آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله نهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۳۰/آذر/۱۴۰۳

دفترچه شماره یک

حسابان و ریاضیات پایه	هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	بودجه‌بندی دروس
حسابان (۱) فصل ۱ (درس ۵) و فصل ۵ (درس ۵) صفحهٔ ۲۹ تا ۳۶ و صفحهٔ ۱۴۵ تا ۱۵۱ حسابان (۲) فصل ۳ و فصل ۴ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای مشتق تابع مرکب) صفحهٔ ۴۵ تا ۹۶	هندسه (۲) فصل ۲ صفحهٔ ۳۱ تا ۵۸ هندسه (۳) فصل ۲ (درس ۲ و ۳) صفحهٔ ۴۰ تا ۵۹	آمار و احتمال فصل ۴ صفحهٔ ۹۷ تا ۱۲۱ ریاضیات گسسته فصل ۲ صفحهٔ ۳۱ تا ۵۴	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۵ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از تابستان

Azmoon.kheilisabz.com

۱- قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,-۴)$ نسبت به خط $۳y-x=k$ روی خط $y=۲x$ قرار گرفته است. مقدار k کدام است؟

۱) ۷ ۲) -۵ ۳) ۵ ۴) -۷

۲- خط $x=۲(y+۱)$ معادلهٔ یک ضلع و نقطهٔ $A(۲,۵)$ یک رأس مستطیل هستند. اگر طول قطر مستطیل $۴\sqrt{۵}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) $۲۰\sqrt{۳}$ ۳) $۲۰\sqrt{۵}$ ۴) $۲۰\sqrt{۲}$

۳- نقاط $A(a,۵a)$، $B(۷,۳)$ و $C(۲,-۲)$ سه رأس مثلثی هستند که طول ارتفاع AH در آن برابر $۴\sqrt{۲}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ یا -۳ ۲) -۱ یا ۳ ۳) -۲ یا ۱ ۴) -۲ یا -۱

۴- اگر $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{bx-۲}{ax^۲-۴x+\frac{a}{۴}}=+\infty$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) $-\frac{۹}{۲}$ ۴) $-\frac{۷}{۲}$

۵- اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\dfrac{f(x)}{\cos x}=+\infty$ باشد، کدام ضابطه برای تابع f مناسب است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[۲x]-۳$ ۲) $[\frac{۲x}{\pi}]-۱$ ۳) $[\frac{x}{\pi}]-۱$ ۴) $[\frac{۴x}{\pi}]-۱$

۶- تابع $f(x)=۴x-x^۲$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۱}{a-f(x+b)}=+\infty$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۴

۷- اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-}\dfrac{۴bx-۶\cos^۲x}{۳\tan^۲x+a}=-\infty$ باشد، حدود b کدام است؟

۱) $b>\frac{۱}{\pi}$ ۲) $b<\frac{-۲}{\pi}$ ۳) $b<\frac{۱}{\pi}$ ۴) $b>\frac{۲}{\pi}$

۸- تابع $f(x)=\sqrt{ax^۲+bx}$ مفروض است. اگر حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{۲x}$ با حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ برابر باشند، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۹- تابع $f(x)=\dfrac{۲x^۲-۴}{x+۳}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to\infty}(f(۳x)-a(f(۲x))=b$ باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

محل انجام محاسبات

۱۰- تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x+2}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} x(f(x)+2)=3$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f^{-1}(x)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) -1

۱۱- مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{2^{x+1}+3^x}{3^{x-1}-2^{x-2}}$ در نقاط A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۱ ۳) ۷ ۴) ۱

۱۲- نمودار تابع $f(x)=x(\sqrt{\frac{4x}{x-1}}-2)$ در اطراف مجانب افقی خودش به کدام صورت است؟

۱) $y=1$ (curve below)
۲) $y=1$ (curve above)
۳) $y=2$ (curve below)
۴) $y=2$ (curve above)

۱۳- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-6x+9} & ;\ |x|\le c\\ ax^2+bx+2 & ;\ |x|>c\end{cases}$ در اعداد حقیقی پیوسته است. اگر c عددی طبیعی باشد، حاصل $\left[\frac{b}{a}\right]$ کدام می‌تواند باشد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) -10 ۲) -4 ۳) -8 ۴) -2

۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases}(3-2a)[x+1]+a^2[-x] & ;\ x\notin\mathbb{Z}\\ \sin\frac{\pi}{b} & ;\ x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است. حاصل $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{8}{3}$ ۳) ۵ ۴) ۱

۱۵- اگر تابع $y=2[\sqrt{x}]+a[\log_2 x]$ در $x=4$ پیوسته شود، در کدام نقطهٔ دیگر پیوسته خواهد بود؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

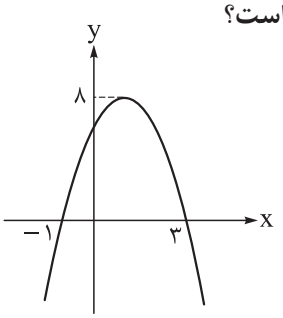
۱) $x=16$ ۲) $x=8$ ۳) $x=2$ ۴) $x=32$

۱۶- در تابع $f(x)=|bx^2+a|[2x]$، اگر $f'_+(3)-f'_-(3)=66$ باشد، مقدار ab چه کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) -18 ۲) ۳۶ ۳) ۱۲ ۴) -9

محل انجام محاسبات

۱۷- سهمی $y = f(x)$ در شکل مقابل آمده است. مشتق تابع $y = xf^{۲}(x)$ در $x = ۲$ کدام است؟



۱) -۳۰

۲) -۶۰

۳) ۶۰

۴) ۳۰

۱۸- تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته است، اگر $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h)+۱}{h} = ۳$ باشد، حاصل $\lim_{x\to ۲}\frac{f^{۲}(x)-f^{۲}(۲)}{x^{۳}-۸}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) $-\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۱۲}$

۴) $\frac{-۱}{۴}$

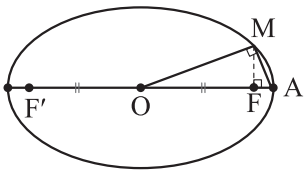
۱۹- معادلهٔ دایره‌ای که از نقاط $(-۲,۲)$ و $(۶,۲)$ گذشته و بر محور xها مماس است، به صورت $x^۲+y^۲+ax+by=c$ است. حاصل $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $۳/۵$ ۴) $-۳/۵$

۲۰- دایرهٔ C به معادلهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۲y+m=۰$ با دایره‌ای به مرکز $(-۳,۲)$ و شعاع ۳ مماس‌بیرون است. مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۲۱- مطابق شکل، F و F' کانون‌های بیضی و O وسط FF' است. اگر $A\hat{M}O=M\hat{F}A=۹۰^\circ$ و خروج از مرکز بیضی e باشد، حاصل $e^۳+e^۲$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۲- در یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{۴}{۵}$، فاصلهٔ بین دو کانون F و F' برابر ۸ واحد است. اگر نقطهٔ M روی این بیضی چنان قرار داشته باشد که $F\hat{M}F'=۶۰^\circ$، آن‌گاه فاصلهٔ نقطهٔ M از کانون نزدیک‌تر کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۵-۲\sqrt{۳}$ ۳) $۵-\sqrt{۱۳}$ ۴) $۲/۵$

۲۳- سهمی‌ای که مختصات رأس و کانون آن به ترتیب $(۲,۱)$ و $(۲,۳)$ است، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $۱/۲۵$ ۲) $۱/۵$ ۳) $۱/۷۵$ ۴) ۲

۲۴- دایره‌ای به شعاع ۲ که مرکز آن بر کانون سهمی $y=\frac{۱}{۴}x^۲$ منطبق است، این سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ بین این دو نقطه کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۲۵- به ازای کدام مقدار b، محور yها، خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^۲-۲y+۲x=b$ است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۳

۲۶- فاصلهٔ بین نقاط A و B در صفحه برابر $\sqrt{۹x^۲-۶x+۱}$ و فاصلهٔ نقطهٔ C از نقطهٔ D برابر $\sqrt{۴x^۲+۴x+۱}$ است. اگر C تصویر نقاط A و B تحت تبدیل T باشد، آن‌گاه فاصلهٔ بین دو نقطهٔ C و D کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

محل انجام محاسبات

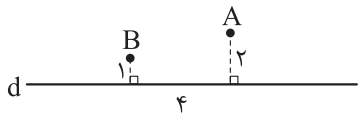
۲۷- طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی برابر $\sqrt{۳}$ است. در انتقال با برداری که ابتدای آن یک رأس و انتهای آن نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های این مثلث است، مثلث را تصویر می‌کنیم. فاصلهٔ دورترین رأس‌های مثلث و تصویرش کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۶}$

۲۸- دایرهٔ C به مرکز O و نقطهٔ M واقع بر آن مفروض‌اند. در یک دوران به مرکز M، دایرهٔ C روی دایرهٔ C' به مرکز O' تصویر می‌شود. اگر O' بر دایرهٔ C واقع باشد، نسبت طول وترمشترک دو دایره به طول مماس‌مشترک آن‌ها کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) ۱

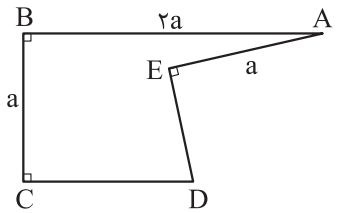
۲۹- مطابق شکل، بازتاب A نسبت به خط d را A' و مجانس A' در تجانسی به مرکز B و با نسبت -۲ را A'' می‌نامیم. با توجه به اندازه‌های روی شکل طول AA'' کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) $۶\sqrt{۵}$

۳) ۱۳ ۴) $۶\sqrt{۳}$

۳۰- در شکل زیر، بدون تغییر محیط پنج‌ضلعی و با استفاده از تبدیل مناسب، مساحت شکل را افزایش داده‌ایم. مساحت شکل جدید کدام است؟



۱) $۲a^۲$

۲) $۲/۵a^۲$

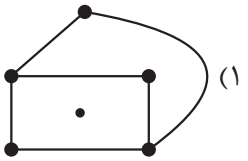
۳) $۲/۷۵a^۲$

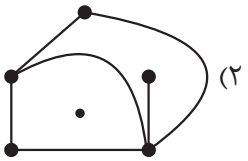
۴) $۳a^۲$

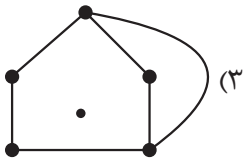
۳۱- در گراف G از مرتبهٔ ۵، $|E(G)| = ۷$ است. در این صورت $q(\bar{G})$ چند است؟

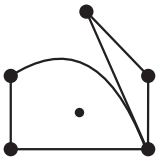
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۲- در گراف G، اگر $V(G) = \{a,b,c,d,e,f\}$ و $E(G) = \{ab, ac, bd, dc, fa, df\}$، کدام نمودار نشان‌دهندهٔ این گراف است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۳۳- در گراف G، تعداد اعضای مجموعهٔ $V(G)$ برابر ۸ است. مجموع درجهٔ همهٔ رئوس به جز رئوس a و b برابر ۴۲ است. اگر $b \notin N_G(a)$، در این صورت چند مسیر از رأس a به رأس b وجود دارد؟

۱) ۱۹۵۶ ۲) ۱۹۵۵ ۳) ۱۹۵۴ ۴) ۱۹۵۳

۳۴- در گراف G داریم: $V(G)=\{a,b,c,d,e,f,g\}$، $N_{\bar{G}}[a]=N_{\bar{G}}[b]=N_{\bar{G}}[c]$، $N_{\bar{G}}[d]=N_{\bar{G}}[e]=N_{\bar{G}}[f]=N_{\bar{G}}[g]$ و $N_{\bar{G}}[a] \cap N_{\bar{G}}(d) = \varnothing$، گراف G شامل چند دور به طول ۴ است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۳۵- در یک گراف با اندازهٔ ۱۸، $\Delta = \delta = ۴$. این گراف چند رأس دارد؟

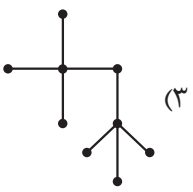
۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

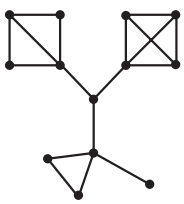
۳۶- در گراف $P_۶$، nتا γـ مجموعه و mتا مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال سه‌عضوی وجود دارد. $m+n$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۷- در کدام گراف، عدد احاطه‌گری با بقیه متفاوت است؟

۱) $C_۸$ ۲) $P_۸$

۳)


۴)


محل انجام محاسبات

۳۸- برای برآورد میانگین درآمد افراد یک جامعه از سه نمونهٔ تصادفی استفاده کرده‌ایم. اگر اندازهٔ نمونه‌ها یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت r تشکیل دهند، انحراف معیارهای برآورد میانگین برای این سه، یک دنبالهٔ ..... با قدرنسبت ..... تشکیل می‌دهند.

۱) حسابی ـ r
۲) هندسی ـ $\frac{۱}{\sqrt{r}}$
۳) هندسی ـ $\frac{۱}{r}$
۴) هندسی ـ $\frac{۱}{r^۲}$

۳۹- از اعداد طبیعی ۱ تا n، به تصادف هفت عدد متمایز انتخاب می‌کنیم. برآورد نقطه‌ای ما از n، طبق نمونهٔ انتخاب‌شده برابر با ۱۹ است. اگر بزرگ‌ترین عدد در نمونه ۱۷ باشد، حداکثر چند عضو نمونه کم‌تر از ۱۰ هستند؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۴۰- در یک نمونه‌گیری سامانمند از بین شماره‌های ۱تا ۴۵۰، ۳۰ نفر را به صورت سامانمند انتخاب می‌کنیم. اگر فقط شمارهٔ ۱۷ از طبقهٔ دوم انتخاب شود، یازدهمین عددی که انتخاب می‌شود چه شماره‌ای است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۲ ۳) ۱۵۲ ۴) ۱۶۲

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.
azmoon.kheilisabz.com

محل انجام محاسبات

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله نهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۳۰/آذر/۱۴۰۳

دفترچه شماره دو

فیزیک	شیمی
فیزیک (۲) فصل ۱ (از ابتدای خازن) و فصل ۲ (تا ابتدای ترکیب مقاومت‌ها) صفحهٔ ۳۲ تا ۷۰ فیزیک (۳) فصل ۳ صفحهٔ ۶۱ تا ۸۸	شیمی (۲) فصل ۲ (تا ابتدای غذای سالم) صفحه ۵۱ تا ۷۷ شیمی (۳) فصل ۲ (از ابتدای سلول سوختی، منبعی برای تولید انرژی سبز) و فصل ۳ (تا ابتدای فلزها، عنصرهایی شکل پذیر با جلایی زیبا) صفحهٔ ۵۰ تا ۸۳

بودجه‌بندی دروس

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۸۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	
مجموع	۶۵ سؤال			۸۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

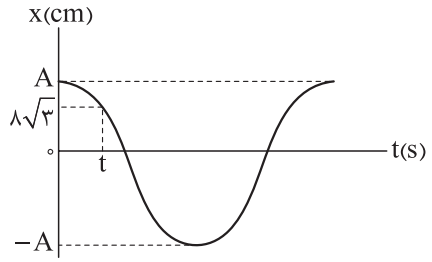
دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهمی‌ها از نابستان

Azmoon.kheilisabz.com

۴۱- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که در هر دقیقه، ۳۰ نوسان کامل انجام می‌دهد، به شکل زیر است. اگر نوسانگر از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که برای دومین بار تندی آن بیشینه می‌شود، مسافت $48\,cm$ را طی کند، t برحسب ثانیه کدام است؟



۱) $\frac{1}{24}$
۲) $\frac{1}{12}$
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{1}{3}$

۴۲- دورهٔ تناوب یک آونگ ساده $4\,s$ است. اگر در همان محل، جرم آونگ و دامنهٔ نوسان‌های آن ۲ برابر شود، دورهٔ تناوب آونگ به چند ثانیه می‌رسد؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

۴۳- طول دو آونگ ساده به ترتیب L_1 و L_2 و تعداد نوسان‌های آن‌ها در هر دقیقه به ترتیب برابر ۲۰ و ۱۵ است. تعداد نوسان‌های آونگی به طول $L_1 + L_2$ در هر دقیقه کدام است؟

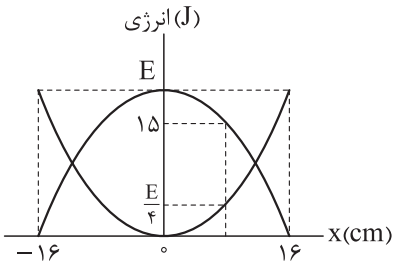
۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۴۴- در شکل زیر، جسم متصل به فنر، ساکن و فنر نسبت به حالت عادی خود $0/4\,m$ کشیده شده است. جسم را مقداری به سمت پایین کشیده و رها می‌کنیم تا شروع به نوسان کند. دورهٔ تناوب نوسان‌های آن چند ثانیه است؟ $(g = 10\,N/kg\,,\ \pi = 3)$



۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۰۶
۳) ۱/۲
۴) ۰/۶

۴۵- نمودار انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل یک نوسانگر هماهنگ ساده برحسب مکان آن به شکل زیر است. بزرگی نیروی خالص وارد بر این نوسانگر در نقاط بازگشت چند نیوتون است؟



۱) ۲۵۰
۲) ۱۵۰
۳) ۲/۵
۴) ۱/۵

۴۶- معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = 0/04\cos 5\pi t$ است. اگر در لحظه‌ای که تندی نوسانگر نصف تندی بیشینهٔ آن است، انرژی پتانسیل نوسانگر برابر $15\,mJ$ باشد، جرم نوسانگر چند گرم است؟ $(\pi = \sqrt{10})$

۱) ۵۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۵۰
۴) ۲۰۰

محل انجام محاسبات

۴۷- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) امواج مکانیکی و امواج الکترومغناطیسی منشأ یکسان اما مشخصه‌های متفاوتی دارند.

۲) موج رادیویی، نوعی موج الکترومغناطیسی و موج صوتی، نوعی موج مکانیکی است.

۳) در موج‌های عرضی جابه‌جایی هر جزء نوسان‌کننده از محیط، عمود بر جهت حرکت موج است.

۴) در موج‌های پیش‌رونده، اجزای نوسان‌کنندهٔ محیط، از ناحیه‌ای به ناحیهٔ دیگر منتقل نمی‌شوند.

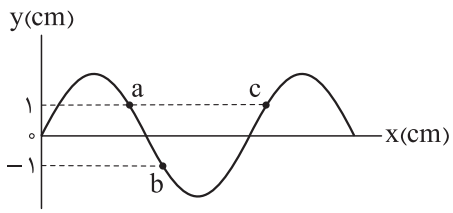
۴۸- زمین‌لرزه‌ای در فاصلهٔ ۷۲۹کیلومتری از یک لرزه‌نگار رخ داده است. موج S این زمین‌لرزه ۷۲ s بعد از موج P توسط لرزه‌نگار دریافت می‌شود. اگر نسبت تندی موج P به موج S برابر $\frac{۹}{۵}$ باشد، تندی موج P چند کیلومتر بر ثانیه است؟

۱) ۹ ۲) ۸/۱ ۳) ۴/۵ ۴) ۴/۲

۴۹- فنری به جرم ۰/۶ kg و طول ۴/۵ m را با نیروی ۱/۲ N می‌کشیم. اگر موج عرضی ایجادشده با بسامد ۶ Hz در طول فنر منتشر شود، طول موج آن چند متر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵۰- شکل زیر نقش یک موج مکانیکی سینوسی را در لحظه‌ای از زمان نشان می‌دهد. موج در خلاف جهت محور x در طول یک ریسمان کشیده‌شده حرکت می‌کند. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ ذرات a، b و c درست است؟



الف) فاصلهٔ دو ذرهٔ a و c برابر طول موج است.

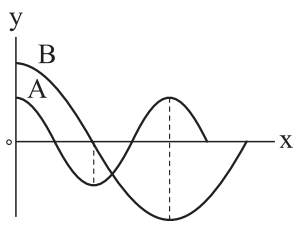
ب) فاصلهٔ دو ذرهٔ c و b برابر نصف طول موج است.

پ) حرکت ذرهٔ a برخلاف دو ذرهٔ دیگر، کندشونده است.

ت) شتاب ذرهٔ b برخلاف شتاب دو ذرهٔ دیگر، در جهت محور y است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

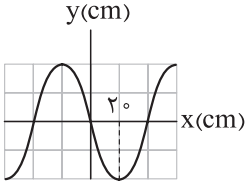
۵۱- نمودار جابه‌جایی ـ مکان دو موج مکانیکی A و B که در یک محیط در حال انتشارند، به شکل زیر است. در مدتی که چشمهٔ موج A ، ۴۸ نوسان انجام می‌دهد، چشمهٔ موج B چند نوسان انجام می‌دهد؟

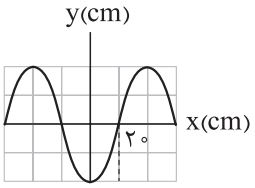


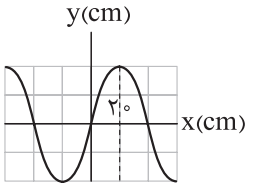
۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۹۶

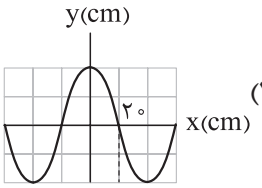
محل انجام محاسبات

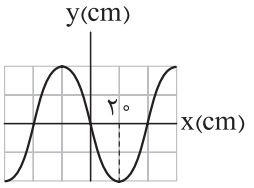
۵۲- نقش یک موج عرضی منتشرشده در یک ریسمان کشیده‌شده، در مبدأ زمان به شکل زیر است. موج با تندی $۴\ m/s$ در جهت محور x حرکت می‌کند. نقش موج در لحظهٔ $t = ۰/۱\ s$ به صورت کدام‌یک از شکل‌های زیر است؟



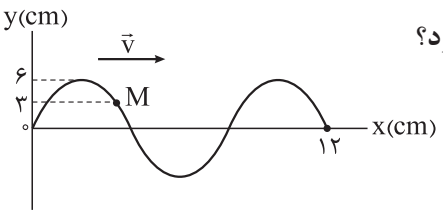
۱)


۲)


۳)


۴)


۵۳- نقش یک موج عرضی در سیمی به چگالی خطی $۰/۸\ g/cm$ و نیروی کشش $۱۲۸\ N$ در لحظه‌ای به شکل زیر است. چند میلی‌ثانیه پس از این لحظه، برای اولین بار، تندی ذرهٔ M بیشینه می‌شود؟



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۵}{۶}$

۵۴- چشمهٔ صوتی در یک فضای باز، امواج صوتی پخش می‌کند و تراز شدت صوت در مکانی به فاصلهٔ ۵۰متری از این چشمه ۹۰ دسی‌بل است. به ترتیب از راست به چپ، توان چشمه و آهنگ متوسط انتقال انرژی صوتی از هر سانتی‌مترمربع از سطحی که در این مکان، عمود بر مسیر انتشار صوت قرار دارد، چند وات است؟ ($I_۰ = ۱۰^{-۱۲}\ W/m^۲$، $\pi = ۳$ و اتلاف انرژی ناچیز است.)

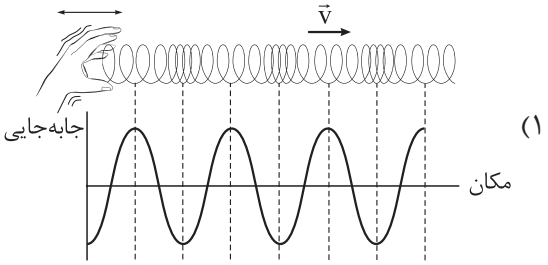
۱) $۳۰، ۱۰^{-۷}$
۲) $۳۰، ۱۰^{-۳}$
۳) $۷/۵، ۱۰^{-۷}$
۴) $۷/۵، ۱۰^{-۳}$

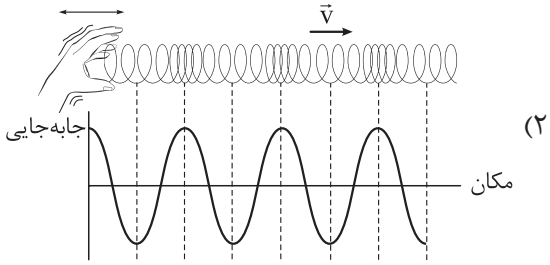
۵۵- دامنهٔ چشمهٔ صوت A، ۲ برابر دامنهٔ چشمهٔ صوت B و بسامد چشمهٔ صوت A، ۴ برابر بسامد چشمهٔ صوت B است. اگر تراز شدت صوت، در فاصلهٔ d از چشمهٔ A برابر $\beta_۱$ و در فاصلهٔ $۵d$ از چشمهٔ صوت B برابر $\beta_۲$ باشد، $\beta_۲ - \beta_۱$ برابر چند دسی‌بل است؟ $(\log ۲ = ۰/۳)$

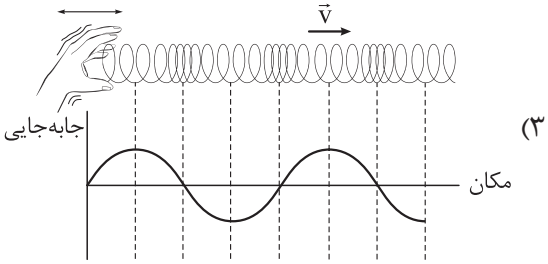
۱) ۳۲
۲) -۳۲
۳) ۳۷
۴) -۳۷

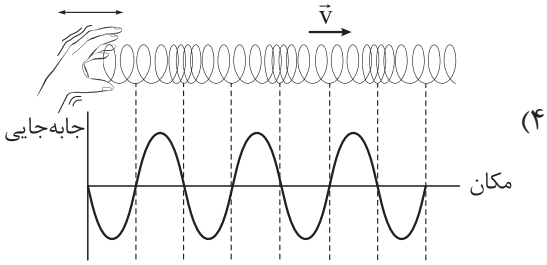
محل انجام محاسبات

۵۶- نمودار جابه‌جایی ـ مکان موج طولی منتشرشده در یک فنر به صورت کدام‌یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۵۷- یک منبع صوت، صوتی با طول موج معین λ تولید می‌کند. در کدام‌یک از حالت‌های زیر، طول موج دریافتی شنونده، کوتاه‌تر از λ است؟

الف) شنونده از منبع ساکن دور شود.

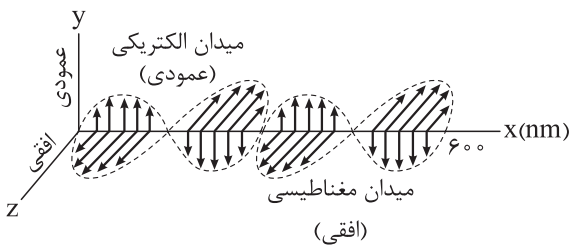
ب) شنونده به منبع ساکن نزدیک شود.

پ) منبع از شنوندهٔ ساکن دور شود.

ت) منبع به شنوندهٔ ساکن نزدیک شود.

۱) الف و پ ۲) ب و ت ۳) ب ۴) ت

۵۸- شکل زیر، تصویر لحظه‌ای از موجی الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد که با تندی $3\times10^{8}\ m/s$ در حال انتشار است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این موج درست است؟



۱) این موج در ناحیهٔ فروسرخ قرار دارد.

۲) این موج در خلاف جهت محور x در حال انتشار است.

۳) دورهٔ تناوب این موج، $2\times10^{-15}\ s$ است.

۴) بسامد این موج $10^{3}\ THz$ است.

محل انجام محاسبات

۵۹- کدام مقایسه دربارهٔ بسامد (f)، دوره (T)، طول موج (λ) و تندی انتشار (v) امواج رادیویی AM و FM در خلأ درست است؟

الف) $T_{AM} > T_{FM}$ ب) $f_{AM} > f_{FM}$

پ) $\lambda_{AM} > \lambda_{FM}$ ت) $v_{AM} > v_{FM}$

۱) ب ۲) الف و پ

۳) ب و ت ۴) الف و پ و ت

۶۰- آشکارسازی برای یک کهکشان، پدیدهٔ انتقال به سرخ را ثبت کرده است. به ترتیب از راست به چپ، فاصلهٔ کهکشان تا آشکارساز و بسامد نور دریافتی آشکارساز، چگونه تغییر می‌کند؟

۱) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد. ۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد. ۴) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

۶۱- عایق بین صفحه‌های خازنی، هوا و اندازهٔ میدان الکتریکی بین صفحه‌ها $30\,V/mm$ است. اندازهٔ چگالی سطحی بار الکتریکی هر یک از صفحه‌های این خازن در SI کدام است؟ $(\varepsilon_0 = 9\times10^{-12}\ F/m)$

۱) $2/7\times10^{-7}$ ۲) $2/7\times10^{-4}$ ۳) 3×10^{-7} ۴) 3×10^{-4}

۶۲- خازن تختی را که فاصلهٔ بین صفحه‌های آن $2mm$ و فضای بین آن‌ها هوا است، پس از شارژشدن از باتری جدا می‌کنیم. سپس فاصلهٔ بین صفحه‌ها را به $10mm$ رسانده و فضای بین آن‌ها را با دی‌الکتریکی با ثابت κ پر می‌کنیم. اگر با این کار انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در خازن ۲۵ درصد افزایش یابد، κ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۳- ولتاژ دو سر خازنی را $30V$ افزایش می‌دهیم. با این کار بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن $120\mu C$ و انرژی الکتریکی‌ذخیره‌شده در آن $4/2mJ$ افزایش می‌یابد. بار نهایی ذخیره‌شده در خازن چند میکروکولن است؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۲۰۰

۶۴- مساحت مقطع یک ریل فلزی $48cm^2$ است. مقاومت $16km$ از این ریل چند اهم است؟ (مقاومت ویژهٔ فلز $3\times10^{-5}\Omega.cm$ است.)

۱) ۱ ۲) ۰/۰۱ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۰

۶۵- چگالی پلاتین ۸ برابر چگالی آلومینیم و مقاومت ویژهٔ آلومینیم، $\frac{7}{25}$ برابر مقاومت ویژهٔ پلاتین است. مقاومت الکتریکی یک سیم آلومینیمی به مساحت مقطع $10mm^2$ و جرم $40g$، چند برابر مقاومت الکتریکی یک سیم پلاتینی به مساحت مقطع $20mm^2$ و جرم $56g$ است؟

۱) ۶/۴ ۲) ۳/۲ ۳) ۲/۸ ۴) ۱/۶

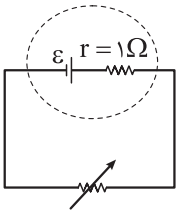
محل انجام محاسبات

۶۶- در دمای $30^\circ C$، مقاومت پلاتین یک دماسنج مقاومت پلاتینی 160Ω است. وقتی این دماسنج در محلول خاصی قرار گیرد، مقاومت آن 192Ω می‌شود. دمای این محلول چند درجهٔ سلسیوس است؟ ($\alpha_{\text{پلاتین}} = 4\times10^{-3}\ \frac{1}{^\circ C}$ و از انبساط پلاتین در اثر افزایش دما چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۵۰ ۲) ۶۰

۳) ۷۰ ۴) ۸۰

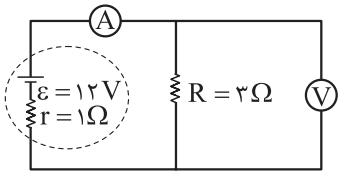
۶۷- در مدار شکل زیر، با تغییر مقاومت رئوستا از R_1 به R_2، جریان الکتریکی عبوری از آن نصف می‌شود. اگر اختلاف R_1 و R_2 برابر 5Ω باشد، R_2 برابر چند اهم است؟



۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۹ ۴) ۱۰

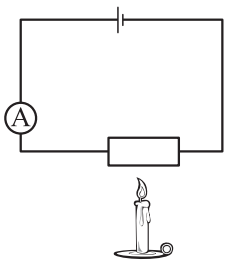
۶۸- در مدار شکل زیر، اگر جای آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی با هم عوض شود، مقداری که هر یک نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ در SI چند واحد تغییر می‌کند؟



۱) ۳، ۳ ۲) ۳، ۹

۳) ۴، ۳ ۴) ۴، ۹

۶۹- در مدار شکل زیر، توسط شمع به میله گرما می‌دهیم. اگر با این کار مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، افزایش یابد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این میله درست است؟



الف) مادهٔ سازندهٔ میله، رسانا است.

ب) مادهٔ سازندهٔ میله، نیم‌رسانا است.

پ) ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌های میله افزایش می‌یابد.

ت) تعداد حامل‌های بار میله، ثابت می‌ماند.

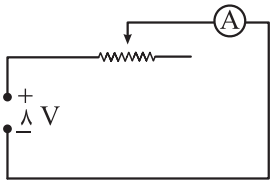
۱) الف و ت ۲) ب و پ ۳) الف و پ ۴) ب و ت

۷۰- وقتی دو سر یک بخاری برقی را به اختلاف پتانسیل $220V$ وصل کنیم، جریان $10A$ از آن می‌گذرد. اگر این بخاری به مدت $3h$ در هر شبانه‌روز کار کند و قیمت برق مصرفی به ازای هر کیلووات ساعت ۵۰ تومان باشد، هزینهٔ یک ماه (۳۰ روز) مصرف این بخاری چند تومان می‌شود؟

۱) ۹۹۰ ۲) ۹۹۰۰ ۳) ۳۳۰ ۴) ۳۳۰۰

محل انجام محاسبات

۷۱- در شکل زیر، آمپرسنج آرمانی ۲۵۰mA را نشان می‌دهد. مقاومت متغیر چند اهم و چگونه تغییر کند تا توان مصرفی آن ۶۰ درصد افزایش یابد؟

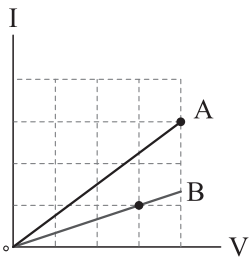


۱) ۱۲، کاهش یابد
۲) ۱۲، افزایش یابد
۳) ۱۹/۲، کاهش یابد
۴) ۱۹/۲، افزایش یابد

۷۲- اگر جریان الکتریکی عبوری از یک باتری از ۷A به ۸ A برسد، توان خروجی آن از ۳۵W به ۳۲W می‌رسد. دو سر یک آمپرسنج آرمانی را به دو سر این باتری وصل می‌کنیم. آمپرسنج چند آمپر را نشان می‌دهد؟

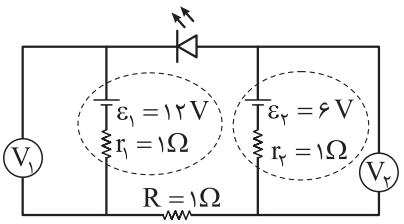
۱) ۳
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۲

۷۳- نمودار جریان الکتریکی عبوری از دو رسانای A و B برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها به شکل زیر است. اگر این دو رسانا به طور جداگانه به یک باتری با مقاومت درونی ۳Ω متصل شوند، توان خروجی باتری در دو حالت برابر می‌شود. مقاومت الکتریکی رسانای A چند اهم است؟



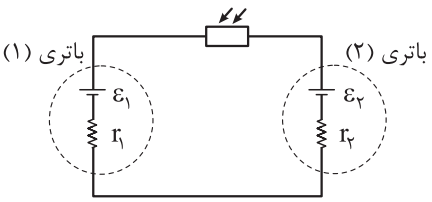
۱) ۲
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) ۴/۵
۴) ۳

۷۴- در مدار شکل زیر، مقدارهایی که ولت‌سنج‌های آرمانی $V_۱$ و $V_۲$ نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ چند ولت است؟ (از مقاومت اُهمی دیود نورگسیل چشم‌پوشی کنید.)



۱) ۱۰، ۸
۲) ۱۰، ۶
۳) ۱۲، ۸
۴) ۱۲، ۶

۷۵- در مدار شکل زیر، با افزایش نور تابیده به مقاومت نوری، کدام‌یک از تغییرات زیر الزاماً رخ می‌دهد؟ ($\varepsilon_۱ > \varepsilon_۲$)



الف) توان خروجی باتری (۱) کاهش می‌یابد.
ب) توان خروجی باتری (۱) افزایش می‌یابد.
پ) توان ورودی باتری (۲) کاهش می‌یابد.
ت) توان ورودی باتری (۲) افزایش می‌یابد.

۱) الف و پ
۲) ب و ت
۳) پ
۴) ت

محل انجام محاسبات

۷۶- کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟

الف) در سلول سوختی متان ـ اکسیژن، جهت حرکت e^- در مدار بیرونی از الکترودی که در آن گاز متان وارد می‌شود به سمت الکترودی است که در آن گاز اکسیژن وارد می‌شود.

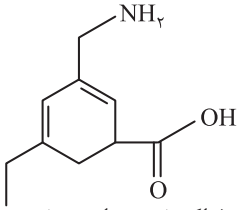
ب) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن نسبت به سلول‌های سوختی مربوط به هیدروکربن‌ها، علاوه بر عدم تولید گاز گلخانه‌ای، احتمال بروز خطر نیز کم‌تر است.

پ) جهت حرکت یون هیدرونیوم در غشای سلول سوختی، مشابه جهت حرکت کاتیون Cu^{2+} در سلول گالوانی آهن ـ مس از آند به کاتد است.

ت) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد متانول برابر ۰/۰۱۶ ولت باشد، تفاوت emf سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن و متانول ـ اکسیژن برابر ۰/۰۱۶ ولت خواهد بود.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) ب ـ ت

۷۷- در شکل زیر، چند درصد اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش صفر هستند و در صورت سوختن کامل این ماده، عدد اکسایش چند اتم کربن ۶ واحد تغییر می‌کند؟



۱) ۲۰٪ – ۲ ۲) ۲۰٪ – ۳

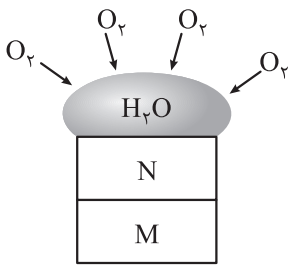
۳) ۳۰٪ – ۲ ۴) ۳۰٪ – ۳

۷۸- اگر الکترون‌های آزادشده از اکسایش ۵۲ گرم فلز روی در باتری دگمه‌ای روی ـ نقره (واکنش موازنه شود: $Zn(s) + Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s) + Ag(s)$)، در نیم‌واکنش کاتدی سلول برقکافت سدیم کلرید مصرف شود، چند گرم فلز سدیم تولید شده و چند لیتر گاز (در شرایط STP) در سلول برقکافت آزاد می‌شود؟ $(Zn = 65, Na = 23 : g.mol^{-1})$

۱) ۱۷/۹۲ – ۱۸/۴ ۲) ۳۵/۸۴ – ۱۸/۴

۳) ۱۷/۹۲ – ۳۶/۸ ۴) ۳۵/۸۴ – ۳۶/۸

۷۹- براساس شکل زیر، کدام موارد از مطالب زیر درست هستند؟



الف) اگر M و N به ترتیب آلومینیم و روی باشند، در قطرهٔ آب غلظت Zn^{2+} به تدریج افزایش می‌یابد.

ب) اگر M و N به ترتیب طلا و نقره باشند، با حل‌کردن گاز N_2O_5 در آب، غلظت هر دو کاتیون مربوط به طلا و نقره افزایش می‌یابد.

پ) اگر M فلز آهن و N فلز روی باشد، از این ترکیب در ساخت کانال کولر استفاده می‌شود. در این صورت، فلز آهن در برابر خوردگی محافظت می‌شود.

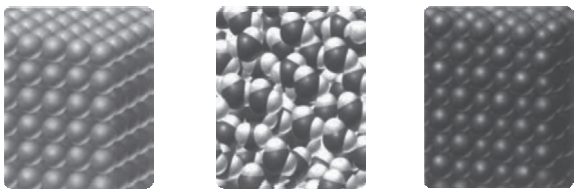
ت) اگر $E^\circ(M^{x+} / M) < E^\circ(N^{y+} / N)$ باشد، وجود فلز N باعث تشدید خوردگی فلز M می‌شود.

$$Au^{3+}(aq) + 3e^- \rightarrow Au(s) \quad E^\circ = 1/5\,V$$
$$Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s) \quad E^\circ = 0/8\,V$$
$$O_2(g) + 2H_2O(s) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq) \quad E^\circ = 0/4\,V$$
$$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(s) \quad E^\circ = 1/2\,V$$

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ت

محل انجام محاسبات

۸۰- با توجه به انواع جامدهایی که در شکل زیر نشان داده شده‌اند، کدام گزینه درست است؟



(الف) (ب) (پ)

۱) مادهٔ (الف) همانند مادهٔ (پ) ساختاری سه‌بعدی، منظم و بلوری دارد و هر دو در حالت جامد رسانای جریان برق هستند.

۲) نقطهٔ ذوب و جوش مادهٔ (ب) همانند مادهٔ (الف) به جاذبهٔ بین مولکولی میان ذرات سازندهٔ آن وابسته است و مادهٔ (ب) نسبت به مواد (الف) و (پ) در گسترهٔ دمایی کم‌تری به حالت مایع وجود دارد.

۳) الماس و سیلیسیم ساختاری مشابه شکل (ب) داشته و برخلاف آن سختی بالایی دارند.

۴) از مواد (الف) و (ب) به طور هم‌زمان می‌توان در تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی در دو جایگاه متفاوت بهره برد.

۸۱- با توجه به ترکیب‌های سازندهٔ نوعی خاک رس که در جدول زیر آمده است، به نمونهٔ ۴۰۰گرمی از آن چند کیلوژول گرما دهیم تا درصد جامد کووالانسی تشکیل‌دهندهٔ آن ۵ درصد افزایش یابد؟ در این صورت درصد جرمی عامل سرخ‌بودن این خاک به تقریب چند درصد تغییر می‌کند؟ (۸۰٪گرمای جذب‌شده سبب تبخیر آب می‌شود.)

ماده	SiO_2	Al_2O_3	H_2O	Na_2O	Fe_2O_3	MgO	Au و دیگر مواد
درصد جرمی	۴۵	۳۷	۱۵	۱/۲۴	۰/۹۶	۰/۴۴	۰/۱

$(H = 1, O = 16 : g.mol^{-1})$

$H_2O(l) + 270kJ \rightarrow H_2O(g)$

۱) ۷۵۰ ـ ۱۱ ۲) ۶۰۰ ـ ۱۱ ۳) ۶۰۰ ـ ۹ ۴) ۷۵۰ ـ ۹

۸۲- اگر ساختار $Si(s)$ با $SiO_2(s)$ مشابه باشد، سیلیسیم در طبیعت به حالت خالص ..... زیرا ..... .

۱) یافت می‌شود ـ آنتالپی پیوند $Si-O$ بیشتر از پیوند $Si-Si$ است

۲) یافت می‌شود ـ ساختار $SiO_2(s)$ سه‌بعدی و ساختار $Si(s)$ دوبعدی است

۳) یافت نمی‌شود ـ آنتالپی پیوند $Si-O$ بیشتر از پیوند $Si-Si$ است

۴) یافت نمی‌شود ـ ساختار $SiO_2(s)$ سه‌بعدی و ساختار $Si(s)$ دوبعدی است

۸۳- کدام گزینه درست است؟

۱) در ساختار یخ برخلاف سیلیس، نوعی پیوند بین مولکولی از نوع غیروان‌دروالسی مشاهده می‌شود که بین اتم‌های H و O دو مولکول آب وجود دارد.

۲) از سیلیسیم خالص به علت خواص نوری ویژه در ساخت عدسی‌ها و منشور استفاده می‌شود.

۳) اگر فرمول کلی نوعی مادهٔ جامد به صورت AO_2 و عنصر A از گروه ۱۴ باشد، به طور حتم پیوند کووالانسی در ساختار آن وجود دارد.

۴) فاصلهٔ بین اتم‌های کربن در ساختار گرافیت می‌تواند از طول پیوندهای کربن ـ کربن الماس، کم‌تر یا بیشتر باشد.

محل انجام محاسبات

۸۴- چند مورد از موارد زیر از نظر درستی یا نادرستی مشابه عبارت داده‌شده نیست؟

«هر مولکول خطی سه‌اتمی که در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند، اتم مرکزی با جفت‌الکترون ناپیوندی دارد.»

الف) در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی آمونیاک برخلاف گوگرد تری‌اکسید، عنصر با جرم مولی بیشتر دارای بار جزئی منفی است.

ب) اگر یک مولکول از سه اتم یکسان تشکیل شده باشد، نمی‌تواند در میدان الکتریکی جهت‌گیری کند و مولکولی ناقطبی است.

پ) در مولکول AD_2 که ساختار خمیده دارد، A و D می‌توانند عناصر یک دوره یا گروه باشند.

ت) با جایگزین‌کردن یک اتم هیدروژن با اتم کلر در ساختار کربن تتراکلرید، نوع جهت‌گیری آن در میدان الکتریکی برخلاف حالت فیزیکی‌اش تغییر می‌کند.

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۵- جاهای خالی در عبارت زیر را کدام گزینه به درستی تکمیل می‌کند؟

«مولکول ..... همانند ..... دارای پیوند دوگانه است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند و علامت بار جزئی اتم اکسیژن در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول ..... برخلاف ..... منفی است.»

۱) $OF_2 - SCO - SO_3 - POCl_3$ ۲) $OF_2 - SCO - SO_2 - NO_2Cl$

۳) $SCO - OF_2 - SO_2 - COCl_2$ ۴) $SCO - OF_2 - SO_3 - SiF_4$

۸۶- چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ مولکول آمونیاک درست است؟

- **اتم مرکزی در آن، بار جزئی مثبت دارد.**
- **ساختار آن، مشابه ساختار مولکول گوگرد تری‌اکسید است.**
- **در تشکیل $۵/۴۱۸\times۱۰^{۲۴}$ مولکول از آن، ۲۷ مول الکترون بین اتم‌ها به اشتراک گذاشته می‌شود.**
- **مجموع شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی در آن، برابر شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در مولکول کلروفرم است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۷- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) اگر مولکول AB_3 که عنصر B هالوژنی از دورهٔ دوم جدول دوره‌ای است قطبی باشد، عنصر A در واکنش با سدیم می‌تواند ترکیبی با فرمول Na_3A تشکیل دهد.

ب) کربونیل سولفید همانند کربونیل کلرید در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند و شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار این دو مولکول یکسان است.

پ) هر مولکول دواتمی ناجورهسته که یکی از عناصر سازندهٔ آن اکسیژن است، حداقل ۳ جفت‌الکترون ناپیوندی در ساختار خود دارد.

ت) هر مولکول با ساختار V شکل که اتم مرکزی در آن دو جفت‌الکترون ناپیوندی دارد، اتم‌های کناری در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی به رنگ آبی هستند.

۱) ب ـ ت ۲) الف ـ پ ۳) الف ـ ب ۴) ب ـ پ

محل انجام محاسبات

۸۸- با توجه به مدل فضاپرکن مولکول‌های «a» و «b» کدام موارد زیر نادرست است؟



(b) (a)

الف) مولکول «b» را می‌توان به هر یک از گونه‌های CF_4، SO_4^{2-}، NH_4^+ و N_2O_3 نسبت داد.
ب) اگر مولکول «b»، CH_4 باشد و یکی از اتم‌های هیدروژن آن با کلر جایگزین شود، رفتار مولکول در میدان الکتریکی تغییر خواهد کرد.
پ) با جایگزین‌کردن اتم مرکزی در مولکول «a» گشتاور دوقطبی می‌تواند به تقریب دو برابر تغییر کند.
ت) مولکول «a» یک مولکول قطبی است و همواره از سمت اتم مرکزی به سمت صفحهٔ مثبت میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ ت ۳) پ ـ ت ۴) ب ـ پ

۸۹- با توجه به جدول داده‌شده که برخی عنصرهای دورهٔ دوم و سوم جدول تناوبی را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

نماد عنصر	شعاع اتمی	شعاع یونی	نسبت بار به شعاع
A	۱۵۲	۷۶	$۱/۳۱\times۱۰^{-۲}$
B	۱۶۰	۷۲	$۲/۷۸\times۱۰^{-۲}$
C	۱۰۲	۱۸۴	$۱/۰۸\times۱۰^{-۲}$
D	۷۱	۱۳۳	$۰/۷۵\times۱۰^{-۲}$

الف) اگر عنصر A و D در یک دوره باشند، عنصرهای B و C نمی‌توانند در یک دوره باشند.
ب) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ ترکیب CB از AD بیشتر و مجموع قدرمطلق بار کاتیون‌های این دو ترکیب، برابر ۳+ است.
پ) عنصر A در جدول دوره‌ای از عنصر B بالاتر و نقطهٔ ذوب ترکیب حاصل از واکنش B با D از ترکیب A با D بیشتر است.
ت) از واکنش بین عناصر موجود، حداکثر ۴ ترکیب به دست می‌آید.

۱) پ ـ ت ۲) فقط پ ۳) الف ـ ت ۴) ب ـ ت

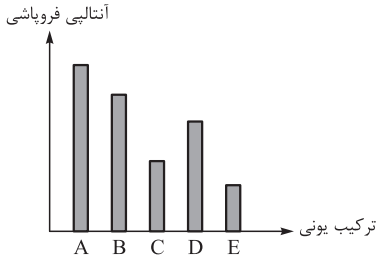
۹۰- با توجه به کاتیون‌ها و آنیون‌های تک‌اتمی و پایدار عنصرهای دورهٔ دوم و سوم، چند مورد از موارد زیر درست است؟

- **در بین کاتیون‌ها، کم‌ترین چگالی بار مربوط به یون سدیم است.**
- **در بین آنیون‌ها، بیشترین چگالی بار مربوط به یون نیترید است.**
- **در بین ترکیب‌های یونی ممکن، جاذبهٔ میان یون‌های سدیم و کلرید از همه ضعیف‌تر است.**
- **در بین ترکیب‌های یونی ممکن، آنتالپی فروپاشی شبکهٔ ترکیب آلومینیم فلوئورید از همه بیشتر است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۹۱- با توجه به نمودار زیر که مربوط به بعضی ترکیب‌های یونی حاصل از عنصرهای فلزات قلیایی و قلیایی‌خاکی با هالوژن‌های دورهٔ دوم تا چهارم جدول دوره‌ای است، کدام مطلب به یقین درست است؟



۱) اگر چگالی بار کاتیون ترکیب A از B بیشتر باشد، شعاع آنیون B از A بیشتر خواهد بود.

۲) اگر بار کاتیون ترکیب D، ۲ برابر کاتیون ترکیب C باشد، شعاع اتمی فلز سازندهٔ D از فلز سازندهٔ C کم‌تر خواهد بود.

۳) اگر آنیون ترکیب E و D یکسان باشد، بار کاتیون E از D و C کم‌تر خواهد بود.

۴) اگر کاتیون‌های E و C در یک گروه قرار داشته باشند و آنیون‌های A و C یکسان باشند، کاتیون ترکیب B و E در یک گروه نخواهند بود.

۹۲- اگر مجموع آنتالپی فروپاشی شبکهٔ MgS(s) و KF(s) برابر a، MgO(s) و LiF(s) برابر b، NaCl(s) و CaS(s) برابر c باشد، کدام مقایسه درست است؟

۱) $a > b > c$

۲) $a > c > b$

۳) $b > a > c$

۴) $b > c > a$

۹۳- به مخلوطی از آلومینیم فلوئورید و منیزیم اکسید به جرم ۲۵ گرم، ۲۱۶۰ کیلوژول گرما می‌دهیم تا شبکهٔ بلوری آن‌ها فروپاشیده شود. اگر اختلاف حجم کاتیون‌ها و آنیون‌ها در شرایط STP، ۱۱/۲ لیتر بوده و آنتالپی فروپاشی AlF_3 و MgO، ۸۰۰ کیلوژول بر مول تفاوت داشته باشد، به تقریب چند درصد گرمای مصرف‌شده، صرف تولید $Mg^{2+}(g)$ و $O^{2-}(g)$ شده است؟ $(Al = 27, Mg = 24, F = 19, O = 16 : g.mol^{-1})$

۱) ۵۲

۲) ۲۶

۳) ۱۳

۴) ۳۹

۹۴- کدام مطلب نادرست است؟

۱) برای انجام هر فعالیت با هر آهنگی، نیاز به وجود یک منبع انرژی است.

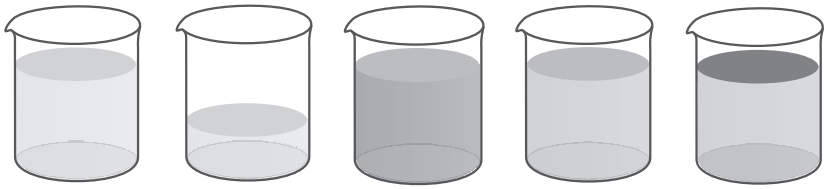
۲) گوشت قرمز و ماهی افزون بر پروتئین، محتوی انواع ویتامین‌ها و مواد معدنی هستند.

۳) شیر و فراورده‌های آن، منبع مهمی برای پیشگیری و ترمیم پوکی استخوان است.

۴) هنگامی که بدن دچار کمبود آهن باشد، می‌توان با خوردن سیب یا نوشیدن شربت آبلیمو و عسل، بدن را به حالت طبیعی بازگرداند.

محل انجام محاسبات

۹۵- با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به ظرف‌های حاوی آب در فشار اتاق هستند، کدام گزینه به ترتیب جاهای خالی عبارت‌های زیر را به درستی کامل می‌کند؟



- **در صورتی که دماسنج درون ظرف‌های A و B قرار داده شود، شدت برخورد مولکول‌های آب به دیوارهٔ دماسنج در ظرف ..... از ظرف دیگر بیشتر خواهد بود.**
- **افزودن مقداری از آب ظرف B به ظرف D، سبب تغییر میانگین انرژی جنبشی مولکول‌ها ..... .**
- **ظرف‌های ..... به ترتیب بیشترین و کم‌ترین میانگین انرژی جنبشی را دارند.**

۱) B ـ می‌شود ـ D و C
۲) A ـ می‌شود ـ E و A
۳) B ـ نمی‌شود ـ E و C
۴) A ـ نمی‌شود ـ D و A

۹۶- نیتینول آلیاژی از فلزهای نیکل و تیتانیم است. اگر به ۱۰ گرم از این آلیاژ ۴۲/۵۵ J گرما دهیم تا دمای آن از $10^\circ C$ به $20^\circ C$ برسد، چند درصد از جرم این آلیاژ را فلز نیکل تشکیل داده است؟ $(c_{Ti} = 0/53, c_{Ni} = 0/34 : J.g^{-1}.^\circ C^{-1})$

۱) ۵۵
۲) ۴۵
۳) ۶۵
۴) ۳۵

۹۷- ۱۰ گرم جیوه (Hg) در یک ظرف وجود دارد. اگر ۰/۹۲ میلی‌گرم از این جیوه تبخیر شود و گرمای لازم برای تبخیرشدن از جیوهٔ مایع موجود در ظرف گرفته شود، دمای جیوهٔ مایع، به تقریب چند درجهٔ سلسیوس کاهش خواهد یافت؟ (از مبادلهٔ گرما توسط ظرف صرف نظر شود. گرمای ویژهٔ جیوهٔ مایع برابر با ۰/۱۴ ژول بر گرم بر درجهٔ سلسیوس بوده و آنتالپی تبخیر آن ۶۲ کیلوژول بر مول می‌باشد؛ $Hg = 200 g.mol^{-1}$)

۱) ۰/۱
۲) ۰/۲
۳) ۰/۳
۴) ۰/۴

۹۸- آنتالپی استاندارد سوختن اتان، برابر ۱۵۶۰ کیلوژول بر مول و آنتالپی استاندارد سوختن پروپین، برابر ۲۰۰۰ کیلوژول بر مول است. اگر از سوختن کامل ۶ گرم مخلوطی از اتان و پروپین در حضور مقدار کافی اکسیژن، در مجموع ۳۰۴ کیلوژول گرما تولید شود، نسبت جرم اتان به جرم پروپین در مخلوط اولیه کدام است؟

$(H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۵
۲) ۲
۳) ۰/۲۵
۴) ۴

محل انجام محاسبات

۹۹- در هوای سرد زمستان، برای گرم نگه داشتن دست‌ها می‌توان از کیسه‌های گرمازا استفاده کرد. در برخی از این کیسه‌ها از واکنش زیر برای تولید گرما استفاده می‌شود. یک کیسه به جرم ۶۰ گرم داریم که ۷۰ درصد جرم آن را پودر آهن تشکیل می‌دهد. اگر با مصرف کامل پودر آهن موجود در این کیسه، ۳۱۰ کیلوژول گرما تولید شود، آنتالپی واکنش زیر به تقریب چند کیلوژول بر مول است؟ ($Fe = ۵۶\ g.mol^{-1}$) (ناخالصی‌ها باعث تولید گرما نمی‌شوند.)

$$۴Fe(s) + ۳O_۲(g) \rightarrow ۲Fe_۲O_۳(s)$$

۱) ۸۲۶ ۲) ۸۶۲ ۳) ۱۵۶۳ ۴) ۱۶۵۳

۱۰۰- آنتالپی سوختن یک آلکان از طریق مقادیر آنتالپی پیوندهای داده‌شده در جدول زیر، $-۲۶۱۰/۵$ کیلوژول بر مول گزارش‌شده است. کدام مورد می‌تواند نشان‌دهندهٔ ساختار آلکان مورد نظر باشد؟

پیوند	O=O	C—C	C—H	C=O	O—H
آنتالپی پیوند ($kJ.mol^{-1}$)	۴۹۵	۳۴۸	۴۱۵	۷۹۹	۴۶۳

۱) $CH_۳-CH_۲-CH_۳$ ۲) 

۳)  ۴) $CH_۳CH(CH_۳)CH_۲CH_۳$

۱۰۱- از سوختن کامل یک مول گاز هیدروژن در شرایط معین و تبدیل آن به بخار آب، ۲۲۴ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. اگر آنتالپی پیوندهای O=O و H—F و میانگین آنتالپی پیوند H—O به ترتیب برابر ۴۹۶، ۵۶۷ و ۴۶۰ کیلوژول بر مول باشد، آنتالپی واکنش $H_۲(g) + ۲F(g) \rightarrow ۲HF(g)$، برابر چند کیلوژول است؟

۱) -۱۳۷ ۲) -۴۳۰ ۳) -۵۶۷ ۴) -۷۰۴

۱۰۲- چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟

- **گرمای یک واکنش در دما و فشار ثابت، به نوع و مقدار واکنش‌دهنده‌ها، نوع فراورده‌ها و حالت فیزیکی آن‌ها بستگی دارد.**
- **آرایش اتم‌های کربن و اکسیژن با پیوند دوگانهٔ $C=O$، به بنزآلدهید و ۲- هپتانون، خواص ویژه‌ای می‌بخشد.**
- **به موادی که فرمول مولکولی متفاوت اما ساختار یکسانی دارند، ایزومر (همپار) می‌گویند.**
- **کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها، افزون بر تأمین مواد اولیه برای سوخت‌وساز یاخته‌ها، منابعی برای تأمین انرژی آن‌ها هستند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۳- کدام مورد در ارتباط با نخستین گاز جمع‌آوری شده از سطح مرداب‌ها، نادرست است؟

۱) فراورده‌های حاصل از سوختن کامل آن، جزء گازهای گلخانه‌ای هستند.

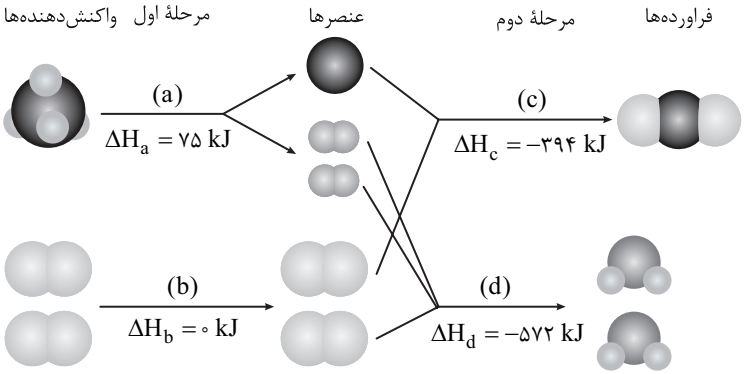
۲) برای اندازه‌گیری گرمای تولیدشده از سوختن آن در فشار ثابت، از گرماسنج لیوانی نمی‌توان استفاده کرد.

۳) اگر آنتالپی سوختن این گاز برابر a کیلوژول بر مول و آنتالپی سوختن پروپان، برابر b کیلوژول بر مول باشد، آنتالپی سوختن بوتان، برابر $(b + \frac{b-a}{۲})$ کیلوژول بر مول خواهد بود.

۴) در میان هیدروکربن‌ها، کم‌ترین ارزش سوختی و آنتالپی سوختن را دارد.

محل انجام محاسبات

۱۰۴- سوختن کامل متان را می‌توان به صورت زیر نمایش داد. اگر ۳۲ گرم متان با خلوص ۸۰ درصد در این واکنش مصرف شود، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$



۱) ۱۷۸۲
۲) ۱۴۲۵ / ۶
۳) ۸۹۰
۴) ۳۵۶۴

۱۰۵- بر پایهٔ واکنش‌های گرماشیمیایی داده‌شده، تهیهٔ ۲۳ گرم اتانول از تخمیر گلوکز جامد، چند کیلوژول انرژی آزاد می‌کند؟ (گاز کربن دی‌اکسید، فراوردهٔ دیگر واکنش است؛ $H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1}$)

$$CH_3COOH(l) + 2O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g) + 2H_2O(l) \quad , \quad \Delta H = -874\,kJ$$

$$C_2H_5OH(l) + O_2(g) \rightarrow CH_3COOH(l) + H_2O(l) \quad , \quad \Delta H = -493\,kJ$$

$$C_6H_{12}O_6(s) + 6O_2(g) \rightarrow 6CO_2(g) + 6H_2O(l) \quad , \quad \Delta H = -2805\,kJ$$

۱) ۱۵ / ۷۵ ۲) ۱۷ / ۷۵ ۳) ۳۱ / ۵ ۴) ۳۵ / ۵

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.
azmoon.kheilisabz.com

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله نهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۳۰/آذر/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ حمید گلزاری صبا مهدوی ـ محسن میراسلامی ـ حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
فیزیک	امین امینی ـ یاشار انگوتی ـ محمد باغبان ـ علیرضا جباری ـ مجید ساکی ـ رضا سبزمیدانی نوید شاهی ـ علیرضا عبداللهی ـ حمید فدائی‌فرد ـ فرزاد نامی ـ حامد نبی‌منصور ـ محمدرضا یاری
شیمی	هومن زندی ـ عباس سرمایه ـ امیرحسین مسلمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	علیرضا کاظمی‌بقا	محمدسجاد نقیه عادل حسینی سجاد داوطلب	ماهان فنی‌فر امیرحسین قنبری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی عادل حسینی فرزانه خاکپاش
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	فرزانه خاکپاش علیرضا کاظمی‌بقا ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	مریم‌گلی حسنلو حسین عبدوی‌نژاد	امین امینی	مهدی بابائی مریم حسن‌لو مدیا عیدی احسان محمدی امیر محمودی انزابی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	وحید فارسیان سروش عبادی محمدرضا طاهری‌نژاد امیرحسین مسلمی	محمد مرادی حمید ذبحی سروش عبادی	احسان رحیمی متین قنبری امیررضا نوری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴
شروع دوازدهم از تابستان
Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	راضیه سادات خلدی‌نسب ـ زهرا صفری محیا غنی‌فرد ـ زهرا فرهادی‌مهر مریم مسلمی‌زاده ـ ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ مریم حسین‌زاده سارا حاتمی ـ سپیده سخایی مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته مهدیه گل‌پور ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com

۱ قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,-۴)$ نسبت به خط $۳y-x=k$ روی خط $y=۲x$ قرار گرفته است. مقدار k کدام است؟

۱) ۷ ۲) -۵ ۳) ۵ ۴) -۷

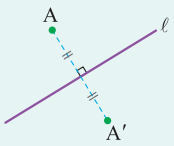
مشاوره از هندسهٔ تحلیلی به صورت مستقیم و غیرمستقیم در کنکور سؤال طرح می‌شود، پس فرمول‌های مربوط به آن را حفظ کنید.

Hint

مختصات A' روی خط $y=۲x$ را به صورت $(\alpha,۲\alpha)$ در نظر بگیرید، شیب خط گذرنده از A و A' را بر حسب α بنویسید و مساوی قرینه و معکوس شیب خط $۳y-x=k$ قرار دهید تا α به دست آید. حال با توجه به این‌که خط مذکور از وسط A و A' می‌گذرد، خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

درس Box

قرینهٔ نقطه نسبت به یک خط



اگر نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط ℓ باشد آن‌گاه:

۱) خط ℓ و AA' هر دو بر یکدیگر عمودند.

۲) خط ℓ از وسط AA' می‌گذرد.

نکته

شیب خط گذرنده از نقاط A و B از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

شیب: $m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$

اگر دو خط بر یکدیگر عمود باشند، آن‌گاه شیب آن‌ها قرینه و معکوس هم است.

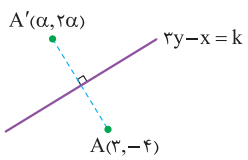
$$\ell\perp\ell' \Rightarrow m_\ell=-\frac{۱}{m_{\ell'}} \Rightarrow m_\ell m_{\ell'}=-۱$$

اگر M وسط دو نقطهٔ A و B باشد، مختصات آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M=(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون قرینهٔ A نسبت به خط $۳y-x=k$، روی خط $y=۲x$ قرار دارد، مختصات آن را $A'(\alpha,۲\alpha)$ فرض می‌کنیم. نقاط A و A' نسبت به خط $۳y-x=k$ قرینهٔ یکدیگرند، پس شیب خط گذرنده از A و A' قرینه و معکوس شیب خط $۳y-x=k$ است. ابتدا شیب $۳y-x=k$ را پیدا می‌کنیم و سپس شیب خط گذرنده از A و A' را به دست می‌آوریم:



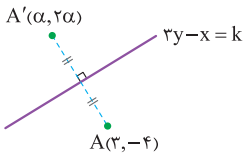
$$۳y-x=k \xrightarrow{\text{مرتب‌سازی}} -x+۳y-k=۰ \rightarrow m=\frac{-(-۱)}{۳}=\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} m_{AA'}=-۳$$

گام دوم: با توجه به این‌که مختصات $A(۳,-۴)$ و $A'(\alpha,۲\alpha)$ داریم، شیب AA' را بر حسب α می‌نویسیم و مساوی $\frac{۱}{۳}$ قرار می‌دهیم:

$$m_{AA'}=\frac{y_{A'}-y_A}{x_{A'}-x_A} \Rightarrow -۳=\frac{۲\alpha-(-۴)}{\alpha-۳} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} -۳\alpha+۹=۲\alpha+۴ \Rightarrow ۵\alpha=۵ \Rightarrow \alpha=۱$$

پس مختصات A' به صورت $(۱,۲)$ می‌باشد.

گام سوم: می‌دانیم که خط $-x+۳y-k=۰$ از وسط دو نقطهٔ A و A' می‌گذرد، ابتدا مختصات M (وسط A و A') را پیدا می‌کنیم و سپس آن را در خط مذکور جای‌گذاری می‌کنیم تا k به دست آید:



$$M=(\frac{x_A+x_{A'}}{۲},\frac{y_A+y_{A'}}{۲}) \Rightarrow M=(\frac{۳+۱}{۲},\frac{۲+(-۴)}{۲}) \Rightarrow M(۲,-۱)$$

$$\xrightarrow[-x+۳y-k=۰]{\text{جای‌گذاری عدد در}} -(۲)+۳(-۱)-k=۰ \Rightarrow -۵-k=۰ \Rightarrow k=-۵$$

۲ خط $x = ۲(y+۱)$ معادلهٔ یک ضلع و نقطهٔ $A(۲,۵)$ یک رأس مستطیل هستند. اگر طول قطر مستطیل $۴\sqrt{۵}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) $۲۰\sqrt{۳}$

۳) $۲۰\sqrt{۵}$ ۴) $۲۰\sqrt{۲}$

مشاوره حتما در سؤالات مربوط به هندسه و هندسهٔ تحلیلی سعی کنید که شکل را رسم کنید، چرا که در حل سؤال کمک زیادی به شما می‌کند.

Hint فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $x-۲y-۲=۰$ را که طول یکی از اضلاع مستطیل است به دست آورید، سپس با توجه به قضیهٔ فیثاغورس طول ضلع دیگر را به دست آورید تا مساحت مستطیل به دست آید.

نکته فاصلهٔ نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

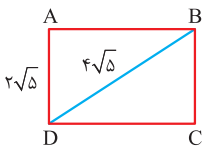
$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا معادلهٔ خط $x=۲(y+۱)$ را به فرم $x-۲y-۲=۰$ می‌نویسیم، نقطهٔ $A(۲,۵)$ در این معادله صدق نمی‌کند، پس بر روی ضلع مقابل به آن خط قرار دارد و فاصلهٔ نقطهٔ A از خط داده‌شده برابر با طول ضلع مستطیل است، پس:

$$\text{فاصلهٔ A از خط } x-۲y-۲=۰ : d=\frac{|(۲)-۲(۵)+-۲|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}} \xrightarrow{\text{گویا کردن}} d=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۰\sqrt{۵}}{۵}=۲\sqrt{۵}$$

گام دوم: حال با توجه به این‌که قطر مستطیل داده شده است، طبق قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع دیگر مستطیل را پیدا می‌کنیم:



$$AB^۲=BD^۲-AD^۲ \Rightarrow AB^۲=(۴\sqrt{۵})^۲-(۲\sqrt{۵})^۲=۸۰-۲۰=۶۰ \Rightarrow AB=\sqrt{۶۰}=۲\sqrt{۱۵}$$

گام سوم: طول و عرض مستطیل را داریم، خواستهٔ سؤال را که مساحت آن است، حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{مستطیل}}=AB\times AD=۲\underbrace{\sqrt{۱۵}}_{\sqrt{۵}\times\sqrt{۳}}\times۲\sqrt{۵}=۲۰\sqrt{۳}$$

۳ نقاط $A(a,5a)$ ، $B(7,3)$ و $C(2,-2)$ سه رأس مثلثی هستند که طول ارتفاع AH در آن برابر $4\sqrt{2}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ یا -3
۲) -1 یا ۳
۳) -2 یا ۱
۴) -2 یا -1

مشاوره اگر از محاسبات طولانی این سؤال چشم‌پوشی کنیم، با سؤال آسانی مواجه هستیم.

Hint معادلهٔ خط گذرنده از رأس‌های B و C را بنویسید و فاصلهٔ نقطهٔ A از آن را برابر $4\sqrt{2}$ قرار دهید تا a به دست آید.

نکته اگر مختصات دو نقطهٔ A و B از یک خط را داشته باشیم، معادلهٔ خط به یکی از دو صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y-y_A=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}(x-x_A)$$

$$y-y_B=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}(x-x_B)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: می‌دانیم که طول ارتفاع AH ، فاصلهٔ رأس A از خط گذرنده از نقاط B و C است، با توجه به این‌که مختصات نقاط B و C را داریم، معادلهٔ خط گذرنده از آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\text{معادلهٔ خط گذرنده از } C(2,-2),B(7,3): (y-y_B)=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}(x-x_B) \Rightarrow y-3=\frac{3-(-2)}{7-2}(x-7)$$

$$\Rightarrow y-3=\frac{5}{5}(x-7) \Rightarrow y-3=x-7 \Rightarrow x-y-4=0$$

گام دوم: طول ارتفاع AH برابر $4\sqrt{2}$ است، با توجه به مختصات نقطه $A(a,5a)$ ، فاصلهٔ آن از خط $x-y-4=0$ را برحسب a می‌نویسیم و مساوی $4\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم:

$$\text{فاصلهٔ } A(a,5a) \text{ از خط } x-y-4=0: \frac{|a-(5a)-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2} \Rightarrow \frac{|-4a-4|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} |-4a-4|=8$$

گام سوم: معادلهٔ قدرمطلقی به‌دست‌آمده برحسب a را حل می‌کنیم تا خواستهٔ سؤال به دست آید:

$$|-4a-a|=8 \Rightarrow \begin{cases} -4a-4=8 \Rightarrow 4a=-12 \Rightarrow a=-3 \\ -4a-4=-8 \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

پس مقادیر a عبارت‌اند از ۱ یا -3.

۴ اگر $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{bx-۲}{ax^۲-۴x+\frac{a}{۴}}=+\infty$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) $-\frac{۹}{۲}$ ۴) $-\frac{۷}{۲}$

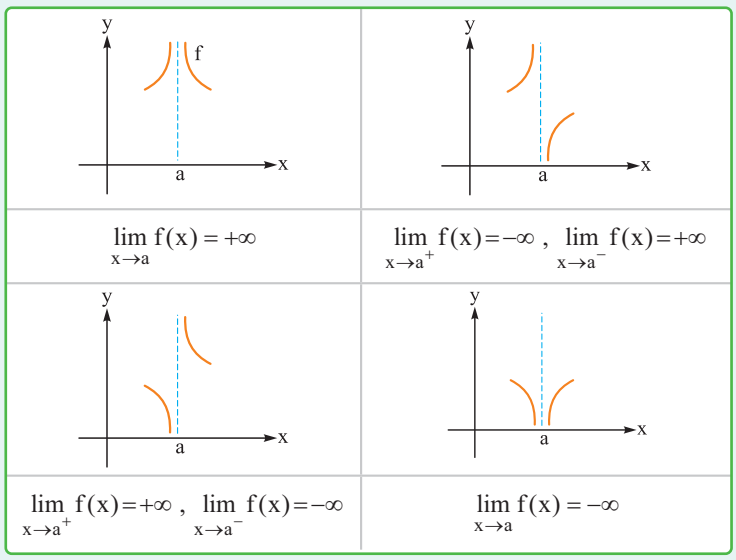
مشاوره بارها در کنکورهای مختلف این سبک سؤال را دیده‌ایم که با یک حد بی‌نهایت مواجه هستیم و مخرج دارای ریشهٔ مضاعف است.

Hint با توجه به این‌که مخرج دارای ریشهٔ مضاعف $x=b$ است و این‌که ضریب $x^۲$ برابر a است، a و b را پیدا کنید و با توجه به حاصل حد، گزینهٔ درست را انتخاب کنید.

درس Box

حد بی‌نهایت

گاهی اوقات، وقتی که $x\to a$، می‌بینیم که مقادیر تابع f به هیچ عددی نزدیک نمی‌شود، بلکه یا همواره در حال افزایش هستند و یا همواره در حال کاهش هستند، به عبارت دیگر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ می‌روند.



حد بی‌نهایت در توابع کسری

در محاسبهٔ حد توابع کسری $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ اگر جواب به صورت $\dfrac{\text{عددغیرصفر}}{\text{صفر حدی}}$ (منظور از صفر حدی، مقداری بسیار نزدیک به صفر است.) شود، حاصل کسر $+\infty$ یا $-\infty$ است، برای تشخیص علامت بی‌نهایت به جدول زیر توجه کنید:

نمایش	عدد منفی / 0^-	عدد منفی / 0^+	عدد مثبت / 0^-	عدد مثبت / 0^+
حاصل حد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ریشهٔ مضاعف یا مرتبهٔ زوج در مخرج

می‌دانیم عبارات مخالف صفری که به توان زوج برسد همواره مثبت هستند، به عنوان مثال حاصل حدهای $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۲}{(x-۲)^۲}$ و $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۵}{۲(x-۴)^۲}$ برابر $+\infty$ می‌شود.

پس اگر حاصل حد یک تابع کسری در دو طرف $x=a$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود، مخرج دارای ریشهٔ مضاعف یا مرتبهٔ زوج $x=a$ است، چراکه علامت صورت به ازای $x=a$ ثابت است و حاصل مخرج نیز به ازای آن 0^+ می‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مخرج یک عبارت درجه‌دوم است و حاصل حد وقتی $x\to b$، برابر $+\infty$ شده است، پس مخرج دارای ریشهٔ مضاعف $x=b$ است، چون ضریب $x^۲$ برابر a است، به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$ax^۲-۴x+\frac{a}{۴}=a\underbrace{(x-b)^۲}_{x^۲-۲bx+b^۲}\Rightarrow ax^۲-۴x+\frac{a}{۴}=ax^۲-۲abx+ab^۲$$

گام دوم: عبارت‌های متشابه در تساوی به‌دست‌آمده را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$ax^2-4x+\frac{a}{4}=ax^2-2abx+ab^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{4}=ab^2 \xrightarrow{a\neq 0} \frac{1}{4}=b^2 \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases} \\ -4=-2ab \begin{cases} \xrightarrow{b=\frac{1}{2}} 2=\frac{1}{2}a \Rightarrow a=4 \\ \xrightarrow{b=-\frac{1}{2}} 2=-\frac{1}{2}a \Rightarrow a=-4 \end{cases} \end{cases}$$

گام سوم: حاصل حد $\lim\limits_{x\to b}\frac{bx-2}{ax^2-4x+\frac{a}{4}}$ را یک‌بار به‌ازای $a=4$ و $b=\frac{1}{2}$ یک‌بار به‌ازای $a=-4$ و $b=-\frac{1}{2}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to b}\frac{bx-2}{ax^2-4x+\frac{a}{4}}=\lim_{x\to b}\frac{bx-2}{a(x-b)^2} \begin{cases} \xrightarrow{b=\frac{1}{2},a=4} \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}x-2}{4(x-\frac{1}{2})^2}=\frac{\frac{1}{4}-2}{4(0^+)}=\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty \\ \xrightarrow{b=-\frac{1}{2},a=-4} \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{-\frac{1}{2}x-2}{-4(x+\frac{1}{2})^2}=\frac{\frac{1}{4}-2}{-4(0^+)}=\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty \end{cases}$$

حاصل حد به ازای $a=4$ و $b=\frac{1}{2}$ مساوی $-\infty$ و به ازای $a=-4$ و $b=-\frac{1}{2}$ مساوی $+\infty$ می‌شود، پس $a=-4$ و $b=-\frac{1}{2}$ قابل قبول هستند و خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$a+b=-\frac{1}{2}-4=-\frac{9}{2}$$

۵ اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{f(x)}{\cos x}=+\infty$ باشد، کدام ضابطه برای تابع **f** مناسب است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[۲x]-۳$

۲) $[\frac{۲x}{\pi}]-۱$

۳) $[\frac{x}{\pi}]-۱$

۴) $[\frac{۴x}{\pi}]-۱$

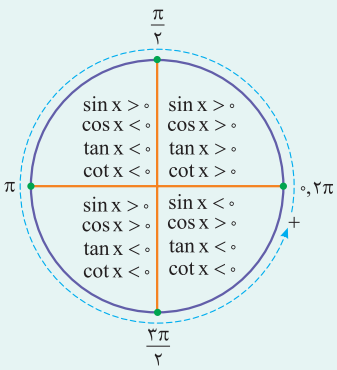
مشاوره اهمیت دایرهٔ مثلثاتی در یک سؤال حد را می‌بینیم.

Hint با توجه به این‌که حاصل حد $+\infty$ شده است، علامت حاصل حد تابع f را وقتی $x\to(\frac{\pi}{۲})^+$ پیدا کنید و ببینید که در کدام‌یک از گزینه‌ها وقتی $x\to(\frac{\pi}{۲})^+$ با حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\cos x$، هم‌علامت می‌شود.

درس Box

تعیین حد عبارت‌های مثلثاتی

برای تعیین علامت عبارت‌های مثلثاتی در حد، به سراغ دایرهٔ مثلثاتی بروید و با توجه به جهت مثبت دایره، علامت مورد نظرتان را تعیین کنید. به عنوان مثال $(\frac{۳\pi}{۲})^-$ در ربع سوم قرار می‌گیرد و حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{۳\pi}{۲})^-}[\cos x]$ برابر $-۱=[۰^-]$ است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\cos x=۰$ و هم‌چنین $\cos x$ در ربع دوم منفی است، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{f(x)}{\cos x}=+\infty\Rightarrow\frac{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}f(x)}{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\cos x}=+\infty\Rightarrow\frac{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}f(x)}{۰^-}=+\infty$$

گام دوم: می‌دانیم $\frac{\text{عدد منفی}}{۰^-}=+\infty$، پس حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}f(x)$ عددی منفی است، با توجه به این موضوع گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}[۲x]-۳=[۲(\frac{\pi}{۲})^+]-۳=[\pi^+]-۳=۳-۳=۰$ ✗

گزینهٔ (۲): $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}[\frac{۲x}{\pi}]-۱=[\frac{۲(\frac{\pi}{۲})^+}{\pi}]-۱=[(\frac{\pi^+}{\pi})]-۱=[۱^+]-۱=۰$ ✗

گزینهٔ (۳): $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}[\frac{x}{\pi}]-۱=[\frac{(\frac{\pi}{۲})^+}{\pi}]-۱=[(\frac{۱}{۲})^+]-۱=۰-۱=-۱$ ✓

گزینهٔ (۴): $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}[\frac{۴x}{\pi}]-۱=[\frac{۴(\frac{\pi}{۲})^+}{\pi}]-۱=[\frac{(۲\pi)^+}{\pi}]-۱=[۲^+]-۱=۲-۱=۱$ ✗

می‌بینیم که حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}([\frac{x}{\pi}]-۱)$ برابر -۱ (که عددی منفی است) شده است؛ پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=[\frac{x}{\pi}]-۱$ مناسب است.

۶ تابع $f(x)=۴x-x^۲$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۱}{a-f(x+b)}=+\infty$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۴

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۴ است و فقط کمی محاسباتش پیچیده‌است.

Hint $x+b$ را در f جای‌گذاری کنید و از آن‌جا که مخرج به فرم $m(x-۳)^۲$ است، $a-f(x+b)$ را با $m(x-۳)^۲$ برابر قرار دهید و m را پیدا کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حاصل حد $+\infty$ شده است، با توجه به ضابطهٔ f، مخرج یک عبارت درجه‌دوم است؛ پس $x=۳$ ریشهٔ مضاعف مخرج است و مخرج به فرم $m(x-۳)^۲$ می‌باشد. در نتیجه:

$$\text{مخرج کسر}: a-f(x+b)=m(x-۳)^۲ \xrightarrow{f(x)=۴x-x^۲} a-(۴(x+b)-(x+b)^۲)=m(x-۳)^۲$$

$$\Rightarrow a-۴x-۴b+(x+b)^۲=m(x^۲-۶x+۹)$$

$$\Rightarrow a-۴x-۴b+\underline{x^۲}+۲bx+b^۲=\underline{mx^۲}-۶mx+۹m \xrightarrow{\text{ضرایب } x^۲ \text{ برابر}} m=۱$$

گام دوم: $m=۱$ را در تساوی به‌دست‌آمده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$m=۱ \rightarrow \underline{\underline{a}}-\underline{۴x}-\underline{\underline{۴b}}+x^۲+\underline{۲bx}+\underline{\underline{b^۲}}=x^۲\underline{-۶x}+\underline{\underline{۹}}$$

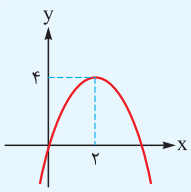
$$\longrightarrow \begin{cases} -۴+۲b=-۶ \Rightarrow b=-۱ \\ a-۴b+b^۲=۹ \xrightarrow{b=-۱} a+۴+۱=۹ \Rightarrow a=۴ \end{cases}$$

پس حاصل $a+b$ برابر می‌شود با $۴+(-۱)=۳$.

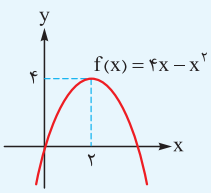
نکته ریشهٔ مضاعف یک سهمی برابر است با طول رأس آن.

یه‌جور دیگه

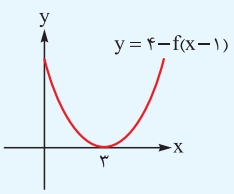
گام اول: نمودار سهمی f به صورت مقابل است:



گام دوم: مخرج حد عبارت $a-f(x+b)$ است، $x=۳$ ریشهٔ مضاعف آن است. در نتیجه، مختصات رأس این سهمی $(۳,۰)$ است. برای این‌که f را به $a-f(x+b)$ تبدیل کنیم ابتدا باید بر روی محور افقی جابه‌جا شویم، سپس سهمی را نسبت به محور yها قرینه کنیم و بعد از آن جابه‌جایی عمودی داشته باشیم. برای این‌که مطابق این انتقال رأس f که $(۲,۴)$ است به $(۳,۰)$ منتقل شود، جابه‌جایی افقی یک واحد به راست است. پس $b=-۱$ و بعد از این‌که نمودار را قرینه کردیم آن را باید چهار واحد به بالا ببریم. پس مقدار a برابر ۴ است.



یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور xها و ۴ واحد به بالا



۷ اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-}\frac{4bx-6\cos^2 x}{3\tan^2 x+a}=-\infty$ باشد، حدود b کدام است؟

مشاوره از ظاهر سؤال نترسید، با سؤال آسانی مواجه هستید.

۱) $b>\frac{1}{\pi}$

۲) $b<\frac{-2}{\pi}$

۳) $b<\frac{1}{\pi}$

۴) $b>\frac{2}{\pi}$

Hint حاصل حد $-\infty$ شده است، نوع صفر حدی مخرج را تعیین کنید تا علامت صورت پیدا شود. با توجه به این موضوع حدود b را پیدا کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** حاصل حد $-\infty$ شده است، پس مخرج به ازای $x=\frac{3\pi}{4}$ برابر صفر می‌شود. با توجه به این موضوع، ابتدا a را پیدا می‌کنیم:

$$3\tan^2(\frac{3\pi}{4})+a=0 \Rightarrow 3(-1)^2+a=0 \Rightarrow a=-3$$

گام دوم: حال با توجه به این‌که $x\to(\frac{3\pi}{4})^-$، مخرج حد را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-} 3\tan^2 x-3=3((-1)^-)^2-3=3(1^+)-3=3^+-3=0^+$$

گام سوم: می‌دانیم که $\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$، پس حاصل صورت به ازای $x=\frac{3\pi}{4}$ باید عددی منفی شود:

$$4b(\frac{3\pi}{4})-6\cos^2(\frac{3\pi}{4})<0 \Rightarrow 3b\pi-6(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2<0 \Rightarrow 3b\pi-6(\frac{1}{2})<0$$

$$\Rightarrow 3b\pi-3<0 \Rightarrow 3b\pi<3 \Rightarrow b<\frac{1}{\pi}$$

۸ تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx}$ مفروض است. اگر حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{2x}$ با حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ برابر باشند، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1

۳) 2 ۴) -2

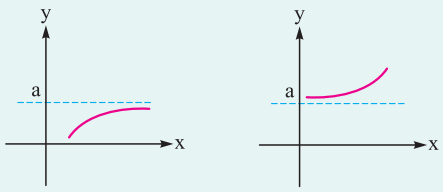
مشاوره حد $\infty-\infty$ در کتاب درسی نظام جدید نیست ولی در کنکورهای ۹۸ و ۱۴۰۰ شاهد طرح سؤالاتی از آن بوده‌ایم.

Hint مقدار a را به گونه‌ای تعیین کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ مبهم شود و سپس آن را رفع ابهام کنید و با حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{2x}$ برابر قرار دهید.

درس Box

حدود بی‌نهایت

وقتی $x\to\pm\infty$ و حاصل حد تابع برابر عدد a شود، یعنی تابع با افزایش یا کاهش مقادیر x به خط افقی $y=a$ نزدیک می‌شود.



$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$

هم‌ارزی پرتوان

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر در صورت و مخرج فقط جملهٔ با بیشترین توان را انتخاب کنیم و بقیهٔ جملات را حذف کنیم، از هم‌ارزی پرتوان استفاده کرده‌ایم. به عنوان مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3}x^3-x}{3x^3-3x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3}x^3}{3x^3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بعد از استفاده از هم‌ارزی پرتوان یکی از سه حالت زیر ممکن است رخ دهد:

۱) درجهٔ صورت بیشتر از درجهٔ مخرج باشد ⟵ حاصل حد صفر می‌شود

۲) درجهٔ صورت و مخرج مساوی باشد ⟵ حاصل یک عدد غیرصفر می‌شود

۳) درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج بیشتر باشد ⟵ حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود

بی‌نهایت منهای بی‌نهایت

اگر در محاسبهٔ یک حد به $\infty-\infty$ برسیم، با یک حالت مبهم مواجه شده‌ایم و برای محاسبهٔ حد، باید رفع ابهام کنیم.

نکته

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}=\begin{cases}\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right) & ;\ n\text{ فرد}\\ \sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right| & ;\ n\text{ زوج}\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{2x}$ را با توجه به قاعدهٔ پرتوان محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{ax^2+bx}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{ax^2}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{a}|x|}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{a}(-x)}{2x}=\frac{-\sqrt{a}}{2}\quad(*)$$

گام دوم: در $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ باید به علامت مبهم $\infty-\infty$ برسیم:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx}-ax=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|-ax\right)=\lim_{x\to+\infty}\left((\sqrt{a}-a)x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$$

برای این‌که حاصل حد عددی حقیقی شود، لازم است که a و $\sqrt{a}$ با هم برابر باشند، پس $a=1$ است.

گام سوم: پس طبق فرض سؤال باید با $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ برابر باشد: $\frac{-\sqrt{a}}{2}$

$$\xrightarrow{a=1}\frac{b}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow b=-1$$

پس حاصل $a-b$ برابر می‌شود با:

$$a-b=1-(-1)=2$$

۹ تابع $f(x)=\frac{۲x^۲-۴}{x+۳}$ مفروض است. اگر $\lim_{x\to\infty}(f(۳x)-af(۲x))=b$ باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

مشاوره استفاده از هم‌ارزی پرتوان، حل این سؤال و محاسبات آن را برایتان ساده می‌کند.

Hint $۲x$ و $۳x$ را در f جای‌گذاری کنید و حد داده‌شده را تشکیل دهید و سپس به کمک مخرج‌مشترک‌گیری و قاعدهٔ پرتوان پاسخ سؤال را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به ضابطهٔ f، $\lim_{x\to\infty}(f(۳x)-af(۲x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{۲x^۲-۴}{x+۳}\Rightarrow\begin{cases}f(۳x)=\frac{۲(۳x)^۲-۴}{۳x+۳}=\frac{۱۸x^۲-۴}{۳x+۳}\\af(۲x)=\frac{a(۲(۲x)^۲-۴)}{۲x+۳}=\frac{۸ax^۲-۴a}{۲x+۳}\end{cases}$$

پس:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-af(۲x))=\lim_{x\to\infty}(\frac{۱۸x^۲-۴}{۳x+۳}-\frac{۸ax^۲-۴a}{۲x+۳})$$

گام دوم: با ضرب‌کردن $۳x+۳$ و $۲x+۳$ در هم از مخرج‌مشترک استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{۱۸x^۲-۴}{۳x+۳}-\frac{۸ax^۲-۴a}{۲x+۳})=\lim_{x\to\infty}\frac{۳۶x^۳-۲۴ax^۳+۵۴x^۲-۲۴ax^۲+\dots}{۶x^۲+\dots}=\lim_{x\to\infty}\frac{(۳۶-۲۴a)x^۳+(۵۴-۲۴a)x^۲}{۶x^۲}=b$$

با توجه به قاعدهٔ پرتوان، سایر عبارت را چون درجهٔ کم‌تری داشتند برای محاسبات کم‌تر، ننوشتیم.

گام سوم: حاصل حد برابر یک عدد حقیقی مخالف صفر است، پس درجهٔ صورت و درجهٔ مخرج یکسان است، در نتیجه، ضریب $x^۳$ صفر است:

$$۳۶-۲۴a=۰\Rightarrow ۳۶=۲۴a\Rightarrow a=\frac{۳۶}{۲۴}=\frac{۳}{۲}$$

در نتیجهٔ حد مورد نظر تبدیل می‌شود به:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{(۳۶-۲۴a)}^{۰}x^۳+(۵۴-۲۴a)x^۲}{۶x^۲}=b\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{(۵۴-۲۴a)x^۲}{۶x^۲}=b$$

گام چهارم: b را محاسبه می‌کنیم و خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(۵۴-۲۴a)x^۲}{۶x^۲}=b\Rightarrow ۵۴-۲۴a=۶b\xrightarrow{a=\frac{۳}{۲}}۵۴-\overset{۱۲}{۲۴}\times\frac{۳}{\underset{۱}{۲}}=۶b\Rightarrow b=۳$$

پس مطلوب مسئله برابر می‌شود با:

$$\frac{b}{a}=\frac{۳}{\frac{۳}{۲}}=۲$$

۱۰ تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x+2}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} x(f(x)+2)=3$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f^{-1}(x)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) -1

مشاوره گاهی اوقات دانستن برخی از نکات تستی مفید، سرعتتان در حل سؤال را بسیار بالا می‌برد.

Hint

جای‌گذاری‌های لازم را انجام دهید و با توجه به این‌که حاصل حد عددی طبیعی شده است a و b را بیابید، در آخر با توجه به نکته‌ای که گفتیم نیازی به پیداکردن ضابطهٔ f^{-1} نیست.

نکته

در توابع هموگرافیک به فرم $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر $a+d=0$، آن‌گاه وارون تابع بر روی خود تابع منطبق می‌شود. به عبارت دیگر وارون تابع با خود تابع برابر می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ضابطهٔ f را در تساوی صورت سؤال جایگزین می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty} x(f(x)+2)=3 \xrightarrow{f(x)=\frac{ax+b}{x+2}} \lim_{x\to\infty}\left(x\left(\frac{ax+b}{x+2}+2\right)\right)=3 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx}{x+2}+2x\right)=3$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx+2x^2+4x}{x+2}\right)=3 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(a+2)x^2+(b+4)x}{x+2}=3$$

گام دوم: حاصل حد برابر ۳ شده است، پس درجه‌های صورت و مخرج باید یکسان باشند، در نتیجه ضریب x^2 صفر است:

$$a+2=0 \Rightarrow a=-2$$

پس حد به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{(a+2)}^{0}x^2+(b+4)x}{x+2}=3 \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x\to\infty}\frac{(b+4)x}{x}=3 \Rightarrow b+4=3 \Rightarrow b=-1$$

گام سوم: طبق مقادیر $a=-2$ و $b=-1$ ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\frac{-2x-1}{x+2}$ نوشته می‌شود، چون $2+(-2)=0$، با توجه به نکتهٔ گفته‌شده وارون f روی f قرار می‌گیرد، پس:

$$f(x)=f^{-1}(x)$$

گام چهارم: با توجه به اطلاعات به‌دست‌آمده در گام سوم، خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f^{-1}(x)}=1$$

۱۱ مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{۲^{x+۱}+۳^{x}}{۳^{x-۱}-۲^{x-۲}}$ در نقاط A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۱ ۳) ۷ ۴) ۱

مشاوره در کنکورهای زیادی شاهد طرح سؤال از مبحث مجانب‌ها بوده‌ایم، با توجه به حجم کمی که این مبحث دارد، می‌توان روی آن حساب باز کرد.

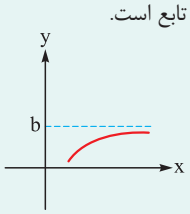
Hint حاصل حد را در $+\infty$ و $-\infty$ محاسبه کنید تا مجانب‌های افقی به دست آیند، در همین مرحله با کمی دقت می‌توانید پاسخ را به دست آورید.

درس Box

مجانب‌های یک تابع

مجانب افقی

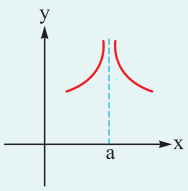
در تابع f اگر حاصل حد $f(x)$ وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ برابر a شود، خط $y=a$ مجانب افقی تابع است.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$$

مجانب قائم

در تابع f اگر حاصل حد $f(x)$ وقتی $x\to a$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود، خط $x=a$ مجانب قائم تابع است.



$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

در توابع کسری، ریشه‌های مخرج، همان مجانب‌های قائم هستند (به شرطی که ریشهٔ صورت نباشند).

توجه: یک تابع ممکن است بیش از یک مجانب افقی و قائم داشته باشد.

نکته اگر در یک حد عبارت‌هایی به صورت a^x داشتیم، وقتی $x\to+\infty$ اعداد با پایه‌هایی که اندازهٔ بزرگ‌تری دارند را انتخاب می‌کنیم و اگر $x\to-\infty$ اعداد با پایه‌هایی که اندازهٔ کوچک‌تری دارند را در نظر می‌گیریم به عنوان مثال پاسخ سؤال را ببینید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حاصل حد داده‌شده را وقتی $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$ به دست می‌آوریم تا مجانب‌های افقی تابع به دست آیند، در $x\to+\infty$ جملات با پایه‌هایی که اندازهٔ بزرگ‌تری دارند وقتی $x\to-\infty$ جملات با پایه‌هایی که اندازهٔ کوچک‌تری دارند را در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲^{x+۱}+۳^{x}}{۳^{x-۱}-۲^{x-۲}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳^{x}}{۳^{x-۱}}=\lim_{x\to+\infty}(۳^{x-x+۱})=۳$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲^{x+۱}+۳^{x}}{۳^{x-۱}-۲^{x-۲}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{۲^{x+۱}}{-۲^{x-۲}}=-\lim_{x\to-\infty}(۲^{x+۱-x+۲})=-۲^{۳}=-۸$$

پس $y=۳$ و $y=-۸$ خطوط مجانب افقی تابع هستند.

گام دوم: مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم تا مجانب قائم تابع پیدا شود:

$$۳^{x-۱}-۲^{x-۲}=۰\Rightarrow ۳^{x-۱}=۲^{x-۲}\xrightarrow{\text{از طرفین در مبنای ۲ لگاریتم می‌گیریم}}(x-۱)\log_۲ ۳=x-۲$$

$$\Rightarrow(\log_۲ ۳-۱)x=\log_۲ ۳-۲\Rightarrow x=\frac{\log_۲\frac{۳}{۴}}{\log_۲\frac{۳}{۲}}\Rightarrow x=\log_{\frac{۳}{۲}}\frac{۳}{۴}$$

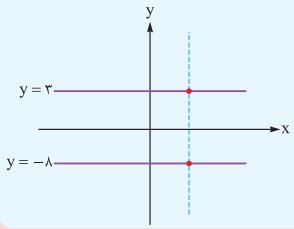
پس خط $x=\log_{\frac{۳}{۲}}\frac{۳}{۴}$ مجانب قائم نمودار تابع است.

گام سوم: با توجه به این‌که $y=3$ و $y=-8$ مجانب‌های افقی و $x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}$ مجانب قائم است، مختصات A و B به صورت زیر است و فاصلهٔ آن‌ها برابر می‌شود با:

$$\begin{cases} A(\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4},3) \\ B(\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4},-8) \end{cases} \xrightarrow{\text{طول‌ها برابر}} AB=|3-(-8)|=11$$

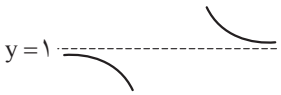
یه‌جور دیگه

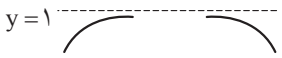
در همان گام دوم که مجانب‌های افقی را به دست آوردیم، با توجه به این‌که تابع فقط یک مجانب قائم دارد، می‌توانیم جواب را به دست آوریم، به عبارت دیگر نیازی به به دست آوردن مجانب قائم نبود. چون نقاط A و B که محل برخورد مجانب‌ها هستند، عرض برابر دارند، خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

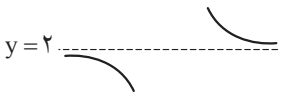


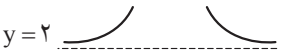
$$AB=|3-(-8)|=11$$

۱۲ نمودار تابع $f(x)=x(\sqrt{\frac{۴x}{x-۱}}-۲)$ در اطراف مجانب افقی خودش به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

Hint حاصل حد در بی‌نهایت را به دست آورید تا مجانب افقی تابع به دست آید، سپس با استفاده از عددگذاری، گزینهٔ مناسب را انتخاب کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به قضایای حد و ضرب‌کردن صورت و مخرج کسر در مزدوج صورت، حاصل x را وقتی $x \to \infty$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{\frac{۴x}{x-۱}}-۲) = \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{\frac{۴x}{x-۱}}-۲\times\frac{\sqrt{\frac{۴x}{x-۱}}+۲}{\sqrt{\frac{۴x}{x-۱}}+۲}) = \lim_{x\to\infty} x(\frac{\frac{۴x}{x-۱}-۴}{\sqrt{\frac{۴x}{x-۱}}+۲})$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x(\overbrace{\frac{۴x}{x-۱}}^{\frac{۴}{x-۱}}-۴)}{\sqrt{\frac{۴x}{x-۱}}+۲} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{۴x}{x-۱}}{\sqrt{\frac{۴x}{x-۱}}+۲} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{۴\cancel{x}}{\cancel{x}}}{\frac{۲\cancel{x}}{\cancel{x}}+۲} = \frac{۴}{۴} = ۱$$

پس $y=۱$ مجانب افقی تابع است، در نتیجه گزینه‌های (۳) و (۴) حذف می‌شود.

گام دوم: $y=۱$ مجانب افقی تابع است، برای تشخیص وضعیت تابع، $g(x)=f(x)-۱$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$g(x)=۲x(\sqrt{\frac{x}{x-۱}}-۱)-۱=۲x\sqrt{\frac{x}{x-۱}}-۲x-۱$$

ریشه(های) این تابع را به دست می‌آوریم:

$$g(x)=۰ \Rightarrow ۲x\sqrt{\frac{x}{x-۱}}=۲x+۱ \Rightarrow \frac{۴x^۳}{x-۱}=۴x^۲+۴x+۱ \Rightarrow ۴x^۳=۴x^۳-۳x-۱ \Rightarrow ۳x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

گام سوم: جدول تعیین علامت تابع g با جای‌گذاری مقادیر دلخواه کم‌تر و بیشتر از $\frac{۱}{۳}$ به صورت زیر است:

x		$\frac{۱}{۳}$	
$g(x)$	$-$	۰	$+$

در نتیجه در $+\infty$ تابع g مثبت و در $-\infty$، منفی است و این یعنی در $+\infty$ نمودار تابع f بالاتر از خط $y=۱$ و در $-\infty$ پایین‌تر از آن است.

۱۳ تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲-۶x+۹} & ;|x|\le c\\ ax^۲+bx+۲ & ;|x|>c\end{cases}$ در اعداد حقیقی پیوسته است. اگر c عددی طبیعی باشد، حاصل $\left[\frac{b}{a}\right]$ کدام می‌تواند باشد؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

مشاوره این سؤال، شبیه‌سازی یک سؤال مهم و تست کنکور تیر ۱۴۰۳ است.

۱) -۱۰ ۲) -۴ ۳) -۸ ۴) -۲

درس Box

پیوستگی

تابع f در صورتی در $x=a$ پیوسته است که:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

نکته در توابع چند ضابطه‌ای، نقاط مرزی می‌توانند نقاط ناپیوستگی باشند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که $\sqrt{x^۲-۶x+۹}=|x-۳|$، ضابطه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲-۶x+۹} & ;|x|\le c\\ ax^۲+bx+۲ & ;|x|>c\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}|x-۳| & ;\ -c\le x\le c\\ ax^۲+bx+۲ & ;\ x<-c \text{ یا } x>c\end{cases}$$

گام دوم: می‌خواهیم تابع در تمام اعداد حقیقی پیوسته باشد، خیالمان از نقاط مرزی باید راحت شود که در این‌جا c و $-c$ هستند.

برای این‌که تابع f پیوسته شود باید c و $-c$ را به هر دو ضابطه بدهیم و آن‌ها را مساوی هم قرار دهیم:

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)\Rightarrow ac^۲+bc+۲=|c-۳|$$

$$\lim_{x\to(-c)^+} f(x)=\lim_{x\to(-c)^-} f(x)=f(c)\Rightarrow ac^۲-bc+۲=|-c-۳|$$

گام سوم: در صورت سؤال گفته‌شده c طبیعی است، فرض می‌کنیم که $c\le ۳$ باشد، آن‌گاه داخل قدرمطلق‌های به‌دست‌آمده در تساوی‌های گام دوم را تعیین علامت می‌کنیم:

$$ac^۲+bc+۲=\overbrace{|c-۳|}^{-}\Rightarrow ac^۲+bc+۲=۳-c\quad (۱)$$

$$ac^۲-bc+۲=\overbrace{|-c-۳|}^{-}\Rightarrow ac^۲+bc+۲=c+۳\quad (۲)$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف را جمع می‌کنیم}} ۲ac^۲+۴=۶\Rightarrow ac^۲+۲=۳\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (۱)}} ۳+bc=۳-c\Rightarrow b=-۱$$

از عبارت $ac^۲+۲=۳$، $ac^۲$ برابر ۱ است، c را طبیعی و کوچک‌تر از ۳ فرض کرده بودیم، پس:

$$ac^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}c=۱\Rightarrow a=۱\\ c=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}\\ c=۳\Rightarrow a=\frac{۱}{۹}\end{cases}\Rightarrow b=-۱$$

پس $\left[\frac{b}{a}\right]$ می‌تواند برابر $-۱, -۴$ و -۹ باشد.

گام چهارم: اگر فرض کنیم $c>۳$ باشد، داریم:

حد در $-c$: $ac^۲-bc+۲=c+۳\Rightarrow ac^۲-bc=c+۱\quad (۱)$

حد در c: $ac^۲+bc+۲=c-۳\Rightarrow ac^۲+bc=c-۵\quad (۳)$

$$\xrightarrow{(۱)\text{ و }(۳)} ۲ac^۲=۲c-۴\Rightarrow a=\frac{c-۲}{c^۲}$$

با جای‌گذاری در (۱) مقدار b نیز به طریق زیر به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{ac^۲=c-۲} c-۲-bc=c+۱\Rightarrow bc=-۳\Rightarrow b=-\frac{۳}{c}$$

گام پنجم: حالا $\frac{b}{a}$ و $\left[\frac{b}{a}\right]$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{b}{a}=\frac{\frac{-3}{c}}{\frac{c-2}{c^2}}=\frac{-3c}{c-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=4: \left[\frac{b}{a}\right]=-6 \\ c=5,6,7: \left[\frac{b}{a}\right]=-5 \\ c\geq 8: \left[\frac{b}{a}\right]=-4 \end{cases}$$

۱۴ تابع $f(x)=\begin{cases}(۳-۲a)[x+۱]+a^۲[-x] & ; \ x\notin\mathbb{Z}\\ \sin\frac{\pi}{b} & ; \ x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است. حاصل $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{۲}{۳}$

۲) $-\frac{۸}{۳}$

۳) ۵

۴) ۱

مشاوره کارکردن با توابع جزء صحیح را به خوبی بلد باشید چون که به صورت مستقیم و غیرمستقیم از آن سؤال طرح می‌شود.

Hint با توجه به نکتهٔ گفته‌شده، $[x+۱]$ را به صورت $[x]+۱$ بنویسید و ضرایب $[x]$ و $[-x]$ را برابر هم قرار دهید تا a پیدا شود، سپس b را پیدا کنید و خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

نکته اگر k یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه:

$$[x+k]=[x]+k$$

در تابع $y=[x]+[-x]$ داریم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ضابطهٔ بالایی را با توجه به نکتهٔ گفته‌شده برای براکت به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۳-۲a)[x+۱]+a^۲[-x]=(۳-۲a)([x]+۱)+a^۲[-x]=(۳-۲a)[x]+(۳-۲a)+a^۲[-x]$$

گام دوم: با توجه به این‌که ضابطهٔ پایینی یک تابع ثابت است، باید ضرایب $[x]$ و $[-x]$ برابر باشند:

$$۳-۲a=a^۲ \Rightarrow a^۲+۲a-۳=۰ \Rightarrow (a+۳)(a-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}a=-۳\\ a=۱\end{cases}$$

گام سوم: پس ضابطهٔ f به یکی از دو صورت زیر می‌باشد:

$$a=-۳: f(x)=\begin{cases}۹[x]+۹+۹[-x] & ; \ x\notin\mathbb{Z}\\ \sin\frac{\pi}{b} & ; \ x\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}۰ & ; x\notin\mathbb{Z}\\ \sin\frac{\pi}{b} & ; x\in\mathbb{Z}\end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} \sin\frac{\pi}{b}=۰$$

$$a=۱: f(x)=\begin{cases}[x]+۱+[-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ \sin\frac{\pi}{b} & x\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}۰ & ; x\notin\mathbb{Z}\\ \sin\frac{\pi}{b} & ; x\in\mathbb{Z}\end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} \sin\frac{\pi}{b}=۰$$

گام چهارم: برای این‌که $\sin\frac{\pi}{b}$ برابر صفر باشد، باید $\frac{۱}{b}$ عددی صحیح باشد.

$$\Rightarrow \frac{۱}{b}=k\in\mathbb{Z} \Rightarrow b=\frac{۱}{k}$$

پس حاصل $a+b$ می‌تواند $\frac{۱}{k}+۱$ و $\frac{۱}{k}+۳-$ باشد که مقدار عبارت $\frac{۱}{k}+۳-$ به ازای $k=۳$ برابر $-\frac{۸}{۳}$ می‌شود.

۱۵ اگر تابع $y = ۲[\sqrt{x}] + a[\log_{۲}x]$ در $x = ۴$ پیوسته شود، در کدام نقطهٔ دیگر پیوسته خواهد بود؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $x = ۱۶$
۲) $x = ۸$
۳) $x = ۲$
۴) $x = ۳۲$

مشاوره پیوستگی در توابع براکتی می‌تواند همواره در آزمون‌های مختلف مورد سؤال قرار بگیرد.

Hint

حد چپ و راست تابع در $x = ۴$ را برابر هم قرار دهید تا a به دست آید، سپس هر یک از گزینه‌ها را تحلیل کنید و از نکته‌های گفته‌شده استفاده کنید.

نکته

توابع براکتی در xهایی که داخل براکت را صحیح کنند، ناپیوسته هستند.

جمع دو تابع پیوسته همواره پیوسته و جمع یک تابع پیوسته با یک تابع ناپیوسته، همواره ناپیوسته خواهد شد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا حد چپ و راست تابع را در $x = ۴$ به دست می‌آوریم و مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$y = ۲[\sqrt{x}] + a[\log_{۲}x]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \to ۴^{+} : ۲[\sqrt{۴^{+}}] + a[\log_{۲}(۴^{+})] = ۲[۲^{+}] + a[۲^{+}] = ۴ + ۲a \\ a \to ۴^{-} : ۲[\sqrt{۴^{-}}] + a[\log_{۲}(۴^{-})] = ۲[۲^{-}] + a[۲^{-}] = ۲ + a \end{cases}$$

پس:

$$۴ + ۲a = ۲ + a \Rightarrow a = -۲$$

گام دوم: به ازای $x = ۲, ۸, ۳۲$ داخل براکت $\log_{۲}x$ صحیح می‌شود و داخل براکت $[\sqrt{x}]$ غیرصحیح، پس تابع $y = -۲[\log_{۲}x]$ ناپیوسته و تابع $y = ۲[\sqrt{x}]$ پیوسته است و می‌دانیم که جمع یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته، ناپیوسته است. پس گزینهٔ (۱) درست است. نگاه کنید:

$$x = ۱۶ : ۲[\sqrt{۱۶}] - ۲[\log_{۲}۱۶] = ۲[۴] - ۲[۴] = ۰$$

$$x = ۱۶^{+} : ۲[\sqrt{۱۶^{+}}] - ۲[\log_{۲}۱۶^{+}] = ۲[۴^{+}] - ۲[۴^{+}] = ۰$$

$$x = ۱۶^{-} : ۲[\sqrt{۱۶^{-}}] - ۲[\log_{۲}۱۶^{-}] = ۲[۴^{-}] - ۲[۴^{-}] = ۰$$

۱۶ در تابع $f(x)=|bx^۲+a|[۲x]$، اگر $f'_+(۳)-f'_-(۳)=۶۶$ باشد، مقدار ab کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) -۱۸

۲) ۳۶

۳) ۱۲

۴) -۹

مشاوره تمامی مفاهیم مربوط به مشتق را بلد باشید، با این‌که حجم کمی دارند ولی در هر کنکور، بیش از یک سؤال از آن‌ها طرح می‌شود.

Hint

با توجه به مشتق‌ناپذیری f در $x=۳$، a را برحسب b بنویسید و سپس با توجه به تعریف مشتق، مشتق چپ و راست f را در $x=۳$ به دست آورید و حاصل‌ضرب ab را پیدا کنید.

درس Box

تعریف مشتق

تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ به یکی از صورت‌های زیر است:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته

اگر مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ با یکدیگر برابر نباشند، می‌گوییم f در $x=a$ مشتق‌ناپذیر است.

توابع قدرمطلقی در ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق مشتق‌ناپذیر هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $f'_+(۳)$ و $f'_-(۳)$ با هم برابر نشده‌اند، پس تابع در $x=۳$ مشتق‌ناپذیر است؛ در نتیجه $x=۳$ ریشهٔ داخل قدرمطلق است:

$$b(۳)^۲+a=۰ \Rightarrow ۹b+a=۰ \Rightarrow a=-۹b$$

گام دوم: در ضابطهٔ تابع $a=-۹b$ را جاگذاری می‌کنیم و آن را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=|bx^۲+a|[۲x] \xrightarrow{a=-۹b} f(x)=|bx^۲-۹b|[۲x]=|b||x^۲-۹|[۲x]$$

گام سوم: با توجه به تعریف مشتق، مشتق چپ و راست در $x=۳$ برابر می‌شود با:

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{|b|\overbrace{|x^۲-۹|}^{+}\overbrace{[۲x]}^{۶}-\overbrace{f(۳)}^{۰}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۶|b|(x^۲-۹)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۶|b|\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{x-۳}}=۳۶|b|$$

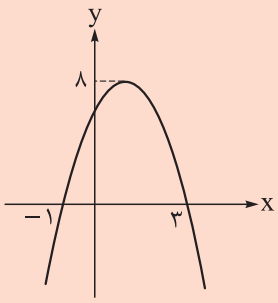
$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{|b|\overbrace{|x^۲-۹|}^{-}\overbrace{[۲x]}^{[۶^-]=۵}-\overbrace{f(۳)}^{۰}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-۵|b|(x^۲-۹)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-۵|b|\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{x-۳}}=-۳۰|b|$$

گام چهارم: با توجه به صورت سؤال خواهیم داشت:

$$f'_+(۳)-f'_-(۳)=۶۶ \Rightarrow ۳۶|b|-(-۳۰|b|)=۶۶ \Rightarrow ۶۶|b|=۶۶ \Rightarrow \begin{cases} b=۱ \xrightarrow{a=-۹b} a=-۹ \\ b=-۱ \xrightarrow{a=-۹b} a=۹ \end{cases}$$

در هر دو حالت بالا حاصل ab برابر -۹ است.

۱۷ سهمی $y=f(x)$ در شکل مقابل آمده است. مشتق تابع $y=xf^{۲}(x)$ در $x=۲$ کدام است؟



۱) -۳۰

۲) -۶۰

۳) ۶۰

۴) ۳۰

مشاوره این سؤال از سؤالات آسان آزمون بوده است، امیدوارم آن را از دست نداده باشید.

Hint ضابطهٔ تابع را از روی نمودار داده‌شده بنویسید و به کمک مشتق ضرب، تابع مشتق $y=xf^{۲}(x)$ را به دست آورید و $x=۲$ را در آن جاگذاری کنید.

درس Box

قواعد مشتق‌گیری

اگر x و y دو تابع باشند، برخی از قواعد مشتق‌گیری به صورت زیر خواهد بود:

$$y=au \longrightarrow y'=au'$$

$$y=\sqrt{u} \longrightarrow \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$

$$y=\frac{u}{v}=\frac{u'v-v'u}{v^{۲}}$$

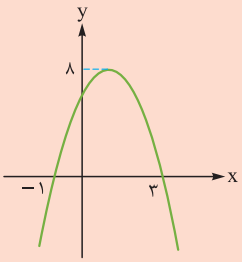
$$y=u^{n} \longrightarrow y'=nu'u^{n-۱}$$

$$y=u\cdot v \longrightarrow y'=u'v+v'u$$

نکته اگر m و n دو ریشهٔ سهمی باشند، آن‌گاه ضابطهٔ سهمی به صورت $f(x)=a(x-m)(x-n)$ خواهد بود، توجه کنید که a یک عدد ثابت است و به کمک یک نقطهٔ کمکی دیگر از سهمی می‌توانید آن را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که ریشه‌های سهمی -۱ و ۳ هستند، ضابطهٔ f به صورت زیر است:



$$f(x)=a(x-۳)(x+۱)$$

طول رأس سهمی در وسط دو ریشه قرار دارد پس $x_s=\frac{۳+(-۱)}{۲}=۱$، عرض رأس هم که روی نمودار داده شده است، پس در ضابطهٔ f نقطهٔ $(۱,۸)$ را قرار می‌دهیم تا a به دست آید:

$$f(x)=a(x-۳)(x+۱) \xrightarrow[y=۸]{x=۱} ۸=a(-۲)(۲) \Rightarrow a=-۲ \Rightarrow f(x)=-۲\overbrace{(x-۳)(x+۱)}^{x^{۲}-۲x-۳}=-۲x^{۲}+۴x+۶$$

گام دوم: حال ضابطهٔ مشتق تابع $y=xf^{۲}(x)$ را با توجه به مشتق ضرب دو تابع به دست می‌آوریم و $x=۲$ را در آن جاگذاری می‌کنیم:

$$y=xf^{۲}(x) \rightarrow y'=(۱)(f^{۲}(x))+(۲f'(x)f(x))(x) \xrightarrow{x=۲} y'=f^{۲}(۲)+۴f'(۲)f(۲) \quad (*)$$

گام سوم: با توجه به ضابطهٔ f، $f(۲)$ و $f'(۲)$ را محاسبه می‌کنیم و در رابطهٔ (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=-۲x^{۲}+۴x+۶ \Rightarrow f(۲)=-۲(۲)^{۲}+۴(۲)+۶=۶$$

$$f'(x)=-۴x+۴ \Rightarrow f'(۲)=-۴(۲)+۴=-۴$$

جاگذاری در (*):

$$y'=(۶)^{۲}+۴(-۴)(۶)=۳۶-۹۶=-۶۰$$

۱۸ تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته است، اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)+1}{h}=3$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-f^2(2)}{x^3-8}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{-1}{4}$

مشاوره بر تعریف مشتق و مفاهیم آن مسلط باشید چراکه با بسیاری از سؤالات دیگر می‌تواند ترکیب شود.

Hint

از روی حد داده‌شده و به کمک تعریف مشتق، $f(2)$ و $f'(2)$ را به دست آورید و سپس به کمک تجزیه با اتحاد چاق و لاغر، حد خواسته‌شده را به فرم تعریف دیگر مشتق بنویسید.

نکته

در تعریف مشتق خواهیم داشت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{nh}=\frac{m}{n}f'(a)$$

یادآوری اتحاد چاق و لاغر:

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به صورت سؤال، در $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)+1}{h}=3$ مخرج برابر صفر است، چون حاصل عددی حقیقی شده است، پس صورت نیز باید صفر شود:

$$f(2+3h)+1=0\xrightarrow{h=0} f(2)+1=0\Rightarrow f(2)=-1$$

گام دوم: با توجه به تعریف مشتق خواهیم داشت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)+1}{h}=3\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}=3\Rightarrow 3f'(2)=3\Rightarrow f'(2)=1$$

گام سوم: $\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-f^2(2)}{x^3-8}$ را به گونه‌ای ساده می‌کنیم که به تعریف مشتق f در $x=2$ برسیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-f^2(2)}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)\left(\frac{f(x)+f(2)}{x^2+2x+4}\right)=\left(\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)\times\frac{-2}{12}$$

$$=-\frac{1}{6}f'(2)=-\frac{1}{6}$$

۱۹ معادلهٔ دایره‌ای که از نقاط $(-۲,۲)$ و $(۶,۲)$ گذشته و بر محور xها مماس است، به صورت $x^۲+y^۲+ax+by=c$ است. حاصل $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

۱) ۳
۲) -۳
۳) $۳/۵$
۴) $-۳/۵$

مشاوره رسم شکل مناسب در حل بسیاری از سؤال‌ها، کمک زیادی به ما می‌کند، این سؤال، یکی از آن‌هاست.

درس Box

۱) معادلهٔ استاندارد دایره: معادلهٔ استاندارد دایره‌ای به مرکز (α,β) و شعاع R به صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ است.

۲) معادلهٔ گستردهٔ دایره (معادلهٔ ضمنی):

اگر معادلهٔ استاندارد دایره را باز کنیم معادلهٔ ضمنی یا گستردهٔ دایره به صورت زیر خواهد بود:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

که در آن:

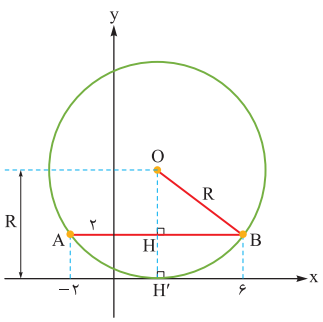
$$\text{شعاع}: R=\sqrt{(\frac{a}{۲})^۲+(\frac{b}{۲})^۲-c}$$

$$\text{مختصات مرکز}: O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$$

۳) عمودمنصف همهٔ وترهای یک دایره از مرکز آن دایره می‌گذرند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم شکل مناسب): دایره از نقاط $A(-۲,۲)$ و $B(۶,۲)$ می‌گذرد، پس AB وتری از دایره است و چون دایره بر محور xها مماس است، شکل صورت سؤال به صورت مقابل می‌شود:



گام دوم (محاسبهٔ شعاع دایره): مرکز هر دایره‌ای، روی عمودمنصف هر کدام از وترهای آن دایره قرار دارد؛ پس مطابق شکل برای مختصات مرکز دایره داریم:

$$\begin{cases} x_O=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{-۲+۶}{۲}=۲ \\ y_O=R \ (\text{شعاع دایره}) \end{cases}$$

حالا از آن‌جا که H وسط AB است، داریم $BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$ و چون عرض نقطهٔ H با عرض نقطهٔ A برابر است $HH'=۲$ و در نتیجه $OH=R-۲$. حالا طبق فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB، R را به دست می‌آوریم:

$$\overset{\Delta}{OHB}: OB^۲=OH^۲+BH^۲ \Rightarrow R^۲=(R-۲)^۲+۴^۲=R^۲-۴R+۴+۱۶ \Rightarrow ۴R=۲۰ \Rightarrow R=۵$$

گام سوم (به دست آوردن معادلهٔ دایره و خواستهٔ سؤال): با به دست آوردن مختصات مرکز و شعاع دایره، معادلهٔ دایره را می‌نویسیم و در نهایت خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$(x-۲)^۲+(y-۵)^۲=۵^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲-۴x-۱۰y=-۴ \Rightarrow \frac{a+b}{c}=\frac{-۴-۱۰}{-۴}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

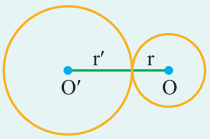
۲۰ دایرهٔ C به معادلهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۲y+m=۰$ با دایره‌ای به مرکز $(۲,-۳)$ و شعاع ۳ مماس‌بیرون است. مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

مشاوره مشابه این سؤال را در امتحان‌های نهایی بسیار داشته‌ایم، سؤال بسیار ساده‌ای است که نباید آن را از دست بدهید.

درس Box

دو دایرهٔ $C(O,r)$ و $C(O',r')$ مماس‌بیرون هستند، به شرطی که:



$$OO'=r+r'$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ شعاع و مرکز دایره‌ها): طبق معادلهٔ دایرهٔ داده‌شده برای دایرهٔ اول داریم:

$$C: x^۲+y^۲+۲x-۲y+m=۰ \Rightarrow O(-۱,۱)\ ,\ r=\sqrt{۱+۱-m}$$

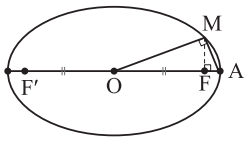
طبق فرض مسئله مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ دوم به صورت زیر است:

$$O'(۲,-۳)\ ,\ r'=۳$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): برای این‌که دو دایره مماس‌بیرون باشند، باید فاصلهٔ مرکزهایشان برابر مجموع شعاع دو دایره باشد؛ پس داریم:

$$OO'=r+r' \Rightarrow ۵=\sqrt{۲-m}+۳ \Rightarrow ۲=\sqrt{۲-m} \Rightarrow ۴=۲-m \Rightarrow m=-۲$$

۲۱ مطابق شکل، F و F' کانون‌های بیضی و O وسط FF' است. اگر $A\hat{M}O = M\hat{F}A = ۹۰^\circ$ و خروج از مرکز بیضی e باشد، حاصل $e^۳ + e^۲$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

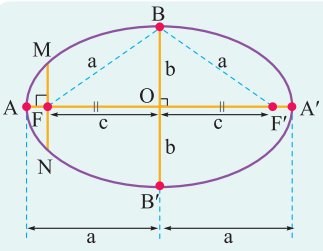
۳) $\sqrt{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

مشاوره با سؤال جدید و نسبتاً سختی مواجه هستید که هندسهٔ دوازدهم و دهم را ترکیب کرده است. تجربه نشان داده است که کنکور هم به سؤال‌های ترکیبی علاقهٔ زیادی دارد.

درس Box

۱) در شکل رسم‌شده، F و F' کانون‌های بیضی و O مرکز آن است. نقاط A و A' رأس‌های کانونی و B و B' رأس‌های غیرکانونی نامیده می‌شوند. AA' بلندترین و BB' کوتاه‌ترین قطر بیضی است و طول پاره‌خط‌ها برحسب پارامترهای a، b و c مشخص شده‌اند. همچنین توجه داشته باشید که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BOF می‌توان نتیجه گرفت $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

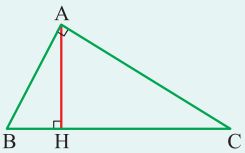


۲) با توجه به شکل، در هر بیضی فاصلهٔ هر کانون تا نزدیک‌ترین رأس برابر با $F'A' = FA = a - c$ است. طبیعتاً فاصلهٔ هر کانون تا دورترین رأس هم $FA' = F'A = a + c$ است.

۳) میزان کشیدگی یا بازشدگی بیضی با پارامتری به نام خروج از مرکز (e) سنجیده می‌شود و بنا به تعریف داریم $e = \frac{c}{a}$. خروج از مرکز بیضی همیشه عددی بین صفر و یک است.

۴) MN وتر کانونی بیضی و $MF = \frac{b^۲}{a}$ نصف وتر کانونی بیضی است.

۵) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:



$$AH^۲ = BH \times HC$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ طول MF برحسب a و c): می‌دانیم $OF = c$، $AF = a - c$ و $MF = \frac{b^۲}{a}$ نصف وتر کانونی بیضی است. حالا چون $b^۲ + c^۲ = a^۲$ است؛ در نتیجه: $MF = \frac{a^۲ - c^۲}{a}$.

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): چون در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی قطعات ایجادشده روی وتر است، پس:

$$MF^۲ = OF.AF \Rightarrow (\frac{a^۲ - c^۲}{a})^۲ = c(a - c) \Rightarrow \frac{(a^۲ - c^۲)\cancel{(a - c)}(a + c)}{a^۲} = c\cancel{(a - c)}$$

$$\Rightarrow (a^۲ - c^۲)(a + c) = a^۲c \Rightarrow a^۳ - ac^۲ - c^۳ = ۰$$

با تقسیم طرفین تساوی آخر بر $a^۳$، معادله‌ای بر حسب e به وجود می‌آوریم:

$$a^۳ - ac^۲ - c^۳ = ۰ \xrightarrow{\text{تقسیم بر } a^۳} ۱ - \frac{c^۲}{a^۲} - \frac{c^۳}{a^۳} = ۰ \xrightarrow{e = \frac{c}{a}} ۱ - e^۲ - e^۳ = ۰ \Rightarrow e^۳ + e^۲ = ۱$$

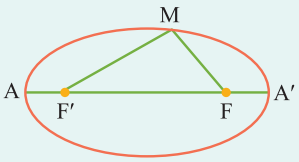
۲۲ در یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{۴}{۵}$، فاصلهٔ بین دو کانون F و F' برابر ۸ واحد است. اگر نقطهٔ M روی این بیضی چنان قرار داشته باشد که $F\hat{M}F' = ۶۰^\circ$، آن‌گاه فاصلهٔ نقطهٔ M از کانون نزدیک‌تر کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۵-۲\sqrt{۳}$ ۳) $۵-\sqrt{۱۳}$ ۴) ۲/۵

مشاوره مشابه این سؤال را در کنکورهای گذشته هم داشته‌ایم و سؤال مهمی است، چون هندسهٔ دوازدهم و یازدهم را ترکیب کرده است.

درس Box

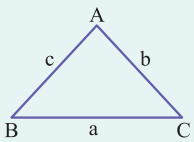
هر نقطه روی بیضی این ویژگی را دارد که مجموع فواصل آن از دو کانون F و F' برابر با طول قطر بزرگ بیضی است.



$$MF + MF' = AA'$$

قضیهٔ کسینوس‌ها:

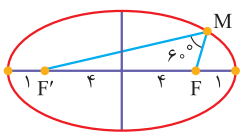
در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها.



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos\hat{A}$$
$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac.\cos\hat{B}$$
$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\hat{C}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (استفاده از رابطهٔ بین a و c): با توجه به مقادیر فاصلهٔ کانونی و خروج از مرکز داده‌شده، مقادیر a و c را به دست آورده و شکل صورت سؤال را رسم می‌کنیم:



$$FF' = ۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴$$
$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{۴}{a} \Rightarrow a = ۵$$

گام دوم (محاسبهٔ MF و MF′): می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر بیضی از دو کانون آن برابر طول قطر بزرگ بیضی است، پس اگر فاصلهٔ نقطهٔ M از کانون نزدیک‌تر (نقطهٔ F) را برابر x در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$MF + MF' = ۲a = ۱۰ \xrightarrow{MF=x} MF' = ۱۰ - x$$

گام سوم (محاسبهٔ x): طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث MFF' داریم:

$$FF'^۲ = MF^۲ + MF'^۲ - ۲MF \times MF' \times \cos ۶۰^\circ \Rightarrow ۸^۲ = x^۲ + (۱۰-x)^۲ - ۲x(۱۰-x) \times \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow ۶۴ = x^۲ + ۱۰۰ - ۲۰x + x^۲ - ۱۰x + x^۲ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳۰x + ۳۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۰x + ۱۲ = ۰$$
$$\Rightarrow \Delta = (-۱۰)^۲ - ۴ \times ۱۲ = ۵۲ = ۴ \times ۱۳$$
$$x = \frac{۱۰ \pm ۲\sqrt{۱۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ + \sqrt{۱۳} \\ x = ۵ - \sqrt{۱۳} \end{cases}$$

بنابراین کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ M از یکی از کانون‌های بیضی برابر $۵ - \sqrt{۱۳}$ است.

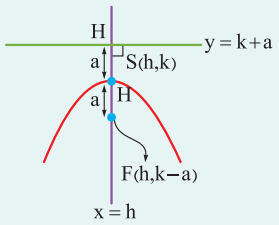
۲۳ سهمی‌ای که مختصات رأس و کانون آن به ترتیب **(۲,۱)** و **(۲,۳)** است، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۷۵ ۴) ۲

مشاوره این سؤال، از مدل‌های پرتکرار مبحث سهمی است که مشابه آن را حتماً در کتاب تستتان دیده‌اید.

درس Box

ویژگی‌های سهمی قائم



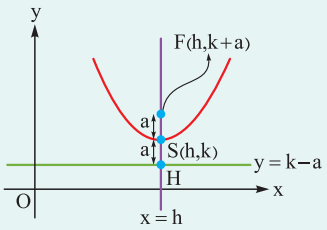
سهمی قائم با دهانهٔ رو به پایین

محور سهمی: خط $x = h$

خط هادی: $y = k + a$

کانون: $F(h, k - a)$

معادلهٔ استاندارد سهمی: $(x-h)^2 = -4a(y-k)$



سهمی قائم با دهانهٔ رو به بالا

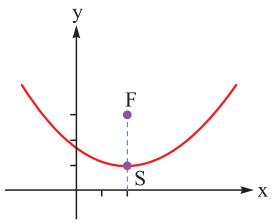
محور سهمی: خط $x = h$

خط هادی: $y = k - a$

کانون: $F(h, k + a)$

معادلهٔ استاندارد سهمی: $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (رسم شکل مناسب)**: با توجه به مختصات رأس و کانون سهمی، سهمی قائم و رو به بالا است.



گام دوم (به دست آوردن معادلهٔ سهمی): کانون سهمی را F و رأس آن را S می‌نامیم. با توجه به شکل، داریم $a = FS = 2$ و چون مختصات رأس سهمی را نیز داریم، معادلهٔ آن به دست می‌آید:

$$(x-2)^2 = 4 \times 2(y-1)$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): با قرار دادن $x = 0$ در معادلهٔ سهمی، عرض نقطهٔ تقاطع آن با محور yها به دست می‌آید:

$$(0-2)^2 = 4 \times 2(y-1) \Rightarrow y-1 = \frac{4}{4 \times 2} \Rightarrow y-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} = 1/5$$

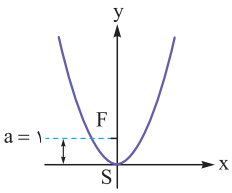
۲۴ دایره‌ای به شعاع ۲ که مرکز آن بر کانون سهمی $y=\frac{۱}{۴}x^۲$ منطبق است، این سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ بین این دو نقطه کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

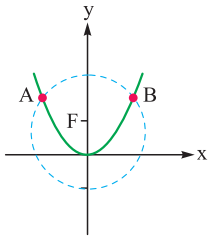
مشاوره این سؤال با ایده گرفتن از یک تمرین کتاب درسی طرح شده است، پس سعی کنید پاسخ آن را خوب یاد بگیرید، چون احتمال طرح مشابه آن در آزمون‌های تستی و تشریحی بالاست.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (به دست آوردن اطلاعات از معادلهٔ سهمی): معادلهٔ سهمی را به صورت $x^۲=۴y$ می‌نویسیم. این سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به بالا است و در آن $a=۱$. رأس این سهمی $(۰,۰)$ و کانون آن $(۰,۱)$ است.



گام دوم (نوشتن معادلهٔ دایره): معادلهٔ دایره به مرکز $(۰,۱)$ و شعاع ۲ را می‌نویسیم:



$$x^۲+(y-۱)^۲=۴$$

گام سوم (محاسبهٔ نقاط تقاطع سهمی و دایره): نقاط برخورد دایره و سهمی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x^۲=۴y\\x^۲+(y-۱)^۲=۴\end{cases}\Rightarrow ۴y=۴-(y-۱)^۲\Rightarrow y^۲-۲y+۴y-۳=۰\Rightarrow y^۲+۲y-۳=۰$$

$$\begin{cases}y=۱\Rightarrow \xrightarrow{x^۲=۴y} x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲\Rightarrow (-۲,۱),(۲,۱)\\y=-۳\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

از آن‌جا که طبق معادلهٔ سهمی داریم $x^۲=۴y$؛ بنابراین y حتماً عددی نامنفی است، پس نقاط برخورد $A(۲,۱)$ و $B(-۲,۱)$ است و داریم:

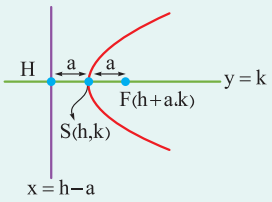
$$AB=\sqrt{(۲-(-۲))^۲+(۱-۱)^۲}=۴$$

۲۵ به ازای کدام مقدار b، محور yها، خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۲y + ۲x = b$ است؟

۱) صفر　　۲) -۲　　۳) ۱　　۴) -۳

درس Box

ویژگی‌های سهمی افقی



سهمی افقی با دهانهٔ رو به راست

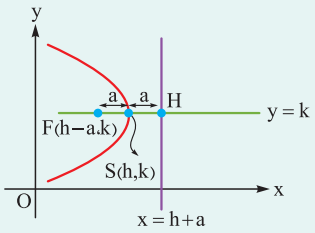
محور سهمی: خط $y = k$

خط هادی: $x = h - a$

کانون $F(h + a, k)$

معادلهٔ استاندارد سهمی:

$(y - k)^۲ = ۴a(x - h)$



سهمی افقی با دهانهٔ رو به چپ

محور سهمی: خط $y = k$

خط هادی: $x = h + a$

کانون $F(h - a, k)$

معادلهٔ استاندارد سهمی:

$(y - k)^۲ = -۴a(x - b)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (نوشتن معادلهٔ استاندارد سهمی): عبارت $y^۲ - ۲y$ را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم تا معادلهٔ سهمی را به دست بیاوریم:

$$y^۲ - ۲y + ۲x = b \Rightarrow (y-۱)^۲ - ۱ + ۲x = b$$

حالا از ضریب x نیز فاکتور می‌گیریم تا مختصات رأس سهمی را به دست بیاوریم:

$$\Rightarrow (y-۱)^۲ = -۲x + b + ۱ \Rightarrow (y-۱)^۲ = -۲(x - (\frac{b+۱}{۲}))$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): سهمی افقی، با دهانهٔ رو به چپ است؛ بنابراین مختصات رأس آن $(\frac{b+۱}{۲}, ۱)$ و معادلهٔ خط هادی آن $x = \frac{b+۱}{۲} + \frac{۲}{۴}$ است. از طرفی، معادلهٔ محور yها به صورت $x = ۰$ است؛ پس باید:

$$\frac{b+۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow b = -۲$$

۲۶ فاصلهٔ بین نقاط **A** و **B** در صفحه برابر $\sqrt{۹x^۲-۶x+۱}$ و فاصلهٔ نقطهٔ **C** از نقطهٔ **D** برابر $\sqrt{۴x^۲+۴x+۱}$ است. اگر **C** تصویر نقاط **A** و **B** تحت تبدیل **T** باشد، آن‌گاه فاصلهٔ بین دو نقطهٔ **C** و **D** کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

درس Box

یک تبدیل در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطهٔ A در صفحه یک و تنها یک نقطهٔ A' از همان صفحه را نسبت می‌دهد و بالعکس.

$$\begin{cases} T : P \to P \\ T(A) = A' \end{cases}$$

در واقع، هر تبدیل در صفحهٔ P یک تابع یک‌به‌یک با دامنه و برد P است که ورودی‌ها و خروجی‌های آن، نقاط واقع در صفحهٔ P هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ x): چون تبدیل یک تابع یک‌به‌یک است؛ پس C نمی‌تواند تصویر دو نقطهٔ متمایز A و B تحت تبدیل T باشد، لذا باید دو نقطهٔ A و B بر هم منطبق باشند و این وقتی ممکن است که فاصلهٔ بین این دو نقطه صفر باشد:

$$AB = ۰ \Rightarrow \sqrt{۹x^۲-۶x+۱} = \sqrt{(۳x-۱)^۲} = |۳x-۱| = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): با توجه به مقدار x به‌دست‌آمده، فاصلهٔ نقطهٔ C از D را به دست می‌آوریم:

$$CD = \sqrt{۴x^۲+۴x+۱} = |۲x+۱| \xrightarrow{x=\frac{۱}{۳}} CD = |\frac{۲}{۳}+۱| = \frac{۵}{۳}$$

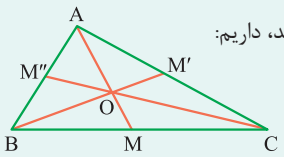
۲۷ طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی برابر $\sqrt{۳}$ است. در انتقال با برداری که ابتدای آن یک رأس و انتهای آن نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های این مثلث است، مثلث را تصویر می‌کنیم. فاصلهٔ دورترین رأس‌های مثلث و تصویرش کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۶}$

درس Box

۱) انتقال، یک تبدیل طولپا است.

۲) میانه‌های هر مثلث همرس‌اند. اگر مطابق شکل میانه‌های مثلث ABC در O همرس باشند، داریم:

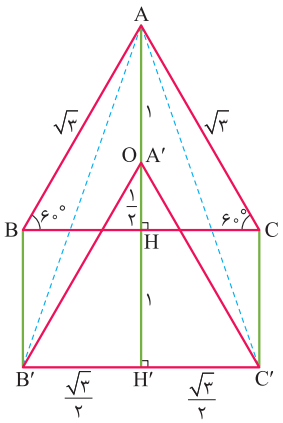


$$\frac{AO}{OM}=\frac{BO}{OM'}=\frac{CO}{OM''}=۲$$

۳) اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع a باشد، طول ارتفاع آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم شکل مناسب): مطابق شکل، مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث متساوی‌الاضلاع ABC تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{AO}$ است و نقطهٔ O محل همرسی میانه‌های مثلث است (در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع‌ها همان میانه‌ها هستند). مطابق شکل طول پاره‌خط AB' فاصلهٔ دورترین رأس‌های مثلث ABC و $A'B'C'$ است.



گام دوم (محاسبهٔ AH'): اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه داریم:

طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع: $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt{۳}=\frac{۳}{۲}$

بنابراین ارتفاع مثلث منتقل‌شده نیز $\frac{۳}{۲}$ است، چون که انتقال، تبدیلی طولپاست، پس:

$$AH=A'H'=\frac{۳}{۲}$$

و از آن‌جا که O نقطهٔ همرسی میانه‌ها در مثلث ABC است، داریم:

$$O\text{ نقطهٔ همرسی میانه‌ها}\ \Rightarrow\ AA'=AO=\frac{۲}{۳}AH=\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۲}=۱$$

بنابراین:

$$AH'=AA'+A'H'=۱+\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طول AH' را به دست آوردیم و $H'C$ نیز نصف ضلع مثلث اصلی، یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است؛ بنابراین طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $AH'C'$ داریم:

$$AB'^{۲}=AH'^{۲}+B'H'^{۲}=(\frac{۵}{۲})^{۲}+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}=\frac{۲۵}{۴}+\frac{۳}{۴}=\frac{۲۸}{۴}=۷\ \Rightarrow\ AB'=\sqrt{۷}$$

۲۸ دایرهٔ C به مرکز O و نقطهٔ M واقع بر آن مفروض‌اند. در یک دوران به مرکز M، دایرهٔ C روی دایرهٔ C' به مرکز O' تصویر می‌شود. اگر O' بر دایرهٔ C واقع باشد، نسبت طول وترمشترک دو دایره به طول مماس‌مشترک آن‌ها کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) ۱

مشاوره در این سؤال، مفاهیم دایره (فصل اول هندسهٔ یازدهم) با مفهوم دوران در فصل دوم ترکیب شده است، بارها گفته‌ایم که سؤال‌های ترکیبی، سؤال‌های مهمی هستند.

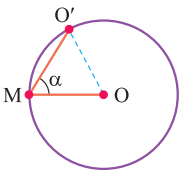
درس Box

۱) دوران، یک تبدیل طولپاست.

۲) اگر شعاع‌های دو دایره با هم برابر باشند، طول مماس‌مشترک خارجی آن‌ها برابر با طول خط‌المرکزین است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم شکل مناسب و تحلیل مسئله): نقطهٔ O با دوران نسبت به نقطهٔ M که روی دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارد، به نقطهٔ O' روی همان دایره تصویر می‌شود؛ پس شکل آن به صورت روبه‌رو است:



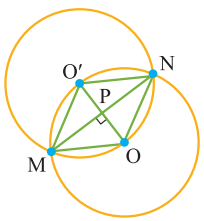
و از آن‌جایی که دوران یک تبدیل طولپاست، داریم:

$$MO = MO' = OO' = r$$

پس مثلث MOO' متساوی‌الاضلاع است و $\alpha = ۶۰^\circ$.

دقت کنید به دلیل طولپابودن دوران، شعاع دایرهٔ C' هم r است.

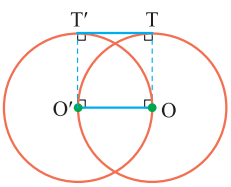
گام دوم (محاسبهٔ طول وترمشترک دو دایره): حالا اگر دایرهٔ $C(O',r)$ را نیز رسم کنیم، مطابق شکل، دو مثلث متساوی‌الاضلاع MOO' و NOO' داریم که طول وترمشترک این دو دایره برابر $MP+PN$ یا همان مجموع ارتفاع‌های مثلث‌ها است.



$$MP = PN = \frac{\sqrt{۳}}{۲}MO = \frac{\sqrt{۳}}{۲}r$$

$$MN = ۲MP = \sqrt{۳}r$$

گام سوم (محاسبهٔ طول مماس‌مشترک خارجی): مطابق شکل مقابل چون شعاع‌های دو دایره برابرند، طول مماس‌مشترک خارجی، همان طول خط‌المرکزین است.

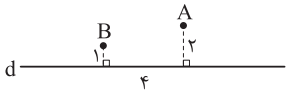


$$OO' = TT' = r$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): نسبت طول وترمشترک به طول مماس‌مشترک خارجی دو دایره برابر است با:

$$\frac{MN}{OO'} = \frac{\sqrt{۳}r}{r} = \sqrt{۳}$$

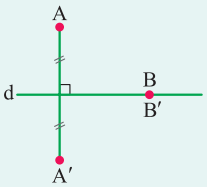
۲۹ مطابق شکل، بازتاب A نسبت به خط d را A' و مجانس A' در تجانسی به مرکز B و با نسبت -۲ را A'' می‌نامیم. با توجه به اندازه‌های روی شکل طول AA'' کدام است؟



۱) ۱۲
۲) $۶\sqrt{۵}$
۳) ۱۳
۴) $۶\sqrt{۳}$

درس Box

۱) تعریف بازتاب: فرض کنید نقطهٔ A بر خط d واقع نیست و نقطهٔ B بر خط d واقع است:



الف) بازتاب A نسبت به d، نقطه‌ای مانند A' است به طوری که عمودمنصف AA' باشد.

ب) بازتاب B نسبت به d، همان B است، به عبارت دیگر $B' = B$.

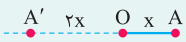
۲) تعریف تجانس: نقطهٔ ثابت O و عدد حقیقی و مخالف صفرِ k را در نظر می‌گیریم. اگر A نقطه‌ای از صفحه باشد که بر O منطبق نباشد، مجانس A در تجانسی به مرکز O و با نسبت k، نقطه‌ای مانند A' است، طوری که هر سه شرط زیر را داشته باشد:

الف) سه نقطهٔ O، A و A' در یک راستا باشند.

ب) $OA' = |k|.OA$

پ) اگر $k > ۰$، آن‌گاه A و A' در یک طرف O و اگر $k < ۰$ آن‌گاه A و A' در طرفین O قرار می‌گیرند.

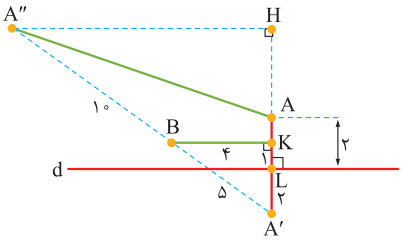




A' تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت -۲ است. A' تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت ۲ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم شکل مناسب): بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط d رسم می‌کنیم و سپس مجانس آن را نسبت به نقطهٔ B با نسبت -۲ پیدا می‌کنیم و آن را A'' می‌نامیم.



گام دوم (محاسبهٔ $A''B$): نقطهٔ A' بازتاب A نسبت به خط d است، پس با توجه به شکل، $AL = A'L = ۲$ و $KL = ۱$، پس $KA' = ۳$. بنا به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BKA' نتیجه می‌شود $A'B = ۵$.

چون A'' مجانس A' در تجانسی به مرکز B و با نسبت -۲ است، پس داریم:

$$\frac{A''B}{A'B} = |-۲| \Rightarrow A''B = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

گام سوم (محاسبهٔ $A''H$): چون $BK \parallel A''H$؛ بنابراین دو مثلث $A'BK$ و $A'A''H$ متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها ۳ است، پس داریم:

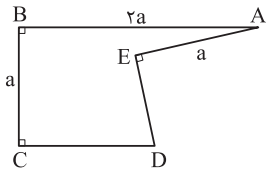
$$A'H = ۳A'K = ۹ \Rightarrow AH = A'H - A'A = ۵ \ , \ A''H = ۳BK = ۱۲$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA''H$، بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AA''^۲ = A''H^۲ + AH^۲ = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۶۹ \Rightarrow AA'' = ۱۳$$

۳۰ در شکل زیر، بدون تغییر محیط پنج‌ضلعی و با استفاده از تبدیل مناسب، مساحت شکل را افزایش داده‌ایم. مساحت شکل جدید کدام است؟



۱) $۲a^۲$

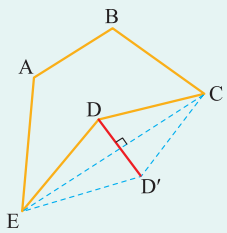
۲) $۲/۵a^۲$

۳) $۲/۷۵a^۲$

۴) $۳a^۲$

درس Box

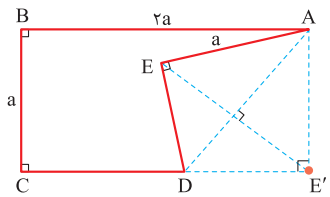
مسئلهٔ هم‌پیرامونی (هم‌محیطی): فرض کنیم که یک چندضلعی در یکی از رأس‌هایش محدب نباشد و بخواهیم با بازتاب، مساحتش را افزایش دهیم طوری که محیطش تغییر نکند.



به عنوان مثال، در شکل مقابل، ABCDE یک پنج‌ضلعی است که در آن زاویهٔ A محدب نیست؛ اگر بازتاب نقطهٔ D را نسبت به CE، نقطهٔ D' بنامیم، چندضلعی جدید که $ABCD'E$ است، محیطش با محیط ABCDE برابر است، زیرا $DC = D'C$ و $ED = ED'$، ولی مساحت چندضلعی $ABCD'E$ بیشتر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

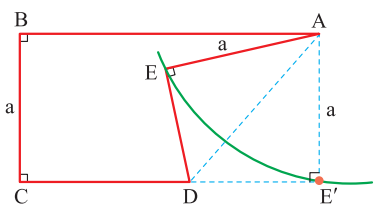
گام اول (رسم شکل): بازتاب E نسبت به AD را E' می‌نامیم. چون بازتاب تبدیلی طولپاست، پس $AE' = AE = a$؛ یعنی فاصلهٔ E' از A، برابر a است، ضمن آن‌که فاصلهٔ A از امتداد CD هم برابر با a است. از آن‌جایی که بازتاب اندازهٔ زوایا را حفظ می‌کند $E' = ۹۰^\circ$ است و در نتیجه E' در امتداد CD قرار دارد و AE' بر CD عمود است.



گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): شکل حاصل، مستطیلی به طول $۲a$ و عرض a است و مساحت آن $۲a^۲$ می‌باشد.

توجه: شاید هنوز برایتان سؤال باشد که چرا E' روی امتداد CD واقع است؟ توضیح مفصل برای این موضوع را هم ببینید:

اگر AE' بازتاب AE باشد، آن‌گاه به دلیل ایزومتری بودن بازتاب، E' روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع a واقع است. فاصلهٔ A از خط CD برابر با a است، پس این دایره بر امتداد CD مماس است. نقطهٔ تماس را F می‌نامیم. داریم $A\hat{F}D = ۹۰^\circ$. طبق حالت وتر و یک ضلع قائمه داریم $A\hat{E}D \cong A\hat{F}D$ که نتیجه می‌دهد $\overset{\triangle}{ADF} \cong \overset{\triangle}{AED}$ بازتاب نسبت به AD است؛ پس F همان E' است.



۳۱ در گراف G از مرتبهٔ ۵، $|E(G)| = ۷$ است. در این صورت $q(\bar{G})$ چند است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

درس Box

مرتبهٔ گراف: تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبهٔ آن گراف می‌گوییم و با $p(G)$ نمایش می‌دهیم.

اندازهٔ گراف: تعداد یال‌های گراف G یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ آن گراف می‌گوییم و با $q(G)$ نمایش می‌دهیم.

مکمل یک گراف: مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا $\bar{G}$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس گراف G است و بین دو رأس از G^c یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در گراف G یالی وجود نداشته باشد.

اگر G یک گراف p رأسی باشد، آن‌گاه:

$$q(G)+q(\bar{G})=\binom{p}{۲}$$

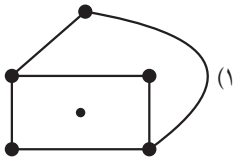
پاسخ خیلی تشریحی

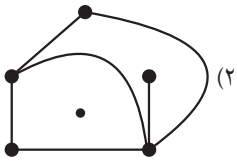
گام اول: در گراف G، $p = ۵$ و $q = ۷$ است.

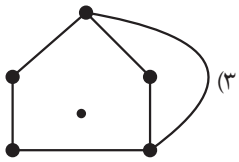
گام دوم: طبق درس‌باکس داریم:

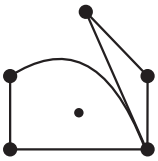
$$q(G)+q(\bar{G})=\binom{p}{۲} \Rightarrow ۷+q(\bar{G})=\binom{۵}{۲}=۱۰ \Rightarrow q(\bar{G})=۳$$

۳۲ در گراف G، اگر $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $E(G)=\{ab,ac,bd,dc,fa,df\}$، کدام نمودار نشان‌دهندهٔ این گراف است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


درس Box

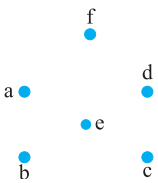
یک گراف متشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها که به هر یک از این نقاط رأس و به هر یک از پاره‌خط‌ها یال می‌گوییم.

پاسخ خیلی تشریحی

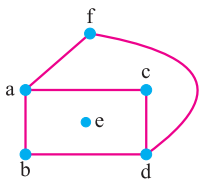
با داشتن دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ می‌توانید ابتدا به تعداد $|V(G)|$، نقطه (رأس) مشخص نمایید و سپس با توجه به $E(G)$ رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید.

گام اول: به تعداد اعضای مجموعهٔ $V(G)$، رأس‌های گراف را مشخص می‌کنیم.

$$|V(G)|=۶$$



گام دوم: حال یال‌های گراف را رسم می‌کنیم.



۳۳ در گراف G، تعداد اعضای مجموعهٔ $V(G)$ برابر ۸ است. مجموع درجهٔ همهٔ رئوس به جز رئوس a و b برابر ۴۲ است. اگر $b \notin N_G(a)$، در این صورت چند مسیر از رأس a به رأس b وجود دارد؟

۱) ۱۹۵۶ ۲) ۱۹۵۵ ۳) ۱۹۵۴ ۴) ۱۹۵۳

درس Box

درجهٔ یک رأس: درجهٔ رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند و آن را با $\deg_G(v)$ یا به طور ساده‌تر با $\deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم.

اگر درجهٔ یک رأس فرد باشد، آن را رأس فرد و اگر زوج باشد آن را رأس زوج می‌نامیم.

مجموعهٔ همسایگی‌های یک رأس: فرض کنیم $v \in V(G)$، به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v» می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم.

اضافه‌کردن خود رأس v به $N_G(v)$ «همسایگی بستهٔ رأس v» را به دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می دهیم.

قضیه: اگر G یک گراف با مرتبهٔ p و اندازهٔ q و $V = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ مجموعهٔ رئوس آن باشند، آن‌گاه: $\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$

مسیر: اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک $u - v$ مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند، طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کم‌تر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر).

قرارداد می‌کنیم که دنبالهٔ متشکل از تنها یک رأس v، یک مسیر است با طول صفر از رأس v به خودش.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در گراف G، $p = 8$ است، بنابراین ماکزیمم درجه برابر $p - 1 = 7$ است.

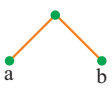
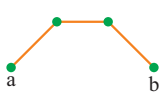
گام دوم: طبق گفتهٔ سؤال مجموع درجات ۶ رأس (به‌جز رئوس a و b) برابر ۴۲ است. از طرفی می‌دانیم:

$$\sum_{i=1}^{6} \deg v_i \le 6 \times 7 \Rightarrow \sum_{i=1}^{6} \deg v_i \le 42$$

پس درجهٔ این ۶ رأس باید ماکزیمم باشد؛ یعنی درجهٔ هر کدام از ۶ رأس برابر ۷ است.

گام سوم: چون $b \notin N_G(a)$ پس رئوس a و b مجاور نیستند؛ یعنی گراف G یال ab را ندارد؛ پس $\deg(a) = \deg(b) = 6$.

گام چهارم: حال تعداد مسیرها از رأس a به رأس b را به دست می‌آوریم.

طول مسیر	تعداد
۱	صفر
۲	$\binom{6}{1} \times 1! = 6$ (انتخاب یک رأس از ۶ رأس) 
۳	$\binom{6}{2} \times 2! = 30$ (انتخاب دو رأس از ۶ رأس) 
۴	$\binom{6}{3} \times 3! = 120$
۵	$\binom{6}{4} \times 4! = 360$
۶	$\binom{6}{5} \times 5! = 720$
۷	$\binom{6}{6} \times 6! = 720$

بنابراین تعداد مسیرها از رأس a به رأس b برابر است با: $0 + 6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1956$

۳۴ در گراف G داریم: $V(G)=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ ، $N_{\bar{G}}[a]=N_{\bar{G}}[b]=N_{\bar{G}}[c]$ ، $N_{\bar{G}}[d]=N_{\bar{G}}[e]=N_{\bar{G}}[f]=N_{\bar{G}}[g]$ و $N_{\bar{G}}[a]\cap N_{\bar{G}}(d)=\varnothing$ ، گراف G شامل چند دور به طول ۴ است؟

۱) ۶

۲) ۱۲

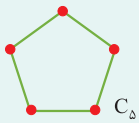
۳) ۱۸

۴) ۲۴

درس Box

دور: دنبالهٔ $v_1v_2v_3\ \dots\ v_nv_1$ $(n\geq 3)$ از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.

گرافی را که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم.



پاسخ خیلی تشریحی

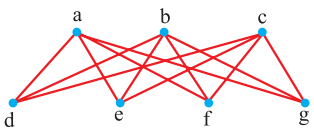
گام اول: رأس‌های مکمل گراف G همان رأس‌های گراف G هستند؛ بنابراین $V(\bar{G})=\{a,b,c,d,e,f,g\}$.

گام دوم: همسایگی بستهٔ رأس v شامل خودِ رأس v نیز است؛ بنابراین از تساوی همسایگی‌های بسته و $N_{\bar{G}}[a]\cap N_{\bar{G}}(d)=\varnothing$ نتیجه می‌شود که:

$$N_{\bar{G}}[a]=N_{\bar{G}}[b]=N_{\bar{G}}[c]=\{a,b,c\}$$

$$N_{\bar{G}}[d]=N_{\bar{G}}[e]=N_{\bar{G}}[f]=N_{\bar{G}}[g]=\{d,e,f,g\}$$

گام سوم: پس در $\bar{G}$ بین رئوس a، b و c با رئوس d، e، f و g یالی وجود ندارد؛ پس در گراف G سه رأس a، b و c به چهار رأس d، e، f و g متصل‌اند؛ بنابراین:



گام چهارم: برای دور به طول ۴، نیاز به ۴ رأس داریم، چون بین خود رئوس بالا و همچنین بین رئوس پایین یالی وجود ندارد؛ پس باید دو رأس از بین سه رأس بالا و دو رأس از بین چهار رأس پایین انتخاب شوند.

$$\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۲}=۳\times ۶=۱۸$$

۳۵ در یک گراف با اندازهٔ ۱۸، $\Delta = \delta = ۴$. این گراف چند رأس دارد؟

۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۱

درس Box

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف: بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آن‌ها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آن‌ها را ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم.

گراف k ـ منتظم: گرافی را که درجهٔ تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k ـ منتظم می‌نامیم.

در گراف k ـ منتظم از مرتبهٔ p، مجموع درجات رئوس برابر است با pk؛ بنابراین $pk = ۲q$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از آن‌جایی که بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ رئوس گراف برابر است، بنابراین گراف منتظم است.

گام دوم: در گراف ۴- منتظم با اندازهٔ $q = ۱۸$ داریم:

$$p.k = ۲q \xrightarrow[k=۴]{q=۱۸} p \times ۴ = ۲ \times ۱۸ \Rightarrow p = ۹$$

۳۶ در گراف $P_۶$، nتا $\gamma-$مجموعه و mتا مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال سه‌عضوی وجود دارد. $m+n$ کدام است؟

۱) ۴

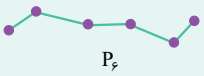
۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

درس Box

گرافی را که تنها از یک مسیر nرأسی تشکیل شده باشد، با P_n نمایش می‌دهیم.



تعریف: زیر مجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

تعریف: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را دارند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

نکته

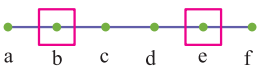
در گراف P_n عدد احاطه‌گری برابر است با:

$$\gamma(G)=\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$$

پاسخ خیلی تشریحی

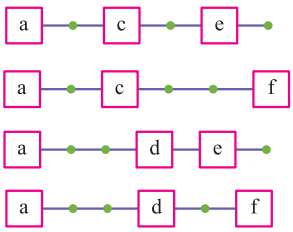
گام اول: طبق نکتهٔ بالا؛ عدد احاطه‌گری در گراف $P_۶$ برابر $\gamma(P_۶)=\left\lceil \frac{۶}{۳} \right\rceil=۲$ است.

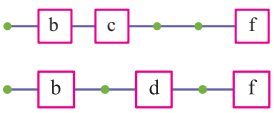
گام دوم: حال تعداد γـ مجموعهٔ $P_۶$ را حساب می‌کنیم.



تنها مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در $P_۶$، $\{b,e\}$ است؛ بنابراین $\gamma=۲$ و $n=۱$.

گام سوم: مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال سه‌عضوی را به دست می‌آوریم:

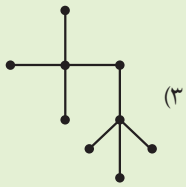




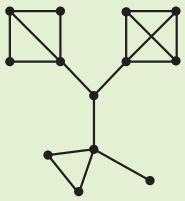
در نتیجه گراف $P_۶$، ۶ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال سه‌عضوی دارد؛ پس $m=۶$، در نتیجه $m+n=۶+۱=۷$.

۳۷ در کدام گراف، عدد احاطه‌گری با بقیه متفاوت است؟

۱) C_8



۲) P_8



۳)

۴)

نکته ۱) اگر G یک گراف nرأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ و $\gamma(G)$ اندازهٔ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم (عدد احاطه‌گری) گراف G باشد، همواره داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \le \gamma(G)$$

۲) عدد احاطه‌گری در گراف‌های P_n و C_n برابر $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ است.

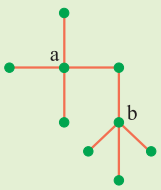
پاسخ خیلی تشریحی در گزینهٔ (۱) عدد احاطه‌گری گراف C_8 برابر $\left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil = 3$ است.

در گزینهٔ (۲) عدد احاطه‌گری گراف P_8 برابر $\left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil = 3$ است.

در گزینهٔ (۳)، $n = 9$ و $\Delta = 4$ در نتیجه:

$$\left\lceil \frac{9}{4+1} \right\rceil \le \gamma(G) \Rightarrow 2 \le \gamma(G)$$

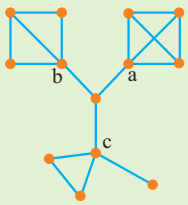
از طرفی با انتخاب دو رأس a و b تمام رئوس گراف احاطه می‌شود؛ پس $\gamma(G) = 2$.



در گزینهٔ (۴): $n = 13$ و $\Delta = 4$؛ پس داریم:

$$\left\lceil \frac{13}{4+1} \right\rceil \le \gamma(G) \Rightarrow 3 \le \gamma(G)$$

از طرفی سه رأس a، b و c تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند؛ پس $\gamma(G) = 3$.



۳۸ برای برآورد میانگین درآمد افراد یک جامعه از سه نمونهٔ تصادفی استفاده کرده‌ایم. اگر اندازهٔ نمونه‌ها یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت r تشکیل دهند، انحراف معیارهای برآورد میانگین برای این سه، یک دنبالهٔ ..... با قدرنسبت ..... تشکیل می‌دهند.

۱) حسابی ـ r

۲) هندسی ـ $\frac{۱}{\sqrt{r}}$

۳) هندسی ـ $\frac{۱}{r}$

۴) هندسی ـ $\frac{۱}{r^۲}$

نکته

انحراف معیار جامعه تقسیم بر جذر اندازهٔ نمونه = انحراف معیار میانگین

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: انحراف معیار جامعه در همهٔ نمونه‌های جامعه برابر است. نسبت انحراف معیار میانگین در دو نمونه با اندازه‌های $n_۱$ و $n_۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sigma_{\bar{x}_{n_۱}}}{\sigma_{\bar{x}_{n_۲}}} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n_۱}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_۲}}} = \frac{\sqrt{n_۲}}{\sqrt{n_۱}}$$

دقت کنید: نسبت انحراف معیار میانگین دو نمونه با عکس نسبت جذر اندازه‌های دو نمونه برابر است.

گام دوم: چون اندازهٔ نمونه‌ها یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت r تشکیل می‌دهند، بنابراین $\frac{n_۲}{n_۱} = r$ پس داریم:

$$\frac{\sqrt{n_۲}}{\sqrt{n_۱}} = \sqrt{\frac{n_۲}{n_۱}} = \sqrt{r}$$

گام سوم: با توجه به گام اول داریم:

$$\frac{\sigma_{\bar{x}_{n_۲}}}{\sigma_{\bar{x}_{n_۱}}} = \frac{۱}{\sqrt{r}}$$

بنابراین انحراف معیار برآورد میانگین برای این نمونه‌ها تشکیل دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{\sqrt{r}}$ می‌دهد.

۳۹ از اعداد طبیعی ۱ تا **n**، به تصادف هفت عدد متمایز انتخاب می‌کنیم. برآورد نقطه‌ای ما از **n**، طبق نمونهٔ انتخاب‌شده برابر با ۱۹ است. اگر بزرگ‌ترین عدد در نمونه ۱۷ باشد، حداکثر چند عضو نمونه کم‌تر از ۱۰ هستند؟

۱) ۶

۲) ۵

۳) ۴

۴) ۳

درس Box

پارامتر یا پارامتر جامعه: یک مشخصهٔ عددی است که توصیف‌کنندهٔ جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند، قابل محاسبه است.

آماره یا آمارهٔ نمونه: مشخصه‌ای عددی که توصیف‌کنندهٔ جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید.

برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه برابر است با مقدار عددی حاصل از جای‌گذاری اعداد نمونهٔ تصادفی در آمارهٔ نظیر آن پارامتر. به بیان دیگر مقدار عددی آماره را برآورد نقطه‌ای می‌نامند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: میانگین اعداد طبیعی ۱ تا n برابر $\frac{n+1}{2}$ است. برآورد نقطه‌ای سؤال از n، طبق نمونهٔ انتخاب‌شده برابر ۱۹ است؛ پس میانگین نمونه برابر $\frac{19+1}{2}=10$ است.

گام دوم: می‌دانیم مجموع انحراف از میانگین داده‌ها برابر صفر است. با توجه به این‌که بزرگ‌ترین عدد در نمونه ۱۷ است و $17-10=7$، پس مجموع انحراف از میانگین بقیهٔ داده‌ها برابر -7 است.

گام سوم: برای حداکثربودن تعداد اعضای کم‌تر از ۱۰، باید اعداد نزدیک به ۱۰ را برداریم:

نمونه‌های کم‌تر از ۱۰ را امتحان می‌کنیم، دقت کنید، تعداد نمونه هفت‌عضوی است:

شش دادهٔ کم‌تر از ۱۰ اصلاً امکان ندارد زیرا:

$$\underbrace{(9-10)}_{-1}+\underbrace{(8-10)}_{-2}+\underbrace{(7-10)}_{-3}+\underbrace{(6-10)}_{-4}+\underbrace{(5-10)}_{-5}+\underbrace{(4-10)}_{-6}=-21 \Rightarrow -21+\underbrace{(17-10)}_{7}\neq 0 \times$$

اگر ۵ داده کم‌تر از ۱۰ باشند آن‌گاه:

$$\underbrace{(9-10)}_{-1}+\underbrace{(8-10)}_{-2}+\underbrace{(7-10)}_{-3}+\underbrace{(6-10)}_{-4}+\underbrace{(5-10)}_{-5}=-15 \Rightarrow \underbrace{(17-10)}_{7}+\underbrace{(16-10)}_{6}-15\neq 0 \times$$

برای ۴ دادهٔ کم‌تر از ۱۰ داریم:

$$\underbrace{(9-10)}_{-1}+\underbrace{(8-10)}_{-2}+\underbrace{(7-10)}_{-3}+\underbrace{(6-10)}_{-4}=-10$$

$$\underbrace{(17-10)}_{7}+\underbrace{(12-10)}_{2}+\underbrace{(11-10)}_{1}-10=0 \checkmark$$

یعنی مثلاً اعضای نمونه می‌تواند ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲ و ۱۷ باشند که ۴ عضو کم‌تر از ۱۰ دارد.

۴۰ در یک نمونه‌گیری سامانمند از بین شماره‌های ۱ تا ۴۵۰، ۳۰ نفر را به‌صورت سامانمند انتخاب می‌کنیم. اگر فقط شمارهٔ ۱۷ از طبقه دوم انتخاب شود، یازدهمین عددی که انتخاب می‌شود چه شماره‌ای است؟

۱) ۱۴۰

۲) ۱۴۲

۳) ۱۵۲

۴) ۱۶۲

درس Box

نمونه‌گیری سامانمند (سیستماتیک): نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازهٔ طبقات با هم برابر است، فقط از طبقهٔ اول، واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان رویه از طبقات دیگر، این کار انجام می‌گیرد.

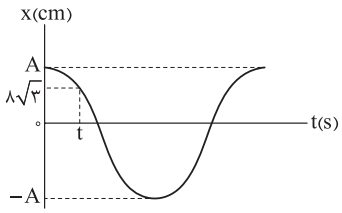
در نمونه‌گیری سامانمند، شمارهٔ اعضای نمونه یک دنبالهٔ حسابی می‌سازند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$\text{طول طبقات} = \frac{۴۵۰}{۳۰} = ۱۵$$

$$\begin{cases} t_{۱۱} = t_۲ + (۱۱-۲)\times ۱۵ \\ t_{۱۱} = ۱۷ + ۹\times ۱۵ = ۱۷ + ۱۳۵ = ۱۵۲ \end{cases}$$

۴۱ نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که در هر دقیقه، ۳۰ نوسان کامل انجام می‌دهد، به شکل زیر است. اگر نوسانگر از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که برای دومین بار تندی آن بیشینه می‌شود، مسافت ۴۸ cm را طی کند، t برحسب ثانیه کدام است؟



۱) $\frac{1}{24}$

۲) $\frac{1}{12}$

۳) $\frac{1}{6}$

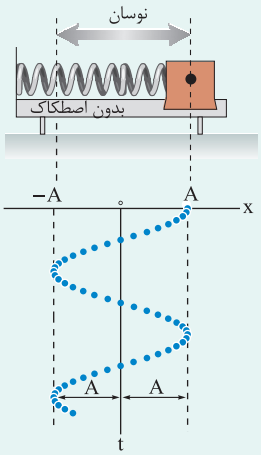
۴) $\frac{1}{3}$

مشاوره مشابه این سؤال بارها در کنکورهای گذشته مطرح شده که نشان از اهمیت بالای این مبحث داره و از طرفی این مدل سؤال می‌تونه در امتحان نهایی هم مطرح بشه. چون مشابه یکی از تمرین‌های کتاب درسیه و واجبه که راه حل اول رو در پیداکردن زاویه و زمان، خوب بلد باشی.

Hint با توجه به این‌که در مرکز نوسان، تندی نوسانگر بیشینه می‌شود، دامنهٔ نوسان را یافته، سپس به کمک دورهٔ تناوب و نیز مکان نوسانگر در لحظهٔ t، مقدار t به دست می‌آید.

درس Box اگر در مبدأ زمان (لحظهٔ $t = 0\ s$)، نوسانگر در مکان بیشینهٔ خود، یعنی $x = +A$ باشد، معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر به صورت $x = A\cos(\omega t)$ می‌شود که در آن A دامنهٔ نوسان برحسب متر (m) و ω بسامد زاویه‌ای نوسانگر برحسب رادیان بر ثانیه (rad/s) است.

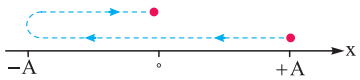
منظور از ω، بسامد زاویه‌ای نوسانگر بوده و به صورت $\omega = \frac{2\pi}{T}$ تعریف می‌شود که T دورهٔ تناوب نوسانگر برحسب ثانیه است و مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا نوسانگر یک چرخهٔ (سیکل) کامل را طی کند. به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر، می‌توانیم برحسب x ،t را یا برحسب t ،x را به دست آوریم که با اطلاعات پایه‌ای از بحث مثلثات امکان‌پذیر است.



با توجه به شکل مقابل که نشان‌دهندهٔ نمودار مکان ـ زمان یک حرکت هماهنگ ساده است، در نقاط انتهایی پاره‌خط نوسان یا همان نقاط بازگشتی $+A$ و $-A$، تندی نوسانگر صفر شده و نوسانگر تغییر جهت می‌دهد. از طرفی در مرکز نوسان $(x = 0)$، همواره تندی نوسانگر بیشینه است.

نکته اگر نوسانگری در مدت‌زمان Δt، n نوسان کامل انجام دهد، دورهٔ تناوب آن از رابطهٔ $T = \frac{\Delta t}{n}$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به شکل زیر، برای این‌که تندی نوسانگر برای دومین بار بیشینه شود، باید در مبدأ زمان، نوسانگر از مکان $+A$ به مکان $-A$ رفته و در مسیر برگشت، از $-A$ به مرکز نوسان برسد تا برای دومین بار در مرکز نوسان بوده و تندی آن بیشینه شود؛ بنابراین داریم:



مسافت طی‌شده: $\ell = 3A \xrightarrow{\ell = 48\ cm} 3A = 48 \Rightarrow A = 16\ cm$

گام دوم: چون نوسانگر در هر دقیقه $(60\ s)$، ۳۰ نوسان کامل انجام می‌دهد، دورهٔ تناوب آن برابر است با:

$$T = \frac{\Delta t}{n} = \frac{60}{30} = 2\ s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad/s$$

گام سوم: معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر را به دست می‌آوریم و با توجه به این‌که در لحظهٔ t، مکان نوسانگر $8\sqrt{3}$ cm است، t را محاسبه می‌کنیم:

$$x = A\cos(\omega t) \Rightarrow \underbrace{8\sqrt{3}}_{cm} = \underbrace{16}_{cm}\cos(\pi t) \Rightarrow \cos(\pi t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

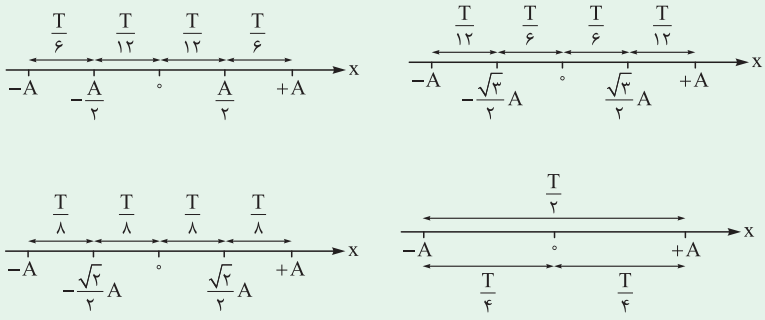
گام چهارم: با توجه به نمودار، برای اولین بار در لحظهٔ t، نوسانگر در مکان $x = 8\sqrt{3}$ cm است؛ بنابراین باید داشته باشیم:

$$\cos(\pi t) = \cos(\underbrace{\frac{\pi}{6}}) \Rightarrow \pi t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{6}\,s$$

یعنی باید از ربع اول زاویه‌ای را پیدا کنیم که کسینوس آن برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد.

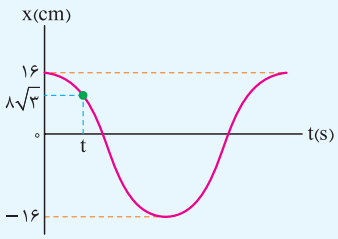
نکته

برای افزایش سرعت محاسبات در این مدل سؤالات، حتماً زمان‌های زیر را حفظ کنید:



یه‌جور دیگه

برای پیداکردن t به کمک نکتهٔ بالا داریم:



از مبدأ زمان تا لحظهٔ t، نوسانگر از مکان $+A$ تا مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ رفته و داریم:

$$t = \frac{T}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}\,s$$

گول‌نخوری

اگر در پیداکردن زاویه به جای $\frac{\pi}{6}$، $\frac{\pi}{3}$ رو می‌نوشتی، یا در استفاده از نکته به جای $\frac{T}{12}$، $\frac{T}{6}$ رو می‌نوشتی، در دام گزینهٔ (۴) می‌افتادی!

۴۲ دورهٔ تناوب یک آونگ ساده ۴ s است. اگر در همان محل، جرم آونگ و دامنهٔ نوسان‌های آن ۲ برابر شود، دورهٔ تناوب آونگ به چند ثانیه می‌رسد؟

۱) ۲

۲) ۴

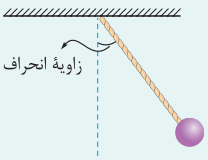
۳) ۸

۴) ۱۶

مشاوره این مدل سؤال بیشتر برای امتحان نهایی مناسب است، اما چون در خود کنکور هم، در درس فیزیک چندتا سؤال ساده مطرح می‌شه، پس بعید نیست که با همچین سؤالی در کنکور مواجه بشی.

Hint کافیه رابطهٔ دورهٔ تناوب آونگ ساده رو بلد باشی و با یک تناسب ساده به جواب برسی.

درس Box دورهٔ تناوب آونگ ساده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

T: دورهٔ تناوب آونگ برحسب ثانیه (s)

L: طول آونگ برحسب متر (m)

g: شتاب گرانش برحسب متر بر مربع ثانیه (m/s^2)

اگر طول آونگ یا شتاب گرانش تغییر کند، برای مقایسهٔ دورهٔ تناوب آونگ ساده می‌توان نوشت:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1} \times \frac{g_1}{g_2}}$$

توجه: دورهٔ تناوب آونگ ساده، فقط به طول آونگ (L) و شتاب گرانش (g) وابسته است و به جرم نوسانگر و دامنهٔ نوسان بستگی ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ داریم:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1} \times \frac{g_1}{g_2}} \xrightarrow{L_2=L_1\,,\, g_2=g_1\,,\, T_1=4\,s} \frac{T_2}{4} = 1 \Rightarrow T_2 = 4\,s$$

تیزبازی چون دورهٔ تناوب آونگ ساده به جرم نوسانگر و دامنهٔ نوسان وابسته نیست، پس دورهٔ تناوب آونگ، ثابت مانده و $T_2 = T_1 = 4\,s$ می‌شود.

۴۳ طول دو آونگ ساده به ترتیب L_1 و L_2 و تعداد نوسان‌های آن‌ها در هر دقیقه به ترتیب برابر ۲۰ و ۱۵ است. تعداد نوسان‌های آونگی به طول $L_1 + L_2$ در هر دقیقه کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

مشاوره این سؤال صرفاً برای کنکور مناسب است، ولی اگر در بدترین حالت بخواهد در امتحان نهایی مطرح شود، با یادگرفتن روش حل تشریحی می‌تونی به راحتی نمرهٔ کامل رو از این مدل سؤال بگیری.

Hint کافیه رابطهٔ دورهٔ تناوب آونگ ساده رو برای هر دو آونگ ساده بنویسی و بعدش طول هر آونگ رو برحسب اون روابط پیدا کنی و با جمع طول‌ها، سر از کار آونگ جدید در بیاری.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به کمک رابطهٔ $T = \frac{\Delta t}{n}$، دورهٔ تناوب هر یک از آونگ‌های ساده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{\Delta t}{n_1} = \frac{60}{20} = 3\ s \\ T_2 = \frac{\Delta t}{n_2} = \frac{60}{15} = 4\ s \end{cases}$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ داریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{T}{2\pi} \Rightarrow \frac{L}{g} = (\frac{T}{2\pi})^2 \Rightarrow L = \frac{T^2}{(2\pi)^2}g$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 = \frac{T_1^2}{(2\pi)^2}g = \frac{9g}{(2\pi)^2} \\ L_2 = \frac{T_2^2}{(2\pi)^2}g = \frac{16g}{(2\pi)^2} \end{cases} \Rightarrow L_1 + L_2 = \frac{25g}{(2\pi)^2}$$

گام سوم: چون طول آونگ جدید را به دست آورده‌ایم، پس داریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_1 + L_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{25g}{(2\pi)^2}}{g}} = \frac{2\pi}{2\pi}\sqrt{25} = 5\ s \xrightarrow{T=\frac{\Delta t}{n}} 5 = \frac{60}{n} \Rightarrow n = 12$$

نکته اگر در یک مکان، دو آونگ به ترتیب با طول‌های L_1 و L_2 و دورهٔ تناوب T_1 و T_2 داشته باشیم، آن‌گاه دورهٔ تناوب آونگی به طول $L_1 + L_2$ در همان مکان از رابطهٔ $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$ به دست می‌آید.

یه‌جور دیگه به کمک نکتهٔ بالا، می‌توانستیم دورهٔ تناوب آونگ جدید را سریع‌تر به دست آوریم:

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5\ s$$

۴۴ در شکل زیر، جسم متصل به فنر، ساکن و فنر نسبت به حالت عادی خود $0/4\ m$ کشیده شده است. جسم را مقداری به سمت پایین کشیده و رها می‌کنیم تا شروع به نوسان کند. دورهٔ تناوب نوسان‌های آن چند ثانیه است؟ $(g = 10\ N/kg\ ,\ \pi = 3)$

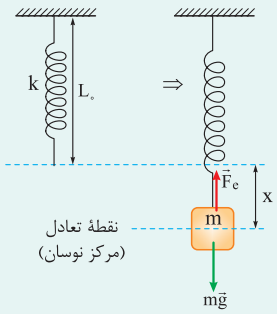


۱) $0/12$
۲) $0/06$
۳) $1/2$
۴) $0/6$

مشاوره امیدوارم حواستان باشد که در رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$، منظور از x میزان تغییر طول فنر از حالت عادی تا حالتی است که سامانهٔ جرم ـ فنر به تعادل رسیده است.

Hint به کمک تحلیل برایند نیروها در حالت تعادل، می‌تونی یه سری اطلاعات به دست بیاری و به کمک اون‌ها دورهٔ تناوب رو حساب کنی.

درس Box مطابق شکل، به فنر قائمی که دارای ثابت فنر k است، جسمی به جرم m را می‌بندیم و دستمان را زیر جسم قرار می‌دهیم و آرام‌آرام دستمان را پایین می‌آوریم تا سامانه به تعادل برسد. در این حالت داریم:



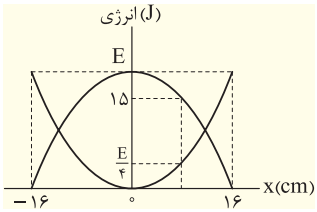
$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_e = mg \Rightarrow kx = mg \Rightarrow \frac{x}{g} = \frac{m}{k} \quad (1)$$

اگر پس از تعادل سامانه، جسم را مقداری به سمت بالا یا پایین برده و رها کنیم، جسم شروع به نوسان می‌کند. می‌دانیم دورهٔ تناوب سامانهٔ جرم ـ فنر از رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به دست می‌آید و با توجه به رابطهٔ (۱) داریم: $T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ چون فنر نسبت به طول عادی خود $0/4\ m$ کشیده شده و جسم در تعادل است؛ $x = 0/4\ m$ بوده و داریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} = 2\times 3\times\sqrt{\frac{0/4}{10}} = 6\times 0/2 = 1/2\ s$$

۴۵ نمودار انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل یک نوسانگر هماهنگ ساده برحسب مکان آن به شکل زیر است. بزرگی نیروی خالص وارد بر این نوسانگر در نقاط بازگشت چند نیوتون است؟



این‌که برای یک مکان معین، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل مطرح شده، تعبیرش اینه که تو بیای مجموع اون‌ها رو مساوی انرژی کل بذاری.

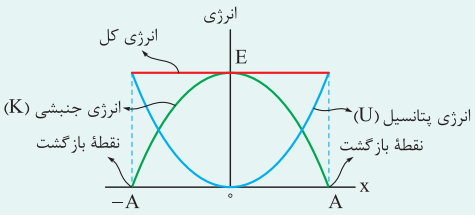
۱) ۲۵۰
۲) ۱۵۰
۳) ۲/۵
۴) ۱/۵

مشاوره این مدل سؤالات نموداری از انرژی نوسانگر، هم برای کنکور هم برای امتحان نهایی به شدت مهم هستند و سعی کن تمام مراحل تحلیل این سؤال رو خوب بلد باشی.

Hint به کمک اطلاعات روی شکل، می‌تونی دامنه و انرژی مکانیکی نوسانگر رو به دست بیاری و به کمک رابطهٔ انرژی مکانیکی و ربط‌دادنش به نیرو، بزرگی نیرو رو حساب کنی.

درس Box

در حرکت هماهنگ ساده، از نیروهای اتلافی صرف نظر می‌شود؛ بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو، انرژی مکانیکی (انرژی کل) سامانه ثابت می‌ماند و نمودار آن به شکل یک خط ثابت است. در نقاط بازگشتی $(x = \pm A)$، انرژی جنبشی نوسانگر صفر بوده و انرژی پتانسیل دارای بیشترین مقدار می‌شود $(K = ۰ , U_{max} = E)$.



در مرکز نوسان نیز چون نوسانگر در نقطهٔ تعادل است، انرژی پتانسیل صفر شده و انرژی جنبشی آن دارای بیشترین مقدار می‌شود $(U = ۰ , K_{max} = E)$. مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در تمام نقاط مسیر نوسان ثابت و برابر انرژی کل است $(K + U = E)$.

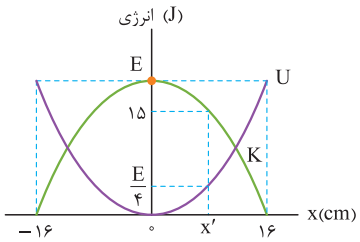
مطابق شکل، با افزایش اندازهٔ جابه‌جایی از نقطهٔ تعادل، به همان اندازه که انرژی جنبشی کاهش می‌یابد، انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد و بالعکس $(\Delta K + \Delta U = ۰ , |\Delta K| = |\Delta U|)$.

می‌دانیم انرژی مکانیکی سامانهٔ جرم ـ فنر از رابطهٔ $E = \frac{۱}{۲}kA^۲$ به دست می‌آید و از طرفی، نیروی وارد بر نوسانگر در نقاط بازگشتی بیشینه بوده و بزرگی آن از رابطهٔ $F_{max} = kA$ به دست می‌آید؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{F_{max}}{E} = \frac{kA}{\frac{۱}{۲}kA^۲} = \frac{۲}{A} \Rightarrow F_{max} = \frac{۲E}{A}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم نمودار انرژی سامانهٔ جرم ـ فنر برحسب مکان نوسانگر، در محدودهٔ بین نقاط بازگشتی رسم می‌شود و در نتیجه با توجه به نمودار مقابل داریم:



$$A = ۱۶ \text{ cm} = ۰/۱۶ \text{ m}$$

گام دوم: چون انرژی کل سامانهٔ جرم ـ فنر ثابت است، در مکان x' داریم:

$$K + U = E \Rightarrow ۱۵ + \frac{E}{۴} = E \Rightarrow \frac{۳E}{۴} = ۱۵ \Rightarrow E = ۲۰ \text{ J}$$

گام سوم: در نقاط بازگشتی، نیروی وارد بر نوسانگر بیشینه بوده و بزرگی آن از رابطهٔ $F_{max} = kA$ به دست می‌آید. با توجه به رابطهٔ $E = \frac{۱}{۲}kA^۲$ داریم:

$$\frac{F_{max}}{E} = \frac{kA}{\frac{۱}{۲}kA^۲} \Rightarrow F_{max} = \frac{۲E}{A} = \frac{۲ \times ۲۰}{۰/۱۶} = ۲۵۰ \text{ N}$$

گول نخوری یکی از خطرناک‌ترین دام‌ها، SI نبودن یکای کمیت استفاده‌شده در محورها است. اگر بی‌دقتی کنی و دامنه رو ۱۶ بگیری، در دام طراح می‌افتی و به گزینهٔ (۳) می‌رسی. یه دام دیگه که توی این سؤال هست، اینه که برخی از بچه‌ها به اشتباه، تفاضل ۱۵ و $\frac{E}{۴}$ رو برابر E می‌گیرن و در نتیجه به یکی از گزینه‌های (۲) یا (۴) می‌رسن؛ پس در این سؤال، سه گزینه دام داشت.

۴۶ معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = ۰/۰۴\cos ۵\pi t$ است. اگر در لحظه‌ای که تندی نوسانگر نصف تندی بیشینهٔ آن است، انرژی پتانسیل نوسانگر برابر ۱۵ mJ باشد، جرم نوسانگر چند گرم است؟ $(\pi = \sqrt{۱۰})$

۱) ۵۰

۲) ۱۰۰

۳) ۱۵۰

۴) ۲۰۰

مشاوره شاید بگی رابطهٔ انرژی پتانسیل برحسب تندی نوسانگر در متن کتاب درسی به طور مستقیم اشاره نشده! ولی با این سؤال دیدی که با همون مطالب مطرح‌شده در کتاب درسی و ترکیب اون‌ها با هم تونستیم به یک رابطهٔ خیلی مهم و کاربردی برای انرژی پتانسیل برحسب تندی نوسانگر برسیم. این کار، بخشی از مهم‌ترین کارهایی هست که شما نه‌تنها برای درس فیزیک بلکه باید برای سایر درس‌ها هم خوب بلد باشید و بتونید مفاهیم و روابط رو خوب به هم جوش بدید.

Hint از روی معادلهٔ مکان ـ زمان، دامنه و بسامد زاویه‌ای رو به دست بیار.

درس Box می‌دانیم تندی نوسانگر در مرکز نوسان بیشینه بوده و مقدار آن از رابطهٔ $v_{max} = A\omega$ به دست می‌آید که A دامنهٔ نوسان برحسب متر (m) و ω بسامد زاویه‌ای نوسانگر برحسب رادیان بر ثانیه (rad/s) است. در ادامه می‌خواهیم انرژی مکانیکی نوسانگر را برحسب تندی بیشینهٔ نوسانگر به دست آوریم؛ پس طبق رابطهٔ $E = \frac{۱}{۲}kA^۲$ می‌توانیم بنویسیم:

$$E = \frac{۱}{۲}kA^۲ \xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\ k=m\omega^۲} E = \frac{۱}{۲}m\omega^۲A^۲ = \frac{۱}{۲}m(A\omega)^۲ \xrightarrow{v_{max}=A\omega} E = \frac{۱}{۲}mv_{max}^۲$$

پس اگر بخواهیم انرژی مکانیکی را برحسب جرم و تندی بیشینهٔ نوسانگر به دست آوریم، این رابطه خیلی مفید خواهد بود.

می‌دانیم انرژی جنبشی نوسانگر از رابطهٔ $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ به دست می‌آید و در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_{max}^۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲ + U \Rightarrow U = \frac{۱}{۲}m(v_{max}^۲ - v^۲)$$

به کمک این رابطه می‌توانیم انرژی پتانسیل سامانهٔ جرم ـ فنر را در حرکت هماهنگ ساده، به راحتی برحسب تندی نوسانگر به دست آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی می‌دانیم معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر به صورت $x = A\cos(\omega t)$ است که با مقایسهٔ آن با رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال داریم:

$$x = ۰/۰۴\cos(۵\pi t) \Rightarrow A = ۰/۰۴\ m\ ,\ \omega = ۵\pi\ rad/s$$

در ادامه برای بررسی انرژی پتانسیل به کمک تندی نوسانگر، به کمک رابطهٔ $U = \frac{۱}{۲}m(v_{max}^۲ - v^۲)$ داریم:

$$U = \frac{۱}{۲}m(v_{max}^۲ - v^۲) \xrightarrow{v=\frac{۱}{۲}v_{max}} U = \frac{۱}{۲}m(v_{max}^۲ - \frac{۱}{۴}v_{max}^۲) = \frac{۳}{۸}mv_{max}^۲$$

$$\xrightarrow[U=۱۵\ mJ=۱۵\times۱۰^{-۳}\ J]{v_{max}=A\omega=۰/۰۴\times۵\pi=\frac{\pi}{۵}\ m/s\ ,\ \pi\simeq\sqrt{۱۰}} ۱۵\times۱۰^{-۳} = \frac{۳}{۸}\times m\times\frac{۲}{۵} \Rightarrow m = ۰/۱\ kg = ۱۰۰\ g$$

۴۷ کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) امواج مکانیکی و امواج الکترومغناطیسی منشأ یکسان اما مشخصه‌های متفاوتی دارند.

۲) موج رادیویی، نوعی موج الکترومغناطیسی و موج صوتی، نوعی موج مکانیکی است.

۳) در موج‌های عرضی جابه‌جایی هر جزء نوسان‌کننده از محیط، عمود بر جهت حرکت موج است.

۴) در موج‌های پیش‌رونده، اجزای نوسان‌کنندهٔ محیط، از ناحیه‌ای به ناحیهٔ دیگر منتقل نمی‌شوند.

مشاوره این مدل سؤالات که دقیقاً از متن کتاب درسی هستند، هم برای کنکور و هم برای امتحان نهایی به شدت مهم هستند. توصیه می‌کنم حتماً متن کتاب درسی را به دقت مطالعه کنید تا در پاسخگویی به این مدل سؤالات موفق باشید.

Hint به کمک متن کتاب درسی و دسته‌بندی خوبی از انواع موج، به راحتی می‌تونید از پس این سؤال بربیاید.

درس Box

معمولاً موج‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنند:

۱) **موج‌های مکانیکی**: موج‌های مکانیکی مانند موج‌های روی سطح آب و موج‌های صوتی، برای انتشار خود نیاز به یک محیط مادی دارند.

۲) **موج‌های الکترومغناطیسی**: موج‌های الکترومغناطیسی مانند نور مرئی، موج‌های رادیویی و تلویزیونی، میکروموج و پرتوهای x، برای انتشار خود به محیط مادی نیاز ندارند و در خلأ نیز منتشر می‌شوند.

به رغم متفاوت‌بودن منشأ امواج مکانیکی و الکترومغناطیسی، همگی آن‌ها مشخصه‌های یکسانی دارند و رفتار آن‌ها از قاعده‌های کلی پیروی می‌کند که در هر پدیدهٔ موجی برقرار است.

به موج‌هایی که از یک نقطه به نقطهٔ دیگر حرکت کرده و انرژی را با خود منتقل می‌کنند، موج‌های پیش‌رونده می‌گوییم. امیدوارم حواستان باشد که این موج است که از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر حرکت می‌کند، نه ماده‌ای که موج در آن حرکت می‌کند؛ پس با پیشروی موج، اجزای محیط به همراه موج منتقل نمی‌شوند.

انواع موج‌های پیش‌رونده:

۱) **عرضی**: اگر جابه‌جایی هر جزء نوسان‌کننده‌ای از محیط، عمود بر جهت انتشار موج باشد، به آن موج عرضی می‌گوییم.

۲) **طولی**: اگر جابه‌جایی هر جزء نوسان‌کننده‌ای از محیط، در راستای جهت انتشار موج باشد، به آن موج طولی می‌گوییم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس که از متن کتاب درسی ارائه شده، گزینهٔ (۱) نادرست است.

۴۸ زمین‌لرزه‌ای در فاصلهٔ ۷۲۹کیلومتری از یک لرزه‌نگار رخ داده است. موج **S** این زمین‌لرزه **۷۲ s** بعد از موج **P** توسط لرزه‌نگار دریافت می‌شود. اگر نسبت تندی موج **P** به موج **S** برابر $\frac{۹}{۵}$ باشد، تندی موج **P** چند کیلومتر بر ثانیه است؟

۱) ۹

۲) ۸/۱

۳) ۴/۵

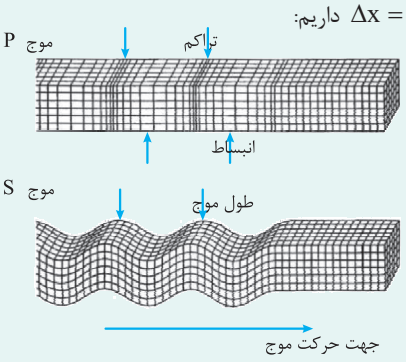
۴) ۴/۲

مشاوره این سؤال دقیقاً مشابه یکی از مثال‌های کتاب درسی است و با توجه به این موضوع، هم برای کنکور و هم برای امتحان نهایی می‌تونه مطرح بشه. در حل این سؤال باید بتونی مطالب مربوط به حرکت با سرعت ثابت رو با مفاهیم مطرح‌شده برای موج‌های طولی و عرضی ترکیب کنی تا از پس حل سؤال بربیای.

Hint با توجه به این‌که در یک محیط، تندی موج ثابت است، به کمک جابه‌جایی با سرعت ثابت، مدت‌زمان مربوط به حرکت هر کدام از موج‌ها رو پیدا کن و به کمک اختلاف آن‌ها مسئله رو حل کن.

درس Box امواج لرزه‌ای، موج‌های مکانیکی هستند که از لایه‌های زمین عبور می‌کنند. یکی از منشأهای مهم امواج لرزه‌ای، زمین‌لرزه‌ها هستند. دو نوع از امواج لرزه‌ای، امواج اولیهٔ P و امواج ثانویهٔ S هستند که تندی موج‌های P بیشتر از تندی موج‌های S بوده و سریع‌تر توسط لرزه‌نگار دریافت می‌شوند.

اگر فاصلهٔ لرزه‌نگار از محل وقوع زمین‌لرزه برابر Δx باشد، به کمک رابطهٔ $\Delta x = vt$ داریم:



مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا موج P توسط لرزه‌نگار دریافت شود: $t_P = \frac{\Delta x}{v_P}$

مدت زمانی که طول می‌کشد تا موج S توسط لرزه‌نگار دریافت شود: $t_S = \frac{\Delta x}{v_S}$

اختلاف زمان رسیدن این دو موج: $\Delta t = t_S - t_P = \frac{\Delta x}{v_S} - \frac{\Delta x}{v_P} \Rightarrow \Delta t = (\frac{v_P - v_S}{v_P v_S})\Delta x$

پاسخ خیلی تشریحی اگر تندی موج P را با v_P و تندی موج S را با v_S نشان دهیم، به کمک رابطهٔ $\Delta x = vt$، اختلاف زمان رسیدن دو موج را به دست می‌آوریم:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_S} - \frac{\Delta x}{v_P} = (\frac{v_P - v_S}{v_P v_S})\Delta x \xrightarrow{\Delta t = ۷۲\,s,\ \Delta x = ۷۲۹\,km,\ v_S = \frac{۵}{۹}v_P} ۷۲ = (\frac{v_P - \frac{۵}{۹}v_P}{v_P \times \frac{۵}{۹}v_P})۷۲۹ \Rightarrow ۷۲ = (\frac{۴}{۵v_P})۷۲۹$$

$$\Rightarrow v_P = ۸/۱\,km/s$$

۴۹ فنری به جرم $0/6\ kg$ و طول $4/5\ m$ را با نیروی $1/2\ N$ می‌کشیم. اگر موج عرضی ایجادشده با بسامد $6\ Hz$ در طول فنر منتشر شود، طول موج آن چند متر است؟

۱) ۲

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{3}{2}$

مشاوره این سؤال مشابه یکی از مثال‌های کتاب درسی بوده و جزء بهترین کاندیداهای امتحان نهایی است. البته برای کنکور هم سؤال مناسبی محسوب می‌شود. مهم‌ترین نکته این است که ترکیب دو رابطهٔ $v=\frac{\lambda}{T}$ و $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ مورد علاقهٔ خیلی از طراحان است و شما باید به این مورد حواستان باشد.

Hint کافیه رابطهٔ کلی تندی انتشار موج رو با رابطهٔ مربوط به تندی انتشار موج در فنر یا ریسمان کشیده‌شده ترکیب کنی و تمام.

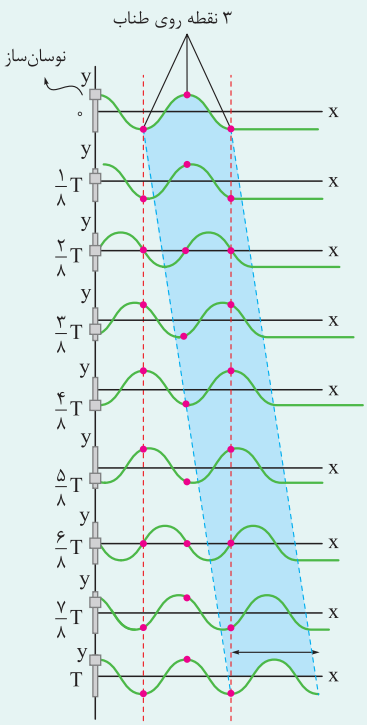
درس Box

شکل روبه‌رو، نشان‌دهندهٔ نقش یک موج عرضی در ۹ لحظهٔ متفاوت در مدت یک دورهٔ تناوب (T) است. با توجه به شکل، معلوم است که در مدت یک دورهٔ تناوب، هر ذره از محیط یک نوسان کامل انجام داده و موج به اندازهٔ یک طول موج (λ) پیشروی کرده است؛ پس تندی انتشار موج عرضی را می‌توانیم با رابطهٔ $v=\frac{\lambda}{T}$ یا $v=\lambda f$ به دست آوریم. از طرفی هم می‌دانیم تندی انتشار موج به جنس و ویژگی‌های محیط انتشار بستگی دارد. مثلاً تندی انتشار موج عرضی در یک فنر، ریسمان یا تار کشیده‌شده به نیروی کشش (F) و چگالی خطی جرم $(\mu=\frac{m}{L})$ بستگی دارد و از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ به دست می‌آید.

F: بزرگی نیروی کشش برحسب نیوتون (N)

μ: چگالی خطی جرم برحسب کیلوگرم بر متر (kg/m)

v: تندی انتشار موج عرضی در یک فنر، ریسمان یا تار کشیده‌شده (m/s)



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: چگالی خطی جرم را به دست می‌آوریم:

$$\mu=\frac{m}{L}=\frac{0/6}{4/5}=\frac{2}{15}\ kg/m$$

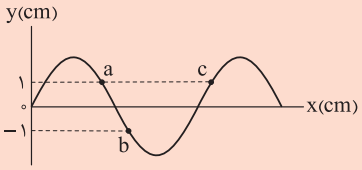
گام دوم: به کمک رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$، تندی انتشار موج عرضی را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{1/2}{\frac{2}{15}}}=\sqrt{0/6\times 15}=3\ m/s$$

گام سوم: به کمک رابطهٔ $v=\lambda f$ داریم:

$$v=\lambda f \Rightarrow 3=\lambda\times 6 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}\ m$$

۵۰ شکل زیر نقش یک موج مکانیکی سینوسی را در لحظه‌ای از زمان نشان می‌دهد. موج در خلاف جهت محور x در طول یک ریسمان کشیده‌شده حرکت می‌کند. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ ذرات a، b و c درست است؟



الف) فاصلهٔ دو ذرهٔ a و c برابر طول موج است.

ب) فاصلهٔ دو ذرهٔ c و b برابر نصف طول موج است.

پ) حرکت ذرهٔ a برخلاف دو ذرهٔ دیگر، کندشونده است.

ت) شتاب ذرهٔ b برخلاف شتاب دو ذرهٔ دیگر، در جهت محور y است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

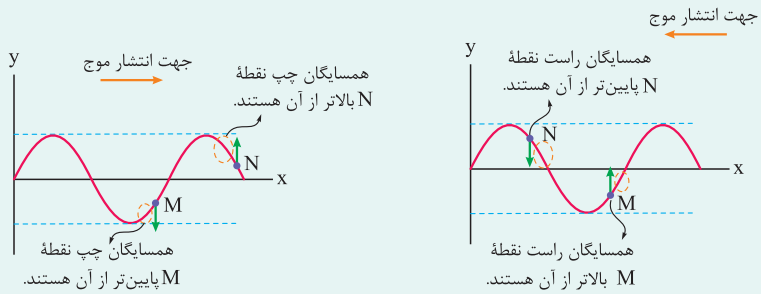
مشاوره مشابه این سؤال بارها در کنکورهای گذشته مطرح شده که نشان از اهمیت بالای این مبحث داره و از طرفی هم این مدل سؤال می‌تونه در امتحان نهایی هم مطرح بشه، چون مشابه یکی از تمرینات کتاب درسی هست.

درس Box

به هنگام انتشار موج، برای تعیین جهت نوسان یک نقطه از محیط داریم:

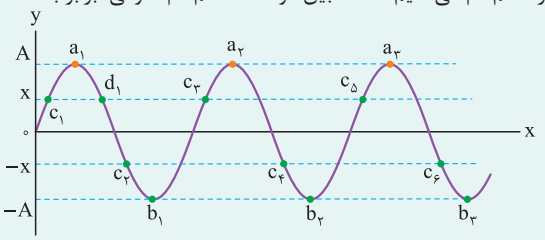
۱) اگر موج به سمت راست در حال انتشار باشد، نقطهٔ مورد نظر از نقاط همسایگی چپ خود تقلید می‌کند. اگر همسایگان چپ این نقطه، بالاتر باشند، نقطهٔ مورد نظر نیز بالا می‌رود و اگر همسایگان چپ این نقطه، پایین‌تر باشند، نقطهٔ مورد نظر پایین می‌رود.

۲) اگر موج به سمت چپ در حال انتشار باشد، نقطهٔ مورد نظر از نقاط همسایگی راست خود تقلید می‌کند. اگر همسایگان راست این نقطه، بالاتر باشند، نقطهٔ مورد نظر نیز بالا می‌رود و اگر همسایگان راست این نقطه، پایین‌تر باشند، نقطهٔ مورد نظر پایین می‌رود.



در نقش موج نشان داده شده از نوسانات ذرات محیط، اگر موقعیت نوسانی و جهت نوسان دو نقطه از محیط کاملاً مشابه باشد، آن دو نقطه را هم‌گام می‌نامیم. فاصلهٔ بین دو نقطهٔ هم‌گام متوالی برابر با یک طول موج است، اما اگر هم موقعیت نوسانی و هم جهت نوسان دو نقطه از محیط قرینهٔ هم باشند، آن دو نقطه را ناهم‌گام می‌نامیم. فاصلهٔ بین دو نقطهٔ ناهم‌گام متوالی، برابر با نصف طول موج است.

با توجه به نقش موج مقابل داریم:



۱) نقاط هم‌گام عبارت‌اند از:

الف) a_1، a_2 و a_3 ب) b_1، b_2 و b_3 پ) c_1، c_3 و c_5 ت) c_2، c_4 و c_6.

۲) نقاط ناهم‌گام عبارت‌اند از:

الف) هر یک از نقاط a_1، a_2 و a_3 به ترتیب با هر یک از نقاط b_1، b_2 و b_3

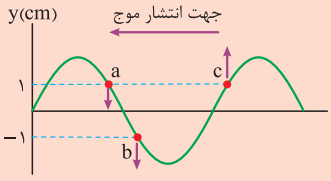
ب) هر یک از نقاط c_1، c_3 و c_5 به ترتیب با هر یک از نقاط c_2، c_4 و c_6.

امیدوارم حواستان باشد که بعضی از نقاط هم مثل c_1 و d_1 نه هم‌گام هستند و نه ناهم‌گام.

نکته در حرکت نوسانی، شتاب ذره و مکان نوسانی آن همواره ناهم‌علامت هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به نقش موج مقابل، تمام موارد داده‌شده را بررسی می‌کنیم.



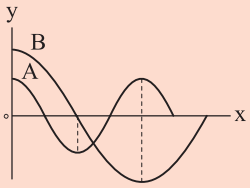
مورد «الف» نادرست است؛ زیرا دو ذرهٔ a و c هم‌گام نیستند و فاصلهٔ آن‌ها نمی‌تواند برابر طول موج باشد.

مورد «ب» درست است؛ زیرا دو ذرهٔ b و c ناهم‌گام متوالی‌اند و فاصلهٔ بین آن‌ها برابر نصف طول موج است.

مورد «پ» نادرست است؛ زیرا ذرهٔ a در حال نزدیک‌شدن به مرکز نوسان بوده و حرکت آن تندشونده است.

مورد «ت» درست است؛ زیرا ذرهٔ b در مکان نوسانی منفی بوده و شتاب آن مثبت است، اما دو ذرهٔ a و c در مکان نوسانی مثبت هستند و شتاب آن‌ها در خلاف جهت محور y است.

۵۱ نمودار جابه‌جایی ـ مکان دو موج مکانیکی **A** و **B** که در یک محیط در حال انتشارند، به شکل زیر است. در مدتی که چشمهٔ موج **A**، ۴۸ نوسان انجام می‌دهد، چشمهٔ موج **B** چند نوسان انجام می‌دهد؟



۱) ۱۲
۲) ۲۴
۳) ۳۶
۴) ۹۶

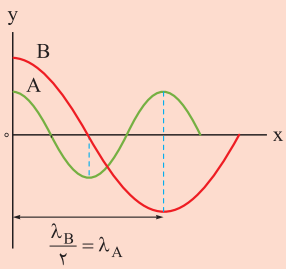
مشاوره این مدل سؤالات صرفاً مختص کنکور و آزمون‌های آزمایشی است، اما جالب است بدانید که مشابه این سؤال با انواع مختلف محتواها، بارها تکرار شده است.

Hint محیط انتشار دو موج یکسانه، پس تندی انتشارشون رو برابر بذار و به کمک نمودار و نسبت طول موج‌ها، نسبت بسامدها و تعداد نوسان‌ها رو حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی می‌دانیم تندی انتشار موج به ویژگی‌های محیط وابسته است. از طرفی چون دو موج A و B در یک محیط منتشر می‌شوند، پس تندی انتشار دو موج با هم برابر است و داریم:

$$v_A = v_B \xrightarrow{v=\lambda f} \lambda_A f_A = \lambda_B f_B \quad (1)$$

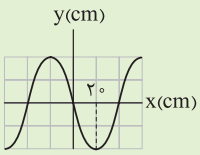
از طرفی با توجه به نقش موج داده‌شده داریم:

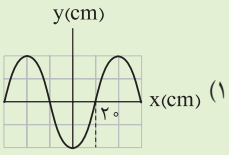


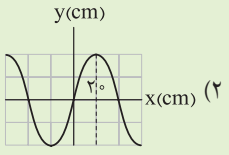
$$\xrightarrow{(1)} \frac{\lambda_B}{2} f_A = \lambda_B f_B \Rightarrow f_A = 2f_B \xrightarrow[\text{n: تعداد نوسان‌های کامل}]{f=\frac{n}{t},\ t_A=t_B} n_A = 2n_B \Rightarrow 48 = 2n_B \Rightarrow n_B = 24$$

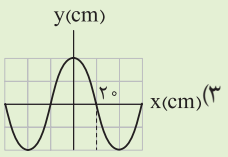
۵۲ نقش یک موج عرضی منتشرشده در یک ریسمان کشیده‌شده، در مبدأ زمان به شکل زیر است. موج با تندی $۴\ m/s$ در جهت محور x حرکت می‌کند. نقش موج در لحظهٔ $t = ۰/۱\ s$ به صورت کدام‌یک از شکل‌های زیر است؟

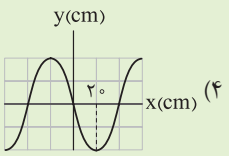
مشاوره این سؤال مشابه یکی از تمرینات کتاب درسی هست و به شدت احتمال مطرح‌شدنش در امتحان نهایی بالا است، هرچند که برای کنکور هم می‌تونه سؤال خوبی محسوب بشه؛ پس حواست به کتاب درسی باشد



۱) 

۲) 

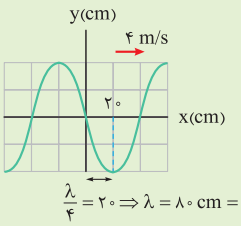
۳) 

۴) 

Hint به کمک رابطهٔ تندی موج و اطلاعات روی شکل، دورهٔ تناوب رو به دست بیار و با یک نسبت ساده بین زمان و دورهٔ تناوب، میزان پیشروی موج و شکل جدید نقش موج رو حساب کن.

درس Box وقتی می‌خواهیم در یک مدت زمان معین (Δt) میزان پیشروی موج (Δx) را به دست آوریم، به کمک تناسب $\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T}$، میزان پیشروی موج را پیدا می‌کنیم. اگر موج در جهت محور x منتشر شود، محور نوسان (y) را به اندازهٔ Δx به چپ منتقل می‌کنیم و اگر موج در خلاف جهت محور x منتشر شود، محور y را به اندازهٔ Δx به راست منتقل می‌کنیم تا به نقش جدید موج برسیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به نمودار نقش موج مقابل، در لحظهٔ صفر ثانیه داریم:

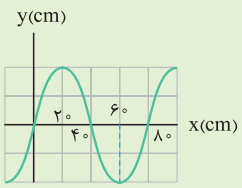


$$\frac{\lambda}{۴} = ۲۰ \Rightarrow \lambda = ۸۰\ cm = ۰/۸\ m$$

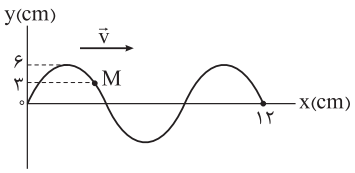
$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow ۴ = \frac{۰/۸}{T} \Rightarrow T = \frac{۰/۸}{۴} = ۰/۲\ s \Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{۰/۱}{۰/۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T}} \frac{\Delta x}{۸۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \Delta x = ۴۰\ cm$$

پس محور y را به اندازهٔ $۴۰\ cm$ به سمت چپ منتقل می‌کنیم و داریم:



۵۳ نقش یک موج عرضی در سیمی به چگالی خطی $0/8\ g/cm$ و نیروی کشش $128\ N$ در لحظه‌ای به شکل زیر است. چند میلی‌ثانیه پس از این لحظه، برای اولین بار، تندی ذرهٔ M بیشینه می‌شود؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

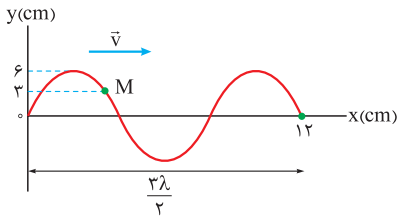
۳) $\frac{۱}{۶}$

۴) $\frac{۵}{۶}$

مشاوره در این مدل سؤالات، این‌که به زمان‌های خاص در نوسان مسلط باشین، می‌تونه سرعت حل شما رو افزایش بده. از طرفی هم این مدل سؤال خیلی مهم و پرتکراره و حل دقیق و یادگیری کاملش توصیه می‌شه.

Hint به کمک رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ تندی انتشار موج عرضی و دورهٔ تناوب رو حساب کن و با اطلاعات روی نمودار، نوسان نقطهٔ M رو تحلیل کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به کمک اطلاعات نمودار نقش موج مقابل، داریم:



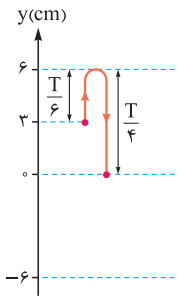
$$\frac{۳\lambda}{۲}=۱۲ \Rightarrow \lambda=۸\ cm=۰/۰۸\ m$$

گام دوم: می‌دانیم تندی انتشار موج عرضی در یک طناب کشیده‌شده از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ به دست می‌آید و داریم:

$$\mu=۰/۸\ g/cm=۰/۸\times\frac{۱۰^{-۳}\ kg}{۱۰^{-۲}\ m}=۸\times۱۰^{-۲}\ kg/m$$

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{۱۲۸}{۸\times۱۰^{-۲}}}=۴۰\ m/s \xrightarrow{v=\frac{\lambda}{T}\ ,\ \lambda=۰/۰۸\ m} ۴۰=\frac{۰/۰۸}{T} \Rightarrow T=۲\times۱۰^{-۳}\ s=۲\ ms$$

گام سوم: با توجه به نمودار نقش موج، چون موج در جهت محور x در حال انتشار است، پس نقطهٔ M از همسایگان چپ خود که بالاترند تقلید کرده و به سمت بالا در حال حرکت است؛ بنابراین برای این‌که تندی ذرهٔ M بیشینه شود، باید مسیر نوسانی روبه‌رو طی شود:



$$\Rightarrow t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴}=\frac{۵T}{۱۲} \xrightarrow{T=۲\ ms} t=\frac{۵}{۱۲}\times۲=\frac{۵}{۶}\ ms$$

گول نخوری اگر جابه‌جایی ذرهٔ M را برعکس بگیری، به گزینهٔ (۳) می‌رسی و یا اگر در استفاده از نکات مربوط به مدت‌زمان‌ها اشتباه کنی و به جای $\frac{T}{۶}$، $\frac{T}{۱۲}$ بنویسی، به گزینهٔ (۱) می‌رسی و حسابی توی دام گزینه‌ها میفتی.

۵۴ چشمهٔ صوتی در یک فضای باز، امواج صوتی پخش می‌کند و تراز شدت صوت در مکانی به فاصلهٔ ۵۰متری از این چشمه ۹۰ دسی‌بل است. به ترتیب از راست به چپ، توان چشمه و آهنگ متوسط انتقال انرژی صوتی از هر سانتی‌مترمربع از سطحی که در این مکان، عمود بر مسیر انتشار صوت قرار دارد، چند وات است؟ ($I_{\circ} = ۱۰^{-۱۲}\ W/m^۲$ ، $\pi = ۳$ و اتلاف انرژی ناچیز است.)

منظور از آهنگ متوسط انتقال انرژی، همان توان متوسط است.

۱) ۳۰ ، $۱۰^{-۷}$

۲) ۳۰ ، $۱۰^{-۳}$

۳) $۷/۵$ ، $۱۰^{-۷}$

۴) $۷/۵$ ، $۱۰^{-۳}$

Hint به کمک رابطهٔ تراز شدت صوت، شدت صوت رو پیدا کن و از روی اون و رابطه‌اش به خواسته‌های سؤال برس.

درس Box چشمهٔ صوت با به حرکت درآوردن لایه‌ای از محیط که در تماس مستقیم با چشمه است، انرژی صوت را به صورت پی‌درپی از ناحیه‌ای به ناحیهٔ دیگر منتقل می‌کند و به این ترتیب انرژی در تمام جهت‌ها منتشر شده و به محیط داده می‌شود. شدت یک موج صوتی (I) در یک سطح، برابر با آهنگ متوسط انرژی‌ای است که توسط موج به واحد سطح، عمود بر راستای انتشار صوت می‌رسد و یا از آن عبور می‌کند و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$I = \frac{P_{av}}{A} \xrightarrow{\text{اگر سطح مورد نظر کروی باشد}} I = \frac{P_{av}}{۴\pi r^۲}$$

P_{av} : آهنگ متوسط انتقال انرژی برحسب وات (W)

A : مساحت سطحی که صوت با آن برخورد می‌کند، برحسب متر مربع $(m^۲)$

I : شدت صوت برحسب وات بر متر مربع $(W/m^۲)$

به جای شدت صوت، ساده‌تر است که از تراز شدت صوت (تراز صوتی) استفاده کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta = ۱۰\log\left(\frac{I}{I_{\circ}}\right)$$

$I_{\circ}$: شدت صوت مرجع برحسب وات بر مترمربع $(W/m^۲)$

β : تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل (dB)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ چون چشمهٔ صوت در یک فضای باز، امواج صوتی را پخش می‌کند، در فاصلهٔ ۵۰متری، توان صوت بر سطح کره‌ای به شعاع ۵۰ متر توزیع می‌شود و داریم:

$$\beta = ۱۰\log\left(\frac{I}{I_{\circ}}\right) \Rightarrow ۹۰ = ۱۰\log\left(\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\right) \Rightarrow \frac{I}{۱۰^{-۱۲}} = ۱۰^۹ \Rightarrow I = ۱۰^{-۳}\ W/m^۲$$

$$\xrightarrow[r=۵۰\,m\,,\,\pi=۳]{I=\frac{P_{av}}{۴\pi r^۲}} ۱۰^{-۳} = \frac{P_{av}}{۴\times۳\times(۵۰)^۲} \Rightarrow P_{av} = ۳۰\ W$$

در ادامه، حواستان باشد که منظور از آهنگ متوسط انتقال انرژی صوتی از هر سانتی‌متر مربع از سطحی که در این مکان، عمود بر مسیر انتشار صوت قرار دارد، همان توان متوسط در سطح مورد نظر است و داریم:

$$I = \frac{P'_{av}}{A'} \Rightarrow ۱۰^{-۳} = \frac{P'_{av}}{۱۰^{-۴}} \Rightarrow P'_{av} = ۱۰^{-۷}\ W$$

۵۵ دامنهٔ چشمهٔ صوت **A**، ۲ برابر دامنهٔ چشمهٔ صوت **B** و بسامد چشمهٔ صوت **A**، ۴ برابر بسامد چشمهٔ صوت **B** است. اگر تراز شدت صوت، در فاصلهٔ **d** از چشمهٔ **A** برابر β_1 و در فاصلهٔ **5d** از چشمهٔ صوت **B** برابر β_2 باشد، $\beta_2-\beta_1$ برابر چند دسی‌بل است؟ $(\log 2 = 0/3)$

۱) ۳۲

۲) -۳۲

۳) ۳۷

۴) -۳۷

مشاوره توی این سؤال، سه مفهوم توان، شدت صوت و تراز شدت صوت ترکیب شدند تا بفهمیم اختلاف تراز شدت صوت در دو حالت مختلف با چه روالی حل می‌شه که بالطبع شما هم باید حداقل یک بار خودتون این روند رو طی کنین تا این‌طور نباشه که فقط به دونستن نتیجهٔ آخر اکتفا کنین. به این هم دقت کنین که این مدل سؤال، جزء سؤال‌های پرتکراره.

Hint اگر بتونی مفاهیم مربوط به توان، شدت صوت و تراز شدت صوت رو خوب با هم ترکیب کنی، می‌تونی از پس این سؤال بربیای.

درس Box در ادامهٔ درس‌باکس تست قبلی، برای مقایسهٔ تراز شدت صوت داریم:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\left(\frac{I_2}{I_0}\right)-10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right)\Rightarrow \beta_2-\beta_1=10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)\quad (1)$$

با توجه به رابطهٔ $I=\frac{P_{av}}{4\pi r^2}$، چون توان متوسط موج با مربع دامنه و مربع بسامد متناسب است، می‌توانیم بگوییم که شدت صوت با مربع دامنه و مربع بسامد و نیز با وارون مربع فاصله متناسب است و داریم:

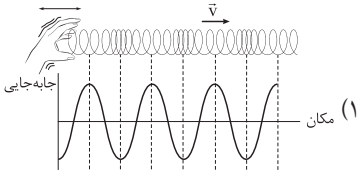
$$I\propto\frac{A^2f^2}{r^2}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{A_2}{A_1}\times\frac{f_2}{f_1}\times\frac{r_1}{r_2}\right)^2\xrightarrow{(1)}\beta_2-\beta_1=10\log\left(\frac{A_2}{A_1}\times\frac{f_2}{f_1}\times\frac{r_1}{r_2}\right)^2\Rightarrow\Delta\beta=20\log\left(\frac{A_2}{A_1}\times\frac{f_2}{f_1}\times\frac{r_1}{r_2}\right)$$

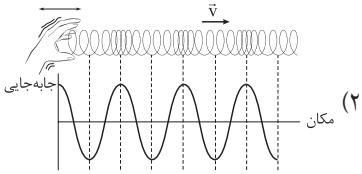
پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به رابطهٔ به‌دست‌آمده در درس‌نامه داریم:

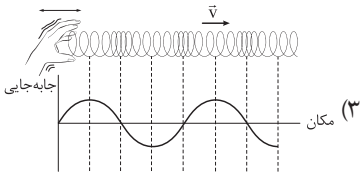
$$\Delta\beta=20\log\left(\frac{A_B}{A_A}\times\frac{f_B}{f_A}\times\frac{r_A}{r_B}\right)=20\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right)=20\log\left(\frac{1}{40}\right)=-20\log 40$$

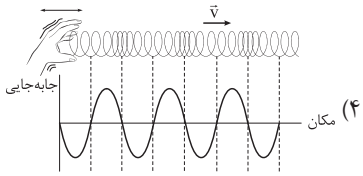
$$=-20(\log 4+\log 10)=-20(2\log 2+1)=-20(0/6+1)=-32\ \text{dB}$$

۵۶ نمودار جابه‌جایی ـ مکان موج طولی منتشرشده در یک فنر به صورت کدام‌یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱)


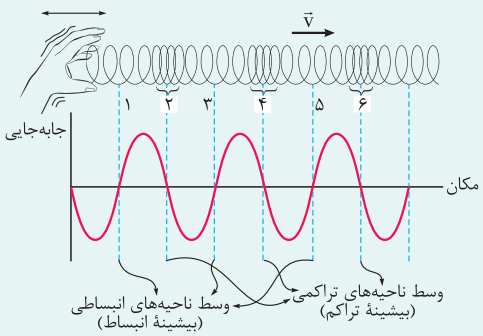
۲)


۳)


۴)


Hint به کمک ناحیه‌های تراکمی و انبساطی متوالی و نحوهٔ جابه‌جایی حلقه‌های فنر در این ناحیه‌ها، این تست به راحتی حل می‌شه.

درس Box

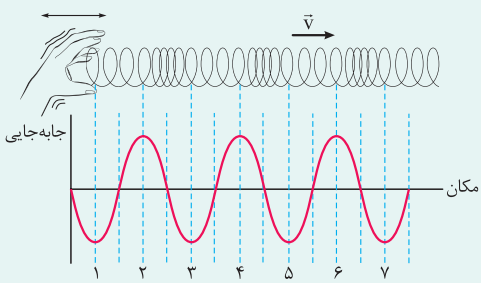


شکل مقابل، نشان‌دهندهٔ یک موج طولی است که به کمک انتشار ناحیه‌های تراکمی و انبساطی متوالی ایجاد شده است.

ناحیه‌های (۱)، (۳) و (۵) مربوط به ناحیه‌های انبساطی هستند که در وسط این ناحیه‌ها، بیشینهٔ انبساط رخ داده و جزئی از فنر که در قسمت بیشینهٔ انبساط است، در حال عبور از مرکز نوسان بوده (جابه‌جایی‌اش صفر است) و دارای تندی بیشینه است.

ناحیه‌های (۲)، (۴) و (۶) مربوط به ناحیه‌های تراکمی هستند که در وسط این ناحیه‌ها، بیشینهٔ تراکم رخ داده و جزئی از فنر که در قسمت بیشینهٔ تراکم است، در حال عبور از مرکز نوسان بوده (جابه‌جایی‌اش صفر است) و دارای تندی بیشینه است.

در مرز بین ناحیهٔ تراکمی و انبساطی (وسط تراکم بیشینه و انبساط بیشینهٔ متوالی) دارای حداکثر جابه‌جایی خواهیم بود و شکل موج به صورت قله یا دره است که با توجه به جهت جابه‌جایی حلقه‌های فنر، اگر در جهت محور x، از ناحیهٔ انبساطی به ناحیهٔ تراکمی حرکت کنیم، در مرز آن‌ها قله خواهیم داشت و اگر از ناحیهٔ تراکمی به ناحیهٔ انبساطی حرکت کنیم، در مرز آن‌ها دره خواهیم داشت. (حتماً به کمک تجسم جهت جابه‌جایی حلقه‌ها، سعی کنین کاملاً به این موضوع مسلط بشین).



خط‌چین‌های (۱)، (۳)، (۵) و (۷) مربوط به مرز بین ناحیهٔ تراکمی و ناحیهٔ انبساطی (وسط بیشینهٔ تراکم و بیشینهٔ انبساط) بوده و دره داریم (حداکثر جابه‌جایی در خلاف جهت محور است.) خط‌چین‌های (۲)، (۴) و (۶) نیز مربوط به مرز بین ناحیهٔ انبساطی و ناحیهٔ تراکمی (وسط بیشینهٔ انبساط و بیشینهٔ تراکم) بوده و قله داریم (حداکثر جابه‌جایی در محور y است).

پاسخ خیلی تشریحی ✔ به کمک درس‌باکس کاملی که ارائه شد، انتخاب گزینهٔ (۴) به راحتی ممکن است.

۵۷ یک منبع صوت، صوتی با طول موج معین λ تولید می‌کند. در کدام‌یک از حالت‌های زیر، طول موج دریافتی شنونده، کوتاه‌تر از λ است؟

الف) شنونده از منبع ساکن دور شود.

ب) شنونده به منبع ساکن نزدیک شود.

پ) منبع از شنوندهٔ ساکن دور شود.

ت) منبع به شنوندهٔ ساکن نزدیک شود.

۱) الف و پ ۲) ب و ت ۳) ب ۴) ت

مشاوره در مسائل مربوط به پدیدهٔ دوپلر، وقتی در مورد طول موج دریافتی صحبت می‌شود، ساکن یا متحرک بودن ناظر مهم نیست و فقط ساکن یا متحرک بودن چشمه اهمیت دارد که امیدوارم حواستان به این مورد مهم باشد.

Hint کافیه حواست باشه که وقتی حرف از طول موج دریافتی است، فقط به حرکت چشمه و جلو و عقب چشمه دقت کنی.

درس Box

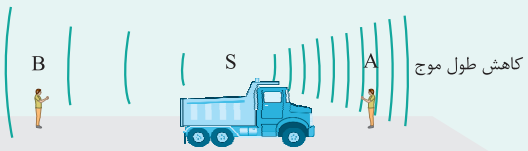
در پدیدهٔ دوپلر، هرگاه چشمهٔ صوت ساکن باشد، طول موج دریافتی توسط ناظر همواره برابر با طول موج چشمه خواهد بود و این موضوع هیچ ربطی به نوع حرکت ناظر یا ساکن‌بودن آن ندارد.

در چشمهٔ صوتی متحرک، اگر چشمه شروع به حرکت به سمت جلو کند، همواره در جلوی چشمه طول موج دریافتی کم‌تر از طول موج چشمه بوده و در عقب چشمه، طول موج دریافتی بزرگ‌تر از طول موج چشمه می‌شود و باز هم این موضوع ربطی به ساکن یا متحرک بودن ناظر ندارد.

$\lambda_A = \lambda_B = \lambda_s$:

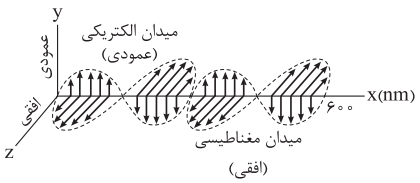


$\lambda_A < \lambda_s < \lambda_B$:



پاسخ خیلی تشریحی ✔ برای این‌که طول موج دریافتی ناظر، کوتاه‌تر از طول موج چشمه باشد، باید چشمهٔ متحرک به ناظر نزدیک شود؛ بنابراین فقط مورد «ت» درست است.

۵۸ شکل زیر، تصویر لحظه‌ای از موجی الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد که با تندی $3\times10^{8}\ m/s$ در حال انتشار است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این موج درست است؟



۱) این موج در ناحیهٔ فروسرخ قرار دارد.

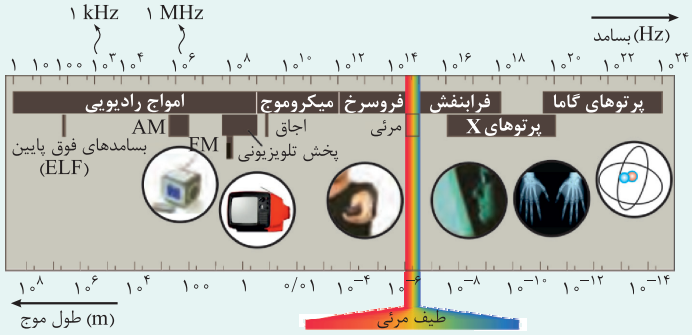
۲) این موج در خلاف جهت محور x در حال انتشار است.

۳) دورهٔ تناوب این موج، $2\times10^{-15}\ s$ است.

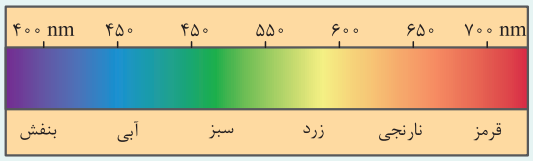
۴) بسامد این موج $10^{3}\ THz$ است.

درس Box

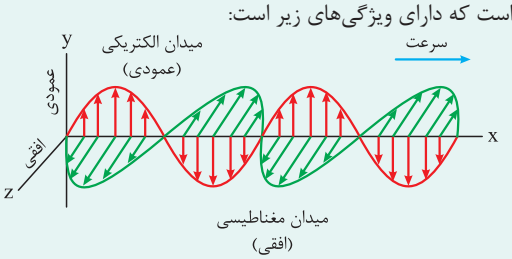
طیف امواج الکترومغناطیسی شامل امواج رادیویی، میکروموج، فروسرخ، طیف نور مرئی، فرابنفش، پرتوهای x و پرتوهای گاما است، که از کم‌ترین بسامد (بیشترین طول موج) تا بیشترین بسامد (کم‌ترین طول موج) گسترده شده‌اند. تمام این امواج، به رغم متفاوت‌بودن روش تولید و کاربردشان، امواج الکترومغناطیسی هستند و همگی با تندی نور در خلأ حرکت می‌کنند و این طیف، یک طیف پیوسته است.



نکته گسترهٔ تقریبی طول موج نور مرئی در خلأ از ۴۰۰ nm (نور بنفش) تا ۷۰۰ nm (نور قرمز) است.



شکل زیر، نشان‌دهندهٔ یک موج الکترومغناطیسی در یک لحظه است که دارای ویژگی‌های زیر است:



۱) میدان الکتریکی $\vec{E}$ همواره عمود بر میدان مغناطیسی $\vec{B}$ است.

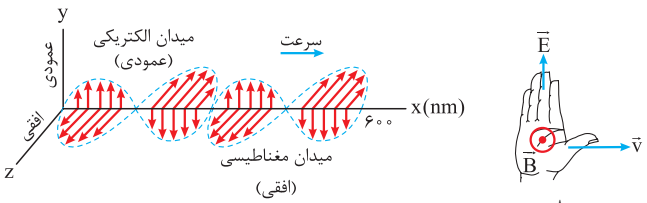
۲) میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ همواره بر جهت حرکت عمودند و در نتیجه موج الکترومغناطیسی یک موج عرضی است.

۳) میدان‌ها با بسامد یکسان و هم‌گام تغییر می‌کنند.

۴) جهت انتشار امواج الکترومغناطیسی از قاعدهٔ دست راست پیروی می‌کند. طوری که اگر چهار انگشت دست راست را طوری در جهت میدان الکتریکی قرار دهیم که میدان مغناطیسی از پشت دست وارد و از کف دست خارج شود، آن‌گاه جهت انگشت شست، همان جهت انتشار موج را نشان می‌دهد.

۵) رابطهٔ $v=\frac{\lambda}{T}=\lambda f$ برای تندی موج، در موج الکترومغناطیسی هم صادق است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به شکل نشان‌داده‌شده داریم:



$$۲\lambda = ۶۰۰ \Rightarrow \lambda = ۳۰۰\ \text{nm} \xrightarrow{c=\lambda f} f = \frac{c}{\lambda} = \frac{۳\times ۱۰^{۸}}{۳۰۰\times ۱۰^{-۹}} = ۱۰^{۱۵}\ \text{Hz} \Rightarrow f = ۱۰^{۳}\ \text{THz}$$

با توجه به طیف الکترومغناطیسی نشان داده‌شده در درس‌باکس، طول موج ۳۰۰ nm یا در واقع فرکانس $۱۰^{۳}$ THz در محدودهٔ فرابنفش است و گزینهٔ (۱) نادرست است. از طرفی هم مطابق قاعدهٔ دست راست، این موج در جهت محور x در حال انتشار بوده و گزینهٔ (۲) نیز نادرست است. برای پیداکردن دورهٔ تناوب هم داریم:

$$T = \frac{۱}{f} = \frac{۱}{۱۰^{۱۵}} = ۱۰^{-۱۵}\ \text{s} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) هم نادرست است.

۵۹ کدام مقایسه دربارهٔ بسامد **(f)**، دوره **(T)**، طول موج **(λ)** و تندی انتشار **(v)** امواج رادیویی **AM** و **FM** در خلأ درست است؟

الف) $T_{AM} > T_{FM}$

ب) $f_{AM} > f_{FM}$

پ) $\lambda_{AM} > \lambda_{FM}$

ت) $v_{AM} > v_{FM}$

۱) ب

۲) الف و پ

۳) ب و ت

۴) الف و پ و ت

مشاوره ریشهٔ طراحی این سؤال برمی‌گردد به شکل مربوط به طیف امواج الکترومغناطیسی در کتاب درسی و نشون می‌ده باید حواست به شکل‌های کتاب درسی و نکاتشون جمع باشه.

Hint اگر شکل مربوط به طیف امواج الکترومغناطیسی رو خوب تجسم کنی، به راحتی می‌تونی این تست رو حل کنی.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به طیف امواج الکترومغناطیسی می‌دانیم که طول موج امواج رادیویی AM، بزرگ‌تر از طول موج امواج رادیویی FM است و نیز بسامد امواج رادیویی AM کوچک‌تر از بسامد امواج رادیویی FM است؛ بنابراین داریم:

$$\lambda_{AM} > \lambda_{FM} \quad , \quad f_{AM} < f_{FM}$$

از طرفی هم با توجه به این‌که تندی تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان است، پس طبق رابطهٔ $c = \frac{\lambda}{T}$ داریم:

$$c_{AM} = c_{FM} \Rightarrow \frac{\lambda_{AM}}{T_{AM}} = \frac{\lambda_{FM}}{T_{FM}} \xrightarrow{\lambda_{AM} > \lambda_{FM}} T_{AM} > T_{FM}$$

بنابراین فقط موارد «الف» و «پ» درست هستند.

۶۰ آشکارسازی برای یک کهکشان، پدیدهٔ انتقال به سرخ را ثبت کرده است. به ترتیب از راست به چپ، فاصلهٔ کهکشان تا آشکارساز و بسامد نور دریافتی آشکارساز، چگونه تغییر می‌کند؟

۱) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
۴) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

Hint کافیه پدیدهٔ دوپلر برای امواج الکترومغناطیسی رو بلد باشی تا این سؤال به راحتی حل بشه.

درس Box می‌دانیم اثر دوپلر برای امواج الکترومغناطیسی نظیر نور و امواج رادیویی هم برقرار است. وقتی چشمهٔ نور از ناظر (آشکارساز) دور می‌شود، طول موج دریافتی ناظر افزایش می‌یابد که به آن انتقال به سرخ می‌گویند و وقتی چشمهٔ نور به ناظر نزدیک می‌شود، طول موج کاهش می‌یابد که به آن انتقال به آبی می‌گویند.



نکته در پدیدهٔ دوپلر برای امواج الکترومغناطیسی، در انتقال به سرخ فرکانس دریافتی ناظر کاهش یافته و در انتقال به آبی فرکانس دریافتی ناظر افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ چون آشکارساز پدیدهٔ انتقال به سرخ را ثبت کرده است، مطابق درس‌باکس، چشمهٔ نور در حال دورشدن از ناظر بوده و فاصلهٔ کهکشان تا آشکارساز افزایش می‌یابد که در نتیجه بسامد نور دریافتی توسط آشکارساز کاهش می‌یابد.

۶۱ عایق بین صفحه‌های خازنی، هوا و اندازهٔ میدان الکتریکی بین صفحه‌ها $۳۰V / mm$ است. اندازهٔ چگالی سطحی بار الکتریکی هر یک از صفحه‌های این خازن در SI کدام است؟ $(\varepsilon_{\circ} = ۹\times۱۰^{-۱۲}\ F / m)$

۱) $۲/۷\times۱۰^{-۷}$

۲) $۲/۷\times۱۰^{-۴}$

۳) ۳×۱۰^{-۷}

۴) ۳×۱۰^{-۴}

مشاوره ارتباط بین فرمول‌ها از جمله مواردیه که موردنظر طراحان کنکوره، باید بتونی هر کمیتی که نداریم رو به کمک رابطه‌های دیگه توی فرمول اصلی جای‌گذاری کنی تا سؤالات این تیپی رو حل کنی.

نکته حواستون باشه چون سؤال چگالی سطحی رو برحسب واحد SI خواسته، پس باید میدان الکتریکی رو برحسب $\frac{V}{m}$ در رابطه قرار دهیم.

Hint برای محاسبهٔ چگالی سطحی نیاز به بار ذخیره‌شده روی صفحه‌ها داریم. پس باید رابطهٔ میدان الکتریکی بین صفحات و بار روی صفحه‌های خازن را پیدا کنیم.

درس Box

- میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{V}{d} \leftarrow \text{میدان الکتریکی } (V/m)$$
$$V \rightarrow \text{اختلاف پتانسیل } (V)$$
$$d \rightarrow \text{فاصلهٔ صفحات خازن } (m)$$

- چگالی سطحی: در اجسام رسانا که بار الکتریکی روی سطح خارجی جسم ذخیره می‌شود، به نسبت بار الکتریکی به سطح رسانا، چگالی سطحی می‌گویند.

$$\delta = \frac{Q}{A} \leftarrow \text{چگالی سطحی } (C/m^{۲})$$
$$Q \rightarrow \text{بار الکتریکی } (C)$$
$$A \rightarrow \text{سطح رسانا } (m^{۲})$$

- ظرفیت خازن به ساختمان خازن وابسته است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$C = \kappa\varepsilon_{\circ}\frac{A}{d} \leftarrow \text{ظرفیت خازن } (F)$$
$$\kappa\varepsilon_{\circ} \uparrow \text{ ثابت دی‌الکتریک}$$
$$A \rightarrow \text{مساحت صفحه‌ها } (m^{۲})$$
$$d \rightarrow \text{فاصلهٔ صفحات خازن } (m)$$
$$\varepsilon_{\circ} \downarrow \text{ (ضریب گذردهی الکتریکی خلأ } F/m)$$

- نسبت اختلاف پتانسیل دو سر خازن به بار الکتریکی روی آن در یک مدار، همواره عدد ثابتی است که برابر با ظرفیت خازن است:

$$C = \frac{Q}{V} \leftarrow \text{ظرفیت خازن } (F)$$
$$Q \rightarrow \text{بار الکتریکی } (C)$$
$$V \rightarrow \text{اختلاف پتانسیل } (V)$$

پاسخ خیلی تشریحی از فرمول $E = \frac{V}{d}$ شروع می‌کنیم و روابط $V = \frac{Q}{C}$ و $C = \kappa\varepsilon_{\circ}\frac{A}{d}$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$E = \frac{V}{d} \xrightarrow{V=\frac{Q}{C}} E = \frac{Q}{Cd} \xrightarrow{C=\kappa\varepsilon_{\circ}\frac{A}{d}} E = \frac{Q}{(\kappa\varepsilon_{\circ}\frac{A}{d})d} = \frac{Q}{\kappa\varepsilon_{\circ}A}$$

می‌دانیم نسبت بار الکتریکی روی صفحه‌های خازن به مساحت سطح صفحه‌ها، همان چگالی سطحی بار الکتریکی است، پس:

$$E = \frac{Q}{\kappa\varepsilon_{\circ}A} = \frac{\delta}{\kappa\varepsilon_{\circ}} \Rightarrow \delta = E\kappa\varepsilon_{\circ}$$

دی‌الکتریک بین صفحه‌ها هوا است، پس $\kappa = ۱$:

$$\delta = ۳۰\times۱۰^{۳}\times۱\times۹\times۱۰^{-۱۲} = ۲/۷\times۱۰^{-۷}\ C/m^{۲}$$

۶۲ خازن تختی را که فاصلهٔ بین صفحه‌های آن ۲mm و فضای بین آن‌ها هوا است، پس از شارژشدن از باتری جدا می‌کنیم. سپس فاصلهٔ بین صفحه‌ها را به ۱۰mm رسانده و فضای بین آن‌ها را با دی‌الکتریکی با ثابت κ پر می‌کنیم. اگر با این کار انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در خازن ۲۵ درصد افزایش یابد، κ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

Hint خازن شارژشده را از باتری جدا می‌کنیم، پس بار ذخیره‌شده روی صفحه‌های خازن ثابت می‌ماند.

درس Box انرژی ذخیره‌شده در خازن از روابط زیر به دست می‌آید که با توجه به داده‌ها و اطلاعات سؤال، باید بررسی کنیم که کدام رابطه به ما کمک می‌کند:

$$U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}VQ$$

U : انرژی خازن (J)

C : ظرفیت خازن (F)

V : اختلاف پتانسیل (V)

Q : بار ذخیره‌شده (C)

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به ثابت‌بودن Q، از رابطهٔ نسبتی انرژی به صورت $U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}U_2=U_1+0/25U_1\\ U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{U_2}{U_1}=(\frac{Q_2}{Q_1})^2\times\frac{C_1}{C_2}\xrightarrow{Q:\text{ثابت}}1/25=\frac{C_1}{C_2}$$

$$\xrightarrow{C=\kappa\varepsilon_0\frac{A}{d}}1/25=\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\times\frac{d_2}{d_1}=\frac{1}{\kappa_2}\times\frac{10}{2}\Rightarrow\kappa_2=\frac{10}{2\times1/25}=\frac{10}{2/5}=4$$

یه‌جور دیگه از همون اول می‌تونیم بگیم $C\propto\frac{\kappa}{d}$ و $U\propto\frac{1}{C}$ پس $U\propto\frac{d}{\kappa}$:

$$\frac{U_2}{U_1}=1/25=\frac{d_2}{d_1}\times\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\Rightarrow1/25=\frac{10}{2}\times\frac{1}{\kappa_2}\Rightarrow\kappa_2=4$$

۶۳ ولتاژ دو سر خازنی را $۳۰V$ افزایش می‌دهیم. با این کار بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن $۱۲۰\mu C$ و انرژی الکتریکی‌ذخیره‌شده در آن $۴/۲mJ$ افزایش می‌یابد. بار نهایی ذخیره‌شده در خازن چند میکروکولن است؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۲۰۰

Hint در نظر داشته باشید که با تغییر ولتاژ و جریان، ظرفیت خازن تغییر نمی‌کند. برای حل، کافیه داده‌هایی که نداریم رو برحسب داده‌هایی که داریم، توی فرمول $U=\frac{۱}{۲}CV^۲$ جای‌گذاری کنیم تا به خواستهٔ سؤال برسیم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** از رابطهٔ $C=\frac{Q}{V}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} C=\frac{Q_۱}{V_۱} \Rightarrow Q_۱=CV_۱ \\ Q_۲=CV_۲ \Rightarrow Q_۲=C(V_۱+۳۰)=CV_۱+۳۰C \end{array}\right\} \Rightarrow Q_۲=Q_۱+۳۰C \Rightarrow Q_۲-Q_۱=۳۰C \quad (۱)$$

گام دوم: طبق داده‌های سؤال، بار الکتریکی خازن $۱۲۰\mu C$ افزایش یافته، پس:

$$Q_۲-Q_۱=۱۲۰ \xrightarrow{(۱)} ۱۲۰=۳۰C \Rightarrow C=۴\mu F$$

گام سوم: رابطهٔ انرژی خازن را در هر دو حالت می‌نویسیم و آن‌ها را از هم کم می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} U_۱=\frac{۱}{۲}\frac{Q_۱^۲}{C} \\ U_۲=\frac{۱}{۲}\frac{Q_۲^۲}{C} \end{array}\right\} \Rightarrow U_۲-U_۱=\frac{۱}{۲C}(Q_۲^۲-Q_۱^۲) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} U_۲-U_۱=\frac{۱}{۲C}(Q_۲-Q_۱)(Q_۲+Q_۱)$$

$$\Rightarrow ۴/۲\times۱۰^{-۳}=\frac{۱}{۲\times۴}(۱۲۰)(Q_۲+Q_۱) \Rightarrow Q_۲+Q_۱=\frac{۴/۲\times۱۰^{-۳}\times۲\times۴}{۱۲۰}=۲۸۰\mu C$$

(دقت کنید چون سؤال بار نهایی ذخیره‌شده را برحسب میکروکولن می‌خواهد، پس انرژی خازن را به میکروژول تبدیل کردیم.)

گام سوم: از حل دستگاه معادلات زیر، مقدار $Q_۲$ به دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l} Q_۲+Q_۱=۲۸۰ \\ Q_۲-Q_۱=۱۲۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲Q_۲=۴۰۰ \Rightarrow Q_۲=۲۰۰\mu C$$

۶۴ مساحت مقطع یک ریل فلزی $48cm^2$ است. مقاومت $16km$ از این ریل چند اهم است؟ (مقاومت ویژهٔ فلز $3\times10^{-5}\Omega.cm$ است.)

۱) ۱
۲) ۰/۰۱
۳) ۱۰۰
۴) ۱۰

مشاوره توی سؤال‌هایی که فقط یه جای‌گذاری است، عجله نکنید و حتماً با دقت تمام یکاها را چک کنید.

Hint فقط کافیه توی فرمول محاسبهٔ مقاومت، داده‌ها رو برحسب یکاهای SI جاگذاری کنیم.

درس Box مقاومت الکتریکی یک رسانا به دمای رسانا و ساختمان (ابعاد و جنس) آن وابسته است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$R=\rho\frac{L}{A}$$

R: مقاومت (Ω) ← L: طول رسانا (m) → A: مساحت سطح (m^2) → ρ: مقاومت ویژه $(\Omega.m)$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ در فرمول مقاومت، داده‌ها را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$R=\rho\frac{L}{A}=\underbrace{3\times10^{-5}\times10^{-2}}_{\text{تبدل به واحد }\Omega.m}\times\frac{16\times10^{+3}}{48\times10^{-4}}=1\,\Omega$$

گول نخوری ✗ حواستون باشه که اگه به واحد مقاومت ویژه دقت نکنید و به واحد SI تبدیل نکنید، به گزینهٔ اشتباه (۳) می‌رسید.

۶۵ چگالی پلاتین ۸ برابر چگالی آلومینیم و مقاومت ویژهٔ آلومینیم، $\frac{۷}{۲۵}$ برابر مقاومت ویژهٔ پلاتین است. مقاومت الکتریکی یک سیم آلومینیمی به مساحت مقطع $۱۰mm^۲$ و جرم $۴۰g$، چند برابر مقاومت الکتریکی یک سیم پلاتینی به مساحت مقطع $۲۰mm^۲$ و جرم $۵۶g$ است؟

۱) ۶/۴ ۲) ۳/۲ ۳) ۲/۸ ۴) ۱/۶

مشاوره این سؤال، مشابه سؤال کنکور ریاضی ۹۶ است.

Hint ابتدا از رابطهٔ بین چگالی و جرم، رابطهٔ طول و سطح مقطع مقاومت‌ها را پیدا کنید و در نهایت در رابطهٔ نسبتی مقاومت الکتریکی، نسبت‌های داده‌شده را قرار داده و خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: از رابطهٔ بین چگالی‌ها کمک می‌گیریم تا رابطهٔ بین طول‌ها و سطح مقطع را پیدا کنیم: (برای این‌که اشتباه نکنیم چگالی رو با ρ' و مقاومت ویژه رو با ρ نشون دادیم.)

$$\rho'_{پ}=۸\rho'_{آ} \Rightarrow \frac{m_{پ}}{V_{پ}}=۸\frac{m_{آ}}{V_{آ}} \Rightarrow \frac{m_{پ}}{A_{پ}L_{پ}}=۸\frac{m_{آ}}{A_{آ}L_{آ}} \Rightarrow \frac{L_{آ}}{L_{پ}}=۸\frac{m_{آ}}{m_{پ}}\times\frac{A_{پ}}{A_{آ}}=۸\times\frac{۴۰}{۵۶}\times\frac{۲۰}{۱۰}=\frac{۸۰}{۷}$$

گام دوم: رابطهٔ $R=\rho\frac{L}{A}$ را به صورت نسبتی می‌نویسیم تا نسبت مقاومت‌ها را پیدا کنیم:

$$\frac{R_{آ}}{R_{پ}}=\frac{\rho_{آ}}{\rho_{پ}}\times\frac{L_{آ}}{L_{پ}}\times\frac{A_{پ}}{A_{آ}}=\frac{۷}{۲۵}\times\frac{۸۰}{۷}\times\frac{۲۰}{۱۰}=\frac{۱۶۰}{۲۵}=۶/۴$$

۶۶ در دمای $30^\circ C$، مقاومت پلاتین یک دماسنج مقاومت پلاتینی 160Ω است. وقتی این دماسنج در محلول خاصی قرار گیرد، مقاومت آن 192Ω می‌شود. دمای این محلول چند درجهٔ سلسیوس است؟ ($\alpha_{\text{پلاتین}} = 4\times10^{-3}\frac{1}{^\circ C}$ و از انبساط پلاتین در اثر افزایش دما چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۸۰

مشاوره این سؤال، مشابه سؤال کنکور ریاضی ۹۳ است و مشابه آن بارها در آزمون‌های خیلی سبز مطرح شده است.

درس Box

در اثر تغییر دما، مقاومت ویژهٔ رسانا طبق رابطهٔ $\rho = \rho_\circ(1+\alpha\Delta T)$ تغییر می‌کند و از آن‌جایی که طبق رابطهٔ $R = \rho\frac{L}{A}$، مقاومت رسانا (R) با مقاومت ویژه (ρ) رابطهٔ مستقیم دارد؛ پس با صرف نظر کردن از تغییرات طول رسانا در اثر تغییر دما داریم:

$$R = R_\circ(1+\alpha\Delta T) \Rightarrow \Delta R = R_\circ\alpha\Delta T$$

(R: مقاومت ثانویه (Ω)، $R_\circ$: مقاومت اولیه (Ω)، ΔT: تغییر دما (K)، α: ضریب دمایی مقاومت ویژه $(\frac{1}{K})$)

پاسخ خیلی تشریحی با کمک تغییرات مقاومت، تغییرات دما را محاسبه می‌کنیم:

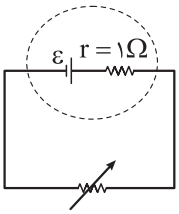
$$\Delta R = R_\circ\alpha\Delta T \Rightarrow (192-160) = 160\times(4\times10^{-3})\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{32}{4\times16\times10^{-2}} \Rightarrow \Delta T = 0/5\times10^2 K = 50K$$

سؤال، دمای ثانویه را برحسب درجهٔ سلسیوس خواسته، پس:

$$\Delta T = \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow 50 = \theta_2 - 30 \Rightarrow \theta_2 = 80^\circ C$$

گول نخوری حواست باشه که خواستهٔ سؤال چیه!؟ سؤال، دمای نهایی رو خواسته. اگه به انتهای سؤال دقت نمی‌کردی، سریع با دیدن عدد $50K$ و گزینهٔ (۱)، گزینهٔ اشتباه رو انتخاب می‌کردی.

۶۷ در مدار شکل زیر، با تغییر مقاومت رئوستا از R_1 به R_2، جریان الکتریکی عبوری از آن نصف می‌شود. اگر اختلاف R_1 و R_2 برابر 5Ω باشد، R_2 برابر چند اهم است؟



۱) ۴

۲) ۵

۳) ۹

۴) ۱۰

Hint توی مدار، مولد را تغییر ندادیم، پس از برابربودن نیروی محرکه در دو حالت استفاده کنید و روابط را برابر قرار بدید تا به خواستهٔ سؤال برسید.

درس Box در یک مدار تک‌حلقه، برای پیداکردن جریان الکتریکی کافی است در حلقه یک دور کامل بزنیم. در نهایت به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \leftarrow \text{جریان الکتریکی (A)}$$

نیروی محرکه (V) — مقاومت الکتریکی (Ω) — مقاومت درونی (Ω)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$، رابطهٔ ε را بر حسب سایر کمیت‌ها می‌نویسیم:

$$\varepsilon = I(R+r)$$

گام دوم: از آن‌جایی‌که مولد در هر دو حالت یکسان است، داریم:

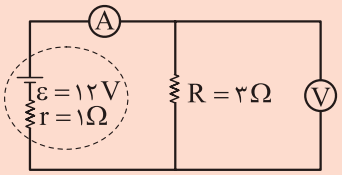
$$\left.\begin{array}{l} I_1(R_1+r) = I_2(R_2+r) \\ I_2 = \frac{I_1}{2} \\ r = 1\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{I_1}(R_1+1) = \frac{\cancel{I_1}}{2}(R_2+1) \Rightarrow 2(R_1+1) = (R_2+1) \quad (1)$$

گام سوم: جریان کاهش پیدا کرده در نتیجه مقاومت الکتریکی رئوستا افزایش یافته است، پس:

$$R_2 - R_1 = 5 \Rightarrow R_1 = R_2 - 5 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 2(R_2 - 5 + 1) = R_2 + 1 \Rightarrow 2R_2 - 8 = R_2 + 1 \Rightarrow R_2 = 9\Omega$$

۶۸ در مدار شکل زیر، اگر جای آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی با هم عوض شود، مقداری که هر یک نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ در SI چند واحد تغییر می‌کند؟



۱) ۳، ۳

۲) ۳، ۹

۳) ۴، ۳

۴) ۴، ۹

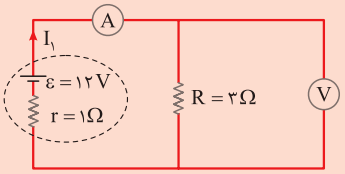
مشاوره این سؤال، مشابه ریاضی خارج ۹۷ است. این تیپ سؤالات که ولت‌سنج و آمپرسنج در مدار جابه‌جا می‌شوند و جریان و ولتاژ عبوری آن‌ها خواستهٔ سؤال است، در کنکور مورد نظر طراحان است.

Hint به شاخه‌هایی که ولت‌سنج و آمپرسنج در آن‌ها قرار دارند، دقت کنید و طبق نحوهٔ قرارگرفتن آن‌ها در مدار، رابطهٔ جریان الکتریکی و ولتاژ را برای هر حالت جداگانه محاسبه کنید.

درس Box در مدار، ولت‌سنج به صورت موازی و آمپرسنج به صورت متوالی بسته می‌شود. ولت‌سنج در مدار، اختلاف پتانسیل دو نقطه‌ای که به آن متصل است را نشان می‌دهد.

مقاومت درونی ولت‌سنج آرمانی بسیار زیاد است، در نتیجه در شاخه‌ای که ولت‌سنج قرار دارد، جریان الکتریکی برقرار نمی‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در حالت اول، مدار مطابق شکل روبه‌رو است:



جریان عبوری از مدار را حساب می‌کنیم:

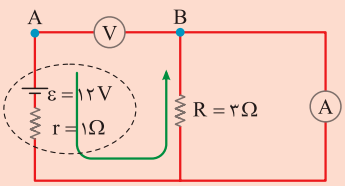
$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{۱۲}{۳+۱} = ۳A$$

پس آمپرسنج ۳A را نشان می‌دهد.

گام دوم: ولت‌سنج، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت را نشان می‌دهد؛ پس:

$$V_1 = I_1 R = ۳\times ۳ = ۹V$$

گام سوم: در حالت دوم، از ولت‌سنج آرمانی و در واقع از کل مدار، جریان عبور نمی‌کند، پس آمپرسنج $(I_2 = ۰)$ عدد صفر را نشان می‌دهد.



ولت‌سنج اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B را نشان می‌دهد. پس از نقطهٔ A شروع می‌کنیم و در مسیر نشان داده‌شده به سمت نقطهٔ B می‌رویم:

$$V_A - \varepsilon + \cancel{Ir} + \cancel{IR} = V_B \Rightarrow V_A - \varepsilon = V_B \Rightarrow V_A - V_B = +\varepsilon = ۱۲V = V_2$$

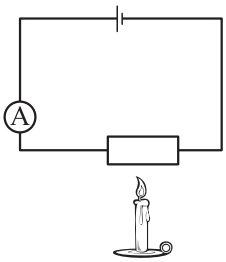
گام آخر: سؤال، تغییرات مقدار آمپرسنج و ولت‌سنج را خواسته:

آمپرسنج : $|۰ - ۳| = ۳A$

ولت‌سنج : $|۱۲ - ۹| = ۳V$

گول نخوری حواستون باشه که در حالت دوم چون ولت‌سنج در مدار متوالی قرارگرفته، اشتباهی V_2 رو صفر در نظر نگیرید که به گزینهٔ اشتباه (۲) می‌رسید.

۶۹ در مدار شکل زیر، توسط شمع به میله گرما می‌دهیم. اگر با این کار مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، افزایش یابد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این میله درست است؟



الف) مادهٔ سازندهٔ میله، رسانا است.

ب) مادهٔ سازندهٔ میله، نیم‌رسانا است.

پ) ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌های میله افزایش می‌یابد.

ت) تعداد حامل‌های بار میله، ثابت می‌ماند.

۱) الف و ت
۲) ب و پ
۳) الف و پ
۴) ب و ت

مشاوره مشابه این سؤال توی امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ هم مطرح شده.

پاسخ خیلی تشریحی

در نیم‌رساناها، با افزایش دما، به دلیل افزایش حامل‌های بار، مقاومت الکتریکی کاهش می‌یابد؛ در نتیجه جریان افزایش می‌یابد.

پس میله نیم‌رسانا بوده و ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌های میله افزایش یافته است.

فقط موردهای «ب» و «پ» درست هستند.

۷۰ وقتی دو سر یک بخاری برقی را به اختلاف پتانسیل ۲۲۰V وصل کنیم، جریان ۱۰A از آن می‌گذرد. اگر این بخاری به مدت ۳h در هر شبانه‌روز کار کند و قیمت برق مصرفی به ازای هر کیلووات ساعت ۵۰ تومان باشد، هزینهٔ یک ماه (۳۰ روز) مصرف این بخاری چند تومان می‌شود؟

۱) ۹۹۰
۲) ۹۹۰۰
۳) ۳۳۰
۴) ۳۳۰۰

Hint توان الکتریکی مصرفی را حساب کنید و سپس هزینهٔ انرژی مصرفی در یک ماه را برحسب کیلووات ساعت به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا توان مصرفی را محاسبه می‌کنیم:

$$P = VI = ۲۲۰\times۱۰ = ۲۲\times۱۰^{۲}\,W = ۲/۲kW$$

گام دوم: برای محاسبهٔ انرژی از رابطهٔ $U = Pt$ استفاده می‌کنیم: (دقت کنید چون قیمت برق مصرفی برحسب کیلووات ساعت بیان شده، توان را برحسب کیلووات و زمان را برحسب ساعت در رابطه جای‌گذاری می‌کنیم.)

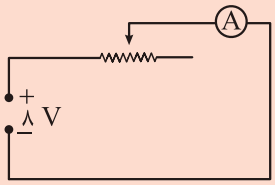
$$U = Pt = ۲/۲\times۳ = ۶/۶kWh$$

گام آخر: قیمت برق به ازای هر کیلووات ساعت ۵۰ تومان است، پس هزینهٔ یک ماه مصرف برق برابر است با:

کل هزینه = برحسب kWh مصرفی انرژی × تعداد روز مصرف × هزینهٔ هر kWh

$$\Rightarrow \text{کل هزینه} = ۶/۶\times۳۰\times۵۰ = ۹۹۰۰ \text{ تومان}$$

۷۱ در شکل زیر، آمپرسنج آرمانی ۲۵۰mA را نشان می‌دهد. مقاومت متغیر چند اهم و چگونه تغییر کند تا توان مصرفی آن ۶۰ درصد افزایش یابد؟



۱) ۱۲، کاهش یابد

۲) ۱۲، افزایش یابد

۳) ۱۹/۲، کاهش یابد

۴) ۱۹/۲، افزایش یابد

Hint به این نکته توجه کنید که اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت در هر دو حالت یکسان است و فقط جریان حالت اول برابر ۲۵۰mA است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به کمک قانون اهم در حالت اول، مقاومت الکتریکی رئوستا را حساب می‌کنیم:

$$R_1 = \frac{V}{I_1} \Rightarrow R_1 = \frac{8}{250\times10^{-3}} = 32\,\Omega$$

گام دوم: توان مصرفی ۶۰٪ افزایش یافته، یعنی:

$$P_2 = P_1 + 0/6P_1 = 1/6P_1$$

گام سوم: از رابطهٔ نسبی $P = \frac{V^2}{R}$ استفاده می‌کنیم و مقدار R_2 را محاسبه می‌کنیم: (اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت با اختلاف پتانسیل مولد برابر است، در نتیجه اختلاف پتانسیل در هر دو حالت ثابت و یکسان است.)

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{P_1}{1/6P_1} = \frac{R_2}{32} \Rightarrow R_2 = \frac{32}{1/6} = 20\Omega$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال، میزان تغییرات و چگونگی تغییرات R است، پس:

$$\Delta R = R_2 - R_1 = 20 - 32 = -12\Omega$$

پس مقاومت رئوستا ۱۲ اهم کاهش یافته است.

گول نخوری حواست باشه چون مقاومت تغییر کرده، جریان هم تغییر کرده است. اگه به این نکته دقت نکنی و با همون جریان ثابت سؤال رو حل کنی، به گزینهٔ اشتباه (۴) می‌رسی.

۷۲ اگر جریان الکتریکی عبوری از یک باتری از ۷A به ۸ A برسد، توان خروجی آن از ۳۵W به ۳۲W می‌رسد. دو سر یک آمپرسنج آرمانی را به دو سر این باتری وصل می‌کنیم. آمپرسنج چند آمپر را نشان می‌دهد؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

Hint با نوشتن فرمول توان خروجی مولد در هر دو حالت و حل دو معادلهٔ دو مجهول به‌دست‌آمده، اختلاف پتانسیل و مقاومت داخلی مولد را پیدا کنید و در نهایت جریان عبوری از آمپرسنج را که موازی با مولد بسته شده است، پیدا کنید.

درس Box باتری که پیکانهٔ نیروی محرکهٔ آن هم‌سو با جهت جریان باشد، به مدار انرژی می‌دهد؛ یعنی توان از باتری به مدار داده می‌شود.

توان خروجی مولد در واقع همین توان باتری است که از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{\text{خروجی}} = \Delta V I = (\varepsilon - Ir)I = \underbrace{\varepsilon I}_{\text{توان کل}} - \underbrace{I^2 r}_{\text{توان اتلافی}}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در رابطهٔ $P = \varepsilon I - I^2 r$ در حالت اول، جریان $I_1 = 7A$ و توان خروجی ۳۵W را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P_1 = \varepsilon I_1 - (I_1)^2 r = \varepsilon(7) - (7)^2 r \Rightarrow 35 = 7\varepsilon - 49r$$

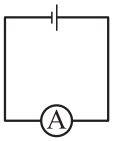
معادله را کمی ساده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div 7} 5 = \varepsilon - 7r \quad (1)$$

در حالت دوم $I_2 = 8A$ و $P_2 = 32\ W$ است، پس:

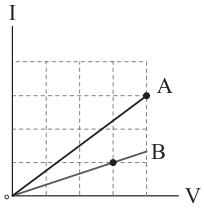
$$P_2 = \varepsilon I_2 - I_2^2 r = \varepsilon(8) - (8)^2 r \Rightarrow 32 = 8\varepsilon - 64r \xrightarrow[\text{معادله را ساده می‌کنیم}]{\div 8} 4 = \varepsilon - 8r \quad (2)$$

گام دوم: آمپرسنج مطابق شکل زیر، موازی با باتری وصل شده است. قانون اهم را برای باتری به صورت زیر می‌نویسیم:



$$V = RI \Rightarrow \varepsilon = rI \Rightarrow 12 = I \times 1 \Rightarrow I = 12A$$

۷۳ نمودار جریان الکتریکی عبوری از دو رسانای **A** و **B** برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها به شکل زیر است. اگر این دو رسانا به طور جداگانه به یک باتری با مقاومت درونی ۳Ω متصل شوند، توان خروجی باتری در دو حالت برابر می‌شود. مقاومت الکتریکی رسانای **A** چند اهم است؟



۱) ۲

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۴/۵

۴) ۳

Hint به کمک داده‌های نمودار، نسبت دو مقاومت را به دست آورید و سپس با توجه به این‌که توان خروجی باتری در هر دو اتصال برابر است، مقاومت مجهول را پیدا کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** قانون اهم را برای هر حالت طبق اطلاعات نمودار می‌نویسیم:

$$R=\frac{V}{I}\Rightarrow\begin{cases}R_A=\frac{۴V}{۳I}\\R_B=\frac{۳V}{I}\end{cases}\Rightarrow\frac{R_A}{R_B}=\frac{\frac{۴V}{۳I}}{\frac{۳V}{I}}=\frac{۴}{۹}\ (۱)$$

گام دوم: طبق رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon}{R+r}$ برای دو رسانا داریم:

$$I_A=\frac{\varepsilon}{R_A+r}\ (۲)$$

$$I_B=\frac{\varepsilon}{R_B+r}\ (۳)$$

گام سوم: برابربودن توان خروجی را در حالتی که به طور جداگانه به یک باتری با مقاومت داخلی ۳Ω متصل شده‌اند، می‌نویسیم:

$$P_A=P_B\Rightarrow\varepsilon I_A-I_A^۲r=\varepsilon I_B-I_B^۲r\xrightarrow{(۲),(۳)}\varepsilon(\frac{\varepsilon}{R_A+r})-\frac{\varepsilon^۲r}{(R_A+r)^۲}=\varepsilon(\frac{\varepsilon}{R_B+r})-\frac{\varepsilon^۲r}{(R_B+r)^۲}$$

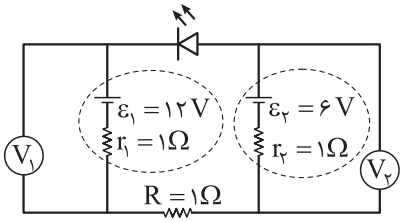
روابط را کمی مرتب می‌کنیم:

$$\frac{\varepsilon^۲}{R_A+r}-\frac{\varepsilon^۲r}{(R_A+r)^۲}=\frac{\varepsilon^۲}{R_B+r}-\frac{\varepsilon^۲r}{(R_B+r)^۲}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{R_A+r-r}{(R_A+r)^۲}=\frac{R_B+r-r}{(R_B+r)^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{R_A}{R_B}=(\frac{R_A+r}{R_B+r})^۲\xrightarrow{(۱)}\frac{۴}{۹}=(\frac{R_A+r}{R_B+r})^۲\xrightarrow[r=۳\Omega]{\text{جذر}}\frac{۲}{۳}=\frac{R_A+۳}{R_B+۳}$$

$$\Rightarrow ۲R_B+۶=۳R_A+۹\xrightarrow{R_B=\frac{۹}{۴}R_A}۲(\frac{۹}{۴}R_A)+۶=۳R_A+۹\Rightarrow\frac{۹}{۲}R_A-۳R_A=۹-۶\Rightarrow R_A=۲\Omega$$

۷۴ در مدار شکل زیر، مقدارهایی که ولت‌سنج‌های آرمانی V_1 و V_2 نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ چند ولت است؟ (از مقاومت اُهمی دیود نورگسیل چشم‌پوشی کنید.)



۱) ۸ ،۱۰

۲) ۶ ،۱۰

۳) ۸ ،۱۲

۴) ۶ ،۱۲

Hint ابتدا بدون در نظر گرفتن دیود، جهت جریان را با توجه به جهت مولدها و اندازهٔ آن‌ها پیدا کن. سپس با در نظر گرفتن دیود که یک‌سوکنندهٔ جریان است، بررسی کن جریان در مدار برقرار می‌شود یا نه.

درس Box

- در مدارهای الکتریکی جهت نیروی محرکهٔ باتری‌ها یا در جهت جریان است یا در خلاف جهت جریان.

۱) در باتری که جهت جریان با جهت نیروی محرکه همسو است، باتری به مدار انرژی می‌دهد و اختلاف پتانسیل دو سر آن به صورت مقابل محاسبه می‌شود: $\Delta V = \varepsilon - Ir$

۲) در باتری که جهت جریان در خلاف جهت نیروی محرکه است، باتری از مدار انرژی می‌گیرد و اختلاف پتانسیل دو سر آن به صورت مقابل محاسبه می‌شود: $\Delta V = \varepsilon + Ir$

- **دیود (یک‌سوکننده)**: دیودها یک منبع نوری نیم‌رسانا هستند که فقط اجازهٔ عبور جریان در یک جهت را می‌دهند، یعنی مقاومت آن در برابر جریان در یک جهت خیلی کم و در جهت مخالف خیلی زیاد است. دیود را با نماد  نشان می‌دهند؛ جهت پیکان، نماد جهت عبور جریان است.

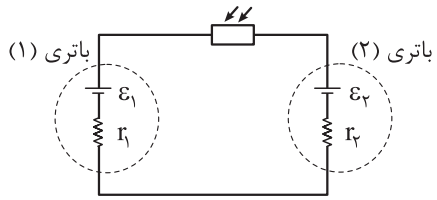
پاسخ خیلی تشریحی با توجه به جهت نیروی محرکهٔ باتری‌ها و با توجه به این‌که $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ است، در صورت برقراری جریان، جهت آن ساعتگرد است؛ اما چون جهت عبور جریان از دیود، پادساعتگرد است و دیود اجازهٔ عبور جریان را نمی‌دهد؛ پس $I = ۰$ است.

ولت‌سنج‌ها اختلاف پتانسیل دو سر باتری‌ها را نشان می‌دهند. چون از باتری‌ها جریانی عبور نمی‌کند، هر دو ولت‌سنج نیروی محرکه را نشان می‌دهند:

$\Delta V_1 = \varepsilon_1 = ۱۲V$

$\Delta V_2 = \varepsilon_2 = ۶V$

۷۵ در مدار شکل زیر، با افزایش نور تابیده به مقاومت نوری، کدام‌یک از تغییرات زیر الزاماً رخ می‌دهد؟ $(\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$



الف) توان خروجی باتری (۱) کاهش می‌یابد.

ب) توان خروجی باتری (۱) افزایش می‌یابد.

پ) توان ورودی باتری (۲) کاهش می‌یابد.

ت) توان ورودی باتری (۲) افزایش می‌یابد.

۱) الف و پ

۲) ب و ت

۳) پ

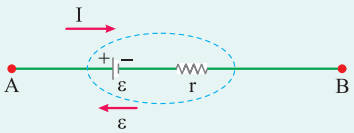
۴) ت

Hint

ابتدا بررسی کنید که با افزایش نور تابیده به مقاومت نوری، جریان در مدار چه تغییری می‌کند، سپس به کمک روابط توان در باتری‌ها و تشخیص تولیدکننده یا مصرف‌کننده بودن باتری‌ها، افزایش یا کاهش توان را بررسی کنید.

درس Box

- در مقاومت نوری (LDR) با افزایش شدت نور تابیده‌شده، مقاومت آن‌ها کاهش می‌یابد، زیرا با تابش نور، تعداد حاملان (جریان عبوری از آن‌ها) افزایش می‌یابد.
- در باتری شکل زیر که جریان از پایانهٔ مثبت باتری وارد و از پایانهٔ منفی آن خارج می‌شود، باتری از مدار توان می‌گیرد و شارژ می‌شود، پس توان ورودی باتری از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:



$$P_{\text{ورودی}} = \varepsilon I + rI^2$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $(\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$ است؛ پس جهت جریان با جهت پیکان باتری (۱) هم‌سو است. در نتیجه باتری (۱) تولیدکنندهٔ انرژی در مدار و باتری (۲) مصرف‌کنندهٔ انرژی در مدار است.

گام دوم: توان خروجی باتری (۱) از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P_1 = I\Delta V_1 = I(\varepsilon_1 - Ir_1) = I\varepsilon_1 - I^2 r_1$$

چون درصد افزایش I مشخص نیست، دربارهٔ توان خروجی باتری (۱) نمی‌توان اظهار نظر کرد، چون اگه افزایش I کم‌تر از یک باشد $(0 < I < 1)$، جملهٔ $I^2 r$ کاهش یافته و در نهایت P_1 افزایش می‌یابد؛ اما اگر $I > 1$ باشد، جملهٔ $I^2 r$ افزایش یافته و چون منها پشت آن است، در نهایت P_1 کاهش می‌یابد.

گام سوم: در باتری (۲) توان ورودی باتری از رابطهٔ $P_2 = \varepsilon_2 I + I^2 r$ محاسبه می‌شود. از آن‌جایی‌که I افزایش یافته است، پس P_2 هم افزایش یافته و فقط عبارت (ت) **الزاماً** رخ می‌دهد.

۷۶ کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟

الف) در سلول سوختی متان ـ اکسیژن، جهت حرکت e^- در مدار بیرونی از الکترودی که در آن گاز متان وارد می‌شود به سمت الکترودی است که در آن گاز اکسیژن وارد می‌شود.

ب) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن نسبت به سلول‌های سوختی مربوط به هیدروکربن‌ها، علاوه بر عدم تولید گاز گلخانه‌ای، احتمال بروز خطر نیز کم‌تر است.

پ) جهت حرکت یون هیدرونیوم در غشای سلول سوختی، مشابه جهت حرکت کاتیون Cu^{2+} در سلول گالوانی آهن ـ مس از آند به کاتد است.

ت) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد متانول برابر ۰/۰۱۶ ولت باشد، تفاوت **emf** سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن و متانول ـ اکسیژن برابر ۰/۰۱۶ ولت خواهد بود.

۱) الف ـ پ

۲) الف ـ ت

۳) ب ـ پ

۴) ب ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «ت» درست است.

نکته در سلول سوختی متان ـ اکسیژن واکنش $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2$ انجام می‌شود و در آند آن، متان به کربن دی‌اکسید و در کاتد آن، اکسیژن به آب تبدیل می‌شود.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در سلول سوختی متان ـ اکسیژن، الکترون از نیم‌سلول آندی (متان) به نیم‌سلول کاتدی (اکسیژن) حرکت می‌کند.

ب) یکی از معایب سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، دشوار بودن حمل و نقل و نگه‌داری گاز قابل انفجار هیدروژن است.

پ) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، یون هیدرونیوم با عبور از غشای مبادله‌کننده، از آند به کاتد می‌رود و در سلول گالوانی آهن ـ مس، آهن آند و مس کاتد است و کاتیون‌های آهن (II) از دیوارهٔ متخلخل به سمت کاتد حرکت می‌کنند.

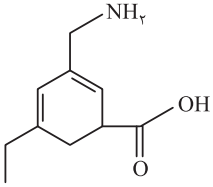
ت) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، emf سلول برابر است با: $E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{اکسیژن}} - E^\circ_{\text{هیدروژن}}$

و در سلول سوختی متانول نیز emf سلول برابر است با: $E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{اکسیژن}} - E^\circ_{\text{متانول}}$

بنابراین اختلاف ولتاژ این دو سلول برابر است با:

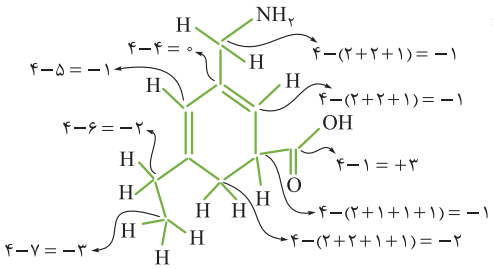
$$(E^\circ_{\text{اکسیژن}} - E^\circ_{\text{هیدروژن}}) - (E^\circ_{\text{اکسیژن}} - E^\circ_{\text{متانول}}) = E^\circ_{\text{متانول}} - E^\circ_{\text{هیدروژن}} = E^\circ_{\text{متانول}} = 0\ V$$

۷۷ در شکل زیر، چند درصد اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش صفر هستند و در صورت سوختن کامل این ماده، عدد اکسایش چند اتم کربن ۶ واحد تغییر می‌کند؟



۱) ۲۰٪ – ۲
۲) ۲۰٪ – ۳
۳) ۳۰٪ – ۲
۴) ۳۰٪ – ۳

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا عدد اکسایش کربن‌های موجود در ترکیب را محاسبه می‌کنیم:



از ۱۰ اتم کربن، ۲ اتم کربن (۲۰٪) عدد اکسایش برابر صفر دارند.

در اثر سوختن این ماده، هر اتم کربن به کربن دی‌اکسید تبدیل می‌شود و عدد اکسایش آن به (+۴) می‌رسد، بنابراین برای آن‌که عدد اکسایش کربن در طی واکنش سوختن، ۶ واحد تغییر کرده باشد، باید عدد اکسایش آن در مادهٔ اولیه برابر (−۲) باشد که در این ساختار، دو اتم کربن عدد اکسایش برابر (−۲) دارند.

۷۸ اگر الکترون‌های آزادشده از اکسایش ۵۲ گرم فلز روی در باتری دگمه‌ای روی ـ نقره (واکنش موازنه شود: $Zn(s)+Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s)+Ag(s)$)، در نیم‌واکنش کاتدی سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب مصرف شود، چند گرم فلز سدیم تولید شده و چند لیتر گاز (در شرایط STP) در سلول برقکافت آزاد می‌شود؟ $(Zn=65, Na=23 : g.mol^{-1})$

۱) ۱۷/۹۲ – ۱۸/۴

۲) ۳۵/۸۴ – ۱۸/۴

۳) ۱۷/۹۲ – ۳۶/۸

۴) ۳۵/۸۴ – ۳۶/۸

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شمار الکترون آزادشده به ازای مصرف ۵۲ گرم فلز روی را به دست می‌آوریم:

$$Zn + Ag_2O \rightarrow ZnO + 2Ag$$

استفاده از کسرهای تبدیل:

$$52g\,Zn \times \frac{1mol\,Zn}{65g\,Zn} \times \frac{2mol\,e^-}{1mol\,Zn} = 1/6\,mol\,e^-$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسرهای تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}}_{Zn}} = \frac{\text{mol}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{52}{1\times 65} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1/6\,mol\,e^-$$

گام دوم: نیم‌واکنش‌های آندی، کاتدی و واکنش کلی برقکافت سدیم کلرید مذاب به صورت زیر است:

$Na^+ + e^- \rightarrow Na$ نیم‌واکنش کاتدی

$2Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2e^-$ نیم‌واکنش آندی

$2NaCl \rightarrow 2Na + Cl_2$ واکنش کلی

براساس مقدار الکترون مبادله‌شده، جرم سدیم و حجم گاز تولیدشده برابر است با:

استفاده از کسرهای تبدیل:

$$1/6\,mol\,e^- \times \frac{1mol\,Na}{1mol\,e^-} \times \frac{23g\,Na}{1mol\,Na} = 36/8\,g\,Na$$

$$1/6\,mol\,e^- \times \frac{1mol\,Cl_2}{2mol\,e^-} \times \frac{22/4\,L\,Cl_2}{1mol\,Cl_2} = 17/92\,L\,Cl_2$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسرهای تناسب:

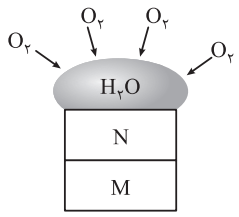
$$\frac{\text{mol}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}}_{Na}} \Rightarrow \frac{1/6}{1} = \frac{x}{23\times 1} \Rightarrow x = 36/8\,g \text{ سدیم}$$

$$\frac{\text{mol}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} = \frac{\text{حجم گاز}}{\underbrace{\text{ضریب} \times \text{حجم مولی}}_{Cl_2}} \Rightarrow \frac{1/6}{2} = \frac{x}{22/4\times 1} \Rightarrow x = 17/92\,L\,Cl_2$$

گول نخوری

در این سؤال باید *هواستون باشه* به ازای تولید هر مول سدیم، یک مول الکترون و به ازای تولید هر مول گاز کلر، دو مول الکترون مبادله می‌شود و *اگه هواستون* به ضریب‌ها *نباشه*، جرم سدیم و حجم کلر *رو* به اشتباه ممکنه دو برابر یا نصف جواب درست به دست *بیارید*.

۷۹ براساس شکل مقابل، کدام موارد از مطالب زیر درست هستند؟



الف) اگر **M** و **N** به ترتیب آلومینیم و روی باشند، در قطرهٔ آب غلظت Zn^{2+} به تدریج افزایش می‌یابد.

ب) اگر **M** و **N** به ترتیب طلا و نقره باشند، با حل‌کردن گاز N_2O_5 در آب، غلظت هر دو کاتیون مربوط به طلا و نقره افزایش می‌یابد.

پ) اگر **M** فلز آهن و **N** فلز روی باشد، از این ترکیب در ساخت کانال کولر استفاده می‌شود. در این صورت، فلز آهن در برابر خوردگی محافظت می‌شود.

ت) اگر $E^\circ(M^{x+}/M) < E^\circ(N^{y+}/N)$ باشد، وجود فلز **N** باعث تشدید خوردگی فلز **M** می‌شود.

$$Au^{3+}(aq) + 3e^- \rightarrow Au(s) \quad ,E^\circ = 1/5\,V$$

$$Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s) \quad ,E^\circ = 0/8\,V$$

$$O_2(g) + 2H_2O(s) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq) \quad ,E^\circ = 0/4\,V$$

$$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(s) \quad ,E^\circ = 1/2\,V$$

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ پ
۳) پ ـ ت
۴) الف ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «پ» و «ت» درست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) اگر **M** و **N** به ترتیب Al و Zn باشند، با قرارگرفتن آن‌ها در معرض اکسیژن و رطوبت، چون آلومینیم کاهندهٔ قوی‌تری است، اکسید می‌شود و غلظت گونهٔ Al^{3+} افزایش می‌یابد.

نکته نقره، طلا، پلاتین و مس با اسید واکنش نمی‌دهند.

ب) با افزودن N_2O_5 به آب، نیتریک اسید تولید می‌شود و غلظت یون هیدرونیوم در آن افزایش می‌یابد، ولی نقره و طلا با اسید واکنش نمی‌دهند.

پ) این عبارت به دلیل پدیدهٔ حفاظت کاتدی درست است. اجازه بدهید با جزئیات بیشتری توضیح دهیم:

آهن در حضور اکسیژن و رطوبت دچار خوردگی می‌شود. در این فرایند، آهن اکسید می‌شود. این واکنش الکتروشیمیایی شامل دو نیم‌واکنش است.

نیم‌واکنش اکسایش: $Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 2H_2O(s) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

حفاظت کاتدی:

برای جلوگیری از خوردگی آهن، می‌توان از روش حفاظت کاتدی استفاده کرد. در این روش، فلز فعال‌تری (با پتانسیل کاهشی کم‌تر) مانند روی (Zn) به آهن متصل می‌شود.

روی (Zn) به عنوان آند قربانی می‌شود.

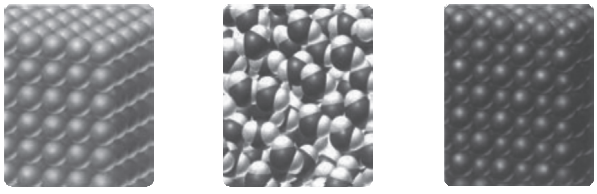
در این حالت، روی (Zn) به عنوان آند عمل می‌کند و اکسید می‌شود و از اکسیدشدن آهن جلوگیری می‌کند. به عبارت دیگر، روی به جای آهن قربانی شده و خورده می‌شود.

کاربرد در کانال کولر:

کانال‌های کولر اغلب در معرض رطوبت قرار دارند و به همین دلیل مستعد خوردگی هستند. با استفاده از ورق‌های گالوانیزه (ورق آهن پوشش داده‌شده با روی) در ساخت کانال کولر، می‌توان از خوردگی آهن جلوگیری کرد.

ت) اگر $E°(N^{y+}/N) > E°(M^{x+}/M)$ باشد، قدرت کاهندگی فلز **M** از **N** بیشتر است و در مجاورت اکسیژن و رطوبت مشابه حلبی (شامل کاهندهٔ قوی‌تر آهن و کاهندهٔ ضعیف‌تر قلع) فلز **N** سبب تشدید خوردگی فلز **M** می‌شود.

۸۰ با توجه به انواع جامدهایی که در شکل زیر نشان داده شده‌اند، کدام گزینه درست است؟



(الف) (ب) (پ)

۱) مادهٔ (الف) همانند مادهٔ (پ) ساختاری سه‌بعدی، منظم و بلوری دارد و هر دو در حالت جامد رسانای جریان برق هستند.

۲) نقطهٔ ذوب و جوش مادهٔ (ب) همانند مادهٔ (الف) به جاذبهٔ بین مولکولی میان ذرات سازندهٔ آن وابسته است و مادهٔ (ب) نسبت به مواد (الف) و (پ) در گسترهٔ دمایی کم‌تری به حالت مایع وجود دارد.

۳) الماس و سیلیسیم ساختاری مشابه شکل (ب) داشته و برخلاف آن سختی بالایی دارند.

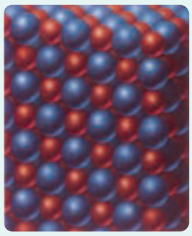
۴) از مواد (الف) و (ب) به طور هم‌زمان می‌توان در تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی در دو جایگاه متفاوت بهره برد.

درس Box

مواد جامد را براساس ساختارشان به دو دستهٔ بی‌شکل و بلوری دسته‌بندی می‌کنند. در جامدهای بلوری برخلاف جامدهای بی‌شکل، ذره‌ها به صورت منظم و در سه بعد قرار گرفته‌اند.

انواع جامدهای بلوری:

۱) جامدهای یونی: ساختار آن‌ها از کاتیون‌ها و آنیون‌ها تشکیل شده‌اند. این یون‌های ناهم‌نام با برقراری پیوند یونی و نظم خاصی کنار هم چیده شده‌اند. جامدهای یونی از نظر بار الکتریکی خنثی هستند و به دلیل پیوند قوی بین یون‌ها، نقطهٔ ذوب و جوش بالایی دارند و به طور معمول سخت و شکننده می‌باشند.



مثال:

۱) اغلب ترکیب‌های فلز با نافلز مانند Fe_2O_3 و ...

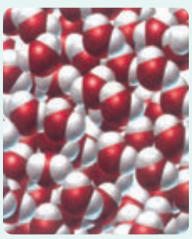
۲) همهٔ ترکیب‌های حاصل از کاتیون آمونیوم (NH_4^+)

۳) ترکیب‌های تشکیل‌شده از آنیون‌ها و کاتیون‌های چنداتمی مانند: Na_2SO_4 و ...

۴) ترکیب‌های حاصل از پیوند هیدروژن با فلزات

۲) جامدهای مولکولی: این جامدها از مولکول‌های مجزا و مستقل از هم تشکیل شده‌اند و دارای دو نوع نیروی بین مولکولی از نوع وان‌دروالسی و یا پیوند هیدروژنی هستند. معمولاً این جامدها، نقطهٔ ذوب و جوش پایینی دارند.

مثال:



۱) مولکول‌های دو یا چند اتمی با اتم‌های یکسان (عناصر مولکولی) مانند H_2، I_2، S_8 و ...

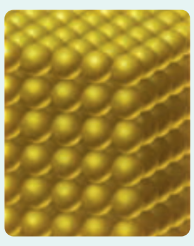
۲) اغلب ترکیب‌های حاصل از دو یا چند اتم نافلزی مانند CO_2، NO_2 و ...

۳) ترکیب هیدروژن با نافلزات مانند NH_3، PH_3، H_2O و ...

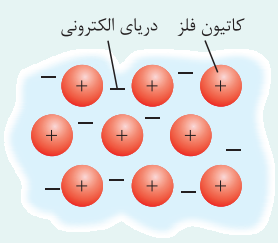
۴) ترکیب‌های بریلیم ($_4Be$) و بور ($_5B$) با سایر عناصر مانند BeF_2، BCl_3 و ...

دقت کنید که B و Be در طبیعت یون پایدار تشکیل نمی‌دهند.

۵) اغلب ترکیب‌های آلی

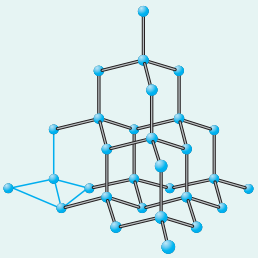


۳) جامدهای فلزی: این جامدها از کاتیون‌های فلزی که در دریای الکترون‌های ظرفیت پراکنده شده‌اند، تشکیل شده و می‌توانند آزادانه در آن جابه‌جا شوند (مدل دریای الکترونی).



مدل دریای الکترونی

۴) **جامدهای کووالانسی**: در ساختار برخی مواد که پیوند بین اتم‌های آن‌ها از نوع اشتراکی است، مولکول‌های جدا از هم دیده نمی‌شود که به آن‌ها مواد کووالانسی می‌گویند. در واقع جامدهای کووالانسی، موادی هستند که از ایجاد پیوند اشتراکی میان شمار بسیار زیادی از اتم‌ها به وجود می‌آیند. در بلور این‌گونه مواد، همهٔ اتم‌هایی که در بلور حضور دارند، به طور یکپارچه از طریق تشکیل پیوندهای کووالانسی به یکدیگر متصل شده و شبکهٔ غول‌آسایی را ساخته‌اند.



- جامدهای کووالانسی نقطهٔ ذوب بالایی دارند و اصطلاحاً دیرگداز می‌باشند و عنصرهای اصلی سازندهٔ این جامدها در طبیعت، نافلز کربن (C) و شبه‌فلز سیلیسیم (Si) هستند. از این دو عنصر تاکنون یون تک‌اتمی در هیچ ترکیبی شناخته نشده است.
- مواد کووالانسی به دلیل دیرگدازبودن، در دما و فشار اتاق به حالت جامد هستند.

مثال: جامدهای کووالانسی: الماس (C)، گرافیت (C)، گرافن (C)، سیلیس (SiO_2)، سیلیسیم کربید (SiC) و سیلیسیم (Si)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ شکل‌های (الف)، (ب) و (پ) به ترتیب مربوط به ساختار کلی جامدهای یونی، جامدهای مولکولی و جامدهای فلزی هستند.

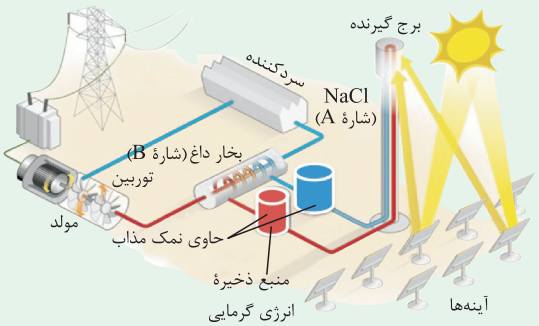
گزینهٔ (۱): جامدهای یونی «ترکیب الف» و جامدهای فلزی «ترکیب پ» هر دو ساختاری سه‌بعدی و منظم دارند، اما فقط جامدهای فلزی در حالت جامد رسانای جریان برق هستند. از فصل اول *یادتونه* که ترکیبات یونی فقط در حالت مایع و محلول در آب رسانای جریان برق هستند!

گزینهٔ (۲): واژهٔ مادهٔ مولکولی، فرمول مولکولی و نیروهای بین مولکولی فقط برای توصیف مواد مولکولی «ترکیب ب» به کار می‌رود و استفاده از واژهٔ نیروی بین مولکولی برای ترکیب‌های یونی «ترکیب الف» *رسماً و شرعاً حرام است!* اما محدودهٔ دمایی مایع‌بودن ترکیب (ب) کم‌تر از بقیه است.

گزینهٔ (۳): الماس و سیلیسیم، هر دو جزء ترکیب‌های کووالانسی هستند و ساختار این دسته از ترکیب‌ها در شکل‌های داده‌شده رؤیت نمی‌شود!

گزینهٔ (۴): در یکی از فناوری‌های پیشرفته برای تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی، از هر دو جامد مولکولی (آب) و جامد یونی ($NaCl(l)$) به ترتیب برای به حرکت درآوردن توربین برای تولید انرژی الکتریکی و منبع ذخیرهٔ انرژی گرمایی استفاده می‌شود.

نکته مراحل تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی به کمک شاره (سیال)های یونی و مولکولی:



۱) آینه‌ها پرتوهای خورشیدی را روی برج گیرنده متمرکز می‌کنند.

۲) شاره (سیال) داخل لوله که در این جا سدیم کلرید مذاب است، انرژی خورشیدی را دریافت کرده و دمای آن افزایش می‌یابد.

۳) سدیم کلرید مذاب و بسیار داغ به منبع ذخیرهٔ انرژی گرمایی سرازیر می‌شود و انرژی گرمایی خود را به آب درون لولهٔ دیگر می‌دهد و آن را به بخار تبدیل می‌کند. سدیم کلرید مذاب سردشده به مخزن دیگری می‌رود و از آن‌جا دوباره از برج گیرنده عبور می‌کند تا داغ شود.

۴) بخار داغ تولیدشده، توربین را برای تولید انرژی الکتریکی به حرکت درمی‌آورد.

۵) بخار داغ پس از به حرکت درآوردن توربین، به سردکننده منتقل می‌شود تا دوباره در چرخهٔ تولید بخار قرار گیرد.

ماده	نوع شاره	کاربرد
سدیم کلرید مذاب	یونی	منبع ذخیرهٔ انرژی گرمایی
بخار آب	مولکولی	به حرکت درآوردن توربین برای تولید انرژی الکتریکی

۸۱ با توجه به ترکیب‌های سازندهٔ نوعی خاک رس که در جدول زیر آمده است، به نمونهٔ ۴۰۰گرمی از آن چند کیلوژول گرما دهیم تا درصد جامد کووالانسی تشکیل‌دهندهٔ آن ۵ درصد افزایش یابد؟ در این صورت درصد جرمی عامل سرخ‌بودن این خاک به تقریب چند درصد تغییر می‌کند؟ (۸۰٪ گرمای جذب‌شده سبب تبخیر آب می‌شود.)

ماده	SiO_2	Al_2O_3	H_2O	Na_2O	Fe_2O_3	MgO	Au و دیگر مواد
درصد جرمی	۴۵	۳۷	۱۵	۱/۲۴	۰/۹۶	۰/۴۴	۰/۱

$(O = 16, H = 1 : g.mol^{-1})$

$H_2O(l) + 270kJ \rightarrow H_2O(g)$

۱) ۷۵۰ ـ ۱۱

۲) ۶۰۰ ـ ۱۱

۳) ۶۰۰ ـ ۹

۴) ۷۵۰ ـ ۹

Hint

برای قسمت اول، ابتدا حساب *کن توی* ۴۰۰ گرم خاک رس، چند گرم SiO_2 داریم. حالا برو به این *برس* که جرم کل *چه‌قدر بشه* که درصد SiO_2 از ۴۵ به ۵۰ *برسه*. تفاوت جرم، *می‌شه همون* جرم آب تبخیرشده، از روی اون *می‌تونی* مقدار گرما رو حساب *کنی*. *توی* قسمت دوم هم باید درصد تغییرات Fe_2O_3 رو *حساب کنی*!

پاسخ خیلی تشریحی

قسمت اول: جرم SiO_2 در ۴۰۰ گرم خاک رس:

$$400\,g\ \text{خاک‌رس} \times \frac{45\,g\ SiO_2}{100\,g\ \text{خاک‌رس}} = 180\,g\ SiO_2$$

حال می‌توان گفت، اگر درصد SiO_2، ۵ درصد افزایش یابد و به ۵۰ درصد برسد، باید جرم کل خاک رس کاهش یابد و به ۳۶۰ گرم برسد:

$$\text{درصد}SiO_2 = \frac{\text{جرم}SiO_2}{\text{جرم نهایی خاک‌رس}} \times 100 \Rightarrow 50 = \frac{180}{x} \times 100 \Rightarrow x = 360\,g\ \text{خاک‌رس نهایی}$$

با گرمادادن به خاک رس، مقداری از آب تبخیر شده و جرم نهایی آن به ۳۶۰ گرم می‌رسد. پس تفاوت جرم، مربوط به جرم آب تبخیرشده است؛ یعنی ۴۰ گرم آب تبخیر شده است. $(400 - 360 = 40\,g)$

در ادامه، با توجه به جرم آب تبخیرشده، گرمای لازم برای این فرایند را حساب می‌کنیم:

$$40\,g\ H_2O \times \frac{1\,mol\ H_2O}{18\,g\ H_2O} \times \frac{270\,kJ}{1\,mol\ H_2O} = 600\,kJ$$

این گرما، همان گرمای لازم برای تبخیر آب است. اما حواسمان هست که فقط ۸۰ درصد گرما، سبب تبخیر آب می‌شود. پس کل گرمای لازم برای این کار برابر می‌شود با:

$$600\,kJ \times \frac{100}{80} = 750\,kJ$$

قسمت دوم: درصد اولیهٔ Fe_2O_3 برابر است با ۰/۹۶، یعنی در ۴۰۰ گرم از خاک رس اولیه، جرم Fe_2O_3 برابر است با:

$$400\,g\ \text{خاک‌رس} \times \frac{0/96\,g\ Fe_2O_3}{100\,g\ \text{خاک‌رس}} = 4 \times 0/96\ g\ Fe_2O_3$$

حال درصد نهایی Fe_2O_3 را حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد نهایی}\ Fe_2O_3 = \frac{4 \times 0/96}{360} \times 100$$

در ادامه باید حساب کنیم که درصد آن، چه‌قدر تغییر می‌کند. یعنی:

$$\text{تغییر درصد}\ Fe_2O_3 = \frac{(\frac{4 \times 0/96}{360} \times 100) - 0/96}{0/96} \times 100 = \frac{0/96(\frac{400}{360} - 1)}{0/96} \times 100 = (\frac{400}{360} - 1) \times 100$$

$$= (\frac{400 - 360}{360}) \times 100 = \frac{\overset{1}{\cancel{40}}}{\underset{9}{\cancel{360}}} \times 100 = \frac{100}{9} \simeq 11\%$$

۸۲ اگر ساختار $Si(s)$ با $SiO_2(s)$ مشابه باشد، سیلیسیم در طبیعت به حالت خالص ..... زیرا ..... .

۱) یافت می‌شود ـ آنتالپی پیوند Si — O بیشتر از پیوند Si — Si است

۲) یافت می‌شود ـ ساختار $SiO_2(s)$ سه‌بعدی و ساختار $Si(s)$ دوبعدی است

۳) یافت نمی‌شود ـ آنتالپی پیوند Si — O بیشتر از پیوند Si — Si است

۴) یافت نمی‌شود ـ ساختار $SiO_2(s)$ سه‌بعدی و ساختار $Si(s)$ دوبعدی است

پاسخ خیلی تشریحی ✔

میانگین آنتالپی پیوند Si — O در سیلیس، بیشتر از میانگین آنتالپی پیوند Si — Si در سیلیسیم است، زیرا شعاع اتمی اکسیژن کوچک‌تر از شعاع اتمی سیلیسیم می‌باشد، بنابراین طول پیوند Si — O نسبت به Si — Si کوتاه‌تر است و سبب افزایش آنتالپی پیوند خواهد شد.

به همین دلیل پیوند Si — O نسبت به پیوند Si — Si محکم‌تر بوده و سیلیس (SiO_2) پایداری بیشتری از سیلیسیم (Si) دارد. سیلیسیم به صورت خالص در طبیعت یافت نمی‌شود و به طور عمده به شکل SiO_2 می‌باشد.



۸۳ کدام گزینه درست است؟

۱) در ساختار یخ برخلاف سیلیس، نوعی پیوند بین مولکولی از نوع غیروان‌درووالسی مشاهده می‌شود که بین اتم‌های H و O دو مولکول آب وجود دارد.

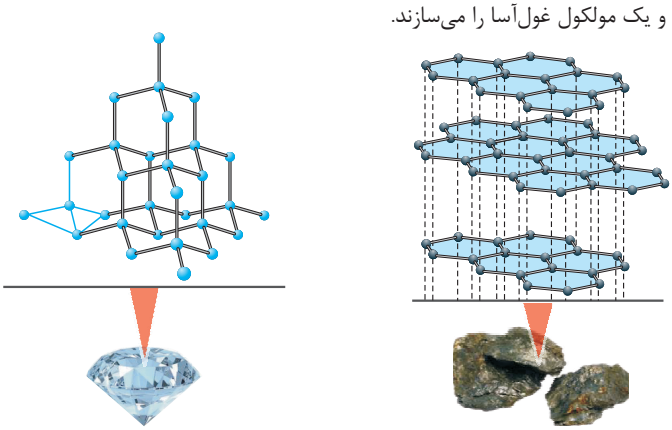
۲) از سیلیسیم خالص به علت خواص نوری ویژه در ساخت عدسی‌ها و منشور استفاده می‌شود.

۳) اگر فرمول کلی نوعی مادهٔ جامد به صورت AO_2 و عنصر A از گروه ۱۴ باشد، به طور حتم پیوند کووالانسی در ساختار آن وجود دارد.

۴) فاصلهٔ بین اتم‌های کربن در ساختار گرافیت می‌تواند از طول پیوندهای کربن ـ کربن الماس، کم‌تر یا بیشتر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

در الماس، هر اتم کربن به چهار اتم کربن دیگر و در گرافیت، هر اتم کربن به سه اتم کربن دیگر توسط پیوندهای اشتراکی متصل است. با توجه به شکل زیر، در الماس همهٔ اتم‌های کربن در یک شبکهٔ غول‌آسا به طور منظم قرار گرفته‌اند، اما در گرافیت، لایه‌های گرافن به صورت لایه‌لایه کنار هم قرار گرفته و یک مولکول غول‌آسا را می‌سازند.



الماس — گرافیت

در ساختار گرافیت فاصلهٔ بین دو اتم کربن در لایهٔ بالایی و پایینی نسبت به این فاصله در الماس بیشتر است. از طرفی دیگر طول پیوند کربن ـ کربن در گرافیت از الماس کوتاه‌تر است؛ بنابراین در گرافیت، فاصلهٔ دو اتم کربن می‌تواند هم از فاصلهٔ دو اتم کربن در الماس بیشتر (بین دو لایه) و هم کم‌تر (در یک لایه) باشد.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۱): بین اتم‌های H و O دو مولکول آب در ساختار یخ، پیوندهای هیدروژنی برقرار است. توجه کنید پیوند هیدروژنی نوعی نیروی بین مولکولی است و پیوند بین مولکولی نیست!

گزینهٔ (۲): برای ساخت منشورها و عدسی‌ها، از سیلیس خالص (کوارتز) استفاده می‌شود، نه سیلیسیم خالص! زیرا کوارتز (SiO_2 خالص) خواص نوری ویژه‌ای دارد.

گزینهٔ (۳): در گروه ۱۴، عنصر کربن (C) نافلز، سیلیسیم (Si) و ژرمانیم (Ge) شبه‌فلز و قلع (Sn) و سرب (Pb) فلز هستند. در فرمول AO_2، A می‌تواند کاتیون مربوط به یکی از فلزهای این گروه نیز باشد. فلزهای قلع و سرب می‌توانند کاتیون‌هایی با بار +۲ و +۴ ایجاد کنند و ترکیبی یونی تشکیل دهند که پیوند کووالانسی در آن‌ها وجود ندارد!

$Sn^{4+}O^{2-} \rightarrow SnO_2$ یا $Pb^{4+}O^{2-} \rightarrow PbO_2$

۸۴ چند مورد از موارد زیر از نظر درستی یا نادرستی مشابه عبارت داده‌شده نیست؟

«هر مولکول خطی سه‌اتمی که در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند، اتم مرکزی با جفت‌الکترون ناپیوندی دارد.»

الف) در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی آمونیاک برخلاف گوگرد تری‌اکسید، عنصر با جرم مولی بیشتر دارای بار جزئی منفی است.

ب) اگر یک مولکول از سه اتم یکسان تشکیل شده باشد، نمی‌تواند در میدان الکتریکی جهت‌گیری کند و مولکولی ناقطبی است.

پ) در مولکول AD_2 که ساختار خمیده دارد، **A** و **D** می‌توانند عناصر یک دوره یا گروه باشند.

ت) با جایگزین‌کردن یک اتم هیدروژن با اتم کلر در ساختار کربن تتراکلرید، نوع جهت‌گیری آن در میدان الکتریکی برخلاف حالت فیزیکی‌اش تغییر می‌کند.

۱) ۴

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

نکته

تشخیص مولکول‌های قطبی و ناقطبی به کمک ساختار لوویس:

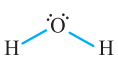
- **مولکول‌ها**
  - مولکول‌های دواتمی
    - دارای دو اتم یکسان (جورهسته)
      - مولکول ناقطبی ← F_2, O_2, H_2, N_2
    - دارای دو اتم غیریکسان (ناجورهسته)
      - مولکول قطبی ← NO, CO, HCl
  - مولکول‌های چنداتمی
    - اتم‌های مختلفی به اتم مرکزی متصل باشد.
      - مولکول قطبی ← $SOCl_2, SCO, CH_2Cl_2, HCN$
    - اتم مرکزی دارای جفت‌الکترون ناپیوندی باشد
      - مولکول قطبی ← NH_3, SO_2, NF_3, H_2O
    - اتم‌های متصل به اتم مرکزی یکسان باشند و اتم مرکزی جفت‌الکترون ناپیوندی نداشته باشد.
      - مولکول ناقطبی ← SO_2, CO_2, CH_4

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت مطرح‌شده در سؤال، همانند مورد «ب» نادرست است. موارد «الف»، «پ» و «ت» درست می‌باشند.

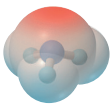
مولکولی سه‌اتمی که اتم مرکزی آن دارای جفت‌الکترون ناپیوندی باشد، قطبی است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند اما در این مولکول به دلیل حضور الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی، مولکول (مدل فضاپرکن) خمیده (V شکل) خواهد بود و هسته‌های هر سه اتم روی یک خط قرار نمی‌گیرند. مثل H_2O، H_2S، O_3 و ...



$H_2O \rightarrow$ 

بررسی موارد:

الف) در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی آمونیاک (NH_3) و گوگرد تری‌اکسید (SO_3)، به ترتیب اتم‌های N و O دارای بار جزئی منفی ($\delta-$) هستند.



آمونیاک
NH_3

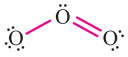


گوگرد تری اکسید
SO_3

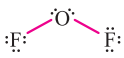
در آمونیاک (NH_3)، اتم N جرم مولی بیشتری از اتم H دارد. در مورد گوگرد تری‌اکسید (SO_3) هم دقت داشته باشید با توجه به این‌که اکسیژن و گوگرد هر دو در یک گروه (گروه ۱۶) قرار دارند و در یک گروه از بالا به پایین علاوه بر عدد اتمی، جرم اتمی میانگین نیز بیشتر می‌شود، بنابراین جرم مولی گوگرد از اکسیژن بیشتر می‌باشد، زیرا گوگرد پایین‌تر از اکسیژن قرار دارد.

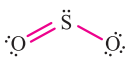
(این توضیح رو براتون نوشتم که خدایی نکرده فکر نکنید حتماً باید جرم مولی‌ها رو حفظ می‌کردیم. ☺)

ب) اوزون (O_3) یک مولکول سه‌اتمی قطبی است که از اتم‌های O تشکیل شده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.



پ) در یک دوره، عناصر گروه ۱۶ و ۱۷ با هم و در یک گروه، عناصر گروه ۱۶ با هم می‌توانند ترکیب مولکولی با فرمول مولکولی AD_2 تشکیل دهند که ساختاری خمیده داشته باشد؛ مثلاً:

دو عنصر در یک دوره: $O, F \rightarrow$ 

دو عنصر در یک گروه: $S, O \rightarrow$ 

ت) کربن تتراکلرید (CCl_4)، یک مادهٔ ناقطبی با حالت فیزیکی مایع است. *حالا* اگر در این مولکول به جای یکی از اتم‌های کلر، اتم هیدروژن جایگزین شود، مولکول کلروفرم ($CHCl_3$) به وجود خواهد آمد که مولکولی قطبی است و حالت فیزیکی آن نیز مایع است.

۸۵ جاهای خالی در عبارت زیر را کدام گزینه به درستی تکمیل می‌کند؟

«مولکول ..... همانند ..... دارای پیوند دوگانه است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند و علامت بار جزئی اتم اکسیژن در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول ..... برخلاف ..... منفی است.»

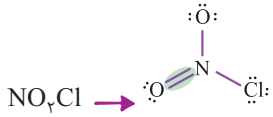
۱) $OF_2 - SCO - SO_3 - POCl_3$

۲) $OF_2 - SCO - SO_2 - NO_2Cl$

۳) $SCO - OF_2 - SO_2 - COCl_2$

۴) $SCO - OF_2 - SO_3 - SiF_4$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مولکول‌های NO_2Cl و SO_2، هر دو قطبی‌اند و در ساختارشان پیوند دوگانه وجود دارد:

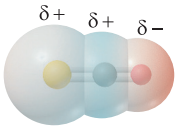


(اتصال اتم‌های مختلف به اتم مرکزی ⇐ قطبی)

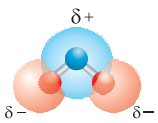


(وجود جفت‌الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی ⇐ قطبی)

همچنین در مولکول SCO، اتم اکسیژن دارای بار جزئی منفی می‌باشد اما در مولکول OF_2، بار جزئی منفی نصیب اتم‌های F می‌شود، زیرا خصلت نافلزی اتم F بیشتر از O می‌باشد و احتمال حضور جفت‌الکترون‌های پیوندی پیرامون هستهٔ اتم F بیشتر است.



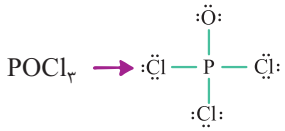
SCO

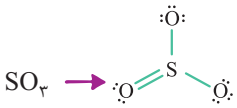


OF_2

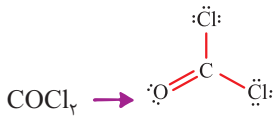
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): مولکول $POCl_3$ فاقد پیوند دوگانه است.

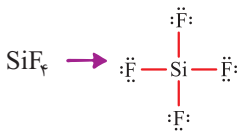


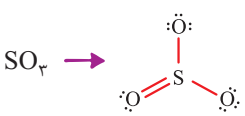


گزینهٔ (۳): مولکول $COCl_2$ (کربونیل کلرید) و SO_2، هر دو قطبی و دارای پیوند دوگانه‌اند، اما جای OF_2 و SCO در این گزینه جابه‌جا نوشته شده است.



گزینهٔ (۴): مولکول SiF_4 همانند مولکول SO_3 ناقطبی است و برخلاف آن فاقد پیوند دوگانه می‌باشد.





۸۶ چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ مولکول آمونیاک درست است؟

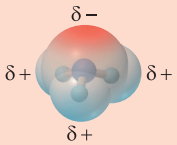
- اتم مرکزی در آن، بار جزئی مثبت دارد.
- ساختار آن، مشابه ساختار مولکول گوگرد تری‌اکسید است.
- در تشکیل $۵/۴۱۸ \times ۱۰^{۲۴}$ مولکول از آن، ۲۷ مول الکترون بین اتم‌ها به اشتراک گذاشته می‌شود.
- مجموع شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی در آن، برابر شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در مولکول کلروفرم است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی فقط عبارت چهارم درست است.

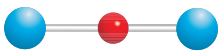
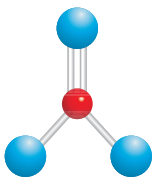
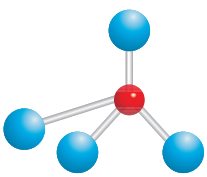
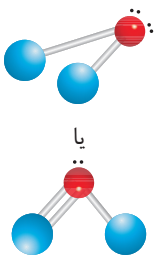
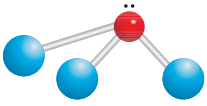
بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در مولکول آمونیاک ($NH_۳$)، نیتروژن (N) اتم مرکزی است و خصلت نافلزی بیشتری از هیدروژن (H) دارد، بنابراین تراکم بار الکتریکی منفی روی نیتروژن بیشتر است و به آن بار جزئی منفی ($\delta-$) نسبت داده می‌شود.

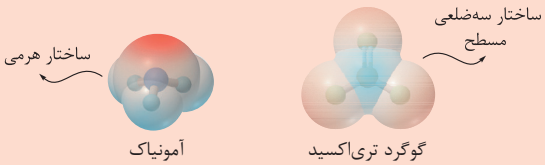


آمونیاک ($NH_۳$)

نکته شکل‌های هندسی

شمار اتم‌های متصل به اتم مرکزی	شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی اتم مرکزی	شکل گونه	شکل کلی	مثال
۲	۰	خطی		$HCN, CO_۲, SCO, N_۲O$
۳	۰	سه‌ضلعی مسطح		$NO_۳^-, CO_۳^{۲-}, SO_۳$
۴	۰	چهاروجهی		$NH_۴^+, SO_۴^{۲-}, CCl_۴, CH_۴, CHCl_۳$
۲	۱ یا ۲	خمیده		$SO_۲, O_۳, OF_۲, H_۲S, H_۲O$
۳	۱	هرمی		$NF_۳, NH_۳, PCl_۳, H_۳O^+$

عبارت دوم: هر دو مولکول آمونیاک (NH_3) و گوگرد تری‌اکسید (SO_3)، چهاراتمی هستند اما مولکول آمونیاک به دلیل وجود جفت‌الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی، ساختاری هرمی‌شکل دارد.



عبارت سوم: با توجه به ساختار لوویس آمونیاک ($H-\ddot{N}(-H)-H$)، در هر مول از آن ۶ مول الکترون بین اتم‌ها به اشتراک گذاشته شده است، بنابراین داریم:

$$۵/۴۱۸\times۱۰^{۲۴}\ \text{مولکول}\ NH_3 \times \frac{۱\,\text{mol}\ NH_3}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\ \text{مولکول}\ NH_3} \times \frac{۶\,\text{mol}\ e^-}{۱\,\text{mol}\ NH_3} = ۵۴\,\text{mol}\ e^-$$

عبارت چهارم: با توجه به ساختارهای لوویس زیر، مجموع شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی در آمونیاک (NH_3) و شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در کلروفرم ($CHCl_3$)، برابر ۴ است.



چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ مولکول آمونیاک درست است؟ *(تجربی خارج ۱۴۰۱)*

- اتم مرکزی در آن، بار جزئی منفی دارد.
- ساختار آن، مشابه ساختار مولکل کربن تتراکلرید است.
- در تشکیل $۴/۵۱۵\times۱۰^{۲۴}$ مولکول از آن، ۲۲/۵ مول جفت‌الکترون بین اتم‌ها شرکت می‌کند.
- مجموع شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی در آن، برابر شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در مولکول کربونیل سولفید است.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۸۷ کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) اگر مولکول AB_3 که عنصر B هالوژنی از دورهٔ دوم جدول دوره‌ای است، قطبی باشد، عنصر A در واکنش با سدیم می‌تواند ترکیبی با فرمول Na_3A تشکیل دهد.

ب) کربونیل سولفید همانند کربونیل کلرید در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند و شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار این دو مولکول یکسان است.

پ) هر مولکول دواتمی ناجورهسته که یکی از عناصر سازندهٔ آن اکسیژن است، حداقل ۳ جفت‌الکترون ناپیوندی در ساختار خود دارد.

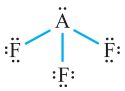
ت) هر مولکول با ساختار V شکل که اتم مرکزی در آن دو جفت‌الکترون ناپیوندی دارد، اتم‌های کناری در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی به رنگ آبی هستند.

۱) ب ـ ت
۲) الف ـ پ
۳) الف ـ ب
۴) ب ـ پ

پاسخ خیلی تشریحی موارد «الف» و «ب» درست‌اند.

بررسی موارد:

الف) فلوئور (F)، هالوژن دورهٔ دوم جدول دوره‌ای است. اگر مولکول AF_3 قطبی باشد، قطعاً A عنصری از گروه ۱۵ جدول دوره‌ای می‌باشد، زیرا اگر A را اتم مرکزی در نظر بگیریم، اتم‌های متصل به آن یکسان است و برای این که مولکولی قطبی باشد باید الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی وجود داشته باشد.

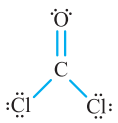


عناصر گروه ۱۵ در واکنش با فلزات به یون A^{3-} تبدیل می‌شوند، بنابراین فرمول شیمیایی ترکیب عناصر این گروه با فلز سدیم از گروه اول (Na^+) به صورت Na_3A خواهد بود.

ب) از شیمی یازدهم به یاد دارید که گروه کربونیل به صورت $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-$ می‌باشد. اگر به این گروه اتم‌های گوگرد (S) و کلر (Cl) متصل شود، به ترتیب کربونیل سولفید (SCO) و کربونیل کلرید $(COCl_2)$ حاصل خواهد شد.



کربونیل سولفید



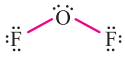
کربونیل کلرید

هر دو مولکول قطبی هستند و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند، زیرا اتم‌های متصل به اتم مرکزی یکسان نیستند، هم‌چنین در هر یک از این دو مولکول، ۴ پیوند اشتراکی وجود دارد.

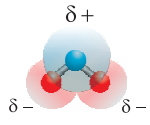
پ) مولکول کربن‌مونوکسید (CO) یک مولکول دواتمی ناجورهسته است که تنها دو جفت‌الکترون ناپیوندی در ساختار آن وجود دارد.



ت) مولکول اکسیژن دی‌فلوئورید (OF_2) ساختاری خمیده (V شکل) دارد. در این مولکول اتم‌های F به عنوان اتم‌های کناری، خصلت نافلزی بیشتری دارند و در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی، رنگشان قرمز است.



ساختار لوویس



نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی

۸۸ با توجه به مدل فضاپرکن مولکول‌های «a» و «b» کدام موارد زیر نادرست است؟



(b) (a)

الف) مولکول «b» را می‌توان به هر یک از گونه‌های CF_4، SO_4^{2-}، NH_4^+ و N_2O_3 نسبت داد.

ب) اگر مولکول «b»، CH_4 باشد و یکی از اتم‌های هیدروژن آن با کلر جایگزین شود، رفتار مولکول در میدان الکتریکی تغییر خواهد کرد.

پ) با جایگزین‌کردن اتم مرکزی در مولکول «a» گشتاور دوقطبی می‌تواند به تقریب دو برابر تغییر کند.

ت) مولکول «a» یک مولکول قطبی است و همواره از سمت اتم مرکزی به سمت صفحهٔ مثبت میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ ت

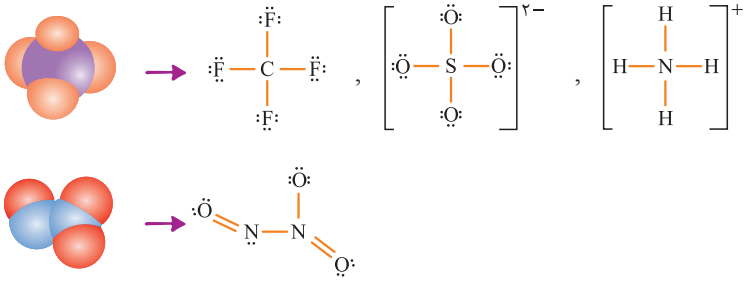
۳) پ ـ ت ۴) ب ـ پ

پاسخ خیلی تشریحی موارد «الف» و «ت» نادرست‌اند.

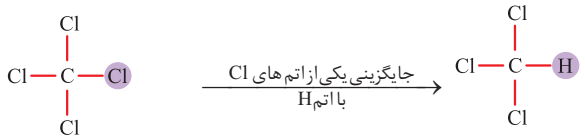
بررسی موارد:

الف) «b» یک مولکول پنج‌اتمی است که اتم‌های متصل به اتم مرکزی یکسان‌اند و ساختاری چهاروجهی را ایجاد کرده‌اند.

گونه‌های CF_4، SO_4^{2-} و NH_4^+ می‌توانند ساختاری همانند مولکول «b» داشته باشند، اما مولکول N_2O_3 با این‌که مولکولی پنج‌اتمی است، اما نمی‌تواند ساختاری مشابه مولکول «b» داشته باشد، زیرا دارای دو اتم مرکزی است که سه اتم اکسیژن به آن‌ها متصل‌اند.



ب) مولکول «b» می‌تواند کربن تتراکلرید (CCl_4) باشد. این مولکول ناقطبی است و اگر یکی از اتم‌های کلر آن را با اتم هیدروژن جایگزین کنیم، مولکول کلروفرم ($CHCl_3$) حاصل می‌شود که یک مولکول قطبی است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری خواهد کرد.



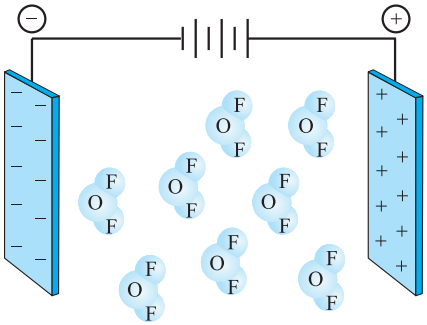
کربن تتراکلرید (ناقطبی) کلروفرم (قطبی)

پ) «a» مولکولی با ساختار خمیده (Vشکل) است. اگر «a» را مولکول آب (H_2O) با گشتاور دوقطبی $1/85\,D$ در نظر بگیریم، با جایگزین‌کردن اکسیژن (اتم مرکزی) با اتم گوگرد (S)، مولکول هیدروژن سولفید (H_2S) با گشتاور دو قطبی $0/97D$ حاصل می‌شود. به عبارت دیگر با جایگزین‌کردن اتم مرکزی، گشتاور دوقطبی این مولکول حدود دو برابر تغییر می‌کند.

نکته برخی ویژگی‌های مولکول آب و هیدروژن سولفید در فشار یک اتمسفر:

ماده	فرمول شیمیایی	مدل فضاپرکن	قطبیت مولکول	جرم مولی ($g.mol^{-1}$)	حالت فیزیکی (۲۵°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گشتاور دوقطبی (D)
آب	H_2O		قطبی	۱۸	مایع	۱۰۰	۱/۸۵
هیدروژن سولفید	H_2S		قطبی	۳۴	گاز	−۶۰	۰/۹۷

ت) «a» یک مولکول قطبی است و می‌تواند اکسیژن دی‌فلوئورید (OF_2) باشد. در این مولکول، اتم‌های فلوئور (F) بار جزئی منفی دارند زیرا خصلت نافلزی آن‌ها بیشتر از اکسیژن است. اگر این مولکول قطبی در میدان الکتریکی قرار بگیرد و ولتاژ اعمال شود، از سمت سر منفی خود که اتم‌های فلوئور (F) هستند (اتم‌های کناری)، به سمت صفحهٔ مثبت میدان جهت‌گیری می‌کنند.



جهت‌گیری مولکول‌های OF_2 در میدان الکتریکی

۸۹ با توجه به جدول داده‌شده که برخی عنصرهای دورهٔ دوم و سوم جدول تناوبی را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

نماد عنصر	شعاع اتمی	شعاع یونی	نسبت بار به شعاع
A	۱۵۲	۷۶	$۱/۳۱\times۱۰^{-۲}$
B	۱۶۰	۷۲	$۲/۷۸\times۱۰^{-۲}$
C	۱۰۲	۱۸۴	$۱/۰۸\times۱۰^{-۲}$
D	۷۱	۱۳۳	$۰/۷۵\times۱۰^{-۲}$

الف) اگر عنصر **A** و **D** در یک دوره باشند، عنصرهای **B** و **C** نمی‌توانند در یک دوره باشند.

ب) آنتالپی فروپاشی شبکه ترکیب **CB** از **AD** بیشتر و مجموع قدرمطلق بار کاتیون‌های این دو ترکیب، برابر **۳+** است.

پ) عنصر **A** در جدول دوره‌ای از عنصر **B** بالاتر و نقطهٔ ذوب ترکیب حاصل از ترکیب واکنش **B** با **D**، از ترکیب **A** با **D**، بیشتر است.

ت) از واکنش بین عناصر موجود، حداکثر ۴ ترکیب به دست می‌آید.

۱) پ ـ ت

۲) فقط پ

۳) الف ـ ت

۴) ب ـ ت

درس Box

بررسی شعاع یونی و اتمی

- شعاع یک کاتیون از شعاع اتم خنثی آن، کوچک‌تر است، زیرا با کم‌شدن الکترون، جاذبهٔ هسته بر الکترون‌های باقی‌مانده افزایش می‌یابد.

شعاع اتمی خودش > شعاع کاتیون ←مثال— شعاع: $Na^{+} < Na$

توجه: برای عنصرهایی که چند نوع کاتیون تشکیل می‌دهند، هر چه بار کاتیون بیشتر باشد، شعاع یونی کوچک‌تر می‌شود:

شعاع گونه: $Fe^{۳+} < Fe^{۲+} < Fe$

- شعاع یک آنیون از شعاع اتم خنثی آن، بزرگ‌تر است؛ زیرا با اضافه‌شدن الکترون، نیروی دافعهٔ بین الکترون‌ها بیشتر شده و بیشتر از هم فاصله می‌گیرند.

شعاع اتمی خودش < شعاع آنیون ←مثال— شعاع: $O^{۲-} > O$ ، شعاع: $Cl^{-} > Cl$

- در یک گروه جدول دوره‌ای، درست مانند شعاع اتمی، شعاع یونی هم از بالا به پایین افزایش می‌یابد.

مثال:

شعاع یونی فلزهای قلیایی: $Li^{+} < Na^{+} < K^{+} < Rb^{+} < Cs^{+}$

شعاع یونی هالیدها: $F^{-} < Cl^{-} < Br^{-} < I^{-}$

- در دوره‌های دوم و سوم، کاتیون‌ها نسبت به آنیون‌ها یک لایهٔ الکترونی کم‌تر دارند، به همین دلیل، شعاع کاتیون‌ها از شعاع آنیون‌ها کوچک‌تر است.

مثال:

دورهٔ سوم: $\underbrace{{}_{۱۳}Al^{۳+} < {}_{۱۲}Mg^{۲+} < {}_{۱۱}Na^{+}}_{\text{۱۰ الکترون دارند}} < \underbrace{{}_{۱۷}Cl^{-} < {}_{۱۶}S^{۲-} < {}_{۱۵}P^{۳-}}_{\text{۱۸ الکترون دارند}}$

چگالی بار یون‌ها:

اگر هر یون را کره‌ای باردار در نظر بگیریم، چگالی بار آن هم‌ارز با نسبت بار به حجم آن است:

$$\text{چگالی بار یون} = \frac{\text{بار یون}}{\text{شعاع یون}} \xrightarrow{\text{نسبت ساده‌تر}} \text{چگالی بار یون} = \frac{|\text{بار خالص یون}|}{\text{حجم یون}} = \frac{\text{مقدار بار یون}}{\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}} \times \overbrace{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C}^{\text{مقدار بار الکترون}}$$

- در یک گروه از بالا به پایین، چگالی بار یون‌ها کاهش می‌یابد: مقایسهٔ چگالی بار: $Cl^{-} < F^{-}$
- در کاتیون‌های یک دوره هر چه بار یون بیشتر باشد، چگالی بار بیشتر است: مقایسهٔ چگالی بار: $Mg^{۲+} > Na^{+}$
- در آنیون‌های یک دوره، هر چه مقدار بار یون بیشتر باشد، چگالی بار بیشتر است: مقایسهٔ چگالی بار: $O^{۲-} > F^{-}$

توجه: به طور کلی در مقایسهٔ چگالی بار یون‌ها، اولویت با مقایسهٔ بار آن‌ها است، یعنی هر چه بار یون بیشتر باشد، چگالی بار آن بیشتر است و اگر بار دو یون یکسان باشد، هر چه شعاع یون کوچک‌تر باشد، چگالی بار آن بیشتر خواهد بود.

مثال: چگالی بار : $_{8}O^{2-} > _{11}Na^{+}$ (بار بیشتر / بار کم‌تر) چگالی بار : $_{20}Ca^{2+} > _{16}S^{2-}$ (شعاع کم‌تر / شعاع بیشتر)

آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور:

به مقدار گرمای لازم در فشار ثابت، برای فروپاشی شبکهٔ بلور یک مول جامد یونی و تبدیل آن به یون‌های گازی سازنده‌اش، آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور می‌گویند و آن را با نماد $\Delta H_{\text{فروپاشی}}$ نشان می‌دهند. مثال:

$$NaCl(s) + 787\ kJ \rightarrow Na^{+}(g) + Cl^{-}(g), \Delta H_{\text{فروپاشی}}(NaCl(s)) = +787\ kJ.mol^{-1}$$

استراتژی مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب‌های یونی:

به طور کلی برای مقایسهٔ ΔH فروپاشی شبکهٔ ترکیب‌های یونی می‌توان از روش کنکوری زیر استفاده کرد:

گام اول: هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکهٔ آن بزرگ‌تر است.

گام دوم: اگر مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون برای دو ترکیب یونی برابر باشد، شعاع یون‌های سازندهٔ آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم؛ هر چه شعاع یون‌ها کوچک‌تر باشد، ΔH فروپاشی بزرگ‌تر است.

مثال:

$$MgO \Rightarrow \overset{Mg^{2+}}{2} + \overset{O^{2-}}{2} = 4$$
$$CaCl_2 \Rightarrow \overset{Ca^{2+}}{2} + \overset{Cl^{-}}{1} = 3$$
$$\Rightarrow \Delta H_{\text{فروپاشی}} : MgO > CaCl_2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فقط عبارت «پ» درست است.

جهت بررسی راحت‌تر، ابتدا بار هر یون را با استفاده از فرمول چگالی بار به دست می‌آوریم:

$$\text{چگالی بار یون A} = \frac{\text{بار یون}}{\text{شعاع یون}} \Rightarrow 1/31\times10^{-2} = \frac{\text{بار یون}}{76} \Rightarrow \text{بار یون} \simeq 1$$

$$\text{چگالی بار یون B} = \frac{\text{بار یون}}{\text{شعاع یون}} \Rightarrow 2/78\times10^{-2} = \frac{\text{بار یون}}{72} \Rightarrow \text{بار یون} \simeq 2$$

$$\text{چگالی بار یون C} = \frac{\text{بار یون}}{\text{شعاع یون}} \Rightarrow 1/08\times10^{-2} = \frac{\text{بار یون}}{184} \Rightarrow \text{بار یون} \simeq 2$$

$$\text{چگالی بار یون D} = \frac{\text{بار یون}}{\text{شعاع یون}} \Rightarrow 0/75\times10^{-2} = \frac{\text{بار یون}}{133} \Rightarrow \text{بار یون} \simeq 1$$

در یون‌های A و B، چون شعاع یونی کم‌تر از شعاع اتمی است، پس کاتیون هستند و در یون‌های C و D چون شعاع یونی بیشتر از شعاع اتمی است، بنابراین آنیون می‌باشند.

$$A \rightarrow A^{+} \quad , \quad B \rightarrow B^{2+} \quad , \quad C \rightarrow C^{2-} \quad , \quad D \rightarrow D^{-}$$

بررسی عبارت‌ها:

الف) می‌دانیم در یک دورهٔ جدول تناوبی از سمت چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد و در یک گروه از بالا به پایین شعاع اتمی افزایش می‌یابد. با توجه به شعاع اتمی داده‌شده و بار هر یون، عنصر A می‌تواند فلز ابتدای دوره و عنصر D نافلز انتهای یک دوره باشند. هم‌چنین عناصر B و C نیز می‌توانند به ترتیب فلز و نافلز در یک دوره باشند.

گروه ۱	گروه ۲		گروه ۱۶	گروه ۱۷
A ۱۵۲				D ۷۱
	B ۱۶۰		C ۱۰۲	

ب) گونهٔ C یک آنیون است و با توجه به قواعد فرمول‌نویسی ترکیبات یونی، آنیون در سمت راست و کاتیون در سمت چپ فرمول شیمیایی قرار می‌گیرد.

$CB \rightarrow$ نادرست ✗

$B^{2+} \quad C^{2-} \rightarrow BC$ درست ✓

پ) با توجه به شعاع اتمی و بار یون‌های A و B، عنصر B قطعاً در دورهٔ پایین‌تر از عنصر A قرار دارد، زیرا شعاع اتمی آن بزرگ‌تر از شعاع اتمی A است. برای مقایسهٔ نقطهٔ ذوب کافی است که آنتالپی فروپاشی آن‌ها را با یکدیگر مقایسه کنیم. به این منظور مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون را با هم بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} B^{2+}, D^- \rightarrow 2+1=3 \\ A^+, D^- \rightarrow 1+1=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{آنتالپی فروپاشی شبکه} : BD_2 > AD \rightarrow \text{نقطهٔ ذوب} : BD_2 > AD$$

ت) عنصرهای A و B می‌توانند با هر یک از عنصرهای C و D واکنش دهند و حداکثر چهار **ترکیب یونی** تشکیل دهند:

$$\begin{cases} A^+, C^{2-} \rightarrow A_2C \\ A^+, D^- \rightarrow AD \end{cases} \qquad \begin{cases} B^{2+}, C^{2-} \rightarrow BC \\ B^{2+}, D^- \rightarrow BD_2 \end{cases}$$

اما عنصرهای نافلز C و D نیز می‌توانند با یکدیگر ترکیب شوند و ترکیبی مولکولی (کووالانسی) مانند CD_2 نیز تشکیل دهند.

C: گروه ۱۶ ⟶ ·C̈·

D: گروه ۱۷ ⟶ ·D̈·

:D̈–C̈–D̈:

۹۰ با توجه به کاتیون‌ها و آنیون‌های تک‌اتمی و پایدار عنصرهای دورهٔ دوم و سوم، چند مورد از موارد زیر درست است؟

- در بین کاتیون‌ها، کم‌ترین چگالی بار مربوط به یون سدیم است.
- در بین آنیون‌ها، بیشترین چگالی بار مربوط به یون نیترید است.
- در بین ترکیب‌های یونی ممکن، جاذبهٔ میان یون‌های سدیم و کلرید از همه ضعیف‌تر است.
- در بین ترکیب‌های یونی ممکن، آنتالپی فروپاشی شبکه ترکیب آلومینیم فلوئورید از همه بیشتر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد اول، دوم و سوم درست‌اند.

ابتدا کاتیون‌ها و آنیون‌های پایدار دوره‌های دوم و سوم را در نظر بگیرید:

گروه / دوره	۱	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۲	Li^+				N^{3-}	O^{2-}	F^-
۳	Na^+	Mg^{2+}	Al^{3+}		P^{3-}	S^{2-}	Cl^-

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در بین کاتیون‌های این دو دوره، بار Al^{3+} بیشتر است، بنابراین چگالی بار بیشتری دارد. اما در مورد Li^+ و Na^+ که در یک گروه قرار دارند و بار یکسان دارند، به دلیل شعاع بیشتر یون سدیم، چگالی بار آن کم‌تر از چگالی بار یون لیتیم خواهد بود.

$$\text{چگالی بار} = \frac{\text{بار یون (یکسان)}}{\text{شعاع یون}}$$

عبارت دوم: در آنیون‌های دورهٔ دوم و سوم در هر دوره، به دلیل بار بیشتر یون‌های نیترید (N^{3-}) و فسفید (P^{3-})، چگالی بار این دو یون از سایر آنیون‌های هم‌دورهٔ خود بیشتر است. از آن‌جا که هر دو یون در یک گروه قرار دارند، یون نیترید به دلیل شعاع یونی کوچک‌تر، چگالی بار بیشتری دارد.

$$\text{چگالی بار} = \frac{\text{بار یون (یکسان)}}{\text{شعاع یون}}$$

عبارت سوم: هر چه چگالی بار یک کاتیون و یک آنیون کم‌تر باشد، نیروی جاذبهٔ میان آن یون با یون‌های ناهمنام اطرافش کم‌تر خواهد بود. در میان یون‌های موجود، یون‌های سدیم (Na^+) و کلرید (Cl^-) کم‌ترین چگالی بار را دارند، بنابراین نیروی جاذبهٔ میان ترکیب یونی حاصل از این دو یون، ضعیف‌تر خواهد بود.

عبارت چهارم: در میان کاتیون‌های موجود، یون آلومینیم (Al^{3+}) بیشترین چگالی بار را به دلیل بار بیشتر دارد. در میان آنیون‌های موجود نیز یون نیترید (N^{3-}) به دلیل بار بیشتر و شعاع کوچک‌تر، بیشترین چگالی بار را دارد، بنابراین ترکیب یونی حاصل از Al^{3+} و N^{3-}، بیشترین آنتالپی فروپاشی شبکه را خواهد داشت.

$$AlN \rightarrow \overset{Al^{3+}}{3} + \overset{N^{3-}}{3} = 6$$

اگر هر یون را کره‌ای باردار در نظر بگیرید، چگالی بار هم‌ارز با نسبت بار به حجم آن است. کمیتی که می‌تواند برای مقایسهٔ میزان برهم‌کنش میان یون‌ها به‌کار رود. نسبت ساده‌تری که می‌توان به کار برد، نسبت مقدار بار یون به شعاع آن است. با این توصیف جدول زیر را کامل کنید و به پرسش‌ها پاسخ دهید. *(با هم بیاندیشیم ۳- صفحهٔ ۸۱)*

کاتیون	شعاع (pm)	نسبت بار به شعاع	آنیون	شعاع (pm)	نسبت بار به شعاع
Na^+	۱۰۲	$۹/۸۰\times۱۰^{-۳}$	F^-	۱۳۳	...
K^+	...	$۷/۲۴\times۱۰^{-۳}$	Cl^-	۱۸۱	...
Mg^{2+}	...	$۲/۷۷\times۱۰^{-۲}$	O^{2-}	۱۴۰	...
Ca^{2+}	۹۹	...	S^{2-}	۱۸۴	$۱/۰۹\times۱۰^{-۲}$

الف) چگالی بار کدام کاتیون کم‌تر و کدام‌یک بیشتر است؟ چرا؟

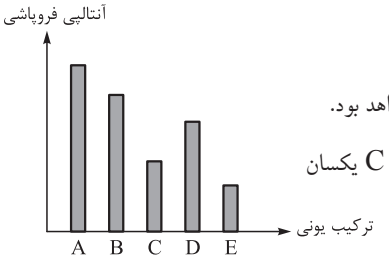
ب) چگالی بار کدام آنیون کم‌تر و کدام‌یک بیشتر است؟ چرا؟

پ) پیش‌بینی کنید نیروی جاذبه میان کدام کاتیون با کدام آنیون از همه قوی‌تر است؟ چرا؟

ت) پیش‌بینی کنید نیروی جاذبه میان کدام کاتیون با کدام آنیون از همه ضعیف‌تر است؟ چرا؟

۹۱ **با توجه به نمودار زیر که مربوط به بعضی ترکیب‌های یونی حاصل از عنصرهای فلزات قلیایی و قلیایی‌خاکی با هالوژن‌های دورهٔ دوم تا چهارم جدول دوره‌ای است، کدام مطلب به یقین درست است؟**

مشاوره شبیه این سؤال اولین بار در کنکور ۱۴۰۰ تجربی داخل کشور مطرح شده است.



۱) اگر چگالی بار کاتیون ترکیب A از B بیشتر باشد، شعاع آنیون B از A بیشتر خواهد بود.

۲) اگر بار کاتیون ترکیب D، ۲ برابر کاتیون ترکیب C باشد، شعاع اتمی فلز سازندهٔ D از فلز سازندهٔ C کم‌تر خواهد بود.

۳) اگر آنیون ترکیب E و D یکسان باشد، بار کاتیون E از D و C کم‌تر خواهد بود.

۴) اگر کاتیون‌های E و C در یک گروه قرار داشته باشند و آنیون‌های A و C یکسان باشند، کاتیون ترکیب B و E در یک گروه نخواهند بود.

پاسخ خیلی تشریحی بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر ترکیب A همان $MgCl_2$ و ترکیب B، BaF_2 باشد، چگالی بار کاتیون ترکیب A (Mg^{2+}) از ترکیب B(Ba^{2+}) بیشتر بوده و شعاع آنیون ترکیب A (Cl^-) نیز از شعاع آنیون ترکیب B(F^-) بیشتر است.

گزینهٔ (۲): اگر بار کاتیون‌های ترکیب D دو برابر بار کاتیون ترکیب C باشد، یعنی فلز سازندهٔ ترکیب D می توان Mg یا Ca باشد و فلز سازندهٔ ترکیب C می‌تواند Li، Na یا K باشد. حال اگر فلز سازندهٔ ترکیب D، Ca باشد و فلز سازندهٔ ترکیب C، Li باشد، شعاع اتمی Ca از Li بزرگ‌تر خواهد بود.

گزینهٔ (۳): اگر آنیون E و D یکسان باشد، احتمال دارد شعاع کاتیون E از D یا C بزرگ‌تر باشد.

گزینهٔ (۴): کاتیون E و C در گروه ۱ قرار دارند (به دلیل آنتالپی فروپاشی خیلی کم‌ترشان). از طرف دیگر چون آنیون‌های ترکیب‌های A و C یکسان است؛ بنابراین کاتیون A در گروه دوم جدول دوره‌ای قرار دارد. هم‌چنین ترکیب B همانند ترکیب A، کاتیونی از گروه ۲ دارد (آنتالپی فروپاشی شبکهٔ آن از ترکیب A کوچک‌تر و از ترکیب C بزرگ‌تر است.) در نتیجه کاتیون‌های سازندهٔ دو ترکیب B و E در یک گروه نخواهند بود.

۹۲ اگر مجموع آنتالپی فروپاشی شبکه $MgS(s)$ و $KF(s)$ برابر **a**، $MgO(s)$ و $LiF(s)$ برابر **b**، $NaCl(s)$ و $CaS(s)$ برابر **c** باشد، کدام مقایسه درست است؟

۱) $a > b > c$

۲) $a > c > b$

۳) $b > a > c$

۴) $b > c > a$

پاسخ خیلی تشریحی

برای مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی دو ترکیب یونی، ابتدا مجموع قدرمطلق بار یون‌ها را در دو ترکیب مقایسه می‌کنیم. ترکیبی که مجموع قدرمطلق بار یون‌هایش بزرگ‌تر باشد، آنتالپی فروپاشی بیشتری خواهد داشت. اگر مجموع قدرمطلق بار یون‌ها در دو ترکیب برابر باشد، ترکیبی که شعاع یون‌های سازندهٔ آن کوچک‌تر باشد، آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بیشتری دارد.

گام اول: آنتالپی فروپاشی شبکهٔ MgS و KF را با MgO و LiF مقایسه می‌کنیم؛ مجموع قدرمطلق بار یون‌ها در MgS (Mg^{2+}، S^{2-}) با MgO (Mg^{2+}، O^{2-}) برابر است، اما چون شعاع یونی O^{2-} از S^{2-} کوچک‌تر است؛ بنابراین آنتالپی فروپاشی MgS از MgO کوچک‌تر است. هم‌چنین مجموع قدرمطلق بار یون‌ها در KF (K^+، F^-) با LiF (Li^+، F^-) برابر است، اما چون شعاع یونی K^+ از Li^+ بزرگ‌تر است؛ بنابراین آنتالپی فروپاشی شبکهٔ KF از LiF کوچک‌تر خواهد بود.

$a < b \Rightarrow$ رد گزینه‌های (۱) و (۲)

گام دوم: آنتالپی فروپاشی شبکهٔ MgS و KF را با NaCl و CaS مقایسه می‌کنیم: مجموع قدرمطلق بار یون‌ها در MgS (Mg^{2+}، S^{2-}) با CaS (Ca^{2+}، S^{2-}) برابر است، اما چون شعاع یونی Ca^{2+} از Mg^{2+} بزرگ‌تر است؛ بنابراین آنتالپی فروپاشی شبکهٔ ترکیب CaS از MgS کوچک‌تر است.

هم‌چنین مجموع قدرمطلق بار یون‌ها در KF (K^+، F^-) با NaCl (Na^+، Cl^-) برابر است، اما چون شعاع یونی آنیون F^- از Cl^- کوچک‌تر است، پس آنتالپی فروپاشی شبکهٔ NaCl از KF کوچک‌تر خواهد بود.

$a > c \Rightarrow$ رد گزینهٔ (۴)

اگر مجموع آنتالپی فروپاشی $MgO(s)$ و $KI(s)$ برابر **a**، $LiF(s)$ و $Al_2O_3(s)$ برابر **b**، $NaBr(s)$ و $AlF_3(s)$ برابر **c** باشد، کدام مقایسه درست است؟ *(تجربی داخل ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)*

۱) $b > a > c$

۲) $b > c > a$

۳) $c > b > a$

۴) $c > a > b$

۹۳ به مخلوطی از آلومینیم فلوئورید و منیزیم اکسید به جرم ۲۵ گرم، ۲۱۶۰ کیلوژول گرما می‌دهیم تا شبکهٔ بلوری آن‌ها فروپاشیده شود. اگر اختلاف حجم کاتیون‌ها و آنیون‌ها در شرایط STP، ۱۱/۲ لیتر بوده و آنتالپی فروپاشی AlF_3 و MgO، ۸۰۰ کیلوژول بر مول تفاوت داشته باشد، به تقریب چند درصد گرمای مصرف‌شده، صرف تولید $Mg^{2+}(g)$ و $O^{2-}(g)$ شده است؟

$(Al=27, Mg=24, F=19, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) ۵۲

۲) ۲۶

۳) ۱۳

۴) ۳۹

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مول AlF_3 را x و مول MgO را y در نظر می‌گیریم:

$$\underset{x}{AlF_{3(s)}} \rightarrow \underset{x}{Al^{3+}_{(g)}} + \underset{3x}{3F^{-}_{(g)}} \quad , \quad \underset{y}{MgO_{(s)}} \rightarrow \underset{y}{Mg^{2+}_{(g)}} + \underset{y}{O^{2-}_{(g)}}$$

پس جرم AlF_3 برابر $84x$ (جرم = جرم‌مولی × مول) و جرم MgO برابر $40y$ خواهد بود:

$$\text{جرم کل مخلوط} = \text{جرم } AlF_3 + \text{جرم MgO} \Rightarrow 25 = 84x + 40y$$

گام دوم: اختلاف حجم کاتیون‌ها و آنیون را به مول تبدیل می‌کنیم و برابر تفاوت مول آن‌ها (مول کاتیون‌ها $= x+y$ و مول آنیون‌ها $= 3x+y$) قرار می‌دهیم:

$$?\,mol = 11/2\,L \times \frac{1\,mol}{22/4\,L} = 0/5\,mol$$

$$\underbrace{(3x+y)}_{\text{مول آنیون‌ها}} - \underbrace{(x+y)}_{\text{مول کاتیون‌ها}} = 0/5 \Rightarrow 2x = 0/5 \Rightarrow x = 0/25$$

$$25 = (84 \times 0/25) + 40y \Rightarrow y = 0/1 \Rightarrow \begin{cases} 0/25\ mol\ AlF_3 \\ 0/1\ mol\ MgO \end{cases}$$

گام سوم: آنتالپی فروپاشی شبکهٔ MgO را E و آنتالپی فروپاشی شبکهٔ AlF_3 را E' فرض می‌کنیم:

دقت داشته باشید که آنتالپی فروپاشی شبکهٔ AlF_3 از MgO بیشتراست؛ پس داریم:

$$\begin{cases} (0/25 \times E') + (0/1 \times E) = 2160 \\ E' - E = 800 \end{cases}$$

$$E' = 6400, E = 5600$$

گام چهارم: در نهایت درصد گرمای جذب‌شده توسط MgO را حساب می‌کنیم:

$$\frac{0/1 \times 5600}{2160} \times 100 = 25/92 \simeq 26$$

۹۴ کدام مطلب نادرست است؟

۱) برای انجام هر فعالیت با هر آهنگی، نیاز به وجود یک منبع انرژی است.

۲) گوشت قرمز و ماهی افزون بر پروتئین، محتوی انواع ویتامین‌ها و مواد معدنی هستند.

۳) شیر و فراورده‌های آن، منبع مهمی برای پیشگیری و ترمیم پوکی استخوان است.

۴) هنگامی که بدن دچار کمبود آهن باشد، می‌توان با خوردن سیب یا نوشیدن شربت آبلیمو و عسل، بدن را به حالت طبیعی بازگرداند.

مشاوره *سعی کنین توی این تیپ سؤالات همهٔ موارد رو حداقل یه نگاهی بندازین تا توی دام نیفتین.* هر سال در کنکور سراسری، چند تست از حفظیات داریم؛ پس *بهتره* روی متن کتاب درسی تسلط کافی داشته باشید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ مطابق کتاب درسی برای رفع کمبود آهن، می‌توان از اسفناج استفاده کرد. *هواستون باشه که* شربت آبلیمو و عسل برای رفع کاهش قند خون مصرف می‌شود.

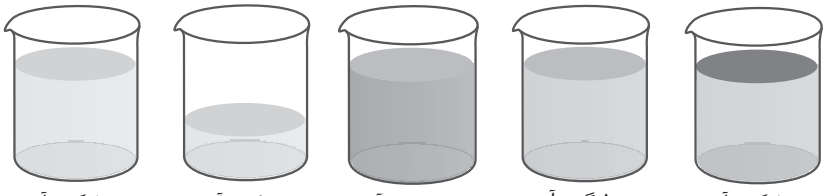
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *آره دیگه! متن کتاب که یادتون نرفته احیاناً؟!*

گزینهٔ (۲): گوشت قرمز و ماهی به ترتیب دارای چربی زیاد و اُمگا ـ۳ هستند، هم‌چنین هر دوی این مواد دارای پروتئین، انواع ویتامین‌ها و مواد معدنی مورد نیاز برای بدن می‌باشند.

گزینهٔ (۳): *بله!* شیر و فراورده‌های آن به دلیل داشتن منیزیم و کلسیم، از پوکی استخوان جلوگیری می‌کنند.

۹۵ با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به ظرف‌های حاوی آب در فشار اتاق هستند، کدام گزینه به ترتیب جاهای خالی عبارت‌های زیر را به درستی کامل می‌کند؟



۱۰۰ گرم آب	۲۰ گرم آب	۱۰۰ گرم آب	۱۰۰ گرم آب	۱۰۰ گرم آب
۹۷°C	۱۰۰°C	−۱۰°C	۱۰۰°C	۱۵۰°C
A	B	C	D	E

- در صورتی که دماسنج درون ظرف‌های A و B قرار داده شود، شدت برخورد مولکول‌های آب به دیوارهٔ دماسنج در ظرف ..... از ظرف دیگر بیشتر خواهد بود.
- افزودن مقداری از آب ظرف B به ظرف D، سبب تغییر میانگین انرژی جنبشی مولکول‌ها ..... .
- ظرف‌های ..... به ترتیب بیشترین و کم‌ترین میانگین انرژی جنبشی را دارند.

۱) B ـ می‌شود ـ D و C
۲) A ـ می‌شود ـ E و A
۳) B ـ نمی‌شود ـ E و C
۴) A ـ نمی‌شود ـ D و A

مشاوره توی این سؤالات نیاز نیست همهٔ موارد رو یک‌به‌یک تحلیل کنید، مثلاً در همین سؤال اگر دو مورد رو درست تحلیل می‌کردید به پاسخ درست می‌رسیدید.

درس Box

دما: کمیتی است که **میزان گرمی یا سردی یک جسم** را نشان می‌دهد و **تغییر دما** نشان‌دهندهٔ انجام یک فرایند است. از نظر علمی، دما توصیفی از **میانگین تندی حرکت ذرات و انرژی جنبشی آن‌ها** است.

انرژی گرمایی: به **مجموع انرژی جنبشی ذرات تشکیل‌دهندهٔ یک ماده** انرژی گرمایی گفته می‌شود؛ بنابراین انرژی گرمایی به دو عامل جرم ماده و دمای آن بستگی دارد. برای مثال انرژی گرمایی آب یک استخر با دمای ۲۰°C از یک لیوان آب ۵۰°C، بیشتر است.

مقایسهٔ دما، انرژی گرمایی و گرما

دما	انرژی گرمایی	گرما
میانگین انرژی جنبشی ذره‌های یک ماده	مجموع انرژی جنبشی ذره‌های یک ماده	مقدار انرژی گرمایی که به دلیل تفاوت دما در فرایند، مبادله می‌شود.
برای توصیف یک نمونهٔ ماده	برای توصیف یک نمونهٔ ماده	برای توصیف یک فرایند
صورتی از انرژی نیست. (معیاری برای بیان سردی و گرمی جسم است.)	صورتی از انرژی است.	صورتی از انرژی است.
به مقدار ماده، وابسته نیست.	به تعداد ذره‌ها (جرم) و دمای جسم، وابسته است.	به مقدار جسم، وابسته است.
قابل اندازه‌گیری است.	قابل اندازه‌گیری نیست.	قابل اندازه‌گیری است.
نماد: θ یا T یکا: °C یا K		نماد: Q یکا: J و cal

پاسخ خیلی تشریحی

حالا وقتشه! به ترتیب عبارت‌ها را بررسی کنیم:

عبارت اول: شدت برخورد مولکول‌های آب به دیوارهٔ ظرف، به سرعت آن‌ها بستگی داشته و *اونم* با دما رابطهٔ مستقیم دارد؛ پس هر چه دما بیشتر باشد، شدت برخورد ذرات به دیوارهٔ ظرف بیشتر است. *پس* B *درسته!*

عبارت دوم: با توجه به این‌که دما میانگین انرژی جنبشی ذرات سازندهٔ ماده را نشان می‌دهد، در اثر افزودن دو آب با دمای یکسان، میانگین انرژی جنبشی مولکول‌های آب بدون تغییر باقی می‌ماند.

عبارت سوم: بیشترین میانگین انرژی جنبشی مربوط به ظرفی با دمای بالاتر و کم‌ترین میانگین انرژی جنبشی نیز مربوط به ظرفی با دمای پایین‌تر است. ظرف‌های E و C به ترتیب، بیشترین و کم‌ترین میانگین انرژی جنبشی را دارند.

۹۶ نیتینول آلیاژی از فلزهای نیکل و تیتانیم است. اگر به ۱۰ گرم از این آلیاژ $۴۲/۵۵\,J$ گرما دهیم تا دمای آن از $۱۰^\circ C$ به $۲۰^\circ C$ برسد، چند درصد از جرم این آلیاژ را فلز نیکل تشکیل داده است؟ $(c_{Ti}=۰/۵۳, c_{Ni}=۰/۳۴: J.g^{-1}.^\circ C^{-1})$

۱) ۵۵ ۲) ۴۵ ۳) ۶۵ ۴) ۳۵

مشاوره مشابه این سؤال دو بار در کنکور سراسری نظام جدید مطرح شده است. باید بدانید که سؤالات مخلوط‌ها، بسیار مورد توجه و مورد علاقهٔ طراحان کنکور به‌ویژه در سال‌های اخیر بوده و *به همین دلیل نیازمند توجه جدی شماست!*

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جرم Ni را x و جرم Ti را $(۱۰-x)$ گرم فرض می‌کنیم و معادلهٔ تغییرات انرژی گرمایی را می‌نویسیم:

$$Q=mc\Delta\theta \quad \text{و} \quad Q_{کل}=Q_۱+Q_۲$$

گام دوم: تغییرات انرژی گرمایی فلزهای Ti و Ni را محاسبه کرده و با هم جمع می‌کنیم، پس مجموع این دو را برابر $Q_{کل}$ که $۴۲/۵۵\,J$ است، قرار می‌دهیم:

$$۴۲/۵۵=(۰/۳۴\times x\times(۲۰-۱۰))+(۰/۵۳\times(۱۰-x)\times(۲۰-۱۰))$$

$$\Rightarrow ۴۲/۵۵=۳/۴x+۵۳-۵/۳x \Rightarrow ۱/۹x=۱۰/۴۵ \Rightarrow x=۵/۵g$$

گام سوم: درصد جرمی فلز Ni در آلیاژ را به دست می‌آوریم:

$$\text{درصد جرمی Ni در آلیاژ}=\frac{\text{جرم Ni درآلیاژ}}{\text{جرم آلیاژ}}\times ۱۰۰ = \frac{۵/۵}{۱۰}\times ۱۰۰ = ٪۵۵$$

۹۷ ۱۰ گرم جیوه **(Hg)** در یک ظرف وجود دارد. اگر ۰/۹۲ میلی‌گرم از این جیوه تبخیر شود و گرمای لازم برای تبخیرشدن از جیوهٔ مایع موجود در ظرف گرفته شود، دمای جیوهٔ مایع، به تقریب چند درجهٔ سلسیوس کاهش خواهد یافت؟ (از مبادلهٔ گرما توسط ظرف صرف نظر شود. گرمای ویژهٔ جیوهٔ مایع برابر با ۰/۱۴ ژول بر گرم بر درجهٔ سلسیوس بوده و آنتالپی تبخیر آن ۶۲ کیلوژول بر مول می‌باشد؛ $(Hg = 200\ g.mol^{-1})$

۱) ۰/۱

۲) ۰/۲

۳) ۰/۳

۴) ۰/۴

Hint گرمای لازم برای تبخیر ۰/۹۲ میلی‌گرم جیوه را محاسبه کن و برابر Q حاصل از تغییر دمای جیوهٔ مایع موجود در ظرف قرار بده.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مقدار گرمای لازم برای تبخیر ۰/۹۲ میلی‌گرم جیوه موجود در ظرف را می‌*سابیم*:

$$0/92\,mg\ Hg \times \frac{1\,g}{10^3\,mg} \times \frac{1\,mol\ Hg}{200\,g\ Hg} \times \frac{62\,kJ}{1\,mol\ Hg} \times \frac{10^3\,J}{1\,kJ} = 0/92 \times 0/31\,J$$

گام دوم: مقدار کاهش دمای جیوهٔ مایع باقی‌مانده در ظرف را حساب می‌کنیم:

چون جرم جیوهٔ تبخیرشده $(0/92 \times 10^{-3}\ g)$، در مقابل جرم جیوهٔ مایع باقی‌مانده در ظرف، *ناچیزه!* جرم جیوهٔ مایع باقی‌مانده در ظرف را *تقریباً* برابر با ۱۰ گرم در نظر می‌گیریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 0/92 \times 0/31 = 10 \times 0/14 \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{0/92 \times 0/31}{1/4} \simeq 0/2^\circ C$$

تیزبازی *برای راحتی خودمون! بهتره که در این کسر، مقدار ۰/۳۱ و ۰/۹۲ را به ترتیب ۰/۲۸ و ۱ در نظر بگیریم، در واقع یکی رو کم و یکی رو زیاد کنیم تا اثرات همدیگه رو خنثی کنن!*

$$\Delta\theta \simeq \frac{0/28 \times 1}{1/4} = 0/2^\circ C$$

۹۸ آنتالپی استاندارد سوختن اتان، برابر ۱۵۶۰ کیلوژول بر مول و آنتالپی استاندارد سوختن پروپین، برابر ۲۰۰۰ کیلوژول بر مول است. اگر از سوختن کامل ۶ گرم مخلوطی از اتان و پروپین در حضور مقدار کافی اکسیژن، در مجموع ۳۰۴ کیلوژول گرما تولید شود، نسبت جرم اتان به جرم پروپین در مخلوط اولیه کدام است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۵ ۲) ۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۴

مشاوره *بازم مسائل مخلوط‌ها! یادتون باشه که* مخلوط‌ها و مسائل آن‌ها هر سال در کنکور مطرح *می‌شن* پس حتماً حل *اون‌ها* رو بلد *باشین!*

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرض می‌کنیم x گرم اتان در مخلوط داریم؛ بنابراین جرم پروپین در مخلوط برابر با $6-x$ گرم خواهد بود. با توجه به کسرهای تبدیل مقدار انرژی آزادشده از دو ماده را به صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم و با هم جمع می‌زنیم تا انرژی کل حاصل از سوختن کامل مخلوط در حضور اکسیژن کافی را به دست آوریم:

$$x\,g\,C_2H_6 \times \frac{1\,mol\,C_2H_6}{30\,g\,C_2H_6} \times \frac{1560\,kJ\ \text{انرژی}}{1\,mol\,C_2H_6} = 52x\,kJ$$

$$(6-x)\,g\,C_3H_4 \times \frac{1\,mol\,C_3H_4}{40\,g\,C_3H_4} \times \frac{2000\,kJ\ \text{انرژی}}{1\,mol\,C_3H_4} = (300-50x)\,kJ$$

$$\text{کل انرژی آزاد شده} = 52x + 300 - 50x = 300 + 2x$$

گام دوم: مطابق فرض سؤال، ۳۰۴ kJ انرژی آزاد شده است؛ بنابراین داریم:

$$300 + 2x = 304 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2\,g$$

بنابراین ۲ گرم از مخلوط اولیه را گاز اتان و ۴ گرم از آن را گاز پروپین تشکیل می‌دهد.

یه جور دیگه

می‌توانیم ابتدا ارزش سوختی دو ماده را حساب کرده و در مقدار آنان ضرب کنیم:

ارزش سوختی: اتان: $\frac{1560}{30} = 52\,kJ.g^{-1}$، پروپین: $\frac{2000}{40} = 50\,kJ.g^{-1}$

$\Rightarrow$ گرمای حاصل از سوختن اتان: $52x$؛ گرمای حاصل از سوختن پروپین: $50(6-x) = 300 - 50x$

$$\xrightarrow{+} 300 + 2x = 304 \Rightarrow x = 2$$

گام سوم: نسبت جرم اتان به پروپین در مخلوط، برابر است با:

$$\frac{x}{6-x} = \frac{2}{4} = 0/5$$

۹۹ در هوای سرد زمستان، برای گرم نگه‌داشتن دست‌ها می‌توان از کیسه‌های گرمازا استفاده کرد. در برخی از این کیسه‌ها از واکنش زیر برای تولید گرما استفاده می‌شود. یک کیسه به جرم ۶۰ گرم داریم که ۷۰ درصد جرم آن را پودر آهن تشکیل می‌دهد. اگر با مصرف کامل پودر آهن موجود در این کیسه، ۳۱۰ کیلوژول گرما تولید شود، آنتالپی واکنش زیر به تقریب چند کیلوژول بر مول است؟ $(Fe = 56\ g.mol^{-1})$ (ناخالصی‌ها باعث تولید گرما نمی‌شوند.)

$$4Fe(s) + 3O_2(g) \rightarrow 2Fe_2O_3(s)$$

۱) ۸۲۶

۲) ۸۶۲

۳) ۱۵۶۳

۴) ۱۶۵۳

Hint ابتدا محاسبه کن که به ازای مصرف یک مول آهن در این واکنش، چند کیلوژول انرژی آزاد می‌شود، سپس حساب کن که به ازای مصرف ۴ مول آهن چند کیلوژول انرژی در این واکنش تولید خواهد شد. *که معادل ΔH واکنشه!*

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** انرژی حاصل از مصرف ۱ مول آهن در این واکنش را حساب می‌کنیم:

$$\text{انرژی } 310\,kJ = 60\,g \text{ نمونه} \times \frac{70\,g\,Fe}{100\,g \text{ نمونه}} \times \frac{1\,mol\,Fe}{56\,g\,Fe} \times \frac{x\,kJ \text{ انرژی}}{1\,mol\,Fe}$$

$$\Rightarrow x = \frac{310 \times \cancel{56}^{4}}{\cancel{42}^{3}} = \frac{4}{3} \times 310 \simeq 413/33$$

گام دوم: مقدار انرژی حاصل از مصرف ۴ مول آهن در این واکنش را به دست می‌آوریم که معادل ΔH واکنش است:

$$\text{انرژی } 1653\,kJ \simeq 4\,mol\,Fe \times \frac{413/33\,kJ \text{ انرژی}}{1\,mol\,Fe}$$

تیزبازی *برای راحتی کار می‌تونستید بگید* $\frac{4}{3} \times 310$ حدوداً برابر $\frac{4}{3} \times 300 = 400\,kJ$ است و واضحاً مقدار 4×400 برابر ۱۶۰۰ خواهد شد. به علت این‌که در ابتدا به جای ۳۱۰، ۳۰۰ گذاشتیم، جواب به‌دست‌آمده کم‌تر از واقعیت بوده و جواب واقعی از ۱۶۰۰ بیشتر است *که فقط توگزینهٔ (٤) صدق می‌کنه!*

گول‌نخوری *حواستون باشه* که آنتالپی هر واکنش به ازای ضرایب آن مواد تعیین می‌شه! *مثلاً* در همین سؤال انرژی حاصل از اکسایش ۴ mol آهن برای تعیین ΔH واکنش به کار می‌رود؛ بنابراین باید انرژی ناشی از اکسایش هر مول آهن را در ۴ ضرب کنیم تا به پاسخ نهایی برسیم.

۱۰۰ آنتالپی سوختن یک آلکان از طریق مقادیر آنتالپی پیوندهای داده‌شده در جدول زیر، ۲۶۱۰/۵− کیلوژول بر مول گزارش شده است. کدام مورد می‌تواند نشان‌دهندهٔ ساختار آلکان مورد نظر باشد؟

پیوند	O=O	C—C	C—H	C=O	O—H
آنتالپی پیوند $(kJ.mol^{-1})$	۴۹۵	۳۴۸	۴۱۵	۷۹۹	۴۶۳

۱) $CH_3-CH_2-CH_3$

۲) 

۳) 

۴) $CH_3CH(CH_3)CH_2CH_3$

Hint واکنش سوختن کامل یک آلکان با فرمول C_nH_{2n+2} را نوشته و موازنه کن. *حالا اگر* با استفاده از آنتالپی پیوندهای داده‌شده، ΔH واکنش را محاسبه کنی، مقدار n به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** واکنش سوختن آلکان (C_nH_{2n+2}) را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$C_nH_{2n+2}(g)+\frac{3n+1}{2}O_2(g)\rightarrow nCO_2(g)+(n+1)H_2O(g)$$

گام دوم: در ساختار یک آلکان با فرمول کلی C_nH_{2n+2}، $n-1$ پیوند $C-C$ و $2n+2$ پیوند $C-H$ وجود دارد؛ بنابراین محاسبهٔ ΔH واکنش از طریق آنتالپی پیوندهای داده‌شده، به صورت زیر است:

$$\Delta H_{\text{واکنش}}=[(n-1)\times(\Delta H_{C-C})+(2n+2)\times(\Delta H_{C-H})$$
$$+(\frac{3n+1}{2})\times(\Delta H_{O=O})]-[(2n)\times(\Delta H_{C=O})+2(n+1)\times(\Delta H_{O-H})]$$

مقادیر آنتالپی پیوندها را جای‌گذاری کرده و مقدار n را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow -2610/5=[(n-1)\times 348+(2n+2)\times 415+(\frac{3n+1}{2})\times 495]-[(2n)\times 799+(2n+2)\times 463]$$

$$\Rightarrow -2610/5=348n-348+830n+830+742/5n+247/5-1598n-926n-926$$

$$\Rightarrow -2610/5=-603/5n-196/5 \Rightarrow 2414=603/5n \Rightarrow n=\frac{2414}{603/5}=4$$

بنابراین آلکان مورد نظر، آلکانی با ۴ کربن و دارای فرمول مولکولی C_4H_{10} است. *فقط گزینهٔ (۲) ساختار یک آلکان ۴ کربنی رو نشون می‌ده!* ☺

۱۰۱ از سوختن کامل یک مول گاز هیدروژن در شرایط معین و تبدیل آن به بخار آب، ۲۴۲ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. اگر آنتالپی پیوندهای $O=O$ و $H-F$ و میانگین آنتالپی پیوند $O-H$ به ترتیب برابر ۴۹۶، ۵۶۷ و ۴۶۰ کیلوژول بر مول باشد، آنتالپی واکنش $H_2(g)+2F(g) \rightarrow 2HF(g)$، برابر چند کیلوژول است؟

۱) -137

۲) -430

۳) -567

۴) -704

مشاوره یکی از مهم‌ترین مباحث کنکور و در واقع یکی از تست‌هایی که هر ساله در کنکور سراسری تکرار می‌شود، محاسبهٔ ΔH واکنش با استفاده از آنتالپی‌های پیوند است، *جدی بگیرینش!*

Hint ابتدا آنتالپی پیوند $H-H$ را از داده‌های واکنش سوختن هیدروژن محاسبه کن، سپس ΔH واکنش خواسته‌شده را به دست بیار.

نکته در واکنش‌های **گازی**، می‌توان آنتالپی واکنش را با استفاده از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$\Delta H_{\text{واکنش}}$ = (مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها) − (مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** آنتالپی پیوند $H-H$ را با استفاده از واکنش سوختن آن حساب می‌کنیم:

$$H_2(g)+\frac{1}{2}O_2(g) \Rightarrow H_2O \ , \ \Delta H=-242\,kJ$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}}=(\Delta H_{H-H}+\frac{1}{2}\Delta H_{O=O})-(2\times\Delta H_{O-H})$$

$$\Rightarrow -242=(\Delta H_{H-H}+\frac{1}{2}\times 496)-(2\times 460) \Rightarrow \Delta H_{H-H}=430\ kJ.mol^{-1}$$

گام دوم: آنتالپی واکنش $H_2(g)+2F(g) \rightarrow 2HF(g)$ برابر است با:

$$\Delta H_{\text{واکنش}}=(\Delta H_{H-H}+0)-(2\times\Delta H_{H-F})$$

حواستون باشه که چون بین اتم‌های F پیوند اشتراکی وجود ندارد؛ بنابراین به جای آنتالپی پیوند آن صفر می‌گذاریم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}}=(430+0)-(2\times 567)=-704\ kJ$$

از سوختن کامل یک مول گاز هیدروژن در شرایط معیّن، ۲۴۲ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. اگر آنتالپی پیوند $O=O$ و $H-Cl$ و میانگین آنتالپی پیوند $O-H$، به‌ترتیب، برابر ۴۹۶، ۴۳۰ و ۴۶۰ کیلوژول بر مول باشد، آنتالپی واکنش: $H_2+2Cl \rightarrow 2HCl$، برابر چند کیلوژول است؟ (همهٔ مواد، گازی شکل‌اند.) *(ریاضی - خارج ۱۴۰۳- نوبت دوم)*

۱) -172 ۲) -184 ۳) -482 ۴) -430

۱۰۲ چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟

- گرمای یک واکنش در دما و فشار ثابت، به نوع و مقدار واکنش‌دهنده‌ها، نوع فراورده‌ها و حالت فیزیکی آن‌ها بستگی دارد.
- آرایش اتم‌های کربن و اکسیژن با پیوند دوگانهٔ $C=O$ ، به بنزآلدهید و ۲- هپتانون، خواص ویژه‌ای می‌بخشد.
- به موادی که فرمول مولکولی متفاوت اما ساختار یکسانی دارند، ایزومر (همپار) می‌گویند.
- کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها، افزون بر تأمین مواد اولیه برای سوخت‌وساز یاخته‌ها، منابعی برای تأمین انرژی آن‌ها هستند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی

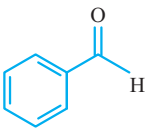
تنها عبارت سوم نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

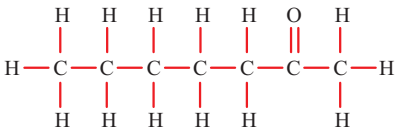
عبارت اول: مطابق متن کتاب درسی، گرمای مبادله‌شده در یک واکنش شیمیایی، به دما، فشار، حالت فیزیکی، نوع و مقدار مواد شرکت‌کننده در واکنش بستگی دارد.

عبارت دوم: گروه عاملی آرایش ویژه‌ای از اتم‌هاست که به مواد دارای آن، خواص فیزیکی و شیمیایی منحصربه‌فردی می‌دهد.

بنزآلدهید و ۲- هپتانون به ترتیب در بادام و میخک وجود دارند و هر دو دارای گروه عاملی کربونیل ($-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-$) هستند:



بنزآلدهید



۲- هپتانون

عبارت سوم: *هواستون باشه که* ایزومرها (همپارها)، **فرمول مولکولی یکسان اما ساختار متفاوت دارند.**

عبارت چهارم: کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها، پروتئین‌ها، آب، ویتامین‌ها و مواد معدنی از جمله مواد مورد نیاز بدن هستند که سه مورد اول در تأمین انرژی نیز نقش دارند.

۱۰۳ کدام مورد در ارتباط با نخستین گاز جمع‌آوری‌شده از سطح مرداب‌ها، نادرست است؟

۱) فراورده‌های حاصل از سوختن کامل آن، جزء گازهای گلخانه‌ای هستند.

۲) برای اندازه‌گیری گرمای تولیدشده از سوختن آن در فشار ثابت، از گرماسنج لیوانی نمی‌توان استفاده کرد.

۳) اگر آنتالپی سوختن این گاز برابر a کیلوژول بر مول و آنتالپی سوختن پروپان، برابر b کیلوژول بر مول باشد، آنتالپی سوختن بوتان، برابر $(b+\frac{b-a}{2})$ کیلوژول بر مول خواهد بود.

۴) در میان هیدروکربن‌ها، کم‌ترین ارزش سوختی و آنتالپی سوختن را دارد.

مشاوره در این سؤال حتی اگر نتوانستید متوجه شوید که در صورت سؤال، دربارهٔ چه ماده‌ای صحبت شده است، می‌توانید از طریق گزینه‌ها متوجه *این موضوع بشین.*

پاسخ خیلی تشریحی

گاز متان نخستین بار از سطح مرداب‌ها جمع‌آوری شده است؛ از این رو به گاز مرداب معروف است. *پس گاز مورد نظر، همون متان خودمونه!*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در اثر سوختن کامل متان، CO_2 و H_2O تولید می‌شوند که هر دو آن‌ها جزء گازهای گلخانه‌ای محسوب می‌شوند.

گزینهٔ (۲): می‌دانیم متان در آب محلول نیست؛ *بنابراین* برای تعیین گرمای ناشی از سوختن آن، نمی‌توان از گرماسنج لیوانی استفاده کرد. *هواستون باشه* که گرماسنج لیوانی برای اندازه‌گیری گرمای واکنش‌هایی مناسب است که با مواد گازی‌شکل سروکار ندارند.

نکته اختلاف آنتالپی سوختن دو آلکان متوالی ثابت است و برابر با آنتالپی سوختن گروه CH_2 می‌باشد.

گزینهٔ (۳): متان عضو خانوادهٔ آلکان‌ها می‌باشد. اگر آنتالپی سوختن متان (CH_4) و پروپان (C_3H_8) را به ترتیب برابر با a و b کیلوژول بر مول در نظر بگیریم؛ در نتیجه $b-a$ نشان‌دهندهٔ آنتالپی سوختن $2CH_2$ خواهد بود؛ بنابراین آنتالپی سوختن بوتان (C_4H_{10}) که تنها یک CH_2 بیشتر از C_3H_8 دارد، برابر خواهد بود با:

$$\Delta H_{\text{سوختن}}(C_4H_{10}) = \Delta H_{\text{سوختن}}(C_3H_8) + \Delta H_{\text{سوختن}}(CH_2) = b + \frac{b-a}{2}\ kJ.mol^{-1}$$

گزینهٔ (۴): در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، اندازهٔ آنتالپی سوختن بیشتر شده (به علت افزایش شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در هر مول از آلکان) و ارزش سوختی، کم‌تر می‌شود.

هرچند متان بین سایر هیدروکربن‌ها کم‌ترین اندازهٔ آنتالپی سوختن را دارد و بعد از آن نیز C_2H_2 کم‌ترین آنتالپی سوختن را دارد، *اما هواستون باشه که* **متان بیشترین ارزش سوختی** را **میان هیدروکربن‌ها** دارد.

نکته

مقایسهٔ آنتالپی سوختن ترکیب‌های آلی

- مقایسهٔ آنتالپی سوختن مول‌های برابری از هیدروکربن‌های گوناگون: هر چه جرم‌مولی یک هیدروکربن بیشتر باشد، آنتالپی سوختن یک مول از آن نیز بیشتر است.

مثال: مقایسهٔ آنتالپی سوختن:

$$\underset{(16\ g.mol^{-1})}{CH_4} < \underset{(26\ g.mol^{-1})}{C_2H_2} < \underset{(28\ g.mol^{-1})}{C_2H_4} < \underset{(30\ g.mol^{-1})}{C_2H_6} < \underset{(40\ g.mol^{-1})}{C_3H_4} < \underset{(42\ g.mol^{-1})}{C_3H_6} < \underset{(44\ g.mol^{-1})}{C_3H_8}$$

- مقایسهٔ آنتالپی سوختن جرم‌های برابری از هیدروکربن‌های گوناگون (ارزش سوختی): در هیدروکربن‌های یک خانواده، هر چه هیدروکربنی جرم مولی کم‌تری داشته باشد، آنتالپی سوختن یک گرم از آن بیشتر است.

مثال: مقایسهٔ آنتالپی سوختن یک گرم متان، اتان و پروپان: $C_3H_8 < C_2H_6 < CH_4$

- مقایسهٔ ارزش سوختی هیدروکربن‌هایی با شمار کربن برابر: هر چه جرم مولی هیدروکربن بیشتر باشد، ارزش سوختی یک گرم از آن نیز بیشتر است.

مثال: $C_2H_2 < C_2H_4 < C_2H_6$

- مقایسهٔ اندازهٔ آنتالپی سوختن آلکان‌ها، آلکن‌ها، آلکین‌ها و الکل‌های یک عاملی راست‌زنجیر هم‌کربن به صورت کلی به شکل مقابل است:

آلکان‌ها > آلکن‌ها > الکل‌ها > آلکین‌ها

- مقایسهٔ ارزش سوختی آلکان‌ها، آلکن‌ها، آلکین‌ها و الکل‌های یک‌عاملی راست‌زنجیر هم‌کربن به صورت کلی به شکل زیر است:

آلکان‌ها > آلکن‌ها > آلکین‌ها > الکل‌ها

- در الکل‌ها برخلاف هیدروکربن‌ها با افزایش تعداد اتم کربن، ارزش سوختی، افزایش می‌یابد. برای مثال، ارزش سوختی متانول از ارزش سوختی اتانول کم‌تر است.

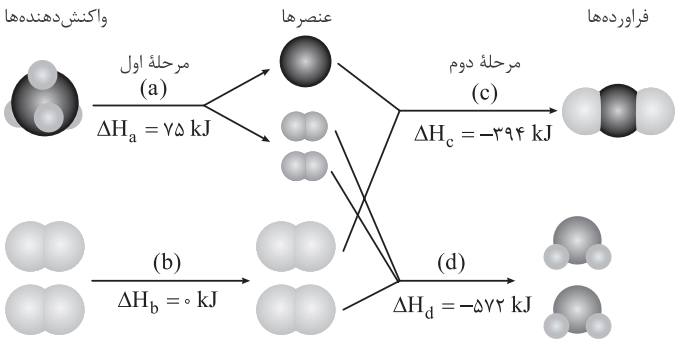
۱۰۴ سوختن کامل متان را می‌توان به صورت زیر نمایش داد. اگر ۳۲ گرم متان با خلوص ۸۰ درصد در این واکنش مصرف شود، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟ $(O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$

۱) ۱۷۸۲

۲) ۱۴۲۵/۶

۳) ۸۹۰

۴) ۳۵۶۴



مشاوره قانون هس تقریباً هر سال در کنکور سؤال *دارد* و جزء مباحثی است که باید بلد *باشین*!

گام اصلی در حل این سؤالات، انجام محاسبات نهایی در آن‌هاست که نیاز به تکرار و تمرین زیادی دارد.

درس Box

آنتالپی برخی واکنش‌های شیمیایی به روش تجربی و به کمک دستگاهی به نام گرماسنج لیوانی اندازه‌گیری می‌شود، ولی آنتالپی **بسیاری** از واکنش‌های شیمیایی را **نمی‌توان** به روش تجربی اندازه‌گیری کرد؛ زیرا برخی از واکنش‌ها، مرحله‌ای از یک واکنش پیچیده هستند و برخی دیگر به آسانی انجام نمی‌شوند و تأمین شرایط بهینه برای انجام آن‌ها بسیار دشوار است. در این موارد شیمی‌دان‌ها *دست به دامن!* روش‌های دقیق دیگری مانند قانون هس می‌شوند.

نخستین بار جناب «هنری هس» فهمید که گرمای یک واکنش معین به راهی که برای انجام آن در پیش گرفته می‌شود، وابسته نیست؛ یعنی اگر یک واکنش شیمیایی را از چند مسیر مختلف انجام دهیم، مقدار ΔH در همهٔ مسیرها یکسان است و ΔH *فقط و فقط!* به حالت آغازی و پایانی فرایند بستگی دارد. بیان علمی قانون هس که به قانون **جمع‌پذیری گرمای واکنش‌ها** هم *معروفه*، *این هوریاست*:

«اگر معادلهٔ واکنشی را بتوان از جمع معادلهٔ دو یا چند واکنش دیگر به دست آورد، ΔH آن نیز از جمع جبری ΔH همان واکنش‌ها به دست می‌آید.»

توجه: استفاده از قانون هس به شرطی مجاز است که شرایط انجام همهٔ واکنش‌ها (مانند دما و فشاری که واکنش‌ها در آن انجام می‌شوند)، یکسان باشد.

بعضی وقتا! برای محاسبهٔ ΔH یک واکنش به کمک قانون هس، *باید در واکنش‌هایی که بهمون می‌دن، یه تغییراتی ایجاد کنیم*؛ مثلاً واکنش‌ها را وارونه کرده یا در عددی ضرب کنیم. *پس بدانید و آگاه باشید!* که:

۱) اگر معادلهٔ یک واکنش را به صورت وارونه بنویسیم، مقدار ΔH آن قرینه می‌شود:

$$A \rightarrow B\ ,\ \Delta H = a\ kJ \Rightarrow B \rightarrow A\ ,\ \Delta H = -a\ kJ$$

توجه: اگر یک واکنش شیمیایی با ΔH وابسته به آن بیان شود، به آن واکنشِ **گرماشیمیایی** یا **ترموشیمیایی** می‌گویند.

۲) اگر معادلهٔ یک واکنش شیمیایی را در عددی ضرب یا بر آن عدد تقسیم کنیم، مقدار ΔH واکنش هم در همان عدد ضرب یا بر آن عدد تقسیم می‌شود:

$$A \rightarrow B\ ,\ \Delta H = a\ kJ \xrightarrow{\times n} nA \rightarrow nB\ ,\ \Delta H = na\ kJ$$

مثال: با توجه به معادله‌های شیمیایی زیر:

الف) $C(s, \text{الماس}) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g) \quad \Delta H = -۳۹۵\ KJ$

ب) $2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g) \quad \Delta H = -۵۶۶\ KJ$

پ) $C(s, \text{گرافیت}) + CO_2(g) \rightarrow 2CO(g) \quad \Delta H = +۱۷۳\ KJ$

ΔH واکنش تبدیل آلوتروپ گرافیت به الماس، چند کیلوژول است؟ *(ریاضی خارج ۹۴)*

۱) -۲۰ ۲) -۲ ۳) $+۳$ ۴) $+۲۰$

پاسخ: گزینهٔ (۳)؛ برای این‌که به واکنش تبدیل آلوتروپ گرافیت به الماس برسیم: $C(s, \text{گرافیت}) \rightarrow C(s, \text{الماس})$

باید واکنش «الف» را معکوس کنیم تا $C(s, \text{الماس})$ در سمت راست واکنش کلی قرار گیرد. واکنش‌های «ب» و «پ» را هم دست نمی‌زنیم تا $C(s, \text{گرافیت})$ در سمت چپ واکنش کلی *با هوش کنه!* و CO_2 و O_2 و CO های این سه واکنش با هم ساده شوند.

به این ترتیب خواهیم داشت:

الف) $CO_2(g) \rightarrow C(s,\text{الماس}) + O_2(g) \quad , \quad \Delta H'_1 = -(-۳۹۵) = +۳۹۵kJ$

ب) $۲CO(g) + O_2(g) \rightarrow ۲CO_2(g) \quad , \quad \Delta H_2 = -۵۶۶kJ$

پ) $C(s,\text{گرافیت}) + CO_2(g) \rightarrow ۲CO(g) \quad , \quad \Delta H_3 = +۱۷۳kJ$

واکنش کلی: $C(s,\text{گرافیت}) \rightarrow C(S,\text{الماس}) \quad , \quad \Delta H_{\text{کلی}} = \Delta H'_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 = ۳۹۵ + (-۵۶۶) + ۱۷۳ = +۲kJ \Rightarrow$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ΔH واکنش سوختن کامل متان را محاسبه می‌کنیم:

واکنش اول: $CH_4 \rightarrow C + ۲H_2 \quad \Delta H = ۷۵\,kJ$

واکنش دوم: $C + O_2 \rightarrow CO_2 \quad \Delta H = -۳۹۴\,kJ$

واکنش سوم: $۲H_2 + O_2 \rightarrow ۲H_2O \quad \Delta H = -۵۷۲\,kJ$

واکنش کلی: $CH_4 + ۲O_2 \rightarrow CO_2 + ۲H_2O \quad \Delta H = -۵۷۲ - ۳۹۴ + ۷۵ = -۸۹۱\,kJ$

خواستون باشه یه موقع توی همچین تستی سریع نزنید ۸۹۱− ! ببینید سؤال پی می‌فواد و شاید طراح برای اذیت‌کردن شما ۸۹۱− هم توی گزینه‌ها گذاشته باشه! البته الان تو گزینهٔ (۳)، ۸۹۰ رو داده. خلاصه گزینهٔ (۳) جواب درست نیست! یه وقت گول نفوری!

گام دوم: گرمای آزادشده در این واکنش را به ازای مصرف ۳۲ گرم متان با درصد خلوص ۸۰٪، به دست می‌آوریم:

$$۳۲\,gCH_4 \times \frac{۸}{\underbrace{۱۰۰}_{\text{درصدخلوص}}} \times \frac{۱\,molCH_4}{۱۶\,gCH_4} \times \frac{۸۹۱kJ}{۱\,molCH_4} = ۱۴۲۵/۶\,kJ$$

تیزبازی

جواب نهایی از محاسبهٔ حاصل‌ضرب $۱/۶ \times ۸۹۱$ به دست می‌آید؛ بنابراین با توجه به اختلاف گزینه‌ها می‌توانیم به راحتی! به جواب برسیم!

۱۰۵ بر پایهٔ واکنش‌های گرماشیمیایی داده‌شده، تهیهٔ ۲۳ گرم اتانول از تخمیر گلوکز جامد، چند کیلوژول انرژی آزاد می‌کند؟ (گاز کربن دی‌اکسید، فراوردهٔ دیگر واکنش است؛ $O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1}$)

$$CH_3COOH(l)+2O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)+2H_2O(l) \quad , \quad \Delta H=-874kJ$$
$$C_2H_5OH(l)+O_2(g) \rightarrow CH_3COOH(l)+H_2O(l) \quad , \quad \Delta H=-493kJ$$
$$C_6H_{12}O_6(s)+6O_2(g) \rightarrow 6CO_2(g)+6H_2O(l) \quad , \quad \Delta H=-2805kJ$$

۱) ۱۵/۷۵ ۲) ۱۷/۷۵ ۳) ۳۱/۵ ۴) ۳۵/۵

مشاوره این سؤال شبیه‌ساز کنکور ۱۴۰۳ و به نسبت وقت‌گیر است. بهتره این سؤال رو در دور اول رها کنین و به سؤالات ساده‌تر بپردازین.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ واکنش مورد نظر را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$C_6H_{12}O_6(s) \rightarrow 2C_2H_5OH(l)+2CO_2(g)$$

گام دوم: *توی روابطمون* باید یک مولکول گلوکز سمت چپ و دو مولکول اتانول سمت راست داشته باشیم؛ پس باید واکنش دوم را قرینه و در دو ضرب کرده و با واکنش سوم جمع کنیم.

حال می‌بینیم که دو مولکول CH_3COOH داریم که اصلاً در واکنش کلی ما وجود خارجی ندارد! *پس باید آن را حذف کنیم!*

چه‌طوری؟ کافیه واکنش اول رو قرینه و ضرب در دو کنیم:

$$4CO_2+4H_2O \rightarrow 2CH_3COOH+4O_2 \quad , \quad \Delta H'=+874\times2$$
$$2CH_3COOH+2H_2O \rightarrow 2C_2H_5OH+2O_2 \quad , \quad \Delta H'=+493\times2$$
$$C_6H_{12}O_6+6O_2 \rightarrow 6CO_2+6H_2O \quad , \quad \Delta H'=-2805$$

واکنش کلی: $C_6H_{12}O_6(s) \rightarrow 2C_2H_5OH(l)+2CO_2(g)$

$$\Delta H_{\text{کلی}}=-2805+(493\times2)+(874\times2)=-71kJ$$

گام سوم: مقدار انرژی آزادشده به ازای تولید ۲۳ گرم اتانول در این واکنش را محاسبه می‌کنیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$\overset{1}{23}\,g\,C_2H_5OH\times\frac{1mol\,C_2H_5OH}{\underset{2}{46}\,g\,C_2H_5OH}\times\frac{71kJ}{2mol\,C_2H_5OH}=\frac{71}{4}=\underbrace{\frac{72}{4}}_{18}-\underbrace{\frac{1}{4}}_{0/25}=18-0/25=17/75$$

یه جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{C_2H_5OH}}=\frac{\text{گرمای تولیدشده}}{\underbrace{|\Delta H|}_{\text{انرژی آزادشده}}}\Rightarrow\frac{\overset{1}{23}}{\underset{2}{2\times46}}=\frac{x}{71kJ}\Rightarrow x=\frac{71}{4}=\underbrace{\frac{72}{4}}_{18}-\underbrace{\frac{1}{4}}_{0/25}=18-0/25=17/75$$

بر پایهٔ واکنش‌های گرماشیمیایی داده‌شده، تهیهٔ یک مول اتانول از تخمیر گلوکز (به حالت جامد)، چند کیلوژول انرژی آزاد می‌کند؟ (گاز کربن دی‌اکسید، فراوردهٔ دیگر واکنش است.) *(تجربی- داخل ۱۴۰۳- نوبت دوم)*

$$CH_3COOH(l)+2O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)+2H_2O(l) \quad , \quad \Delta H=-874kJ$$
$$C_2H_5OH(l)+O_2(g) \rightarrow CH_3COOH(l)+H_2O(l) \quad , \quad \Delta H=-493kJ$$
$$C_6H_{12}O_6(s)+6O_2(g) \rightarrow 6CO_2(g)+6H_2O(l) \quad , \quad \Delta H=-2805kJ$$

۱) ۱۰۶/۵ ۲) ۱۵۹ ۳) ۷۱ ۴) ۳۵/۵