۲) اگر G یک گراف nرأسی باشد، آن‌گاه:

$$q(G)+q(\bar{G})=\frac{n(n-1)}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: G زیرگراف K_4 است؛ پس رئوس گراف G زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{a,b,c,d\}$ و یال‌های G زیرمجموعه‌ای از ۶ یال گرافِ کامل K_4 است.

گام دوم: فرض کنیم G دارای p رأس باشد، حالت‌های مختلف p را بررسی می‌کنیم:

۱) اگر $p=4$ باشد، هر ۴ رأس K_4 در گراف G هستند، حال می‌رویم سراغ یال‌های G:

$q(G)$	$q(\bar{G})$	تعداد حالت‌ها
۶	۰	$\binom{6}{6}=1$
۵	۱	$\binom{6}{5}=6$ ⇒ کدام ۵ یال
۴	۲	$\binom{6}{4}=15$ ⇒ کدام ۴ یال
۳	۳ ✕	

بنابراین: $1+6+15=22$

۲) اگر $p=3$ باشد، به $\binom{4}{3}$ حالت، سه رأس از چهار رأس $\{a,b,c,d\}$ را انتخاب می‌کنیم.

$q(G)$	$q(\bar{G})$	تعداد حالت‌ها
۳	۰	$\binom{4}{3}\binom{3}{3}=4$
۲	۱	$\binom{4}{3}\binom{3}{2}=4\times3=12$ (↓ رئوس، ↓ یال)

بنابراین: $4+12=16$

۳) اگر $p=2$ باشد، به $\binom{4}{2}$ حالت دو رأس از چهار رأس را انتخاب می‌کنیم.

$q(G)$	$q(\bar{G})$	تعداد حالت‌ها
۱	۰	$\binom{4}{2}\binom{1}{1}=6$

در نتیجه: $22+16+6=44$

۳۹ به گراف C_6 دو یال اضافه می‌کنیم، به طوری که $\Delta > \delta + 1$. اگر گراف جدید فقط یک دور به طول ۴ داشته باشد، تعداد دورهای به طول ۵ در آن کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

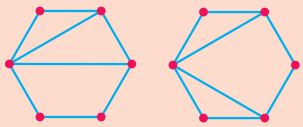
درس Box

- **دور**: دنبالهٔ $v_1 v_2 v_3 \dots v_n v_1$ $(n \geq 4)$ از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.
- C_n: گرافی که تنها از یک دورِ nرأسی تشکیل شده باشد.
- **بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف**: بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آن‌ها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آن‌ها را با ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

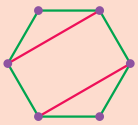
گام اول: در گراف C_6، $\Delta = \delta = 2$، با اضافه‌شدن دو یال به گراف C_6، $\delta = 2$ باقی می‌ماند؛ بنابراین:

$$\Delta > \delta + 1 \xrightarrow{\delta=2} \Delta > 3 \Rightarrow \Delta = 4$$



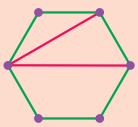
گام دوم: به حالت‌های مختلف می‌توان این دو یال را اضافه کرد.

- حالت اول: دو یال در هیچ رأسی مشترک نباشند، در این صورت $\Delta = 3$ و $\delta = 2$ که با $\Delta > \delta + 1$ $(3 > 2 + 1)$ تناقض دارد.



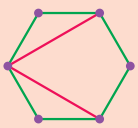
×

- حالت دوم: اگر دو یال از یک رأس به دو رأس مجاور (به دو سر یک یال) وصل شوند، آن‌گاه دو دور به طول ۴ خواهیم داشت که قابل قبول نیست.



×

- حالت سوم: در این حالت یک دور به طول ۴ خواهیم داشت و دو دور به طول ۵ داریم.



✓

۴۰ در گراف G از مرتبهٔ ۵ درجه رأس‌های a، b و c یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت مخالف صفر تشکیل می‌دهند و درجهٔ دو رأس d و e نیز با هم برابر است. تعداد یال‌های گراف G برابر کدام‌یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

درس Box

- **قضیه:** اگر G یک گراف با مرتبهٔ p و اندازهٔ q، $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ مجموعهٔ رئوس آن باشد، آن‌گاه:
$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$$
- **نتیجه:** تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.
- **درجهٔ یک رأس:** درجهٔ رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند و آن را با $\deg_G(v)$ یا $\deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم.
- در گراف G از مرتبهٔ p درجه یک رأس حداکثر می‌تواند $p-1$ باشد؛ $\deg v \le p-1$.

به رأس درجه $p-1$ رأس فول (کامل) می‌گوییم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در گراف G از مرتبهٔ ۵ حداکثر درجهٔ رئوس برابر $p-1=4$ است.

گام دوم: درجه رأس‌های a، b و c یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند و چون حداکثر درجه ۴ است؛ پس قدرنسبت حتماً برابر ۱ است.

گام سوم: فرض کنیم $d(e) = d(d) = m$. حالت‌های مختلف درجهٔ رئوس را می‌نویسیم:

$0 \quad 1 \quad 2 \quad m \quad m \Rightarrow$ ✗ تعداد رئوس درجهٔ فرد، فرد است.

$1 \quad 2 \quad 3 \quad m \quad m$ ✓

$2 \quad 3 \quad 4 \quad m \quad m \Rightarrow$ ✗ تعداد رئوس درجهٔ فرد، فرد است.

گام چهارم: حالت‌های مختلف درجهٔ رئوس را بررسی می‌کنیم:

$m=1 \Rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \Rightarrow 2q=8 \Rightarrow q=4$

$m=2 \Rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \Rightarrow 2q=10 \Rightarrow q=5$

$m=3 \Rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \Rightarrow 2q=12 \Rightarrow q=6$

$m=4 \Rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 4$ ✗ چون دو رأس فول وجود دارد؛ بنابراین حداقل درجه باید ۲ باشد.

فیزیک دوازدهم

۴۱ تندی یک موشک در یک بازهٔ زمانی، ۲۵ درصد افزایش یافته است. اگر در این بازهٔ زمانی، انرژی جنبشی موشک ثابت مانده باشد، اندازهٔ تکانهٔ آن چند درصد و چگونه تغییر کرده است؟

۱) ۲۰، کاهش یافته است.
۲) ۲۵، کاهش یافته است.
۳) ۲۰، افزایش یافته است.
۴) ۲۵، افزایش یافته است.

مشاوره تا حالا رابطهٔ $K=\frac{1}{2}pv$ مورد توجه طراحان کنکور نبوده. پس می‌تونه گزینهٔ خوبی برای طرح سؤال در آینده باشه. نگی نگفتیا...

درس Box

اگر جسمی با تندی v دارای تکانهٔ p و انرژی جنبشی K در حال حرکت باشد، رابطهٔ زیر ارتباط این سه کمیت را نشان می‌دهد:

$$K=\frac{1}{2}pv \quad \begin{matrix} p: \text{تکانه } (\frac{kg.m}{s}) \\ v: \text{تندی } (m/s) \end{matrix} \quad \leftarrow \text{انرژی جنبشی } (J)$$

رابطهٔ مقایسه‌ای نیز به صورت زیر است:

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{p_2}{p_1}\times\frac{v_2}{v_1}$$

پاسخ خیلی تشریحی طبق رابطهٔ $K=\frac{1}{2}pv$ داریم:

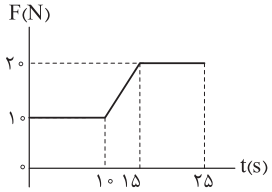
$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{p_2}{p_1}\times\frac{v_2}{v_1} \xrightarrow[v_2=v_1+\frac{25}{100}v_1=\frac{125}{100}v_1=\frac{5}{4}v_1]{K_2=K_1} 1=\frac{p_2}{p_1}\times\frac{\frac{5}{4}v_1}{v_1} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1}=\frac{4}{5}$$

حالا درصد تغییر تکانه را حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد تغییر تکانه}=\frac{p_2-p_1}{p_1}\times 100=\frac{\frac{4}{5}p_1-p_1}{p_1}\times 100=\frac{-\frac{1}{5}p_1}{p_1}\times 100=-\%20$$

بنابراین تکانهٔ موشک ۲۰ درصد کاهش یافته است.

۴۲ نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی برحسب زمان به شکل زیر است. اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 25s$ چند نیوتون است؟



۱) ۱۳

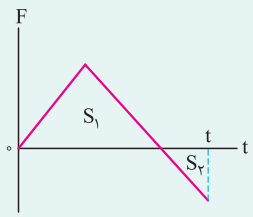
۲) ۱۵

۳) ۱۶/۲۵

۴) ۱۸/۷۵

Hint اول از روی سطح محصور نمودار $F-t$ با محور t ، تغییر تکانه رو پیدا کن. بعدش با داشتن تغییر تکانه و مدت‌زمان، نیروی خالص متوسط رو به دست بیار.

درس Box مطابق شکل زیر، مساحت محصور بین نمودار نیروی خالص (برحسب زمان) و محور زمان، برابر با تغییر تکانهٔ جسم است:



حواست به علامت باشه: اگر نمودار $F-t$ بالای محور t باشه، علامت مساحت را مثبت و اگر پایین محور t باشه، علامت مساحت را منفی در نظر می‌گیریم.

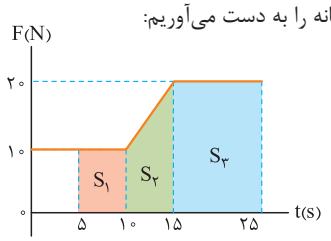
تغییر تکانه در بازهٔ زمانی صفر تا t: $\Delta p = S_1 - S_2$

رابطهٔ بین نیروی خالص وارد بر جسم و تکانه به صورت زیر است:

$$F_{net_{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$F_{net_{av}}$: نیروی خالص متوسط (N)، Δp: تغییر تکانه $(\frac{kg.m}{s})$، Δt: مدت زمان تغییر تکانه(s)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مطابق شکل زیر، به کمک مساحت محصور نمودار $F-t$ با محور t، تغییر تکانه را به دست می‌آوریم:



$S_1 = 5 \times 10 = 50$

$S_2 = \frac{(10+20)\times 5}{2} = 75$

$S_3 = 10 \times 20 = 200$

تغییر تکانه در بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 25s$: $\Delta p = S_1 + S_2 + S_3 = 50 + 75 + 200 = 325 \frac{kg.m}{s}$

گام دوم: نیروی خالص متوسط را حساب می‌کنیم:

$$F_{net_{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = t_2 - t_1 = 25 - 5 = 20\,s]{\Delta p = 325 \frac{kg.m}{s}} F_{net_{av}} = \frac{325}{20} = 16/25 N$$

۴۳ ماهواره‌ای به جرم ۲۵۰ kg در فاصلهٔ ۱۶۰۰ کیلومتری از سطح زمین قرار دارد. وزن ماهواره در این ارتفاع چند نیوتون است؟ (شتاب گرانش در سطح کرهٔ زمین ۱۰ N/kg و شعاع کرهٔ زمین ۶۴۰۰km است.)

۱) ۲۵۰۰ ۲) ۱۶۰۰ ۳) ۶۲۵ ۴) ۲۵۰

Hint اول شتاب گرانش در فاصلهٔ ۱۶۰۰ کیلومتری از سطح زمین رو به دست بیار. بعدش وزن ماهواره رو توی اون ارتفاع حساب کن.

درس Box

نسبت شتاب گرانش در ارتفاع h از سطح زمین به شتاب گرانش در سطح زمین از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{g'}{g}=\left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2$$

g': شتاب گرانش در ارتفاع h از سطح زمین (N/kg)

g: شتاب گرانش در سطح زمین (N/kg)

R_e: شعاع زمین

h: ارتفاع از سطح زمین

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شتاب گرانش را در ارتفاع ۱۶۰۰ کیلومتری از سطح زمین به دست می‌آوریم:

$$\frac{g'}{g}=\left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2 \xrightarrow[h=1600\,km]{g=10\,N/kg,\ R_e=6400\,km} \frac{g'}{10}=\left(\frac{6400}{6400+1600}\right)^2=\left(\frac{6400}{8000}\right)^2 \Rightarrow \frac{g'}{10}=(0/8)^2=0/64$$

$$\Rightarrow g'=6/4\ N/kg$$

گام دوم: وزن ماهواره را در ارتفاع ۱۶۰۰ km از سطح زمین حساب می‌کنیم:

$$W'=mg' \xrightarrow[g'=6/4\ N/kg]{m=250\,kg} W'=250\times 6/4=1600\ N$$

۴۴ یک دیسک افقی گردان، حول محور قائم خود می‌چرخد. دو جسم **A** و **B** به ترتیب در فاصله‌های **d** و **۲d** از مرکز دوران، روی دیسک قرار دارند و بدون آن‌که بلغزند، همراه آن می‌چرخند. اگر جرم جسم **A**، ۲ برابر جرم جسم **B** باشد، اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم **A**، چند برابر اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم **B** است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

درس Box

نیروی مرکزگرای وارد بر جسمی که حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد، از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$$F_C = \frac{۴\pi^۲ m r}{T^۲} \leftarrow \text{نیروی مرکزگرا (N)}$$

جرم (kg) — شعاع (m) — دوره (s)

طبق رابطهٔ بالا، رابطهٔ مقایسه‌ای نیروی مرکزگرا به صورت زیر است:

$$\frac{F_۲}{F_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times \frac{r_۲}{r_۱} \times (\frac{T_۱}{T_۲})^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

می‌دانیم بر روی دیسک گردان افقی، نیروی مرکزگرای وارد بر جسم، همان نیروی اصطکاک ایستایی است. از طرفی دورهٔ چرخش تمام نقاط روی دیسک گردان با هم برابر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{r_A}{r_B} \times (\frac{T_B}{T_A})^۲ \xrightarrow[r_B=۲d\,,\,T_A=T_B]{F=f_s\,,\,m_A=۲m_B\,,\,r_A=d} \frac{f_{s(A)}}{f_{s(B)}} = \frac{۲m_B}{m_B} \times \frac{d}{۲d} \times (۱)^۲ = ۱$$

۴۵ دو ماهوارهٔ **A** و **B** با تندی ثابت روی دو مدار دایره‌ای به دور زمین در حال چرخش هستند. اگر اندازهٔ شتاب مرکزگرای ماهوارهٔ **A**، ۱۶ برابر اندازهٔ شتاب مرکزگرای ماهوارهٔ **B** باشد، دورهٔ ماهوارهٔ **A** چند برابر دورهٔ ماهوارهٔ **B** است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۸

درس Box

رابطهٔ شتاب مرکزگرای ماهواره و دورهٔ چرخش ماهواره مطابق زیر به دست می‌آید:

$$a_c = \frac{۴\pi^۲ r}{T^۲} \Rightarrow \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{r_۲}{r_۱} \times (\frac{T_۱}{T_۲})^۲ \xrightarrow{\frac{r_۲}{r_۱} = (\frac{T_۲}{T_۱})^{\frac{۲}{۳}}} \frac{a_۲}{a_۱} = (\frac{T_۲}{T_۱})^{\frac{۲}{۳}} \times (\frac{T_۱}{T_۲})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{a_۲}{a_۱} = (\frac{T_۱}{T_۲})^{-\frac{۲}{۳}} \times (\frac{T_۱}{T_۲})^۲ \Rightarrow \frac{a_۲}{a_۱} = (\frac{T_۱}{T_۲})^{\frac{۴}{۳}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق رابطهٔ شتاب مرکزگرای ماهواره با دورهٔ ماهواره داریم:

$$\frac{a_B}{a_A} = (\frac{T_A}{T_B})^{\frac{۴}{۳}} \xrightarrow{a_A = ۱۶ a_B} \frac{a_B}{۱۶ a_B} = (\frac{T_A}{T_B})^{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow (\frac{T_A}{T_B})^{\frac{۴}{۳}} = \frac{۱}{۱۶} \xrightarrow{\sqrt[۴]{\ }} (\frac{T_A}{T_B})^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{()^۳} \frac{T_A}{T_B} = \frac{۱}{۸}$$

۴۶ نوسانگری در راستای محور x و حول مبدأ محور، در حال حرکت هماهنگ ساده است. در بازهٔ زمانی که سرعت و شتاب نوسانگر، هر دو در جهت محور x هستند، چه تعداد از عبارت‌های زیر الزاماً درست است؟

الف) اندازهٔ بردار مکان متحرک در حال افزایش است.

ب) بردار مکان متحرک در جهت محور x است.

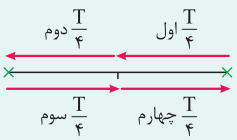
پ) انرژی پتانسیل نوسانگر در حال افزایش است.

ت) اندازهٔ نیروی خالص وارد بر نوسانگر در حال کاهش است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

در حرکت هماهنگ ساده بر روی محور x، مطابق شکل مقابل، حرکت یک دوره را در چهار بخش به مدت زمان $\frac{T}{4}$ بررسی می‌کنیم:



$\frac{T}{4}$ اول و $\frac{T}{4}$ سوم
- اندازهٔ بردار مکان، شتاب، نیروی خالص و انرژی پتانسیل در حال کاهش
- بردار سرعت و شتاب هم‌جهت (حرکت تندشونده)
- انرژی جنبشی در حال افزایش

$\frac{T}{4}$ دوم و $\frac{T}{4}$ چهارم
- اندازهٔ بردار مکان، شتاب، نیروی خالص و انرژی پتانسیل در حال افزایش
- بردار سرعت و شتاب در خلاف جهت (حرکت کندشونده)
- انرژی جنبشی در حال کاهش

$\frac{T}{4}$ اول و $\frac{T}{4}$ دوم: بردار سرعت و تکانه منفی



$\frac{T}{4}$ سوم و $\frac{T}{4}$ چهارم: بردار سرعت و تکانه مثبت



$\frac{T}{4}$ اول و $\frac{T}{4}$ چهارم: مکان مثبت و شتاب و نیرو منفی



$\frac{T}{4}$ دوم و $\frac{T}{4}$ سوم: مکان منفی و شتاب و نیرو مثبت



پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس، منظور از بازهٔ زمانی که سرعت و شتاب نوسانگر، هر دو در جهت محور x هستند، $\frac{T}{4}$ سوم است؛ بنابراین فقط عبارت «ت» درست است. حالا هر یک از عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:



اندازهٔ بردار مکان، نیروی خالص و انرژی پتانسیل در حال کاهش است؛ بنابراین عبارت‌های «الف» و «پ» نادرست و عبارت «ت» درست است. بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است؛ بنابراین عبارت «ب» نادرست است.

۴۷ معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگری که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = ۰/۰۸\cos(۵\pi t)$ است. شتاب نوسانگر در لحظهٔ $t = ۰/۴۵s$، برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ $(\pi = \sqrt{۱۰})$

۱) $\sqrt{۲}\,\vec{i}$ ۲) $-\sqrt{۲}\,\vec{i}$

۳) $۱۰\sqrt{۲}\,\vec{i}$ ۴) $-۱۰\sqrt{۲}\,\vec{i}$

Hint

اول مکان نوسانگر در لحظهٔ $t = ۰/۴۵\ s$ را به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان به دست بیار. بعدش شتاب نوسانگر رو با داشتن مکان و ω حساب کن.

درس Box

برای به دست آوردن مکان نوسانگر در هر لحظه به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان، می‌توانیم زمان مورد نظر را در معادله جای‌گذاری کنیم و مکان نوسانگر را به دست آوریم. معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت هماهنگ ساده به صورت زیر است:

$x = A\cos\omega t$ ← مکان نوسانگر

A: دامنهٔ نوسان

ω: بسامد زاویه‌ای (rad/s)

رابطهٔ بین شتاب و مکان نوسانگر به صورت زیر است:

$a = -\omega^۲ x$ ← شتاب نوسانگر $(m/s^۲)$

ω: بسامد زاویه‌ای

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مکان نوسانگر را در لحظهٔ $t = ۰/۴۵\ s$ به دست می‌آوریم:

$$x = ۰/۰۸\cos(۵\pi t) \xrightarrow{t=۰/۴۵\,s} x = ۰/۰۸\cos(۵\pi \times ۰/۴۵) = ۰/۰۸\cos(۲/۲۵\pi)$$

$$\xrightarrow{\cos(۲/۲۵\pi) = \cos(۲\pi + \frac{\pi}{۴}) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}} x = ۰/۰۸ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰/۰۴\sqrt{۲}\ m$$

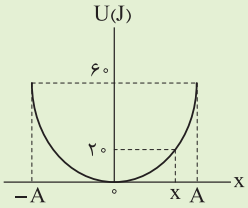
گام دوم: شتاب نوسانگر را در لحظهٔ $t = ۰/۴۵\ s$ حساب می‌کنیم:

$$x = A\cos\omega t = ۰/۰۸\cos(۵\pi t) \Rightarrow \omega = ۵\pi(rad/s)$$

$$a = -\omega^۲ x \xrightarrow[x = ۰/۰۴\sqrt{۲}\,m]{\omega = ۵\pi(rad/s)} a = (-)(۵\pi)^۲ \times ۰/۰۴\sqrt{۲} = -۲۵\pi^۲ \times ۰/۰۴\sqrt{۲} \Rightarrow a = -\pi^۲ \times \sqrt{۲} \xrightarrow{\pi = \sqrt{۱۰}} a = -۱۰\sqrt{۲}\,m/s^۲$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (-۱۰\sqrt{۲}\ m/s^۲)\vec{i}$$

۴۸ نمودار انرژی پتانسیل برحسب مکان در یک سامانهٔ جرم ـ فنر که جرم وزنهٔ آن ۲۰۰g است، مطابق شکل زیر است. تندی وزنه در مکان x چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲

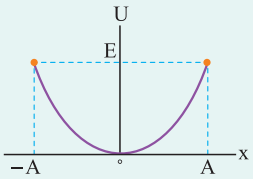
۲) ۲۰

۳) $\sqrt{۲}$

۴) $۱۰\sqrt{۲}$

Hint به کمک نمودار، اول انرژی پتانسیل و انرژی مکانیکی نوسانگر را پیدا می‌کنیم. بعدش انرژی جنبشی را به دست می‌آوریم. در نهایت با داشتن انرژی جنبشی و جرم نوسانگر، تندی آن را حساب می‌کنیم.

درس Box نمودار انرژی پتانسیل برحسب مکان نوسانگر مطابق شکل زیر است:



U: انرژی پتانسیل

x: مکان نوسانگر

A: دامنهٔ نوسان

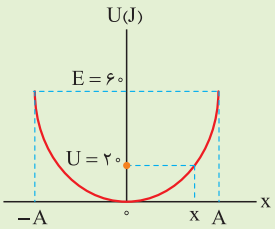
E: انرژی مکانیکی

در حرکت هماهنگ ساده، انرژی مکانیکی در تمام نقاط یکسان و برابر است با مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل نوسانگر:

$$E = K + U$$

انرژی مکانیکی — انرژی جنبشی — انرژی پتانسیل

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به کمک نمودار مقابل و درس‌باکس، انرژی مکانیکی و انرژی پتانسیل را به دست می‌آوریم:



گام دوم: انرژی جنبشی نوسانگر را در مکان x به دست می‌آوریم:

$$E = K + U \xrightarrow[U=۲۰\,J]{E=۶۰\,J} ۶۰ = K + ۲۰ \Rightarrow K = ۴۰\,J$$

گام سوم: طبق رابطهٔ انرژی جنبشی، تندی نوسانگر را در مکان x حساب می‌کنیم:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \xrightarrow[m=۲۰۰\,g=۰/۲\,kg]{K=۴۰\,J} ۴۰ = \frac{۱}{۲}\times ۰/۲ \times v^۲ \Rightarrow v^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow v = ۲۰\,m/s$$

۴۹ معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = ۰/۴\cos ۱۶\pi t$ است. در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = \frac{۱}{۶}s$، مسافت طی‌شده توسط نوسانگر چند برابر بزرگی جابه‌جایی آن است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲۲}{۳}$ ۴) ۶

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مکان نوسانگر را در لحظه‌های $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = \frac{۱}{۶}s$ به دست می‌آوریم:

$$x = ۰/۴\cos ۱۶\pi t \xrightarrow{t_۱ = ۰} x_۱ = ۰/۴ \times \underbrace{\cos(۰)}_{۱} = ۰/۴m$$

$$x = ۰/۴\cos ۱۶\pi t \xrightarrow{t_۲ = \frac{۱}{۶}s} x_۲ = ۰/۴ \times \cos(۱۶\pi \times \frac{۱}{۶}) = ۰/۴\cos(\frac{۸\pi}{۳})$$

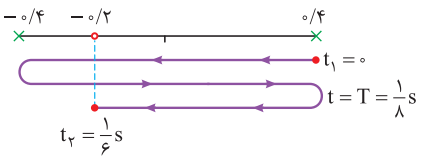
$$\xrightarrow{\cos(\frac{۸\pi}{۳}) = \cos(۲\pi + \frac{۲\pi}{۳}) = \cos(\frac{۲\pi}{۳}) = -\frac{۱}{۲}} x_۲ = ۰/۴ \times (-\frac{۱}{۲}) = -۰/۲m$$

گام دوم: جابه‌جایی نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ \xrightarrow[x_۲ = -۰/۲m]{x_۱ = ۰/۴m} \Delta x = -۰/۲ - ۰/۴ = -۰/۶m$$

گام سوم: مسیر حرکت و مسافت طی‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \omega = ۱۶\pi\ rad/s \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} = ۱۶\pi \Rightarrow T = \frac{۱}{۸}s \\ \Delta t = \frac{۱}{۶}s \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۸}} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \Delta t = T + \frac{T}{۳}$$

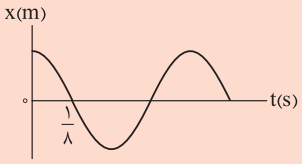


$$l = ۰/۸ + ۰/۸ + ۰/۶ = ۲/۲\ m$$

گام چهارم: نسبت مسافت طی‌شده به بزرگی جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{l}{|\Delta x|} = \frac{۲/۲}{۰/۶} = \frac{۱۱}{۳}$$

۵۰ نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به شکل زیر است. اگر تندی متوسط نوسانگر در مدت یک دوره برابر $۱۲\ cm/s$ باشد، سرعت متوسط آن در بازهٔ $t_۱ = ۰\ s$ تا $t_۲ = \frac{۳}{۴}\ s$، چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟



۱) $۳\vec{i}$

۲) $۴\vec{i}$

۳) $-۳\vec{i}$

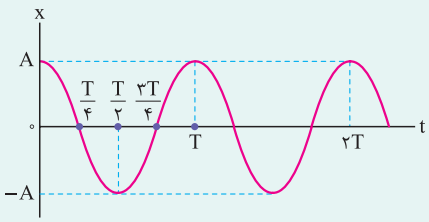
۴) $-۴\vec{i}$

Hint

اول به کمک نمودار، دورهٔ تناوب و با استفاده از تندی متوسط در یک دوره، دامنهٔ نوسان را به دست می‌آوریم و با داشتن دورهٔ تناوب و دامنهٔ نوسان، معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر را می‌نویسیم. سپس مکان نوسانگر در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ و به دنبال آن جابه‌جایی نوسانگر را حساب می‌کنیم. در نهایت، سرعت متوسط نوسانگر را به دست می‌آوریم.

درس Box

نمودار مکان ـ زمان حرکت هماهنگ ساده‌ای با معادلهٔ مکان ـ زمان $x = A\cos\omega t$ به صورت زیر است:



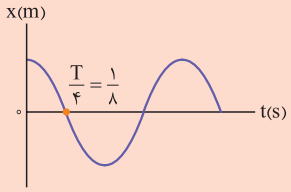
نکته

مسافت طی‌شدهٔ نوسانگر در هر دورهٔ تناوب برابر $l = ۴A$ است؛ بنابراین تندی متوسط نوسانگر در مدت یک دوره برابر است با:

$$s_{av} = \frac{۴A}{T}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دورهٔ تناوب نوسانگر را به کمک نمودار مکان ـ زمان به دست می‌آوریم:



$$\frac{T}{۴} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow T = \frac{۱}{۲}\ s$$

گام دوم: با استفاده از تندی متوسط در یک دورهٔ تناوب و مدت‌زمان دورهٔ تناوب، دامنهٔ نوسان را حساب می‌کنیم:

در مدت یک دوره : $s_{av} = \frac{۴A}{T} \xrightarrow[T=\frac{۱}{۲}\ s]{s_{av}=۱۲\ cm/s} ۱۲ = \frac{۴A}{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow A = ۱/۵\ cm$

گام سوم: معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر را برحسب cm به دست می‌آوریم:

$$x = A\cos\omega t \xrightarrow[\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi\ rad/s]{A=۱/۵\ cm} x = ۱/۵\cos(۴\pi t)$$

گام چهارم: مکان نوسانگر در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ و جابه‌جایی نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$x = ۱/۵\cos(۴\pi t) \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t_۱=۰} x_۱ = ۱/۵ \times \underbrace{\cos(۰)}_{۱} = ۱/۵\ cm \\ \xrightarrow{t_۲=\frac{۳}{۴}s} x_۲ = ۱/۵ \times \underbrace{\cos(۴\pi \times \frac{۳}{۴})}_{-۱} = -۱/۵\ cm \end{cases}$$

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = -۱/۵ - ۱/۵ = -۳\ cm$$

گام پنجم: سرعت متوسط نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=\frac{۳}{۴}-۰=\frac{۳}{۴}\ s]{\Delta\vec{x}=-۳\ (cm)\vec{i}} \vec{v}_{av} = -\frac{۳}{\frac{۳}{۴}} = -۴\ (cm/s)\vec{i}$$

۵۱ معادلهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ نوسانگری در SI به صورت $x = ۰/۰۱\cos ۳\pi t$ است. بیشترین اندازهٔ سرعت متوسط نوسانگر در مدت یک ثانیه چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

نکته در حرکت هماهنگ ساده، بیشترین مقدار جابه‌جایی در یک بازهٔ زمانی که مضرب فردی از $\frac{T}{۲}$ است $(\Delta t = (۲n-۱)\frac{T}{۲})$، برابر است با:

$$d_{max} = ۲A$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر، دورهٔ تناوب و دامنهٔ نوسان را به دست می‌آوریم:

$$x = A\cos\omega t = ۰/۰۱\cos ۳\pi t \Rightarrow \begin{cases} \omega = ۳\pi (rad/s) \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} ۳\pi = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{۲}{۳}s \\ A = ۰/۰۱m \end{cases}$$

گام دوم: نسبت مدت زمان به دورهٔ تناوب را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \Delta t = ۳\frac{T}{۲}$$

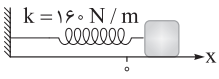
گام سوم: بیشترین مقدار جابه‌جایی نوسانگر را در مدت $۳\frac{T}{۲}$ حساب می‌کنیم. طبق نکتهٔ گفته‌شده در درس‌باکس داریم:

$$d_{max} = ۲A \xrightarrow{A=۰/۰۱m=۱cm} d_{max} = ۲cm$$

گام چهارم: بیشترین سرعت متوسط نوسانگر در مدت ۱s را به دست می‌آوریم:

$$v_{max} = \frac{d_{max}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۱s]{d_{max}=۲cm} v_{max} = \frac{۲}{۱} = ۲ cm/s$$

۵۲ در شکل زیر، معادلهٔ مکان ـ زمان جسم متصل به فنر در SI به صورت $x = ۰/۰۴\cos(\omega t)$ است. اگر جسم در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۱۲}s$ برای سومین مرتبه از فاصلهٔ ۲ سانتی‌متری مبدأ عبور کند، جرم جسم چند گرم است؟ $(\pi^۲ = ۱۰)$



۱) ۶۲/۵
۲) ۱۲۵
۳) ۲۵۰
۴) ۳۷۵

درس Box

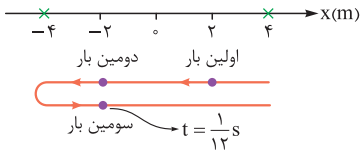
در حرکت هماهنگ سادهٔ سامانهٔ جرم ـ فنر، بسامد زاویه‌ای (ω) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \leftarrow \text{بسامد زاویه‌ای (rad / s)}$$
$$k \rightarrow \text{ثابت فنر (N/m)}$$
$$m \rightarrow \text{جرم (kg)}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مکان نوسانگر را در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۱۲}s$ پیدا می‌کنیم. با توجه به این‌که برای سومین بار نوسانگر از فاصلهٔ ۲ سانتی‌متری مبدأ عبور می‌کند، داریم:

$$x = A\cos\omega t = ۰/۰۴\cos(\omega t) \Rightarrow A = ۰/۰۴\ m = ۴\ cm$$



با توجه به مسیر حرکت، در می‌یابیم در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۱۲}s$ نوسانگر برای دومین بار از مکان $x = -۲cm$ عبور کرده است.

گام دوم: با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان و مکان نوسانگر در لحظهٔ t، بسامد زاویه‌ای (ω) را به دست می‌آوریم:

$$x = ۰/۰۴\cos(\omega t) \xrightarrow[t=\frac{۱}{۱۲}s]{x=-۲\ cm=-۰/۰۲\ m} -۰/۰۲ = ۰/۰۴\times\cos(\omega\times\frac{۱}{۱۲})$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{\omega}{۱۲}) = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow[\theta=\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}]{\text{برای دومین بار } \cos\theta=-\frac{۱}{۲} \text{ شده}} \frac{\omega}{۱۲} = \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow \omega = ۱۶\pi(rad/s)$$

گام سوم: جرم نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow[k=۱۶۰\ N/m]{\omega=۱۶\pi(rad/s)} ۱۶\pi = \sqrt{\frac{۱۶۰}{m}} \Rightarrow ۲۵۶\pi^۲ = \frac{۱۶۰}{m}$$

$$\xrightarrow{\pi^۲=۱۰} ۲۵۶۰ = \frac{۱۶۰}{m} \Rightarrow m = \frac{۱۶۰}{۲۵۶۰} = \frac{۱}{۱۶}kg\times\frac{۱۰۰۰\ g}{۱\ kg} = \frac{۱۰۰۰}{۱۶}g = ۶۲/۵\ g$$

۵۳ معادلهٔ نیرو ـ مکان یک نوسانگر هماهنگ ساده که روی پاره‌خطی به طول ۲۰cm در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $F=-30x$ است. انرژی جنبشی بیشینهٔ این نوسانگر چند ژول است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۶ ۳) ۱/۲ ۴) ۰/۳

Hint

اول دامنهٔ نوسان و به کمک آن نیروی بیشینه رو حساب کن. بعدش با داشتن دامنه و نیروی بیشینه، انرژی جنبشی بیشینه (انرژی مکانیکی نوسانگر) رو به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق نکتهٔ زیر دامنهٔ نوسان را به دست می‌آوریم:

نکته طول پاره‌خط نوسان دو برابر دامنهٔ نوسان است.

$$\text{پاره‌خط} = 2A \Rightarrow 2A = 20 \Rightarrow A = 10\,cm = 0/1\,m$$

گام دوم: نیروی بیشینهٔ نوسانگر را طبق نکتهٔ زیر به دست می‌آوریم:

نکته بیشینهٔ نیروی نوسانگر مربوط به حالتی است که نوسانگر بیشترین فاصله را از مبدأ داشته باشد؛ یعنی $x=\pm A$.

$$F=-30x \Rightarrow F_{max}=30A \xrightarrow{A=0/1\,m} F_{max}=30\times 0/1=3N$$

گام سوم: انرژی جنبشی بیشینهٔ نوسانگر که همان انرژی مکانیکی نوسانگر است را طبق نکتهٔ زیر حساب می‌کنیم:

نکته رابطهٔ انرژی مکانیکی و بیشینهٔ نیروی نوسانگر به صورت مقابل است:

$$\begin{cases} F_{max}=m\omega^2 A \\ E=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \end{cases} \Rightarrow E=\frac{1}{2}F_{max}A$$

$$K_{max}=E=\frac{1}{2}F_{max}A \xrightarrow[A=0/1\,m]{F_{max}=3N} K_{max}=\frac{1}{2}\times 3\times 0/1=0/15\,J$$

۵۴ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به جرم ۴۰۰g روی پاره‌خطی به طول ۲۰cm در حال نوسان است. اگر نوسانگر در هر دقیقه ۶۰ مرتبه طول پاره‌خط را طی کند، در لحظه‌ای که انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن برابر است، تکانهٔ آن در SI چند واحد است؟ ($\pi = 3$)

۱) $\frac{3\sqrt{2}}{50}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{20}$ ۳) $\frac{3\sqrt{2}}{25}$ ۴) $\frac{6\sqrt{2}}{25}$

درس Box

اگر نوسانگری در مدت زمان t، k بار پاره‌خط نوسان را طی کند، بسامد نوسان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

تعداد نوسان: $n = \frac{k}{2}$

بسامد (Hz): $f = \frac{n}{t} = \frac{k}{2t}$

بسامد زاویه‌ای (ω) نوسان از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

(ω: بسامد زاویه‌ای (rad/s)، f: بسامد (Hz)، T: دورهٔ تناوب (s))

تکانهٔ بیشینهٔ نوسانگر هماهنگ ساده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$p_{max} = mv_{max} \xrightarrow{v_{max} = A\omega} p_{max} = mA\omega$$

(p_{max}: بیشینهٔ تکانه $(\frac{kg.m}{s})$، m: جرم (kg)، A: دامنه (m)، ω: بسامد زاویه‌ای (rad/s))

نکته

در لحظه‌ای که انرژی‌های جنبشی و پتانسیل نوسانگر با هم برابرند، تکانهٔ نوسانگر، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر بیشینهٔ تکانه است:

$$p = \frac{\sqrt{2}}{2} p_{max}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بسامد نوسان و بسامد زاویه‌ای (ω) را به دست می‌آوریم:

$$f = \frac{k}{2t} \xrightarrow[t=60s]{k=60} f = \frac{60}{2\times 60} = \frac{1}{2}Hz$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi(rad/s)$$

گام دوم: بیشینهٔ تکانهٔ نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$p_{max} = mA\omega \xrightarrow[A=\frac{20}{2}=10cm=0/1m,\ \omega=\pi(rad/s)]{m=400g=0/4kg} p_{max} = 0/4\times 0/1\times \pi = 0/04\pi(\frac{kg.m}{s})$$

گام سوم: تکانهٔ نوسانگر را در لحظه‌ای که انرژی‌های جنبشی و پتانسیل نوسانگر با هم برابرند، طبق درس‌باکس به دست می‌آوریم:

$$p = \frac{\sqrt{2}}{2} p_{max} \xrightarrow[\pi=3]{p_{max}=0/04\pi(\frac{kg.m}{s})} p = \frac{\sqrt{2}}{2}\times 0/04\times 3 = 0/06\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{50}\frac{kg.m}{s}$$

۵۵ وزنه‌ای به جرم m به فنری بسته شده است. این سامانه با دامنهٔ A حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و انرژی مکانیکی آن $10J$ است. اگر وزنه‌ای به جرم $2m$ را به همان فنر ببندیم و با همان دامنهٔ A به نوسان در آوریم، انرژی مکانیکی این سامانه چند ژول می‌شود؟ (از اتلاف انرژی چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) $10\sqrt{2}$ ۴) ۲۰

درس Box

انرژی مکانیکی نوسانگر جرم ـ فنر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

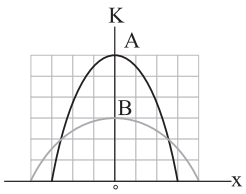
$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

(E: انرژی مکانیکی (J)، k: ثابت فنر (N/m)، A: دامنهٔ نوسان (m))

طبق این رابطه، درمی‌یابیم که انرژی مکانیکی نوسانگر فقط به ثابت فنر و دامنهٔ نوسان بستگی دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس، چون دامنهٔ نوسان و ثابت فنر تغییر نکرده، انرژی مکانیکی نوسانگر در حالت جدید علی‌رغم دو برابر شدن جرم جسم، تغییر نمی‌کند و همان $10\ J$ خواهد بود.

۵۶ نمودار انرژی جنبشی دو نوسانگر هماهنگ سادهٔ **A** و **B** برحسب مکان آن‌ها به شکل زیر است. اگر جرم دو نوسانگر، برابر باشد، کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ تندی بیشینه **(v)** و اندازهٔ شتاب بیشینهٔ **(a)** این دو نوسانگر درست است؟



الف) $\frac{v_A}{v_B} = ۲$

ب) $\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{۲}$

پ) $\frac{a_A}{a_B} = \frac{۸}{۳}$

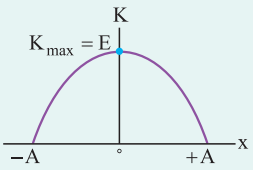
ت) $\frac{a_A}{a_B} = \frac{۴}{۳}$

۱) الف و پ ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

درس Box

نمودار انرژی جنبشی برحسب مکان نوسانگر هماهنگ ساده، مطابق شکل زیر است:



K: انرژی جنبشی

x: مکان نوسانگر

A: دامنهٔ نوسان

E: انرژی مکانیکی

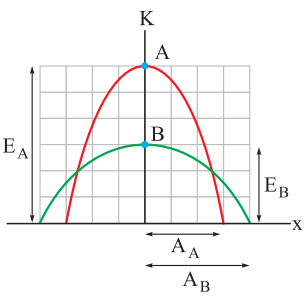
رابطهٔ بین انرژی مکانیکی و بیشینهٔ شتاب در نوسانگر هماهنگ ساده به صورت زیر است:

$$E = \frac{۱}{۲} m a_m A$$

(E: انرژی مکانیکی، m: جرم، a_m: بیشینهٔ شتاب، A: دامنه)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به نمودار انرژی جنبشی برحسب مکان نوسانگر، نسبت دامنه و بیشینهٔ انرژی جنبشی (انرژی مکانیکی) هر نوسانگر را به دست می‌آوریم:



$$\frac{A_A}{A_B} = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{K_{max_A}}{K_{max_B}} = \frac{E_A}{E_B} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

گام دوم: نسبت تندی بیشینهٔ دو نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$K = \frac{۱}{۲} m v^۲ \Rightarrow \frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B} \times (\frac{v_A}{v_B})^۲ \Rightarrow ۲ = ۱ \times (\frac{v_A}{v_B})^۲ \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{۲}$$

گام سوم: نسبت بیشینهٔ شتاب دو نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$E = \frac{۱}{۲} m a_m A \Rightarrow \frac{E_A}{E_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{a_A}{a_B} \times \frac{A_A}{A_B} \Rightarrow ۲ = ۱ \times \frac{a_A}{a_B} \times \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \frac{۸}{۳}$$

۵۷ طول آونگ ساده‌ای برابر $1\,m$ است. طول این آونگ چند سانتی‌متر و چگونه تغییر کند تا بسامد نوسان‌های آن $0/5\,Hz$ افزایش یابد؟ $(g = \pi^2\ N/kg)$

۱) ۲۵، کاهش یابد.
۲) ۷۵، کاهش یابد.
۳) ۲۵، افزایش یابد.
۴) ۷۵، افزایش یابد.

درس Box

بسامد آونگ ساده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f\ (Hz) \leftarrow \text{بسامد} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad \begin{matrix} \text{شتاب گرانش } (m/s^2) \rightarrow g \\ \text{طول آونگ } (m) \rightarrow L \end{matrix}$$

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به رابطهٔ $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$f_2 - f_1 = \frac{\sqrt{g}}{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{L_2}} - \frac{1}{\sqrt{L_1}}\right) \xrightarrow[g=\pi^2\ ,\ L_1=1\,m]{f_2-f_1=0/5\,Hz} 0/5 = \frac{\sqrt{\pi^2}}{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{L_2}} - \frac{1}{\sqrt{1}}\right)$$

$$\Rightarrow 0/5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{L_2}} - 1\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{L_2}} = 2 \Rightarrow \sqrt{L_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow L_2 = \frac{1}{4}\,m = 25\,cm$$

$$L_2 - L_1 = 25 - 100 = -75\,cm$$

بنابراین طول آونگ باید $75\,cm$ کاهش یابد.

۵۸ طول آونگ‌های سادهٔ **A**، **B**، **C** و **D** که از ریسمانی افقی آویزان هستند، به ترتیب برابر **۲۰ cm**، **۴۰ cm**، **۶۰ cm** و **۸۰ cm** است. اگر در ریسمان نوسان‌هایی افقی با دورهٔ تناوبی در گسترهٔ **۰/۸ s** تا **۱/۶ s** ایجاد شود، کدام آونگ‌ها به تشدید در می‌آیند؟ **($g = \pi^2\ m/s^2$)**

۱) A و B

۲) C و D

۳) A، B و C

۴) B، C و D

درس Box

شرط تشدید چیست؟

باید بسامد واداشته (f_d) با بسامد طبیعی ($f_\circ$) نوسانگر برابر باشد.

$$f_d = f_\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی

محدوده‌ای از طول آونگ که برای آن تشدید رخ می‌دهد را به دست می‌آوریم:

$$۰/۸ \le T \le ۱/۶ \xrightarrow{T=\frac{۱}{f}} ۰/۸ \le \frac{۱}{f} \le ۱/۶ \Rightarrow \frac{۵}{۸} \le f \le \frac{۵}{۴} \xrightarrow{f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}} \frac{۵}{۸} \le \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \le \frac{۵}{۴}$$

$$\xrightarrow{g=\pi^2(m/s^2)} \frac{۵}{۸} \le \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{\pi^2}{L}} \le \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{۵}{۸} \le \frac{۱}{\sqrt{۴L}} \le \frac{۵}{۴} \xrightarrow{()^2} \frac{۲۵}{۶۴} \le \frac{۱}{۴L} \le \frac{۲۵}{۱۶} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱۶}{۲۵} \le ۴L \le \frac{۶۴}{۲۵}$$

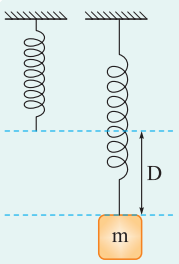
$$\xrightarrow{\times\frac{۱}{۴}} \frac{۴}{۲۵} \le L \le \frac{۱۶}{۲۵} \xrightarrow[\text{بر حسب cm}]{\times ۱۰۰} ۱۶ \le L \le ۶۴$$

بنابراین شرط تشدید این است که طول آونگ در بازهٔ **۱۶ cm** تا **۶۴ cm** باشد که بر این اساس، آونگ‌های **A**، **B** و **C** به تشدید درمی‌آیند.

۵۹ فنری به طول ۲۰ cm را از یک نقطه آویزان می‌کنیم و به سر دیگر آن وزنه‌ای بسته و آن را در راستای قائم به نوسان درمی‌آوریم. اگر بیشینه و کمینهٔ طول فنر در حین نوسان ۳۶ cm و ۲۴ cm باشد، بسامد زاویه‌ای نوسان‌های وزنه چند رادیان بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۱۰

درس Box



مطابق شکل مقابل، اگر فنری را از یک نقطه آویزان کنیم و به سر دیگر آن وزنه‌ای ببندیم، در این حالت طول فنر به اندازهٔ D افزایش می‌یابد تا وزنه به تعادل برسد. حال اگر این سامانه را از حال تعادل خارج کنیم تا شروع به نوسان کند، بسامد زاویه‌ای این نوسانگر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

وزنه در حال تعادل: $F_e = mg \xrightarrow{F_e = kD} kD = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{D}$

بسامد زاویه‌ای سامانهٔ وزنه ـ فنر: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow{k=\frac{mg}{D}} \omega = \sqrt{\frac{mg}{Dm}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{D}}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق نکتهٔ زیر طول فنر را در نقطهٔ تعادل به دست می‌آوریم:

نکته

در حرکت هماهنگ سادهٔ سامانهٔ جرم ـ فنر، طول فنر در نقطهٔ تعادل برابر است با میانگین بیشترین و کم‌ترین طول فنر یعنی $L = \frac{L_{min} + L_{max}}{۲}$.

$$L = \frac{L_{min} + L_{max}}{۲} = \frac{۲۴ + ۳۶}{۲} = ۳۰\ cm$$

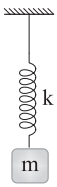
گام دوم: تغییر طول فنر در حالت تعادل وزنه نسبت به طول عادی فنر را حساب می‌کنیم:

$$D = L - L_۰ \xrightarrow[L_۰ = ۲۰\ cm]{L = ۳۰\ cm} D = ۳۰ - ۲۰ = ۱۰\ cm = ۰/۱\ m$$

گام سوم: بسامد زاویه‌ای سامانهٔ وزنه فنر را به دست می‌آوریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{D}} \xrightarrow[D = ۰/۱\ m]{g = ۱۰\ m/s^۲} \omega = \sqrt{\frac{۱۰}{۰/۱}} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰\ rad/s$$

۶۰ در شکل زیر، اگر جرم جسم متصل به فنر برابر m_1 باشد، جسم با دورهٔ تناوب ۰/۳s و اگر جرم جسم متصل به فنر برابر m_2 باشد، جسم با دورهٔ تناوب ۰/۴s در راستای قائم به طور هماهنگ ساده نوسان می‌کند. اگر جرم جسم متصل به فنر برابر $m_1 + m_2$ باشد، دورهٔ تناوب آن چند ثانیه می‌شود؟



۱) ۰/۳۲

۲) ۰/۵

۳) ۰/۲۴

۴) ۰/۱۸

درس Box

اگر به یک فنر یک بار وزنه‌ای به جرم m_1 و بار دیگر وزنه‌ای به جرم m_2 ببندیم و فنر به ترتیب با دورهٔ تناوب T_1 و T_2 نوسان کند، با بستن وزنه‌ای به جرم $m_1 + m_2$ به همان فنر، دورهٔ تناوب برابر است با:

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق رابطه‌ای که در درس‌باکس آورده‌ایم، می‌توانیم بنویسیم:

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} \xrightarrow[T_2 = 0/4\,s]{T_1 = 0/3\,s} T = \sqrt{0/3^2 + 0/4^2} = \sqrt{0/09 + 0/16} = \sqrt{0/25} = 0/5\,s$$

فیزیک یازدهم

۶۱ دو جسم خنثی و نارسانای **A** و **B** را با یکدیگر مالش می‌دهیم. اگر در حین مالش دو جسم، تعداد خالص الکترون مبادله‌شده بین دو جسم ۵×۱۰^{۱۰} باشد، با توجه به سری الکتریسیتهٔ مالشی زیر، بار جسم **A** بعد از مالش به چند نانوکولن می‌رسد؟ $(e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C)$

انتهای مثبت سری
A
B
انتهای منفی سری

۱) ۸

۲) ۸۰

۳) -۸

۴) -۸۰

Hint ابتدا به عنوان راهنمایی بدانید که بار جسم A مثبت خواهد شد (دلیلش رو توی درس‌باکس گفتیم!) حال با استفاده از رابطهٔ $(q=+ne)$ مقدار آن را محاسبه کنید. حواستون باشه تبدیل واحد به نانوکولن $(\times۱۰^{۹})$ رو فراموش نکنید.

درس Box

اگر دو جسم نارسانای خنثی را به یکدیگر مالش دهیم، یکی از آن‌ها الکترون از دست می‌دهد و دیگری الکترون دریافت می‌کند. جسمی که در جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی (تریبوالکتریک) به انتهای مثبت سری نزدیک‌تر است، الکترون‌خواهی کم‌تری دارد و در اثر مالش، الکترون از دست داده و بارش مثبت خواهد شد. به عنوان نمونه در جدول مقابل اگر پارچهٔ ابریشمی را به لاستیک مالش دهیم و هر دو خنثی باشند، پارچهٔ ابریشمی الکترون از دست داده و لاستیک الکترون می‌گیرد، در نتیجه پارچهٔ ابریشمی بار مثبت و لاستیک بار منفی خواهد داشت.

انتهای مثبت سری
ابریشم
لاستیک
انتهای منفی سری

دقت کنید که براساس اصل پایستگی بار الکتریکی در این تبادل بار، اندازهٔ بار هر دو جسم با هم برابر است. هم‌چنین بار الکتریکی، یک کمیت کوانتومی است؛ یعنی همواره مضرب درستی از یک مقدار پایه (بار بنیادی) بوده و هر مقدار دلخواهی نمی‌تواند داشته باشد.

$$q=\pm ne$$

q: بار الکتریکی (C)

n: تعداد الکترون مبادله‌شده بین دو جسم

e: بار بنیادی (C) و $e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C$

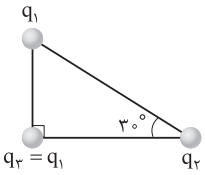
علامت $+$: برای جسمی که الکترون از دست داده است.

علامت $-$: برای جسمی که الکترون دریافت کرده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بار A در جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی به انتهای مثبت نزدیک‌تر است؛ بنابراین بار آن مثبت خواهد شد.

$$q=+ne \Rightarrow q=۵\times۱۰^{۱۰}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}=۸\times۱۰^{-۹}C=۸\,nC$$

۶۲ در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی رأس‌های یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارند. اگر اندازهٔ نیروی الکتریکی که بارهای q_1 و q_2 به بار q_3 وارد می‌کنند، یکسان و برابر F باشد، اندازهٔ نیروی الکتریکی که دو بار q_1 و q_2 به هم وارد می‌کنند، چند برابر F است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) ۴

Hint

ابتدا به کمک نسبت‌های مثلثاتی، نسبت بین اضلاع مثلث را به دست آورید. سپس نیروی وارد بر بار q_3 را از طرف بارهای q_1 و q_2 مساوی هم قرار دهید تا نسبت بین q_1، q_2 و q_3 مشخص شود. در نهایت نیروی بین بارهای q_1 و q_2 را محاسبه کنید تا نسبت نیروها را به دست آورید.

درس Box

۱) هر دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصلهٔ r به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند که این نیرو از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2}$$

F: اندازهٔ نیرو (N)

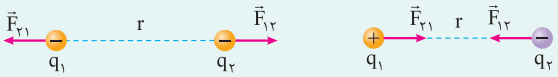
$k = ۹\times۱۰^۹$: ثابت کولن $(\frac{N.m^2}{C^2})$

r: فاصلهٔ دو بار از هم (m)

q_1 و q_2: بارهای الکتریکی (C)

۲) نیروی بین دو بار در حالتی که دو بار همنام هستند، از نوع دافعه (رانشی) و در حالتی که دو بار ناهمنام هستند، از نوع جاذبه (رباینی) است.

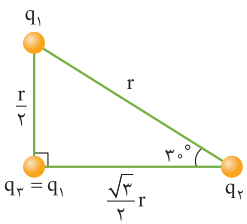
بنا بر قانون سوم نیوتون نیروی الکتروستاتیکی که دو بار بر یکدیگر وارد می‌کنند، هم‌اندازه و هم‌راستا ولی در خلاف جهت یکدیگرند. هم‌چنین این نیروها در امتداد خط واصل دو بار هستند.



$|F_{12}| = |F_{21}|$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به زوایای مثلث، نسبت اضلاع را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



گام دوم: نیروی وارد بر بار q_3 از طرف بارهای q_1 و q_2 را مساوی قرار می‌دهیم تا رابطهٔ بین بارهای q_1، q_2 و q_3 را به دست آوریم:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2}$$

$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow \frac{k|q_1||q_3|}{\frac{r^2}{۴}} = \frac{k|q_2||q_3|}{\frac{۳}{۴}r^2} \Rightarrow |q_1| = \frac{|q_2|}{۳} \xrightarrow{q_3=q_1} |q_3| = \frac{|q_2|}{۳}$$

گام سوم: اگر نیرویی که بار q_1 و q_2 به بار q_3 وارد می‌کنند F و نیرویی که دو بار q_1 و q_2 به هم وارد می‌کنند را F' بنامیم، خواهیم داشت:

$$\frac{F'}{F} = \frac{\frac{k|q_1||q_2|}{r^2}}{\frac{۴k|q_1||q_2|}{۳r^2}} = \frac{۳}{۴}$$

۶۳ ذره‌ای به جرم ۲ g و بار الکتریکی $-۵\ \mu C$ در میدان الکتریکی $\vec{E} = (۱۰^۴\ N/C)\vec{i} - (۲\times۱۰^۴\ N/C)\vec{j}$ قرار دارد. شتاب این ذره $(\vec{a})$ برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (به ذره به‌جز نیروی الکتریکی ناشی از میدان $\vec{E}$، نیروی دیگری وارد نمی‌شود.)

۱) $\vec{a} = ۲۵\vec{i} - ۵۰\vec{j}$

۲) $\vec{a} = -۲۵\vec{i} + ۵۰\vec{j}$

۳) $\vec{a} = ۲/۵\vec{i} - ۵\vec{j}$

۴) $\vec{a} = -۲/۵\vec{i} + ۵\vec{j}$

Hint ابتدا اندازهٔ نیروی وارد بر بار q را از رابطهٔ $(F = Eq)$ به دست آورید، سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون $(a = \frac{F}{m})$ شتاب وارد بر ذره را محاسبه کنید.

درس Box هرگاه بار q درون میدان الکتریکی E قرار بگیرد و نیروی F از طرف میدان الکتریکی به آن وارد شود، داریم:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{|q_۰|}$$

E: میدان الکتریکی (N/C)

F: نیروی وارد بر بار از طرف میدان الکتریکی (N)

$q_۰$: اندازهٔ بار الکتریکی (C)

جهت میدان الکتریکی در هر نقطه هم‌جهت با نیروی وارد بر بار مثبت در آن نقطه است. به عبارت دیگر نیروی وارد بر بار مثبت درون میدان هم‌جهت با میدان و نیروی وارد بر بار منفی درون میدان در خلاف جهت میدان است.

هرگاه به جسمی به جرم m نیروی خالص F وارد شود، جسم شتابی هم‌جهت با نیروی واردشده می‌گیرد.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m}$$

a: شتاب $(m/s^۲)$

F_{net}: نیرو (N)

m: جرم جسم (kg)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا نیروی وارد بر ذرهٔ باردار از طرف میدان را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{F} = ۵\times۱۰^{-۶}(۱۰^۴\vec{i} - ۲\times۱۰^۴\vec{j}) = ۵\times۱۰^{-۲}\vec{i} - ۱۰\times۱۰^{-۲}\vec{j}$$

که با توجه به علامت منفی بار، جهت نیرو قرینه می‌شود:

$$\vec{F} = -۵\times۱۰^{-۲}\vec{i} + ۱۰\times۱۰^{-۲}\vec{j}$$

گام دوم: با استفاده از قانون دوم نیوتون شتاب ذره را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{a} = \frac{-۵\times۱۰^{-۲}\vec{i} + ۱۰\times۱۰^{-۲}\vec{j}}{۲\times۱۰^{-۳}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{-۵\times۱۰^{-۲}}{۲\times۱۰^{-۳}}\vec{i} + \frac{۱۰\times۱۰^{-۲}}{۲\times۱۰^{-۳}}\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = -۲۵\vec{i} + ۵۰\vec{j}$$

گول نخوری اگه به علامت منفی بار توجه نکنی، به گزینهٔ نادرست (۱) می‌رسی.

۶۴ در صفحهٔ مختصات، دو بار الکتریکی نقطه‌ای که بار هر یک $-۳۲nC$ است، در مکان‌های $(۱m,۰)$ و $(۹m,۰)$ قرار دارند. میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M به مختصات $(۵m,۴m)$ برحسب نیوتون بر کولن کدام است؟ $(k = ۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$ و بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به صورت $\vec{j}$ / $\vec{i}$ است.)

۱) $۹\sqrt{۲}\,\vec{i}$

۲) $-۹\sqrt{۲}\,\vec{j}$

۳) $۱۸\,\vec{i}$

۴) $-۱۸\,\vec{j}$

Hint

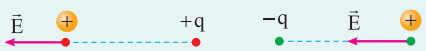
ابتدا محل هر بار و نقطهٔ M را روی دستگاه مختصات مشخص کنید، سپس میدان هر بار را از رابطهٔ $(E = \frac{k|q|}{r^۲})$ به دست آورید و در نهایت میدان خالص در نقطهٔ M را با توجه به رابطهٔ $(E_T = \sqrt{E_۱^۲ + E_۲^۲})$ به دست آورید.

درس Box

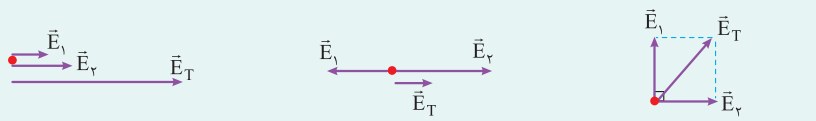
۱) میدان الکتریکی حاصل از بار q در فضای اطراف آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{k|q|}{r^۲}$$

برای تعیین جهت میدان در هر نقطه، فرض می‌کنیم در آن نقطه یک بار مثبت (بار آزمون) وجود دارد، در نتیجه جهت میدان در آن نقطه هم‌جهت با نیروی وارد بر بار آزمون از طرف بار q است.



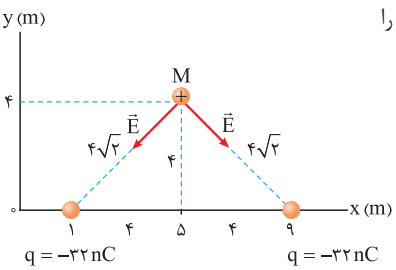
۲) برای محاسبهٔ برایند دو بردار (مثلاً دو میدان الکتریکی) در کتاب درسی سه حالت مطابق شکل‌های زیر وجود دارد:



دو بردار عمود بر هم	دو بردار هم‌راستا و خلاف جهت	دو بردار هم‌جهت و هم‌راستا
$E_T = \sqrt{E_۱^۲ + E_۲^۲}$	$E_T = \lvert E_۲ - E_۱ \rvert$	$E_T = E_۱ + E_۲$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا درون یک دستگاه مختصات، موقعیت بارهای الکتریکی و نقطهٔ M را مشخص کرده و میدان حاصل از بارهای الکتریکی را در نقطهٔ M رسم می‌کنیم:



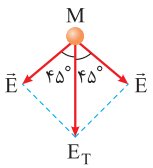
گام دوم: میدان الکتریکی حاصل از بارها و میدان خالص را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$E = \frac{k|q|}{r^۲}$$

$$E_۱ = E_۲ = \frac{۹\times۱۰^۹ \times ۳۲\times۱۰^{-۹}}{(۴\sqrt{۲})^۲} = ۹N/C$$

$$E_T = \sqrt{E_۱^۲ + E_۲^۲} = \sqrt{۹^۲ + ۹^۲} = ۹\sqrt{۲}\ N/C$$

با توجه به جهت میدان خالص:



$$\vec{E}_T = (-۹\sqrt{۲}\,\vec{j})\,N/C$$

۶۵ در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی خط راستی قرار دارند و نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ برابر صفر است. اگر جای بارهای $q_۲$ و $q_۳$ عوض شود، بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ برابر $۵/۴\,N$ می‌شود. $q_۲$ چند میکروکولن است؟

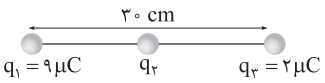
$$(k = ۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$$

۱) $+۴$

۲) -۴

۳) -۸

۴) $+۸$

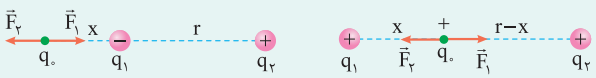


Hint ابتدا با توجه به این‌که بار $q_۳$ در تعادل است، نیروهای وارد بر آن را نوشته و برابر هم قرار دهید: $|F_{۱۳}| = |F_{۲۳}|$. در این‌جا سعی کنید رابطه‌ای بین بار $q_۲$ و فاصلهٔ $q_۲$ و $q_۳$ به دست آورید. سپس محل بارهای $q_۲$ و $q_۳$ را عوض کنید و برایند نیروهای وارد بر بار $q_۲$ را برابر $۵/۴\,N$ قرار دهید تا مقدار $q_۲$ به دست آید.

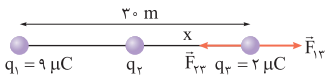
درس Box هرگاه دو بار الکتریکی $q_۱$ و $q_۲$ روی خط راست و در فاصلهٔ r از یکدیگر ثابت شده باشند و بخواهیم روی خط واصل آن‌ها یا امتداد خط واصل آن‌ها بار آزمون $(+q_۱)$ را قرار دهیم تا برایند نیروهای وارد بر آن صفر باشد، باید از طرف بارهای $q_۱$ و $q_۲$ دو نیروی هم‌اندازه و خلاف جهت به آن وارد شود؛ بنابراین:

اگر بارها همنام باشند، بار $q_۰$ بین آن‌ها و نزدیک به بار کوچک‌تر قرار می‌گیرد و اگر بارها ناهمنام باشند، بار $q_۰$ خارج از آن‌ها و سمت بار کوچک‌تر قرار می‌گیرد. (فرض: $|q_۱| < |q_۲|$)

$$|\vec{F}_۱| = |\vec{F}_۲|$$



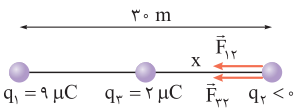
پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** مطابق شکل، با توجه به این‌که بار $q_۳$ در تعادل است، نیروی الکتریکی خالص وارد بر آن از طرف بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را به دست می‌آوریم تا مقدار x برحسب $q_۲$ مشخص شود.



$$|\vec{F}_{۱۳}| = |\vec{F}_{۲۳}| \Rightarrow \frac{k\times۹\times۲}{(۳۰)^۲} = \frac{k\times|q_۲|\times۲}{x^۲} \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰|q_۲| \Rightarrow x = ۱۰\sqrt{|q_۲|}$$

چون بار $q_۱$، بار $q_۳$ را دفع می‌کند، بار $q_۲$ باید بار $q_۳$ را جذب کند؛ بنابراین بار $q_۲$ منفی است.

گام دوم: حال محل قرارگیری بارهای $q_۲$ و $q_۳$ را عوض می‌کنیم تا برایند نیروهای وارد بر آن را به دست آوریم:



$$F_{۱۲} = \frac{۹۰\times۹\times|q_۲|}{۹۰۰} = ۰/۹|q_۲|\ ,\ F_{۳۲} = \frac{۹۰\times۲\times|q_۲|}{۱۰۰|q_۲|} = ۱/۸N$$

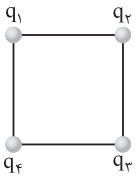
با توجه به این‌که نیروها هم‌جهت هستند:

$$F_T = F_{۱۲} + F_{۳۲} \Rightarrow ۵/۴ = ۰/۹|q_۲| + ۱/۸ \Rightarrow ۰/۹|q_۲| = ۳/۶ \Rightarrow |q_۲| = ۴\mu C$$

بار $q_۲$ منفی است پس:

$$q_۲ = -۴\mu C$$

۶۶ در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی رأس‌های مربعی قرار دارند. اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر بار q_1 از طرف هر یک از بارهای دیگر، یکسان است. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 برابر صفر باشد، $\left|\frac{q_1}{q_3}\right|$ کدام است؟



۱) $\sqrt{2}$

۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۲

Hint

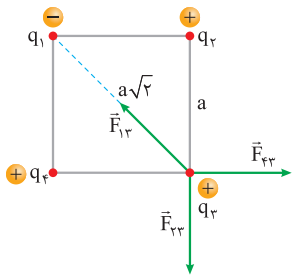
ابتدا اندازهٔ نیروهای F_{31} و F_{21} را محاسبه کرده و برابر با هم قرار دهید تا رابطه‌ای بین q_2 و q_3 بیابید. سپس نیروی خالص وارد بر بار q_3 را مساوی صفر قرار دهید تا رابطه‌ای بین q_2 و q_1 به دست آید. حال با مساوی قرار دادن این نتایج، نسبت $\left|\frac{q_1}{q_3}\right|$ مشخص می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نیروی وارد بر بار q_1 را از طرف بارهای q_2 و q_3 برابر قرار می‌دهیم تا ارتباط بین این بارها را به دست آوریم:

$$|F_{31}|=|F_{21}| \Rightarrow \frac{k|q_1||q_3|}{2a^2}=\frac{k|q_2||q_1|}{a^2} \Rightarrow |q_2|=\frac{|q_3|}{2}$$

گام دوم: حال اگر نیروی خالص وارد بر بار q_3 برابر صفر باشد، بارهای q_2 و q_4 که با بار q_3 در امتداد یک ضلع هستند، همنام با بار q_3 و بار q_1 که در امتداد قطر مربع با q_3 است، با آن ناهمنام می‌باشد (یا برعکس) و اندازهٔ نیروی خالص وارد بر بار q_3 از طرف بارهای q_2 و q_4 برابر با نیروی وارد بر بار q_3 از طرف بار q_1 می‌باشد.



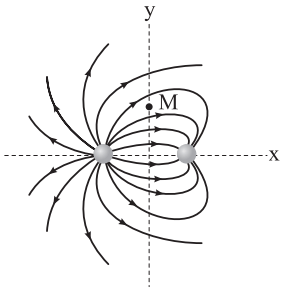
$$F_{43}=F_{23}=\frac{k|q_2||q_3|}{a^2} \Rightarrow F_{net_{4,2}}=\sqrt{F_{43}^2+F_{23}^2}=\frac{\sqrt{2}k|q_2||q_3|}{a^2}$$

$$F_{13}=\frac{k|q_1||q_3|}{2a^2} \xrightarrow{F_{net_{4,2}}=F_{13}} \frac{\sqrt{2}k|q_2||q_3|}{a^2}=\frac{k|q_1||q_3|}{2a^2} \Rightarrow |q_2|=\frac{1}{2\sqrt{2}}|q_1|$$

گام سوم: از مساوی قرار دادن نتایج به‌دست‌آمده در گام اول و دوم:

$$\frac{|q_3|}{2}=\frac{|q_1|}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \left|\frac{q_1}{q_3}\right|=\sqrt{2}$$

۶۷ خطوط میدان الکتریکی اطراف دو کرهٔ فلزی باردار که روی محور x و در فاصلهٔ یکسان تا مبدأ قرار دارند، به شکل مقابل است. اگر دو کره را به هم تماس داده و سپس هر یک را در مکان قبلی خود قرار دهیم، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M در چه جهتی خواهد بود؟



۱) در جهت محور x

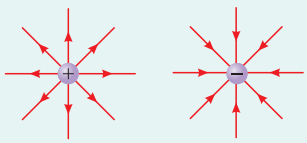
۲) در خلاف جهت محور x

۳) در جهت محور y

۴) در خلاف جهت محور y

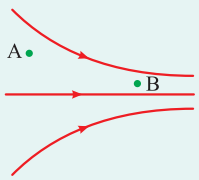
درس Box

۱) تجسم میدان الکتریکی: برای نمایش نقش میدان الکتریکی در اطراف بارها از خطوط میدان الکتریکی کمک می‌گیریم. همان‌طور که می‌دانیم، برای تعیین جهت میدان الکتریکی در هر نقطه، یک بار مثبت در آن نقطه قرار می‌دهیم و جهت میدان الکتریکی، هم‌جهت با نیروی وارد بر بار مثبت است. به همین دلیل است که خطوط میدان الکتریکی همواره از بار مثبت خارج شده و به بار منفی وارد می‌شود.



۲) ویژگی‌های خطوط میدان الکتریکی:

- تراکم خطوط میدان الکتریکی در هر نقطه نشانگر اندازهٔ میدان است. یعنی هر جا که خطوط میدان به هم نزدیک‌تر و فشرده‌تر هستند، میدان قوی‌تر است.

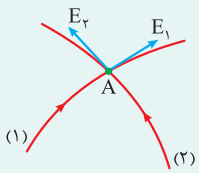


$E_B > E_A$

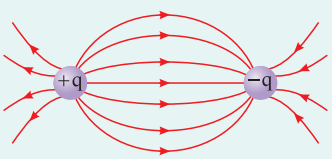
- خط مماس بر خط میدان الکتریکی در هر نقطه، جهت میدان در آن نقطه را نشان می‌دهد.



- از هر نقطهٔ میدان الکتریکی فقط یک خط میدان می‌گذرد؛ به عبارت دیگر خطوط میدان الکتریکی یکدیگر را قطع نمی‌کنند. اگر خطوط میدان الکتریکی یکدیگر را قطع کنند، چون دو مماس قابل رسم است، مطابق شکل، میدان در آن‌جا دارای یک جهت مشخص نیست و چنین چیزی امکان‌پذیر نمی‌باشد.

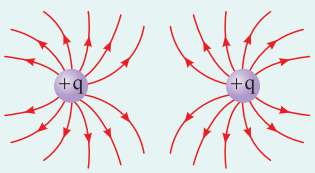


در شکل‌های زیر، میدان الکتریکی برای چند حالت مهم نشان داده شده است:



میدان الکتریکی در اطراف یک دو قطبی الکتریکی

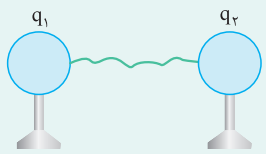
$|q_-| = |q_+|$



میدان الکتریکی در اطراف یک تک‌قطبی الکتریکی

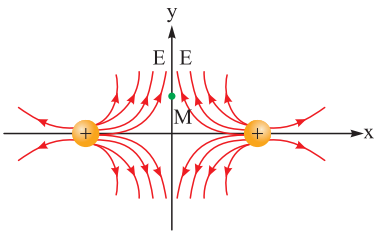
$|q_+| = |q_+|$

۳) هرگاه دو کرهٔ فلزی رسانای هم‌اندازه و باردار که روی پایهٔ عایق قرار دارند را به یکدیگر تماس دهیم، بین آن‌ها تبادل بار صورت می‌گیرد تا زمانی که بار کره‌ها با یکدیگر برابر شوند. دقت کنید براساس اصل پایستگی بار الکتریکی، مجموع بار کره‌ها قبل و بعد از اتصال با یکدیگر برابر است. هم‌چنین علامت بار کره‌ها پس از اتصال یکسان و هم‌علامت با بار کره‌ای که مقدارش بیشتر بوده می‌شود.



$$\Rightarrow q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔



با توجه به شکل سؤال، متوجه می‌شویم که بار کرهٔ سمت چپ مثبت و بار کرهٔ سمت راست منفی است، زیرا جهت میدان همواره از بار مثبت به بار منفی است. هم‌چنین بار کرهٔ سمت چپ بیشتر از کرهٔ سمت راست است، زیرا در اطراف آن خطوط میدان به هم نزدیک‌تر هستند؛ بنابراین پس از اتصال، بار هر دو کره مثبت و به دلیل هم‌اندازه‌بودن کره‌ها، بار آن‌ها مساوی خواهد شد.

همان‌طور که در شکل می‌بینید، خط مماس بر میدان هر دو بار در نقطهٔ M رو به بالا است؛ بنابراین میدان خالص در نقطهٔ M در جهت محور y خواهد بود.

۶۸ در شکل زیر، ذرهٔ باردار مثبت و کوچکی را از نقطهٔ **A** به سمت کرهٔ بارداری که روی پایهٔ عایقی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم و در نقطهٔ **B** قرار می‌دهیم. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟



الف) در این جابه‌جایی، کار نیروی الکتریکی وارد بر ذره، مثبت است.

ب) در این جابه‌جایی، انرژی پتانسیل الکتریکی ذره افزایش می‌یابد.

پ) در این جابه‌جایی، اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره کاهش می‌یابد.

ت) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ **B**، بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ **A** است.

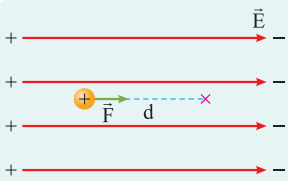
۱) الف ـ پ　　۲) الف ـ ت

۳) ب ـ پ　　۴) ب ـ ت

Hint درس‌باکس را به دقت مطالعه کرده و سعی کنید عبارات درست را بیابید.

درس Box

۱) همان‌طور که قبلاً گفتیم اگر بار الکتریکی q_0 درون میدان الکتریکی یکنواخت قرار بگیرد، این میدان بر بار q_0 نیرو وارد می‌کند. حال اگر این بار الکتریکی در اثر نیروی میدان جابه‌جا شود، می‌توانیم **کار انجام‌شده توسط میدان** را به صورت زیر محاسبه کنیم:



$$W_{\text{میدان}} = E\,|q_0|\,d\cos\theta$$

W : کار میدان الکتریکی (J)

E : میدان الکتریکی (N/C)

q_0 : بار الکتریکی (C)

d : جابه‌جایی (m)

θ : زاویهٔ بین جهت نیرو و جهت جابه‌جایی

۲) **تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی:**

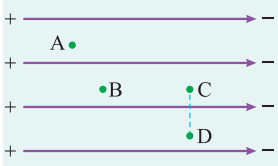
اگر بار الکتریکی، درون میدان الکتریکی یکنواخت جابه‌جا شود (توسط نیروی الکتریکی و یا توسط نیروی خارجی) روی آن کار انجام می‌شود و این کار برابر با اندازهٔ تغییرات انرژی پتانسیل بار است.

اگر بار الکتریکی در جهت تمایل خود در میدان جابه‌جا شود، $\Delta U < 0$ و اگر بار الکتریکی در خلاف تمایل خود در میدان جابه‌جا شود، $\Delta U > 0$ است. $|\Delta U| = |W|$

بار الکتریکی منفی
- در جهت میدان حرکت کند $\Delta U > 0$
- خلاف جهت میدان حرکت کند $\Delta U < 0$

بار الکتریکی مثبت
- در جهت میدان حرکت کند $\Delta U < 0$
- خلاف جهت میدان حرکت کند $\Delta U > 0$

۳) **پتانسیل الکتریکی:**



این کمیت از ویژگی‌های میدان الکتریکی است و ارتباطی به حضور یا عدم حضور بار الکتریکی درون میدان ندارد. به طوری که درون میدان، پتانسیل الکتریکی در نزدیکی صفحهٔ مثبت بیشتر از پتانسیل در نزدیکی صفحهٔ منفی است؛ پس با حرکت در جهت میدان، پتانسیل کاهش می‌یابد و بالعکس با حرکت در خلاف جهت میدان، پتانسیل افزایش می‌یابد.

$$V_A > V_B > V_C = V_D$$

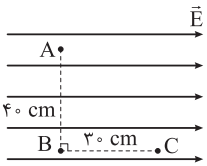
دقت کنید که در یک راستای عمود بر میدان، پتانسیل الکتریکی یکسان است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به شکل، جهت میدان الکتریکی کره به سمت خارج آن است، زیرا بار کره مثبت است؛ پس نیروی وارد بر ذرهٔ باردار از B به سمت A بوده و خلاف جهت حرکت آن می‌باشد $(\theta = 180^\circ)$ و کار انجام‌شده توسط نیروی الکتریکی روی ذرهٔ باردار، منفی است. (عبارت «الف» نادرست است.) $(W = Fd\cos\theta < 0)$

چون حرکت ذرهٔ باردار در خلاف جهت تمایل آن است (بار مثبت تمایل ندارد خلاف جهت میدان حرکت کند.) انرژی پتانسیل آن افزایش می‌یابد. (عبارت «ب» صحیح است.)

همان‌طور که می‌دانید، هر چه به کره نزدیک شویم، اندازهٔ میدان نیز افزایش می‌یابد، در نتیجه براساس رابطهٔ $(F = E\,|q|)$ اندازهٔ نیروی وارد بر ذرهٔ باردار افزایش یافته، پس عبارت «پ» نادرست است و به دلیل این‌که نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ A به کرهٔ (با بار مثبت) ایجادکنندهٔ میدان نزدیک‌تر است و پتانسیل بار مثبت همواره بیشتر است، پتانسیل نقطهٔ B از A بیشتر بوده و عبارت «ت» صحیح است.

۶۹ در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -۲\,\mu C$ را در میدان الکتریکی یکنواختی با بزرگی $E = ۴۰۰۰\,N/C$ از نقطهٔ A تا نقطهٔ C جابه‌جا می‌کنیم. اختلاف پتانسیل الکتریکی این دو نقطه $(V_C - V_A)$ چند کیلوولت است؟



۱) ۱/۲

۲) −۱/۲

۳) ۲

۴) −۲

Hint ابتدا از رابطهٔ $W = E|q|d\cos\theta$ کار مراحل AB و AC و در نتیجه کار کل AC را به دست آورید و برابر ΔU بگذارید. حال می‌توانید با استفاده از رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ اختلاف پتانسیل بین نقاط A و C را تعیین کنید. برای تشخیص درست علامت‌های ΔU و ΔV حتماً درس‌باکس زیر را به دقت مطالعه کنید.

درس Box

۱) اختلاف پتانسیل الکتریکی:

اگر بار الکتریکی q درون میدان الکتریکی از نقطهٔ (۱) به (۲) منتقل شود و انرژی پتانسیل آن از $U_۱$ به $U_۲$ برسد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطهٔ (۱) و (۲) از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$V_۲ - V_۱ = \frac{U_۲ - U_۱}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

ΔV: اختلاف پتانسیل دو نقطه (V)

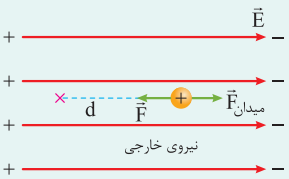
ΔU: تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J) (لزوماً با علامتش باید لحاظ شود)

q: بار الکتریکی (C)

اگر بار الکتریکی $q_۰$ را درون میدان الکتریکی یکنواخت با نیرویی هم‌اندازه با نیروی الکتریکی میدان اما در خلاف جهت آن جابه‌جا کنیم، برای این جابه‌جایی کار انجام داده‌ایم که از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$|\vec{F}_{\text{نیروی خارجی}}| = |\vec{F}_{\text{میدان}}| = |\vec{E}|\,|q_۰|$$

$$W_{\text{نیروی خارجی}} = |\vec{E}|\,|q_۰|\,|\vec{d}\cos\theta$$



$W_{\text{نیروی خارجی}}$: کار نیروی خارجی (J)

E: میدان الکتریکی $(\frac{N}{C})$

$q_۰$: بار الکتریکی (C)

d: جابه‌جایی (m)

θ: زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی

$W > ۰ \xleftarrow{\cos\theta > ۰} ۰ < \theta < ۹۰^\circ$

$W < ۰ \xleftarrow{\cos\theta < ۰} ۹۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا در این جابه‌جایی، کار نیروی خارجی که هم‌اندازه با نیروی میدان و در خلاف جهت آن است را محاسبه می‌کنیم:

$$W_{AC} = W_{AB} + W_{BC} \xrightarrow{\theta = ۹۰^\circ \Rightarrow \cos\theta = ۰} W_{AB} = ۰$$

$$W_{BC} = E|q|d\cos\theta \Rightarrow W_{BC} = ۴۰۰۰ \times ۲\times۱۰^{-۶} \times ۳۰\times۱۰^{-۲} \times ۱ = ۲۴\times۱۰^{-۴}\,J$$

$$W_{AC} = ۰ + ۲۴\times۱۰^{-۴} = ۲۴\times۱۰^{-۴}\,J \xrightarrow{\text{بار خلاف تمایل خود حرکت کرده}} \Delta U > ۰\ ,\ \Delta U = ۲۴\times۱۰^{-۴}\,J$$

گام دوم: اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و C را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{۲۴\times۱۰^{-۴}}{-۲\times۱۰^{-۶}} = -۱۲\times۱۰^{۲}\,V = -۱/۲\,kV$$

تیزبازی

اگر قبل از عددگذاری در روابط، آن‌ها را با کمیت بنویسید و کمیت‌های یکسان را ساده کنید، سریع‌تر به پاسخ می‌رسید.

$$|\Delta V| = \frac{\Delta U}{q} \xrightarrow{|\Delta U| = |W| = Eqd} |\Delta V| = \frac{E \cancel{q} d}{\cancel{q}} = Ed$$

$$|\Delta V| = ۴۰۰۰ \times ۳۰ \times ۱۰^{-۲} = ۱۲ \times ۱۰^{۲} V \xrightarrow[\Delta V < ۰]{\text{بار در جهت میدان حرکت کرده}} \Delta V = -۱۲ \times ۱۰^{۲} V = -۱/۲ kV$$

۷۰ بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -2mC$ را از نقطهٔ **A** با پتانسیل الکتریکی $10V$ تا نقطهٔ **B** جابه‌جا می‌کنیم. اگر در این جابه‌جایی کار نیروی الکتریکی برابر $-0/08J$ باشد، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ **B** چند ولت است؟

۱) ۳۰ ۲) ۵۰ ۳) -30 ۴) -50

Hint

تغییرات انرژی پتانسیل را با قرینهٔ کار نیروی الکتریکی برابر قرار دهید و سپس با استفاده از رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ اختلاف پتانسیل نقاط A و B را مشخص کنید و در نهایت پتانسیل نقطهٔ B را از رابطهٔ $(\Delta V = V_B - V_A)$ به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

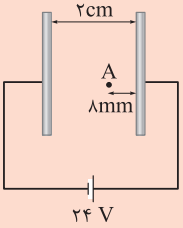
با توجه به این‌که کار نیروی الکتریکی منفی است، نتیجه می‌گیریم بار الکتریکی، خلاف جهت تمایل خود حرکت کرده؛ بنابراین $\Delta U > 0$ است.

$$|W_{\text{نیروی الکتریکی}}| = |\Delta U| \xrightarrow{\Delta U = -W} \Delta U = +0/08\ J$$

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{8\times10^{-2}}{-2\times10^{-3}} = -40V$$

$$\Delta V = V_B - V_A \Rightarrow -40 = V_B - 10 \Rightarrow V_B = -30V$$

۷۱ در شکل زیر، دو صفحهٔ رسانای موازی به باتری وصل است. بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -5\ mC$ را در نقطهٔ A رها می‌کنیم. از این لحظه تا لحظهٔ رسیدن آن به یکی از صفحه‌ها، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند میلی‌ژول و چگونه تغییر می‌کند؟ (از اثر وزن ذره صرف نظر کنید.)



۱) ۴۸، کاهش می‌یابد.

۲) ۴۸، افزایش می‌یابد.

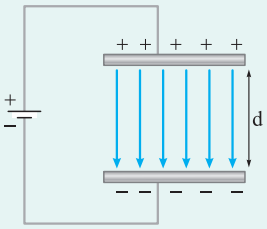
۳) ۷۲، کاهش می‌یابد.

۴) ۷۲، افزایش می‌یابد.

Hint ابتدا با استفاده از رابطهٔ میدان بین دو صفحه $(E = \frac{V}{d})$ اختلاف پتانسیل بین نقطهٔ A و صفحهٔ مثبت را به دست آورید. سپس با استفاده از رابطهٔ $\Delta U = \Delta V q$ تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی بار را محاسبه کنید.

درس Box

بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحهٔ فلزی موازی که به یک باتری با اختلاف پتانسیل V متصل هستند، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

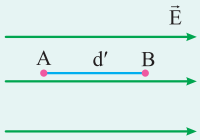


$$E = \frac{V}{d}$$

E = میدان الکتریکی (N/C)

V : اختلاف پتانسیل بین دو صفحه (V)

d : فاصلهٔ بین دو صفحه (m)



دقت داشته باشید چون درون یک میدان الکتریکی یکنواخت، اندازهٔ میدان در همهٔ نقاط با هم برابر است، پس اگر اندازهٔ اختلاف پتانسیل دو نقطهٔ A و B مطابق شکل برابر $|\Delta V_{AB}|$ باشد، بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت موجود در فضا برابر است با:

$$E = \frac{|\Delta V_{AB}|}{d'}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: میدان بین دو صفحه، یکنواخت و در همه‌جا یکسان است؛ بنابراین اختلاف پتانسیل بین نقطهٔ A و صفحهٔ مثبت را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$E_{\text{یکنواخت}} = \frac{|\Delta V_{\text{دو صفحه}}|}{d_{\text{صفحه}}} = \frac{|\Delta V_{\text{نقطهٔ A و صفحهٔ مثبت}}|}{d_{\text{نقطهٔ A و صفحهٔ مثبت}}} \Rightarrow \frac{|۲۴|}{۲۰} = \frac{|\Delta V_{\text{نقطهٔ A و صفحهٔ مثبت}}|}{۸} \Rightarrow |\Delta V_{\text{نقطهٔ A و صفحهٔ مثبت}}| = \frac{۴۸}{۵} V$$

دقت کنید چون در حرکت از نقطهٔ A تا صفحهٔ مثبت، پتانسیل افزایش می‌یابد: $\Delta V_{\text{نقطهٔ A و صفحهٔ مثبت}} = +\frac{۴۸}{۵} V$.

گام دوم: حال، تغییرات انرژی پتانسیل را در حرکت از نقطهٔ A تا صفحهٔ مثبت به دست می‌آوریم:

$$\Delta U = \Delta V q \Rightarrow \Delta U = \frac{۴۸}{۵} \times -۵ \times ۱۰^{-۳} = -۴۸ \times ۱۰^{-۳}\ J \times ۱۰^{۳} = -۴۸\ mJ$$

۷۲ در شکل زیر، دو صفحهٔ فلزی افقی به دو سر یک باتری با اختلاف پتانسیل الکتریکی معین وصل هستند و ذرهٔ بارداری در میان این دو صفحه معلق است. اگر فاصلهٔ بین دو صفحه دو برابر شود، ذره با شتاب چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی شروع به حرکت می‌کند؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) ۵، بالا
۲) ۵، پایین
۳) ۱۰، بالا
۴) ۱۰، پایین

Hint در حالت اول که ذرهٔ باردار معلق است $(F_۱ = mg)$. در حالت دوم با استفاده از رابطهٔ $\frac{E_۲}{E_۱} = \frac{d_۱}{d_۲}$ و همچنین $\frac{F_۲}{F_۱} = \frac{E_۲}{E_۱}$ محاسبه کنید که نیروی وارد بر ذرهٔ باردار از طرف میدان بین صفحات چند برابر می‌شود. سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون $(F_{net} = ma)$ شتاب حرکت ذره و جهت آن را تعیین کنید.

درس Box اگر ذره‌ای به جرم m در یک فضا در حال تعادل (معلق) باشد، باید نیروی خالص وارد بر آن صفر شود. در این‌صورت علاوه بر وزن آن که رو به پایین است، نیروی دیگری به آن وارد می‌شود که این دو نیرو هم‌اندازه و خلاف جهت یکدیگر هستند.



$|\vec{F}| = |m\vec{g}|$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در حالت اول که ذرهٔ باردار q در میان دو صفحه معلق است، داریم:



$F_۱ = mg$

حال اگر فاصلهٔ دو صفحه را دو برابر کنیم، داریم:

$$\xrightarrow{E=\frac{V}{d}} \frac{E_۲}{E_۱} = \frac{d_۱}{d_۲} \xrightarrow{d_۲=۲d_۱} \frac{E_۲}{E_۱} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{F=Eq} \frac{F_۲}{F_۱} = \frac{E_۲}{E_۱} = \frac{۱}{۲}$$

با نصف‌شدن نیروی $F_۱$، مقدار آن از وزن ذرهٔ باردار کم‌تر شده؛ بنابراین نیروی خالص رو به پایین خواهد بود:

$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - \frac{۱}{۲}F_۱ = ma \xrightarrow{F_۱=mg} \frac{۱}{۲}mg = ma \xrightarrow{g=۱۰N/kg} a = ۵\ m/s^۲$$

۷۳ ذره‌ای با بار الکتریکی q در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی یکنواختی با تندی اولیهٔ v_0 پرتاب شده و پس از طی مسافت d، متوقف می‌شود. اگر این ذره، در جهت خطوط همین میدان الکتریکی با تندی v_0 پرتاب شود، پس از طی مسافت $3d$، تندی آن به v می‌رسد. v چند برابر v_0 است؟ (شتاب ذره ناشی از تأثیر میدان الکتریکی است.)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

Hint تغییرات انرژی جنبشی ذرهٔ باردار را در هر دو حالت از رابطهٔ $\Delta K = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$ به دست آورید و سپس برای هر مرحله آن‌ها را برابر با کار روی نیروی الکتریکی قرار داده $(\Delta K = Eqd)$ و نتایج به‌دست‌آمده را بر هم تقسیم کنید تا نسبت $\frac{v}{v_0}$ به دست آید.

درس Box

قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در حالت اول، تغییرات انرژی جنبشی را محاسبه کرده و اندازهٔ آن را برابر با کار انجام‌شده توسط نیروی الکتریکی می‌گذاریم و چون در این پرتاب، انرژی پتانسیل ذرهٔ باردار افزایش یافته، در نتیجه انرژی جنبشی آن کاهش می‌یابد.

$$|\Delta K| = |W| \xrightarrow{\Delta K<0} -\frac{1}{2}m(0 - v_0^2) = Eqd \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = Eqd$$

گام دوم: در حالت دوم نیز مانند حالت اول تغییرات انرژی جنبشی را به دست می‌آوریم. دقت کنید که در این حالت چون انرژی پتانسیل الکتریکی ذره کاهش می‌یابد، پس تغییرات انرژی جنبشی مثبت است.

$$|\Delta K| = |W| \xrightarrow{\Delta K>0} \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = Eq \times 3d$$

گام سوم: نتایج به‌دست‌آمده در گام اول و دوم مسئله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)} = \frac{Eqd}{3Eqd} \Rightarrow \frac{v_0^2}{v^2 - v_0^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3v_0^2 = v^2 - v_0^2 \Rightarrow 4v_0^2 = v^2 \Rightarrow 2v_0 = v$$

۷۴ در شکل زیر، به جسم رسانای دوکی‌شکل که روی پایهٔ عایق قرار دارد، بار الکتریکی داده شده است. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ این جسم درست است؟



الف) میدان الکتریکی خالص در داخل جسم، برابر صفر است.

ب) پتانسیل الکتریکی تمام نقاط روی سطح جسم، برابر صفر است.

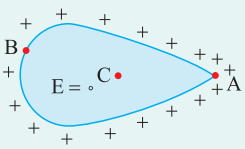
پ) بار الکتریکی فقط در سطح خارجی جسم توزیع می‌شود.

ت) تراکم بار الکتریکی در نقاط نوک‌تیز سطح جسم، بیشتر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

Hint درس‌باکس زیر را به دقت مطالعه کنید و سعی کنید خودتان عبارات درست را بیابید.

درس Box اگر بار اضافی به یک جسم رسانا داده شود، پس از مدت‌زمان کوتاهی که جسم در تعادل الکتروستاتیکی قرار می‌گیرد، میدان الکتریکی داخل رسانا صفر می‌شود. یا اگر یک جسم رسانای خنثی در میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، الکترون‌های آزاد جسم تحت تأثیر میدان الکتریکی خارجی طوری روی سطح رسانا القا می‌شوند که میدان الکتریکی ناشی از آن‌ها اثر میدان خارجی را در داخل رسانا خنثی کند، از این‌رو میدان الکتریکی خالص درون رسانا صفر می‌شود. حال اگر به یک جسم رسانا بار الکتریکی q را منتقل کنیم، بارها جابه‌جا شده و به سطح جسم منتقل می‌شوند تا در نهایت به تعادل الکتریکی برسند. پس از رسیدن به تعادل الکتریکی، تراکم بار در نزدیکی نقاط نوک‌تیز بیشتر است و هنگامی که یک رسانا در تعادل الکتروستاتیکی باشد، پتانسیل الکتریکی تمام نقاط آن با هم برابر است.



$q_A > q_B$

$V_A = V_B = V_C$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ الف) درست

ب) نادرست؛ پتانسیل الکتریکی تمام نقاط روی سطح جسم با هم برابر است و صفر نیست.

پ) درست

ت) درست

۷۵ حجم کرهٔ رسانای **A**، ۸ برابر حجم کرهٔ رسانای **B** است. اگر بار الکتریکی این دو کره برابر باشد، چگالی سطحی بار کرهٔ **A**، چند برابر چگالی سطحی بار کرهٔ **B** است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

Hint

ابتدا با استفاده از رابطهٔ حجم کره $(\frac{۴}{۳}\pi r^۳)$ نسبت شعاع دو کره را به دست آورید و پس از آن با کمک رابطهٔ چگالی سطحی $(\sigma = \frac{Q}{A})$ نسبت چگالی سطحی کرهٔ A به B را مشخص کنید $(\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = (\frac{r_B}{r_A})^۲)$.

درس Box

اگر مساحت سطحی که بار الکتریکی روی آن توزیع شده است، برابر A و بار الکتریکی موجود در آن سطح برابر Q باشد، چگالی سطحی بار که با نماد σ نمایش داده می‌شود، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

σ: چگالی سطحی بار الکتریکی $(C/m^۲)$

Q: بار الکتریکی (C)

A: مساحت $(m^۲)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$V_A = ۸V_B \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi r_A^۳ = ۸ \times \frac{۴}{۳}\pi r_B^۳ \Rightarrow r_A^۳ = ۸r_B^۳ \Rightarrow r_A = ۲r_B$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = (\frac{r_B}{r_A})^۲ \Rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}$$

شیمی دوازدهم

۷۶ کدام مورد درست است؟ $(Cl = ۳۵/۵, Na = ۲۳ : g.mol^{-۱})$

۱) در واکنش فلز سدیم با گاز کلر اگر ۱۴۲ گرم گونهٔ کاهنده مصرف شود، ۳۱۶ گرم فراورده تولید می‌شود.

فلز Na ← NaCl

۲) پس از موازنهٔ واکنش $Cr(s) + Fe^{۳+}(aq) \rightarrow Cr^{۳+}(aq) + Fe^{۲+}(aq)$، مجموع ضرایب گونهٔ اکسنده و گونهٔ اکسایش‌یافته، برابر ۶ می‌باشد.

$Fe^{۳+}$ ← گونهٔ اکسنده

Cr ← گونهٔ اکسایش‌یافته

۳) در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش فلز آلومینیم با محلول هیدروکلریک اسید، نسبت ضریب گونهٔ اکسنده به ضریب گاز تولیدشده، برابر ضریب گونهٔ کاهنده است.

H^+ یون ← گونهٔ اکسنده

$H_۲$ گاز ← گاز تولیدشده

۴) همیشه در یک واکنش اکسایش ـ کاهش موازنه‌شده، تعداد یون‌ها با بار همسان در دو سمت معادله برابر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در واکنش فلز آلومینیم (Al) با محلول هیدروکلریک اسید (HCl)، گاز هیدروژن و محلول $AlCl_۳$ تولید می‌شود:

$$۲Al(s) + ۶HCl(aq) \rightarrow ۲AlCl_۳(aq) + ۳H_۲(g)$$

خواستون باشه که در این واکنش، یون Cl^- نه الکترون گرفته و نه الکترون از دست داده *و یه هورایی نقش تماشایی رو داره!* پس واکنش کلی رو *می‌تونیم* به صورت زیر بنویسیم:

$$\underbrace{۲Al(s)}_{\text{کاهنده}} + \underbrace{۶H^+(aq)}_{\text{اکسنده}} \rightarrow ۲Al^{۳+}(aq) + ۳H_۲(g)$$

بنابراین خواهیم داشت: ضریب گونهٔ کاهنده $= \frac{۶}{۳} = ۲ = \frac{\text{ضریب گونهٔ اکسنده}}{\text{ضریب گاز } H_۲}$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در واکنش فلز سدیم با گاز کلر، فلز سدیم (Na) اکسایش می‌یابد و نقش کاهنده را دارد و گاز کلر $(Cl_۲)$ کاهش می‌یابد و نقش اکسنده را دارد.

معادلهٔ کلی و موازنه‌شده‌ش این‌هوریاس:

$$\underbrace{۲Na(s)}_{\text{کاهنده}} + \underbrace{Cl_۲(g)}_{\text{اکسنده}} \rightarrow ۲NaCl(aq)$$

حال باید محاسبه کنیم که با مصرف ۱۴۲ گرم فلز سدیم (کاهنده) در این واکنش، چند گرم NaCl (فراورده) تولید می‌شود:

$$۱۴۲g\ Na \times \frac{۱\ mol\ Na}{۲۳\ g\ Na} \times \frac{۲\ mol\ NaCl}{۲\ mol\ Na} \times \frac{۵۸/۵\ g\ NaCl}{۱\ mol\ NaCl} \simeq ۳۶۱\ g\ NaCl$$

گزینهٔ (۲): در این واکنش Cr به $Cr^{۳+}$ اکسایش و $Fe^{۳+}$ به $Fe^{۲+}$ کاهش یافته است:

نیم‌واکنش اکسایش: $Cr \rightarrow Cr^{۳+} + ۳e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $Fe^{۳+} + e^- \rightarrow Fe^{۲+}$

خلاا! برای آن‌که تعداد الکترون‌ها در دو نیم‌واکنش برابر شود، نیم‌واکنش کاهش را باید در ۳ ضرب کنیم:

نیم‌واکنش اکسایش: $Cr \rightarrow Cr^{۳+} + ۳e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $۳Fe^{۳+} + ۳e^- \rightarrow ۳Fe^{۲+}$

واکنش کلی: $\underbrace{Cr}_{\substack{\text{کاهندهٔ}\\ \text{(اکسایش‌یافته)}}} + \underbrace{۳Fe^{۳+}}_{\substack{\text{اکسندهٔ}\\ \text{(کاهش‌یافته)}}} \rightarrow Cr^{۳+} + ۳Fe^{۲+}$

با توجه به معادلهٔ واکنش کلی می‌توان گفت که در این واکنش، مجموع ضرایب گونهٔ اکسنده $(Fe^{۳+})$ و گونهٔ اکسایش‌یافته (Cr)، برابر ۴ است.

گزینهٔ (۴): تعداد یون‌های با بار همسان، ممکن است در دو سمت معادلهٔ واکنش متفاوت باشد؛ مثلاً در واکنش فلز Al با محلول HCl، تعداد کاتیون‌ها در سمت چپ و راست معادلهٔ واکنش، با هم برابر نیست، به طوری که در سمت واکنش‌دهنده‌ها شش مول یون H^+ وجود دارد، در حالی که در سمت فراورده‌ها دو مول یون $Al^{۳+}$ وجود دارد:

$$۲Al(s) + ۶H^+(aq) \rightarrow ۲Al^{۳+}(aq) + ۳H_۲(g)$$

۷۷ با توجه به واکنش‌های موازنه‌نشدهٔ زیر که در شرایط یکسان، به طور خودبه‌خودی انجام می‌شوند، کدام مطلب نادرست است؟

$(Zn = 65 g.mol^{-1})$

$I)\ Al(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$

$II)\ Cu^{2+}(aq) + Mn(s) \rightarrow Cu(s) + Mn^{2+}(aq)$

$III)\ Zn(s) + V^{3+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + V^{2+}(aq)$

۱) واکنش‌پذیری فلزهای آلومینیم و منگنز، بیشتر از مس است.

۲) مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شدهٔ (I)، ۱/۶۷ برابر مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شدهٔ (III) است.

۳) فراورده‌های واکنش (I)، فلز مس و یون $Al^{3+}(s)$ هستند.

۴) با مبادلهٔ $2/408 \times 10^{23}$ الکترون در واکنش (III)، ۱۳ گرم فلز روی مصرف می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی *بیایین به ترتیب گزینه‌ها رو بررسی کنیم:*

گزینهٔ (۱): با توجه به این‌که واکنش‌های داده‌شده، به طور خودبه‌خودی (طبیعی) انجام می‌شوند؛ در نتیجه می‌توان گفت که:

$I)\ Al(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$ قدرت کاهندگی : $Al > Cu$

$II)\ Cu^{2+}(aq) + Mn(s) \rightarrow Cu(s) + Mn^{2+}(aq)$ قدرت کاهندگی : $Mn > Cu$

$III)\ Zn(s) + V^{3+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + V^{2+}(aq)$ قدرت کاهندگی : $Zn > V^{2+}$

با توجه به واکنش‌های (I) و (II)، نتیجه می‌گیریم که فلزهای Al و Mn، قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به Cu دارند.

گزینهٔ (۲): معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌های (I) و (II) *این‌جوریاس:*

$$\left.\begin{array}{l} I)\ 2Al(s) + 3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3Cu(s) \\ III)\ Zn(s) + 2V^{3+}(aq) + \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2V^{2+}(aq) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\text{مجموع ضرایب مواد در واکنش (I)}}{\text{مجموع ضرایب مواد در واکنش (III)}} = \frac{10}{6} \simeq 1/67$$

گزینهٔ (۳): در واکنش (I)، فلز آلومینیم $(Al(s))$ در محلول آبی حاوی کاتیون مس (II) $(Cu^{2+}(aq))$ قرار داده شده است و با توجه به این‌که فلز آلومینیم کاهندهٔ قوی‌تری نسبت به فلز مس است، در نتیجه با از دست دادن الکترون به صورت یون $Al^{3+}(aq)$ (نه $Al^{3+}(s)$!) وارد محلول می‌شود؛ هم‌چنین یون‌های Cu^{2+} با دریافت الکترون به صورت اتم‌های مس $(Cu(s))$ روی تیغهٔ (فلز) آلومینیم رسوب می‌کنند؛ بنابراین معادلهٔ واکنش انجام‌شده به صورت زیر می‌باشد:

$$2Al(s) + 3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3Cu(s)$$

گزینهٔ (۴): در واکنش (III) به ازای مصرف ۱ مول فلز Zn، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود؛ *حالا* حساب می‌کنیم اگر $2/408 \times 10^{23}$ الکترون در این واکنش مبادله شود، چند گرم فلز Zn مصرف می‌شود:

$$Zn(s) + 2V^{3+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2V^{2+}(aq) \begin{cases} \text{نیم‌واکنش اکسایش} : Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^- \\ \text{نیم‌واکنش کاهش} : V^{3+}(aq) + e^- \rightarrow V^{2+}(aq) \end{cases}$$

جرم فلز Zn مصرف‌شده در این واکنش را با استفاده از کسرهای تبدیل محاسبه می‌کنیم:

$$\overset{0/2}{\cancel{2/408 \times 10^{23}}}\ e^- \times \frac{1\ mol\ e^-}{\underset{1}{\cancel{6/02 \times 10^{23}}}\ e^-} \times \frac{1\ mol\ Zn}{2\ mol\ e^-} \times \frac{65\ g\ Zn}{1\ mol\ Zn} = 13\ g\ Zn$$

یه‌جور دیگه *حالا!* با استفاده از کسرهای تناسب *این کار رو انجام بدیم:*

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Zn}} = \frac{\text{تعداد}}{\underbrace{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{x}{1 \times 65} = \frac{\overset{0/2}{\cancel{2/408 \times 10^{23}}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \times \underset{1}{\cancel{6/02 \times 10^{23}}}} \Rightarrow x = 13\ g\ Zn$$

۷۸ با توجه به جدول مقابل که داده‌هایی را از قراردادن برخی تیغه‌های فلزی در محلول مس (II) سولفات در دمای $۲۰^\circ C$ نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟ (از تغییر حجم محلول‌ها بر اثر انجام واکنش، چشم‌پوشی کنید؛ $(Zn = ۶۵, Fe = ۵۶, Al = ۲۷ : g.mol^{-۱})$

شمارهٔ آزمایش	نماد شیمیایی فلز	دمای مخلوط واکنش پس از مدتی ($^\circ C$)	جرم نهایی تیغه (g)
۱	Zn	۲۶	b
۲	Al	a	c
۳	Fe	۲۳	d

۱) اگر فلز M بتواند مس را از مس (II) سولفات آزاد کند، اما بر محلول حاوی کاتیون آهن (II) بی‌اثر باشد، به یقین دمای مخلوط واکنش فلز M با محلول مس (II) سولفات از دمای a کم‌تر است.

$Cu < M < Fe$: قدرت کاهندگی

۲) اگر جرم یکسانی از هر تیغه را به صورت جداگانه در ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱ مولار مس (II) سولفات قرار دهیم، مقایسهٔ $c > d > b$ را برای جرم نهایی هر تیغه داریم.

۳) در صورتی که تیغه‌ای از جنس آلومینیم را در ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱ مولار مس (II) سولفات قرار دهیم و تغییرات جرم تیغه ۳/۴۵ گرم باشد، تغییر غلظت گونهٔ اکسایش‌یافته ۰/۷۵ مولار می‌باشد.

۴) اگر در آزمایش (۱) تغییر جرم تیغه ۱۰ گرم باشد و شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آزمایش (۳) برابر آزمایش (۱) باشد، در آزمایش (۳) پس از مبادلهٔ این تعداد الکترون، ۸۰ گرم به جرم تیغه افزوده می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

ترتیب قدرت کاهندگی فلزهای موجود در جدول به صورت $Al > Zn > Fe$ می‌باشد. می‌دانیم هر چه قدرت کاهندگی فلزی بیشتر باشد، تغییر دمای مخلوط واکنش آن نیز بیشتر خواهد بود؛ بنابراین در این جدول ترتیب تغییر دمای مخلوط واکنش نیز به صورت $Al > Zn > Fe$ است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به این‌که فلز M می‌تواند فلز مس را از محلول مس (II) سولفات آزاد کند، یعنی قدرت کاهندگی فلز M بیشتر از فلز Cu است؛ هم‌چنین فلز M با محلول حاوی کاتیون‌های $Fe^{۲+}$ واکنش نمی‌دهد و در نتیجه قدرت کاهندگی فلز M کم‌تر از فلز Fe می‌باشد؛ بنابراین با توجه به قدرت کاهندگی کم‌تر فلز M نسبت به فلز Al، به یقین می‌توان گفت که دمای مخلوط واکنش فلز M با محلول مس (II) سولفات، کم‌تر از دمای مخلوط واکنش آلومینیم با محلول مس (II) سولفات (a) می‌باشد.

گزینهٔ (۲): معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌های انجام‌شده *این‌بوریاس*؛

$$۲Al + ۳Cu^{۲+} \rightarrow ۲Al^{۳+} + ۳Cu$$

$$Zn + Cu^{۲+} \rightarrow Zn^{۲+} + Cu$$

$$Fe + Cu^{۲+} \rightarrow Fe^{۲+} + Cu$$

ابتدا شمار مول‌های $Cu^{۲+}$ موجود در محلول را به دست می‌آوریم:

$$۱۰۰\,mL\,CuSO_۴(aq) \times \frac{۱\,L}{۱۰۰۰\,mL} \times \frac{۱\,mol\,CuSO_۴}{۱\,L\,CuSO_۴(aq)} \times \frac{۱\,mol\,Cu^{۲+}}{۱\,mol\,CuSO_۴} = ۰/۱\,mol\,Cu^{۲+}$$

لا حساب می‌کنیم که به ازای مصرف ۰/۱ مول $Cu^{۲+}$ در هر آزمایش، جرم تیغه‌ها چه‌قدر تغییر می‌کنند:

آزمایش شمارهٔ (۱):

$$\underset{۶۵g}{Zn(s)} + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + \underset{۶۴g}{Cu(s)} \Rightarrow Cu^{۲+}\text{ مول ۱ به ازای مصرف تغییر جرم تیغه} = ۶۵ - ۶۴ = ۱\,g$$

۰/۱ گرم از جرم تیغه کاسته می‌شود: $\leftarrow$ تغییر جرم تیغه $= ۰/۱\,mol\,Cu^{۲+} \times \frac{۱\,g\text{ تغییر جرم تیغه}}{۱\,mol\,Cu^{۲+}} = ۰/۱\,g$

آزمایش شمارهٔ (۲):

$$\underset{۲\times۲۷=۵۴g}{۲Al(s)} + ۳Cu^{۲+}(aq) \rightarrow ۲Al^{۳+}(aq) + \underset{۳\times۶۴=۱۹۲g}{۳Cu(s)} \Rightarrow Cu^{۲+}\text{ مول ۳ به ازای مصرف تغییر جرم تیغه} = ۱۹۲ - ۵۴ = ۱۳۸g$$

۴/۶ گرم به جرم تیغه اضافه خواهد شد: $\leftarrow$ تغییر جرم تیغه $= ۰/۱\,mol\,Cu^{۲+} \times \frac{۱۳۸\,g\text{ تغییر جرم تیغه}}{۳\,mol\,Cu^{۲+}} = ۴/۶\,g$

آزمایش شمارهٔ (۳):

$$\underset{۵۶\,g}{Fe(s)} + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Fe^{۲+}(aq) + \underset{۶۴\,g}{Cu(s)} \Rightarrow Cu^{۲+}\text{ مول ۱ تغییر جرم تیغه به ازای مصرف} = ۶۴ - ۵۶ = ۸\,g$$

۰/۸ گرم به جرم تیغه اضافه خواهد شد: تغییر جرم تیغه

$$۰/۱\,mol\,Cu^{۲+} \times \frac{\text{تغییر جرم تیغه } ۸\,g}{۱\,mol\,Cu^{۲+}} = ۰/۸\,g$$

در نتیجه مقایسهٔ تغییر جرم تیغه‌ها به صورت $c > d > b$ خواهد بود.

گزینهٔ (۳): در واکنش تیغهٔ آلومینیم با محلول مس (II) سولفات داریم:

$$\underset{\text{کاهنده}}{۲Al(s)} + \underset{\text{اکسنده}}{۳Cu^{۲+}(aq)} \rightarrow ۲Al^{۳+}(aq) + ۳Cu(s)$$

(کاهش می‌یابد.) (اکسایش می‌یابد.)

در این واکنش، $Al(s)$ اکسایش می‌یابد و در نتیجه محلول آن (یعنی $Al^{۳+}(aq)$) گونهٔ اکسایش‌یافته است.

حال حساب می‌کنیم که به ازای تغییر جرم تیغه به اندازهٔ ۳/۴۵ گرم، غلظت یون $Al^{۳+}(aq)$ چه‌قدر تغییر می‌کند:

$$۲Al(s) + ۳Cu^{۲+}(aq) \rightarrow ۲Al^{۳+}(aq) + ۳Cu(s)$$

$$\Rightarrow Al^{۳+}\text{ مول ۲ تغییر جرم تیغه به‌ازای تولید} = ۳ \times ۶۴ - ۲ \times ۲۷ = ۱۹۲ - ۵۴ = ۱۳۸\,g$$

$$۳/۴۵\,g\text{ تغییر جرم تیغه} \times \frac{۲\,mol\,Al^{۳+}}{\text{تغییر جرم تیغه } ۱۳۸\,g} = ۰/۰۵\,mol\,Al^{۳+} \Rightarrow \left[Al^{۳+}\right]_{\text{تولیدشده}} = \frac{۰/۰۵\,mol}{۰/۱\,L} = ۰/۵\,mol.L^{-۱}$$

گزینهٔ (۴): در آزمایش (۱) به ازای مصرف هر یک مول $Cu^{۲+}$، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود؛ بنابراین اگر ۱۰ گرم جرم تیغه تغییر کند، خواهیم داشت:

$$\underset{۶۵\,g}{Zn(s)} + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + \underset{۶۴\,g}{Cu(s)} \Rightarrow Cu^{۲+}\text{ مول ۱ تغییر جرم تیغه به ازای مصرف} = ۶۵ - ۶۴ = ۱\,g$$

$$۱۰\,g\text{ تغییرجرم تیغه} \times \frac{۱\,mol Cu^{۲+}}{\text{تغییرجرم تیغه } ۱\,g} \times \frac{۲\,mol\,e^-}{۱\,mol\,Cu^{۲+}} = ۲۰\,mol\,e^-$$

حال باید حساب کنیم که به ازای مبادلهٔ ۲۰ مول الکترون، چند گرم به جرم تیغه در آزمایش (۳) افزوده خواهد شد:

$$\underset{۵۶\,g}{Fe(s)} + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Fe^{۲+}(aq) + \underset{۶۴\,g}{Cu(s)} \Rightarrow Cu^{۲+}\text{ مول ۱ تغییر جرم تیغه به‌ازای مصرف} = ۶۴ - ۵۶ = ۸\,g$$

$$۲۰\,mol\,e^- \times \frac{۱\,mol\,Cu^{۲+}}{۲\,mol\,e^-} \times \frac{\text{تغییر جرم تیغه } ۸\,g}{۱\,mol\,Cu^{۲+}} = \text{تغییر جرم تیغه } ۸۰\,g$$

۷۹ تیغه‌ای از یک فلز مجهول را در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول مس (II) سولفات با غلظت ۰/۳ مول بر لیتر قرار می‌دهیم. اگر بعد از بی‌رنگ‌شدن محلول، ۱/۳۵ گرم به جرم تیغه افزوده شود، فلز مجهول کدام‌یک از فلزهای زیر می‌تواند باشد؟

$(Sn = 119, Cu = 64, Fe = 56, Mn = 55, Al = 27 : g.mol^{-1})$

مصرف کامل یون‌های Cu^{2+}

۱) Al　　۲) Mn　　۳) Fe　　۴) Sn

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اگر فلز مجهول، یکی از فلزهای Mn، Fe یا Sn باشد، در محصولات یون $2+$ تشکیل می‌دهد. در این حالت اگر عنصر مورد نظر را X در نظر بگیریم، معادلهٔ واکنش آن با محلول $CuSO_4$ به صورت زیر است:

$$X(s) + CuSO_4(aq) \rightarrow XSO_4(aq) + Cu(s)$$

در این واکنش، به ازای مصرف هر مول $CuSO_4$ (در صورت کامل در نظر گرفتن واکنش)، ۱ مول فلز X با جرم M گرم مصرف شده و ۱ مول فلز مس با جرم ۶۴ گرم تولید می‌شود؛ بنابراین با انجام واکنش، $M - 64$ گرم بر جرم تیغه افزوده می‌شود. *با این تفاسیر* خواهیم داشت:

$$\text{افزایش جرم تیغه } 1/35\,g = 500\,mL\,CuSO_4(aq) \times \frac{1\,L}{1000\,mL} \times \frac{0/3\,mol\,CuSO_4}{1\,L\,CuSO_4(aq)} \times \frac{\text{افزایش جرم تیغه } (64 - M)\,g}{1\,mol\,CuSO_4}$$

$$0/15(64 - M) = 1/35 \Rightarrow 9/6 - 0/15M = 1/35 \Rightarrow M = \frac{8/25}{0/15} = 55\,g.mol^{-1}$$

بنابراین فلز مورد نظر، Mn با جرم مولی ۵۵ گرم بر مول می‌باشد.

به جواب که رسیدیم، اما گزینهٔ (۱) رو هم برای خوشحالی و اطمینان‌خاطر شما بررسی می‌کنیم:

اگر فلز مورد نظر Al باشد، در محصولات یون $3+$ تشکیل می‌دهد، در نتیجه معادلهٔ موازنه‌شده آن به صورت زیر خواهد بود:

$$2Al(s) + 3CuSO_4(aq) \rightarrow Al_2(SO_4)_3(aq) + 3Cu(s)$$

در این واکنش ، به ازای مصرف هر ۳ مول $CuSO_4$ (در صورت کامل در نظر گرفتن واکنش)، ۲ مول فلز آلومینیم مصرف شده و ۳ مول فلز مس تولید می‌شود؛ در نتیجه تغییر جرم تیغه به ازای مصرف ۳ مول $CuSO_4$ برابر است با:

$$\underbrace{(3 \times 64)}_{192} - \underbrace{(2 \times 27)}_{54} = 138\,g$$

بدین ترتیب اگر فلز M، آلومینیم باشد، داریم:

$$\text{افزایش جرم تیغه } 6/9\,g = 500\,mL\,CuSO_4 \times \frac{1\,L}{1000\,mL} \times \frac{0/3\,mol\,CuSO_4}{1\,L\,CuSO_4} \times \frac{\text{افزایش جرم تیغه } 138\,g}{3\,mol\,CuSO_4}$$

در نتیجه اگر فلز M آلومینیم باشد، جرم تیغه ۶/۹ گرم افزایش می‌یابد *که غلط اندر غلطه!*

۸۰ در هر یک از روش‌های زیر مراحل تبدیل انرژی شیمیایی موجود در یک سوخت به انرژی الکتریکی نشان داده شده است. با توجه به آن، در کدام روش اتلاف انرژی به شکل گرما بیشتر است و کدام روش کارایی بالاتری دارد؟

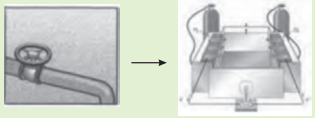
۱) روش ۱ـ روش ۱

۲) روش ۱ـ روش ۲

۳) روش ۲ـ روش ۱

۴) روش ۲ـ روش ۲

روش (۱): 

روش (۲): 

درسی Box

سلول‌های سوختی، **نوعی سلول گالوانی‌اند** که شیمی‌دان‌ها برای عبور از چالش **تأمین انرژی و کاهش آلودگی محیط زیست** پیشنهاد داده‌اند.

این سلول‌ها علاوه بر کارایی بیشتر، می‌توانند ردپای کربن دی‌اکسید را کاهش دهند؛ به طوری که این سلول‌ها منبع انرژی سبز به شمار می‌روند. به طور کلی در سلول‌های سوختی، به منظور تولید جریان برق، یک سوخت گازی‌شکل به آرامی اکسید می‌شود.

سوخت‌های فسیلی رایج‌ترین سوخت برای خودروها و نیروگاه‌ها به شمار می‌روند ولی به دلیل کاهش ذخایر سوخت‌های فسیلی و آلودگی ناشی از آن‌ها، سلول‌های سوختی به عنوان جایگزین آن‌ها مطرح‌اند. کتاب درسی در «خود را بیازمایید» صفحهٔ ۵۱، سلول سوختی و سوزاندن سوخت‌های فسیلی را برای تولید برق با هم مقایسه کرده است:

سلول سوختی و تولید برق ← انتقال سوخت :سلول سوختی

انتقال برق ← راه‌اندازی توربین و تولید برق ← تولید بخار ← سوزاندن سوخت ← انتقال سوخت:سوزاندن سوخت‌های فسیلی

سوزاندن سوخت‌های فسیلی < سلول سوختی :کارایی

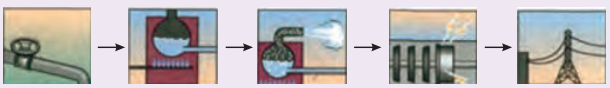
سلول سوختی < سوزاندن سوخت‌های فسیلی :ردپای کربن دی‌اکسید/ مراحل عملیات/ اتلاف انرژی به شکل گرما

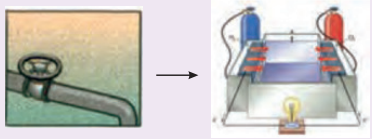
جمع‌بندی:

ویژگی‌های سلول‌های سوختی
- نوعی سلول گالوانی هستند و برای تولید برق استفاده می‌شوند.
- در آن‌ها، اتلاف انرژی به شکل گرما کم‌تر است.
- کارایی بیشتری نسبت به تولید برق به روش سوزاندن سوخت‌های فسیلی دارند.
- رد پای CO_2 را کاهش می‌دهند.
- دوستدار محیط زیست بوده و منبع انرژی سبز به شمار می‌روند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ روش (۱)، نشان‌دهندهٔ تولید انرژی الکتریکی حاصل از سوزاندن سوخت، گرم‌شدن آب، تشکیل بخار آب و چرخاندن توربین با استفاده از بخار آب است. در این روش اتلاف انرژی به شکل گرما بسیار زیاد است، ولی روش (۲)، نشان‌دهندهٔ تولید انرژی الکتریکی از طریق سلول سوختی است، که کارایی آن به مراتب بالاتر است.

در هر یک از روش‌های زیر مراحل تبدیل انرژی شیمیایی موجود در یک سوخت به انرژی الکتریکی نشان داده شده است. با توجه به آن به پرسش‌ها پاسخ دهید. *(خود را بیازمایید صفحهٔ ۵۱)*

روش (۱): 

روش (۲): 

آ) در کدام روش اتلاف انرژی به شکل گرما بیشتر است؟ چرا؟

ب) کدام روش کارایی بالاتری دارد؟ توضیح دهید.

۸۱ کدام موارد زیر مطابق با اطلاعات کتاب درسی، نادرست است؟

الف) نیم‌واکنش کاهش سلول سوختی هیدروژن، مشابه نیم‌واکنش کاهش خوردگی آهن در محیط اسیدی است.

ب) تعداد الکترون‌های مبادله‌شدهٔ ناشی از مصرف یک مول H_2 در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، برابر با شمار الکترون‌های مبادله‌شدهٔ ناشی از مصرف ۰/۲۵ مول متان در سلول سوختی متان ـ اکسیژن در شرایط یکسان است.

پ) در فرایند کاهش در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، H^+ الکترون دریافت کرده و با O_2 ترکیب می‌شود.

ت) سلول‌های سوختی همانند هر سلول گالوانی دیگری سه جزء اصلی دارند.

۱) الف ـ ب ۲) پ ـ ت

۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

مشاوره در تست‌هایی از این سبک، حتماً عبارت‌ها را با توجه به گزینه‌ها بررسی کنید و همچنین ابتدا عبارت‌های ساده‌تر را خوانده و با رد گزینه، سایر عبارت‌ها را بررسی کنید، زیرا در اغلب این تست‌ها نیاز به بررسی همهٔ عبارت‌ها نیست!

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نیم‌واکنش‌های بیان‌شده، عبارت‌اند از:

سلول سوختی هیدروژن:

نیم‌واکنش اکسایش: $H_2(g) \rightarrow 2H^+(aq) + 2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $4H^+(aq) + 4e^- + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$

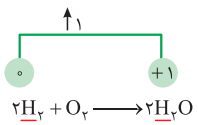
واکنش خوردگی و اکسایش آهن در محیط اسیدی:

نیم‌واکنش اکسایش: $Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

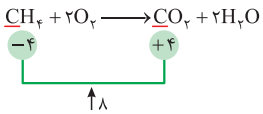
مشخصه که نیم‌واکنش‌های کاهش این دو واکنش، متفاوت‌اند!

ب) با توجه به واکنش‌های زیر داریم:



$\sim 4\,mol\,e^-$

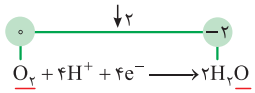
بنابراین به ازای مصرف هر مول گاز H_2 در این واکنش، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود.



$\sim 8\,mol\,e^-$

بنابراین به ازای مصرف ۰/۲۵ مول گاز CH_4 در این واکنش نیز $\frac{8}{4} = 2$ مول الکترون مبادله می‌شود.

پ) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، O_2 گونهٔ اکسنده بوده و الکترون‌ها را دریافت می‌کند و عدد اکسایش اتم O در آن از صفر به ۲− می‌رسد.



ت) سلول‌های گالوانی مانند سلول‌های سوختی دارای نیم‌سلول آند، نیم‌سلول کاتد و حائل و رابط بین دو نیم‌سلول (دیوارهٔ متخلخل یا غشای مبادله‌کنندهٔ یون هیدرونیوم) هستند. (۳ جزء اصلی)

۸۲ با توجه به واکنش داده‌شده، پس از موازنهٔ معادلهٔ آن کدام مورد نادرست است؟

$$I^-(aq) + MnO_4^-(aq) + H_2O(l) \rightarrow MnO_2(s) + I_2(s) + OH^-(aq)$$

۱) عدد اکسایش اتم‌های منگنز در مجموع، ۶ واحد تغییر کرده است.

۲) تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، برابر یک است.

۳) نسبت شمار آنیون(های) چندتاتمی واکنش دهنده به شمارمولکول(های) چندتاتمی فراورده، برابر ۰/۶۶ است.

۴) جمع جبری عدد اکسایش اتم‌های منگنز، ۱/۷۵ برابر جمع جبری عدد اکسایش اتم‌های هیدروژن است.

پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا واکنش داده‌شده را موازنه می‌کنیم:

$$6I^-(aq) + 2\underset{+7}{MnO_4^-}(aq) + 4H_2O(l) \longrightarrow 2\underset{+4}{MnO_2}(s) + 3I_2(s) + 8OH^-(aq)$$

(۳ واحد کاهش)

جمع جبری عدد اکسایش اتم‌های منگنز در واکنش‌دهنده‌ها $(2MnO_4^-)$ برابر با $14 (2 \times 7 = 14)$ بوده و در فراورده‌ها $(2MnO_2)$ برابر با $8 (2 \times 4 = 8)$ است؛ بنابراین باید مشخص شود که منظور کدام‌یک از اتم‌های منگنز است؛ اتم‌های منگنز در سمت واکنش‌دهنده‌ها یا در سمت فراورده‌ها؟

البته جمع جبری عدد اکسایش اتم‌های هیدروژن در همه طرف برابر با ۸ است $(8 \times 1 = 8)$. نسبت مورد نظر برای اتم‌های منگنز در سمت واکنش‌دهنده‌ها برابر $1/75 (\frac{14}{8} = 1/75)$ و برای اتم‌های منگنز در سمت فراورده‌ها برابر با $(\frac{8}{8} = 1)$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در این واکنش، عدد اکسایش اتم‌های منگنز از $+7$ (در MnO_4^-) به $+4$ (در MnO_2) رسیده است و از آن‌جا که ۲ اتم منگنز داریم؛ در نتیجه عدد اکسایش اتم‌های منگنز در مجموع ۶ واحد تغییر کرده است.

گزینهٔ (۲): مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها برابر ۱۲ و مجموع ضرایب فراورده‌ها برابر ۱۳ است؛ یعنی به اندازهٔ ۱ واحد تفاوت دارند.

گزینهٔ (۳): شمار آنیون‌های چندتاتمی در سمت واکنش‌دهنده‌ها، برابر با ۲ $(2MnO_4^-)$ و شمار مولکول‌های چندتاتمی در سمت فراورده‌ها، برابر با ۳ $(3I_2)$ است؛ بنابراین نسبت مورد نظر برابر با $\frac{2}{3} = 0/66$ است.

با توجه به واکنش داده‌شده، پس از موازنهٔ معادلهٔ آن کدام مورد نادرست است؟ *(تجربی داخل ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)*

$$KO_2(aq) + CO_2(g) + H_2O(l) \rightarrow KHCO_3(s) + O_2(g)$$

۱) عدد اکسایش اتم‌های کربن در مجموع، ۳۲ واحد تغییر کرده است.

۲) تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، برابر ۳ است.

۳) نسبت شمار مولکول(های) چندتاتمی واکنش به شمار آنیون(های) چندتاتمی فراورده، برابر ۱/۵ است.

۴) جمع جبری عدد اکسایش اتم‌های کربن، ۴ برابر جمع جبری عدد اکسایش اتم‌های هیدروژن است.

۸۳ درستی یا نادرستی مطالب زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش عنصرهای موجود در یک گروه از جدول تناوبی، یکسان است.
- عدد اکسایش عنصر فلزی موجود در ترکیب CrO_5، ۱۰+ است.
- در ترکیب PF_5، اتم مرکزی تنها می‌تواند اکسنده باشد.
- سه عدد اکسایش متفاوت می‌توان برای گونه‌های مختلف مس در نظر گرفت.
- حداکثر عدد اکسایش نیتروژن در ترکیبات خود، با حداکثر عدد اکسایش Sc برابر است.

در بالاترین عدد اکسایش خود است.

۱) درست ـ درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۴) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست ـ درست

مشاوره اولین بار این تیپ تست در کنکور دی ۱۴۰۱ مطرح شد و دیگر تاکنون مطرح نشده است. این تیپ تست بسیار ساده‌تر از سؤالات چند موردی است. کافی است با توجه و نگاه به گزینه‌ها عبارت‌ها را بررسی کنید تا بتوانید با حداقل عبارت‌های بررسی‌شده، تست را حل کنید.

درس Box

روش‌های تعیین عدد اکسایش:

۱) روش ساختار لوویس

۲) روش تشکیل معادله

روش ساختار لوویس:

۱) ساختار لوویس ترکیب مورد نظر را می‌کشیم.

۲) اگر دو اتم یک پیوند، متفاوت باشند $(X-Y)$، همهٔ الکترون‌های پیوندی را به اتمی نسبت می‌دهیم که خصلت نافلزی بیشتری دارد. بهتر است ترتیب خصلت نافلزی عنصرهای روبه‌رو را بلد باشید: $F > O > N > Cl > Br > I > S > C > P > H$:خصلت نافلزی

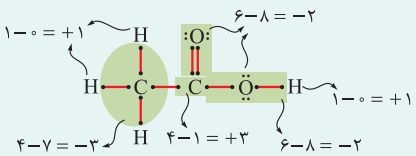
۳) اگر دو اتم یک پیوند، یکسان باشند $(X-X)$، الکترون‌های پیوندی را به طور مساوی بین آن‌ها تقسیم می‌کنیم.

۴) الکترون‌های ناپیوندی هر اتم را به خود آن نسبت می‌دهیم.

۵) در نهایت عدد اکسایش هر اتم به صورت زیر حساب می‌شود:

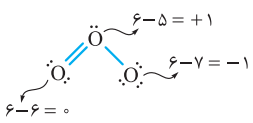
عدد اکسایش = (ظرفیت) گروه شمارهٔ یکان − تعداد الکترون‌های نسبت داده شده

عدد اکسایش هر یک از اتم‌ها در استیک اسید به صورت روبه‌رو است:



روش تشکیل معادله:

در این روش برای عدد اکسایش برخی اتم‌های یک ترکیب، قانون داریم و عدد اکسایش اتم‌های باقی‌مانده، با تشکیل معادله به دست می‌آید.

ردیف	قاعده	مثال	توضیحات
۱	عدد اکسایش عنصرها در حالت آزاد برابر صفر است.	عدد اکسایش سدیم در Na و عدد اکسایش اتم‌های هیدروژن در H_2 برابر با صفر است.	در اوزون، مجموع عدد اکسایش اتم‌ها برابر با صفر است در حالی که عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن با هم متفاوت است. 
۲	عدد اکسایش اتم‌ها در یون‌های تک‌اتمی برابر با بار یون است.	عدد اکسایش آهن در یون Fe^{2+} برابر با ۲+ و عدد اکسایش کلر در یون Cl^- برابر با ۱− است.	−

ردیف	قاعده	مثال	توضیحات
۳	عدد اکسایش فلزهای قلیایی (گروه ۱)، فلزهای قلیایی خاکی (گروه ۲) و فلزهای گروه ۱۳ در ترکیب های مختلف، به ترتیب برابر با $+۱$ ، $+۲$ ، $+۳$ است.	عدد اکسایش Na در $NaCl$ برابر $+۱$ و عدد اکسایش Ca در $CaCO_۳$ برابر با $+۲$ و عدد اکسایش Al در $Na_۳AlF_۶$ ، برابر $+۳$ است.	به طور کلی، عدد اکسایش فلزها در ترکیب‌های یونی، برابر با بار یون آن‌ها است؛ به طور مثال عدد اکسایش آهن در $Fe_۲(SO_۴)_۳$ برابر با $+۳$ است.
۴	عدد اکسایش فلوئور (F) در ترکیب با بقیهٔ عنصرها، همیشه برابر -۱ است.	عدد اکسایش F در $CaF_۲$ ، HOF ، $Na_۳AlF_۶$ و ... برابر -۱ است.	عدد اکسایش فلوئور در حالت آزاد $(F_۲)$ برابر صفر است.
۵	عدد اکسایش هیدروژن در ترکیب با نافلزها و ترکیب‌های آلی، $+۱$ و در ترکیب با فلزها، -۱ است.	عدد اکسایش هیدروژن در HCl ، $CH_۴$ و $H_۲O$ ، $+۱$ و در NaH و $CaH_۲$ ، -۱ است.	–
۶	عدد اکسایش اکسیژن در بیشتر ترکیب‌هایش برابر -۲ است.	عدد اکسایش اکسیژن در $H_۲O$ ، $Na_۲O$ ، $H_۲SO_۴$ و $NO_۳^-$ ، -۲ است.	برخی از مواردی که عدد اکسایش اکسیژن -۲ نیست: عدد اکسایش O در HOF برابر صفر است. عدد اکسایش O در $OF_۲$ برابر $+۲$ و در $O_۲F_۲$ برابر $+۱$ است. عدد اکسایش اکسیژن در $H_۲O_۲$ برابر با -۱ است.
۷	جمع جبری عددهای اکسایش اتم‌ها در یک ترکیب خنثی برابر با صفر و در یک یون چندتایی برابر با بار یون است.	$H_۲SO_۴ : ۲H+S+۴O=۰$ $PO_۴^{۳-} : P+۴O=-۳$	با توجه به این قاعده و تشکیل معادله، می‌توان عدد اکسایش عنصری که روش تعیین عدد اکسایش آن در قواعد گفته‌شده، موجود نبود را مشخص کرد. $H_۲SO_۴ : ۲(+۱)+S+۴(-۲)=۰ \Rightarrow S=+۶$ $PO_۴^{۳-} : P+۴(-۲)=-۳ \Rightarrow P=+۵$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های سوم و چهارم درست و سایر عبارت‌های دادشده نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: *نه به خدا!!* به عنوان مثال در عنصرهای گروه‌های ۱۶ و ۱۷ این گونه نیست، چراکه عنصر فلوئور صرفاً عدد اکسایش ۰ و -۱ را دارد، در حالی که دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش عنصر کلر از $+۷$ تا -۱ است؛ هم‌چنین دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش عنصرهای اکسیژن و گوگرد به ترتیب از $+۲$ تا -۲ و از $+۶$ تا -۲ می‌باشد.

نکته

بهتر است دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش برخی عنصرها را بلد باشید:

شمارهٔ گروه	۱	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
پایین‌ترین عدد اکسایش	۰	۰	۰	-۴	-۳	-۲	-۱
بالاترین عدد اکسایش	$+۱$	$+۲$	$+۳$	$+۴$	$+۵$	$+۶$	$+۷$

به طور کلی در همهٔ فلزها، پایین‌ترین عدد اکسایش برابر با صفر است (در حالت آزاد) برای عنصرهای گروه ۱۴ تا ۱۷ (به‌جز اکسیژن و فلوئور)، پایین‌ترین و بالاترین عدد اکسایش از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

پایین‌ترین عدد اکسایش = شمارهٔ گروه -۱۸

بالاترین عدد اکسایش = شمارهٔ گروه -۱۰

در مورد دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش، استثناهایی هم به چشم می‌خورد:

۱) دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش اکسیژن از -۲ تا $+۲$ است.

۲) عدد اکسایش فلوئور تنها می‌تواند اعداد صفر (در $F_۲$) و -۱ (در بقیهٔ گونه‌ها) باشد.

در ضمن عدد اکسایش هیدروژن می‌تواند صفر، -۱ و $+۲$ باشد.

عبارت دوم: آرایش الکترونی اتم Cr، به صورت $[_{18}Ar]\,3d^5 4s^1$ است و تنها ۶ الکترون ظرفیتی دارد؛ در نتیجه نمی‌تواند عدد اکسایش بزرگ‌تر از ۶+ داشته باشد.

عبارت سوم: عدد اکسایش فسفر در PF_5، ۵+ است که برابر با حداکثر عدد اکسایش آن است؛ بنابراین در این حالت فسفر نمی‌تواند الکترون دیگری از دست بدهد و اکسایش یابد، در واقع صرفاً می‌تواند کاهش یافته و نقش اکسنده را ایفا کند.

عبارت چهارم: برای فلز مس، علاوه بر عدد اکسایش صفر در حالت عنصری، اعداد اکسایش ۱+ و ۲+، در ترکیب‌ها شناخته شده است.

عبارت پنجم: حداکثر عدد اکسایش نیتروژن (N)، ۵+ است، در حالی که حداکثر عدد اکسایش اسکاندیم (Sc)، ۳+ است.

۸۴ دربارهٔ واکنش $S_2F_2 + H_2O \rightarrow S_8 + H_2S_4O_6 + HF$ پس از انجام موازنه، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- در این واکنش، عنصر گوگرد کاهنده و عنصر فلوئور اکسنده می‌باشد.
- به ازای تولید هر مول S_8، ۸ مول الکترون در واکنش مبادله می‌شود.
- مجموع اندازهٔ تغییر عدد اکسایش اتم‌های گوگرد، ۲ برابر ضریب H_2O در واکنش است.
- در $H_2S_4O_6$، عدد اکسایش اتم‌های گوگرد یکسان است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

موازنه به روش اکسایش ـ کاهش:

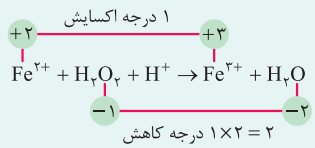
برای موازنهٔ واکنش‌های اکسایش ـ کاهش ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم، سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ کاهنده را ضریب گونهٔ اکسنده و مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ اکسنده را ضریب گونهٔ کاهنده قرار می‌دهیم و در آخر با توجه به ضرایبی که معلوم هستند، ضرایب بقیهٔ گونه‌ها را تعیین می‌کنیم.

توجه: برای موازنهٔ همهٔ واکنش‌ها نمی‌توان یک نسخهٔ واحد پیچید، ولی نکات زیر، کار شما را در موازنه‌هایی که *باهاش سروکار دارین! راه می‌ندازه:*

- در صورت ساده‌شدن عددهای مربوط به تغییر عدد اکسایش گونه‌های کاهنده و اکسنده، آن‌ها را ساده می‌کنیم؛ مثلاً اگر این اعداد ۲ و ۴ بودند، به جای آن‌ها از اعداد ۱ و ۲ استفاده می‌کنیم.
- تا حالا موازنه را از سمت چپ واکنش شروع می‌کردیم ولی به طور کلی اگر در یک سمت معادله، عنصری وجود داشته باشد که عدد اکسایش برخی اتم‌های آن تغییر کرده و عدد اکسایش برخی دیگر از اتم‌های آن تغییری نکرده باشد، موازنه را باید از آن سمت و از اتمی که عدد اکسایش آن تغییر کرده شروع کنیم.

مثال: برای موازنهٔ واکنش $Fe^{2+} + H_2O_2 + H^+ \rightarrow Fe^{3+} + H_2O$ به روش اکسایش ـ کاهش، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

اول محاسبهٔ تغییر عدد اکسایش اتم‌ها:



سپس ۲ (تغییر عدد اکسایش اتم‌های O در H_2O_2) را در ضریب Fe^{2+} و ۱ (تغییر عدد اکسایش Fe) را در ضریب H_2O_2 قرار می‌دهیم:

$$\overset{۲}{\_}Fe^{2+} + \overset{۱}{\_}H_2O_2 + \_H^+ \rightarrow \_Fe^{3+} + \_H_2O$$

به منظور برابرشدن تعداد اتم‌های Fe و O در دو سمت معادله، ضریب Fe^{3+} و H_2O را در ۲ قرار می‌دهیم:

$$\overset{۲}{\_}Fe^{2+} + \overset{۱}{\_}H_2O_2 + \_H^+ \rightarrow \overset{۲}{\_}Fe^{3+} + \overset{۲}{\_}H_2O$$

و در آخر برای موازنه‌شدن اتم‌های H و موازنهٔ بار، ضریب H^+ را در ۲ قرار می‌دهیم:

$$۲Fe^{2+} + H_2O_2 + ۲H^+ \rightarrow ۲Fe^{3+} + ۲H_2O$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند.

ابتدا معادلهٔ واکنش انجام‌شده را موازنه می‌کنیم:

$$S_2F_2 + H_2O \rightarrow S_8 + H_2S_4O_6 + HF$$

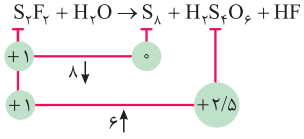
اول محاسبهٔ تغییر عدد اکسایش اتم‌ها:

$$S_2F_2: ۲S + (۲\times(-۱)) = ۰ \rightarrow S = +۱$$

$$S_8: S_8 = ۰ \rightarrow \bar{S} = ۰$$

$$H_2S_4O_6: +۲ + ۴S + (۶\times(-۲)) = ۰ \rightarrow \bar{S} = ۲/۵$$

بنابراین در این واکنش، اتم‌های گوگرد هم نقش کاهنده و هم نقش اکسنده را ایفا می‌کنند.



در نتیجه با توجه به تغییرات عدد اکسایش و چون این تغییرات بر ۲ بخش‌پذیرند، به S_8، ضریب ۳ و به $H_2S_4O_6$، ضریب ۴ می‌دهیم. در نهایت با دادن ضرایب مناسب به سایر مواد، معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$20S_2F_2 + 24H_2O \rightarrow 3S_8 + 4H_2S_4O_6 + 40HF$$

حالا بیایین یکی‌یکی عبارت‌هارو بررسی کنیم:

- *هواستون کجاست؟!* در این واکنش، عدد اکسایش فلوئور در دو سمت معادله و در ترکیب‌های آن ثابت و بدون تغییر است؛ در نتیجه نمی‌تواند اکسنده یا کاهنده باشد.
- به ازای تولید هر مول S_8 در این واکنش، ۸ الکترون مبادله می‌شود، چراکه عدد اکسایش گوگرد از ۱+ به صفر در آن رسیده و هر S_8 دارای ۸ گوگرد است.
- مجموع اندازهٔ تغییرات عدد اکسایش گوگرد در این واکنش، برابر است با:

$$3S_8 : |8 \times 3 \times (0-1)| = 24$$

$$4H_2S_4O_6 : |4 \times 4 \times 1/5| = 24$$

راستی چشم‌بسته هم می‌شه گفت که اندازهٔ تغییرات عدد اکسایش گوگرد در نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش باهم برابر است و نیازی به محاسبهٔ هر کدام به صورت مجزا نبود و در واقع محاسبهٔ یکی کافی بود!

بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{\text{مجموع تغییرات عدد اکسایش گوگرد}}{\text{ضریب } H_2O} = \frac{24+24}{24} = 2$$

- میانگین عدد اکسایش اتم‌های گوگرد در $H_2S_4O_6$، برابر ۲/۵+ است و مسلّماً عدد اکسایش هر اتم S، ۲/۵ نیست؛ در نتیجه عدد اکسایش اتم‌های گوگرد در این ترکیب، متفاوت می‌باشد.

۸۵ باتری‌های «روی ـ نقره»، از جمله باتری‌های دگمه‌ای هستند که در آن‌ها واکنش: $Zn(s)+Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s)+2Ag(s)$ ، انجام می‌شود. با توجه به آن، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ $(Ag = 108\ g.mol^{-1})$

$E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0/76\,V, E^\circ(Ag^+/Ag) = +0/8\,V$

- با مبادلهٔ $4/515\times10^{20}$ الکترون در این واکنش، ۸۱ میلی‌گرم فلز نقره تشکیل می‌شود.
- emf آن برابر ۰/۰۴ ولت است.
- اتم‌های روی و نقره در آن، به ترتیب نقش کاهنده و اکسنده را دارند.
- فلز روی، آند (قطب منفی) و فلز نقره، کاتد (قطب مثبت) آن را تشکیل می‌دهد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره: آشنایی با انواع سلول‌های الکتروشیمیایی معرفی‌شده در کتاب درسی و شناسایی گونه‌های اکسنده و کاهنده و هم‌چنین نیم‌واکنش‌های کاهش و اکسایش در آن‌ها، از مهم‌ترین و پرتکرارترین مباحث در کنکور سراسری است.

نکته

باتری دگمه‌ای روی ـ نقره (نوعی سلول گالوانی)

- معادلهٔ واکنش کلی انجام‌شده: $Zn(s)+Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s)+2Ag(s)$
- Zn گونهٔ کاهنده (اکسایش می‌یابد.) ← Ag_2O گونهٔ اکسنده (کاهش می‌یابد.)
- اکسایش حول Zn انجام می‌شود. ← آند: $Zn(s)$
- کاهش حول Ag_2O انجام می‌شود. ← کاتد: $Ag_2O(s)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تنها عبارت اول درست است.

بررسی عبارت‌ها:

در این واکنش، به ازای مبادلهٔ هر مول الکترون، ۱ مول فلز نقره تشکیل می‌شود: $Ag^+ + e^- \rightarrow Ag$

بنابراین داریم:

$$\frac{4/515\times10^{20}\,e^-}{6/02\times10^{23}\,e^-}\times\frac{1\,mol\,e^-}{1\,mol\,e^-}\times\frac{1\,mol\,Ag}{1\,mol\,Ag}\times\frac{108\,g\,Ag}{1\,mol\,Ag}\times\frac{10^3\,mg}{1\,g} = \frac{3}{4}\times108 = \left(\frac{2}{4}\times108\right)+\left(\frac{1}{4}\times108\right)$$

$$= 54+27 = 81\,mg\,Ag$$

emf سلول برابر است با: $emf = E^\circ_{(کاتد)} - E^\circ_{(آند)} = 0/8-(-0/76) = 1/56\,V$

در این سلول، اتم‌های روی از Zn به Zn^{2+} اکسایش می‌یابند و نقش کاهنده را دارند، در حالی که **یون‌های نقره** (نه اتم‌های نقره!) از Ag^+ به Ag کاهش می‌یابند و نقش اکسنده را دارند.

Zn، آند (قطب منفی) و Ag_2O (نه Ag!)، کاتد (قطب مثبت) باتری را تشکیل می‌دهند.

باتری‌های «روی ـ نقره»، از جمله باتری‌های دگمه‌ای هستند که در آن‌ها واکنش: $Zn(s)+Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s)+2Ag(s)$ ، انجام می‌شود. با توجه به آن، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ $(Ag = 108: g.mol^{-1})$ *(تجربی داخل ۱۴۰۱)*

$E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0/76\,V, E^\circ(Ag^+/Ag) = +0/8\,V$

- emf آن برابر ۱/۵۶ ولت است.
- اتم‌های نقره در آن، نقش اکسنده را دارند.
- اتم‌های روی در آن، نقش کاهنده را دارند.
- روی، آند (قطب مثبت) و نقره، کاتد (قطب منفی) آن را تشکیل می‌دهند.
- با مبادلهٔ $3/01\times10^{20}$ الکترون در باتری، ۵۴ میلی‌گرم فلز نقره تشکیل می‌شود.

۱) پنج ۲) چهار ۳) سه ۴) دو

۸۶ کدام مورد دربارهٔ برقکافت آب، نادرست است؟

۱) با اعمال یک ولتاژ بیرونی و عبور جریان الکتریکی از درون محلول الکترولیت، می‌توان یک واکنش شیمیایی را در خلاف جهت طبیعی پیش راند.

۲) برای برقکافت آب باید مقدار زیادی الکترولیت به آب افزود؛ زیرا آب خالص رسانای الکتریکی ناچیزی دارد.

تولید یون H^+ ← آند — کاتد → تولید یون OH^-

۳) در سلول الکترولیتی برقکافت آب، کاغذ pH در محلول پیرامون آند و کاتد به ترتیب به رنگ‌های قرمز و آبی درمی‌آید.

۴) در شرایط یکسان، حجم گاز آزادشده در کاتد دو برابر حجم گاز آزادشده در آند است.

گاز H_2 ← آند — کاتد → گاز O_2

درس Box

برقکافت آب

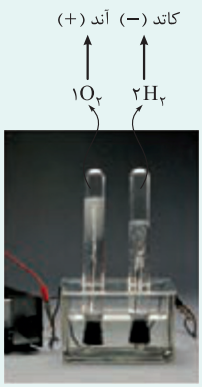
یکی از کاربردهای سلول‌های الکترولیتی که در آن‌ها با عبور جریان الکتریکی از درون محلول الکترولیت، واکنش شیمیایی در خلاف جهت طبیعی پیش می‌رود، برقکافت آب است.

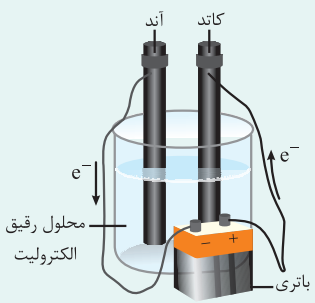
الکترود آند: H_2O در واکنش اکسایش شرکت می‌کند و در آن اتم اکسیژن دچار اکسایش می‌شود؛ در نتیجه مولکول اکسیژن $(O_2(g))$ تولید می‌شود:

نیم‌واکنش آندی (اکسایش) درقطب مثبت: $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$

الکترود کاتد: H_2O در واکنش کاهش شرکت می‌کند و در آن اتم هیدروژن دچار کاهش می‌شود؛ در نتیجه مولکول هیدروژن $(H_2(g))$ تولید می‌شود:

نیم‌واکنش کاتدی (کاهش) درقطب منفی: $4H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 2H_2(g) + 4OH^-(aq)$





آند ← اکسایش ← اکسیژن ← اسیدی (H^+)

هرچه بالا بود برعکس کن!

کاتد ← کاهش ← هیدروژن ← بازی (OH^-)

آب خالص رسانای الکتریکی ناچیزی دارد؛ پس برای برقکافت آن باید اندکی الکترولیت به آب اضافه کرد.

نکته

در اطراف آند، pH کاهش می‌یابد (تولید H^+) و رنگ کاغذ pH قرمز می‌شود.

در اطراف کاتد، pH افزایش می‌یابد (تولید OH^-) و رنگ کاغذ pH آبی می‌شود.

طبق ضرایب گازهای هیدروژن و اکسیژن در واکنش کلی، حجم گاز H_2 تولیدشده در کاتد، دو برابر حجم گاز O_2 تولیدشده در آند است و بدین ترتیب می‌توانیم کاتد و آند را روی شکل تشخیص دهیم:

$$2H_2O(l) \rightarrow \underbrace{2H_2(g)}_{\text{اطراف کاتد}} + \underbrace{O_2(g)}_{\text{اطراف آند}}$$

پاسخ خیلی تشریحی

برای برقکافت آب، باید **اندکی** الکترولیت به آب افزود. اگر الکترولیت اضافه‌شده زیاد باشد، ممکن است یون‌های موجود در الکترولیت برای اکسایش یا کاهش با مولکول‌های آب رقابت کنند و حتی در این رقابت پیروز شوند!

درستی سایر عبارت‌ها رو می‌تونین تو درس‌باکس بالا پیدا کنین!

۸۷ کدام مورد دربارهٔ خوردگی فلزها، درست است؟

۱) ظرف نقره‌ای در اثر انجام یک واکنش اکسایش ـ کاهش، کدر شده و در اثر انجام همان واکنش جلا می‌یابد.

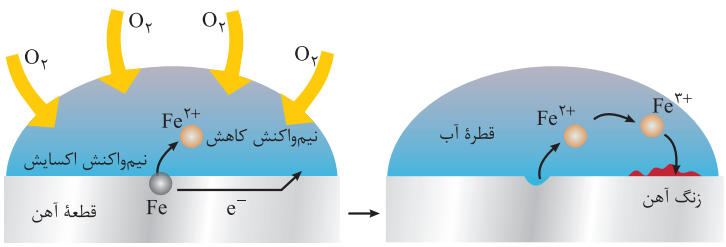
۲) خوردگی آهن خسارت‌های هنگفتی به اقتصاد کشورها وارد می‌کند، به طوری که سالانه یک‌چهارم از آهن تولیدی برای جایگزینی قطعه‌های خورده‌شده مصرف می‌شود.

۳) پتانسیل کاهشی همهٔ فلزها منفی بوده، اما پتانسیل کاهشی اکسیژن مثبت است؛ از این‌رو هنگامی که وسایل فلزی در هوای مرطوب قرار گیرند، یک واکنش اکسایش ـ کاهش انجام می‌شود.

۴) فراوردهٔ نهایی خوردگی آهن، از انتقال یون‌های حاصل از فرایند اکسایش و رسیدن آن‌ها به یون‌های حاصل از فرایند کاهش، تشکیل می‌شود.

- $Fe(OH)_3$
- ابتدا یون‌های Fe^{2+} و سپس تبدیل آن به یون‌های Fe^{3+}
- یون‌های OH^-

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مطابق شکل زیر، یون‌های حاصل از فرایند اکسایش، یعنی یون‌های Fe^{3+} در قطرهٔ آب حرکت کرده و به یون‌های حاصل از فرایند کاهش، یعنی یون‌های OH^- رسیده و فرآورده نهایی فرایند خوردگی، یعنی $Fe(OH)_3$ تشکیل می‌شود.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): هر دو واکنش مورد نظر، از نوع اکسایش ـ کاهش هستند؛ اما واکنش‌هایی **متفاوت** می‌باشند.

گزینهٔ (۲): سالانه حدود ۲۰ درصد (یعنی $\frac{۱}{۵}$) از آهن تولیدی، برای جایگزینی قطعه‌های خورده‌شده مصرف می‌شود.

گزینهٔ (۳): پتانسیل کاهشی **اغلب** فلزها منفی است؛ نه همهٔ آن‌ها! به عنوان مثال فلزهایی مثل طلا و پلاتین با پتانسیل کاهشی مثبت، با اکسیژن واکنش نمی‌دهند. به همین خاطر با گذشت زمان، فلز طلا در هوای مرطوب و حتی در اعماق دریا، هم‌چنان درخشان باقی می‌ماند.

۸۸ کدام موارد زیر با توجه به اطلاعات کتاب درسی، درست است؟

الف) در فرایند خوردگی آهن، آب هم نقش واکنش‌دهنده و هم نقش الکترولیت را دارد.

ب) اتم‌های آهن طی یک مرحله با O_2 و H_2O واکنش داده و رسوب قرمز آجری‌رنگ ایجاد می‌کنند.

پ) قلع به دلیل $E^\circ > 0$ با اسیدهای مواد غذایی واکنش نداده و می‌تواند در ساخت قوطی‌های کنسرو مواد غذایی به کار رود.

ت) فرایند خوردگی آهن در شرایط اسیدی تسریع شده و انرژی آزادشده طی این فرایند نیز بیشتر می‌شود.

۱) الف ـ پ　　۲) الف ـ ت

۳) ب ـ پ　　۴) ب ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) H_2O در فرایند خوردگی آهن، هم به عنوان واکنش‌دهنده و هم به عنوان الکترولیت جهت انتقال یون‌های حاصل، نقش ایفا می‌کند.

ب) *مطابق کتاب درسی* آهن طی دو مرحله اکسید شده و ابتدا یون Fe^{2+} و سپس یون Fe^{3+} را ایجاد می‌نماید.

پ) *هواستون باشه که* E° قلع منفی است، اما با اسیدهای موجود در مواد غذایی به علت ضعیف‌بودن واکنش نمی‌دهد!

ت) فرایند خوردگی مشابه یک سلول گالوانی است که در شرایط اسیدی، نیم‌واکنش کاهش E° مثبت‌تری خواهد داشت و هم‌چنین سرعت فرایند نیز بیشتر می‌شود. از طرفی می‌دانیم که هر چه قدر emf یک سلول بیشتر باشد، انرژی بیشتری طی انجام آن فرایند مبادله می‌شود.

- $O_2 + 2H_2O + 4e^- \rightarrow 4OH^- \ , \ E^\circ = -0/83\,V$
- $4H^+ + 4e^- + O_2 \rightarrow 2H_2O \ , \ E^\circ = 1/23\,V$

در محیط اسیدی و در حضور یون‌های H^+، نیم‌واکنش دوم انجام می‌شود و بدین ترتیب emf فرضی سلول و سرعت واکنش افزایش می‌یابد.

۸۹ شکل مقابل بخشی از یک ورقهٔ آهنی را نشان می‌دهد که با لایهٔ نازکی از قلع پوشیده شده است. با توجه به آن، کدام مطلب نادرست است؟



۱) در اثر ایجاد خراش در سطح این نوع آهن، فلز آهن خورده شده و فلز قلع در برابر خوردگی محافظت می‌شود.

۲) نیم‌واکنش موازنه‌شدهٔ اکسایش در صورت ایجاد خراش در آن، به صورت $Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$ است.

۳) نیم‌واکنش موازنه‌شدهٔ کاهش در صورت ایجاد خراش در آن، به صورت $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ است.

۴) برخلاف حلبی، از آهن گالوانیزه می‌توان برای ساختن ظروف بسته‌بندی مواد غذایی استفاده کرد.

ورقهٔ آهنی با پوشش فلز قلع

ورقهٔ آهنی با پوشش فلز روی

درس Box

حلبی

- ورقهٔ آهنی با پوشش نازکی از فلز قلع (Sn)
- برای ساختن قوطی‌های روغن نباتی و کنسرو استفاده می‌شود.
- اگر خراش ایجاد نشود، آهن در معرض هوا نبوده و حفاظت می‌شود.
- اگر خراش ایجاد شود، آهن (Fe) و قلع (Sn) برای اکسایش رقابت می‌کنند و چون فلز آهن، کاهنده‌تر از قلع است، در نتیجه آهن اکسید شده و دچار خوردگی می‌شود.
- نیم‌واکنش‌های انجام‌شده در حلبی خراشیده، مشابه نیم‌واکنش‌های خوردگی آهن است:

نیم‌واکنش اکسایش: $Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

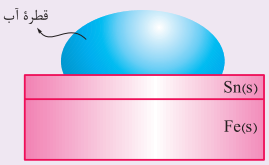
در ادامهٔ ماجرا مانند زنگ‌زدن آهن، Fe^{2+} به Fe^{3+} اکسایش یافته و در آخر هم زنگ آهن $(Fe(OH)_3)$ تشکیل می‌شود.

- قوطی‌هایی از جنس حلبی در اثر خراش، زودتر و آسان‌تر دچار خوردگی می‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ از ورقه‌های حلبی برای ساخت ظروف بسته‌بندی مواد غذایی استفاده می‌شود، زیرا اسیدهای موجود در مواد غذایی و میوه‌ها بر فلز قلع اثر نمی‌کنند، در حالی که این اسیدها با فلز روی واکنش می‌دهند؛ به همین دلیل مواد غذایی در مجاورت حلبی، مدت بیشتری سالم می‌مانند.

درستی سایر گزینه‌ها را می‌توانید در درس‌باکس فوق بیابید.

شکل زیر بخشی از یک ورقهٔ آهنی را نشان می‌دهد که با لایهٔ نازکی از قلع پوشیده شده است. به این نوع آهن، حلبی می‌گویند. از ورقه‌های حلبی برای ساختن قوطی‌های روغن نباتی و کنسرو استفاده می‌شود. با مراجعه به جدول E°: (خود را بیازمایید صفحهٔ ۵۹)



آ) در اثر ایجاد خراش در سطح این نوع آهن، کدام فلز خورده می‌شود و کدام فلز در برابر خوردگی محافظت می‌شود؟

ب) نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش را بنویسید.

پ) توضیح دهید چرا برخلاف حلبی، از آهن گالوانیزه نمی‌توان برای ساختن ظروف بسته‌بندی مواد غذایی استفاده کرد؟

۹۰ در صورت اکسیدشدن مقداری فلز آلومینیم و تبدیل آن به Al_2O_3، به جرم نمونهٔ جامد، ۵۶٪ افزوده شده است. در صورتی که با همین بازدهی، فلز آهن مطابق واکنش زیر دچار زنگ‌زدن شود، به جرم آهن چند درصد افزوده می‌شود؟

(واکنش‌ها موازنه شوند؛ $Fe = ۵۶, Al = ۲۷, O = ۱۶, H = ۱ : g.mol^{-1}$)

$$Al(s) + O_2(g) \rightarrow Al_2O_3(s)$$

$$Fe(s) + O_2(g) + H_2O(l) \rightarrow Fe(OH)_3(s)$$

۱) ۶۵ / ۴۳۵ ۲) ۵۰ / ۲۲۵

۳) ۵۷ / ۳۷۵ ۴) ۷۲ / ۴۲۵

Hint ابتدا محاسبه کن که اگر بازده درصدی واکنش، ۱۰۰٪ باشد، چند درصد به جرم Al افزوده می‌شود، سپس بازده این واکنش را با توجه به این‌که ۵۶٪ به جرم Al افزوده شده به دست بیاور. در نهایت با توجه به بازده به‌دست‌آمده، درصد افزایش جرم Fe را حساب کن! البته *یه وقت موازنه‌کردن معادله‌ها رو از یاد نبری!*

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** معادلهٔ واکنش‌های انجام‌شده را موازنه می کنیم:

$$۴Al(s) + ۳O_2(g) \rightarrow ۲Al_2O_3(s)$$

$$۴Fe(s) + ۳O_2(g) + ۶H_2O(l) \rightarrow ۴Fe(OH)_3(s)$$

گام دوم: در واکنش اول، مواد جامد از $۴Al$ به $۲Al_2O_3$ تبدیل شده‌اند؛ گویا جرم $۴Al$، به اندازهٔ ۶ اتم O افزایش پیدا کرده است؛ در نتیجه اگر بازده واکنش را x٪ در نظر بگیریم، درصد افزایش جرم نمونهٔ جامد برابر خواهد بود با:

$$\text{درصد افزایش جرم نمونهٔ جامد} = \frac{\text{جرم } ۶O}{\text{جرم } ۴Al} \times \underbrace{\frac{x}{۱۰۰}}_{\text{بازده واکنش}} \times ۱۰۰ = ۵۶$$

$$\Rightarrow \frac{۶ \times ۱۶}{۴ \times ۲۷} \times x = ۵۶ \Rightarrow x = \frac{۴ \times ۲۷ \times ۵۶}{۶ \times ۱۶} = ٪۶۳$$

در نتیجه بازده واکنش، برابر با ۶۳٪ است.

گام سوم: در واکنش دوم، مواد جامد از $۴Fe$ به $۴Fe(OH)_3$ تبدیل شده‌اند؛ گویا جرم $۴Fe$ به اندازهٔ ۱۲ یون OH^- افزایش یافته است؛ در نتیجه در این واکنش، جرمی که به آهن افزوده می‌شود را می‌توانیم *به راحتی بسنجیم*:

$$\text{درصد افزایش جرم فلز آهن} = \frac{\text{جرم } ۱۲OH^-}{\text{جرم } ۴Fe} \times \underbrace{\frac{۶۳}{۱۰۰}}_{\text{بازده واکنش}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۲ \times ۱۷}{۴ \times ۵۶} \times ۶۳ = \frac{۵۱}{۸} \times ۹ = (\frac{۴۸}{۸} + \frac{۳}{۸}) \times ۹$$

$$= ۵۴ + \frac{۲۷}{۸} = ۵۴ + \frac{۲۴}{۸} + \frac{۳}{۸} = ۵۷\frac{۳}{۸} = ٪۵۷ / ۳۷۵$$

تیزبازی در مورد درصد افزایش جرم در هر دو واکنش، نیازی به موازنهٔ واکنش‌ها نیست! می‌توان در واکنش اول، درصد افزایش جرم را به ازای هر مول Al و در واکنش دوم، به ازای هر مول Fe به دست آورد که به ترتیب به اندازهٔ ۳ اتم O و ۳ یون OH^-، دچار افزایش جرم می‌شوند. ☺

۹۱ کدام مطلب زیر دربارهٔ آبکاری یک قاشق آهنی با فلز طلا، نادرست است؟ $(E^\circ(Au^{3+}/Au)=1/5V, Au=197g.mol^{-1})$

۱) با فرض رسوب نیمی از یون‌های کاهیده‌شده Au^{3+} روی قاشق آهنی، حین عبور ۰/۶ مول الکترون از سلول آبکاری، جرم قاشق به میزان ۱۹/۷ گرم افزایش می‌یابد.

۲) الکترولیت موجود در این سلول الکترولیتی، حاوی یون‌های طلا است و غلظت آن حین آبکاری تغییر محسوسی نمی‌کند.

۳) برای انجام این فرایند، الکترون‌ها از آند به سمت کاتد مهاجرت می‌نمایند.

۴) با توجه به این‌که نیم‌واکنش‌های کاتدی و آندی در این سلول مشابه یکدیگرند، E° مربوط به واکنش کلی، $-3V$ است.

مشاوره در سؤالات غیر چند موردی و مفهومی، غالباً در حداقل یک گزینه دام وجود دارد؛ لذا بهتر است تمام گزینه‌ها را بررسی نمایید.

پاسخ خیلی تشریحی

برای آبکاری قاشق آهنی با فلز طلا، باید طلا را در قطب مثبت (آند) قرار داد که اکسایش یابد. هر یک از نیم‌واکنش‌های انجام‌شده در کاتد و آند این سلول، عبارت است از:

نیم‌واکنش اکسایش (آندی): $Au_{(s)} \rightarrow Au^{3+}_{(aq)} + 3e^-$

نیم‌واکنش کاهش (کاتدی): $Au^{3+}_{(aq)} + 3e^- \rightarrow Au_{(s)}$

بنابراین هر ۱ مول فلز Au که (در سمت آندی) وارد محلول می‌شود، همان مقدار به صورت فلزی (در سمت کاتدی) از محلول خارج می‌شود.

با توجه به نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش، E° واکنش کلی برابر صفر است $(E^\circ_{کلی} = E^\circ_{کاتد} - E^\circ_{آند} = 1/5 - 1/5 = 0V)$؛ چراکه نیم‌واکنش‌های انجام‌شده **قرینهٔ** یکدیگر هستند، اما حداقل ولتاژ مورد نیاز برای انجام این فرایند، همان است که فرایند اکسایش را بتواند انجام بدهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به این‌که فلز طلا روی جسم قرار می‌گیرد، داریم: $Au^{3+}_{(aq)} + 3e^- \rightarrow Au_{(s)}$

$$0/6\,mol\,e^- \times \frac{1\,mol\,Au}{3\,mol\,e^-} \times \frac{197\,g\,Au}{1\,mol\,Au} \times \frac{50}{100} = 19/7\,g\,Au$$

گزینهٔ (۲): در این سلول آبکاری، از نمک محلول فلز Au باید به عنوان الکترولیت استفاده شود، در واقع الکترولیت باید حاوی یون‌های Au^{3+} باشد. هر مقدار یون که وارد محلول می‌شود، همان مقدار از محلول خارج می‌شود؛ در نتیجه غلظت یون‌های محلول الکترولیت طی فرایند آبکاری، تغییر نمی‌کند.

گزینهٔ (۳): *بله!* در هر دو نوع سلول گالوانی و الکترولیتی، در کاتد، فرایند کاهش و در آند، فرایند اکسایش انجام می‌شود و الکترون‌ها از آند به سمت کاتد مهاجرت می‌کنند.

۹۲ در صورتی که الکتریسیتهٔ لازم جهت انجام فرایند هال را از طریق سلول سوختی هیدروژن تأمین نماییم، برای تولید ۴۳۲ کیلوگرم فلز آلومینیم با خلوص ۵۰ درصد، در مجموع چند مول کربن دی‌اکسید و آب تولید می‌شود؟ $(Al = 27\ g.mol^{-1})$

۱) ۱۲۰۰۰
۲) ۱۸۰۰۰
۳) ۲۴۰۰۰
۴) ۳۰۰۰۰

Hint

ابتدا شمار مول‌های Al را محاسبه کن و شمار مول‌های CO_2 تولیدی در فرایند هال را با توجه به آن، به دست بیاور، سپس با توجه به شمار الکترون‌های مبادله‌شده در فرایند هال و سلول سوختی، شمار مول‌های H_2O تولیدی در سلول سوختی را محاسبه کن! *و تمام!*

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شمار مول‌های فلز Al تولیدی در فرایند هال را محاسبه می‌کنیم:

$$432\,kg\,Al \times \frac{1000\,g}{1\,kg} \times \underbrace{\frac{50}{100}}_{\text{درصد خلوص}} \times \frac{1\,mol\,Al}{27\,g\,Al} = 8000\,mol\,Al$$

گام دوم: شمار مول‌های CO_2 تولیدشده در فرایند هال را حساب می‌کنیم:

در فرایند هال، واکنش نهایی به صورت زیر است:

$$2Al_2O_3(l) + 3C(s) \rightarrow 4Al(l) + 3CO_2 \sim 12e^-$$

$$8000\,mol\,Al \times \frac{3\,mol\,CO_2}{4\,mol\,Al} = 6000\,mol\,CO_2$$

گام سوم: با توجه به معادلهٔ واکنش کلی انجام‌شده در سلول سوختی هیدروژن و تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در آن، شمار مول‌های H_2O تولیدشده در این سلول را به دست می‌آوریم:

$$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g) \sim 4e^-$$

$$8000\,mol\,Al \times \frac{12\,mol\,e^-}{4\,mol\,Al} \times \frac{2\,mol\,H_2O}{4\,mol\,e^-} = 12000\,mol\,H_2O$$

گام چهارم: CO_2 تنها در فرایند هال و H_2O تنها در سلول سوختی هیدروژن تولید می‌شود؛ در نتیجه می‌توانیم به راحتی کل تعداد مول‌های CO_2 و H_2O تولیدشده در این فرایندها را *بسابیم*:

$$mol\,CO_2 + mol\,H_2O = 6000 + 12000 = 18000\,mol$$

۹۳ کدام مطلب، نادرست است؟

۱) فلز اصلی سازندهٔ وسایلی مانند وسایل آشپزخانه، شیرآلات ساختمان و دستگیرهٔ در، آهن یا مس است.

۲) سطح اغلب وسایل آشپزخانه را با فلزهایی مانند نقره، کروم، نیکل و طلا می‌پوشانند.

۳) برخی از فلزها مثل آلومینیم، با این‌که اکسایش می‌یابند، اما خورده نمی‌شوند.

۴) تولید قوطی‌های آلومینیمی از فرایند هال، فقط به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیهٔ همان تعداد قوطی از قوطی‌های کهنه نیاز دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه، تنها به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیهٔ همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد؛ *یعنی بازیافت خیلی بهتره!*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌های (۱) و (۲): در زندگی روزانه از وسایل و ابزار گوناگونی مانند وسایل آشپزخانه، شیرآلات ساختمان، دستگیرهٔ در و ... استفاده می‌شود که فلز اصلی سازندهٔ آن‌ها **آهن** یا **مس** است. خوردگی این فلزها از یک سو سبب از بین رفتن زیبایی وسیله می‌شود و از سوی دیگر به سلامتی بدن آسیب می‌رساند. به همین دلیل، سطح اغلب این وسایل فلزی را با فلزهایی مانند **نقره، کروم، نیکل و طلا** می‌پوشانند.

گزینهٔ(۳): آلومینیم یک فلز فعال است (E° آن، کوچک و منفی است) و به سرعت در هوا اکسید شده و به آلومینیم اکسید (Al_2O_3) تبدیل می‌شود، اما با این وجود، وسایل آلومینیمی در برابر خوردگی مقاوم هستند؛ زیرا آلومینیم اکسید، ساختاری متراکم و پایدار دارد. با تشکیل آلومینیم اکسید بر سطح فلز آلومینیم، لایهٔ اکسید، محکم به سطح فلز می‌چسبد و از نفوذ اکسیژن به لایه‌های زیرین و در نتیجه از ادامهٔ اکسایش فلز آلومینیم جلوگیری می‌کند. این ویژگی آلومینیم باعث شده که از آن در ساخت لوازم خانگی، هواپیما، کشتی و ... استفاده شود.

شیمی یازدهم

۹۴ **نفت خام در دنیای کنونی دو نقش اساسی ایفا می‌کند. این دو نقش اساسی کدام است؟**

۱) منبع تأمین انرژی ـ مادهٔ اولیه برای تهیهٔ بسیاری از مواد و کالاها

۲) حل مشکل حمل‌ونقل ـ ساخت داروهای تازه

۳) سوخت در وسایل نقلیه ـ تأمین گرما و انرژی الکتریکی مورد نیاز

۴) تولید الیاف و پارچه ـ تولید پلاستیک و لاستیک

مشاوره در کنکورهای سراسری، برخی تست‌ها، خیلی ساده هستند و برخی به طور مستقیم از متن و شکل‌های کتاب درسی استخراج می‌شوند؛ پس تسلط روی متن و شکل‌های کتاب درسی از *اوجب واجبات! فلاصه که این تست‌های ساده رو از دست بدی خیلی ضرر کردی!*

پاسخ خیلی تشریحی ✔

امروزه نفت خام در دنیای کنونی دو نقش اساسی ایفا می‌کند. نقش نخست آن، **منبع تأمین انرژی** بوده و در نقش دوم، این ماده، **مادهٔ اولیه برای تهیهٔ بسیاری از مواد و کالاهایی** است که در صنایع گوناگون از آن‌ها استفاده می‌شود.

گول نخوری ✘

خواستون باشه که موارد مطرح‌شده در دیگر گزینه‌ها هم جزء کاربردها و مزایای استفاده از نفت خام هستند، ولی از نقش‌های اساسی این ماده محسوب نمی‌شوند.

۹۵ مقداری از آلکان X را در حضور اکسیژن کافی به طور کامل می‌سوزانیم. اگر جرم آب تولیدشده در این فرایند، ۱/۵ برابر جرم آلکان مصرف‌شده باشد، چند ساختار مختلف می‌توان برای آلکان X در نظر گرفت؟ $(O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1})$

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۵ ۴) ۹

مشاوره رسم ایزومرها، دوباره امسال در کنکور مورد پرسش قرار گرفت! در نتیجه چون احتمال تکرار آن بالاست، لطفاً از تست‌های ایزومرها، بدون حل عبور نکنید!

پاسخ خیلی تشریحی

فرمول مولکولی آلکان X را به صورت C_nH_{2n+2} در نظر گرفته و معادلهٔ واکنش سوختن کامل آن را می‌نویسیم:

$$C_nH_{2n+2} + \frac{3n+1}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + (n+1)H_2O$$

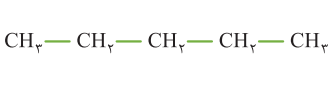
اگر یک مول آلکان X در این واکنش مصرف شود، $(n+1)$ مول آب تولید می‌شود؛ بر این اساس داریم:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{C_nH_{2n+2}}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{H_2O}} \xrightarrow{\text{جرم آلکان مصرفی} \times 1/5 = \text{جرم آب تولیدی}} \frac{1}{\underbrace{1 \times (14n+2)}_{C_nH_{2n+2}}} = \frac{1/5}{\underbrace{(n+1) \times 18}_{H_2O}}$$

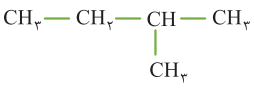
$$\Rightarrow 21n + 3 = 18n + 18 \Rightarrow 3n = 15 \Rightarrow n = 5$$

بنابراین آلکان X، همون پنتان (C_5H_{12}) خودمونه!

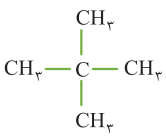
در نهایت باید انواع ساختارهای ممکن برای پنتان را رسم کنیم:



پنتان (راست‌زنجیر)



۲ـ متیل بوتان (متیل بوتان)



۲، ۲ـ دی‌متیل پروپان (دی‌متیل پروپان)

یه‌جور دیگه *بدانید و آگاه باشید!* تعداد ساختارهای متفاوتی که می‌توان برای آلکان‌ها از ۴ تا ۷ کربن نوشت را می‌توان از رابطهٔ زیر به دست آورد که در آن، n شمار اتم‌های کربن است.

$$\text{تعداد ساختارهای متفاوت برای یک فرمول مولکولی (تعداد ایزومرها)} = 2^{n-4} + 1, 4 \le n \le 7$$

$C_4H_{10}: n=4 \Rightarrow$ تعداد ساختارها $= 2^{4-4} + 1 = 2^0 + 1 = 2$

$C_5H_{12}: n=5 \Rightarrow$ تعداد ساختارها $= 2^{5-4} + 1 = 2^1 + 1 = 3$

$C_6H_{14}: n=6 \Rightarrow$ تعداد ساختارها $= 2^{6-4} + 1 = 2^2 + 1 = 5$

$C_7H_{16}: n=7 \Rightarrow$ تعداد ساختارها $= 2^{7-4} + 1 = 2^3 + 1 = 9$

در نتیجه برای پنتان (C_5H_{12})، می‌توان ۳ ساختار مختلف در نظر گرفت.

۹۶ کدام مورد، نادرست است؟

۱) آلکان‌ها دسته‌ای از هیدروکربن‌ها هستند که در آن‌ها هر اتم کربن با چهار پیوند یگانه به اتم‌های کناری متصل شده است.

۲) در هر آلکان راست‌زنجیر، هر اتم کربن به یک یا دو اتم کربن دیگر متصل است.

۳) گران‌روی و چسبندگی گریس کم‌تر از وازلین است. $C_{25}H_{52}$ $C_{18}H_{38}$

۴) افرادی که با گریس کار می‌کنند، می‌توانند در درازمدت و بدون هیچ مشکلی دستشان را با بنزین یا نفت بشویند.

پاسخ خیلی تشریحی

افرادی که با گریس کار می‌کنند، دستشان را با بنزین یا نفت (مخلوطی از هیدروکربن‌ها) می‌شویند؛ اما **شستن پوست یا تماس آن با آلکان‌های مایع، در درازمدت به بافت‌های پوست آسیب می‌رساند؛** *بنابراین بدون مشکل نخواهد بود!*

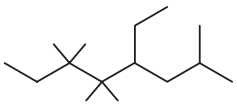
بررسی سایر گزینه‌ها:

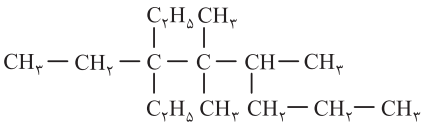
گزینهٔ (۱): آلکان‌ها ترکیب‌های سیرشده هستند و در ساختار آن‌ها، هر اتم کربن با چهار پیوند یگانه به اتم‌های کناری متصل شده است.

گزینهٔ (۲): در آلکان‌های راست‌زنجیر، هر اتم کربن به **یک یا دو اتم کربن دیگر** متصل است؛ در حالی که در آلکان شاخه‌دار، **برخی کربن‌ها به سه یا چهار اتم کربن دیگر متصل‌اند.**

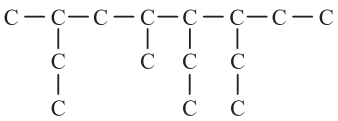
گزینهٔ (۳): گریس با فرمول تقریبی $C_{18}H_{38}$، گران‌روی و چسبندگی کم‌تری نسبت به وازلین با فرمول تقریبی $C_{25}H_{52}$ دارد.

۹۷ مجموع شمارهٔ شاخه‌های فرعی در نام‌گذاری کدام‌یک از آلکان‌های زیر براساس قواعد آیوپاک، کم‌تر است؟

۱) 

۲) 

۳) $CH(C_2H_5)_2-CH(CH_3)-C(C_2H_5)_3$

۴) 

درس Box

نام‌گذاری آلکان‌های شاخه‌دار:

مراحل نام‌گذاری آلکان‌های شاخه‌دار به صورت زیر است:

۱) انتخاب زنجیر اصلی: زنجیری که بیشترین تعداد اتم‌های کربن را دارد، به عنوان زنجیر اصلی انتخاب می‌شود. اگر دو زنجیر با بیشترین تعداد کربن وجود داشته باشد، زنجیری را به عنوان زنجیر اصلی در نظر می‌گیریم که بیشترین تعداد شاخهٔ فرعی را داشته باشد.

۲) شماره‌گذاری زنجیر اصلی: شماره‌گذاری در زنجیر اصلی را از سمتی انجام می‌دهیم که زودتر به اولین شاخهٔ فرعی برسیم.

الف) اگر فاصلهٔ اولین شاخهٔ فرعی از دو سر زنجیر اصلی یکسان باشد، شماره‌گذاری را از سمتی شروع می‌کنیم که زودتر به دومین شاخهٔ فرعی برسیم. به طور کلی شماره‌گذاری را از سمتی انجام می‌دهیم که از کنار هم گذاشتن عددهای مربوط به کربن‌های دارای شاخهٔ فرعی، عدد کوچک‌تری به دست آید.

ب) اگر شماره‌گذاری از هر دو سمت کاملاً یکسان بود، شماره‌گذاری را از سمتی انجام می‌دهیم که به شاخه‌ای که نام آن در حروف الفبای انگلیسی تقدم دارد، نزدیک‌تر باشد. به طور مثال، اگر شاخه‌های فرعی تنها شامل متیل (Methyl) و اتیل (Ethyle) بود، شماره‌گذاری را از سمتی انجام می‌دهیم که زودتر به شاخهٔ فرعی اتیل برسیم.

توجه: در برخی از آلکان‌ها، به جای بعضی از اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار، اتم‌های هالوژن (F ، Cl ، Br و I) به عنوان شاخهٔ فرعی قرار می‌گیرند. نام این شاخه‌های فرعی به ترتیب فلوئورو (Fluoro)، کلرو (Choloro)، برمو (Bromo) و یدو (Iodo) می‌باشد. با توجه به ترتیب حروف الفبای انگلیسی، ترتیب نام شاخه‌های فرعی مهم *این پوریاست*:

۱) برمو: $-Br$

۲) کلرو: $-Cl$

۳) اتیل: $-C_2H_5$ یا $-CH_2-CH_3$

۴) فلوئورو: $-F$

۵) یدو: $-I$

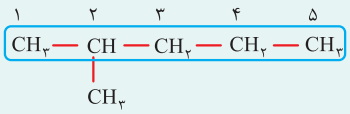
۶) متیل: $-CH_3$

۳) نوشتن نام آلکان: در این مرحله، ابتدا شماره(های) کربنی که شاخه(های) فرعی به آن متصل است و نام شاخه(های) فرعی را آورده و سپس نام آلکان مربوط به زنجیر اصلی را می‌نویسیم.

الف) در صورت وجود چند شاخهٔ فرعی، هنگام نوشتن نام، باید اسم شاخه‌های فرعی را به ترتیب تقدم حرف اول نام لاتین آن‌ها بیاوریم و اصلاً کاری نداریم که این شاخه‌ها روی کدام کربن‌های زنجیر اصلی قرار دارند.

ب) اگر یک آلکان دارای چند شاخهٔ فرعی یکسان باشد (مثلاً دو یا سه تا متیل) برای نام‌گذاری این شاخه‌ها، ابتدا شمارهٔ کربن‌هایی که این شاخهٔ فرعی را دارند نوشته، سپس تعداد شاخه‌های فرعی را با عدد یونانی (مثلاً دی، تری و ...) مشخص کرده و در نهایت نام شاخهٔ فرعی را می‌نویسیم.

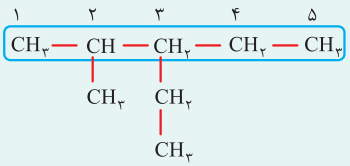
مثال:



شمارهٔ شاخهٔ فرعی ↑

۲ - متیل پنتان ← نام آلکان زنجیر اصلی

↓ نام شاخهٔ فرعی

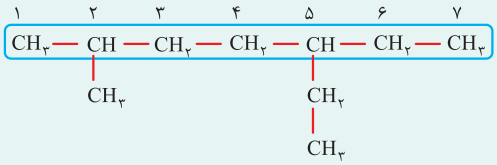


۳ ـ اتیل ـ ۲ ـ متیل‌پنتان

اگر ساختار فشردهٔ یک آلکان را به شما دادند، اول ساختار گسترده‌تر آن را رسم کرده، سپس آن را نام‌گذاری کنید.

مثال: $(CH_3)_2CH(CH_2)_2CH(C_2H_5)_2$

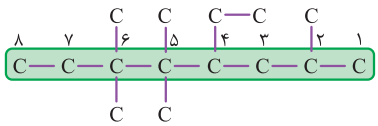
CH_3 فقط می‌تواند در دو سر زنجیر اصلی و یا به صورت شاخهٔ فرعی متیل باشد. در ضمن همیشه C_2H_5 را به صورت گسترده‌تر $-CH_2-CH_2-$ بنویسید.



۵ ـ اتیل ـ ۲ ـ متیل هپتان

پاسخ خیلی تشریحی ✔ *بیایید دور هم!* گزینه‌ها را به ترتیب بررسی کنیم:

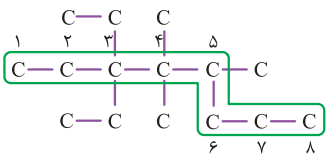
گزینهٔ (۱):



۴ ـ اتیل ـ ۲، ۵، ۵، ۶، ۶ ـ پنتامتیل اوکتان

مجموع شمارهٔ شاخه‌های فرعی $= 4+2+5+5+6+6 = 28$

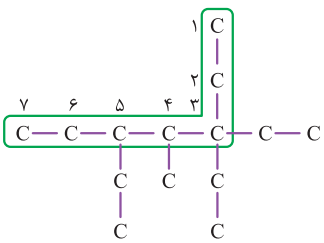
گزینهٔ (۲):



۳، ۳ ـ دی‌اتیل ـ ۴، ۴، ۵ ـ تری‌متیل اوکتان

مجموع شمارهٔ شاخه‌های فرعی $= 3+3+4+4+5 = 19$

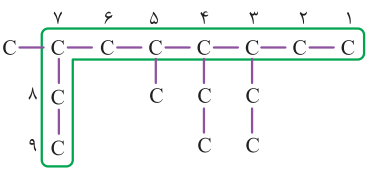
گزینهٔ (۳):



۳، ۳، ۵ ـ تری‌اتیل ـ ۴ ـ متیل هپتان

مجموع شمارهٔ شاخه‌های فرعی $= 3+3+5+4 = 15$

گزینهٔ (۴):

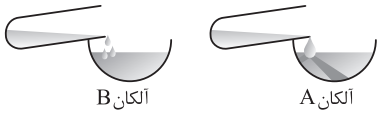


۳، ۴ ـ دی اتیل ـ ۵، ۷ ـ دی‌متیل نونان

مجموع شمارهٔ شاخه‌های فرعی $= 3+4+5+7 = 19$

گول نخوری ✘ *هواستون باشه که* سؤال دربارهٔ مجموع **شمارهٔ شاخه‌های فرعی** در نام آلکان پرسیده است؛ نه شمار شاخه‌های فرعی آلکان! *مراقب باش که تو دام نیفتی!*

۹۸ با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به دو آلکان راست‌زنجیر **A** و **B** در شرایط یکسان است، کدام مطلب نادرست است؟



۱) قدرت نیروهای بین مولکولی در آلکان A، بیشتر از آلکان B است.

۲) درصد جرمی اتم‌های کربن در آلکان A، بیشتر از آلکان B است.

۳) اگر در ساختار آلکان A، ۶ پیوند C — C وجود داشته باشد، در ساختار آلکان B می‌تواند ۱۶ پیوند اشتراکی وجود داشته باشد.

۴) هر گرم از آلکان B، شامل شمار مولکول‌های کم‌تری در مقایسه با آلکان A است.

درس Box

خواص فیزیکی آلکان‌ها:

۱) مقایسهٔ نیروی جاذبهٔ بین مولکولی:

در هیدروکربن‌ها ← هر چه شمار اتم‌های کربن بیشتر ← جرم مولکول بیشتر و اندازهٔ آن بزرگ‌تر ← نیروی جاذبهٔ بین مولکول‌ها قوی‌تر

۲) مقایسهٔ نقطهٔ جوش:

در هیدروکربن‌ها ← هر چه شمار اتم‌های کربن بیشتر ← جرم مولکول بیشتر و اندازهٔ آن بزرگ‌تر ← نیروی جاذبهٔ بین مولکول‌ها قوی‌تر ← نقطهٔ جوش بالاتر

۳) مقایسهٔ فرّاربودن:

در هیدروکربن‌ها ← هر چه شمار اتم‌های کربن بیشتر ← جرم مولکول بیشتر و اندازهٔ آن بزرگ‌تر ← قدرت نیروهای جاذبهٔ بین مولکولی بیشتر ← فرّاریت کم‌تر

۴) مقایسهٔ گرانروی:

در هیدروکربن‌ها ← هر چه شمار اتم‌های کربن بیشتر ← جرم مولکول بیشتر و اندازهٔ آن بزرگ‌تر ← قدرت نیروهای جاذبهٔ بین مولکولی بیشتر ← گرانروی بیشتر

۵) مقایسهٔ چسبندگی:

در هیدروکربن‌ها ← هر چه شمار اتم‌های کربن بیشتر ← جرم مولکول بیشتر و اندازهٔ آن بزرگ‌تر ← قدرت نیروهای جاذبهٔ بین مولکولی بیشتر ← چسبندگی بیشتر

۶) انحلال‌پذیری:

آلکان‌ها به دلیل ناقطبی‌بودن در آب نامحلول‌اند و از این ویژگی آلکان‌ها در موارد مختلفی استفاده می‌شود:

الف) از آلکان‌ها می‌توان برای حفاظت از فلزها استفاده کرد، به طوری که قراردادن فلزها در آلکان‌های مایع یا اندودکردن سطح فلزها و وسایل فلزی با آن‌ها، مانع از رسیدن آب به سطح فلز می‌شود و از خوردگی فلز جلوگیری می‌کند.

ب) افرادی که با گریس کار می‌کنند دستشان را با بنزین یا نفت (مخلوطی از هیدروکربن‌ها) می‌شویند؛ زیرا بنزین یا نفت مولکول‌های گریس را در خود حل کرده و از پوست دست جدا می‌کند.

جمع‌بندی:

با افزایش تعداد اتم‌های کربن در آلکان‌های راست‌زنجیر
- جرم مولکولی، قدرت نیروهای بین مولکولی، نقطهٔ جوش، گرانروی و چسبندگی افزایش می‌یابد.
- فرّاریت کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به شکل‌های داده‌شده، آلکان B سریع‌تر از لولهٔ آزمایش بیرون می‌ریزد؛ بنابراین گرانروی آلکان B از آلکان A کم‌تر است. از آن‌جا که گرانروی آلکان B کم‌تر است، باید شمار اتم‌های کربن و هیدروژن آن نیز کم‌تر از آلکان A باشد؛ بنابراین چون جرم مولی آلکان A بیشتر است، هر گرم از این ترکیب، در مقایسه با هر گرم از آلکان B، شامل شمار کم‌تری از مولکول‌ها می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

نکته

۱) درصد جرمی کربن و هیدروژن در همهٔ آلکن‌ها با هم برابر و مستقل از شمار اتم‌های کربن آن‌ها است:

$$\text{درصد جرمی کربن در آلکن‌ها } (C_nH_{2n}) = \frac{12n}{12n+2n}\times 100 = \frac{12}{14}\times 100 = \frac{6}{7}\times 100 \simeq \%85/7$$

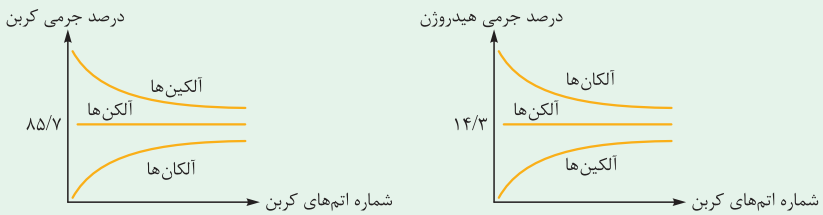
$$\text{درصد جرمی هیدروژن در آلکن‌ها } (C_nH_{2n}) = \frac{2n}{12n+2n}\times 100 = \frac{2}{14}\times 100 = \frac{1}{7}\times 100 \simeq \%14/3$$

هم‌چنین نسبت جرم کربن به هیدروژن در همهٔ آلکن‌ها یکسان و برابر با ۶ است.

۲) با افزایش n، درصد جرمی کربن در آلکن‌ها افزایش می‌یابد. *به نظرتون* در نهایت درصد جرمی کربن به چه عددی *می‌تونه برسه*؟! اگر از درس ریاضی کمک بگیرید و حد $\frac{12n}{14n+2}$ رو حساب کنید $(n \to \infty)$، متوجه خواهید شد که درصد جرمی کربن در آلکن‌ها نهایتاً می‌تواند به درصد جرمی کربن در آلکن‌ها (حدود ۸۵/۷٪) برسد، هم‌چنین می‌توان گفت درصد جرمی هیدروژن در آلکن‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن کاهش می‌یابد و نهایتاً به درصد جرمی هیدروژن در آلکن‌ها (حدود ۱۴/۳٪) می‌رسد.

۳) در آلکین‌ها *اوضاع برعکسه!* با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکین‌ها، درصد جرمی کربن کاهش می‌یابد و نهایتاً به ۸۵/۷٪ می‌رسد، هم‌چنین درصد جرمی هیدروژن افزایش یافته و نهایتاً به ۱۴/۳٪ می‌رسد.

۴) با توجه به روابط محاسبهٔ درصد جرمی کربن در آلکان‌ها، آلکن‌ها و آلکین‌ها، *واضح و مبرهن است* که در تعداد اتم‌های کربن یکسان، درصد جرمی کربن در آلکین‌ها از همه بیشتر و درصد جرمی کربن در آلکان‌ها از همه کم‌تر است؛ برای درصد جرمی هیدروژن، *قضیه برعکسه!*



$$\left.\begin{array}{l}\text{درصد جرمی کربن در آلکان‌ها}: \frac{12n}{14n+2}\times 100\\ \text{درصد جرمی کربن در آلکن‌ها}: \frac{12n}{14n}\times 100\\ \text{درصد جرمی کربن در آلکین‌ها}: \frac{12n}{14n-2}\times 100\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{در n یکسان}} \begin{array}{l}\text{درصد جرمی کربن: آلکان} < \text{آلکن} < \text{آلکین}\\ \text{درصد جرمی هیدروژن: آلکان} > \text{آلکن} > \text{آلکین}\end{array}$$

توجه: در هیدروکربن‌ها، هر چه نسبت شمار اتم‌های کربن به هیدروژن بیشتر باشد، درصد جرمی کربن در آن هیدروکربن بیشتر (و درصد جرمی هیدروژن کم‌تر) است. از بین همهٔ آلکان‌ها، آلکن‌ها و آلکین‌ها، بیشترین درصد جرمی کربن متعلق به ساده‌ترین عضو خانوادهٔ آلکین‌ها یعنی اتین (C_2H_2) و بیشترین درصد جرمی هیدروژن متعلق به ساده‌ترین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها یعنی متان (CH_4) است.

همون‌طور که گفتیم، با افزایش مقدار n در آلکان‌ها، درصد جرمی کربن در آن‌ها افزایش می‌یابد؛ در نتیجه می‌توان گفت درصد جرمی کربن در آلکان A در مقایسه با آلکان B بیشتر است.

گزینهٔ (۲): قدرت نیروهای بین مولکولی در آلکان A بیشتر است؛ زیرا شمار اتم‌های کربن آن بیشتر می‌باشد.

گزینهٔ (۳): آلکان A دارای ۶ پیوند کربن ـ کربن است. تعداد پیوندهای کربن ـ کربن ۱ واحد از تعداد کل کربن در آلکان کم‌تر است؛ پس این آلکان ۷ کربن دارد و فرمول مولکولی آن C_7H_{16} است. آلکان A با ۷ اتم کربن، دارای $3(7)+1=22$ پیوند اشتراکی است؛ در نتیجه شمار پیوندها در آلکان B که سبک‌تر است، می‌تواند برابر ۱۶ باشد و در واقع آلکان B، می‌تواند ۵کربنی باشد.

۹۹ اگر در اثر سوختن کامل نمونه‌ای شامل یک مول آلکان **A** و یک مول آلکین **B** که تعداد کربن برابری دارند، در مجموع ۱۴۴ گرم آب تولید شود، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ $(Br = 80, O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1})$

- از آلکان **A** می‌توان به عنوان سوخت فندک استفاده کرد.
- اگر آلکان **A** و آلکین **B** راست‌زنجیر باشند، شمار گروه‌های CH_3 در آن‌ها برابر نخواهد بود.
- در مجموع در اثر انجام دو واکنش، ۱۷۹/۲ لیتر گاز در شرایط استاندارد تولید می‌شود.
- اگر نمونهٔ اولیه با استفاده از برم به طور کامل سیر شود، جرم نمونه به تقریب ۳/۸۶ برابر می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست‌اند.

نکته

معادلهٔ واکنش سوختن کامل

آلکان‌ها: $C_nH_{2n+2} + \frac{3n+1}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + (n+1)H_2O$

آلکن‌ها: $C_nH_{2n} + \frac{3n}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + (n)H_2O$

آلکین‌ها: $C_nH_{2n-2} + \frac{3n-1}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + (n-1)H_2O$

فرمول مولکولی آلکان و آلکین مورد نظر را به ترتیب به صورت C_nH_{2n+2} و C_nH_{2n-2} در نظر می‌گیریم، بدین ترتیب می‌توانیم معادلهٔ واکنش سوختن کامل آن‌ها را نوشته و با توجه به جرم آب حاصل، فرمول مولکولی آن‌ها را تعیین کنیم:

$$C_nH_{2n+2} + \frac{3n+1}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + (n+1)H_2O$$

$$C_nH_{2n-2} + \frac{3n-1}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + (n-1)H_2O$$

طبق دو معادلهٔ بالا، از سوختن یک مول از آلکان و آلکین مورد نظر، در مجموع $2n$ مول آب تولید می‌شود؛ در نتیجه داریم:

$$144\,g\,H_2O \times \frac{1\,mol\,H_2O}{18\,g\,H_2O} = 8\,mol\,H_2O \Rightarrow 2n = 8 \Rightarrow n = 4$$

در نتیجه آلکان مورد نظر، بوتان با فرمول مولکولی C_4H_{10} و آلکین مورد نظر، بوتین با فرمول مولکولی C_4H_6 می‌باشد.

حالا عبارت‌ها رو یکی‌یکی بررسی می‌کنیم؛

- *آره به خدا!* کتاب درسی یازدهم در حاشیهٔ صفحهٔ ۳۶، فندکی را نشان داده که سوخت این فندک، **بوتان** به حالت گاز بوده که تحت فشار پر شده است.
- ساختار آلکان A و آلکین B به صورت زیر است:

گول نخوری *بیا هواست باشه که* برای آلکین B براساس محل پیوند دو ساختار می‌شه رسم کرد.

A آلکان ~ بوتان $(C_4H_{10}) \rightarrow$ $CH_3-CH_2-CH_2-CH_3$ (۲ گروه متیل)

B آلکین ~ بوتین $(C_4H_6) \rightarrow$ $CH\equiv C-CH_2-CH_3$ (یک گروه متیل) یا $CH_3-C\equiv C-CH_3$ (۲ گروه متیل)

۱ ـ بوتین ۲ ـ بوتین

بنابراین اگر آلکین B، ۲ ـ بوتین باشد، می‌تواند مانند بوتان، دارای ۲ گروه متیل در ساختار خود باشد.

با توجه به معادله‌های واکنش سوختن آلکان A و آلکین B، حجم گاز CO_2 تولیدی را در شرایط STP محاسبه می‌کنیم.

گول نخوری در شرایط STP و دمای $0^\circ C$ و فشار ۱ atm، آب به حالت مایع است؛ نه بخار!

در مجموع در اثر انجام این دو واکنش، $2n$ یا $2\times4 = 8$ مول CO_2 تولید می‌شود که حجم این مقدار گاز در شرایط STP برابر است با:

$$8\,mol\,CO_2 \times \frac{22/4\,L\,CO_2}{1\,mol\,CO_2} = 179/2\,L\,CO_2$$

- بوتان (آلکان A)، سیر شده است و با برم واکنش نمی‌دهد، اما بوتین (آلکین B)، سیرنشده بوده و هر مول آن با ۲ مول Br_2 به طور کامل واکنش می‌دهد:

$$C_4H_6 + 2Br_2 \rightarrow C_4H_6Br_4$$

جرم نمونهٔ اولیه که شامل یک مول C_4H_{10} و یک مول C_4H_6 است برابر است با:

$$\text{جرم نمونهٔ اولیه} = C_4H_{10}\text{ جرم مولی} + C_4H_6\text{ جرم مولی} = \underbrace{((4\times12)+10)}_{58} + \underbrace{((4\times12)+6)}_{54} = 112\ g$$

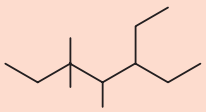
نمونهٔ نهایی شامل یک مول C_4H_{10} و یک مول $C_4H_6Br_4$ است؛ بنابراین جرم نمونهٔ نهایی و نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\text{جرم نمونهٔ نهایی} = C_4H_{10}\text{ جرم مولی} + C_4H_6Br_4\text{ جرم مولی} = \underbrace{((4\times12)+10)}_{58} + \underbrace{((4\times12)+6+(4\times80))}_{374} = 432\ g$$

$$\Rightarrow \text{نسبت خواسته‌شده} = \frac{432}{112} \simeq 3/86$$

۱۰۰ نام ساختار داده‌شده کدام است و جرم مولی آن، به تقریب، چند برابر جرم مولی «۳ـ اتیل ـ ۲ و ۴ـ دی متیل پنتان» است؟

$(C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱})$



۱) ۳ـ اتیل ـ ۴، ۵، ۵ـ تری متیل هپتان؛ ۱/۳۳

۲) ۳ـ اتیل ـ ۴، ۵، ۵ـ تری متیل هپتان؛ ۱/۴۹

۳) ۵ـ اتیل ـ ۳، ۳، ۴ـ تری متیل هپتان؛ ۱/۳۳

۴) ۵ـ اتیل ـ ۳، ۳، ۴ـ تری متیل هپتان؛ ۱/۴۹

پاسخ خیلی تشریحی ✔

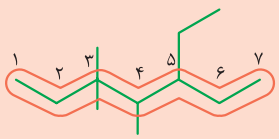
قسمت اول:

گام اول: انتخاب زنجیر اصلی: زنجیر اصلی به صورت مستقیم از سمت چپ به سمت راست است.

گام دوم: شماره‌گذاری زنجیر اصلی: زنجیر اصلی باید از سمت چپ شماره‌گذاری شود تا به ترتیب اعداد مربوط به شمارهٔ شاخه‌های فرعی به صورت ۳۳۴۵ باشد.

گول نخوری ✘ *یه وقت گول شافهٔ اتیل رو نخوری و از سمت راست شماره بذاریا!* اگر به اشتباه از سمت راست شماره‌گذاری کنیم، اعداد مربوط به شاخه‌های فرعی به صورت ۳۴۵۵ می‌شود.

گام سوم: نام‌گذاری: ابتدا نام شاخهٔ اتیل (مقدم‌تر طبق حروف الفبای انگلیسی) را آورده و سپس نام شاخهٔ متیل را می‌آوریم.



۵ ـ اتیل ـ ۳، ۳، ۴ ـ تری‌متیل هپتان

قسمت دوم: با توجه به تعداد کربن‌های این ترکیب«۵ـ اتیل ـ ۴،۳،۳ ـ تری‌متیل هپتان»، فرمول مولکولی این آلکان به صورت $C_{۱۲}H_{۲۶}$ است.

(۲کربن) (۳کربن) (۷کربن)

از طرفی فرمول مولکولی ترکیب «۳-اتیل ـ ۴،۲ ـ دی‌متیل پنتان»، به صورت $C_۹H_{۲۰}$ است.

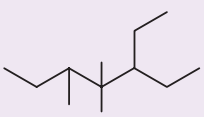
(۲کربن) (۲کربن) (۵ کربن)

بنابراین نسبت جرم مولی این دو ترکیب به صورت مقابل است:

$$\frac{\text{جرم‌مولی } C_{۱۲}H_{۲۶}}{\text{جرم‌مولی } C_۹H_{۲۰}} = \frac{۱۲(۱۲)+۲۶}{۹(۱۲)+۲۰} = \frac{۱۷۰}{۱۲۸} \simeq ۱/۳۳$$

نام ساختار داده‌شده کدام است و جرم مولی آن، به تقریب، چند برابر جرم مولی متیل پروپیل اتر است؟ *(تجربی داخل ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)*

$(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$



۱) ۳ـ اتیل ـ ۴، ۴، ۶ ـ تری‌متیل هپتان؛ ۲/۸

۲) ۳ـ اتیل ـ ۴، ۴، ۶ ـ تری‌متیل هپتان؛ ۲/۳

۳) ۵ـ اتیل ـ ۲، ۴، ۴ ـ تری‌متیل هپتان؛ ۲/۸

۴) ۵ـ اتیل ـ ۲، ۴، ۴ ـ تری‌متیل هپتان؛ ۲/۳

۱۰۱ اگر از سوختن کامل مخلوطی از اتن و اتین، ۱۹/۰۴ لیتر گاز اکسیژن در شرایط **STP**، مصرف شده و حجم گاز کربن دی‌اکسید حاصل، ۵/۶ لیتر کم‌تر از حجم گاز اکسیژن مصرفی باشد، در مخلوط اولیه جرم اتن چند برابر جرم اتین بوده است؟

$(C=۱۲, H=۱: g.mol^{-۱})$

۱) ۰/۴۶ ۲) ۰/۵

۳) ۲ ۴) ۲/۱۵

مشاوره سر و کلهٔ سؤال‌های مخلوط تو کنکورهای اخیر زیاد *پیدا میشه*! مخصوصاً در ترکیب‌های آلی! پس برای رسیدن به درصدهای بالا، باید بتوانی این‌جور تست‌ها را با تسلط کامل حل کنی!

Hint

ابتدا واکنش موازنه‌شدهٔ سوختن اتن و اتین *رو بنویس*. شمار مول‌های این دو را x و y در نظر بگیر، سپس با استفاده از حجم گازهای $O_۲$ و $CO_۲$ داده‌شده و ارتباط میان آن‌ها، تعداد مول *اون‌ها رو حساب کن* و با توجه به ضرایب واکنش‌ها، دو معادله با دو مجهول به دست بیاور. با حل این دو معادله، می‌توانی مقادیر x و y در نتیجه نسبت خواسته‌شده را محاسبه کنی.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: واکنش سوختن اتن و اتین را موازنه می‌کنیم:

$$۱)\ C_۲H_۴(g)+۳O_۲(g)\rightarrow ۲CO_۲(g)+۲H_۲O(g)$$
$$۲)\ ۲C_۲H_۲(g)+۵O_۲(g)\rightarrow ۴CO_۲(g)+۲H_۲O(g)$$

گام دوم: تعداد مول‌های اتن و اتین را به ترتیب x و y در نظر می‌گیریم و با توجه به آن‌ها، تعداد مول مصرفی $O_۲$ و تولیدی $CO_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$(۱)\text{واکنش}: x\,mol\,C_۲H_۴\times\frac{۳\,mol\,O_۲}{۱\,mol\,C_۲H_۴}=۳x\,mol\,O_۲\ ,\ x\,mol\,C_۲H_۴\times\frac{۲\,mol\,CO_۲}{۱\,mol\,C_۲H_۴}=۲x\,mol\,CO_۲$$

$$(۲)\text{واکنش}: y\,mol\,C_۲H_۲\times\frac{۵\,mol\,O_۲}{۲\,mol\,C_۲H_۲}=۲/۵\,y\,mol\,O_۲\ ,\ y\,mol\,C_۲H_۲\times\frac{۴\,mol\,CO_۲}{۲\,mol\,C_۲H_۲}=۲y\,mol\,CO_۲$$

گام سوم: با استفاده از حجم گاز $O_۲$ در شرایط STP، تعداد مول آن را حساب می‌کنیم:

$$۱۹/۰۴\,L\,O_۲\times\frac{۱\,mol\,O_۲}{۲۲/۴\,L\,O_۲}=۰/۸۵\,mol\,O_۲$$

حجم $CO_۲$ تولیدشده در واکنش‌ها، ۵/۶ لیتر کم‌تر از $O_۲$ مصرف شده است؛ یعنی ۰/۲۵ مول کم‌تر!

$$۵/۶\,L\times\frac{۱\,mol}{۲۲/۴\,L}=۰/۲۵\,mol$$

پس تعداد مول $CO_۲$ تولیدشده برابر ۰/۶ مول خواهد بود $(۰/۸۵-۰/۲۵=۰/۶)$.

گام چهارم: با استفاده از تعداد مول‌های $O_۲$ و $CO_۲$، دو معادله با دو مجهول تشکیل داده و x و y را به دست می‌آوریم:

$$\text{تعداد مول } O_۲ = ۳x+۲/۵y=۰/۸۵ \quad (I)$$
$$\text{تعداد مول } CO_۲ = ۲x+۲y=۰/۶ \Rightarrow x+y=۰/۳ \Rightarrow y=۰/۳-x \quad (II)$$
$$\begin{cases}\Rightarrow (II),(I): ۳x+۲/۵(۰/۳-x)=۰/۸۵ \Rightarrow ۳x+۰/۷۵-۲/۵x=۰/۸۵\\ \Rightarrow ۰/۵x=۰/۱ \Rightarrow x=۰/۲ \xrightarrow{(II)} y=۰/۳-۰/۲=۰/۱\end{cases}$$

گام پنجم: با استفاده از شمار مول‌های اتن $(C_۲H_۴)$ و اتین $(C_۲H_۲)$ موجود در مخلوط، نسبت جرم آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم اتن}}{\text{جرم اتین}}=\frac{۰/۲\times۲۸}{۰/۱\times۲۶}=\frac{۵/۶}{۲/۶}\simeq ۲/۱۵$$

اگر از سوختن کامل مخلوطی از پروپن و پروپین، ۲۹/۱۲ لیتر گاز اکسیژن در شرایط **STP**، مصرف شده و حجم گاز کربن دی‌اکسید حاصل، ۸/۹۶ لیتر کم‌تر از حجم گاز اکسیژن مصرفی باشد، در مخلوط اولیه جرم پروپن چند برابر جرم پروپین بوده است؟

(تجربی داخل ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

$(H=۱, C=۱۲: g.mol^{-۱})$

۱) ۰/۴۷ ۲) ۰/۵۰

۳) ۲/۰ ۴) ۲/۱۰

۱۰۲ کدام مطلب درست است؟

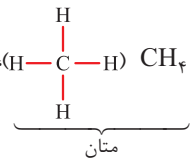
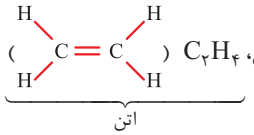
۱) آلکن‌ها در ساختار خود پیوندهای دوگانهٔ کربن ـ کربن ($\diagdown C=C\diagup$) دارند.

۲) در گذشته، گاز اتن را با نام استیلن می‌خواندند. ← اتین

۳) در جوشکاری کاربیدی، از سوختن گاز اتیلن، دمای لازم برای جوش‌دادن قطعه‌های فلزی تأمین می‌شود. ← اتن

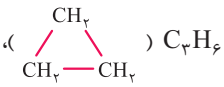
۴) ساده‌ترین آلکان، آلکن و سیلکوآلکان، به ترتیب یک، دو و سه کربن دارند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

ساده‌ترین آلکان، CH_4 ()، با یک اتم کربن، ساده‌ترین آلکن، C_2H_4 () با دو اتم کربن و

متان

اتن

ساده‌ترین سیکلوآلکان، C_3H_6 ()، با سه اتم کربن است.

سیکلوپروپان

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): آلکن‌ها در ساختار خود **تنها یک** پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن ($\diagdown C=C\diagup$) دارند؛ نه پیوندهای دوگانهٔ کربن ـ کربن!

گزینهٔ (۲): نام قدیمی گاز اتن، **اتیلن** است؛ نه استیلن!

گزینهٔ (۳): در جوش کاربیدی از سوختن گاز اتین (**استیلن**) دمای لازم برای جوش‌دادن قطعه‌های فلزی تأمین می‌شود؛ نه گاز اتیلن!

۱۰۳ اگر جرم مخلوطی از گازهای اتن و اتان در واکنش با مقدار کافی بخار آب، ۴۵ درصد افزایش پیدا کند، به ترتیب از راست به چپ درصد حجمی گاز اتن در مخلوط، چند برابر درصد حجمی گاز اتان بوده و یک نمونهٔ ۵گرمی از این مخلوط، شامل چند اتم هیدروژن است؟ $(O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$

$$\frac{\text{مول اتن}}{\text{مول اتان}} = \frac{\text{درصد مولی گاز اتن}}{\text{درصد مولی گاز اتان}} = \frac{\text{درصد حجمی گاز اتن}}{\text{درصد حجمی گاز اتان}}$$

۱) $2/408\times10^{23}$ ـ ۰/۴

۲) $4/816\times10^{23}$ ـ ۲/۵

۳) $2/408\times10^{23}$ ـ ۲/۵

۴) $4/816\times10^{23}$ ـ ۰/۴

مشاوره حواستان باشد که تقریباً در هر دوره از کنکور سراسری، مسائل مربوط به انواع واکنش‌های هیدروکربن‌ها، مورد توجه طراحان کنکور است و *بر شما واجبه که* به این واکنش‌ها و معادلهٔ آن‌ها تسلط کافی حاصل کنید، *باشد که رستگار شوید!*

درس Box

واکنش‌های آلکن‌ها:

- **واکنش سوختن آلکن‌ها:** آلکن‌ها همانند آلکان‌ها و سایر هیدروکربن‌ها در حضور اکسیژن می‌سوزند و طی آن CO_2 و H_2O تولید می‌شود:

$$C_nH_{2n} + \frac{3n}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + nH_2O$$

- **واکنش افزایش آب به آلکن‌ها:** با افزودن آب به آلکن‌ها، نوعی **الکل** تولید می‌شود؛ برای مثال با افزودن گاز اتن در صنعت به مخلوط آب و اسید در شرایط مناسب، اتانول تولید می‌شود:

$$CH_2=CH_2 + HOH \xrightarrow{H_2SO_4} CH_3CH_2OH$$

- **واکنش افزایش هالوژن‌ها به آلکن‌ها:** از افزودن هالوژن‌ها به آلکن‌ها، ترکیبی سیر شده به دست می‌آید.

برای مثال گاز اتن با برم مایع قرمزرنگ واکنش می‌دهد و ترکیبی سیرشده تولید می‌شود. **در این واکنش رنگ قرمز محلول از بین می‌رود:**

$$CH_2=CH_2(g) + Br_2(l) \rightarrow \underset{Br}{\overset{|}{CH_2}}-\underset{Br}{\overset{|}{CH_2}}(l)$$

۱، ۲ ـ دی‌برمو اتان

توجه: همهٔ آلکن‌ها در واکنش با برم شرکت می‌کنند و **این واکنش یکی از روش‌های شناسایی آن‌ها از دیگر هیدروکربن‌های سیرشده است.**

- **واکنش افزایش هیدروژن به آلکن‌ها:** در اثر افزودن مقدار کافی گاز هیدروژن به آلکن‌ها، **آلکان‌ها** تولید می‌شوند؛ برای مثال در اثر واکنش هگزن با گاز هیدروژن در حضور کاتالیزگر نیکل، هگزان تولید می‌شود:

$$C_6H_{12}(l) + H_2(g) \xrightarrow{Ni(s)} C_6H_{14}(l)$$

- **واکنش پلیمری‌شدن:** دسته‌ای دیگر از واکنش آلکن‌هاست که با استفاده از آن می‌توان انواع لاستیک‌ها، پلاستیک‌ها، الیاف و پلیمرهای سودمند را تهیه کرد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ واکنش(های) انجام‌شده را نوشته و موازنه می‌کنیم:

اتان (C_2H_6)، سیرشده است و با بخار آب واکنش نمی‌دهد، اما اتن (C_2H_4) به دلیل داشتن پیوند دوگانه $C=C$ در ساختار خود، سیرنشده بوده و با بخار آب واکنش داده و اتانول را تولید می‌کند. معادلهٔ واکنش گاز اتن با بخار آب به صورت زیر است:

$$CH_2=CH_2 + HOH \xrightarrow{H_2SO_4} \underset{H}{\overset{|}{CH_2}}-\underset{OH}{\overset{|}{CH_2}}$$

یا

$$C_2H_4 + H_2O \xrightarrow{H_2SO_4} C_2H_6O$$

گام دوم: اگر جرم مخلوط اولیه را برابر ۱۰۰ گرم در نظر بگیریم، پس از انجام واکنش، به ۱۴۵ گرم می‌رسد که این افزایش جرم، نتیجهٔ اضافه‌شدن آب است؛ بنابراین جرم آب افزوده‌شده، برابر ۴۵ گرم است که بدین ترتیب می‌توانیم براساس معادلهٔ واکنش انجام‌شده، شمار مول‌ها و جرم گاز اتن موجود در مخلوط را به دست آوریم:

$$45\,g\,H_2O \times \frac{1\,mol\,H_2O}{18\,g\,H_2O} \times \frac{1\,mol\,C_2H_4}{1\,mol\,H_2O} = 2/5\,mol\,C_2H_4$$

$$2/5\,mol\,C_2H_4 \times \frac{28\,g\,C_2H_4}{1\,mol\,C_2H_4} = 70\,g\,C_2H_4$$

گام سوم: جرم مخلوط اولیه برابر ۱۰۰ گرم و جرم گاز اتن موجود در مخلوط، ۷۰ گرم است؛ بنابراین جرم و شمار مول‌های گاز اتان موجود در مخلوط برابر است با:

$$\text{جرم گاز اتان} = \text{جرم مخلوط} - \text{جرم گاز اتن} = ۱۰۰ - ۷۰ = ۳۰\ \text{g}$$

$$۳۰\ \text{g}\ C_۲H_۶ \times \frac{۱\ \text{mol}\ C_۲H_۶}{۳۰\ \text{g}\ C_۲H_۶} = ۱\ \text{mol}\ C_۲H_۶$$

گام چهارم: با توجه به شمار مول‌های اتان و اتن موجود در مخلوط، نسبت خواسته‌شده را می‌*سنجیم*:

نکته طبق قانون آووگادرو، حجم یک مول از گازهای گوناگون در شرایط یکسان، برابر است؛ در نتیجه می‌توان گفت که درصد حجمی یک گاز در مخلوط، برابر با درصد مولی آن است.

$$\frac{\text{درصد حجمی گاز اتن}}{\text{درصد حجمی گاز اتان}} = \frac{\text{درصد مولی گاز اتن}}{\text{درصد مولی گاز اتان}} = \frac{\frac{\text{مول اتن}}{\text{کل مول مخلوط}} \times ۱۰۰}{\frac{\text{مول اتان}}{\text{کل مول مخلوط}} \times ۱۰۰} = \frac{\text{مول اتن}}{\text{مول اتان}} = \frac{۲/۵}{۱} = ۲/۵$$

گام پنجم: در نمونهٔ ۱۰۰گرمی فرض‌شده، ۱ مول گاز اتان و ۲/۵ مول گاز اتن وجود دارد؛ بنابراین شمار مول‌های هیدروژن موجود در نمونهٔ ۱۰۰ g برابر است با:

$$۱۰۰\ \text{g مخلوط} \rightarrow \begin{cases} ۱\ \text{mol}\ C_۲H_۶ \sim ۶\ \text{mol H} \\ ۲/۵\ \text{mol}\ C_۲H_۴ \sim ۱۰\ \text{mol H} \end{cases} \rightarrow ۱۶\ \text{mol H}$$

در نتیجه شمار اتم‌های هیدروژن موجود در نمونهٔ ۵گرمی از مخلوط مورد نظر *رو به راهتی می‌تونیم حساب کتاب کنیم*؛

$$۵\ \text{g نمونه} \times \frac{۱۶\ \text{mol H}}{۱۰۰\ \text{g نمونه}} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ \text{atom H}}{۱\ \text{mol H}} = ۴/۸۱۶ \times ۱۰^{۲۳}\ \text{atom H}$$

۱۰۴ از واکنش ۱۲ گرم از یک هیدروکربن با ۱۳/۴۴ لیتر گاز کلر در شرایط **STP**، یک ترکیب سیرشده حاصل می‌شود. فرمول مولکولی این ترکیب کدام است و ۰/۰۵ مول از این هیدروکربن، با چند گرم گاز هیدروژن، به طور کامل سیر می‌شود؟

$(C=۱۲, H=۱ : g.mol^{-۱})$

۱) $C_۳H_۶$ ـ ۰/۲

۲) $C_۳H_۴$ ـ ۰/۲

۳) $C_۳H_۶$ ـ ۰/۱

۴) $C_۳H_۴$ ـ ۰/۱

Hint

با توجه به گزینه‌ها، هیدروکربن مورد نظر می‌تواند پروپن ($C_۳H_۶$) یا پروپین ($C_۳H_۴$) باشد. حال یک بار هیدروکربن مورد نظر را پروپن و بار دیگر پروپین فرض می‌کنیم، سپس با توجه به معادلهٔ واکنش سیرشدهٔ کامل هر یک از این هیدروکربن‌ها با گاز $Cl_۲$، بررسی می‌کنیم کدام هیدروکربن با توجه به اطلاعات سؤال، در شرایط گفته‌شده صدق می‌کند. در نهایت با توجه به معادلهٔ واکنش هیدروکربن مورد نظر با گاز $H_۲$، جرم گاز $H_۲$ مورد نیاز برای سیرشدن کامل هیدروکربن مورد نظر را به دست می‌آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی

همون‌طور که گفتیم هیدروکربن مورد نظر، با توجه به گزینه‌ها می‌تواند پروپن ($C_۳H_۶$) یا پروپن ($C_۳H_۴$) باشد، حال معادلهٔ واکنش سیرشدن کامل هر یک از آن‌ها را با گاز $Cl_۲$ نوشته و بررسی می‌کنیم ۱۲ گرم از کدام هیدروکربن با ۱۳/۴۴ لیتر گاز $Cl_۲$ در شرایط STP واکنش می‌دهد.

اگر هیدروکربن مورد نظر پروپن ($C_۳H_۶$) باشد، داریم:

$$C_۳H_۶ + Cl_۲ \rightarrow C_۳H_۶Cl_۲$$

$$?\,L\,Cl_۲ = ۱۲\,g\,C_۳H_۶ \times \frac{۱\,mol\,C_۳H_۶}{۴۲\,g\,C_۳H_۶} \times \frac{۱\,mol\,Cl_۲}{۱\,mol\,C_۳H_۶} \times \frac{۲۲/۴\,L\,Cl_۲}{۱\,mol\,Cl_۲} = ۶/۴\,L\,Cl_۲$$

بنابراین با توجه به این‌که حجم گاز $Cl_۲$ مورد نیاز برای سیرشدن کامل ۱۲ گرم از هیدروکربن مورد نظر با مقدار داده‌شده، تطابق ندارد؛ در نتیجه هیدروکربن مورد نظر، $C_۳H_۴$ می‌باشد؛ نه $C_۳H_۶$!

حالا اگه می‌خواین خیالتون راحت شه، این بار هیدروکربن مورد نظر رو پروپین ($C_۳H_۴$) فرض می‌کنیم.

$$C_۳H_۴ + ۲Cl_۲ \rightarrow C_۳H_۴Cl_۴$$

$$?\,L\,Cl_۲ = ۱۲\,g\,C_۳H_۴ \times \frac{۱\,mol\,C_۳H_۴}{۴۰\,g\,C_۳H_۴} \times \frac{۲\,mol\,Cl_۲}{۱\,mol\,C_۳H_۴} \times \frac{۲۲/۴\,L\,Cl_۲}{۱\,mol\,Cl_۲} = ۱۳/۴۴\,L\,Cl_۲$$

خیالتون راحت شد؟! حالا بریم سراغ قسمت دوم سؤال!

برای تبدیل هر مول $C_۳H_۴$ به ترکیبی سیرشده، دو مول گاز هیدروژن نیاز است، بدین ترتیب می‌توانیم جرم گاز هیدروژنی که با ۰/۰۵ مول $C_۳H_۴$ واکنش می‌دهد رو بسابیم:

$$C_۳H_۴ + ۲H_۲ \rightarrow C_۳H_۸$$

$$۰/۰۵\,mol\,C_۳H_۴ \times \frac{۲\,mol\,H_۲}{۱\,mol\,C_۳H_۴} \times \frac{۲\,g\,H_۲}{۱\,mol\,H_۲} = ۰/۲\,g\,H_۲$$

۱۰۵ کدام گزینه از نظر درستی یا نادرستی با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) در نخستین مرحلهٔ پالایش نفت خام، نمک‌ها، اسیدها و آب را جدا می‌کنند.

۲) بخش عمدهٔ هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را هیدروکربن‌های زنجیری و سیرشده تشکیل می‌دهند.

۳) کوچک‌ترین مولکول آلکان موجود در نفت سفید، شامل ۳۱ پیوند اشتراکی است.

۴) با افزایش ارتفاع در برج تقطیر، محصولات خروجی راحت‌تر از حالت مایع به گاز تبدیل می‌شوند.

آلکان‌ها

شامل آلکان‌هایی با ۱۰-۱۵ اتم کربن

مشاوره *قطعاً و قطعاً* یکی از رموز موفقیت در کنکورهای جدید، تسلط بر متن کتاب درسی است؛ آن هم تسلط ریزبینانه که تلفیقی از فهمیدن مطلب و حفظ‌کردن آن است؛ پس حتماً همه جای کتاب، *حتی تمریناتش رو* با دقت و با ذره‌بین بخوانید و حتماً به قیدها و حتی مطالب حاشیهٔ کتاب، توجه ویژه‌ای داشته باشید و ازشون *الکی رد نشین!*

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت گزینهٔ (۱) نادرست و عبارت سایر گزینه‌ها درست می‌باشد.

هواستون کجاست؟! **پس از جداکردن نمک‌ها، اسیدها و آب، نفت خام را پالایش می‌کنند.**

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): آلکان‌ها بخش عمدهٔ هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را تشکیل می‌دهند که هیدروکربن‌هایی زنجیری، سیرشده و با واکنش‌پذیری کم هستند.

گزینهٔ (۳): نفت سفید شامل آلکان‌هایی با ده تا پانزده اتم کربن است.

نکته

شمار پیوندهای اشتراکی در آلکان‌ها:

در این جا می‌فوایم بهتون یاد بدیم که بدون رسم ساختار آلکان‌ها، تو سه سوت! تعداد پیوندهای اشتراکی‌شون رو به دست بیارین!

خواندیم که هیدروکربن‌ها از دو عنصر هیدروژن و کربن تشکیل شده‌اند. *از اون‌جایی که* هر اتم کربن، ۴ الکترون و هر اتم هیدروژن، ۱ الکترون به اشتراک می‌گذارد و از طرفی هر پیوند اشتراکی شامل دو الکترون است، خواهیم داشت:

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها} = \frac{(\text{تعداد اتم‌های هیدروژن} \times ۱) + (\text{تعداد اتم‌های کربن} \times ۴)}{۲}$$

خواندیم که فرمول عمومی آلکان‌ها، به صورت $C_nH_{۲n+۲}$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی در یک آلکان } n \text{ کربنی} = \frac{(۴ \times n) + (۱ \times (۲n+۲))}{۲} = \frac{۶n+۲}{۲} = ۳n+۱$$

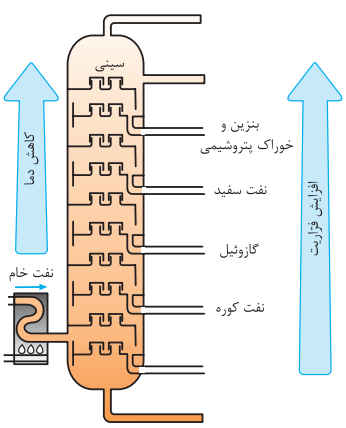
بنابراین در هر آلکان با n اتم کربن، $۳n+۱$ پیوند اشتراکی وجود دارد.

یه جور دیگه هم می‌شد به این فرمول رسید، در هر آلکان با n اتم کربن، $n-۱$ پیوند $C-C$ وجود دارد. از طرفی هر آلکان، دارای $(۲n+۲)$ اتم هیدروژن است که هر کدام یک پیوند اشتراکی تشکیل داده‌اند؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی} = (n-۱) + (۲n+۲) = ۳n+۱$$

کوچک‌ترین مولکول آلکان موجود در نفت سفید، ده‌کربنی است؛ در نتیجه شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار آن، برابر با $۳(۱۰)+۱=۳۱$ می‌باشد.

گزینهٔ (۴): برج تقطیر، محفظه‌ای بلند شامل طبقات و بخش‌های مختلفی است که دمای آن‌ها با یکدیگر تفاوت دارد. در این برج از پایین به بالا، دما کاهش می‌یابد؛ یعنی دمای پایین برج، بیشتر است و رفته‌رفته به سمت بالای برج تقطیر، دما کاهش می‌یابد.



هنگامی که نفت خام داغ به قسمت پایین برج وارد می‌شود، **مولکول‌های سبک‌تر و فرّارتر به سمت بالای برج حرکت می‌کنند. این در حالی است که هیدروکربن‌های سنگین و غیر فرّارتر در طبقات پایین‌تر برج،** *جاموش می‌کنند!*

بنابراین در برج تقطیر، با افزایش ارتفاع، مولکول‌ها سبک‌تر و فرارتر می‌شوند؛ از این‌رو نقطهٔ جوش کم‌تری دارند و به همین دلیل راحت‌تر از حالت مایع به حالت گاز تبدیل می‌شوند.