آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله نهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۴۰۳/آذر/۳۰

دفترچه شماره یک

حسابان و ریاضیات پایه	هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	بودجه‌بندی دروس
ریاضی (۱) فصل ۳ صفحهٔ ۴۷ تا ۶۸ حسابان (۱) فصل ۴ (درس ۴) صفحهٔ ۱۱۰ تا ۱۱۲ حسابان (۲) فصل ۲ صفحهٔ ۲۳ تا ۴۴	هندسه (۱) فصل ۴ صفحهٔ ۷۷ تا ۹۶ هندسه (۳) فصل ۱ (درس ۲ از ابتدای دترمینان و کاردبردهای آن) و فصل ۲ (درس ۱) صفحهٔ ۲۷ تا ۳۹	ریاضیات گسسته فصل ۱ (درس ۲ از ابتدای قضیهٔ تقسیم و کاربردها و درس ۳) صفحهٔ ۱۴ تا ۳۰	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۵ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

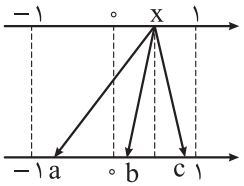
دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع مجدد دوازدهم از مهر

Azmoon.kheilisabz.com

۱- در شکل زیر، عدد x از محور بالا به مربع و ریشه‌های مرتبهٔ دوم و مربع خود روی محور پایین وصل شده است. اگر $\frac{b}{ac^2}=-\frac{1}{8}$ باشد، مقدار $\sqrt[3]{x}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲
۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴

۲- اگر $A=\frac{\sqrt{8\sqrt[3]{A}}\times 2^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}\times 8^{-\frac{2}{3}}}$ باشد، مقدار A^5 کدام است؟

۱) 2^9 ۲) 2^{10} ۳) 2^{12} ۴) 2^{13}

۳- با فرض $A=\frac{8+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{3\sqrt{3}-8}{7+2\sqrt{3}}$، حاصل $A+\sqrt{3}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴- اگر a و b دو عدد حقیقی بزرگ‌تر از یک و $a^3=2+b^3$ باشد، حاصل $\frac{a^2+a+1}{b^2-b+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1+b}{1-a}$ ۲) $\frac{b+1}{a-1}$ ۳) $-\frac{a}{b}$ ۴) $\frac{b}{a}$

۵- اگر $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-3}=4$ و $a+\sqrt{x-a}-\sqrt{x-3}=4$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{13}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{11}{3}$

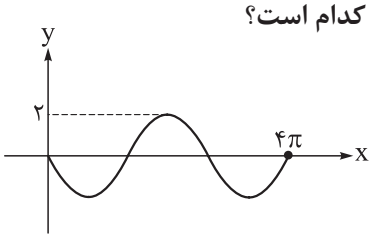
۶- اگر $4\sin^2\alpha+9\cos^2\alpha=12\sin\alpha\cos\alpha$ باشد، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{6}{13}$ ۲) $\frac{6}{13}$ ۳) $-\frac{5}{13}$ ۴) $\frac{5}{13}$

۷- اگر $\cos\frac{\pi}{16}=a$ باشد، حاصل $16a^2(a^2-1)$ کدام است؟

۱) $1-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}-2$ ۳) $2\sqrt{2}-3$ ۴) -1

۸- نمودار تابع $y=a\sin bx$ به صورت زیر است. دورهٔ تناوب تابع $y=\cos(\frac{a}{b}x)$ کدام است؟



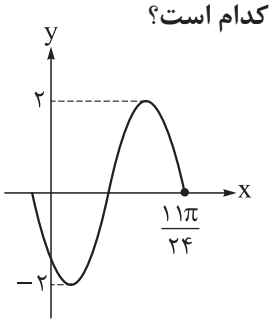
۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$
۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

محل انجام محاسبات

۹- اگر $\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{۹}{۱۳}$ و $\tan\beta=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) -۲ یا $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲ یا $-\frac{۱}{۲}$
۳) ۲ یا $\frac{۱}{۲}$
۴) -۲ یا $-\frac{۱}{۲}$

۱۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=c+a\cos^۲(bx+\frac{\pi}{۶})$ به صورت زیر است. حاصل $c+ab$ کدام است؟



۱) $-\frac{۳۴}{۱۱}$
۲) $\frac{۲۳}{۱۱}$
۳) -۶
۴) ۱۰

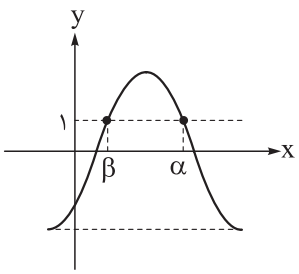
۱۱- بزرگ‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $۳\sin x=\cos ۲x+۱$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند برابر کوچک‌ترین ریشهٔ آن در این بازه است؟

۱) ۷
۲) ۵
۳) ۱۱
۴) ۳

۱۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۲\cos x$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۳}$
۲) $\frac{۴\pi}{۳}$
۳) $\frac{۱۱\pi}{۶}$
۴) $\frac{۵\pi}{۳}$

۱۳- شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\sin x-۲\cos x$ در یک دورهٔ‌تناوب است. حاصل $\sin(\alpha-\beta)$ کدام است؟

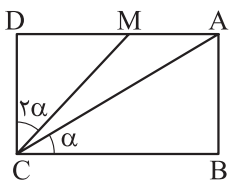


۱) $\frac{۴}{۵}$
۲) $-\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $-\frac{۳}{۵}$

۱۴- تابع $f(x)=\frac{\tan ۳x}{۱-\tan^۲ ۳x}$ در بازهٔ $(\frac{۲\pi}{۳},\alpha)$ اکیداً صعودی است، حداکثر مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$
۲) $\frac{۱۳\pi}{۳}$
۳) $\frac{۲۵\pi}{۶}$
۴) $\frac{۵۳\pi}{۱۲}$

۱۵- در مستطیل شکل مقابل، $\tan ۲\alpha=\frac{۳}{۴}$ است. نسبت $\frac{AM}{DM}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) $\frac{۵}{۳}$

محل انجام محاسبات

۱۶- معادلهٔ $\sin ۲nx + \cos nx = ۰$ در بازهٔ $(۰, \pi)$، ۵ ریشه دارد. مقدار طبیعی n کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷- در مثلث ABC رابطهٔ $۲\cos(۲A + ۲B) + ۱ = \cos(C + \frac{\pi}{۶})$ برقرار است. $\cos(C - \frac{\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۸- اگر $\frac{\cos ۲x}{\tan x - \cot x} = \frac{۳}{۸}$ باشد، مقدار $۳\tan x + ۴$ کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{۳}$ ۲) $\pm\sqrt{۷}$ ۳) $\pm\sqrt{۵}$ ۴) $\pm۲\sqrt{۲}$

محل انجام محاسبات

۱۹- در ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۶ \\ -۶ & x & ۵ \\ ۱۱ & ۹ & -۳ \end{bmatrix}$ اگر به درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون سوم، ۹ واحد اضافه کنیم، دترمینان آن تغییری نمی‌کند. مقدار x کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۰- اگر A یک ماتریس اسکالر مرتبهٔ دو و ماتریس‌های B و C وارون یکدیگر باشند به طوری که $|(AC-C)(B-۲BA)|=۰$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۲۱- اگر A ماتریسی ۳×۳ و دترمینان آن برابر ۲ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $|A|.A^۲$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۲۸ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۲- از تقاطع یک صفحه با یک سطح استوانه‌ای، چه تعداد از شکل‌های زیر، می‌تواند ایجاد شود؟

الف) دایره **ب) بیضی**

پ) یک خط **ت) دو خط موازی**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳- دو خط d و d' به فاصلهٔ ۴ واحد از یکدیگر مفروض‌اند، مکان هندسی نقاطی از صفحه که حاصل‌ضرب فاصلهٔ آن‌ها از این دو خط برابر ۴ واحد باشد، کدام است؟

۱) یک خط ۲) دو خط ۳) سه خط ۴) چهار خط

۲۴- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع $۲\sqrt{۳}$ مفروض است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از سه ضلع این مثلث برابر با ۳ باشد، کدام است؟

۱) محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۴\sqrt{۳}$

۲) محیط مثلث ABC

۳) نقاط واقع بر محیط و داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۴\sqrt{۳}$

۴) نقاط واقع بر محیط و داخل مثلث ABC

۲۵- دو صفحهٔ موازی $P_۱$ و $P_۲$ و نقطهٔ A در فضا مفروض‌اند. اگر خط d واقع در صفحهٔ $P_۱$ و نقطهٔ A غیرواقع بر خط d باشد، چند خط گذرا از A و موازی صفحهٔ $P_۲$ وجود دارد به طوری که متقاطع با خط d باشد؟

۱) صفر ۲) بی‌شمار ۳) ۱ ۴) صفر یا بی‌شمار

محل انجام محاسبات

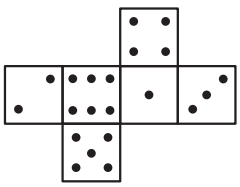
۲۶- اگر صفحهٔ P بر صفحهٔ Q عمود باشد،کدام گزاره درست است؟

۱) هر خط واقع در صفحهٔ P بر صفحهٔ Q عمود است.
۲) هر خط که بر صفحهٔ Q عمود باشد، در صفحهٔ P قرار دارد.
۳) هر خط عمود بر صفحهٔ P موازی با صفحهٔ Q است و یا درون صفحهٔ Q قرار دارد.
۴) هر خط موازی با صفحهٔ Q بر صفحهٔ P عمود است.

۲۷- اگر مقابل یکی از وجه‌های یک مکعب‌مستطیل بایستیم، مجموع مساحت‌های نماهای چپ، بالا و روبه‌روی آن برابر ۲۴ واحد مربع خواهد بود. مساحت کل این مکعب‌مستطیل چند واحد مربع است؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۵ ۴) ۴۸

۲۸- گستردهٔ یک مکعب روی صفحه به صورت زیر است. بزرگ‌ترین مجموع تعداد نقاط سه وجه مشترک در یک رأس این مکعب کدام است؟

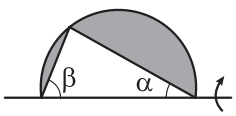


۱) ۱۵
۲) ۱۴
۳) ۱۳
۴) ۱۲

۲۹- در یک مخروط قائم، شعاع قاعده ۹ و ارتفاع آن ۱۲ است. اگر صفحه‌ای موازی با قاعده و فاصلهٔ ۴ از آن مخروط را قطع کند، مساحت مقطع حاصل به کدام عدد صحیح نزدیک‌تر است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۱ ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۱۳

۳۰- مطابق شکل، از نیم‌دایره‌ای به شعاع R، یک مثلث جدا کرده و قسمت باقی‌مانده را حول قطر نیم‌دایره دوران می‌دهیم. اگر $\beta = 5\alpha$، آن‌گاه حجم شکل حاصل از دوران، چند برابر πR^3 است؟



۱) $\frac{7}{6}$ ۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{6}$

محل انجام محاسبات

۳۱- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، عدد $2m-5n$ را می‌توانید به صورت $17k+r$ بنویسید، به طوری‌که $k\in\mathbb{Z}$ و $0\le r<47$. در این صورت مجموع ارقام r کدام نیست؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۳۲- p عددی اول است و می‌توانیم p را به شکل $p=6k+r$ نمایش دهیم که در آن $k\in\mathbb{Z}$؛ چند مقدار صحیح نامنفی برای r می‌تواند وجود داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۳- اگر برای اعداد صحیح a ، b و c و عدد طبیعی m داشته باشیم $a+c\overset{m}{\equiv}b-c$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a\overset{m}{\equiv}b-2c$ ۲) $b\overset{m}{\equiv}a+2c$

۳) $(b-a)c\overset{m}{\equiv}2c^2$ ۴) $a-b\overset{m}{\equiv}2c$

۳۴- کدام هم‌نهشتی درست نیست؟

۱) $27^7\overset{13}{\equiv}1$ ۲) $1000^{13}\overset{7}{\equiv}-1$ ۳) $2^{11}\overset{23}{\equiv}1$ ۴) $29^{19}\overset{12}{\equiv}-1$

۳۵- اگر در یک سال ۲۰ مرداد شنبه باشد، در این صورت ۳۰ آذر در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱) جمعه ۲) شنبه ۳) چهارشنبه ۴) پنجشنبه

۳۶- پاسخ عمومی معادله‌های هم‌نهشتی $4x\overset{5}{\equiv}17$ و $3y\overset{7}{\equiv}13$ به صورت $x=ak+b$ و $y=ck'+d$ است که در آن‌ها $k,k'\in\mathbb{Z}$ و $a,b,c,d\in\mathbb{N}$. کم‌ترین مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۳ ۳) ۹ ۴) ۵

۳۷- جواب‌های عمومی کدام معادلهٔ سیالهٔ خطی به صورت $(x,y)=(6k+1,3-5k)$ است؟

۱) $12x-10y+18=0$ ۲) $10x+12y=46$

۳) $15x-18y+39=0$ ۴) $15x+18y=63$

۳۸- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که مضرب ۷ بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۸ و ۱۱ به ترتیب ۳ و ۸ باشد؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۳۹- اگر عدد $2x^2-x-6$ مضرب ۵۳ باشد، اختلاف دو عدد سه‌رقمی مثبت برای x، حداکثر چه‌قدر است؟

۱) ۸۲۵ ۲) ۸۴۸ ۳) ۸۶۲ ۴) ۸۷۱

محل انجام محاسبات

۴۰- اگر $(a,b)=d$ و $[a,b]=c$، آن‌گاه چند مورد از معادله‌های زیر قطعاً جواب دارد؟

الف) $ax+by=c$

ب) $ax+by=d$

پ) $ax+dy=۲b-۳a$

ت) $cx+by=c-۲b$

ث) $dx+cy=a-b$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.
آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.
azmoon.kheilisabz.com

محل انجام محاسبات

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله نهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۳۰/آذر/۱۴۰۳

دفترچه شماره دو

فیزیک	شیمی
فیزیک (۱) فصل ۳ صفحهٔ ۵۳ تا ۸۲ فیزیک (۳) فصل ۲ صفحهٔ ۲۹ تا ۶۰	شیمی (۱) فصل ۳ (از ابتدای آیا نمک‌ها به یک اندازه در آب حل می‌شوند؟) صفحهٔ ۱۰۰ تا ۱۲۲ شیمی (۳) فصل ۲ (تا انتهای صفحهٔ ۵۹) صفحهٔ ۳۷ تا ۵۹

بودجه‌بندی دروس

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۸۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	
مجموع	۶۵ سؤال			۸۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع مجدد دوازدهمی‌ها از مهر

Azmoon.kheilisabz.com

۴۱- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند، جسم با شتاب ثابت ($a \neq 0$) حرکت می‌کند.

ب) در تصادفات، کیسهٔ هوا با افزایش مدت‌زمان برخورد، نیروی متوسط وارد بر سرنشین را کاهش می‌دهد.

پ) نیروی اصطکاک جنبشی به مساحت سطح تماس دو جسم بستگی ندارد.

ت) در حالتی‌که یک جسم با تندی حدی خود در حال سقوط است، نیروی مقاومت هوای وارد بر آن برابر صفر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

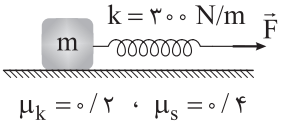
۴۲- جسمی به جرم $2\,kg$ از ارتفاع ۷۲متری سطح زمین رها شده و $4\,s$ بعد به سطح زمین می‌رسد. اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم، با فرض ثابت‌بودن، چند نیوتون است؟ $(g = 9/8\ N/kg)$

۱) ۰/۸ ۲) ۱ ۳) ۱/۶ ۴) ۲

۴۳- فنری به جرم ناچیز و طول $40\,cm$ و ثابت $800\ N/m$ از سقف آسانسوری آویزان است. اگر وزنه‌ای به جرم $4\,kg$ را از فنر آویزان کنیم و آسانسور با شتاب رو به پایین $2\,m/s^2$ حرکت کند، طول فنر به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ $(g = 10 m/s^2)$

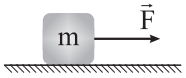
۱) ۳۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۴ ۴) ۴۶

۴۴- در شکل زیر، جسمی به جرم $12kg$ روی یک سطح افقی توسط فنری افقی با ثابت $300\ N/m$ کشیده می‌شود. در حالتی‌که جسم در آستانهٔ حرکت قرار دارد، طول فنر به L_1 و در حالتی که جسم با شتاب $1\,m/s^2$ به حرکت درمی‌آید، طول فنر به L_2 می‌رسد. $L_2 - L_1$ برابر چند سانتی‌متر است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) −۲ ۴) −۴

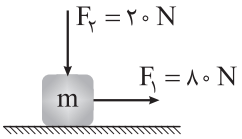
۴۵- در شکل زیر، به جسم نیروی افقی $\vec{F}$ وارد شده و جسم روی سطح افقی با تندی ثابت $15\ m/s$ در حال حرکت است. در این حالت، نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می‌کند، با راستای افقی زاویهٔ 53° می‌سازد. اگر در لحظه‌ای نیروی $\vec{F}$ حذف شود، چند ثانیه پس از این لحظه، جسم متوقف می‌شود؟ $(g = 10\ N/kg$ و $\sin 53^\circ = 0/8)$



۱) ۱/۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

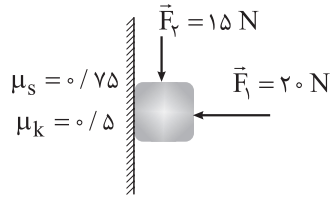
محل انجام محاسبات

۴۶- در شکل زیر، جعبه‌ای تحت تأثیر نیروی افقی F_1 و نیروی قائم F_2، در مبدأ زمان از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. در لحظهٔ $t = 3s$ نیروی F_1 حذف شده و $2s$ پس از آن جعبه متوقف می‌شود. اگر جابه‌جایی جعبه از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ توقف آن، برابر $30m$ باشد، جرم جعبه چند کیلوگرم است؟ $(g = 10\ N/kg)$



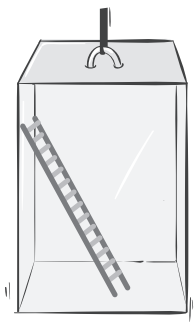
۱) ۶
۲) ۴
۳) ۱۰
۴) ۸

۴۷- در شکل زیر، به جسمی به جرم $500g$ که به دیواری قائم تکیه داده شده است، نیروی افقی $\vec{F}_1$ و نیروی قائم $\vec{F}_2$ وارد می‌شود. اندازهٔ نیرویی که جسم به دیوار قائم وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = 10\ m/s^2)$



۱) $10\sqrt{5}$
۲) ۲۰
۳) $20\sqrt{2}$
۴) ۲۵

۴۸- در شکل زیر، نردبانی به جرم $20\ kg$ درون اتاقک یک آسانسور که با شتاب رو به پایینی به بزرگی $3\ m/s^2$ در حال حرکت است، قرار دارد. اصطکاک دیوارهٔ قائم اتاقک آسانسور ناچیز است. اگر در آستانهٔ لغزش نردبان، اندازهٔ نیرویی که نردبان به دیوارهٔ قائم وارد می‌کند، $42N$ باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین نردبان و کف اتاقک آسانسور کدام است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۰/۲
۲) ۰/۳
۳) ۰/۴
۴) ۰/۶

۴۹- جسم ساکنی به جرم $10\ kg$ روی سطح افقی قرار دارد و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح به ترتیب ۰/۵ و ۰/۲۵ است. اگر در مبدأ زمان به جسم نیروی افقی $45N$ وارد شود، اندازهٔ تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t = 2s$ در SI چند واحد است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۲۵
۲) ۲۰
۳) ۵
۴) صفر

محل انجام محاسبات

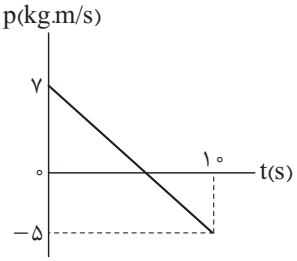
۵۰- خودرویی به جرم $800\ kg$ که در مسیر مستقیم در حال حرکت است، با تندی $72\ km/h$ به مانعی برخورد کرده و با تندی $18\ km/h$ در همان راستا برمی‌گردد. اگر مدت برخورد $0/2\ s$ و جرم رانندهٔ خودرو $80\ kg$ باشد، اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر راننده، در مدت برخورد چند نیوتون است؟

۱) 10^4 ۲) 10^5 ۳) 6×10^3 ۴) 6×10^4

۵۱- تندی جسمی به جرم $5\ kg$ در لحظه‌ای برابر v است. اگر با تغییر تندی جسم، اندازهٔ تکانهٔ آن $10\ \frac{kg.m}{s}$ و انرژی جنبشی آن $50\ J$ افزایش یابد، v برابر چند متر بر ثانیه است؟

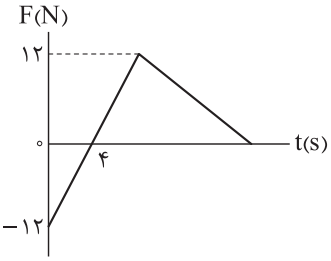
۱) $1/5$ ۲) $3/5$ ۳) 4 ۴) 6

۵۲- نمودار تکانه ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در لحظه‌ای که جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند، نیروی خالص وارد بر آن برحسب نیوتون کدام است؟



۱) $1/2\ \vec{i}$
۲) $-1/2\ \vec{i}$
۳) $0/7\ \vec{i}$
۴) $-0/7\ \vec{i}$

۵۳- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی برحسب زمان به شکل زیر است. جسم در مبدأ زمان ساکن است و نیروی خالص در راستای محور x بر جسم وارد می‌شود. به ترتیب از راست به چپ، در لحظهٔ $t = 4s$ تکانهٔ جسم چند کیلوگرم متر بر ثانیه و در بازهٔ زمانی‌ای که شتاب جسم در جهت محور x است، اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر آن چند نیوتون است؟



۱) $24\ \vec{i}$ ، ۳
۲) $24\ \vec{i}$ ، ۶
۳) $-24\ \vec{i}$ ، ۳
۴) $-24\ \vec{i}$ ، ۶

۵۴- ارتفاع یک ماهواره از سطح زمین ۵ برابر شعاع زمین است. وزن آن در این ارتفاع چند برابر وزنش در سطح زمین است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{25}$ ۴) $\frac{1}{36}$

۵۵- شعاع سیاره‌ای کروی، ۲ برابر شعاع کرهٔ زمین و چگالی آن نصف چگالی کرهٔ زمین است. شتاب گرانش در سطح این سیاره، چند برابر شتاب گرانش در سطح زمین است؟

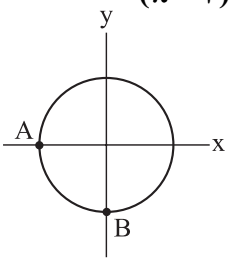
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۵۶- سفینه‌ای بین کرهٔ ماه و کرهٔ زمین قرار دارد و نیروی خالص گرانشی که از طرف ماه و زمین بر آن وارد می‌شود، برابر صفر است. اگر فاصلهٔ مرکز کرهٔ زمین تا مرکز کرهٔ ماه $۴\times۱۰^{۵}\,km$ باشد، فاصلهٔ سفینه تا مرکز کرهٔ زمین چند کیلومتر است؟ (جرم کرهٔ زمین را ۸۱ برابر جرم کرهٔ ماه در نظر بگیرید.)

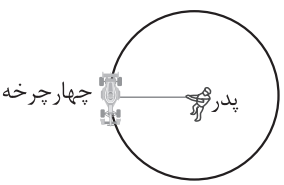
۱) ۴×۱۰^{۳} ۲) $۳/۶\times۱۰^{۴}$ ۳) ۴×۱۰^{۴} ۴) $۳/۶\times۱۰^{۵}$

۵۷- در شکل زیر، جسمی با تندی ثابت $۱۲\,m/s$ به طور ساعتگرد روی محیط دایره‌ای در حال حرکت است. اگر حداقل $۵\,s$ طول بکشد تا جسم از نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد، شتاب جسم در نقطهٔ B چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(\pi = ۳)$



۱) $۳/۶\,\vec{j}$
۲) $-۳/۶\,\vec{i}$
۳) $۱۰/۸\,\vec{j}$
۴) $-۱۰/۸\,\vec{i}$

۵۸- پدری فرزند ۲۰کیلوگرمی خود را در یک چهارچرخهٔ ایمن ۵کیلوگرمی قرار می‌دهد و با یک طناب ۲متری، چهارچرخه را روی سطح افقی زمین به گونه‌ای می‌کشد تا چهارچرخه روی مسیر دایره‌ای حرکت کند. با فرض یکنواخت‌بودن حرکت چهارچرخه و صرف نظر کردن از اصطکاک، اگر دورهٔ تناوب چهارچرخه $۴\,s$ باشد، اندازهٔ نیروی کشش طناب چند نیوتون است؟ $(\pi^{۲} = ۱۰)$



۱) ۱۰۰
۲) ۱۲۵
۳) ۲۰۰
۴) ۲۵۰

۵۹- یک دیسک افقی گردان حول محور قائم خود می‌چرخد و جسمی در فاصلهٔ ۴۰سانتی‌متری از مرکز دوران، روی دیسک قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیسک برابر ۰/۸ باشد، برای آن‌که جسم همراه با دیسک بچرخد، دورهٔ تناوب آن برحسب ثانیه برابر با کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ $(\sqrt{۲} = ۱/۴۱\,,\, g = \pi^{۲} = ۱۰\,m/s^{۲})$

الف) ۱/۲ **ب) ۱/۴**
پ) ۱/۶ **ت) ۱/۸**

۱) الف ۲) ت ۳) الف ـ ب ۴) پ ـ ت

۶۰- دو ماهوارهٔ A و B به جرم‌های $m_A = m$ و $m_B = ۳m$ روی دو مدار دایره‌ای‌شکل، به دور زمین در حال حرکت هستند. اگر در بازهٔ زمانی معین، دو ماهواره به ترتیب ۸ و ۶۴ مرتبه به دور زمین بچرخند، انرژی جنبشی ماهوارهٔ B، چند برابر انرژی جنبشی ماهوارهٔ A است؟

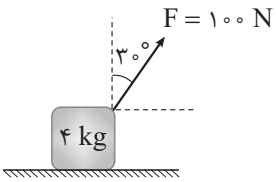
۱) ۱۲ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{۱}{۶}$

محل انجام محاسبات

۶۱- جرم موشکی در اثر مصرف سوخت نصف می‌شود. تندی موشک چند درصد و چگونه تغییر کند تا انرژی جنبشی آن ۲۸ درصد کاهش یابد؟

۱) ۲۰، افزایش یابد. ۲) ۲۰، کاهش یابد. ۳) ۲۵، افزایش یابد. ۴) ۲۵، کاهش یابد.

۶۲- در شکل زیر، جسمی به جرم ۴ kg با انرژی جنبشی ثابت ۳۲J روی سطح افقی در حالت حرکت است. در یک بازهٔ زمانی ۲ثانیه‌ای، کاری که نیروی $\vec{F}$ بر روی جسم انجام می‌دهد، چند ژول است؟



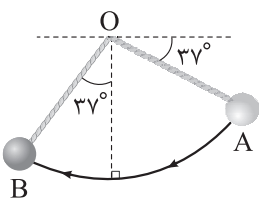
۱) $۸۰۰\sqrt{۳}$

۲) ۸۰۰

۳) $۴۰۰\sqrt{۳}$

۴) ۴۰۰

۶۳- در شکل زیر گلوله‌ای به جرم ۳۰۰ g به انتهای نخ سبکی به طول ۵۰ cm متصل شده و در حال حرکت است. طی جابه‌جایی گلوله از نقطهٔ A تا نقطهٔ B، کار نیروی وزن گلوله چند ژول است؟ ($\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$ و $g = ۱۰\ N/kg$)



۱) ۳

۲) ۰/۳

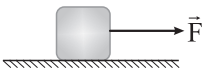
۳) −۳

۴) −۰/۳

۶۴- جسمی به جرم ۲kg از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر انرژی پتانسیل گرانشی جسم، پس از ۱۲m جابه‌جایی، ۲۰ درصد کاهش یابد، انرژی پتانسیل گرانشی جسم در ارتفاع H چند کیلوژول است؟ ($g = ۱۰\ N/kg$ و سطح زمین مبدأ پتانسیل گرانشی است.)

۱) ۱۴/۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱/۴۴ ۴) ۱/۲

۶۵- در شکل زیر، جسم ساکنی به جرم ۲۰ kg با نیروی افقی $\vec{F}$ روی سطح افقی با شتاب ثابت $۲\ m/s^۲$ به طرف راست به حرکت درمی‌آید. اگر نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می‌کند ۲۵۰ N باشد، کار نیروی $\vec{F}$ در ثانیهٔ دوم چند ژول است؟ $(g = ۱۰ m/s^۲)$



۱) ۵۷۰ ۲) ۷۶۰

۳) ۸۷۰ ۴) ۱۱۶۰

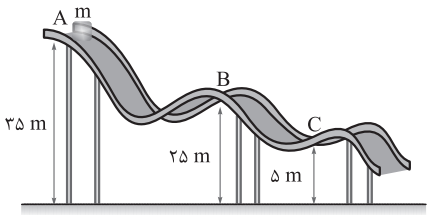
محل انجام محاسبات

۶۶- در شکل زیر، جسمی به جرم ۲kg روی سطح بدون اصطکاکی در امتداد سطح از نقطهٔ A با تندی ۵ m / s پرتاب می‌شود. از لحظهٔ پرتاب تا لحظه‌ای که تندی جسم به ۲ m / s می‌رسد، انرژی پتانسیل گرانشی آن چند ژول و چگونه تغییر می‌کند؟



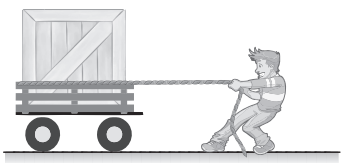
۱) ۲۱، کاهش می‌یابد.
۲) ۲۱، افزایش می‌یابد.
۳) ۲۹، کاهش می‌یابد.
۴) ۲۹، افزایش می‌یابد.

۶۷- در شکل زیر، جسمی روی سطح بدون اصطکاکی در حال حرکت است. اگر تندی جسم در نقطهٔ B، ۳ برابر تندی آن در نقطهٔ A باشد، تندی جسم در نقطهٔ C چند متر بر ثانیه است؟ (g = ۱۰ N / kg)

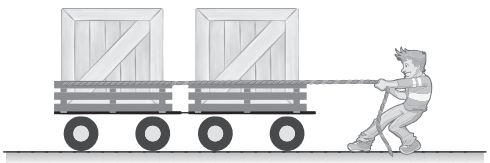


۱) ۵
۲) ۱۵
۳) ۲۵
۴) ۳۵

۶۸- شخصی با اعمال نیروی افقی، ثابت و یکسان $\vec{F}$ یک بار ارابهٔ شکل (۱) و بار دیگر ارابه‌های شکل (۲) را روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌کشد تا تندی ارابه‌ها از صفر به مقدار معین v برسد. دربارهٔ کار انجام‌شده توسط شخص (W) و مسافت طی‌شده توسط ارابه‌ها (d) در شکل‌های (۱) و (۲)، کدام درست است؟ (ارابه‌ها مشابه‌اند.)



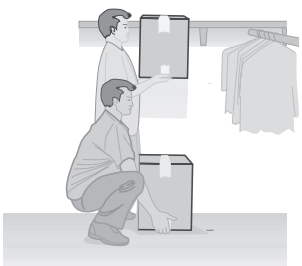
(۱)



(۲)

۱) $d_۱ = ۲d_۲ ، W_۲ = W_۱$
۲) $d_۱ = ۲d_۲ ، W_۲ = ۲W_۱$
۳) $d_۲ = ۲d_۱ ، W_۲ = W_۱$
۴) $d_۲ = ۲d_۱ ، W_۲ = ۲W_۱$

۶۹- در شکل زیر، شخصی با واردکردن نیروی قائم و ثابت ۶۰ N، جعبه‌ای به جرم ۵ kg را از روی سطح زمین و از حال سکون در امتداد قائم جابه‌جا می‌کند. تندی جعبه در ارتفاع ۱/۵ m از سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ (g = ۱۰ N / kg)



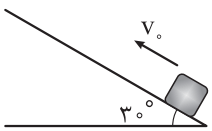
۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

محل انجام محاسبات

۷۰- چتربازی به جرم کل $100\ kg$ از بالونی در ارتفاع $500\ m$ از سطح زمین با سرعتی به بزرگی $1\ m/s$ به بیرون بالون می‌پرد. اگر او با سرعتی به بزرگی $5\ m/s$ به زمین برسد، در طول این مسیر اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز با فرض ثابت‌بودن، چند نیوتون است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

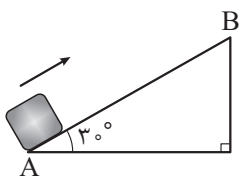
۱) ۹۹۵ / ۲
۲) ۹۹۷ / ۶
۳) ۱۰۰۲ / ۴
۴) ۱۰۰۴ / ۸

۷۱- در شکل زیر، جسمی با سرعت اولیهٔ $6\ m/s$ موازی با سطح رو به بالا پرتاب می‌شود. این جسم $90\ cm$ روی سطح جابه‌جا شده و می‌ایستد. چند درصد انرژی جنبشی اولیهٔ جسم توسط کار نیروی اصطکاک تلف شده است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۳۶
۲) ۶۴
۳) ۵۰
۴) ۷۵

۷۲- در شکل زیر، بسته‌ای به جرم $2\ kg$ را از پایین سطح شیبدار با تندی $6\ m/s$ به بالا پرتاب می‌کنیم. این بسته تا ارتفاع معینی بالا رفته و سپس دوباره به محل اولیهٔ خود برمی‌گردد. اگر در این حرکت انرژی درونی جسم و محیط $20\ J$ افزایش یافته باشد، مسافت کلی که بسته طی می‌کند، چند متر است؟ $(g = 10\ m/s^2)$ و اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی در مسیرهای رفت و برگشت یکسان است.)



۱) ۵ / ۲
۲) ۷ / ۲
۳) ۲ / ۶
۴) ۳ / ۶

۷۳- خودرویی به جرم $1500\ kg$ در مسیری افقی، در مدت $10\ s$ تندی خود را از $18\ km/h$ به $90\ km/h$ می‌رساند. در طی این حرکت توان متوسط خودرو حداقل چند اسب بخار است؟ $(1\ hp = 750W)$

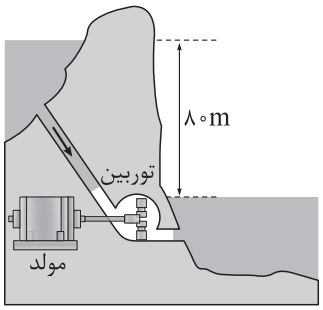
۱) ۴ / ۵
۲) ۶
۳) ۴۵
۴) ۶۰

۷۴- پمپی با توان ورودی $8\ kW$ و بازده ۷۵ درصد، بنزین را از مخزنی در عمق ۹۰متری سطح زمین تا دهانهٔ مخزن در سطح زمین، با تندی ثابت بالا می‌آورد. اگر این پمپ $5\ min$ کار کند، چند متر مکعب بنزین از دهانهٔ مخزن خارج می‌کند؟ $(g = 10\ N/kg$ و $\rho_{\text{بنزین}} = 0/64\ g/cm^3)$

۱) ۴
۲) ۲
۳) ۶ / ۲۵
۴) ۳ / ۱۲۵

محل انجام محاسبات

۷۵- در شکل زیر، آب ذخیره‌شده در پشت سد یک نیروگاه برق‌آبی، از ارتفاع ۸۰متری روی پره‌های توربینی می‌ریزد و آن را می‌چرخاند تا با چرخش آن، انرژی الکتریکی تولید شود. اگر ۹۰ درصد کار نیروی گرانشی به انرژی الکتریکی تبدیل شود، باید در هر دقیقه چند کیلوگرم آب روی توربین ریخته شود تا توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه به ۱۵۰ MW برسد؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$



۱) $۱/۲۵ \times ۱۰^۶$

۲) $۱/۲۵ \times ۱۰^۷$

۳) $۲/۵ \times ۱۰^۶$

۴) $۲/۵ \times ۱۰^۷$

محل انجام محاسبات

۷۶- کدام مطلب، نادرست است؟

۱) باتری مولدی است که در آن واکنش شیمیایی با سفر الکترون رخ می‌دهد تا بخشی از انرژی شیمیایی مواد، به انرژی الکتریکی تبدیل شود.

۲) هرگاه تیغه‌ای از جنس فلز آلومینیم درون محلول مس (II) سولفات قرار گیرد، به تدریج از شدت رنگ محلول کاسته می‌شود.

۳) در هر واکنش شیمیایی، هنگامی که بار الکتریکی یک گونه مثبت‌تر شود، آن گونه اکسایش یافته است.

۴) در واکنش فلز روی با یون‌های وانادیم (III) و تبدیل آن به یون‌های روی، نقش کاهنده مربوط به یون‌های $V^{3+}(aq)$ است.

۷۷- واکنش‌های زیر با قراردادن برخی تیغه‌های فلزی درون محلول‌های یکسان مس (II) سولفات در دمای $20^\circ C$ انجام می‌شوند. با توجه به آن‌ها، کدام مطلب نادرست است؟ (بر اثر انجام هر سه واکنش، دمای محلول‌ها افزایش می‌یابد.)

۱) $Al(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$

۲) $Fe(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$

۳) $Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$

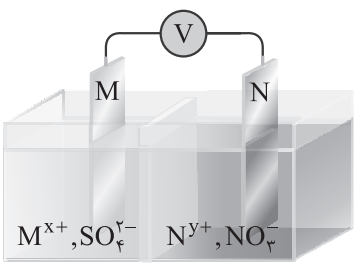
۱) دمای نهایی محلول در واکنش (۲)، کم‌تر از سایر واکنش‌ها است.

۲) مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شدهٔ (۱)، ۲/۵ برابر مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شدهٔ (۳) است.

۳) محصولات واکنش (۲) می‌توانند فلز مس و $Fe^{2+}(s)$ باشند.

۴) واکنش‌پذیری هر سه فلز آلومینیم، روی و آهن، بیشتر از مس است.

۷۸- با توجه به شکل زیر که یک سلول گالوانی استاندارد را نشان می دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟ $(Cu = 64, Fe = 56 : g.mol^{-1})$



الف) اگر قدرت اکسندگی N^{y+} بیشتر از M^{x+} باشد، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از سمت فلز M به سمت فلز N است.

ب) اگر فلز M، روی و فلز N، نقره باشد، یون‌های سولفات از طریق دیوارهٔ متخلخل به سمت تیغهٔ N حرکت خواهند کرد.

پ) اگر N^{y+}، یون Fe^{2+} و فلز M، مس باشد، به ازای مبادلهٔ $12/04 \times 10^{22}$ الکترون در مدار بیرونی، جرم تیغهٔ N، ۲۲/۴ گرم افزایش خواهد داشت.

ت) اگر قدرت کاهندگی فلز M بیشتر از فلز N باشد، در نیم‌سلول سمت چپ، غلظت کاتیون‌ها و مجموع غلظت آنیون‌ها دچار افزایش می‌شود.

ث) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد فلز M از N کم‌تر باشد، فلز N قطب مثبت سلول است و بر سطح آن نیم‌واکنش کاهش انجام می‌شود.

۱) الف ـ پ ـ ت　　۲) ب ـ ث　　۳) الف ـ ت ـ ث　　۴) ب ـ پ

محل انجام محاسبات

۷۹- در سلول گالوانی «وانادیم ـ هیدروژن» در شرایط استاندارد، حجم هر کدام از نیم‌سلول‌های آندی و کاتدی برابر ۰/۵ لیتر است. تا لحظه‌ای که غلظت یون‌های وانادیم (II) به ۱/۳ مولار می‌رسد، چند الکترون در مدار بیرونی مبادله می‌شود و pH محلول در نیم‌سلول SHE به چه عددی می‌رسد؟ $(E^\circ(V^{2+}/V) = -1/2V)$

۱) $0/6 - 6/02 \times 10^{23}$ ۲) $0/4 - 6/02 \times 10^{23}$ ۳) $0/6 - 1/806 \times 10^{23}$ ۴) $0/4 - 1/806 \times 10^{23}$

۸۰- جدول زیر نیروی الکتروموتوری سه سلول گالوانی را نشان می‌دهد. با توجه به آن، کدام مطلب به یقین درست است؟

	B^{2+}/B	C^{2+}/C
A^{2+}/A	۰/۸۹ V	۰/۵۸ V
B^{2+}/B		۰/۳۱ V

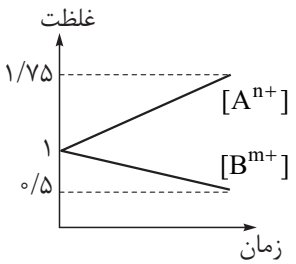
۱) اکسنده‌ترین گونهٔ بین آن‌ها، یون A^{2+} است.

۲) کاهنده‌ترین گونهٔ بین آن‌ها، عنصر B است.

۳) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول مربوط به عنصر C را برابر صفر ولت در نظر بگیریم، پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول مربوط به عنصر A برابر با ۰/۵۸ ولت خواهد بود.

۴) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول مربوط به عنصر C را برابر صفر ولت در نظر بگیریم، پتانسیل کاهشی استاندارد، فقط برای یکی از عنصرهای A و B، مثبت خواهد بود.

۸۱- براساس اطلاعات زیر، چه تعداد از مطالب داده‌شده درست است؟



الف) در سلول گالوانی مربوط به دو فلز A و B، نمودار تغییر غلظت کاتیون‌ها به صورت مقابل است:

ب) با قراردادن فلز B در محلول حاوی کاتیون‌های D^{2+}، دمای محلول دچار افزایش می‌شود.

پ) emf سلول گالوانی حاصل از فلزهای A و X برابر ۰/۵ ولت و emf سلول گالوانی حاصل از فلزهای B و X برابر ۰/۸ ولت است.

ت) در سلول گالوانی حاصل از فلزهای X و A، الکترون‌ها در مدار بیرونی از سمت الکترود X به سمت الکترود A جابه‌جا می‌شوند.

- **emf سلول گالوانی A — B، برابر با ۰/۳V است.**
- **در میان عنصرهای A، B، X و D، فلز A کاهنده‌ترین و کاتیون D^{2+} اکسنده‌ترین گونه هستند.**
- **اگر $E^\circ(D^{2+}/D)$ عددی منفی باشد، محلول هیدروکلریک اسید را می‌توان در ظرف فلزی از جنس B نگه‌داری کرد.**
- **اگر فلز A درون محلول D^{2+} قرار گیرد، با گذشت زمان، $[A^{n+}]$ افزایش می‌یابد.**
- **فلزهای A و B می‌توانند به ترتیب فلزهای Zn و Al باشند.**

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۸۲- با توجه به جدول زیر، کدام گونه(ها) می‌توانند در واکنش با یون $C^{2+}(aq)$، آن را اکسید کنند؟

نیم‌واکنش کاهش	$E^\circ(V)$
$A^+(aq)+e^- \rightarrow A(s)$	+۱/۳۳
$B^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow B(s)$	+۰/۸۷
$C^{3+}(aq)+e^- \rightarrow C^{2+}(aq)$	−۰/۱۲
$D^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow D(s)$	−۱/۵۹

۱) فقط $D^{3+}(aq)$
۲) $A(s)$ و $B(s)$
۳) فقط $A^+(aq)$
۴) $A^+(aq)$ و $B^{2+}(aq)$

۸۳- آلیاژی از فلزهای آلومینیم و قلع به جرم ۱۰ گرم، با مقدار کافی محلول آهن (II) سولفات واکنش داده و پس از کامل‌شدن واکنش، درون ظرف ۱۵/۷ گرم مادهٔ جامد وجود دارد. بر این اساس چند درصد جرمی آلیاژ اولیه را فلز قلع تشکیل داده و در پایان اختلاف جرم دو عنصر فلزی در مخلوط جامد باقی‌مانده، چند گرم است؟ $(Sn=119, Fe=56, Al=27 : g.mol^{-1})$

$E^\circ(Sn^{2+}/Sn) = -0/14V$

$E^\circ(Al^{3+}/Al) = -1/66V$

$E^\circ(Fe^{2+}/Fe) = -0/44V$

۱) ٪۵۴ − ۱/۱
۲) ٪۵۴ − ۲/۷
۳) ٪۷۳ − ۲/۷
۴) ٪۷۳ − ۱/۱

۸۴- دربارهٔ واکنش اکسایش ـ کاهش بین گونه‌های داده‌شده، کدام مطلب نادرست است؟

$Ce^{4+}(aq)+e^- \rightarrow Ce^{3+}(aq), E^\circ = -1/72\ V$

$Al^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow Al(s), E^\circ = -1/66\ V$

۱) کاتیون $Ce^{3+}(aq)$ در این واکنش، کاهنده است.
۲) قدرت کاهندگی $Al(s)$ از $Ce^{4+}(aq)$ کم‌تر است.
۳) E° واکنش برابر ۰/۰۶+ ولت بوده و به صورت خودبه‌خودی پیش می‌رود.
۴) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد پس از موازنهٔ معادلهٔ آن، برابر با ۸ بوده و ۳ الکترون در آن مبادله شده است.

۸۵- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) در سلول سوختی متان ـ اکسیژن، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی، از الکترودی که در آن گاز متان جریان دارد به سمت الکترودی است که در آن گاز اکسیژن وارد می‌شود.

ب) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن نسبت به سلول‌های سوختی مربوط به هیدروکربن‌ها، علاوه بر تولید کم‌تر گاز گلخانه‌ای، احتمال بروز خطر نیز کم‌تر است.

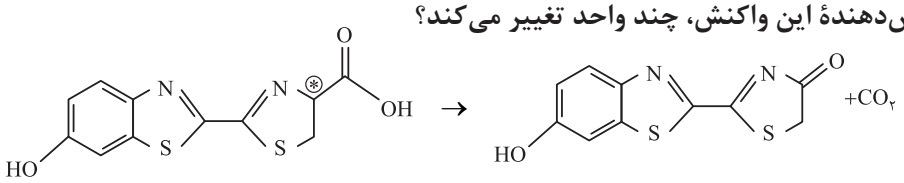
پ) جهت حرکت یون هیدرونیوم در غشای سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، همانند جهت حرکت کاتیون Cu^{2+} در سلول گالوانی آهن ـ مس و از سمت آند به کاتد است.

ت) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول متانول برابر ۰/۰۱۶ ولت باشد، emf سلول‌های هیدروژن ـ اکسیژن و متانول ـ اکسیژن، ۰/۰۱۶ ولت اختلاف خواهد داشت.

۱) الف ـ پ
۲) الف ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) ب ـ ت

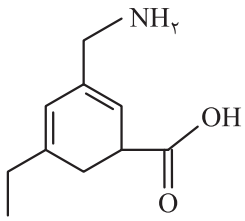
محل انجام محاسبات

۸۶- نور تولیدشده توسط کرم شب‌تاب، نتیجهٔ انجام واکنش شیمیایی زیر است. این واکنش‌ها به بیولومینسانس معروف‌اند که از طریق آن‌ها این جانور و برخی جانوران دیگر، به جفت خود پیام می‌دهند. واکنش‌دهنده در این واکنش شیمیایی، لوسیفرین کرم شب‌تاب و آنزیمی که این واکنش را کاتالیز می‌کند، لوسیفراز نام دارد. عدد اکسایش کربن ستاره‌دار در واکنش‌دهندهٔ این واکنش، چند واحد تغییر می‌کند؟



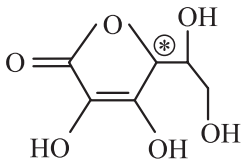
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۷- در شکل مقابل، چند درصد از اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش صفر هستند و در صورت سوختن کامل این ماده، چند اتم کربن دچار ۶ واحد تغییر عدد اکسایش می‌شوند؟



۱) ۲ – ٪۲۰ ۲) ۳ – ٪۲۰
۳) ۲ – ٪۳۰ ۴) ۳ – ٪۳۰

۸۸- ترکیب روبه‌رو نشان دهندهٔ ساختار آسکوربیک اسید، ریزمغذی‌ای حیاتی برای گونه‌های پیشرفتهٔ پستانداران از جمله انسان است. با توجه به آن، کدام مطلب نادرست است؟



۱) این ترکیب به دلیل توانایی تشکیل پیوندهای هیدروژنی با مولکول‌های آب، به راحتی در آب حل می‌شود.
۲) مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن در آن، برابر با تعداد گروه‌های عاملی هیدروکسیل در ساختار آن است.
۳) در ساختار این ترکیب، عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار، کم‌تر از اتم کربن گروه عاملی استری است.
۴) عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار در ساختار آن، برابر با عدد اکسایش اتم کربن در هیدروژن سیانید است.

۸۹- در واکنش زیر و پس از موازنهٔ کامل معادلهٔ آن، نسبت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها به مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها کدام است؟

$$Sn^{2+}(aq) + Cr_2O_7^{2-}(aq) + H^+(aq) \rightarrow Sn^{4+}(aq) + Cr_2O_3(aq) + H_2O(l)$$

۱) ۰/۶۷ ۲) ۰/۶۹ ۳) ۱/۴۴ ۴) ۱/۵۰

۹۰- در اثر واکنش ۲/۳ گرم گاز NO_2 با یک لیتر آب، غلظت نیتریک اسید در محلول به ppm ۲۱۰۰ رسیده است. اگر همراه با تولید نیتریک اسید، یکی از اکسیدهای نیتروژن نیز تولید شده باشد، عدد اکسایش N در اکسید حاصل برابر چند است و با انجام این واکنش، چند مول الکترون مبادله می‌شود؟ (چگالی محلول‌ها $1\ g.mL^{-1}$ بوده و حجم محلول در طول انجام واکنش، ثابت باقی می‌ماند.)

$$aNO_2 + 1H_2O \rightarrow bN_xO_y + 2HNO_3$$

۱) $+2$ ، $\frac{1}{30}$ ۲) $+5$ ، $\frac{1}{30}$ ۳) $+2$ ، $\frac{1}{20}$ ۴) $+5$ ، $\frac{1}{20}$

محل انجام محاسبات

۹۱- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

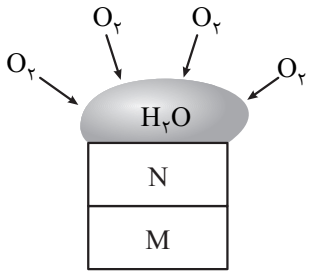
- **منیزیم را در صنعت از برقکافت محلول آبی منیزیم کلرید به دست می‌آورند.**
- **علت پایین‌تربودن سطح مایع در لولهٔ مربوط به کاتد در فرایند برقکافت آب، تولید گاز اکسیژن بیشتر در آن است.**
- **با انجام فرایند برقکافت آب، به تدریج غلظت مادهٔ الکترولیت در سلول برقکافت افزایش می‌یابد.**
- **در سلول استخراج سدیم از $NaCl(l)$، در آند گاز زردرنگی تولید می‌شود که از آن می‌توان یکی از مواد مورد نیاز در فرایند استخراج منیزیم از آب دریا را تأمین کرد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۲- اگر الکترون‌های آزادشده از اکسایش ۵۲ گرم فلز روی در باتری دگمه‌ای روی ـ نقره (واکنش موازنه شود: $Zn(s) + Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s) + Ag(s)$)، در نیم‌واکنش کاتدی سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب مصرف شود، چند گرم فلز سدیم تولید و چند لیتر گاز (در شرایط STP) آزاد می‌شود؟ $(Zn = ۶۵, Na = ۲۳ : g.mol^{-1})$

۱) $۱۷/۹۲ - ۱۸/۴$ ۲) $۳۵/۸۴ - ۱۸/۴$
۳) $۱۷/۹۲ - ۳۶/۸$ ۴) $۳۵/۸۴ - ۳۶/۸$

۹۳- براساس شکل زیر، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) اگر M و N به ترتیب آلومینیم و روی باشند، در قطرهٔ آب، غلظت یون‌های Zn^{2+} به تدریج افزایش می‌یابد.

ب) اگر M و N به ترتیب طلا و نقره باشند، با ایجاد خاصیت اسیدی در آب، غلظت هر دو کاتیون مربوط به طلا و نقره افزایش می‌یابد.

پ) اگر M فلز آهن و N فلز روی باشد، از این ترکیب در ساخت کانال کولر استفاده می‌شود. در این صورت فلز M در برابر خوردگی محافظت می‌شود.

ت) اگر M و N به ترتیب از جنس آهن و قلع باشند، از آن برای ساخت ظروف بسته‌بندی مواد غذایی استفاده می‌شود.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ت

۹۴- کدام مطلب، نادرست است؟

۱) اغلب سنگ‌های کلیه از رسوب‌کردن برخی نمک‌های کلسیم‌دار در کلیه‌ها تشکیل می‌شوند.

۲) اگر حداکثر ۰/۳ گرم از ماده‌ای در ۲۵ گرم آب در دمای اتاق حل شود، آن ماده جزء مواد محلول در آب دسته‌بندی می‌شود.

۳) انحلال‌پذیری نمک‌ها به نوع آن‌ها و دما بستگی دارد، اما تأثیر دما بر میزان انحلال‌پذیری آن‌ها یکسان نیست.

۴) انحلال‌پذیری پتاسیم کلرید در هر دمایی بیشتر از انحلال‌پذیری لیتیم سولفات در آب است.

محل انجام محاسبات

۹۵- کدام مورد، همواره درست است؟

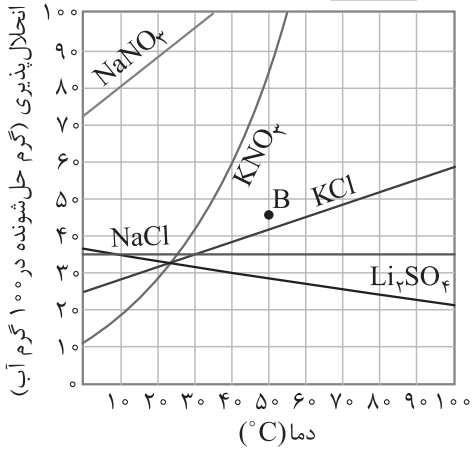
۱) رابطهٔ انحلال‌پذیری نمک‌ها با دما، معکوس این رابطه در گازها است.

۲) در دمای معیّن، مقایسهٔ انحلال‌پذیری سه نمک $NaNO_3$، $NaCl$ و $C_{12}H_{22}O_{11}$ به صورت $C_{12}H_{22}O_{11} > NaNO_3 > NaCl$ است.

۳) در اثر حل‌کردن 1×10^{-7} گرم باریم سولفات در ۱۰۰ گرم آب در دمای $25^\circ C$، مخلوطی ناهمگن پدید می‌آید.

۴) در اثر اضافه‌کردن ۱ گرم نقره کلرید به ۱۰۰ گرم آب در دمای $25^\circ C$، تعداد یون‌های موجود در آب افزایش می‌یابد.

۹۶- با توجه به نمودار «انحلال‌پذیری ـ دما» داده‌شده، چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟



- **در نقطهٔ B، محلول‌های دارای یون کلرید، فراسیرشده‌اند.**
- **تفاوت انحلال‌پذیری نمک‌های دارای یون نیترات در دمای $30^\circ C$، به تقریب برابر ۴۰ گرم است.**
- **در دمای $10^\circ C$، مجموع انحلال‌پذیری نمک‌های سدیم کلرید و پتاسیم نیترات، برابر انحلال‌پذیری سدیم نیترات است.**
- **اگر انحلال‌پذیری یک نمک در دمای $10^\circ C$ برابر ۳۳ گرم باشد، آن نمک، پتاسیم کلرید با معادلهٔ انحلال‌پذیری: $S = 0/6\theta + 27$ است.**

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۹۷- اگر غلظت مولار نمک X در محلولی سیرشده از آن در دمای $40^\circ C$ برابر ۲/۳ مول بر لیتر باشد، چند گرم از این محلول سیرشده را از دمای $40^\circ C$ تا $10^\circ C$ سرد کنیم تا ۰/۰۸ مول رسوب حاصل شود؟ (انحلال‌پذیری نمک X در دمای $10^\circ C$ برابر ۱۵ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. چگالی محلول نمک X در دمای $40^\circ C$ را برابر با ۱/۱۵ گرم بر میلی‌لیتر و جرم مولی نمک X را برابر ۱۰۰ گرم بر مول در نظر بگیرید.)

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۵۰

۹۸- اگر ۴۸۰ گرم محلول سیرشدهٔ پتاسیم دی‌کرومات ($K_2Cr_2O_7$) با دمای $35^\circ C$ را تا دمای $90^\circ C$ گرم کنیم و بتوانیم ۲۰۰ گرم دیگر نمک $K_2Cr_2O_7$ در آن حل کنیم، انحلال‌پذیری این نمک در دمای $35^\circ C$ کدام است؟ (انحلال‌پذیری $K_2Cr_2O_7$ در دمای $90^\circ C$، برابر ۷۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.)

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۹۹- کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟

الف) آب تنها ماده‌ای است که به هر سه حالت فیزیکی جامد، مایع و گاز در طبیعت یافت می‌شود.

ب) باریکهٔ آب، از سمت اتم‌های اکسیژن، به میلهٔ شیشه‌ای که به موی خشک مالش داده شده، منحرف می‌شود.

پ) همهٔ مولکول‌های خطی، مانند CO_2، ناقطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.

ت) در مواد مولکولی با مولکول‌های ناقطبی، با افزایش جرم مولی، نقطهٔ جوش افزایش می‌یابد.

۱) الف ـ ت ۲) ب ـ پ ۳) ب ـ ت ۴) الف ـ پ

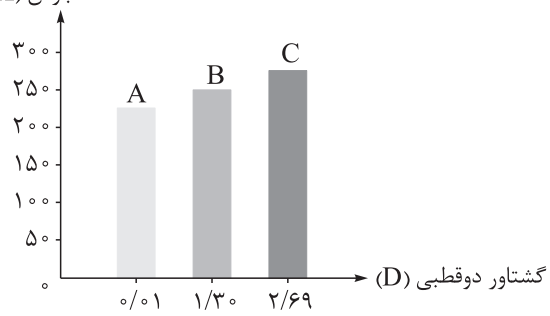
محل انجام محاسبات

۱۰۰- درستی یا نادرستی علمی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- **در ساختار یخ، هر اتم اکسیژن به چهار اتم هیدروژن از مولکول‌های دیگر متصل است.**
- **هر حلقهٔ شش‌ضلعی در ساختار یخ، از شش مولکول H_2O ساخته شده که هر ضلع آن از دو نوع پیوند متفاوت تشکیل شده است.**
- **با تبدیل مایعات به حالت جامد، حجمشان افزایش می‌یابد.**
- **به محلول‌هایی که حلال در آن‌ها یک ترکیب آلی باشد، محلول‌های غیرآبی گفته می‌شود.**

۱) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۲) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست
۴) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست

۱۰۱- با توجه به نمودار زیر که مقایسهٔ نقطهٔ جوش سه مادهٔ آلی با جرم مولی تقریباً یکسان را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟



۱) جهت‌گیری و منظم‌شدن مولکول‌های A در میدان الکتریکی محسوس‌تر است.
۲) اگر نقطهٔ جوش مواد B و C به ترتیب، ۲۵۰ و ۲۷۵ کلوین باشد، میزان قطبیت مادهٔ C، ۱۰ درصد بیشتر از مادهٔ B است.
۳) در شرایط یکسان، انحلال‌پذیری مادهٔ C در هگزان از بقیه کم‌تر است.
۴) این نمودار را می‌توان به اثر گشتاور دوقطبی (برحسب دبای)، بر نقطهٔ جوش (برحسب کلوین) نسبت داد که نمودار آن همواره خطی است.

۱۰۲- دربارهٔ انحلال چند ترکیب داده‌شده در آب، رابطهٔ زیر برقرار است؟

«میانگین قدرت پیوند یونی در ترکیب و پیوندهای هیدروژنی در آب > نیروی جاذبهٔ یون ـ دوقطبی در محلول»

الف) سدیم کلرید
ب) آهن (III) هیدروکسید
پ) لیتیم سولفات
ت) پتاسیم نیترات
ث) کلسیم فسفات
ج) کلسیم سولفات

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

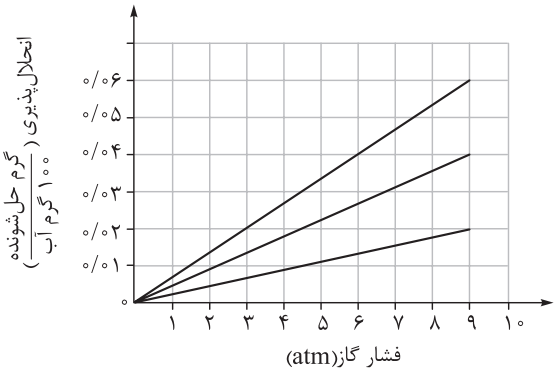
۱۰۳- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **تأثیر تغییر فشار بر انحلال‌پذیری KNO_3، بسیار بیشتر از Li_2SO_4 در دمای معین است.**
- **طبق قاعدهٔ «شبیه، شبیه را حل می‌کند» هیچ مقداری از مولکول‌های ناقطبی در حلال‌های قطبی حل نمی‌شوند.**
- **یک نمونهٔ آب به جرم ۸ کیلوگرم که حاوی ۵۲ میلی‌گرم اکسیژن به صورت محلول است، برای زندگی اغلب ماهی‌ها مناسب است.**
- **گاز NO با آب واکنش شیمیایی نمی‌دهد و انحلال‌پذیری آن در هر فشاری بیشتر از دیگر مولکول‌های ناقطبی است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

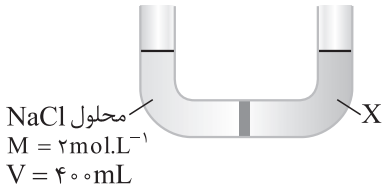
محل انجام محاسبات

۱۰۴- نمودار مقابل انحلال‌پذیری ۳ گاز O_2، N_2 و NO را در دمای $20^\circ C$ نشان می‌دهد. اگر درصد جرمی و غلظت مولار یکی از گازها با چگالی ۱/۰۵ گرم بر میلی‌لیتر در آب به ترتیب برابر ۴/۸ درصد و ۱/۸ مول بر لیتر باشد، انحلال‌پذیری آن در همین دما و در فشار $4/5\ atm$ کدام است و در دمای $20^\circ C$ و فشار $0/3\ atm$، حداکثر چند گرم گاز NO را می‌توان در $100\ g$ آب حل کرد؟ $(O=16, N=14 : g.mol^{-1})$



۱) ۰/۰۲ ـ ۰/۰۰۲ ۲) ۰/۰۱ ـ ۰/۰۰۲ ۳) ۰/۰۲ ـ ۰/۰۰۱ ۴) ۰/۰۱ ـ ۰/۰۰۱

۱۰۵- شکل زیر، محلول مادهٔ X و محلولی از نمک خوراکی را نشان می‌دهد که به وسیلهٔ غشای نیمه‌تراوا از یکدیگر جدا شده‌اند. چند مورد از مطالب زیر درست است؟



- اگر X، آب‌مقطر باشد و با گذشت زمان، ۱۰۰ میلی‌لیتر از حجم آن کاسته شود، غلظت مولی محلول نمک خوراکی به $1/6\ mol.L^{-1}$ خواهد رسید.
- اگر X، آب‌مقطر باشد و وزنه‌ای سنگین بر روی محلول نمک خوراکی قرار بگیرد، با گذشت زمان غلظت محلول نمک خوراکی افزایش خواهد یافت.
- اگر X، محلول آبی نقره نیترات با غلظت ۳ مولار باشد، با گذشت زمان رسوب سفیدرنگی در سمت محلول X ایجاد خواهد شد.
- اگر X، محلول ۴ مولار نمک خوراکی باشد،با گذشت زمان به طور خودبه‌خودی ارتفاع مایع در ستون سمت راست، کاهش خواهد یافت.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.
آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.
azmoon.kheilisabz.com

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله نهم

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳ | تاریخ برگزاری: ۱۴۰۳/آذر/۳۰

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان
هندسه	محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ کیوان صارمی صبا مهدوی ـ محسن میراسلامی ـ علیرضا نصراللهی ـ حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته	علیرضا شریف‌خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
فیزیک	امین امینی ـ یاشار انگوتی ـ محمد باغبان ـ علیرضا جباری ـ مجید ساکی ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی علیرضا عبداللهی ـ حمید فدائی‌فرد ـ فرزاد نامی ـ حامد نبی‌منصور ـ محمدرضا یاری
شیمی	محمدعلی توسلی‌فر ـ عباس سرمایه ـ وحید فارسیان

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	علیرضا کاظمی‌بقا	محمدسجاد نقیه عادل حسینی سجاد داوطلب	مهدی خوشنویس امیرحسین قنبری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی فرزانه خاکپاش ماهان فنی‌فر
ریاضیات گسسته	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی مریم نظری	فرزانه خاکپاش علیرضا کاظمی‌بقا ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری محمدجواد سورچی	علیرضا جباری	مهدی بابائی مریم حسن‌لو مسعود خندانی مدیا عیدی احسان محمدی امیر محمودی انزابی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	وحید فارسیان سروش عبادی محمدرضا طاهری‌نژاد	محمد مرادی سروش عبادی	علی حیدری یاسر راش متین قنبری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع مجدد دوازدهم از مهر

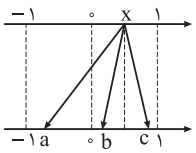
Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	منیژه حق‌دوست ـ راضیه سادات خلدی‌نسب زهرا صفری ـ محیا غنی‌فرد زهرا فرهادی‌مهر ـ مریم مسلمی‌زاده ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ مریم حسین‌زاده سارا حاتمی ـ سپیده سخایی مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته مهدیه گل‌پور ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com

۱ در شکل زیر، عدد x از محور بالا به مربع و ریشه‌های مرتبهٔ دوم و مربع خود روی محور پایین وصل شده است. اگر $\frac{b}{ac^۲}=-\frac{۱}{۸}$ باشد، مقدار $\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۴

مشاوره مقایسهٔ ریشه‌های یک عدد از آن دسته مباحثی است که هم سؤال مستقیم دارد و هم این‌که قابلیت این را دارد که با سؤالات دیگر ترکیب شود؛ پس به آن مسلط باشید.

Hint با توجه به این‌که x بین صفر و یک است، a، b و c را برحسب x بنویسید و در رابطهٔ داده‌شده جای‌گذاری کنید تا x به دست آید.

درس Box

ریشهٔ nاُم:

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، می‌گوییم b ریشهٔ nاُم a است، هرگاه:

$$b^n=a\ (n\in\mathbb{N},\ n\geq ۲)$$

نکته اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند و اعداد مثبت دو ریشهٔ زوج دارند که قرینهٔ یکدیگرند.

مقایسهٔ ریشه‌ها:

اگر $a>۱$ (یا $-۱<a<۰$) هر چه مرتبهٔ ریشه بزرگ‌تر باشد، حاصل کوچک‌تر خواهد بود.

$$a>۱ \Rightarrow \sqrt{a}>\sqrt[۳]{a}>\sqrt[۴]{a}>\dots$$

اگر $۰<a<۱$ (یا $a<-۱$)، هر چه مرتبهٔ ریشه بزرگ‌تر باشد، حاصل بزرگ‌تر خواهد بود.

$$۰<a<۱ \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt[۳]{a}<\sqrt[۴]{a}<\dots$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: x بین صفر و یک است و مربعش از خودش کوچک‌تر است. از طرفی، مربع x نمی‌تواند منفی باشد، در نتیجه مربع x برابر b است و داریم:

$$x^۲=b \quad (۱)$$

گام دوم: می‌دانیم که ریشه‌های دوم x به صورت $\sqrt{x}$ و $-\sqrt{x}$ هستند؛ پس a که منفی است برابر $-\sqrt{x}$ و c که مثبت است برابر $\sqrt{x}$ است:

$$\sqrt{x}=c\ ,\ -\sqrt{x}=a \qquad (۲)$$

گام سوم: رابطه‌های (۱) و (۲) را در تساوی داده‌شده در سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{b}{ac^۲}=-\frac{۱}{۸} \Rightarrow \frac{x^۲}{-\sqrt{x}(\sqrt{x})^۲}=-\frac{۱}{۸} \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۱}{۸} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x=\frac{۱}{۶۴}$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال $\sqrt[۳]{x}$ است که برابر می‌شود با:

$$\sqrt[۳]{x}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۶۴}}=\frac{۱}{۴}$$

۲ اگر $A=\dfrac{\sqrt{۸\sqrt[۳]{A}}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲}}\times ۸^{-\frac{۲}{۳}}}$ باشد، مقدار $A^{۵}$ کدام است؟

۱) $۲^{۹}$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۲^{۱۲}$ ۴) $۲^{۱۳}$

مشاوره در نگاه اول شاید یک سؤال سخت و طولانی به نظر آید، در حالی که از سؤالات آسان آزمون بوده است.

Hint به کمک قوانین رادیکال و توان‌های گویا، همهٔ پایه‌ها را برحسب A و ۲ بنویسید و سپس خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

درس Box

قوانین رادیکال‌ها:

$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\quad(b\neq ۰)$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[n]{a^{n}}=\begin{cases}\lvert a\rvert & n\text{ زوج}\\ a & n\text{ فرد}\end{cases}$

توجه کنید که در تمام عبارت‌های بالا اگر n زوج باشد، زیر رادیکال باید نامنفی شود.

توان‌های گویا:

توان‌های گویا برای پایه‌های مثبت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}\ (a>۰, m,n\in\mathbb{Z})$$

قوانین توان:

$a^{۰}=۱$	$۱^{n}=۱$	$۰^{n}=۰$
$a^{-۱}=\dfrac{۱}{a}$	$a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$	$\dfrac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$
$(a^{m})^{n}=a^{mn}$	$(ab)^{n}=a^{n}b^{n}$	$(\dfrac{a}{b})^{n}=\dfrac{a^{n}}{b^{n}}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به خواص رادیکال و توان‌های گویا، A را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A=\frac{\overbrace{\sqrt{۸\sqrt[۳]{A}}}^{\sqrt{۸}\times\sqrt{\sqrt[۳]{A}}}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\underbrace{\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲}}}_{\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}}\times ۸^{-\frac{۲}{۳}}}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۸}\times\sqrt[۶]{A}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۶]{۲}\times ۸^{-\frac{۲}{۳}}}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۲^{۳}}\times\sqrt[۶]{A}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt[۳]{۲^{۲}}\times\sqrt[۶]{۲}\times(۲^{۳})^{-\frac{۲}{۳}}}\Rightarrow A=\frac{۲^{\frac{۳}{۲}}\times A^{\frac{۱}{۶}}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{۲^{\frac{۲}{۳}}\times ۲^{\frac{۱}{۶}}\times ۲^{-۲}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۲^{۱}\times A^{\frac{۱}{۶}}}{۲^{-\frac{۷}{۶}}}$$

گام دوم: در تساوی به‌دست‌آمده $A^{\frac{۱}{۶}}$ را به مخرج سمت چپ می‌بریم:

$$A=\frac{۲^{۱}\times A^{\frac{۱}{۶}}}{۲^{-\frac{۷}{۶}}}\Rightarrow\frac{A}{A^{\frac{۱}{۶}}}=\frac{۲}{۲^{-\frac{۷}{۶}}}\Rightarrow A^{۱-\frac{۱}{۶}}=۲^{۱-(-\frac{۷}{۶})}\Rightarrow A^{\frac{۵}{۶}}=۲^{\frac{۱۳}{۶}}\quad(*)$$

گام سوم: دو طرف رابطهٔ (*) را به توان ۶ می‌رسانیم تا خواستهٔ سؤال به دست آید:

$$A^{\frac{۵}{۶}}=۲^{\frac{۱۳}{۶}}\xrightarrow{\text{دو طرف به توان }۶}(A^{\frac{۵}{۶}})^{۶}=(۲^{\frac{۱۳}{۶}})^{۶}\Rightarrow A^{۵}=۲^{۱۳}$$

پس گزینهٔ (۴) پاسخ سؤال است.

۳ با فرض $A=\frac{۸+۳\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}+\frac{۳\sqrt{۳}-۸}{۷+۲\sqrt{۳}}$، حاصل $A+\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

مشاوره در بسیاری از آزمون‌ها مانند این آزمون، سؤال اول از عبارت‌های جبری و یا قوانین توان‌های گویا و رادیکال‌ها است.

Hint $۳\sqrt{۳}$ را بنویسید $(\sqrt{۳})^{۳}$ و سپس به کمک اتحاد چاق و لاغر عبارت‌ها را تجزیه کنید.

درس Box

اتحادهای جبری:

اتحاد مربع دوجمله‌ای	$(a\pm b)^{۲}=a^{۲}\pm ۲ab+b^{۲}$
اتحاد مربع سه‌جمله‌ای	$(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲ac+۲bc$
اتحاد مزدوج	$(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$
اتحاد مکعب دوجمله‌ای	$(a\pm b)^{۳}=a^{۳}\pm ۳a^{۲}b+۳b^{۲}a\pm b^{۳}$
اتحاد چاق و لاغر	$a^{۳}\pm b^{۳}=(a\pm b)(a^{۲}\mp ab+b^{۲})$

تجزیهٔ عبارت‌های جبری: تجزیه به معنی تبدیل یک جمع یا تفریق به یک ضرب است، برای تجزیه از اتحادهای جبری، فاکتورگیری و ... کمک می‌گیریم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عبارت‌های $۸+۳\sqrt{۳}$ و $۳\sqrt{۳}-۸$ را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$۸+۳\sqrt{۳}=۲^{۳}+(\sqrt{۳})^{۳}=(۲+\sqrt{۳})(۴-۲\sqrt{۳}+۳)=(۲+\sqrt{۳})(۷-۲\sqrt{۳})$$

$$۳\sqrt{۳}-۸=(\sqrt{۳})^{۳}-۲^{۳}=(\sqrt{۳}-۲)(۳+۲\sqrt{۳}+۴)=(\sqrt{۳}-۲)(۷+۲\sqrt{۳})$$

گام دوم: حال عبارت‌های به‌دست‌آمده را در A جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A=\frac{۸+۳\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}+\frac{۳\sqrt{۳}-۸}{۷+۲\sqrt{۳}}\Rightarrow A=\frac{(۲+\sqrt{۳})(۷-۲\sqrt{۳})}{۲+\sqrt{۳}}+\frac{(\sqrt{۳}-۲)(۷+۲\sqrt{۳})}{۷+۲\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow A=۷-۲\sqrt{۳}+\sqrt{۳}-۲=۵-\sqrt{۳}$$

گام سوم: با توجه به این‌که A را به دست آوردیم، خواستهٔ سؤال که $A+\sqrt{۳}$ است را به دست می‌آوریم:

$$A+\sqrt{۳}=۵-\sqrt{۳}+\sqrt{۳}=۵$$

۴ اگر a و b دو عدد حقیقی بزرگ‌تر از یک و $a^۳ = ۲ + b^۳$ باشد، حاصل $\frac{a^۲ + a + ۱}{b^۲ - b + ۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱+b}{۱-a}$ ۲) $\frac{b+۱}{a-۱}$

۳) $-\frac{a}{b}$ ۴) $\frac{b}{a}$

مشاوره اتحادهای جبری رکن جدانشدنی ریاضیات کنکوراست، حتماً بر آن‌ها مسلط باشید؛ چراکه بدون دانستن آن‌ها، در ریاضی راه به جایی نمی‌برید.

Hint

در تساوی داده‌شده به جای ۲، بنویسید ۱+۱ و از اتحاد چاق و لاغر برای رسیدن به خواستهٔ سؤال استفاده کنید، توجه کنید که صورت و مخرج داده‌شده، هر دو قسمت چاقِ یک اتحاد چاق و لاغر هستند.

نکته

اگر دو طرف یک تساوی چند عامل در یکدیگر ضرب شده بودند، عامل را می‌توانیم جابه‌جا کنیم به این صورت که هر عامل از صورت یکی به مخرج دیگری و برعکس می‌تواند برود.

$$ab = cd \Rightarrow b = \frac{cd}{a} \quad \text{یا} \quad \frac{ab}{c} = d$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در رابطهٔ صورت سؤال به جای ۲ می‌نویسیم ۱+۱ و خواهیم داشت:

$$a^۳ = ۲ + b^۳ \Rightarrow a^۳ = ۱ + ۱ + b^۳ \Rightarrow a^۳ - ۱ = b^۳ + ۱$$

گام دوم: دو طرف تساوی را با توجه به اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم و خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$a^۳ - ۱ = b^۳ + ۱ \Rightarrow (a-۱)(a^۲ + a + ۱) = (b+۱)(b^۲ - b + ۱) \xrightarrow[\text{خواستهٔ سؤال}]{\text{خاصیت تساوی}} \frac{a^۲ + a + ۱}{b^۲ - b + ۱} = \frac{b+۱}{a-۱}$$

همان‌طور که می‌بینید گزینهٔ (۲) صحیح است.

یه‌جور دیگه

گام اول: هر دو عبارت موجود در صورت و مخرج قسمت چاق، یک اتحاد چاق و لاغر هستند، آن‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$(a-۱)(a^۲ + a + ۱) = a^۳ - ۱ \Rightarrow a^۲ + a + ۱ = \frac{a^۳ - ۱}{a - ۱}$$

$$(b+۱)(b^۲ - b + ۱) = b^۳ + ۱ \Rightarrow b^۲ - b + ۱ = \frac{b^۳ + ۱}{b + ۱}$$

گام دوم: عبارت‌های به‌دست‌آمده را در خواستهٔ سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{a^۲ + a + ۱}{b^۲ - b + ۱} = \frac{\frac{a^۳ - ۱}{a - ۱}}{\frac{b^۳ + ۱}{b + ۱}} = \frac{(a^۳ - ۱)(b + ۱)}{(a - ۱)(b^۳ + ۱)} \quad (*)$$

گام سوم: به گفتهٔ سؤال $a^۳ = ۲ + b^۳$، پس به جای $a^۳$، $۲ + b^۳$ را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم و خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(a^۳ - ۱)(b+۱)}{(a-۱)(b^۳ + ۱)} = \frac{(۲ + b^۳ - ۱)(b+۱)}{(a-۱)(b^۳ + ۱)} = \frac{(b^۳ + ۱)(b+۱)}{(a-۱)(b^۳ + ۱)} = \frac{b+۱}{a-۱}$$

۵ اگر $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-a}=4$ و $\sqrt{x-a}-\sqrt{x-3}=4$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{13}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{11}{3}$

مشاوره این سؤال مشابه یکی از تمرینات کتاب درسی دهم است که شبیه آن در کنکور تجربی ۱۴۰۳ هم طرح شده است.

Hint در تساوی دوم، a را به سمت راست ببرید و سپس دو طرف تساوی‌ها را به کمک اتحاد مزدوج در هم ضرب کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تساوی $\sqrt{x-a}-\sqrt{x-3}=4-a$ را به صورت $a+\sqrt{x-a}-\sqrt{x-3}=4$ می‌نویسیم، حال این تساوی را به همراه تساوی دیگری که داده‌شده، زیر هم می‌نویسیم و دو طرف آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}\sqrt{x-a}+\sqrt{x-3}=4\\ \sqrt{x-a}-\sqrt{x-3}=4-a\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{دو طرف ضرب در یکدیگر}} (\sqrt{x-a}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-3})=16-4a$$

گام دوم: در سمت چپ تساوی به‌دست‌آمده، همه چیز برای استفاده از اتحاد مزدوج آماده است:

$$\overbrace{(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-3})}^{\text{اتحاد مزدوج}}=16-4a$$

$$\Rightarrow (x-a-(x-3))=16-4a \Rightarrow \cancel{x}-a-\cancel{x}+3=16-4a \Rightarrow 3a=13 \Rightarrow a=\frac{13}{3}$$

۶ اگر $۴\sin^۲\alpha+۹\cos^۲\alpha=۱۲\sin\alpha\cos\alpha$ باشد، مقدار $\cos۲\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{۶}{۱۳}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$ ۳) $-\frac{۵}{۱۳}$ ۴) $\frac{۵}{۱۳}$

مشاوره ایدهٔ اولیهٔ این سؤال در حل بعضی از سؤالات مثلثات بسیار کارساز است، حتماً پاسخ را ببینید.

Hint دو طرف رابطه را بر $\tan^۲\alpha$ تقسیم کنید و سپس $\tan\alpha$ را به دست آورید و از رابطهٔ $\cos۲\alpha$ استفاده کنید.

درس Box

روابط مثلثاتی کمان α:

	رابطهٔ مثلثاتی	به‌جور دیگه
۱	$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$	$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$ $\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha$
۲	$\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}\,,\ \cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$	$\tan\alpha\cot\alpha=۱$
۳	$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$	–
۴	$۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$	–

روابط مثلثاتی ۲α:

	رابطهٔ مثلثاتی	به‌جور دیگه
۱	$\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha$
۲	$\cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$	$\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ $\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دو طرف رابطهٔ داده‌شده را بر $\cos^۲\alpha$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan\alpha$ را به دست آوریم:

$$۴\sin^۲\alpha+۹\cos^۲\alpha=۱۲\sin\alpha\cos\alpha \xrightarrow{\text{دو طرف تقسیم بر } \cos^۲\alpha} \frac{۴\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}+\frac{۹\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}=\frac{۱۲\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow ۴\tan^۲\alpha+۹=۱۲\tan\alpha \Rightarrow ۴\tan^۲\alpha-۱۲\tan\alpha+۹=۰$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (۲\tan\alpha-۳)^۲=۰ \Rightarrow ۲\tan\alpha-۳=۰ \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۳}{۲}$$

گام دوم: می‌دانیم که $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$، با توجه به این‌که $\tan\alpha=\frac{۳}{۲}$ داریم:

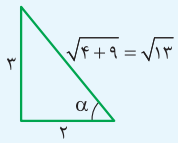
$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱+(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱+\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۴}{۱۳}$$

گام سوم:

$$\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۲(\frac{۴}{۱۳})-۱=\frac{۸}{۱۳}-۱=\frac{-۵}{۱۳}$$

یه‌جور دیگه

چون $\tan\alpha=\frac{۳}{۲}$، یک مثلث قائم‌الزاویهٔ فرضی با زاویهٔ α رسم می‌کنیم به‌گونه‌ای که ضلع مقابل به α برابر ۳ و ضلع مجاور به α برابر ۲ باشد؛ وتر را هم با فیثاغورس پیدا می‌کنیم:



$$\Rightarrow |\cos\alpha|=\frac{\text{ضلع مجاور به }\alpha}{\text{وتر}}=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}} \Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۴}{۱۳}$$

توجه: از این مثلث فرضی فقط اندازهٔ نسبت‌ها را می‌توان به دست آورد و علامت را نمی‌توان تشخیص داد.

گام سوم: حال که $\cos^۲\alpha=\frac{۴}{۱۳}$ را داریم، $\cos۲\alpha$ را به کمک اتحاد مربوطه به دست می‌آوریم:

$$\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱ \Rightarrow \cos۲\alpha=۲(\frac{۴}{۱۳})-۱=\frac{۸}{۱۳}-۱ \Rightarrow \cos۲\alpha=-\frac{۵}{۱۳}$$

۷ اگر $\cos\frac{\pi}{16}=a$ باشد، حاصل $16a^2(a^2-1)$ کدام است؟

۱) $-1-\sqrt{2}$ ۲) $-2+\sqrt{2}$

۳) $-3+2\sqrt{2}$ ۴) -1

مشاوره بر روی روابط کمان‌های 2α مسلط باشید؛ چراکه یکی از ارکان اصلی برای پاسخ‌دادن به سؤالات مثلثات است.

Hint از روی $\cos\frac{\pi}{16}$، $\cos\frac{\pi}{8}$ و سپس $\cos\frac{\pi}{4}$ را برحسب a بنویسید و به کمک فاکتورگیری، حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به رابطهٔ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ و این‌که $\frac{\pi}{8}=2(\frac{\pi}{16})$، مقدار $\cos\frac{\pi}{8}$ را برحسب a به دست می‌آوریم:

$$\cos\frac{\pi}{8}=2\cos^2\frac{\pi}{16}-1 \xrightarrow{\cos\frac{\pi}{16}=a} \cos\frac{\pi}{8}=2a^2-1$$

گام دوم: چون $\frac{\pi}{4}=2(\frac{\pi}{8})$، کسینوس $\frac{\pi}{4}$ را هم برحسب a می‌نویسیم:

$$\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1 \xrightarrow[\cos\frac{\pi}{8}=2a^2-1]{\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}=2(2a^2-1)^2-1$$

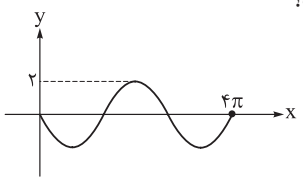
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=2(4a^4-4a^2+1)-1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=8a^4-8a^2+1 \quad (*)$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال مقدار $16a^2(a^2-1)$ است که آن را از روی رابطهٔ $(*)$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=8a^4-8a^2+1 \xrightarrow{\text{فاکتور از } 8a^2} \frac{\sqrt{2}}{2}=8a^2(a^2-1)+1 \Rightarrow 8a^2(a^2-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف }\times 2} \underbrace{16a^2(a^2-1)}_{\text{خواستهٔ سؤال}}=\sqrt{2}-2$$

۸ نمودار تابع $y = a\sin bx$ به صورت زیر است. دورهٔ تناوب تابع $y = \cos(\frac{a}{b}x)$ کدام است؟



۱) $\frac{۳\pi}{۴}$
۲) $\frac{۳\pi}{۲}$
۳) $\frac{۴\pi}{۳}$
۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

مشاوره نمودارهای مثلثاتی از مباحث پرتکرار در کنکورهای مختلف بوده است.

Hint

با توجه به دورهٔ تناوب و ماکزیمم از روی شکل ابتدا به ترتیب $|b|$ و $|a|$ را پیدا کنید و سپس از رابطهٔ دورهٔ تناوب خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

درس Box

نمودار توابع مثلثاتی:

ماکزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی به فرم $y = a\sin(bx)+c$ و $y = a\cos(bx)+c$ از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\max = |a|+c$$

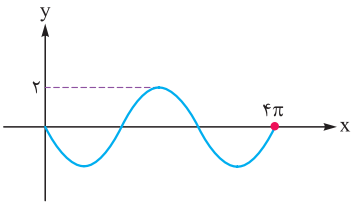
$$\min = -|a|+c$$

دورهٔ تناوب این توابع نیز از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: می‌دانیم که در تابع به فرم $y = a\sin(bx)+c$، ماکزیمم برابر $|a|+c$ است. در تابع داده‌شده $c = ۰$ و از روی نمودار ماکزیمم تابع ۳ است، در نتیجه:



$$|a|+۰ = ۲ \Rightarrow |a| = ۲$$

گام دوم: می‌دانیم که یک دورهٔ تناوب تابع سینوس به صورت  می‌باشد. در نمودار داده‌شده یک‌ونیم دورهٔ تناوب از تابع آورده شده است؛ پس دورهٔ تناوب آن برابر می‌شود با:

$$۱/۵T = ۴\pi \Rightarrow ۳T = ۸\pi \Rightarrow T = \frac{۸\pi}{۳}$$

از روی فرمول دورهٔ تناوب توابع سینوسی، $|b|$ را پیدا می‌کنیم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\overset{۴}{\cancel{۸}}\pi}{۳} = \frac{\cancel{۲}\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۳}{۴}$$

گام سوم: باز هم از فرمول دورهٔ تناوب استفاده می‌کنیم تا دورهٔ تناوب تابع $y = \cos(\frac{a}{b}x)$ را به دست آوریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|\frac{a}{b}|} \xrightarrow[\frac{|a|}{|b|}=\frac{|a|}{|b|}]{|a|=۲,\,|b|=\frac{۳}{۴}} T = \frac{۲\pi}{\frac{۸}{۳}} = \frac{۳\pi}{۴}$$

۹ اگر $\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{۹}{۱۳}$ و $\tan\beta=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) -۲ یا $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲ یا $-\frac{۱}{۲}$
۳) ۲ یا $\frac{۱}{۲}$
۴) -۲ یا $-\frac{۱}{۲}$

مشاوره فرمول تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه ویژهٔ رشتهٔ ریاضی است و قابلیت این را دارد که به صورت مستقیم در کنکور بیاید.

Hint از روی داده‌های سؤال و به کمک فرمول مجموع تانژانت دو زاویه ابتدا $\tan ۲\alpha$ و سپس $\tan\alpha$ را پیدا کنید.

درس Box

روابط مربوط به تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

حالت خاص فرمول $\tan(\alpha+\beta)$ برای $\tan ۲\alpha$ است که گفتیم از رابطهٔ $\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به صورت سؤال، $\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{۹}{۱۳}$ و $\tan\beta=\frac{۱}{۳}$. از رابطهٔ تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه استفاده می‌کنیم و $\tan ۲\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{۹}{۱۳}\Rightarrow\frac{\tan ۲\alpha-\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۱}{۳}\tan ۲\alpha}=\frac{۹}{۱۳}\Rightarrow\frac{\frac{۳\tan ۲\alpha-۱}{۳}}{\frac{۳+\tan ۲\alpha}{۳}}=\frac{۹}{۱۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۳\tan ۲\alpha-۱}{۳+\tan ۲\alpha}=\frac{۹}{۱۳}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۳۹\tan ۲\alpha-۱۳=۲۷+۹\tan ۲\alpha\Rightarrow ۳۰\tan ۲\alpha=۴۰\Rightarrow\tan ۲\alpha=\frac{۴}{۳}$$

گام دوم: می‌دانیم که $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$؛ پس:

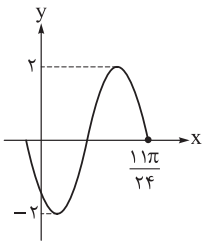
$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}\xrightarrow{\tan ۲\alpha=\frac{۴}{۳}}\frac{۴}{۳}=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۴-۴\tan^۲\alpha=۶\tan\alpha$$

$$\Rightarrow ۴\tan^۲\alpha+۶\tan\alpha-۴=۰\quad(*)$$

گام سوم: رابطهٔ (*) یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب $\tan\alpha$ است، آن را حل می‌کنیم و خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$۴\tan^۲\alpha+۶\tan\alpha-۴=۰\Rightarrow\tan\alpha=\frac{-۶\pm ۱۰}{۸}\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=-۲\\ \text{یا}\\ \tan\alpha=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

۱۰ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=c+a\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})$ به صورت زیر است. حاصل $c+ab$ کدام است؟



۱) $-\frac{۳۴}{۱۱}$

۲) $\frac{۲۳}{۱۱}$

۳) -۶

۴) ۱۰

مشاوره با یکی از سؤالات چالشی این آزمون مواجه هستید، اگر آن را در آزمون پاسخ نداده‌اید، نگران نباشید.

Hint از اتحادهای طلایی استفاده کنید تا توان ۲ حذف شود و سپس به کمک فرمول‌های ماکزیمم و مینیمم و جای‌گذاری نقطه‌ها a، b و c را به دست آورید.

درس Box

اتحادهای طلایی:

از اتحادهای زیر برای حذف‌کردن توان ۲ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^{۲}\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$$

$$\cos^{۲}\alpha=\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به اتحادهای طلایی که در درس‌باکس گفتیم $\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})$ را به صورت زیر می‌نویسیم تا از شرّ توان ۲ خلاص شویم:

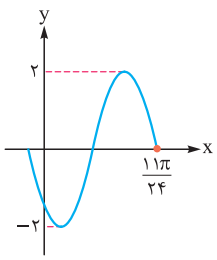
$$\cos^{۲}\alpha=\frac{\cos ۲\alpha+۱}{۲}\Rightarrow\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\cos(۲(bx+\frac{\pi}{۶}))+\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\cos(۲bx+\frac{\pi}{۳})+\frac{۱}{۲}$$

تابع f را طبق تساوی به‌دست‌آمده بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=c+a\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})\xrightarrow{\cos^{۲}(bx+\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\cos(۲bx+\frac{\pi}{۳})+\frac{۱}{۲}}f(x)=c+a(\frac{۱}{۲}\cos(۲bx+\frac{\pi}{۳})+\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\cos(۲bx+\frac{\pi}{۳})+c$$

گام دوم: می‌دانیم در توابع به فرم $a\cos(bx)+c$، $max=|a|+c$ و $min=-|a|+c$، همچنین از روی نمودار واضح است که ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۲ و -۲ است؛ پس:



$$max:\left|\frac{a}{۲}\right|+\frac{a}{۲}+c=۲$$

$$min:-\left|\frac{a}{۲}\right|+\frac{a}{۲}+c=-۲$$

دو طرف رابطه‌های به‌دست‌آمده را یک بار با هم جمع می‌کنیم و یک بار از هم کم می‌کنیم تا به روابط زیر برسیم:

$$\left|\frac{a}{۲}\right|+\frac{a}{۲}+c=۲$$
$$-\left|\frac{a}{۲}\right|+\frac{a}{۲}+c=-۲$$
$$\xrightarrow[(-)]{(+)}\begin{cases}a+۲c=۰\\ ۲\left|\frac{a}{۲}\right|=۴\Rightarrow\left|\frac{a}{۲}\right|=۲\Rightarrow\frac{|a|}{۲}=۲\Rightarrow|a|=۴\end{cases}$$

گام سوم: برای این‌که علامت a را معلوم کنیم، نقطهٔ $x=۰$ را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم. با توجه به نمودار واضح است که $f(۰)$ منفی است، همچنین $a+۲c=۰$، در نتیجه $c=-\frac{a}{۲}$؛ پس:

$$f(x)=\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\cos(۲bx+\frac{\pi}{۳})+c\xrightarrow{x=۰}f(۰)=\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\underbrace{(\cos\frac{\pi}{۳})}_{\frac{۱}{۲}}+c$$

$$\Rightarrow f(۰)=\frac{۳a}{۴}+c\xrightarrow{c=-\frac{a}{۲}}f(۰)=\frac{a}{۴}\xrightarrow{f(۰)\text{ منفی است.}}\frac{a}{۴}<۰\Rightarrow a<۰$$

پس $a<0$. در گام سوم دیدیم که $|a|=4$، در نتیجه:

$$|a|=4 \Rightarrow a=-4 \xrightarrow{c=-\frac{a}{2}} c=2$$

گام چهارم: حال‌که a و c را داریم، نقطهٔ $(\frac{11\pi}{24},0)$ که روی نمودار قرار دارد را در ضابطهٔ f قرار می‌دهیم تا b به دست آید:

$$f(x)=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos(2bx+\frac{\pi}{3})+c \xrightarrow[c=2]{a=-4} f(x)=-2\cos(2bx+\frac{\pi}{3}) \Rightarrow f(\frac{11\pi}{24})=-2\cos(2b(\frac{11\pi}{24})+\frac{\pi}{3})$$

$$\xrightarrow{f(\frac{11\pi}{24})=0} 0=-2\cos(\frac{11b\pi}{12}+\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos(\frac{11b\pi}{12}+\frac{\pi}{3})=0 \xrightarrow[y=-\cos x \text{ تابع تناوب اولین}]{\text{دومین نقطه از}} \frac{11b\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{11b\pi+4\pi}{12}=\frac{-3\pi}{2} \Rightarrow b=-2$$

دقت کنید که b باید منفی باشد؛ زیرا اگر $b>0$ باشد، تابع در $x=0$ صعودی خواهد شد؛ درحالی‌که نمودار رسم‌شده غیر از این را نشان می‌دهد.

پس خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$c+ab=2+(-4)(-2)=2+8=10$$

۱۱ بزرگ‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $1+\cos 2x = 3\sin x$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ چند برابر کوچک‌ترین ریشهٔ آن در این بازه است؟

۱) ۷ ۲) ۵

۳) ۱۱ ۴) ۳

مشاوره معادلات مثلثاتی به فرم معادلات درجه‌دوم از آن دسته سؤالات آسان است که اتفاقاً در کنکور نیز پرتکرار است.

Hint $\cos 2x$ را به صورت $1-2\sin^2 x$ بنویسید تا به یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب $\sin x$ برسید.

درس Box

معادلات مثلثاتی:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به جای $\cos 2x$ در معادلهٔ داده‌شده می‌نویسیم $1-2\sin^2 x$ تا به یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب $\sin x$ برسیم:

$$1+\cos 2x = 3\sin x \Rightarrow 1+1-2\sin^2 x = 3\sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 9-(-16) = 25} \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -2 \text{ غ ق ق} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

چون $-1 \le \sin x \le 1$، پس $\sin x = -2$ قابل قبول نیست و $\sin x = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

گام دوم: در بازهٔ $(0,2\pi)$ می‌دانیم که در $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$، $\sin x = \frac{1}{2}$ است؛ پس معلوم می‌کنیم که ریشهٔ بزرگ‌تر چند برابر ریشهٔ کوچک‌تر است تا خواستهٔ سؤال به دست آید:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{\text{خواستهٔ سؤال}} \frac{\frac{5\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = 5$$

۱۲ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۲\cos x$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۴\pi}{۳}$

۳) $\frac{۱۱\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۳}$

مشاوره بر روی روابط مجموع در کمان حتماً مسلط باشید، چراکه قابلیت این را دارد که به صورت جداگانه بیاید و یا به همراه دیگر مباحث. در این‌جا با معادلهٔ مثلثاتی ترکیب شده است.

Hint به کمک فرمول، $\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ را باز کنید و سپس دو طرف را منهای $\cos x$ کنید. به رابطه‌ای آشنا می‌رسید و بعد از آن سؤال را حل کنید.

درس Box

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل دو کمان:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۲\cos x \Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{۶}+\cos x\sin\frac{\pi}{۶}=۲\cos x \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x=۲\cos x$$

در نتیجه داریم:

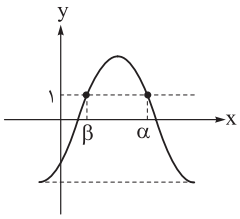
$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x=\frac{۳}{۲}\cos x$$

گام دوم: پس معادله به فرم $\tan x=\sqrt{۳}$ در می‌آید:

$$\tan x=\sqrt{۳}=\tan\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳} \qquad ;k\in\mathbb{Z}$$

گام سوم: جواب‌های بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۴\pi}{۳}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۵\pi}{۳}$ است.

۱۳ شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\sin x-۲\cos x$ در یک دورهٔ تناوب است. حاصل $\sin(\alpha-\beta)$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۳}{۵}$

مشاوره این سؤال نیز یکی دیگر از سؤالات چالشی آزمون است.

Hint ضابطهٔ تابع را برابر ۱ قرار دهید و سپس به کمک توان ۲ رسانی $\sin\alpha$ و $\sin\beta$ را پیدا کنید.

درس Box

نسبت‌های مثلثاتی زوایا به فرم $\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha$ (k فرد):

α را حاده در نظر می‌گیریم، اگر sin داشتیم در آن طرف مساوی می‌نویسیم $\cos\alpha$ (و بالعکس)، اگر tan داشتیم در آن طرف مساوی می‌نویسیم $\cot\alpha$ (و بالعکس) و سپس تعیین می‌کنیم که $\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha$ در کدام ربع مثلثاتی قرار می‌گیرد. اگر **نسبت اولیه** در این ربع مثبت بود، پشت نسبت مثلثاتی حاصل مثبت قرار می‌دهیم و اگر منفی بود، پشت حاصل منفی قرار می‌دهیم. نگاه کنید:

$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha\right)=-\cos\alpha \quad (\text{ربع چهارم } \sin<۰)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\sin\alpha \quad (\text{ربع دوم } \cos<۰)$$

$$\tan\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right)=+\cot\alpha \quad (\text{ربع سوم } \tan>۰)$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\tan\alpha \quad (\text{ربع دوم } \cot<۰)$$

خلاصه بگم! $k\pi$ نسبت رو عوض نمی‌کنه، ولی $\frac{k\pi}{۲}$ (k فرد) نسبت رو عوض می‌کنه، برای تعیین علامت هم کافیه ببینی که عبارت داخل پرانتز در کدوم ربع قرار می‌گیره.

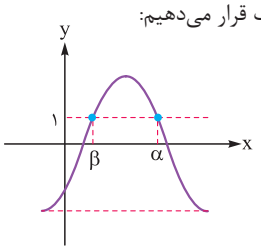
نکته

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع f در $x=\alpha$ و $x=\beta$ با توجه به نمودار برابر ۱ شده است، ضابطهٔ تابع را برابر یک قرار می‌دهیم:



$$f(x)=\sin x-۲\cos x \Rightarrow \sin x-۲\cos x=۱$$

$$\Rightarrow ۲\cos x=\sin x-۱ \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} ۴\cos^۲x=(\sin x-۱)^۲ \Rightarrow ۴(۱-\sin^۲x)=(۱-\sin x)^۲$$

در همین‌جا از رابطهٔ $۲\cos x=(\sin x-۱)$ نتیجه می‌گیریم که $\cos x\le ۰$؛ چراکه $\sin x-۱\le ۰$.

گام دوم: به کمک اتحاد مزدوج رابطهٔ به‌دست‌آمده را ساده می‌کنیم:

$$۴(۱-\sin x)(۱+\sin x)=(۱-\sin x)(۱-\sin x)$$

دو حالت به وجود می‌آید:

حالت اول : $۱-\sin x=۰ \Rightarrow \sin x=۱$

حالت دوم : $۱-\sin x\neq ۰ \Rightarrow ۴(۱-\sin x)(۱+\sin x)=(۱-\sin x)(۱-\sin x)$

$\Rightarrow ۴(۱+\sin x)=۱-\sin x \Rightarrow ۵\sin x=-۳ \Rightarrow \sin x=-\frac{۳}{۵}$

در یک دورهٔ تناوب دو جواب به دست آوردیم، پس $\sin\beta=۱$، در نتیجه $\beta=\frac{\pi}{۲}$ و $\sin\alpha=\frac{-۳}{۵}$. (توجه کنید که زاویه‌ای که سینوس آن $\frac{-۳}{۵}$ می‌شود، در تناوب اول از $\frac{\pi}{۲}$ بزرگ‌تر است؛ پس β مساوی $\frac{\pi}{۲}$ است.)

گام سوم: دیدیم که $\sin\alpha=-\frac{۳}{۵}$، و قبلاً نتیجه گرفته بودیم که $\cos\alpha<۰$ است، در نتیجه $\cos\alpha=\frac{-۴}{۵}$؛ بنابراین خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲})=-\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha=-(-\frac{۴}{۵})=\frac{۴}{۵}$$

۱۴ تابع $f(x)=\frac{\tan ۳x}{۱-\tan^۲ ۳x}$ در بازهٔ $(\frac{۲\pi}{۳},\alpha)$ اکیداً صعودی است، حداکثر مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۱۳\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲۵\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۵۳\pi}{۱۲}$

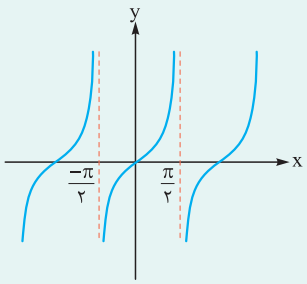
مشاوره برای حل این سؤال نیاز به یک تحلیل خوب از نمودار tan دارید. بر روی نمودارها مسلط باشید.

Hint تابع را با توجه به رابطهٔ بین $\tan ۳x$ و $\tan ۶x$ بازنویسی کنید و حدود $۶x$ را از روی حدود x پیدا کنید و سپس با توجه به یکنوایی تانژانت در یک بازه جواب را به دست آورید.

درس Box

تابع تانژانت:

تابع $y=\tan x$ به صورت زیر است، دورهٔ تناوب این تابع برابر π است. این تابع در یک دورهٔ تناوب خود اکیداً صعودی است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به رابطهٔ $\tan ۲\alpha$ می‌دانیم که $\tan ۶x$ به صورت $\frac{۲\tan ۳x}{۱-\tan^۲ ۳x}$ نوشته می‌شود، با توجه به این موضوع تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\tan ۳x}{۱-\tan^۲ ۳x} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}\underbrace{(\frac{۲\tan ۳x}{۱-\tan^۲ ۳x})}_{\tan ۶x} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}\tan ۶x$$

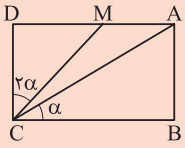
گام دوم: اگر x در بازهٔ $(\frac{۲\pi}{۳},\alpha)$ باشد، $۶x$ در بازهٔ $(۴\pi,۶\alpha)$ است.

$$\frac{۲\pi}{۳}<x<\alpha \xrightarrow{\times ۶} ۴\pi<۶x<۶\alpha$$

می‌دانیم که توابع به فرم $y=a\tan x$ در بازه‌های $(k\pi-\frac{\pi}{۲},k\pi+\frac{\pi}{۲})$ یکنوا هستند؛ پس حداکثر α برابر می‌شود با:

$$۶\alpha=۴\pi+\frac{\pi}{۲}=\frac{۹\pi}{۲} \Rightarrow \alpha=\frac{۹\pi}{۱۲}=\frac{۳\pi}{۴}$$

۱۵ در مستطیل شکل مقابل، $\tan ۲\alpha = \frac{۳}{۴}$ است. نسبت $\frac{AM}{DM}$ کدام است؟

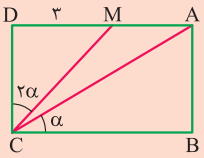


۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) $\frac{۵}{۳}$

Hint DM را برابر ۳ فرض کنید و DC را از روی $\tan ۲\alpha$ پیدا کنید. سپس $\tan \alpha$ را بیابید و پاسخ را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض کنیم $DM = ۳$، با توجه به شکل خواهیم داشت:



$$\tan ۲\alpha = \frac{DM}{DC} \xrightarrow{\tan ۲\alpha = \frac{۳}{۴}} \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{DC} \Rightarrow DC = ۴$$

گام دوم: از روی $\tan ۲\alpha$، تانژانت α را به دست می‌آوریم:

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan \alpha}{۱ - \tan^۲ \alpha} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{۲\tan \alpha}{۱ - \tan^۲ \alpha} \Rightarrow ۳ - ۳\tan^۲ \alpha = ۸\tan \alpha \Rightarrow ۳\tan^۲ \alpha + ۸\tan \alpha - ۳ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = ۱۰۰} \tan \alpha = \frac{-۸ \pm ۱۰}{۶} \xrightarrow{\tan \alpha > ۰} \tan \alpha = \frac{۱}{۳}$$

گام سوم: با توجه به شکل گام اول داریم:

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{۱}{۳} = \frac{۴}{BC} \Rightarrow BC = ۱۲$$

گام چهارم: اندازهٔ AM را پیدا می‌کنیم تا به خواستهٔ سؤال برسیم:

$$AM = AD - MD \xrightarrow[MD=۳]{AD=BC=۱۲} AM = ۱۲ - ۳ = ۹$$

پس خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\frac{AM}{DM} = \frac{۹}{۳} = ۳$$

۱۶ معادلهٔ $\sin ۲nx + \cos nx = ۰$ در بازهٔ $(۰,\pi)$، ۵ ریشه دارد. مقدار طبیعی **n** کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به رابطهٔ $\sin ۲nx = ۲\sin nx\cos nx$، معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sin ۲nx + \cos nx = ۰ \Rightarrow ۲\sin nx\cos nx + \cos nx = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{از } \cos nx \text{ فاکتور می‌گیریم.}} \cos nx(۲\sin nx + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos nx = ۰ \\ ۲\sin nx + ۱ = ۰ \Rightarrow \sin nx = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

گام دوم: جواب‌های کلی معادله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \cos nx = ۰ \Rightarrow nx = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin nx = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \sin nx = \sin\frac{-\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} nx = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ nx = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

گام سوم: با توجه به این‌که می‌خواهیم جواب‌ها در بازهٔ $(۰,\pi)$ باشد، به ازای x مناسب چندتا از جواب‌ها را می‌نویسیم:

$$nx = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow nx = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}, \ldots \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲n}, \frac{۳\pi}{۲n}, \frac{۵\pi}{۲n}, \ldots$$

$$\begin{cases} nx = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ nx = ۲k\pi + ۷\frac{\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow nx = \frac{۷\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶}, \frac{۱۹\pi}{۶}, \ldots \Rightarrow x = \frac{۷\pi}{۶n}, \frac{۱۱\pi}{۶n}, \frac{۱۹\pi}{۶n}$$

حال جواب‌ها را به ترتیب مرتب می‌کنیم:

$$\frac{\pi}{۲n}, \frac{۷\pi}{۶n}, \frac{۳\pi}{۲n}, \frac{۱۱\pi}{۶n}, \frac{۵\pi}{۲n}, \frac{۱۹\pi}{۶n}, \ldots$$

گام چهارم: برای این‌که ۵ جواب داشته باشیم، باید π از $\frac{۱۹\pi}{۶n}$ کوچک‌تر و از $\frac{۵\pi}{۲n}$ بزرگ‌تر باشد؛ پس:

$$\frac{۵\pi}{۲n} < \pi < \frac{۱۹\pi}{۶n} \xrightarrow{\text{تقسیم بر } \pi} \frac{۵}{۲n} < ۱ < \frac{۱۹}{۶n} \xrightarrow{\times n} \frac{۵}{۲} < n < \frac{۱۹}{۶}$$

$$\Rightarrow n = ۳ : \text{مقدار طبیعی } n$$

۱۷ در مثلث ABC رابطهٔ $2\cos(2A+2B)+1=\cos(C+\frac{\pi}{6})$ برقرار است. $\cos(C-\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض می‌کنیم $C+\frac{\pi}{6}=a$ و $C-\frac{\pi}{6}=b$، پس $a+b$ و $a-b$ برابر می‌شود با:

$$a+b=C+\frac{\pi}{6}+C-\frac{\pi}{6}=2C \quad (*)$$

$$a-b=C+\frac{\pi}{6}-C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3} \quad (**)$$

گام دوم: می‌دانیم که $A+B+C=\pi$، پس $A+B=\pi-C$؛ در نتیجه:

$$2A+2B=2\pi-2C \Rightarrow \cos(2A+2B)=\underbrace{\cos(2\pi-2C)}_{\cos 2C}$$

گام سوم: از سمت چپ تساوی داده‌شده در صورت سؤال و $(*)$ و $(**)$ خواهیم داشت:

$$\underbrace{2\cos(2A+2B)}_{\cos 2C}+1=2\cos 2C+1 \xrightarrow{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}} 2(\underbrace{\cos 2C}_{\cos(a+b)}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos(a-b)})$$

$$=2(\cos(a+b)+\cos(a-b))=2(\cos a\cos b-\sin a\sin b+\cos a\cos b+\sin a\sin b)=2(2\cos a\cos b)$$

گام چهارم: ساده‌شدهٔ سمت چپ را با سمت راست برابر قرار می‌دهیم:

$$2(2\cos a\cos b)=\cos(C+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow 4\cos a\cos b=\cos a \Rightarrow \cos b=\cos(C-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$$

۱۸ اگر $\frac{\cos ۲x}{\tan x - \cot x} = \frac{۳}{۸}$ باشد، مقدار $\tan x + ۴$ کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{۳}$
۲) $\pm\sqrt{۷}$
۳) $\pm\sqrt{۵}$
۴) $\pm۲\sqrt{۲}$

Hint $\tan x - \cot x$ را ساده‌تر کنید و سپس از روی $\sin ۲x$، $\tan x$ را به دست آورید.

نکته رابطهٔ زیر را برای سرعت بیشتر در بعضی از سؤالات بلد باشید:

$$\sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در تساوی داده‌شده $\tan x - \cot x$ را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\sin x \cos x} \xrightarrow[\sin x\cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x]{\sin^۲ x - \cos^۲ x = -\cos ۲x} \tan x - \cot x = \frac{-\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}$$

گام دوم: حال عبارت به‌دست‌آمده را در تساوی صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{\cos ۲x}{\tan x - \cot x} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow \frac{\cos ۲x}{\frac{-\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}\sin ۲x \cos ۲x}{-\cos ۲x} = \frac{۳}{۸}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\sin ۲x = \frac{۳}{۸} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{-۳}{۴}$$

گام سوم: می‌دانیم که $\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$، خواهیم داشت:

$$\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x} \Rightarrow \frac{-۳}{۴} = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x} \Rightarrow -۳ - ۳\tan^۲ x = ۸\tan x \Rightarrow ۳\tan^۲ x + ۸\tan x + ۳ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = ۲۸} \tan x = \frac{-۸ \pm ۲\sqrt{۷}}{۶} = \frac{-۴ \pm \sqrt{۷}}{۳}$$

پس خواستهٔ سؤال که $۳\tan x + ۴$ است، برابر می‌شود با:

$$۳\tan x + ۴ = ۳\left(\frac{-۴ \pm \sqrt{۷}}{۳}\right) + ۴ = \cancel{-۴} \pm \sqrt{۷} + \cancel{۴} = \pm\sqrt{۷}$$

۱۹ در ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۶ \\ -۶ & x & ۵ \\ ۱۱ & ۹ & -۳ \end{bmatrix}$ اگر به درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون سوم، ۹ واحد اضافه کنیم، دترمینان آن تغییری نمی‌کند. مقدار x کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -۲

Hint دترمینان ۲×۲ که از حذف سطر و ستون درایهٔ x به دست می‌آید، باید صفر باشد.

درس Box

۱) دترمینان ماتریس ۳×۳

اگر $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان این ماتریس با بسط حول سطر اول به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|A|=a_{۱۱}\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۱۲}\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۱۳}\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$

پس دترمینان برحسب سطر اول به صورت $|A|=a_{۱۱}\times\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}-a_{۱۲}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۱۳}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$ می‌باشد.

توجه: دترمینان هر ماتریس ۳×۳ دلخواه را می‌توان برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که حاصل همواره عددی حقیقی و منحصربه‌فرد است، ولی بهتر است براساس سطر یا ستونی بسط دهیم که بیشترین صفر را دارد تا محاسبات ساده‌تر شود. به طور کلی علامت هر درایه از ماتریس ۳×۳ برای محاسبهٔ دترمینان به صورت مقابل است: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

۲) برای این‌که تغییر یک درایه از ماتریس بر کل دترمینان تأثیری نگذارد، لازم است که دترمینان ۲×۲ متناظر با آن درایه برابر صفر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس داده‌شده، دترمینان را نسبت به سطر سوم بسط می‌دهیم. با تغییر درایهٔ $a_{۳۳}$ هیچ تغییری در دترمینان‌های ۲×۲ متناظر با درایه‌های دیگر این سطر ایجاد نمی‌شود، در نتیجه برای این‌که تغییر این درایه بر کل دترمینان تأثیری نگذارد، لازم است که دترمینان متناظر با درایهٔ $a_{۳۳}$ یعنی $\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix}$ برابر صفر باشد؛ پس:

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۶ & x \end{vmatrix}=۰ \Rightarrow ۴x+۱۲=۰ \Rightarrow x=-۳$$

۲۰ اگر A یک ماتریس اسکالر مرتبهٔ دو و ماتریس‌های B و C وارون یکدیگر باشند به طوری که $|(AC-C)(B-2BA)|=0$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -2 ۴) ۲

درس Box

۱) وارون (معکوس) ماتریس: برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی چون B می‌باشد به طوری‌که $AB=BA=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

۲) ماتریس اسکالر: ماتریسی است که درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن برابر با صفر و درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابرند، مثل این ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

۳) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، آن‌گاه: $|AB|=|A||B|$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (تحلیل صورت سؤال):

ماتریس اسکالر A را به صورت $A=\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ و ماتریس‌های B و C را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $BC=I$ و $CB=I$

گام دوم (ساده‌کردن عبارت دترمینان): عبارت داخل دترمینان داده‌شده در صورت مسئله را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$|(AC-C)(B-2BA)|=|(A-I)\underbrace{CB}_{I}(I-2A)|=|A-2A^2-I+2A|$$

$$\Rightarrow |-2A^2+3A-I|=0 \Rightarrow |(-A+I)(2A-I)|=0 \Rightarrow |-A+I||2A-I|=0 \Rightarrow \begin{cases} |-A+I|=0 \\ |2A-I|=0 \end{cases}$$

گام سوم (محاسبهٔ مجموع درایه‌های ماتریس A در حالت‌های مختلف): حالا درایه‌های ماتریس A را با استفاده از دترمینان آن به دست می‌آوریم:

$$|-A+I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-n & 0 \\ 0 & 1-n \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-n)^2=0 \Rightarrow n=1 \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های ماتریس A}} 2n=2$$

$$|2A-I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2n-1 & 0 \\ 0 & 2n-1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (2n-1)^2=0 \Rightarrow n=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های ماتریس A}} 2n=1$$

مجموع درایه‌های ماتریس A می‌تواند ۲ یا ۱ باشد؛ بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۲۱ اگر A ماتریسی ۳×۳ و دترمینان آن برابر ۲ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $|A.A^{۲}|$ کدام است؟

۱) ۳۲ ●
۲) ۱۲۸
۳) ۸
۴) ۱۶

مشاوره این سؤال ساده، با ایده‌گرفتن از یکی از سؤال‌های امتحان نهایی طرح شده است، این‌گونه سؤال‌ها را به‌هیچ‌وجه نباید از دست بدهید.

درس Box

۱) اگر m عددی طبیعی و A ماتریسی مربعی باشد، آن‌گاه: $|A^{m}|=|A|^{m}$

۲) اگر k عددی حقیقی و A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه: $|kA|=k^{n}|A|$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس باکس بالا داریم:

$$|A|^{۲}\times|A|^{۳}=۲^{۳}\times۲^{۲}=۳۲ \overset{\text{درس باکس ۱}}{=\!=} |A|^{۳}\times|A^{۲}| \overset{\text{درس باکس ۲}}{=\!=} ||A|.A^{۲}|$$

۲۲ از تقاطع یک صفحه با یک سطح استوانه‌ای، چه تعداد از شکل‌های زیر، می‌تواند ایجاد شود؟

الف) دایره　　ب) بیضی

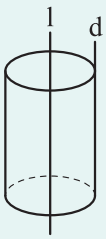
پ) یک خط　　ت) دو خط موازی

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

مشاوره تمرین ۶ در صفحهٔ ۳۹ کتاب درسی هندسه (۳) به بررسی سطح استوانه‌ای می‌پردازد و این سؤال بر مبنای آن طراحی شده است.

درس Box

هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شودکه آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم.



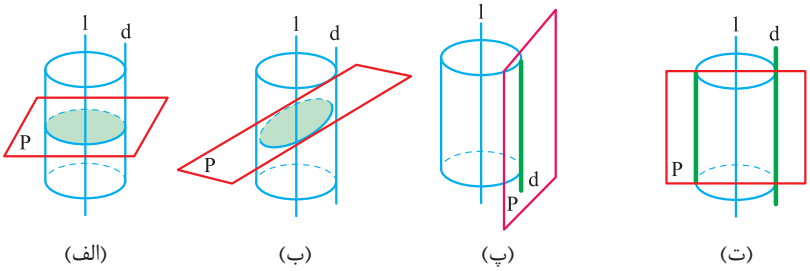
پاسخ خیلی تشریحی با توجه به درس‌باکس:

الف) اگر صفحهٔ P بر d و l عمود باشد، مقطع حاصل دایره است.

ب) اگر صفحهٔ P با d و l متقاطع غیرعمود باشد، مقطع حاصل بیضی است.

پ) اگر صفحهٔ P بر سطح استوانه مماس باشد، مقطع حاصل یک خط است.

ت) اگر صفحهٔ P شامل d و l باشد، مقطع حاصل دو خط موازی است.



۲۳ دو خط d و d' به فاصلهٔ ۴ واحد از یکدیگر مفروض‌اند، مکان هندسی نقاطی از صفحه که حاصل‌ضرب فاصلهٔ آن‌ها از این دو خط برابر ۴ واحد باشد، کدام است؟

۱) یک خط
۲) دو خط
۳) سه خط
۴) چهار خط

درس Box

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ x هستند، دو خط موازی با d در طرفین آن هستند.



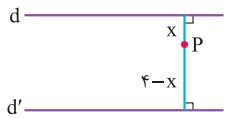
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (تحلیل حالت‌های ممکن مسئله):

دو خط d و d' به فاصلهٔ ۴ از یکدیگر مفروض‌اند، برای نقطهٔ P که حاصل‌ضرب فواصل آن از d و d' برابر ۴ است، دو حالت در نظر می‌گیریم: P بین دو خط یا خارج از دو خط باشد.

گام دوم (محاسبهٔ مکان هندسی در حالت اول):

P بین دو خط است؛ پس اگر فاصلهٔ نقطهٔ P از یک خط برابر x باشد، فاصله‌اش از خط دیگر برابر $۴-x$ است:

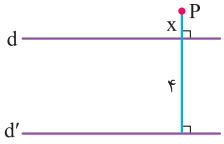


$$x(۴-x)=۴ \Rightarrow x^۲-۴x+۴=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

یعنی مکان هندسی P در این حالت خطی به فاصلهٔ ۲ از دو خط d و d' است.

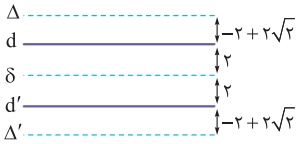
گام سوم (محاسبهٔ مکان هندسی در حالت دوم):

P خارج دو خط است؛ پس اگر فاصلهٔ P از یک خط برابر x باشد، فاصله‌اش از خط دیگر $۴+x$ است:



$$x(۴+x)=۴ \Rightarrow x^۲+۴x-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲-۲\sqrt{۲}<۰ \text{ (غیر قابل قبول)} \\ x=-۲+۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

یعنی مکان هندسی P در این حالت، خطی به فاصلهٔ $-۲+۲\sqrt{۲}$ از خط d در بالای آن یا خطی به فاصلهٔ $-۲+۲\sqrt{۲}$ از خط d' در پایین آن است؛ پس در نهایت مکان هندسی چنین نقاطی سه خط است که آن‌ها را درشکل زیر می بینید: $(\delta, \Delta', \Delta)$



۲۴ مثلث متساوی‌الاضلاع **ABC** به طول ضلع $۲\sqrt{۳}$ مفروض است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از سه ضلع این مثلث برابر با ۳ باشد، کدام است؟

۱) محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۴\sqrt{۳}$

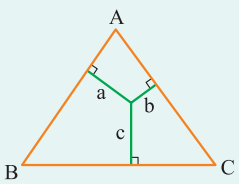
۲) محیط مثلث ABC

۳) نقاط واقع بر محیط و داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۴\sqrt{۳}$

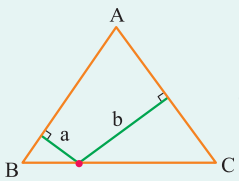
۴) نقاط واقع بر محیط و داخل مثلث ABC

درس Box

۱) در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، مجموع فواصل هر نقطهٔ داخل و روی مثلث از سه ضلع، برابر ارتفاع مثلث است:



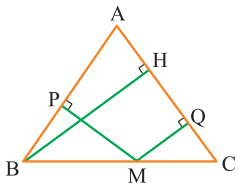
ارتفاع مثلث $= a + b + c$



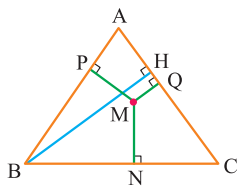
ارتفاع مثلث $= a + b$

۲) اندازهٔ ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس پاسخ سؤال نقاط روی محیط و نقاط داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است.



$$MP + MQ = BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲\sqrt{۳} = ۳$$



$$MN + MQ + MP = BH = ۳$$

توجه: دقت کنید که اگر نقطه‌ای بیرون یک مثلث متساوی‌الاضلاع واقع باشد، مجموع فواصل آن از سه ضلع مثلث، بیشتر از ارتفاع مثلث است.

۲۵ دو صفحهٔ موازی P_1 و P_2 و نقطهٔ A در فضا مفروض‌اند. اگر خط d واقع در صفحهٔ P_1 و نقطهٔ A غیرواقع بر خط d باشد، چند خط گذرا از A و موازی صفحهٔ P_2 وجود دارد به طوری که متقاطع با خط d باشد؟

۱) صفر
۲) بی‌شمار
۳) ۱
۴) صفر یا بی‌شمار

درس Box

۱) خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر d را در فضا در نظر می‌گیریم؛ تنها یک خط وجود دارد که از A گذشته و با d موازی باشد.

۲) دو خطی که در یک صفحه واقع‌اند، یا با هم موازی‌اند، یا متقاطع.

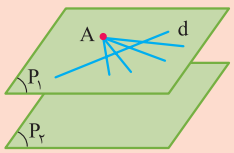
۳) اگر خطی یکی از دو صفحهٔ موازی را قطع کند، حتماً دیگری را هم قطع می‌کند.

۴) اگر دو صفحه با هم موازی باشند، هر خط واقع در یکی از این صفحات، با صفحهٔ دیگر موازی است.

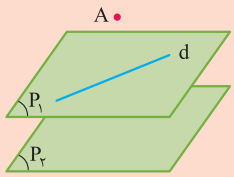
پاسخ خیلی تشریحی ✔

دو حالت داریم:

۱) A روی صفحهٔ P_1 باشد: در این حالت مطابق شکل زیر، بی‌شمار خط وجود دارد که از نقطهٔ A بگذرد، با d متقاطع باشد و با صفحهٔ P_2 موازی باشد.



۲) A روی صفحهٔ P_1 نباشد: در این حالت خطی با شرایط مورد نظر وجود ندارد؛ زیرا هر خطی از A رسم کنیم که خط d را قطع کند حتماً صفحهٔ P_2 را نیز قطع می‌کند.



۲۶ اگر صفحهٔ **P** بر صفحهٔ **Q** عمود باشد، کدام گزاره درست است؟

۱) هر خط واقع در صفحهٔ P بر صفحهٔ Q عمود است.

۲) هر خط که بر صفحهٔ Q عمود باشد، در صفحهٔ P قرار دارد.

۳) هر خط عمود بر صفحهٔ P موازی با صفحهٔ Q است و یا درون صفحهٔ Q قرار دارد.

۴) هر خط موازی با صفحهٔ Q بر صفحهٔ P عمود است.

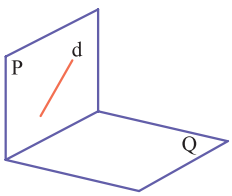
مشاوره گزاره‌های مهم در هندسهٔ فضایی را از روی کتاب درسی یا تستتان یاد بگیرید، ضمن آن‌که حواستان باشد، رسم شکل برای ارائهٔ مثال نقض، در هندسهٔ فضایی بسیار پرکاربرد است.

درس Box

اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، هر خط که بر یکی از آن صفحه‌ها عمود باشد، با صفحهٔ دیگر، موازی است.

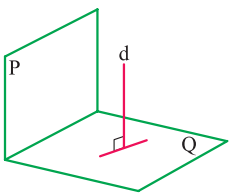
پاسخ خیلی تشریحی

دلیل نادرستی گزینهٔ (۱) را در شکل (۱)، دلیل نادرستی گزینهٔ (۲) در شکل (۲)، علت درستی گزینهٔ (۳) در شکل (۳) و دلیل نادرستی گزینهٔ (۴) در شکل (۴) مشاهده می‌شود.



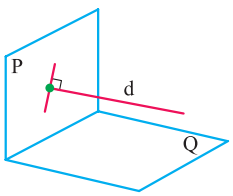
شکل (۱)

خط d در صفحهٔ P است، ولی بر Q عمود نیست.



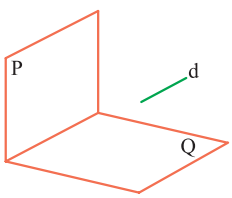
شکل (۲)

خط d بر صفحهٔ Q عمود است، ولی در P قرار ندارد.



شکل (۳)

هر خط که بر P عمود باشد، با صفحهٔ Q موازی است.



شکل (۴)

خط d با صفحهٔ Q موازی است، ولی بر P عمود نیست.

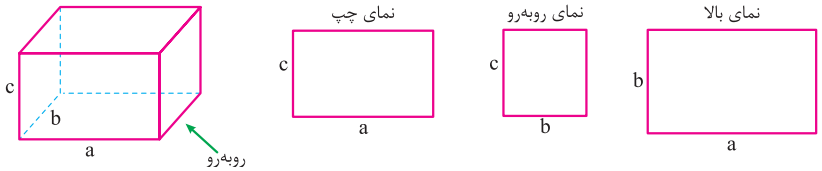
۲۷ اگر مقابل یکی از وجه‌های یک مکعب‌مستطیل بایستیم، مجموع مساحت‌های نماهای چپ، بالا و روبه‌روی آن برابر ۲۴ واحد مربع خواهد بود. مساحت کل این مکعب‌مستطیل چند واحد مربع است؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۵ ۴) ۴۸

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (نوشتن مجموع مساحت‌ها):

بنا به فرض مجموع مساحت‌های نماهای چپ، بالا و روبه‌رو برابر ۲۴ واحد مربع است؛ پس داریم:



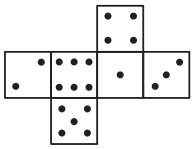
$$ac + bc + ab = ۲۴$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):

مساحت کل مکعب‌مستطیل به ابعاد a ، b و c برابر است با:

$$S_{کل} = ۲(ab + bc + ac) = ۲ \times ۲۴ = ۴۸$$

۲۸ گستردهٔ یک مکعب روی صفحه به صورت زیر است. بزرگ‌ترین مجموع تعداد نقاط سه وجه مشترک در یک رأس این مکعب کدام است؟



۱) ۱۵

۲) ۱۴

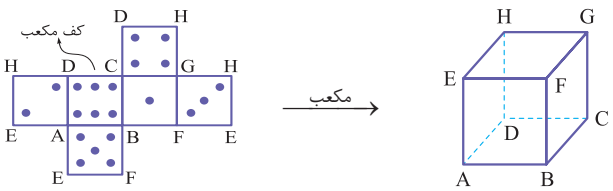
۳) ۱۳

۴) ۱۲

مشاوره این سؤال، با توجه به مجلهٔ ریاضی صفحهٔ ۹۱ کتاب درسی هندسهٔ (۱) طراحی شده است. این‌گونه سؤال‌ها، روش حل مشخصی ندارند و باید با تمرین سؤال‌های مشابه، قدرت تجسم خود را بالا ببرید تا بتوانید به آن‌ها پاسخ دهید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم مکعب): مکعب گستردهٔ داده‌شده را رسم می‌کنیم و نقاط را روی وجه‌ها جای‌گذاری می‌کنیم:



گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): با توجه به شکل‌های گام اول، مجموع نقاط سه وجه مشترک در هر یک از رأس‌های مکعب را به دست می‌آوریم:

A ← ۶+۵+۲=۱۳ ← بزرگ‌ترین

B ← ۶+۵+۱=۱۲

C ← ۶+۴+۱=۱۱

D ← ۶+۴+۲=۱۲

E ← ۵+۳+۲=۱۰

F ← ۵+۳+۱=۹

G ← ۴+۳+۱=۸

H ← ۴+۳+۲=۹

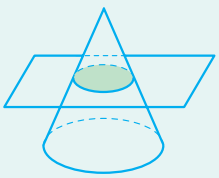
۲۹ در یک مخروط قائم، شعاع قاعده ۹ و ارتفاع آن ۱۲ است. اگر صفحه‌ای موازی با قاعده و فاصلهٔ ۴ از آن مخروط را قطع کند، مساحت مقطع حاصل به کدام عدد صحیح نزدیک‌تر است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۱

۳) ۱۱۲ ۴) ۱۱۳

درس Box

اگر صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ یک مخروط قائم، آن را قطع کند، مقطع حاصل یک دایره است.

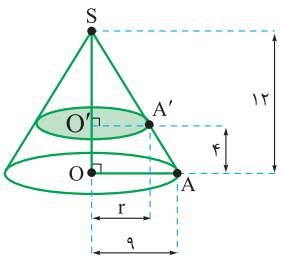


پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (تشخیص مقطع): با توجه به درس‌باکس، مقطع حاصل یک دایره است.

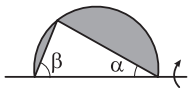
گام دوم (محاسبهٔ شعاع دایرهٔ مقطع): با توجه به شکل دو مثلث قائم‌الزاویهٔ SOA و $SO'A'$ در زاویهٔ S مشترک هستند؛ پس متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{SO'}{SO}=\frac{O'A'}{OA} \Rightarrow \frac{۱۲-۴}{۱۲}=\frac{r}{۹} \Rightarrow r=۶$$



گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): مساحت دایرهٔ مقطع، برابر $S=\pi r^{۲}=۳۶\pi$ با فرض $\pi \simeq ۳/۱۴$، داریم $S=۱۱۳/۰۴$ که به عدد ۱۱۳ نزدیک‌تر است.

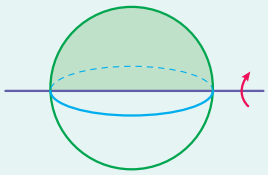
۳۰ مطابق شکل، از نیم‌دایره‌ای به شعاع R، یک مثلث جدا کرده و قسمت باقی‌مانده را حول قطر نیم‌دایره دوران می‌دهیم. اگر $\beta = 5\alpha$، آن‌گاه حجم شکل حاصل از دوران، چند برابر πR^3 است؟



۱) $\frac{7}{6}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{5}{6}$

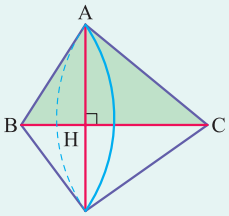
درس Box

۱) از دوران یک نیم‌دایرهٔ حول قطر آن، یک کره به وجود می‌آید.

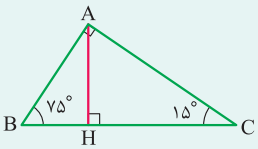


۲) حجم کره‌ای به شعاع R، برابر با $\frac{4}{3}\pi R^3$ است.

۳) حجم شکل حاصل از دوران مثلث ABC، حول ضلع BC برابر است با: $\frac{1}{3}\pi.AH^2.BC$.

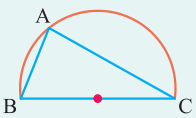


۴) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویه‌های حادهٔ آن 15° و 75° هستند، طول ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ طول وتر است.



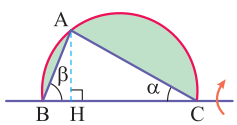
$AH = \frac{1}{4}BC$

۵) اگر مثلث ABC مطابق شکل درون نیم‌دایره‌ای محاط شود، آن‌گاه: $B\hat{A}C = 90^\circ$ چون $\hat{A}$ زاویهٔ محاطی رو به قطر دایره است.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (تشخیص شکل حاصل از دوران): شکل حاصل از دوران، کره‌ای به شعاع R است که شکل حاصل از دوران مثلث ABC حول BC از آن جدا شده است.



گام دوم (محاسبهٔ حجم شکل حاصل از دوران مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$):

با توجه به درس‌باکس $B\hat{A}C = 90^\circ$، پس $\alpha + \beta = 90^\circ$، از آن‌جا که $\beta = 5\alpha$، پس $\alpha = 15^\circ$ و $\beta = 75^\circ$؛ بنابراین:

$$AH = \frac{1}{4}BC \Rightarrow AH = \frac{1}{4}(2R) = \frac{1}{2}R \Rightarrow \frac{1}{3}\pi.AH^2.BC = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}R)^2(2R) = \frac{1}{6}\pi R^3$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):

حجم کره‌ای که از دوران نیم‌دایره ایجاد می‌شود، برابر با $\frac{4}{3}\pi R^3$ است، در نتیجه حجم حاصل از دوران ناحیهٔ مشخص‌شده، برابر است با:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{6}\pi R^3 = (\frac{4}{3} - \frac{1}{6})\pi R^3 = \frac{7}{6}\pi R^3$$

۳۱ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، عدد $2m-5n$ را می‌توانید به صورت $17k+r$ بنویسید، به طوری‌که $k\in\mathbb{Z}$ و $0\le r<47$. در این صورت مجموع ارقام r کدام نیست؟

۱) ۳

۲) ۷

۳) ۱۰

۴) ۱۱

نکته اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت: $a\overset{m}{\equiv}r$.

$$a=mq+r \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}r$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** باقی‌ماندهٔ تقسیم m و n بر ۱۷ به ترتیب برابر ۵ و ۳ است؛ بنابراین:

$$m\overset{17}{\equiv}5 \xrightarrow{\times 2} 2m\overset{17}{\equiv}10$$

$$n\overset{17}{\equiv}3 \xrightarrow{\times 5} 5n\overset{17}{\equiv}15$$

گام دوم: دنبال باقی‌ماندهٔ تقسیم $2m-5n$ بر ۱۷ هستیم:

$$2m-5n\overset{17}{\equiv}10-15\overset{17}{\equiv}-5+17\overset{17}{\equiv}12$$

گام سوم: rهای در محدودهٔ $0\le r<47$ را می‌خواهیم؛ پس داریم:

$$2m-5n\overset{17}{\equiv}12+17\overset{17}{\equiv}29+17\overset{17}{\equiv}46$$

گام چهارم: مجموع ارقام rها برابر است با:

$$r=12 \quad , \quad r=29 \quad , \quad r=46$$
$$\text{مجموع ارقام} \rightarrow 3 \qquad 11 \qquad 10$$

۳۲ p عددی اول است و می‌توانیم p را به شکل $p = 6k + r$ نمایش دهیم که در آن $k \in \mathbb{Z}$؛ چند مقدار صحیح نامنفی برای r می‌تواند وجود داشته باشد؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

نکته اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مقدار r را برای اعداد اول ۲ و ۳ در تقسیم بر ۶ به دست می‌آوریم:

$$2 = 6 \times 0 + 2 \Rightarrow r = 2$$

$$3 = 6 \times 0 + 3 \Rightarrow r = 3$$

گام دوم: طبق نکتهٔ بالا، برای $p > 3$ داریم $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ و این یعنی: $r = 1$ یا $r = 5$.

گام سوم: بنابراین برای r، ۴ مقدار مختلف ۱، ۲، ۳ و ۵ به دست می‌آید.

گول نخوری اگر به اشتباه p را اعداد اول بزرگ‌تر از ۳ در نظر بگیریم، آن‌گاه تنها مقادیر ممکن برای r، اعداد ۱ و ۵ است. در نتیجه به اشتباه گزینهٔ (۱) را انتخاب می‌کنیم.

۳۳ اگر برای اعداد صحیح a، b و c و عدد طبیعی m داشته باشیم $a+c \overset{m}{\equiv} b-c$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a \overset{m}{\equiv} b-۲c$

۲) $b \overset{m}{\equiv} a+۲c$

۳) $(b-a)c \overset{m}{\equiv} ۲c^۲$

۴) $a-b \overset{m}{\equiv} ۲c$

درس Box

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \ , \ (c \in \mathbb{Z}) \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \ , \ (c \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc \ , \ (c \in \mathbb{Z})$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی، عدد صحیح c را کم می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $a+c \overset{m}{\equiv} b-c \xrightarrow{-c} a \overset{m}{\equiv} b-۲c$

گام دوم: به دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی، عدد صحیح c را اضافه می‌کنیم:

گزینهٔ (۲): $a+c \overset{m}{\equiv} b-c \xrightarrow{+c} a+۲c \overset{m}{\equiv} b$

یا این‌که برای گزینهٔ (۲) می‌توان گفت:

طبق گام اول: $a \overset{m}{\equiv} b-۲c \Rightarrow a+۲c \overset{m}{\equiv} b$

گام سوم: ابتدا از دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی، عدد صحیح a را کم و عدد صحیح c را اضافه می‌کنیم، سپس دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی را در عدد صحیح c ضرب می‌کنیم:

گزینهٔ (۳): $a+c \overset{m}{\equiv} b-c \xrightarrow[+c]{-a} ۲c \overset{m}{\equiv} b-a \xrightarrow{\times c} ۲c^۲ \overset{m}{\equiv} (b-a)c$

گام چهارم: از دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی، b و c را کم می‌کنیم:

$a+c \overset{m}{\equiv} b-c \underset{-b}{\overset{-c}{\Rightarrow}} a-b \overset{m}{\equiv} -۲c$

بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

نکته دقت کنید که در حالت کلی $۲c$ و $-۲c$ به پیمانهٔ m هم‌نهشت نیستند مگر این‌که $m \mid c$.

۳۴ کدام هم‌نهشتی درست نیست؟

۱) $۲۷^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$

۲) $۱۰۰۰^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} -۱$

۳) $۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۱$

۴) $۲۹^{۱۹} \overset{۱۲}{\equiv} -۱$

Hint برو سراغ بررسی گزینه‌ها.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** بررسی گزینهٔ (۱): دنبال توانی از ۲۷ هستیم که در تقسیم بر ۱۳ باقی‌مانده‌ای برابر ± ۱ داشته باشد:

$$۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲۷^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \checkmark$$

گام دوم: بررسی گزینهٔ (۲):

$$۱۰۰۰^{۱۳} = (۱۰^{۳})^{۱۳} = ۱۰^{۳۹}$$

$$۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۱۰^{۳۹} \overset{۷}{\equiv} ۳^{۳۹} \quad (۱)$$

$$۳^{۳} \overset{۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به توان ۱۳}} ۳^{۳۹} \overset{۷}{\equiv} -۱ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۰^{۳۹} \overset{۷}{\equiv} -۱ \checkmark$$

گام سوم: بررسی گزینهٔ (۳):

$$۲^{۵} \overset{۲۳}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲^{۱۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۸۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{\times ۲} ۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۲۴ \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \checkmark$$

گام چهارم: بررسی گزینهٔ (۴):

$$۲۹ \overset{۱۲}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۲۹^{۱۹} \overset{۱۲}{\equiv} ۵^{۱۹}$$

$$۵^{۲} \overset{۱۲}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۹}} ۵^{۱۸} \overset{۱۲}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۱۹} \overset{۱۲}{\equiv} ۵ \times$$

۳۵ اگر در یک سال ۲۰ مرداد شنبه باشد، در این صورت ۳۰ آذر در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱) جمعه
۲) شنبه
۳) چهارشنبه
۴) پنجشنبه

Hint فاصلهٔ بین دو تاریخ مورد نظر را پیدا کن و باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم بر ۷ را به دست بیار.

نکته
- در بحث تقویم و روزهای هفته به نکات زیر دقت کنید.
- هر کدام از روزهای هفته، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود.
- شش ماه اولِ سال همگی ۳۱روزه و شش ماه دومِ سال غیر از اسفند (که به‌جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰روزه می‌باشند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فاصلهٔ تاریخ ۲۰ مرداد تا ۳۰ آذر را به دست می‌آوریم:

$$d = \text{۳۰ آذر} - \text{۲۰ مرداد} = \underbrace{۱۱}_{\text{مرداد}} + \underbrace{۳۱}_{\text{شهریور}} + \underbrace{۳\times۳۰}_{\text{مهر تا آذر}}$$

گام دوم: باقی‌ماندهٔ d را بر ۷ به دست می‌آوریم:

$$d \overset{۷}{\equiv} ۱۱+۳۱+۳\times۳۰ \overset{۷}{\equiv} \underbrace{۴+۳}_{۷} \overset{۷}{\equiv} ۶$$

گام سوم: حال از روز شنبه ۶ روز به جلو می‌رویم؛ بنابراین ۳۰ آذر همان سال، جمعه است.

۳۶ پاسخ عمومی معادله‌های هم‌نهشتی $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ و $۳y \overset{۷}{\equiv} ۱۳$ به صورت $x = ak + b$ و $y = ck' + d$ است که در آن‌ها $k, k' \in \mathbb{Z}$ و $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. کم‌ترین مقدار $a + b + c + d$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۳ ۳) ۹ ۴) ۵

درس Box

یک رابطهٔ هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم و منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی، پیداکردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_۰ \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax_۰ \overset{m}{\equiv} b$. $(a, b \in \mathbb{Z})$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول:

$$۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷ - ۵ \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow[\div ۴]{(۴,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۵k + ۳ \ , \ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a = ۵ \ , \ b = ۳$$

گام دوم:

$$۳y \overset{۷}{\equiv} ۱۳ - ۷ \overset{۷}{\equiv} ۶ \xrightarrow[\div ۳]{(۳,۷)=۱} y \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow y = ۷k' + ۲ , (k' \in \mathbb{Z}) \Rightarrow c = ۷ \ , \ d = ۲$$

گام سوم: کم‌ترین مقدار $a + b + c + d$ برابر است با:

$$a + b + c + d = ۵ + ۳ + ۷ + ۲ = ۱۷$$

۳۷ جواب‌های عمومی کدام معادلهٔ سیالهٔ خطی به صورت $(x,y)=(6k+1,3-5k)$ است؟

۱) $12x-10y+18=0$

۲) $10x+12y=46$

۳) $15x-18y+39=0$

۴) $15x+18y=63$

Hint مقدار (x,y) را در معادله‌های سیالهٔ داده‌شده جای‌گذاری کن.

پاسخ خیلی تشریحی برای حذف k، x را در ۵ و y را در ۶ ضرب می‌کنیم:

$$5x+6y=5(6k+1)+6(3-5k)=30k+5+18-30k \Rightarrow 5x+6y=23 \xrightarrow{\times 2} 10x+12y=46$$

یه‌جور دیگه عددگذاری؛ مقادیر x و y را به ازای $k=0$ و $k=1$ به دست می‌آوریم و در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$k=0 \Rightarrow x=1, y=3 \Rightarrow$ حذف گزینهٔ (۴)

$k=1 \Rightarrow x=7, y=-2 \Rightarrow$ حذف گزینه‌های (۱) و (۳)

هر دو مقدار y و x در گزینهٔ (۲) صدق می‌کنند.

تیزبازی جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+by=c$ با فرض $(a,b)=1$ به یکی از دو صورت $\begin{cases} x=bk+x_0 \\ y=-ak+y_0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} x=-bk+x_0 \\ y=ak+y_0 \end{cases}$ است، یعنی یکی از ضرایب a و b در جواب‌های معادله قرینه می‌شود، بنابراین با توجه به جواب‌های $\begin{cases} x=6k+1 \\ y=-5k+3 \end{cases}$ قطعاً هر دو ضریب a و b در معادلهٔ سیاله مثبت هستند و گزینه‌های (۱) و (۳) نیازی به بررسی نداشته و نادرست هستند.

۳۸ چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که مضرب ۷ بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۸ و ۱۱ به ترتیب ۳ و ۸ باشد؟

۱) ۶

۲) ۴

۳) ۲

۴) صفر

نکته

۱) $ac \overset{m}{\equiv} bc \,,\, (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

۲) $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:**

$$a = 7k \Rightarrow 100 \le 7k \le 999 \Rightarrow 15 \le k \le 142$$

گام دوم:

$$\left.\begin{matrix} 7k \overset{8}{\equiv} 3+4\times 8 \overset{8}{\equiv} 35 \xrightarrow[\div 7]{(7,8)=1} k \overset{8}{\equiv} 5+8\times 6 \overset{8}{\equiv} 53 \\ 7k \overset{11}{\equiv} 8+5\times 11 \overset{11}{\equiv} 63 \xrightarrow[\div 7]{(7,11)=1} k \overset{11}{\equiv} 9+4\times 11 \overset{11}{\equiv} 53 \end{matrix}\right\} \Rightarrow k \overset{88}{\equiv} 53$$

گام سوم:

$$k \overset{88}{\equiv} 53 \Rightarrow k = 88q + 53 \,,\, (q \in \mathbb{Z})$$

گام چهارم: از گام اول می‌دانیم $15 \le k \le 142$؛ بنابراین داریم:

$$15 \le 88q + 53 \le 142 \Rightarrow q = 0 \,,\, 1$$

۳۹ اگر عدد $۲x^۲ - x - ۶$ مضرب ۵۳ باشد، اختلاف دو عدد سه‌رقمی مثبت برای x، حداکثر چه‌قدر است؟

۱) ۸۲۵

۲) ۸۴۸

۳) ۸۶۲

۴) ۸۷۱

نکته

- اگر عدد b مضرب عدد a باشد یعنی a، b را می‌شمارد یا $a \mid b$.
- جواب‌های معادلهٔ $(x-a)(x-b) \overset{m}{\equiv} ۰$ در صورتی‌که m عددی اول باشد، به صورت $\begin{cases} x \overset{m}{\equiv} a \\ x \overset{m}{\equiv} b \end{cases}$ است، ولی اگر m عدد اول نباشد، این نتیجه‌گیری در حالت کلی درست نیست.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول:

$$۵۳ \mid ۲x^۲ - x - ۶ = (۲x+۳)(x-۲)$$

گام دوم: ۵۳ عددی اول است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} ۲x+۳ \overset{۵۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲x \overset{۵۳}{\equiv} -۳+۵۳ \overset{۵۳}{\equiv} ۵۰ \xrightarrow[\div ۲]{(۲,۵۳)=۱} x \overset{۵۳}{\equiv} ۲۵ \Rightarrow x = ۵۳k+۲۵ \\ \text{یا} \\ x-۲ \overset{۵۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x \overset{۵۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow x = ۵۳k'+۲ \end{cases}$$

گام سوم: کم‌ترین مقدار برای x و بیشترین مقدار برای x را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} x_{max} = ۵۳ \times ۱۸ + ۲۵ = ۹۷۹ \\ x_{min} = ۵۳ \times ۲ + ۲ = ۱۰۸ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{max} - x_{min} = ۸۷۱$$

۴۰ اگر $(a,b)=d$ و $[a,b]=c$، آن‌گاه چند مورد از معادله‌های زیر قطعاً جواب دارد؟

الف) $ax+by=c$

ب) $ax+by=d$

پ) $ax+dy=2b-3a$

ت) $cx+by=c-2b$

ث) $dx+cy=a-b$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

نکته شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $(a,b)\mid c$.

درس Box ویژگی‌های عادکردن:

۱) $d\mid a, d\mid b \Rightarrow d\mid ma\pm nb$

۲) $(a,b)=d \Rightarrow d\mid a, d\mid b$

۳) $[a,b]=c \Rightarrow a\mid c, b\mid c$

۴) $(a,b)\mid[a,b]$

پاسخ خیلی تشریحی شرط جواب را در هر کدام از معادله‌های سیاله چک می‌کنیم:

الف) $(a,b)\mid c$ ✓ (۴ نکتهٔ)

ب) $(a,b)\mid d$ ✓

پ) $(a,b)=d \Rightarrow d\mid a, d\mid b \Rightarrow d\mid 2b-3a$

$(a,d)=d \Rightarrow (a,d)\mid 2b-3a$ ✓

ت) $[a,b]=c \Rightarrow b\mid c, b\mid b \Rightarrow b\mid c-2b$ (۱)

$(c,b)=([a,b],b)=b \overset{(1)}{\Rightarrow} (c,b)\mid c-2b$ ✓

ث) $(a,b)=d \Rightarrow d\mid a, d\mid b \Rightarrow d\mid a-b$ (۲)

$(d,c)=((a,b),[a,b])=(a,b)=d \overset{(2)}{\Rightarrow} (d,c)\mid a-b$ ✓

بنابراین همهٔ معادله‌ها جواب دارند.

۴۱ چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند، جسم با شتاب ثابت $(a \neq 0)$ حرکت می‌کند.

ب) در تصادفات، کیسهٔ هوا با افزایش مدت‌زمان برخورد، نیروی متوسط وارد بر سرنشین را کاهش می‌دهد.

پ) نیروی اصطکاک جنبشی به مساحت سطح تماس دو جسم بستگی ندارد.

ت) در حالتی‌که یک جسم با تندی حدی خود در حال سقوط است، نیروی مقاومت هوای وارد بر آن برابر صفر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره این تست به صورت ترکیبی از سؤال‌های امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ و خرداد ۱۴۰۳ طرح شده است.

درس Box

۱) رابطهٔ قانون دوم نیوتون:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$\vec{F}_{net}$ = نیروی خالص وارد بر جسم (N)

m = جرم جسم (kg)

$\vec{a}$ = شتاب حرکت (m/s^2)

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ = تغییر سرعت (m/s)

$\Delta t = t_2 - t_1$ = بازهٔ زمانی (s)

۲) رابطهٔ نیروی اصطکاک جنبشی: $f_k = \mu_k F_N$

f_k = اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی (N)

μ_k = ضریب اصطکاک جنبشی

F_N = اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

۳) تندی حدی: وقتی جسمی درون شاره‌ای سقوط می‌کند، در صورتی که نیروهای وارد بر آن متوازن شوند، با تندی ثابتی به نام تندی حدی به طرف پایین حرکت می‌کند. در این‌حالت می‌توان نوشت:



$$F_{net} = 0 \Rightarrow f_D - W = 0 \Rightarrow f_D = W$$

f_D = اندازهٔ نیروی مقاومت شاره (N)

W = اندازهٔ نیروی وزن جسم (N)

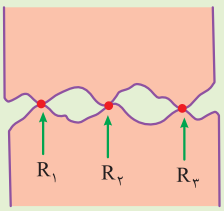
پاسخ خیلی تشریحی ✔ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های داده‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند، نیروی خالص وارد بر جسم، صفر بوده و شتاب نیز صفر می‌شود؛ پس شتاب نمی‌تواند هر عدد ثابتی مثل ۲ یا ۳ یا ... باشد؛ بنابراین عبارت «الف» نادرست است.

$$a = \frac{F_{net}}{m} \xrightarrow{F_{net}=0} a = 0$$

ب) طبق رابطهٔ قانون دوم نیوتون، نیروی متوسط وارد بر سرنشینان خودرو با مدت‌زمان برخورد نسبت وارون دارد. پس با افزایش Δt، نیروی متوسط F_{av} کاهش می‌یابد و عبارت «ب» درست است.

$$\downarrow F_{av} = m\frac{\Delta v}{\uparrow \Delta t}$$



پ) برای یک جسم معین، نیروی اصطکاک f_k به این‌که جسم از چه وجهی روی سطح قرار بگیرد بستگی ندارد. گرچه اندازهٔ سطح ظاهری تماس در دو حالت مختلف فرق دارد ولی تعداد نقاط درگیر تماس در هر دو حالت یکسان است. تعداد این نقاط به F_N بستگی دارد. در رابطهٔ $f_k = \mu_k F_N$ نیز اندازهٔ ظاهری مساحت تماس نقشی ندارد؛ بنابراین عبارت «پ» درست است.

ت) وقتی جسمی با تندی حدی خود در حال سقوط است، نیروی مقاومت هوای وارد بر آن با نیروی وزن جسم برابر می‌شود:

$$f_D = mg \neq 0$$

یعنی آن‌چه صفر می‌شود، شتاب حرکت و نیروی خالص وارد بر جسم است نه آن‌که f_D برابر صفر شود؛ بنابراین عبارت «ت» نادرست است.

۴۲ جسمی به جرم ۲ kg از ارتفاع ۷۲متری سطح زمین رها شده و ۴ s بعد به سطح زمین می‌رسد. اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم، با فرض ثابت‌بودن، چند نیوتون است؟ $(g = ۹/۸\ N/kg)$

۱) ۰/۸ ۲) ۱

۳) ۱/۶ ۴) ۲

مشاوره در مسائلی که به صورت ترکیبی بین حرکت‌شناسی و دینامیک مطرح می‌شوند، حلقهٔ رابط بین این دو مبحث، کمیت شتاب است؛ بنابراین در حل این نوع تست‌ها، بدون تردید، ابتدا باید شتاب حرکت را پیدا کنید.

Hint ابتدا شتاب حرکت را پیدا کنید، سپس به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی مقاومت هوا را به دست آورید.

درس Box

معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت به صورت زیر است:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t$$

Δx = جابه‌جایی (m)

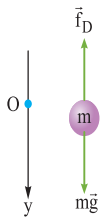
a = شتاب $(m/s^۲)$

t = زمان (s)

$v_۰$ = سرعت اولیه (m/s)

نکته این رابطه در راستای قائم (روی محور y) نیز می‌تواند به کار رود.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به کمک معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان، شتاب حرکت جسم را به دست می‌آوریم و برای سهولت در محاسبات، جهت مثبت محور y را رو به پایین در نظر می‌گیریم:



$$\Delta y = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \xrightarrow[t=۴s]{\Delta y=۷۲m\ ,\ v_۰=۰} ۷۲ = \frac{۱}{۲}a(۴)^۲$$

$$\Rightarrow ۷۲ = ۸a \Rightarrow a = ۹\ m/s^۲$$

نکته این حرکت، سقوط آزاد محسوب نمی‌شود؛ زیرا نیروی مقاومت هوا در این‌جا دخالت دارد.

گام دوم: قانون دوم نیوتون را برای این جسم می‌نویسیم و از آن‌جا نیروی مقاومت هوا را به دست می‌آوریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - f_D = ma \xrightarrow[a=۹\ m/s^۲]{m=۲\ kg\ ,\ g=۹/۸\ m/s^۲} ۲\times۹/۸ - f_D = ۲\times۹ \Rightarrow ۱۹/۶ - f_D = ۱۸$$

$$\Rightarrow f_D = ۱/۶N$$

۴۳ فنری به جرم ناچیز و طول $40\ cm$ و ثابت $800\ N/m$ از سقف آسانسوری آویزان است. اگر وزنه‌ای به جرم $4\ kg$ را از فنر آویزان کنیم و آسانسور با شتاب رو به پایین $2\ m/s^2$ حرکت کند، طول فنر به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۳۴ ۲) ۳۶

۳) ۴۴ ۴) ۴۶

مشاوره این تست کاملاً مشابه یکی از سؤال‌های کنکور تجربی ۱۴۰۳ در نوبت اول است. مشابه این سؤال در تمرین‌های کتاب درسی نیز وجود دارد.

Hint

دو نیروی کشسانی فنر و وزن را روی جسم مشخص کنید. سپس با نوشتن قانون دوم نیوتون، طول فنر را در این حالت حساب کنید.

درس Box

اگر فنری نسبت به حالت عادی خود، به اندازهٔ x کشیده یا فشرده شود، فنر به جسم متصل به خود نیروی کشسانی وارد می‌کند. اندازهٔ این نیرو طبق قانون هوک، با ثابت فنر و تغییر طول فنر متناسب است:

$$F_e = kx$$

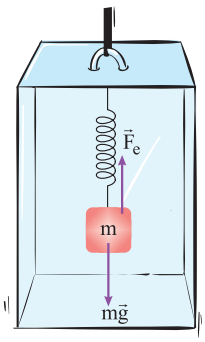
F_e = نیروی کشسانی فنر (N)

k = ثابت فنر (N/m)

x = تغییر طول فنر (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

براساس شکل زیر، وقتی آسانسور با شتاب رو به پایین در حرکت است، طول فنر را به دست می‌آوریم. برای این کار از قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنیم و برای سادگی محاسبات، جهت مثبت را رو به پایین در نظر می‌گیریم:

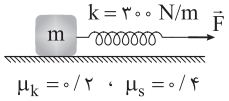


$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - F_e = ma \xrightarrow{F_e = kx} mg - kx = ma \Rightarrow mg - k(L - L_\circ) = ma$$

$$\xrightarrow[L=40\ cm=0/4\ m,\ g=10\ m/s^2]{m=4\ kg,\ k=800\ N/m,\ a=2\ m/s^2} 4\times10 - 800(L - 0/4) = 4\times2 \Rightarrow 32 = 800(L - 0/4)$$

$$\Rightarrow L - 0/4 = 0/04 \Rightarrow L = 0/44\ m \Rightarrow L = 44\ cm$$

۴۴ در شکل زیر، جسمی به جرم $12kg$ روی یک سطح افقی توسط فنری افقی با ثابت $300\ N/m$ کشیده می‌شود. در حالتی‌که جسم در آستانهٔ حرکت قرار دارد، طول فنر به L_1 و در حالتی که جسم با شتاب $1\ m/s^2$ به حرکت درمی‌آید، طول فنر به L_2 می‌رسد. $L_2 - L_1$ برابر چند سانتی‌متر است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۲
۲) ۴
۳) -2
۴) -4

Hint

با فرض آن‌که طول آزاد فنر L_0 باشد، در حالت اول که جسم در آستانهٔ حرکت قرار دارد، با استفاده از توازن نیروها، حاصل $L_1 - L_0$ را به دست آورید. سپس در حالت دوم و به کمک قانون دوم نیوتون، حاصل $L_2 - L_0$ را پیدا کنید. در نهایت نیز $L_2 - L_1$ را حساب کنید.

درس Box

بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی که جسم برای شروع حرکت با آن روبه‌رو می‌شود، نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت $(f_{s,max})$ نامیده می‌شود:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N$$

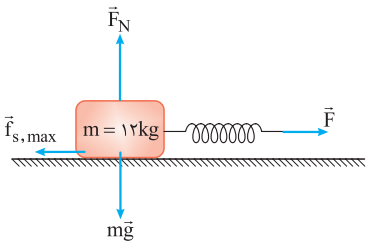
$f_{s,max}$ = نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت (N)

μ_s = ضریب اصطکاک ایستایی

F_N = نیروی عمودی سطح (N)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نیروهای وارد بر جسم در حالت اول را روی شکل مشخص کرده و اندازهٔ هر یک از آن‌ها را به دست می‌آوریم:



$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg \xrightarrow[g=10\ N/kg]{m=12\ kg} F_N = 12\times 10 = 120\ N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N=120\ N]{\mu_s=0/4} f_{s,max} = 0/4\times 120 = 48\ N$$

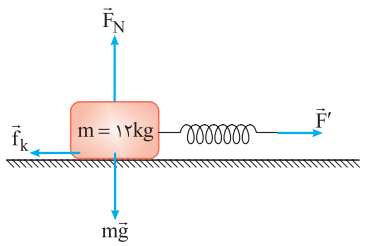
گام دوم: قانون دوم نیوتون در حالت اول که جسم ساکن است، به صورت زیر به کار می‌رود:

$$(F_{net})_x = ma \xrightarrow{a=0} F - f_{s,max} = 0 \Rightarrow F = f_{s,max} = 48\ N$$

اکنون رابطه‌ای بین L_1 و طول آزاد فنر (L_0) به دست می‌آوریم:

$$F = k(L_1 - L_0) \xrightarrow[k=300\ N/m]{F=48\ N} 48 = 300(L_1 - L_0) \Rightarrow L_1 - L_0 = 0/16\ m = 16cm$$

گام سوم: در حالت دوم که جسم در حال حرکت است نیز نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نشان داده و اندازهٔ هر یک از آن‌ها را تعیین می‌کنیم:



$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow[F_N=120N]{\mu_k=0/2} f_k = 0/2\times 120 = 24\ N$$

قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم و $L_2 - L_0$ را حساب می‌کنیم:

$$(F'_{net})_x = ma' \Rightarrow F' - f_k = ma' \Rightarrow F' - 24 = 12\times 1 \Rightarrow F' = 36\ N$$

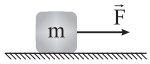
گام چهارم: رابطهٔ بین $L_۲$ و $L_۰$ را در این حالت پیدا می‌کنیم:

$$F' = k\Delta L' \xrightarrow[k=۳۰۰\ N/m]{F'=۳۶\ N} ۳۶ = ۳۰۰(L_۲ - L_۰) \Rightarrow L_۲ - L_۰ = ۰/۱۲\ m \Rightarrow L_۲ - L_۰ = ۱۲\ cm$$

گام پنجم: در پایان نیز $L_۲ - L_۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(L_۲ - L_۰) - (L_۱ - L_۰) = L_۲ - L_۱ \Rightarrow ۱۲ - ۱۶ = L_۲ - L_۱ \Rightarrow L_۲ - L_۱ = -۴\ cm$$

۴۵ در شکل زیر، به جسم نیروی افقی $\vec{F}$ وارد شده و جسم روی سطح افقی با تندی ثابت $15\ m/s$ در حال حرکت است. در این حالت، نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می‌کند، با راستای افقی زاویهٔ 53° می‌سازد. اگر در لحظه‌ای نیروی $\vec{F}$ حذف شود، چند ثانیه پس از این لحظه، جسم متوقف می‌شود؟ $(\sin 53^\circ = 0/8 \text{ و } g = 10\ N/kg)$

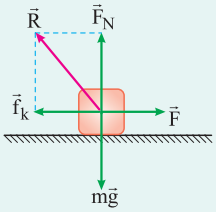


۱) ۱/۲
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

مشاوره یک بار دیگر با تستی روبه‌رو هستیم که به صورت ترکیبی بین حرکت‌شناسی و دینامیک مطرح شده است. بدون تردید باید شتاب حرکت را پیدا کنیم.

Hint به کمک توازن نیروها، شتاب حرکت را حساب کنید. سپس از معادلهٔ سرعت ـ زمان استفاده کنید و زمان توقف را محاسبه کنید.

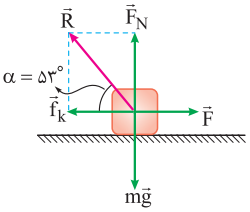
درس Box از طرف سطح تماس، دو نیروی $\vec{F}_N$ (نیروی عمودی سطح) و $\vec{f}$ (نیروی اصطکاک) بر جسم اثر می‌کنند. این دو نیرو بر هم عمود بوده و برایند آن‌ها، نیروی سطح بر جسم نام دارد که آن را با $\vec{R}$ نشان می‌دهیم:



$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

نکته نیروی f برحسب شرایط، ممکن است به صورت f_s، $f_{s,max}$ یا f_k باشد.

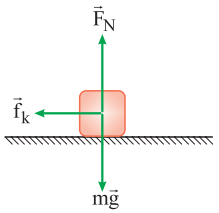
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که در حالت اول تندی جسم ثابت است، نیروی خالص وارد بر جسم صفر است.



$$\tan\alpha = \frac{F_N}{f_k} \xrightarrow{\alpha=53^\circ} \frac{\sin 53^\circ}{\cos 53^\circ} = \frac{F_N}{f_k}$$

$$\xrightarrow[\cos 53^\circ = 0/6]{\sin 53^\circ = 0/8} \frac{0/8}{0/6} = \frac{F_N}{f_k} \Rightarrow f_k = \frac{3}{4}F_N \xrightarrow{F_N = mg} f_k = \frac{3}{4}mg$$

گام دوم: در حالت دوم که $\vec{F}$ حذف می‌شود، به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را پیدا می‌کنیم:



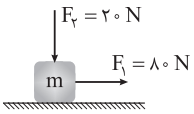
$$F_{net} = ma \Rightarrow -f_k = ma \xrightarrow{f_k = \frac{3}{4}mg} -\frac{3}{4}mg = ma$$

$$\xrightarrow{g = 10\ m/s^2} a = -\frac{3}{4} \times 10 = -7/5\ m/s^2$$

گام سوم: با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان، می‌توانیم زمان توقف را محاسبه کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[a = -7/5\ m/s^2]{v = 0,\ v_0 = 15\ m/s} 0 = -7/5\,t + 15 \Rightarrow t = 2\ s$$

۴۶ در شکل زیر، جعبه‌ای تحت تأثیر نیروی افقی F_1 و نیروی قائم F_2، در مبدأ زمان از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. در لحظهٔ $t = 3s$ نیروی F_1 حذف شده و $2s$ پس از آن جعبه متوقف می‌شود. اگر جابه‌جایی جعبه از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ توقف آن، برابر $30m$ باشد، جرم جعبه چند کیلوگرم است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۸

مشاوره این‌جا هم با یک تست ترکیبی بین حرکت‌شناسی و دینامیک روبه‌رو هستیم. کلید حل این نوع سؤال‌ها پیداکردن شتاب است.

Hint حرکت را در دو مرحله در نظر بگیرید و به کمک معادله‌های حرکت‌شناسی، شتاب هر مرحله را به دست آورید. سپس این شتاب‌ها را در قانون دوم نیوتون به کار ببرید و جرم جعبه را به دست آورید.

درس Box

۱) رابطهٔ شتاب متوسط در حرکت روی خط راست:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

a_{av} = شتاب متوسط (m/s^2)

$\Delta v = v_2 - v_1$ = تغییر سرعت (m/s)

$\Delta t = t_2 - t_1$ = بازهٔ زمانی (s)

v_1 = سرعت در لحظهٔ t_1 (m/s)

v_2 = سرعت در لحظهٔ t_2 (m/s)

نکته اگر حرکت با شتاب ثابت باشد، می‌توان شتاب لحظه‌ای و شتاب متوسط را برابر در نظر گرفت $(a = a_{av})$.

۲) رابطهٔ جابه‌جایی ـ زمان به صورت مستقل از سرعت اولیه به شکل زیر است:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

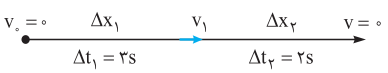
Δx = جابه‌جایی (m)

a = شتاب (m/s^2)

t = زمان (s)

v = سرعت در پایان بازهٔ زمانی (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** حرکت از دو بخش تشکیل شده است. ابتدا تندشونده و سپس کندشونده:



به کمک معادله‌های حرکت‌شناسی، دو رابطه بین شتاب‌های دو مرحلهٔ اول و دوم $(a_1$ و $a_2)$ تشکیل می‌دهیم و از آن‌جا a_1 و a_2 را پیدا می‌کنیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{v_1 - 0}{3} = \frac{v_1}{3} \\ a_2 = \frac{0 - v_1}{2} = -\frac{v_1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{v_1}{3}}{-\frac{v_1}{2}} = -\frac{2}{3}$$

از طرفی، مجموع جابه‌جایی‌های دو مرحله برابر ۳۰ متر است:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 30$$

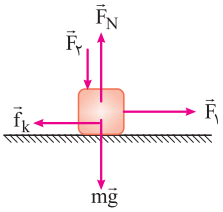
$$\Rightarrow \frac{1}{2}a_1(\Delta t_1)^2 + v_0(\Delta t_1) + (-\frac{1}{2}a_2(\Delta t_2)^2 + v(\Delta t_2)) = 30$$

$$\xrightarrow[\Delta t_1 = 3\,s,\ \Delta t_2 = 2\,s]{v_0 = 0,\ v = 0} \frac{1}{2}a_1(3)^2 - \frac{1}{2}a_2(2)^2 = 30$$

$$\Rightarrow 9a_1 - 4a_2 = 60 \xrightarrow{a_1 = -\frac{2}{3}a_2} 9(-\frac{2}{3}a_2) - 4a_2 = 60 \Rightarrow -10a_2 = 60 \Rightarrow a_2 = -6\ m/s^2$$

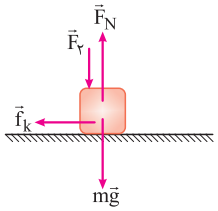
$$a_1 = -\frac{2}{3}a_2 = -\frac{2}{3} \times (-6) = 4\ m/s^2$$

گام دوم: رابطهٔ قانون دوم نیوتون را در حالت اول و در راستای افقی می‌نویسیم:



$$(F_{net})_1 = ma_1 \Rightarrow F_1 - f_k = ma_1$$

رابطهٔ قانون دوم نیوتون را در حالت دوم که نیروی F_1 حذف شده است نیز می‌نویسیم:

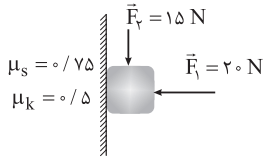


$$(F_{net})_2 = ma_2 \Rightarrow -f_k = ma_2$$

گام سوم: نتایج به‌دست‌آمده در گام دوم را با هم ترکیب می‌کنیم و جرم جعبه را به دست می‌آوریم:

$$F_1 + ma_2 = ma_1 \xrightarrow[a_2 = -6\ m/s^2]{a_1 = 4\ m/s^2\ ,\ F_1 = 80\ N} 80 + m(-6) = m \times 4 \Rightarrow 80 = 10\,m \Rightarrow m = 8\ kg$$

۴۷ در شکل زیر، به جسمی به جرم ۵۰۰g که به دیواری قائم تکیه داده شده است، نیروی افقی $\vec{F}_1$ و نیروی قائم $\vec{F}_2$ وارد می‌شود. اندازهٔ نیرویی که جسم به دیوار قائم وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = 10\ m/s^2)$



۱) $10\sqrt{5}$
۲) ۲۰
۳) $20\sqrt{2}$
۴) ۲۵

مشاوره ساختار این تست، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور تجربی در تیر ماه ۱۴۰۱ است.

Hint

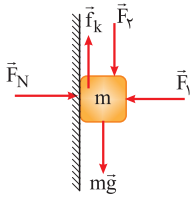
ابتدا با محاسبهٔ $f_{s,max}$ و مقایسهٔ آن با حاصل $F_2 + mg$ به این نتیجه برسید که جسم حرکت می‌کند. سپس نیروی f_k را حساب کنید. در پایان نیز اندازهٔ نیروی R را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم تا معلوم شود که جسم حرکت می‌کند یا خیر:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N = F_1 = 20\ N]{\mu_s = 0/75} f_{s,max} = 0/75 \times 20 = 15\ N$$

مجموع نیروهای رو به پایین F_2 و mg بیشتر از $f_{s,max}$ است؛ بنابراین جسم رو به پایین به حرکت درمی‌آید:



$$\xrightarrow[m = 500\ g = 0/5\ kg]{F_2 = 15\ N,\ g = 10\ m/s^2} F_2 + mg = 15 + 0/5 \times 10 = 20\ N$$

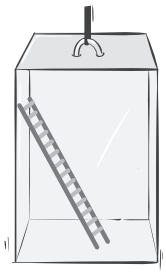
$20\ N > 15\ N \Rightarrow$ جسم رو به پایین به حرکت درمی‌آید.

$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow[F_N = 20\ N]{\mu_k = 0/5} f_k = 0/5 \times 20 = 10\ N$$

گام دوم: طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که جسم به سطح دیوار وارد می‌کند با نیروی سطح دیوار بر جسم (R)، برابر است.

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \xrightarrow[f_k = 10\ N]{F_N = 20\ N} R = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} \Rightarrow R = 10\sqrt{5}\ N$$

۴۸ در شکل زیر، نردبانی به جرم ۲۰ kg درون اتاقک یک آسانسور که با شتاب رو به پایینی به بزرگی $3\ m/s^2$ در حال حرکت است، قرار دارد. اصطکاک دیوارهٔ قائم اتاقک آسانسور ناچیز است. اگر در آستانهٔ لغزش نردبان، اندازهٔ نیرویی که نردبان به دیوارهٔ قائم وارد می‌کند، ۴۲N باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین نردبان و کف اتاقک آسانسور کدام است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۰/۲

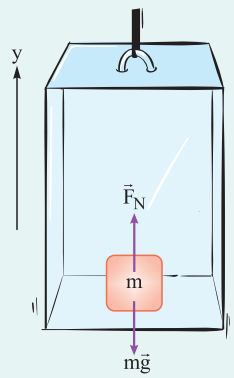
۲) ۰/۳

۳) ۰/۴

۴) ۰/۶

Hint ابتدا نیروی عمودی سطح را که از کف آسانسور بر پای نردبان وارد می‌شود، پیدا کنید. سپس نیروی اصطکاک ایستایی را به دست آورید و به کمک آن، ضریب اصطکاک ایستایی را محاسبه کنید.

درس Box اگر جسمی به جرم m درون آسانسوری قرار گیرد و آسانسور با شتاب ثابت a در راستای قائم حرکت کند، نیروی F_N (که به اندازهٔ وزن ظاهری جسم است) از طرف کف آسانسور، رو به بالا بر جسم وارد می‌شود.



$$F_N = m(g+a)$$

F_N = اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

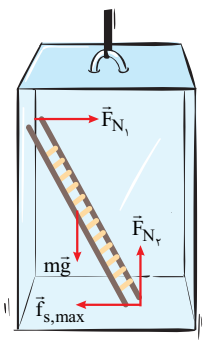
m = جرم جسم (kg)

g = شتاب گرانش در سطح زمین (m/s^2)

a = شتاب حرکت آسانسور (m/s^2)

نکته شتاب رو به بالا را با علامت مثبت و شتاب رو به پایین را با علامت منفی در رابطهٔ فوق به کار می‌بریم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نیروهای وارد بر نردبان را روی شکل نشان می‌دهیم:



نیروی $\vec{F}_{N_2}$ از کف آسانسور و رو به بالا بر پای نردبان اثر می‌کند:

$$F_{N_2} = m(g+a) \xrightarrow[a=-3\ m/s^2]{m=20\ kg,\ g=10\ m/s^2} F_{N_2} = 20(10-3) = 140\ N$$

گام دوم: در راستای افقی از توازن نیروها استفاده می‌کنیم و $f_{s,max}$ را به دست می‌آوریم:

$$(F_{net})_x = 0 \Rightarrow F_{N_1} - f_{s,max} = 0 \xrightarrow{F_{N_1}=42\ N} f_{s,max} = 42\ N$$

گام سوم: ضریب اصطکاک ایستایی (μ_s) را حساب می‌کنیم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_{N_2} \xrightarrow[F_{N_2}=140\ N]{f_{s,max}=42\ N} 42 = \mu_s \times 140 \Rightarrow \mu_s = \frac{42}{140} = 0/3$$

۴۹ جسم ساکنی به جرم $10\ kg$ روی سطح افقی قرار دارد و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح به ترتیب $0/5$ و $0/25$ است. اگر در مبدأ زمان به جسم نیروی افقی $45N$ وارد شود، اندازهٔ تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t = 2s$ در SI چند واحد است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۲۵ ۲) ۲۰

۳) ۵ ۴) صفر

مشاوره این تست یکی از سؤال‌های کنکور رشتهٔ ریاضی در نوبت اول ۱۴۰۳ است که با تغییراتی در این‌جا مطرح شده است.

Hint ابتدا نیروی $f_{s,max}$ بین جسم و سطح را به دست آورید. سپس آن را با نیروی افقی‌ای که می‌خواهد جسم را به حرکت در آورد، مقایسه کنید تا معلوم شود که جسم حرکت می‌کند یا خیر. اگر حرکت نکند، تکانهٔ آن صفر خواهد بود.

درس Box حاصل‌ضرب جرم یک جسم در سرعت آن را تکانهٔ جسم می‌نامیم:

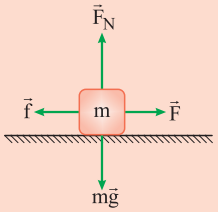
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$\vec{p}$ = تکانه $(\frac{kg.m}{s})$

m = جرم (kg)

$\vec{v}$ = سرعت (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نشان می‌دهیم و اندازهٔ $\vec{F}_N$ را تعیین می‌کنیم:



$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F_N - mg = 0 \xrightarrow[g=10\,N/kg]{m=10\,kg} F_N = mg = 10\times 10 = 100N$$

گام دوم: نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N=100\,N]{\mu_s=0/5} f_{s,max} = 0/5\times 100 = 50\ N$$

از آن‌جا که $F < f_{s,max}$ است، نیروی $45\ N$ نمی‌تواند جسم را به حرکت در آورد؛ بنابراین وقتی سرعت جسم صفر است، تکانهٔ آن نیز صفر است:

$$p = mv \xrightarrow{v=0} p = 0$$

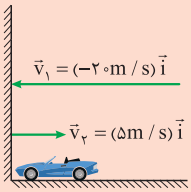
۵۰ خودرویی به جرم $800\ kg$ که در مسیر مستقیم در حال حرکت است، با تندی $72\ km/h$ به مانعی برخورد کرده و با تندی $18\ km/h$ در همان راستا برمی‌گردد. اگر مدت برخورد $0/2\ s$ و جرم رانندهٔ خودرو $80\ kg$ باشد، اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر راننده، در مدت برخورد چند نیوتون است؟

مشاوره این تست مشابه یکی از سؤال‌های کنکور تجربی در نوبت اول ۱۴۰۳ است.

۱) 10^4
۲) 10^5
۳) 6×10^3
۴) 6×10^4

پاسخ خیلی تشریحی ✔ نیروی خالص متوسط وارد بر راننده به کمک قانون دوم نیوتون به دست می‌آید:

$$\vec{F}_{net} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$



$$v_1 = 72\ km/h \div 3/6 = 20\ m/s$$

$$v_2 = 18\ km/h \div 3/6 = 5\ m/s$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 5\,\vec{i} - (-20\,\vec{i}) = (25\ m/s)\,\vec{i}$$

$$F_{net} = m\frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=0/2\ s]{m=80\ kg,\ \Delta v=25\ m/s} F_{net} = 80\times\frac{25}{0/2} \Rightarrow F_{net} = \frac{2000}{0/2} = 10^4\ N$$

نکته چون اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر راننده خواسته شده، جرم خودرو اهمیتی ندارد.

گول نخوری ✘ مراقب باشید؛ چون اگر تندی‌های داده‌شده را به صورت نرده‌ای از هم کم کنید، در دام گزینهٔ (۳) می‌افتید.

۵۱ تندی جسمی به جرم $5\ kg$ در لحظه‌ای برابر v است. اگر با تغییر تندی جسم، اندازهٔ تکانهٔ آن $10\ \frac{kg.m}{s}$ و انرژی جنبشی آن $50\ J$ افزایش یابد، v برابر چند متر بر ثانیه است؟

۱) $1/5$ ۲) $3/5$ ۳) ۴ ۴) ۶

Hint رابطهٔ انرژی جنبشی جسم برحسب تکانه را در دو حالت بنویسید و اختلاف آن‌ها را برابر $50J$ قرار دهید. سپس تکانه در حالت اول (p_1) را پیدا کنید و به کمک آن $v_1 = v$ را حساب کنید.

درس Box رابطهٔ انرژی جنبشی یک جسم برحسب تکانهٔ آن:

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

K = انرژی جنبشی (J)

m = جرم (kg)

p = اندازهٔ تکانه $(\frac{kg.m}{s})$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** اختلاف انرژی جنبشی جسم در دو حالت را برابر با $50J$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_2^2 - p_1^2) \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2m}(p_2 - p_1)(p_2 + p_1)$$

$$\xrightarrow[p_2 - p_1 = 10\ \frac{kg.m}{s}]{\Delta K = 50\ J,\ m = 5\ kg} 50 = \frac{1}{2 \times 5} \times 10\,(p_2 + p_1)$$

$$\Rightarrow p_2 + p_1 = 50\ \frac{kg.m}{s}$$

گام دوم: با داشتن دو معادله، مجهول‌های p_1 و p_2 را به دست می‌آوریم:

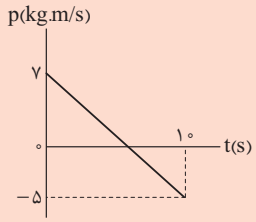
$$\begin{cases} p_2 - p_1 = 10 \\ p_2 + p_1 = 50 \end{cases} \Rightarrow 2p_2 = 60 \Rightarrow p_2 = 30\ \frac{kg.m}{s}$$

$$p_2 - p_1 = 10 \Rightarrow 30 - p_1 = 10 \Rightarrow p_1 = 20\ \frac{kg.m}{s}$$

گام سوم: رابطهٔ تکانهٔ جسم در حالت اول را می‌نویسیم و v_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$p_1 = mv_1 \xrightarrow[m = 5\ kg]{p_1 = 20\ \frac{kg.m}{s}} 20 = 5v_1 \Rightarrow v_1 = 4\ m/s \xrightarrow{v_1 = v} v = 4\ m/s$$

۵۲ نمودار تکانه ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در لحظه‌ای که جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند، نیروی خالص وارد بر آن برحسب نیوتون کدام است؟



۱) $۱/۲\,\vec{i}$

۲) $-۱/۲\,\vec{i}$

۳) $۰/۷\,\vec{i}$

۴) $-۰/۷\,\vec{i}$

مشاوره این تست شبیه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی در نوبت دوم ۱۴۰۳ است که با تغییراتی در این‌جا مطرح شده است.

درس Box

نیروی خالص وارد بر یک جسم، با آهنگ تغییر تکانهٔ جسم برابر است:

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_۲ - \vec{p}_۱}{t_۲ - t_۱}$$

$\vec{F}_{net}$ = نیروی خالص (N)

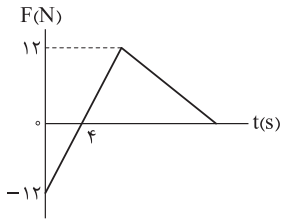
$\vec{p}_۱$ = تکانه در لحظهٔ $t_۱$ $(\frac{kg.m}{s})$

$\vec{p}_۲$ = تکانه در لحظهٔ $t_۲$ $(\frac{kg.m}{s})$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ نیروی خالص وارد بر این متحرک برابر است با $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ که همان شیب خط نمودار تکانه ـ زمان نیز محسوب می‌شود. از آن‌جا که شیب این خط ثابت است، نیروی خالص در مدت ۱۰s با نیروی خالص در هر لحظهٔ دیگری از این بازهٔ زمانی یکسان بوده و برابر است با:

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_۲ - \vec{p}_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۵\vec{i} - ۷\vec{i}}{۱۰ - ۰} = (\frac{-۱۲}{۱۰}N)\vec{i} \Rightarrow \vec{F}_{net} = (-۱/۲N)\vec{i}$$

۵۳ نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی برحسب زمان به شکل زیر است. جسم در مبدأ زمان ساکن است و نیروی خالص در راستای محور x بر جسم وارد می‌شود. به ترتیب از راست به چپ، در لحظهٔ $t = 4s$ تکانهٔ جسم چند کیلوگرم متر بر ثانیه و در بازهٔ زمانی‌ای که شتاب جسم در جهت محور x است، اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر آن چند نیوتون است؟



۱) $۳ ، ۲۴\vec{i}$

۲) $۶ ، ۲۴\vec{i}$

۳) $۳ ، -۲۴\vec{i}$

۴) $۶ ، -۲۴\vec{i}$

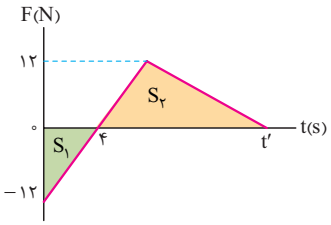
مشاوره این تست مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی در تیرماه ۱۴۰۱ است. شکل دیگری از این سؤال در پرسش‌های دوره‌ای کتاب درسی فیزیک ۳ نیز مطرح شده است.

درس Box

اندازهٔ تغییر تکانهٔ یک جسم (Δp) با مساحت سطح زیر نمودار نیروی خالص ـ زمان آن جسم برابر است. برای بخشی از نمودار که بالای محور t قرار می‌گیرد، $\Delta p > ۰$ و برای بخشی از نمودار که پایین محور t قرار می‌گیرد، $\Delta p < ۰$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در بازهٔ زمانی ۰ تا ۴s مساحت سطح زیر نمودار $(S_۱)$ را با اندازهٔ تغییر تکانهٔ جسم در این ۴ ثانیه برابر قرار می‌دهیم:



$$\Delta p_۱ = S_۱ = \frac{-۱۲ \times ۴}{۲} = -۲۴ \frac{kg.m}{s}$$

p = تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t = 4s$:

$$\Delta p_۱ = p - p_۰$$

$$\xrightarrow[p_۰ = ۰]{\Delta p_۱ = -۲۴ \frac{kg.m}{s}} -۲۴ = p - ۰ \Rightarrow p = -۲۴ \frac{kg.m}{s} \Rightarrow \vec{p} = (-۲۴ \frac{kg.m}{s})\vec{i}$$

گام دوم: وقتی شتاب جسم در جهت محور x است، یعنی $a > ۰$ است. در این صورت نیروی خالص نیز مثبت است. این موضوع در بازهٔ زمانی ۴s تا لحظهٔ t' در نمودار دیده می‌شود:

$$F_{net} = \frac{\Delta p_۲}{\Delta t_۲} = \frac{S_۲}{\Delta t_۲} = \frac{\frac{(t'-۴) \times ۱۲}{۲}}{(t'-۴)} = ۶ \frac{kg.m}{s}$$

۵۴ ارتفاع یک ماهواره از سطح زمین ۵ برابر شعاع زمین است. وزن آن در این ارتفاع چند برابر وزنش در سطح زمین است؟

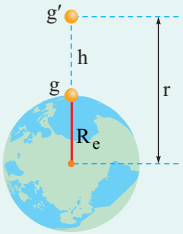
۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

مشاوره این تست یکی از سؤال‌های امتحان نهایی فیزیک (۳) در خرداد ۱۴۰۳ بوده است. این نوع سؤال چه در امتحان‌های نهایی و چه در تست‌های کنکور بارها تکرار شده است.

درس Box

شتاب گرانش در اطراف کرهٔ زمین، با مربع فاصله از مرکز زمین نسبت وارون دارد:

$$\frac{g'}{g}=(\frac{R_e}{r})^۲=(\frac{R_e}{R_e+h})^۲$$



$r=R_e+h$: فاصله از مرکز زمین

R_e : شعاع زمین

h : فاصله از سطح زمین

g : شتاب گرانش در سطح زمین

g' : شتاب گرانش در ارتفاع h از سطح زمین

پاسخ خیلی تشریحی ✔ هر چه از کرهٔ زمین دور شویم، جرم ماهواره (m) تغییری نمی‌کند، ولی به علت کاهش شتاب گرانش زمین، وزن آن (mg) کاهش می‌یابد:

$$\frac{g'}{g}=(\frac{R_e}{r})^۲ \xrightarrow{r=R_e+h=R_e+۵R_e=۶R_e} \frac{g'}{g}=(\frac{R_e}{۶R_e})^۲=(\frac{۱}{۶})^۲ \Rightarrow \frac{mg'}{mg}=\frac{g'}{g}=\frac{۱}{۳۶}$$

گول نخوری ✘ دقت کنید که فاصلهٔ ماهواره تا **سطح زمین** را با فاصلهٔ ماهواره تا **مرکز زمین** اشتباه نگیرید؛ چون در این صورت در دام گزینهٔ (۳) می‌افتید. اگر هم توان ۲ رابطه را فراموش کنید، گزینه‌های (۱) و (۲) در کمین هستند.

۵۵ شعاع سیاره‌ای کروی، ۲ برابر شعاع کرهٔ زمین و چگالی آن نصف چگالی کرهٔ زمین است. شتاب گرانش در سطح این سیاره، چند برابر شتاب گرانش در سطح زمین است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۴

مشاوره این نوع سؤال که شتاب گرانش یک سیاره با چگالی آن ترکیب شود، تا به حال در کنکور مطرح نشده است. اما منتظر چنین سؤالی در کنکورهای پیش رو باشید.

Hint ابتدا رابطه‌ای برای شتاب گرانش در سطح یک سیاره برحسب چگالی و شعاع آن به دست آورید. سپس نسبت شتاب‌های گرانش خواسته‌شده را محاسبه کنید.

درس Box شتاب گرانش در سطح هر سیارهٔ کروی به جرم M و شعاع R از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$g=\frac{GM}{R^۲}$$

یعنی شتاب گرانش در سطح سیاره با جرم آن نسبت مستقیم و با مربع شعاع آن نسبت وارون دارد. حال می‌خواهیم این رابطه را برحسب چگالی مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ سیاره (ρ) بنویسیم:

$$g=\frac{GM}{R^۲} \xrightarrow{M=\rho V=\rho\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳} g=\frac{G\rho\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{R^۲}=\frac{۴}{۳}\pi G(\rho R)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ شتاب گرانش در سطح زمین را با g_e، شعاع زمین را با R_e و چگالی زمین را با ρ_e نشان می‌دهیم:

$$\frac{g}{g_e}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi G(\rho R)}{\frac{۴}{۳}\pi G(\rho_e R_e)} \xrightarrow[R=۲R_e]{\rho=\frac{۱}{۲}\rho_e} \frac{g}{g_e}=\frac{\frac{۱}{۲}\rho_e}{\rho_e}\times\frac{۲R_e}{R_e}=۱$$

۵۶ سفینه‌ای بین کرهٔ ماه و کرهٔ زمین قرار دارد و نیروی خالص گرانشی که از طرف ماه و زمین بر آن وارد می‌شود، برابر صفر است. اگر فاصلهٔ مرکز کرهٔ زمین تا مرکز کرهٔ ماه $۴\times۱۰^{۵}\,km$ باشد، فاصلهٔ سفینه تا مرکز کرهٔ زمین چند کیلومتر است؟ (جرم کرهٔ زمین را ۸۱ برابر جرم کرهٔ ماه در نظر بگیرید.)

۱) ۴×۱۰^{۳} ۲) $۳/۶\times۱۰^{۴}$

۳) ۴×۱۰^{۴} ۴) $۳/۶\times۱۰^{۵}$

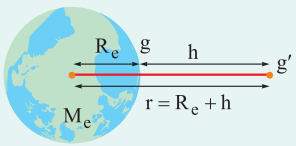
مشاوره این سؤال، یکی از پرسش‌های دوره‌ای آخر فصل ۲ از کتاب درسی فیزیک (۳) است. تمرین‌ها و پرسش‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

درس Box

اندازهٔ شتاب گرانش حاصل از یک سیاره به جرم M در نقطهٔ A به فاصلهٔ r از مرکز آن، به کمک رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

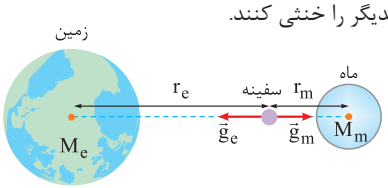
$$g_A=\frac{GM}{r^{۲}}$$

مثلاً در مورد کرهٔ زمین می‌توان نوشت: $g'=\frac{GM_e}{r^{۲}}$.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شرط آن‌که نیروی خالص گرانشی که از طرف ماه و زمین بر سیاره وارد می‌شوند، برابر صفر باشد، آن است که شتاب گرانشی ماه و زمین در محل سفینه، هم‌اندازه و در جهت مخالف هم باشند تا یکدیگر را خنثی کنند.



$$g_e=g_m \Rightarrow \frac{GM_e}{r_e^{۲}}=\frac{GM_m}{r_m^{۲}} \xrightarrow{M_e=۸۱M_m} \frac{۸۱M_m}{r_e^{۲}}=\frac{M_m}{r_m^{۲}} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم.}} \frac{۹}{r_e}=\frac{۱}{r_m}$$

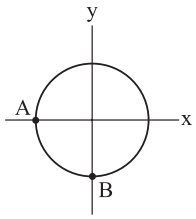
$$\Rightarrow r_e=۹r_m$$

گام دوم: فاصلهٔ مرکز کرهٔ زمین تا مرکز کرهٔ ماه برابر با r_e+r_m است:

$$\begin{cases} r_e+r_m=۴\times۱۰^{۵} \\ r_e=۹r_m \end{cases} \Rightarrow ۹r_m+r_m=۴\times۱۰^{۵} \Rightarrow ۱۰r_m=۴\times۱۰^{۵} \Rightarrow r_m=۴\times۱۰^{۴}\,km$$

$$r_e=۹r_m=۹\times۴\times۱۰^{۴}=۳۶\times۱۰^{۴}\,km=۳/۶\times۱۰^{۵}\,km$$

۵۷ در شکل زیر، جسمی با تندی ثابت $12\ m/s$ به طور ساعتگرد روی محیط دایره‌ای در حال حرکت است. اگر حداقل $5\ s$ طول بکشد تا جسم از نقطهٔ **A** به نقطهٔ **B** برسد، شتاب جسم در نقطهٔ **B** چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(\pi = 3)$



۱) $3/6\,\vec{j}$

۲) $-3/6\,\vec{i}$

۳) $10/8\,\vec{j}$

۴) $-10/8\,\vec{i}$

Hint ابتدا دورهٔ تناوب چرخش جسم روی مسیر دایره‌ای را به دست آورید. سپس شعاع چرخش و به کمک آن، شتاب جسم را حساب کنید.

درس Box

۱) دوره: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت‌زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره را دورهٔ تناوب (دوره) می‌نامیم و یکای آن ثانیه است.

۲) جسم در هر دور چرخش خود، مسافتی به اندازهٔ محیط دایره را می‌پیماید؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = T]{\ell = 2\pi r} v = \frac{2\pi r}{T}$$

v = تندی (m/s)

r = شعاع مسیر (m)

T = دوره (s)

۳) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، با آن‌که اندازهٔ سرعت (تندی) ثابت است، اما جهت آن که همواره بر مسیر دایره‌ای مماس است، تغییر می‌کند؛ بنابراین حرکت دایره‌ای یکنواخت، حرکتی شتابدار محسوب می‌شود. جهت این شتاب همواره به طرف مرکز دایره است و اندازهٔ آن در تمام نقاط مسیر ثابت بوده و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

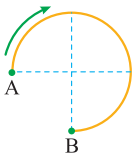
$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

a_c = شتاب مرکزگرا (m/s^2)

v = تندی (m/s)

r = شعاع مسیر (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا دورهٔ حرکت را به دست می‌آوریم. با توجه به جهت چرخش که ساعتگرد است، داریم:



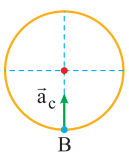
$$\frac{3}{4}T = 5 \Rightarrow T = \frac{20}{3}\,s$$

گام دوم: با معلوم‌بودن تندی حرکت، شعاع مسیر را حساب می‌کنیم:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow[T=\frac{20}{3}s]{v=12\,m/s,\ \pi=3} 12 = \frac{2\times 3\times r}{\frac{20}{3}} \Rightarrow 80 = 6r \Rightarrow r = \frac{40}{3}\,m$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} \xrightarrow[r=\frac{40}{3}m]{v=12m/s} a_c = \frac{12\times 12}{\frac{40}{3}} = \frac{12\times 9}{10} = 10/8\ m/s^2$$

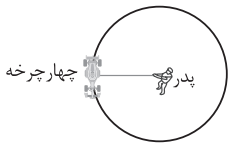
جهت این شتاب به طرف مرکز دایره است، پس در نقطهٔ B داریم:



$$(\vec{a}_c)_B = (10/8\ m/s^2)\,\vec{j}$$

۵۸ پدری فرزند ۲۰کیلوگرمی خود را در یک چهارچرخهٔ ایمن ۵کیلوگرمی قرار می‌دهد و با یک طناب ۲متری، چهارچرخه را روی سطح افقی زمین به گونه‌ای می‌کشد تا چهارچرخه روی مسیر دایره‌ای حرکت کند. با فرض یکنواخت‌بودن حرکت چهارچرخه و صرف نظر کردن از اصطکاک، اگر دورهٔ تناوب چهارچرخه ۴ s باشد، اندازهٔ نیروی کشش طناب چند نیوتون است؟ $(\pi^2 = 10)$

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۵۰



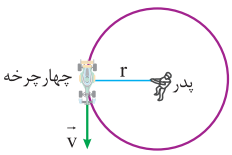
مشاوره این سؤال براساس یکی از مثال‌های کتاب درسی در فصل ۲ فیزیک (۳) و با تغییراتی جزئی در آن، طرح شده است. مثال‌های کتاب درسی را به دقت مطالعه کنید؛ چون هم در امتحان نهایی و هم در کنکور اهمیت دارند.

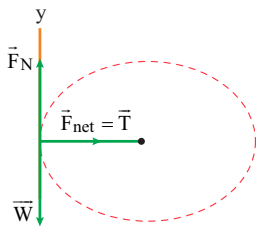
درس Box

نیروی مرکزگرا به شکل‌های مختلفی می‌تواند تأمین شود. مانند نیروی کششی طناب، نیروی گرانشی، نیروی الکتریکی و ... . مثلاً وقتی جسمی را به یک طناب متصل کرده و روی مسیر دایره‌ای می‌چرخانیم، نیروی کشش طناب، همان نیروی مرکزگرا است. یا در چرخش یک ماهواره به دور زمین، نیروی وزن ماهواره، همان نیروی مرکزگرا است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بچه و چهارچرخه را به صورت یک ذره فرض می‌کنیم که در یک مسیر دایره‌ای با دورهٔ ۴ s حرکت می‌کند:





بر این ذره سه نیروی وزن، نیروی عمودی سطح (در راستای عمودی) و نیروی کشش طناب (مرکزگرا) به طرف مرکز دایره وارد می‌شود. نیروی وزن و نیروی عمودی سطح همدیگر را خنثی می‌کنند و بنابراین فقط نیروی $\vec{T}$ به عنوان نیروی خالص در نظر گرفته می‌شود $(F_{net} = T)$.

گام دوم: رابطه‌های نیروی مرکزگرا و تندی حرکت را با هم ترکیب می‌کنیم. برای جلوگیری از تداخل نمادهای نیروی کشش نخ و دوره، در این‌جا دوره را با T' نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} F_{net} = m\dfrac{v^2}{r} \\ v = \dfrac{2\pi r}{T'} \end{cases} \xrightarrow{F_{net}=T} T = m\dfrac{\frac{4\pi^2 r^2}{T'^2}}{r} \Rightarrow T = \dfrac{m4\pi^2 r}{T'^2}$$

$$\xrightarrow[\pi^2=10\ ,\ r=2\,m\ ,\ T'=4\,s]{m=5+20=25kg} T = \dfrac{25\times 4\times 10\times 2}{4^2} = \dfrac{2000}{16} = 125N$$

۵۹ یک دیسک افقی گردان حول محور قائم خود می‌چرخد و جسمی در فاصلهٔ ۴۰سانتی‌متری از مرکز دوران، روی دیسک قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیسک برابر ۰/۸ باشد، برای آن‌که جسم همراه با دیسک بچرخد، دورهٔ تناوب آن برحسب ثانیه برابر با کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ $(\sqrt{2}=1/41 , g=\pi^2=10\ m/s^2)$

الف) ۱/۲

ب) ۱/۴

پ) ۱/۶

ت) ۱/۸

۱) الف ۲) ت

۳) الف ـ ب ۴) پ ـ ت

مشاوره این نوع سؤال که جواب آن می‌تواند در یک بازهٔ عددی معین قرار بگیرد، در تمرین‌های کتاب درسی فیزیک (۳) وجود دارد و می‌تواند به عنوان تیپ جدیدی از تست‌ها در کنکور نیز مطرح شود.

Hint

نیروی مرکزگرای بیشینه را با نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت، برابر قرار دهید و از آن‌جا تندی بیشینه را به دست آورید. سپس به کمک آن، کم‌ترین مقدار دوره را حساب کنید و مقدار آن را با گزینه‌ها مقایسه نمایید.

درس Box

یکی از مواردی که می‌تواند نیروی مرکزگرای لازم در یک حرکت دایره‌ای را تأمین کند، نیروی اصطکاک ایستایی است. شرط آن‌که ذره‌ای بتواند روی یک صفحهٔ چرخندهٔ افقی در جای خود بماند و نلغزد و یا این‌که خودرویی بتواند یک پیچ افقی را بدون لغزش و انحراف بپیماید آن است که:

$$f_s = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow f_{s,max} = m\frac{v_{max}^2}{r}$$

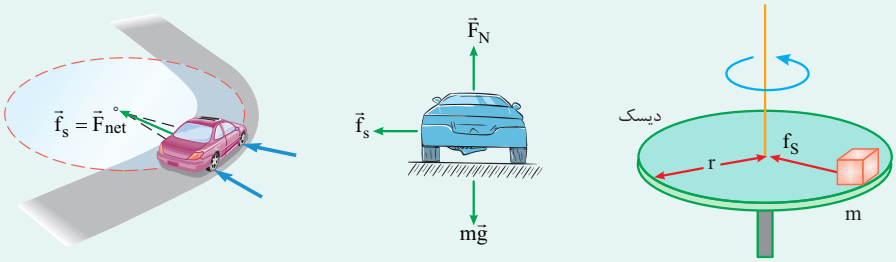
v_{max} = بیشینهٔ تندی مجاز (m/s)

m = جرم جسم (kg)

r = شعاع مسیر (m)

f_s = نیروی اصطکاک ایستایی (N)

$f_{s,max}$ = نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت (N)



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای آن‌که جسم همراه دیسک بچرخد باید نیروی مرکزگرا و نیروی اصطکاک ایستایی، برابر باشند. بیشترین تندی ممکن زمانی است که جسم در آستانهٔ حرکت باشد:

$$f_{s,max} = m\frac{v_{max}^2}{r} \xrightarrow[F_N=mg]{f_{s,max}=\mu_s F_N=\mu_s mg} \mu_s mg = m\frac{v_{max}^2}{r} \xrightarrow[r=40\,cm=0/4\,m]{\mu_s=0/8 , g=10\,m/s^2} 0/8\times 10=\frac{v_{max}^2}{0/4}$$

$$\Rightarrow v_{max}^2 = 3/2$$

گام دوم: روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع معین، هنگامی تندی بیشینه است که دوره، کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد:

$$v_{max}=\frac{2\pi r}{T_{min}} \Rightarrow v_{max}^2=\frac{4\pi^2 r^2}{T_{min}^2} \xrightarrow[r=40\,cm=0/4\,m]{v_{max}^2=3/2 , \pi^2=10} 3/2=\frac{4\times 10\times(0/4)^2}{T_{min}^2}$$

$$\Rightarrow T_{min}^2=\frac{6/4}{3/2}=2 \Rightarrow T_{min}=\sqrt{2}=1/41\,s$$

بنابراین، موارد «پ» و «ت» که در آن‌ها $T > T_{min}$ است، قابل قبول هستند.

۶۰ دو ماهوارهٔ **A** و **B** به جرم‌های $m_A = m$ و $m_B = ۳m$ روی دو مدار دایره‌ای‌شکل، به دور زمین در حال حرکت هستند. اگر در بازهٔ زمانی معین، دو ماهواره به ترتیب ۸ و ۶۴ مرتبه به دور زمین بچرخند، انرژی جنبشی ماهوارهٔ **B**، چند برابر انرژی جنبشی ماهوارهٔ **A** است؟

۱) ۱۲ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$

۳) ۶ ۴) $\frac{۱}{۶}$

مشاوره نگران محاسبات عددی تست‌های مربوط به ماهواره نباشید. تست‌های این قسمت یا مانند این سؤال به صورت مقایسه‌ای و نسبتی مطرح می‌شوند و یا اعداد به گونه‌ای داده می‌شوند که نیازی به ماشین حساب نباشد.

Hint ابتدا نسبت شعاع گردش دو ماهواره و سپس نسبت تندی حرکت آن‌ها را به دست آورید. در پایان نیز با استفاده از رابطهٔ $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ نسبت انرژی جنبشی دو ماهواره را حساب کنید.

درس Box دورهٔ حرکت و تندی چرخش ماهواره‌ای که به دور زمین می‌چرخد، از روابط زیر به دست می‌آیند:

T = دوره (s)

v = تندی (m/s)

r = فاصله از مرکز زمین یا شعاع چرخش (m)

M_e = جرم کرهٔ زمین (kg)

G = ثابت جهانی گرانش $(\frac{N.m^۲}{kg^۲})$

(۱) $T = ۲\pi\sqrt{\frac{r^۳}{GM_e}}$

(۲) $v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** با توجه به رابطهٔ (۱) درس‌باکس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{(\frac{r_A}{r_B})^۳} \\ \Delta t = ۸T_A = ۶۴T_B \Rightarrow T_A = ۸T_B \end{cases} \Rightarrow \frac{۸T_B}{T_B} = \sqrt{(\frac{r_A}{r_B})^۳} \Rightarrow ۶۴ = (\frac{r_A}{r_B})^۳ \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = ۴$$

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ (۲) درس‌باکس داریم:

$$\frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{r_A}{r_B}} \xrightarrow{\frac{r_A}{r_B}=۴} \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{۴} = ۲$$

گام سوم: نسبت انرژی جنبشی ماهوارهٔ **B** به انرژی جنبشی ماهوارهٔ **A** را به دست می‌آوریم:

$$\frac{K_B}{K_A} = \frac{\frac{۱}{۲}m_Bv_B^۲}{\frac{۱}{۲}m_Av_A^۲} \xrightarrow[\frac{v_B}{v_A}=۲]{m_B=۳m\,,\,m_A=m} \frac{K_B}{K_A} = \frac{۳m}{m} \times ۲^۲ = ۳ \times ۴ = ۱۲$$

۶۱ جرم موشکی در اثر مصرف سوخت نصف می‌شود. تندی موشک چند درصد و چگونه تغییر کند تا انرژی جنبشی آن ۲۸ درصد کاهش یابد؟

۱) ۲۰، افزایش یابد.

۲) ۲۰، کاهش یابد.

۳) ۲۵، افزایش یابد.

۴) ۲۵، کاهش یابد.

$K_۲ = K_۱ - \frac{۲۸}{۱۰۰}K_۱ = \frac{۷۲}{۱۰۰}K_۱$

مشاوره انرژی جنبشی از اون مبحث‌های راحته که معمولاً توی دفترچهٔ کنکور یک سؤال داره؛ پس حتماً حواست بهش باشه.

درس Box

انرژی جنبشی جسمی به جرم m که با تندی v حرکت می‌کند، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲$$

(K: انرژی جنبشی (J)، m: جرم (kg)، v: تندی (m/s))

طبق رابطهٔ بالا درمی‌یابیم انرژی جنبشی یک جسم با جرم و مربع تندی جسم رابطهٔ مستقیم دارد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{K_۲}{K_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times (\frac{v_۲}{v_۱})^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق رابطهٔ مقایسه‌ای انرژی جنبشی داریم:

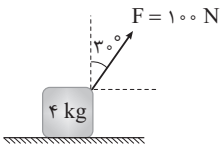
$$\frac{K_۲}{K_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \xrightarrow[K_۲ = K_۱ - \frac{۲۸}{۱۰۰}K_۱ = \frac{۷۲}{۱۰۰}K_۱]{m_۲ = \frac{۱}{۲}m_۱} \frac{۷۲}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \times (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \Rightarrow (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ = \frac{۱۴۴}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \frac{۱۲}{۱۰} = ۱/۲$$

$$\text{درصد تغییر تندی} = \frac{v_۲ - v_۱}{v_۱} \times ۱۰۰ = \frac{۱/۲v_۱ - v_۱}{v_۱} \times ۱۰۰ = +٪۲۰$$

بنابراین تندی موشک ۲۰ درصد افزایش می‌یابد.

۶۲ در شکل زیر، جسمی به جرم ۴ kg با انرژی جنبشی ثابت ۳۲J روی سطح افقی در حالت حرکت است. در یک بازهٔ زمانی ۲ثانیه‌ای، کاری که نیروی $\vec{F}$ بر روی جسم انجام می‌دهد، چند ژول است؟

جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند.



۱) $۸۰۰\sqrt{۳}$

۲) ۸۰۰

۳) $۴۰۰\sqrt{۳}$

۴) ۴۰۰

Hint *اول با داشتن جرم و انرژی جنبشی جسم، تندی جسم رو به دست بیار. بعدش با داشتن تندی و زمان، جابه‌جایی رو حساب کن، در نهایت کار نیروی F رو به دست بیار.*

درس Box کار نیروی ثابت F بر روی یک جسم در جابه‌جایی d از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$W = Fd\cos\theta$$

W = کار (J)

F = اندازهٔ نیرو (N)

d = اندازهٔ جابه‌جایی (m)

θ = زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی

نکته اگر جسمی با سرعت ثابت v حرکت کند، جابه‌جایی آن در بازهٔ زمانی Δt از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d = v\Delta t$$

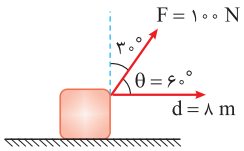
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** تندی جسم را به دست می‌آوریم. طبق رابطهٔ انرژی جنبشی داریم:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \xrightarrow[m=۴\ kg]{K=۳۲\ J} ۳۲ = \frac{۱}{۲}\times ۴ \times v^۲ \Rightarrow v^۲ = ۱۶ \Rightarrow v = ۴\ m/s$$

گام دوم: با داشتن سرعت و مدت زمان، جابه‌جایی جسم را حساب می‌کنیم:

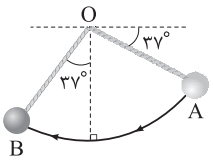
$$d = v\Delta t \xrightarrow[\Delta t=۲\ s]{v=۴\ m/s} d = ۴\times ۲ = ۸m$$

گام سوم: کار نیروی F را به دست می‌آوریم:



$$W = Fd\cos\theta \xrightarrow[\theta=۶۰^\circ]{F=۱۰۰\ N,\ d=۸\ m} W = ۱۰۰\times ۸\times \underbrace{\cos ۶۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}} = ۴۰۰\ J$$

۶۳ در شکل زیر گلوله‌ای به جرم ۳۰۰ g به انتهای نخ سبکی به طول ۵۰ cm متصل شده و در حال حرکت است. طی جابه‌جایی گلوله از نقطهٔ A تا نقطهٔ B، کار نیروی وزن گلوله چند ژول است؟ ($\sin 37^\circ = 0/6$ و $g = 10\ N/kg$)



$$\begin{cases} \cos 53^\circ = \sin 37^\circ = 0/6 \\ \cos 37^\circ = 0/8 \end{cases}$$

۱) ۳

۲) ۰/۳

۳) −۳

۴) −۰/۳

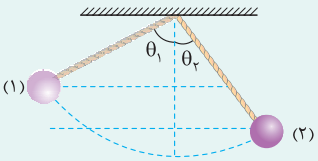
درس Box

کار نیروی وزن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$W_{mg} = -m\,g\,\Delta h$

W_{mg}: کار نیروی وزن (J)، m: جرم (kg)، g: شتاب گرانش (m/s^2)، Δh: تغییر ارتفاع ($\Delta h>0$: رو به بالا، $\Delta h<0$: رو به پایین)

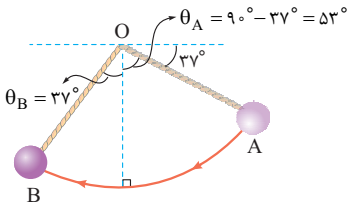
مطابق شکل زیر، کار نیروی وزن بر روی گلولهٔ آونگ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$W_{mg} = mgL(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

پاسخ خیلی تشریحی

کار نیروی وزن را طبق رابطهٔ زیر حساب می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



$$W_{mg} = mgL(\cos\theta_B - \cos\theta_A)$$

$$\xrightarrow[L=50\ cm=0/5\ m]{m=300\ g=0/3kg} W_{mg} = 0/3\times10\times0/5(\underbrace{\cos 37^\circ}_{0/8} - \underbrace{\cos 53^\circ}_{0/6})$$

$$= 0/3\times10\times0/5\times0/2 = 0/3\ J$$

۶۴ جسمی به جرم ۲kg از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر انرژی پتانسیل گرانشی جسم، پس از ۱۲m جابه‌جایی، ۲۰ درصد کاهش یابد، انرژی پتانسیل گرانشی جسم در ارتفاع H چند کیلوژول است؟ ($g = ۱۰\ N/kg$ و سطح زمین مبدأ پتانسیل گرانشی است.)

۱) ۱۴/۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱/۴۴ ۴) ۱/۲

درس Box

انرژی پتانسیل گرانشی جسمی به جرم m که در ارتفاع h نسبت به مبدأ پتانسیل گرانشی (معمولاً سطح زمین) قرار دارد، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$U = mgh$$

U: انرژی پتانسیل گرانشی (J)، m: جرم (kg)، g: شتاب گرانشی (m/s^2)، h: ارتفاع از مبدأ پتانسیل گرانشی (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق رابطهٔ انرژی پتانسیل گرانشی می‌توانیم بنویسیم:

$$U = mgh \xrightarrow{\text{m ثابت}} \frac{U_۲}{U_۱} = \frac{h_۲}{h_۱} \xrightarrow[h_۱=H,\ h_۲=H-۱۲m]{U_۲=U_۱-\frac{۲۰}{۱۰۰}U_۱=۰/۸U_۱} ۰/۸ = \frac{H-۱۲}{H} \Rightarrow ۰/۸H = H-۱۲ \Rightarrow H = ۶۰m$$

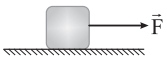
حالا انرژی پتانسیل گرانشی در ارتفاع H را حساب می‌کنیم:

$$U = mgh \xrightarrow[h=H=۶۰\ m]{m=۲\ kg} U = ۲\times۱۰\times۶۰ = ۱۲۰۰\ J \times \frac{۱\ kJ}{۱۰۰۰\ J} = ۱/۲\ kJ$$

۶۵ در شکل زیر، جسم ساکنی به جرم ۲۰ kg با نیروی افقی $\vec{F}$ روی سطح افقی با شتاب ثابت $2\,m/s^2$ به طرف راست به حرکت درمی‌آید. اگر نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می‌کند ۲۵۰ N باشد، کار نیروی $\vec{F}$ در ثانیهٔ دوم چند ژول است؟ $(g = 10\,m/s^2)$

برایند نیروی عمودی سطح و اصطکاک

$t_1 = 1\,s$ تا $t_2 = 2\,s$



۱) ۵۷۰

۲) ۷۶۰

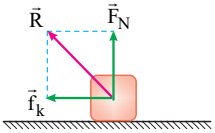
۳) ۸۷۰

۴) ۱۱۶۰

مشاوره سؤالات ترکیبی دینامیک و کار و انرژی در کنکورهای اخیر جایگاه ویژه‌ای داشتن؛ پس ازشون غافل مشو ای جوان ....

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروی اصطکاک وارد بر جسم را حساب می‌کنیم. طبق رابطهٔ نیروی سطح بر جسم داریم:



$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \xrightarrow[R=250\,N]{F_N=mg=200\,N} 250 = \sqrt{200^2 + f_k^2}$$

$$\Rightarrow f_k^2 = 250^2 - 200^2 = 50^2(5^2 - 4^2) = 50^2 \times 9 \Rightarrow f_k = 50 \times 3 = 150\,N$$

گام دوم: نیروی خالص وارد بر جسم را حساب می‌کنیم:

$$F_{net} = ma \xrightarrow[a=2\,m/s^2]{m=20\,kg} F_{net} = 20 \times 2 = 40\,N$$

گام سوم: نیروی F را به دست می‌آوریم:

$$F_{net} = F - f_k \xrightarrow[f_k=150\,N]{F_{net}=40\,N} 40 = F - 150 \Rightarrow F = 190\,N$$

گام چهارم: جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ دوم ($t_1 = 1s$ تا $t_2 = 2s$) را حساب می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[a=2\,m/s^2]{v_0=0} v = 2t \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2(1) = 2\,m/s \\ v_2 = 2(2) = 4\,m/s \end{cases}$$

$$d = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t \Rightarrow d = \left(\frac{2+4}{2}\right) \times 1 = 3\,m$$

گام پنجم: کار نیروی F را در ثانیهٔ دوم، حساب می‌کنیم:

$$W = Fd\cos\theta \xrightarrow[F=190\,N,\ d=3\,m]{\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=1} W = 190 \times 3 \times 1 = 570\,J$$

۶۶ در شکل زیر، جسمی به جرم ۲kg روی سطح بدون اصطکاکی در امتداد سطح از نقطهٔ A با تندی ۵ m / s پرتاب می‌شود. از لحظهٔ پرتاب تا لحظه‌ای که تندی جسم به ۲ m / s می‌رسد، انرژی پتانسیل گرانشی آن چند ژول و چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۲۱، کاهش می‌یابد.

۲) ۲۱، افزایش می‌یابد.

۳) ۲۹، کاهش می‌یابد.

۴) ۲۹، افزایش می‌یابد.

درس Box

در شرایطی که نیروهای اتلافی (اصطکاک، مقاومت هوا و ...) نداشته باشیم، طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، تغییر انرژی پتانسیل برابر است با منفی تغییر انرژی جنبشی.

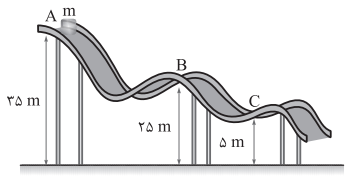
$$\Delta U = -\Delta K$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$\Delta U = -\Delta K = -\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \xrightarrow[v_۲=۲\,m/s]{m=۲\,kg\ ,\ v_۱=۵\,m/s} \Delta U = -\frac{۱}{۲}\times ۲(۲^۲ - ۵^۲) \Rightarrow \Delta U = -(۴-۲۵) = ۲۱\,J$$

بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی، ۲۱ J افزایش می‌یابد.

۶۷ در شکل زیر، جسمی روی سطح بدون اصطکاکی در حال حرکت است. اگر تندی جسم در نقطهٔ **B**، ۳ برابر تندی آن در نقطهٔ **A** باشد، تندی جسم در نقطهٔ **C** چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) ۵

۲) ۱۵

۳) ۲۵

۴) ۳۵

درس Box

۱) طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، کار کل انجام‌شده روی جسم برابر است با تغییر انرژی جنبشی؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$W_t = \Delta K = \frac{۱}{۲} m (v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

W_t: کار کل (J) — ΔK: تغییر انرژی جنبشی (J) — m: جرم (kg) — $v_۲$: تندی نهایی (m/s) — $v_۱$: تندی اولیه (m/s)

۲) اگر در حرکت یک جسم، کار کل برابر با کار نیروی وزن باشد، داریم:

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv'^۲ = mgh \Rightarrow v^۲ - v'^۲ = ۲gh \Rightarrow v^۲ = ۲gh + v'^۲ \Rightarrow v = \sqrt{۲gh + v'^۲}$$

v: تندی جسم در نقطهٔ پایین (m/s)

v': تندی جسم در نقطهٔ بالا (m/s)

h: اختلاف ارتفاع دو نقطه (m)

g: شتاب گرانش $(m/s^۲)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق نکته‌ای که در درس‌باکس آوردیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{مسیر AB}: W_t = W_{mg} \Rightarrow v = \sqrt{۲gh + v'^۲} \xrightarrow[v'=v_A\ ,\ h=۳۵-۲۵=۱۰\ m]{v=v_B=۳v_A} ۳v_A = \sqrt{(۲\times۱۰\times۱۰) + v_A^۲}$$

$$\Rightarrow ۹v_A^۲ = ۲۰۰ + v_A^۲ \Rightarrow ۸v_A^۲ = ۲۰۰ \Rightarrow v_A^۲ = ۲۵ \Rightarrow v_A = ۵\ m/s$$

$$\text{مسیر AC}: W_t = W_{mg} \Rightarrow v = \sqrt{۲gh + v'^۲} \xrightarrow[v'=v_A=۵\ m/s\ ,\ h=۳۵-۵=۳۰\ m]{v=v_C} v_C = \sqrt{(۲\times۱۰\times۳۰) + ۵^۲}$$

$$\Rightarrow v_C = \sqrt{۶۲۵} = ۲۵\ m/s$$

۶۸ شخصی با اعمال نیروی افقی، ثابت و یکسان $\vec{F}$ یک بار ارابهٔ شکل (۱) و بار دیگر ارابه‌های شکل (۲) را روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌کشد تا تندی ارابه‌ها از صفر به مقدار معین v برسد. دربارهٔ کار انجام‌شده توسط شخص (W) و مسافت طی‌شده توسط ارابه‌ها (d) در شکل‌های (۱) و (۲)، کدام درست است؟ (ارابه‌ها مشابه‌اند.)



(۱) (۲)

۱) $d_۱ = ۲d_۲ \,،\, W_۲ = W_۱$

۲) $d_۱ = ۲d_۲ \,،\, W_۲ = ۲W_۱$

۳) $d_۲ = ۲d_۱ \,،\, W_۲ = W_۱$

۴) $d_۲ = ۲d_۱ \,،\, W_۲ = ۲W_۱$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: کار انجام‌شده توسط شخص را در دو حالت مقایسه می‌کنیم. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

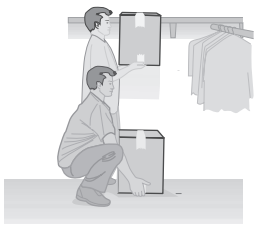
$$W_{\text{شخص}} = W_t = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۰^۲) \xrightarrow{v_۰=۰} W_{\text{شخص}} = \frac{۱}{۲}mv^۲$$

$$\Rightarrow \frac{W_۲}{W_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \xrightarrow[v_۲=v_۱=v]{m_۲=۲m_۱} \frac{W_۲}{W_۱} = ۲ \times (۱)^۲ = ۲ \Rightarrow W_۲ = ۲W_۱$$

گام دوم: مسافت طی‌شده توسط ارابه‌ها را در دو حالت مقایسه می‌کنیم:

$$W = Fd \Rightarrow \frac{W_۲}{W_۱} = \frac{F_۲}{F_۱} \times \frac{d_۲}{d_۱} \xrightarrow[F_۲=F_۱]{W_۲=۲W_۱} ۲ = ۱ \times \frac{d_۲}{d_۱} \Rightarrow \frac{d_۲}{d_۱} = ۲ \Rightarrow d_۲ = ۲d_۱$$

۶۹ در شکل زیر، شخصی با واردکردن نیروی قائم و ثابت $60\ N$، جعبه‌ای به جرم $5\ kg$ را از روی سطح زمین و از حال سکون در امتداد قائم جابه‌جا می‌کند. تندی جعبه در ارتفاع $1/5\ m$ از سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) $\sqrt{3}$

۲) $\sqrt{6}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

درس Box

کار کل برابر است با کار نیروی خالص و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$W_t = F_{net} d \cos\theta$$

W_t = کار کل (J)

F_{net} = نیروی خالص (N)

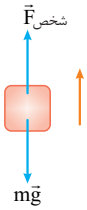
d = جابه‌جایی (m)

θ = زاویهٔ بین $\vec{F}_{net}$ و $\vec{d}$

نکته اگر جسمی از حال سکون شروع به حرکت کند، جابه‌جایی جسم با نیروی خالص وارد بر جسم هم‌جهت است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نیروی خالص وارد بر جعبه را حساب می‌کنیم:



$$F_{net} = F_{شخص} - mg \xrightarrow[m=5\ kg]{F_{شخص}=60\ N} F_{net} = 60 - 50 = 10\ N$$

گام دوم: کار کل را در ارتفاع $1/5\ m$ (پس از $1/5$ متر جابه‌جایی) حساب می‌کنیم:

$$W_t = F_{net} d \cos\theta \xrightarrow[d=1/5\ m\ ,\ \cos\theta=1]{F_{net}=10\ N} W_t = 10 \times 1/5 \times 1 = 15\ J$$

گام سوم: تندی جسم را در ارتفاع $1/5\ m$ طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی حساب می‌کنیم:

$$W_t = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) \xrightarrow[m=5\ kg\ ,\ v_0=0]{W_t=15\ J} 15 = \frac{1}{2} \times 5 (v^2 - 0) \Rightarrow v^2 = 6 \Rightarrow v = \sqrt{6}\ m/s$$

یه‌جور دیگه اگر بخواهیم سؤال را با مفاهیم فصل دینامیک و حرکت‌شناسی پاسخ دهیم، داریم:

ابتدا نیروی خالص را حساب می‌کنیم:

$$F_{net} = F - mg = 60 - 50 = 10\ N$$

سپس شتاب را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{F_{net}}{m} \Rightarrow a = \frac{10}{5} = 2\ m/s^2$$

در نهایت تندی جسم را پس از $1/5$ متر جابه‌جایی به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2ad \xrightarrow[d=1/5\ m]{v_0=0\ ,\ a=2\ m/s^2} v^2 - 0 = 2 \times 2 \times 1/5 \Rightarrow v = \sqrt{6}\ m/s$$

۷۰ چتربازی به جرم کل $100\ kg$ از بالونی در ارتفاع $500\ m$ از سطح زمین با سرعتی به بزرگی $1\ m/s$ به بیرون بالون می‌پرد. اگر او با سرعتی به بزرگی $5\ m/s$ به زمین برسد، در طول این مسیر اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز با فرض ثابت‌بودن، چند نیوتون است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۹۹۵/۲ ۲) ۹۹۷/۶

۳) ۱۰۰۲/۴ ۴) ۱۰۰۴/۸

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کار نیروی وزن را حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = -mg\Delta h \xrightarrow[\Delta h=-500\ m]{m=100\ kg} W_{mg} = -100\times 10\times(-500) = 5\times 10^5\ J$$

گام دوم: کار کل را به دست می‌آوریم. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow[v_1=1\ m/s\ ,\ v_2=5\ m/s]{m=100\ kg} W_t = \frac{1}{2}\times 100(\underbrace{5^2 - 1^2}_{24}) = 1200\ J$$

گام سوم: کار نیروی مقاومت هوا را به دست می‌آوریم:

$$W_t = W_{mg} + W_{f_D} \xrightarrow[W_{mg}=5\times 10^5\ J]{W_t=1200\ J} 1200 = 5\times 10^5 + W_{f_D} \Rightarrow W_{f_D} = 1200 - 500000 = -498800\ J$$

گام چهارم: اندازهٔ نیروی مقاومت هوا را به دست می‌آوریم:

$$W_{f_D} = f_D d\cos\theta \xrightarrow[\cos 180^\circ=-1]{\theta=180^\circ} W_{f_D} = -f_D\times d \Rightarrow -498800 = -f_D\times 500 \Rightarrow f_D = 997/6\ N$$

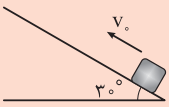
۷۱ در شکل زیر، جسمی با سرعت اولیهٔ $۶\ m/s$ موازی با سطح رو به بالا پرتاب می‌شود. این جسم $۹۰\ cm$ روی سطح جابه‌جا شده و می‌ایستد. چند درصد انرژی جنبشی اولیهٔ جسم توسط کار نیروی اصطکاک تلف شده است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) ۳۶

۲) ۶۴

۳) ۵۰

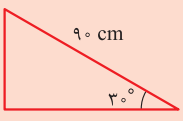
۴) ۷۵



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کار نیروی وزن را در این جابه‌جایی حساب می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:

$$\Delta h = ۹۰ \times \underbrace{\sin ۳۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}} = ۴۵\ cm$$



$$W_{mg} = -mg\Delta h \xrightarrow{\Delta h = ۴۵\ cm = ۰/۴۵\ m} W_{mg} = -m \times ۱۰ \times ۰/۴۵ \Rightarrow W_{mg} = -۴/۵\,m$$

گام دوم: کار کل را طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی حساب می‌کنیم:

$$W_t = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \xrightarrow{v_۱ = ۶\ m/s\ ,\ v_۲ = ۰} W_t = \frac{۱}{۲}m(۰^۲ - ۶^۲) = -۱۸\,m$$

گام سوم: کار نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$W_t = W_{mg} + W_{f_k} \xrightarrow[W_{mg} = -۴/۵\,m]{W_t = -۱۸\,m} -۱۸m = -۴/۵\,m + W_{f_k} \Rightarrow W_{f_k} = -۱۳/۵\,m$$

گام چهارم: انرژی جنبشی اولیهٔ جسم را به دست می‌آوریم:

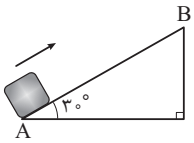
$$K_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ \xrightarrow{v_۱ = ۶\ m/s} K_۱ = \frac{۱}{۲} \times m \times (۶)^۲ = ۱۸\,m$$

گام پنجم: درصد اتلاف انرژی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{|W_{f_k}|}{K_۱} \times ۱۰۰ = \frac{۱۳/۵\,m}{۱۸\,m} \times ۱۰۰ = \frac{۳}{۴} \times ۱۰۰ = ٪۷۵$$

بنابراین ۷۵ درصد انرژی جنبشی اولیه توسط کار نیروی اصطکاک تلف شده است.

۷۲ در شکل زیر، بستهای به جرم $2\ kg$ را از پایین سطح شیبدار با تندی $6\ m/s$ به بالا پرتاب می‌کنیم. این بسته تا ارتفاع معینی بالا رفته و سپس دوباره به محل اولیهٔ خود برمی‌گردد. اگر در این حرکت انرژی درونی جسم و محیط $20\ J$ افزایش یافته باشد، مسافت کلی که بسته طی می‌کند، چند متر است؟ ($g = 10\ m/s^2$ و اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی در مسیرهای رفت و برگشت یکسان است.)



۱) ۵/۲ ۲) ۷/۲ ۳) ۲/۶ ۴) ۳/۶

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کار نیروی اصطکاک در مسیر رفت را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که در مسیر رفت و برگشت انرژی درونی جسم و محیط $20\ J$ افزایش یافته است، در می‌یابیم در مسیر رفت (نصف مسافت کل) انرژی درونی جسم و محیط $10\ J$ افزایش می‌یابد که ناشی از کار نیروی اصطکاک است؛ بنابراین کار نیروی اصطکاک در مسیر رفت برابر است با:

$$W_{f_k} = -10\ J$$

گام دوم: کار کل در مسیر رفت را به دست می‌آوریم. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow[v_2=0]{m=2\ kg,\ v_1=6\ m/s} W_t = \frac{1}{2}\times 2\times(0^2 - 6^2) = -36\ J$$

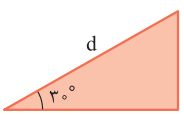
گام سوم: کار نیروی وزن در مسیر رفت را حساب می‌کنیم:

$$W_t = W_{mg} + W_{f_k} \xrightarrow[W_{f_k}=-10\ J]{W_t=-36\ J} -36 = W_{mg} - 10 \Rightarrow W_{mg} = -26J$$

گام چهارم: ارتفاع نقطهٔ توقف از نقطهٔ شروع حرکت را به دست می‌آوریم:

$$W_{mg} = -mg\Delta h \xrightarrow[m=2\ kg]{W_{mg}=-26\ J} -26 = -2\times 10\times \Delta h \Rightarrow \Delta h = 1/3\ m$$

گام پنجم: مسافت رفت و پس از آن مسافت کل (رفت و برگشت) را حساب می‌کنیم:



$$\sin 30^\circ = \frac{\Delta h}{d} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1/3}{d} \Rightarrow d = 2/6\ m$$

$$\text{رفت و برگشت} = 2d = 2\times 2/6 = 5/2\ m$$

۷۳ خودرویی به جرم ۱۵۰۰ kg در مسیری افقی، در مدت ۱۰ s تندی خود را از ۱۸ km/h به ۹۰ km/h می‌رساند. در طی این حرکت توان متوسط خودرو حداقل چند اسب بخار است؟ (۱ hp = ۷۵۰W)

۱) ۴/۵

۲) ۶

۳) ۴۵

۴) ۶۰

برای حالتی که نیروهای اتلافی (اصطکاک و ...) نداشته باشیم.

$$۹۰\ km/h \times \frac{۱\ m/s}{۳/۶\ km/h} = ۲۵\ m/s$$

$$۱۸\ km/h \times \frac{۱\ m/s}{۳/۶\ km/h} = ۵\ m/s$$

درس Box

توان یک وسیله، برابر است با آهنگ انجام کار آن و توان متوسط از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

P_{av}: توان متوسط (W)، W: کار (J)، Δt: مدت زمان انجام کار (s)

نکته

از آن‌جا که حداقل توان متوسط خودرو خواسته شده، منظور حالتی است که نیروهای اتلافی نداریم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حداقل کاری که خودرو انجام می‌دهد را به دست می‌آوریم. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_{خودرو} = W_t = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \xrightarrow[v_۲=۹۰km/h=\frac{۹۰}{۳/۶}m/s=۲۵m/s]{m=۱۵۰۰kg,\ v_۱=۱۸km/h=\frac{۱۸}{۳/۶}m/s=۵m/s} W_{خودرو} = \frac{۱}{۲}\times ۱۵۰۰(۲۵^۲ - ۵^۲) = ۷۵۰\times ۶۰۰J$$

گام دوم: حداقل توان متوسط خودرو را حساب می‌کنیم:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۱۰s]{W=۷۵۰\times ۶۰۰J} P_{av} = \frac{۷۵۰\times ۶۰۰}{۱۰} = ۷۵۰\times ۶۰\ W \times \frac{۱\ hp}{۷۵۰\ W} = ۶۰\ hp$$

۷۴ پمپی با توان ورودی ۸ kW و بازده ۷۵ درصد، بنزین را از مخزنی در عمق ۹۰متری سطح زمین تا دهانهٔ مخزن در سطح زمین، با تندی ثابت بالا می‌آورد. اگر این پمپ ۵ min کار کند، چند متر مکعب بنزین از دهانهٔ مخزن خارج می‌کند؟ ($g = ۱۰ N/kg$ و $\rho_{\text{بنزین}} = ۰/۶۴ g/cm^۳$)

تغییر انرژی جنبشی بنزین صفر است.

۱) ۴

۲) ۲

۳) ۶/۲۵

۴) ۳/۱۲۵

درس Box

کار مفید پمپ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$W_{\text{پمپ}} = \underbrace{\Delta K}_{\text{تغییر انرژی جنبشی مایع}} + \underbrace{\Delta U}_{\text{تغییر انرژی پتانسیل گرانشی مایع}}$$

بازده از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید یا خروجی}}}{P_{\text{ورودی یا کل}}} = \frac{W_{\text{مفید}}}{W_{\text{کل}}}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: توان مفید پمپ را حساب می‌کنیم:

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{ورودی}}} \xrightarrow[P_{\text{ورودی}}=۸\,kW]{Ra=\frac{۷۵}{۱۰۰}=\frac{۳}{۴}} \frac{۳}{۴} = \frac{P_{\text{مفید}}}{۸} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = ۶kW$$

گام دوم: کار مفید پمپ را به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۵\,min=۳۰۰\,s]{P=۶\,kW=۶۰۰۰\,W} ۶۰۰۰ = \frac{W}{۳۰۰} \Rightarrow W = ۶۰۰۰\times۳۰۰ = ۱۸\times۱۰^۵\,J$$

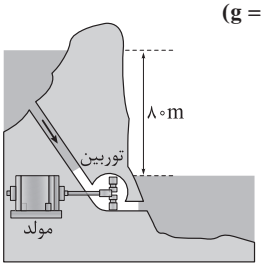
گام سوم: جرم بنزین خروجی در مدت ۵ دقیقه را حساب می‌کنیم:

$$W_{\text{پمپ}} = \Delta K + \Delta U \xrightarrow[\Delta U=mg\Delta h]{\Delta K=۰} W_{\text{پمپ}} = mg\Delta h \xrightarrow[\Delta h=۹۰\,m]{W_{\text{پمپ}}=۱۸\times۱۰^۵\,J} ۱۸\times۱۰^۵ = m\times۱۰\times۹۰ \Rightarrow m = ۲\times۱۰^۳\,kg$$

گام چهارم: حجم بنزین خروجی را به دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow[m=۲\times۱۰^۳\,kg]{\rho=۰/۶۴\,g/cm^۳=۶۴۰\,kg/m^۳} ۶۴۰ = \frac{۲\times۱۰^۳}{V} \Rightarrow V = \frac{۲۰۰۰}{۶۴۰} = ۳/۱۲۵\,m^۳$$

۷۵ در شکل زیر، آب ذخیره‌شده در پشت سد یک نیروگاه برق‌آبی، از ارتفاع ۸۰متری روی پره‌های توربینی می‌ریزد و آن را می‌چرخاند تا با چرخش آن، انرژی الکتریکی تولید شود. اگر ۹۰ درصد کار نیروی گرانشی به انرژی الکتریکی تبدیل شود، باید در هر دقیقه چند کیلوگرم آب روی توربین ریخته شود تا توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه به ۱۵۰ MW برسد؟ $(g = 10\ m/s^2)$



۱) $1/25\times10^6$

۲) $1/25\times10^7$

۳) $2/5\times10^6$

۴) $2/5\times10^7$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: انرژی الکتریکی خروجی در مدت یک دقیقه را حساب می‌کنیم:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{E_{\text{خروجی}}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 1\,min = 60\,s]{P_{\text{خروجی}} = 150\,MW = 150\times10^6\,W} 150\times10^6 = \frac{E_{\text{خروجی}}}{60}$$

$$\Rightarrow E_{\text{خروجی}} = 150\times10^6\times60 = 9\times10^9\,J$$

گام دوم: انرژی ورودی (کار نیروی گرانشی) مولد نیروگاه را حساب می‌کنیم:

$$Ra = \frac{E_{\text{خروجی}}}{E_{\text{ورودی}}} \xrightarrow[E_{\text{خروجی}} = 9\times10^9\,J]{Ra = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}} \frac{9}{10} = \frac{9\times10^9}{E_{\text{ورودی}}} \Rightarrow E_{\text{ورودی}} = 10^{10}\,J \Rightarrow W_{mg} = E_{\text{ورودی}} = 10^{10}\,J$$

گام سوم: جرم آبی که در مدت یک دقیقه روی توربین می‌ریزد را حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = -mg\Delta h \xrightarrow[\Delta h = -80\,m]{W_{mg} = 10^{10}\,J} 10^{10} = -m\times10\times(-80) \Rightarrow m = \frac{10^{10}}{800} = \frac{1000}{800}\times10^7 = 1/25\times10^7\,kg$$

۷۶ کدام مطلب، نادرست است؟

۱) باتری مولدی است که در آن واکنش شیمیایی با سفر الکترون رخ می‌دهد تا بخشی از انرژی شیمیایی مواد، به انرژی الکتریکی تبدیل شود.

۲) هرگاه تیغه‌ای از جنس فلز آلومینیم درون محلول مس (II) سولفات قرار گیرد، به تدریج از شدت رنگ محلول کاسته می‌شود.

رنگ آبی ناشی از $Cu^{2+}(aq)$

۳) در هر واکنش شیمیایی، هنگامی که بار الکتریکی یک گونه مثبت‌تر شود، آن گونه اکسایش یافته است.

۴) در واکنش فلز روی با یون‌های وانادیم (III) و تبدیل آن به یون‌های روی، نقش کاهنده مربوط به یون‌های $V^{3+}(aq)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

وقتی در واکنش فلز روی با یون‌های وانادیم (III)، اتم‌های روی (Zn) با عدد اکسایش صفر به یون‌های روی (Zn^{2+}) با عدد اکسایش ۲+ تبدیل و دچار اکسایش می‌شوند و نقش کاهنده را دارند؛ یعنی در واکنش $Zn + V^{3+} \rightarrow Zn^{2+} + V^{n+} (n < 3)$، اتم‌های روی، اکسایش و یون‌های وانادیم (III)، کاهش یافته‌اند؛ بنابراین اتم‌های روی (Zn)، نقش کاهنده و یون‌های وانادیم (III) (V^{3+})، نقش اکسنده را دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *به وضوح درسته!*

گزینهٔ (۲): می‌دانیم که یون‌های مس (II)، به محلول رنگ آبی می‌دهند. در واکنش آلومینیم با مس (II) سولفات مطابق واکنش زیر، به تدریج یون‌های مس (II) مصرف و به اتم‌های مس تبدیل شده و بدین ترتیب از شدت رنگ آبی محلول کاسته می‌شود:

$$2Al + 3CuSO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + 3Cu$$

گزینهٔ (۳): به طور کلی در هر واکنش شیمیایی، هنگامی که بار الکتریکی یک گونه افزایش یابد (مثبت‌تر شود)، آن گونه اکسایش یافته و گونهٔ دیگر که بار الکتریکی آن کم‌تر(منفی‌تر) می‌شود، کاهش می‌یابد.

در هر واکنش شیمیایی اگر عدد اکسایش یک گونه ...

- افزایش یابد ← آن‌گونه اکسایش یافته ← کاهنده است
- کاهش یابد ← آن‌گونه کاهش یافته ← اکسنده است

۷۷ واکنش‌های زیر با قراردادن برخی تیغه‌های فلزی درون محلول‌های یکسان مس (II) سولفات در دمای $20^\circ C$ انجام می‌شوند. با توجه به آن‌ها، کدام مطلب نادرست است؟ (بر اثر انجام هر سه واکنش، دمای محلول‌ها افزایش می‌یابد.)

۱) $Al(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$

۲) $Fe(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$

۳) $Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$

۱) دمای نهایی محلول در واکنش (۲)، کم‌تر از سایر واکنش‌ها است. قدرت کاهندگی فلز Fe، کم‌تر از Al و Zn است.

۲) مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شدهٔ (۱)، ۲/۵ برابر مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شدهٔ (۳) است. ۴ ۱۰

۳) محصولات واکنش (۲) می‌توانند فلز مس و $Fe^{2+}(s)$ باشند.

۴) واکنش‌پذیری هر سه فلز آلومینیم، روی و آهن، بیشتر از مس است.

درس Box

با قراردادن تیغهٔ A در محلولی از فلز B، دو حالت پیش می‌آید:

۱) اگر فلز A نسبت به فلز B واکنش‌پذیری بیشتری داشته باشد (کاهنده‌تر باشد)، واکنش زیر انجام می‌شود و دمای محلول افزایش می‌یابد:

$$A + B^{n+} \rightarrow A^{m+} + B$$

هر چه فلز A واکنش‌پذیری بیشتری داشته باشد (کاهنده‌تر باشد)، دمای محلول نیز به میزان بیشتری افزایش می‌یابد.

۲) اگر فلز B واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به فلز A داشته باشد (کاهنده‌تر باشد)، واکنشی انجام نشده و دمای محلول تغییری نمی‌کند. واکنش‌پذیری فلزات گروه اصلی از فلزهای واسطه بیشتر بوده و ترتیب واکنش‌پذیری عناصر موجود در واکنش‌ها در این سؤال، به صورت $Al > Zn > Fe > Cu$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ واکنش‌های (۱) تا (۳) به صورت زیر انجام می‌شوند:

۱) $2Al(s) + 3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3Cu(s)$

۲) $Fe(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + Cu(s)$

۳) $Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$

بنابراین محصولات واکنش دوم، فلز مس و یون $Fe^{2+}(aq)$ هستند. *هواستون باشه* که در این واکنش، یون‌های Fe^{2+} به حالت محلول (aq)اند؛ نه حالت جامد (s)!

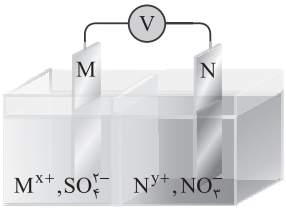
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): ترتیب دمای نهایی محلول‌ها در واکنش‌ها، به صورت (۱) > (۳) > (۲) است.

گزینهٔ (۲): مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌های (۱) و (۳)، به ترتیب برابر با ۱۰ و ۴ است $(\frac{10}{4} = 2/5)$.

گزینهٔ (۴): واکنش‌پذیری فلزات اصلی (Al) از عناصر واسطه بیشتر است و در میان عناصر واسطه، واکنش‌پذیری فلز مس از فلزات آهن و روی کم‌تر است.

۷۸ با توجه به شکل زیر که یک سلول گالوانی استاندارد را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟ $(Cu = ۶۴, Fe = ۵۶ : g.mol^{-۱})$



الف) اگر قدرت اکسندگی N^{y+} بیشتر از M^{x+} باشد، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از سمت فلز M به سمت فلز N است.

ب) اگر فلز M، روی و فلز N، نقره باشد، یون‌های سولفات از طریق دیوارهٔ متخلخل به سمت تیغهٔ N حرکت خواهند کرد.

پ) اگر N^{y+}، یون $Fe^{۲+}$ و فلز M، مس باشد، به ازای مبادلهٔ $۱۲/۰۴ \times ۱۰^{۲۲}$ الکترون در مدار بیرونی، جرم تیغهٔ N، ۲۲/۴ گرم افزایش خواهد داشت.

ت) اگر قدرت کاهندگی فلز M بیشتر از فلز N باشد، در نیم‌سلول سمت چپ، غلظت کاتیون‌ها و مجموع غلظت آنیون‌ها دچار افزایش می‌شود.

ث) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد فلز M از N کم‌تر باشد، فلز N قطب مثبت سلول است و بر سطح آن نیم‌واکنش کاهش انجام می‌شود.

تیغهٔ M آند و تیغهٔ N کاتد

۱) الف ـ پ ـ ت
۲) ب ـ ث
۳) الف ـ ت ـ ث
۴) ب ـ پ

نکته

سلول گالوانی
- E° کوچک‌تر ← آند (قطب منفی). با گذشت زمان ← جرم تیغه ↓، غلظت کاتیون ↑
- E° بزرگ‌تر ← کاتد (قطب مثبت). با گذشت زمان ← جرم تیغه ↑، غلظت کاتیون ↓

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف»، «ت» و «ث» درست‌اند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

الف) اگر قدرت اکسندگی N^{y+} بیشتر از M^{x+} باشد، عنصر M کاهندهٔ قوی‌تر و در نتیجه تیغهٔ M آند سلول است؛ بنابراین جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از سمت آند به کاتد (M به N) خواهد بود.

ب) در سلول‌های گالوانی، آنیون‌ها از سمت نیم‌سلول کاتد به سمت آند و کاتیون‌ها از سمت نیم‌سلول آند به سمت کاتد حرکت می‌کنند؛ بنابراین در سلول گالوانی روی ـ نقره که روی، آند و نقره، کاتد است (روی کاهندهٔ قوی‌تری از نقره است)، یون‌های موجود در نیم‌سلول کاتد، یعنی نیترات (آنیون) به سمت آند (تیغهٔ M یا روی) حرکت خواهند کرد.

پ) در سلول گالوانی آهن ـ مس، آهن کاهندهٔ قوی‌تر و در نتیجه آند سلول است. جرم تیغهٔ آندی در سلول گالوانی کاهش و جرم تیغهٔ کاتدی افزایش می‌یابد؛ بنابراین جرم تیغهٔ N (آهن) با مبادلهٔ الکترون کاهش می‌یابد؛ نه افزایش! *پس دیگه عددهاش رو حساب نمی‌کنیم!*

ت) در نیم‌سلول آندی این سلول گالوانی، فلز M اکسایش یافته و به صورت کاتیون وارد محلول می‌شود؛ پس غلظت کاتیون افزایش می‌یابد. از طرفی با عبور آنیون‌ها از دیوارهٔ متخلخل و حرکت به سمت آند، مجموع غلظت آنیون‌ها نیز افزایش می‌یابد.

ث) در سلول‌های گالوانی، آند قطب منفی و کاتد قطب مثبت است و از آن‌جایی که E° فلز M از N کم‌تر است؛ در نتیجه فلز M کاهندهٔ قوی‌تر و آند این سلول است و فلز N نیز کاتد و قطب مثبت سلول می‌باشد.

تیزبازی *تو این سؤال فقط کافی بود عبارت‌های «پ» و «ت» رو بررسی کنید و به جواب درست برسید. هم‌چنین در عبارت «ب» همون‌طور که توضیح دادیم نیازی به انجام محاسبات نبود.*

۷۹ در سلول گالوانی «وانادیم ـ هیدروژن» در شرایط استاندارد، حجم هر کدام از نیم‌سلول‌های آندی و کاتدی برابر ۰/۵ لیتر است. تا لحظه‌ای که غلظت یون‌های وانادیم (II) به ۱/۳ مولار می‌رسد، چند الکترون در مدار بیرونی مبادله می‌شود و pH محلول در نیم‌سلول SHE به چه عددی می‌رسد؟ $(E^\circ(V^{2+}/V) = -1/2V)$

۱) $0/6 - 6/02 \times 10^{23}$

۲) $0/4 - 6/02 \times 10^{23}$

۳) $0/6 - 1/806 \times 10^{23}$

۴) $0/4 - 1/806 \times 10^{23}$

Hint ابتدا معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ واکنش را نوشته و با توجه به تغییرات غلظت یون‌های V^{2+} در آن، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش را محاسبه کن، هم‌چنین تغییرات غلظت یون H^+ و غلظت نهایی آن را به دست بیاور و در نهایت pH محلول نهایی در نیم‌سلول SHE را حساب کن.

نکته در محلول الکترولیت‌های آندی و کاتدی در شرایط استاندارد، غلظت اولیهٔ الکترولیت‌ها برابر ۱ مولار است و با گذشت زمان، غلظت یون‌ها در نیم‌سلول آندی، افزایش و در نیم‌سلول کاتدی، کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی **قسمت اول:** در سلول گالوانی «وانادیم ـ هیدروژن»، با توجه به افزایش غلظت یون وانادیم (II) از ۱ به ۱/۳ مولار داریم:

$$\Delta[V^{2+}] = 1/3 - 1 = 0/3 \ mol.L^{-1}$$

$$V(s) + 2H^+(aq) \rightarrow H_2(g) + V^{2+}(aq)$$

استفاده از کسر تبدیل:

$$0/3 \ mol.L^{-1} \ V^{2+} \times 0/5L \times \frac{2 \ mol \ e^-}{1 \ mol \ V^{2+}} \times \frac{6/02 \times 10^{23} e^-}{1 \ mol \ e^-} = 1/806 \times 10^{23} e^-$$

یه جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{حجم محلول} \times \text{غلظت}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{V^{2+}}} = \frac{\text{تعداد}}{\underbrace{\text{ضریب} \times N_A}_{e^-}} \Rightarrow \frac{0/3 \times 0/5}{1} = \frac{x}{2 \times 6/02 \times 10^{23}} \Rightarrow x = 1/806 \times 10^{23}$$

قسمت دوم: در نیم‌سلول SHE، غلظت اولیهٔ یون هیدرونیوم برابر ۱ مولار است و با گذشت زمان، غلظت آن کاهش می‌یابد:

$$0/3 \ mol.L^{-1} \ V^{2+} \times \frac{2 \ mol \ H^+}{1 \ mol \ V^{2+}} = 0/6 \ mol.L^{-1} \ H^+ \ \text{(مصرف شده)}$$

بنابراین غلظت نهایی یون هیدرونیوم برابر $1 - 0/6 = 0/4$ مولار خواهد شد و بدین ترتیب، pH محلول نهایی برابر است با:

$$pH = -\log[H^+] = -\log 4 \times 10^{-1} = 1 - \log 4 = 0/4$$

گول نخوری *هواستون باشه* غلظت نهایی یون هیدرونیوم برابر ۰/۴ و میزان مصرف‌شدهٔ یون هیدرونیوم برابر ۰/۶ است *که اگر فاتی کنی هواب رو گزینهٔ (۳) می‌زنی!*

۸۰ جدول زیر نیروی الکتروموتوری سه سلول گالوانی را نشان می‌دهد. با توجه به آن، کدام مطلب به یقین درست است؟

	B^{2+}/B	C^{2+}/C
A^{2+}/A	۰/۸۹ V	۰/۵۸ V
B^{2+}/B		۰/۳۱ V

۱) اکسنده‌ترین گونهٔ بین آن‌ها، یون A^{2+} است.

۲) کاهنده‌ترین گونهٔ بین آن‌ها، عنصر B است.

۳) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول مربوط به عنصر C را برابر صفر ولت در نظر بگیریم، پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول مربوط به عنصر A برابر با ۰/۵۸ ولت خواهد بود.

۴) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول مربوط به عنصر C را برابر صفر ولت در نظر بگیریم، پتانسیل کاهشی استاندارد، فقط برای یکی از عنصرهای A و B، مثبت خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی اگر پتانسیل کاهشی استاندارد (C^{2+}/C) برابر صفر باشد، خواهیم داشت:

$$E^\circ_{(\text{سلول B-C})} : |E^\circ_C - E^\circ_B| = ۰/۳۱$$

$$E^\circ_{(\text{سلول A-C})} : |E^\circ_C - E^\circ_A| = ۰/۵۸$$

از آن‌جایی که $E^\circ_{(\text{سلول A-B})}$ برابر ۰/۸۹ ولت است و ولتاژ سلول‌های گالوانی A—C و B—C از ۰/۸۹ ولت کم‌تر است؛ درمی‌یابیم که E° نیم‌واکنش کاهش $C^{2+} + 2e^- \rightarrow C$ بین E° دو نیم‌واکنش کاهش $B^{2+} + 2e^- \rightarrow B$ و $A^{2+} + 2e^- \rightarrow A$ است و چون پتانسیل کاهشی استاندارد (C^{2+}/C)، برابر صفر ولت است، در نتیجه پتانسیل‌های کاهشی استاندارد (B^{2+}/B) و (A^{2+}/A)، یکی مثبت و دیگری منفی خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌های (۱) و (۲): با توجه به اطلاعات جدول، نمی‌توان قدرت کاهندگی و اکسندگی گونه‌های موجود را مقایسه کرد.

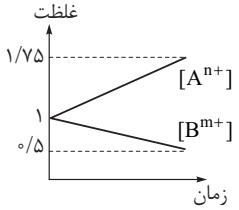
گزینهٔ (۳): اگر پتانسیل کاهشی استاندارد (C^{2+}/C) برابر صفر ولت باشد، با توجه به E° سلول گالوانی A—C درمی‌یابیم که:

$$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = |E^\circ_A - E^\circ_C| = |E^\circ_A| = ۰/۵۸V$$

بنابراین چون نمی‌دونیم قدرت کاهندگی A بیشتره یا C، نمی‌توانیم به طور قطعی بگوییم $E^\circ(A^{2+}/A)$ برابر ۰/۵۸− یا ۰/۵۸+ ولت است.

۸۱ براساس اطلاعات زیر، چه تعداد از مطالب داده‌شده درست است؟

الف) در سلول گالوانی مربوط به دو فلز **A** و **B**، نمودار تغییر غلظت کاتیون‌ها به صورت مقابل است:



ب) با قراردادن فلز **B** در محلول حاوی کاتیون‌های D^{2+}، دمای محلول دچار افزایش می‌شود.

پ) **emf** سلول گالوانی حاصل از فلزهای **A** و **X** برابر ۰/۵ ولت و **emf** سلول گالوانی حاصل از فلزهای **B** و **X** برابر ۰/۸ ولت است.

ت) در سلول گالوانی حاصل از فلزهای **X** و **A**، الکترون‌ها در مدار بیرونی از سمت الکترود **X** به سمت الکترود **A** جابه‌جا می‌شوند.

- **emf** سلول گالوانی $A-B$، برابر با ۰/۳V است.
- در میان عنصرهای **A**، **B**، **X** و **D**، فلز **A** کاهنده‌ترین و کاتیون D^{2+} اکسنده‌ترین گونه هستند.
- اگر $E^\circ(D^{2+}/D)$ عددی منفی باشد، محلول هیدروکلریک اسید را می‌توان در ظرف فلزی از جنس **B** نگه‌داری کرد.
- اگر فلز **A** درون محلول D^{2+} قرار گیرد، با گذشت زمان، $[A^{n+}]$ افزایش می‌یابد.
- فلزهای **A** و **B** می‌توانند به ترتیب فلزهای **Zn** و **Al** باشند.

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به عبارت‌های «الف» تا «ت»، اطلاعاتی از عناصر **A**، **B**، **X** و **D** به دست می‌آوریم، سپس عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم.

الف) در سلول گالوانی $A-B$، غلظت کاتیون A^{n+} افزایش یافته است؛ بنابراین **A** آند و کاهندهٔ قوی‌تری نسبت به **B** می‌باشد.

با توجه به تغییرات غلظت یون‌ها درمی‌یابیم تغییرات غلظت کاتیون A^{n+}، ۱/۵ برابر کاتیون B^{m+} است؛ بنابراین بار کاتیون B^{m+}، ۱/۵ برابر A^{n+} می‌باشد.

ب) با افزایش دمای محلول در اثر قراردادن فلز **B** درون محلول حاوی کاتیون‌های D^{2+}، درمی‌یابیم که واکنش $B+D^{2+} \rightarrow \ldots$ به طور طبیعی انجام‌پذیر بوده و در نتیجه قدرت کاهندگی فلز **B** بیشتر از **D** است.

پ) با توجه به **emf** سلول‌های داده‌شده، داریم:

$$|E^\circ_A - E^\circ_X| = ۰/۵$$
$$|E^\circ_B - E^\circ_X| = ۰/۸$$

ت) در سلول‌های گالوانی، الکترون‌ها از آند به سمت کاتد حرکت می‌کنند؛ بنابراین در سلول گالوانی حاصل از فلزهای **A** و **X**، **X** آند و **A** کاتد است.

عبارت‌های اول و چهارم درست است.

بیایین عبارت‌ها رو به ترتیب بررسی کنیم؛

عبارت‌های اول و دوم: ترتیب قدرت کاهندگی عنصرهای فلزی به صورت $D<B<A<X$ و ترتیب قدرت اکسندگی گونه‌ها به صورت $X^{y+}<A^{n+}<B^{m+}<D^{2+}$ است. بدین ترتیب داریم:

$$emf_{A-B} = E^\circ_B - E^\circ_A$$

$$\left.\begin{array}{l} emf_{X-A} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = E^\circ_A - E^\circ_X = ۰/۵ \\ emf_{X-B} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = E^\circ_B - E^\circ_X = ۰/۸ \end{array}\right\} \Rightarrow E^\circ_B - E^\circ_A = ۰/۸ - ۰/۵ = ۰/۳ \Rightarrow E^\circ_{\text{سلول } A-B} = ۰/۳V$$

عبارت سوم: با توجه به بیشتربودن قدرت کاهندگی فلز **B** نسبت به فلز **D** و از آن‌جایی که $E^\circ(D^{2+}/D)$ منفی است؛ می‌توان نتیجه گرفت E° نیم‌سلول **B** نیز منفی است و اگر فلز **B** در مجاورت HCl قرار گیرد، واکنش $B+H^+ \rightarrow B^{m+}+H_2$ به طور طبیعی انجام خواهد شد؛ *پس ظرف فلزی* **B** *خورده می‌شه و برای نگه‌داری هیدروکلریک اسید مناسب نیست!*

عبارت چهارم: با توجه به بیشتربودن قدرت کاهندگی فلز **A** نسبت به فلز **D**، واکنش $A+D^{2+} \rightarrow A^{n+}+D$ به طور خودبه‌خودی انجام‌پذیر است.

عبارت پنجم: قدرت کاهندگی فلز **A** نسبت به فلز **B**، بیشتر است؛ بنابراین فلزهای **A** و **B** نمی‌توانند به ترتیب **Zn** و **Al** باشند.

۸۲ با توجه به جدول زیر، کدام گونه(ها) می‌توانند در واکنش با یون $C^{2+}(aq)$، آن را اکسید کنند؟

در واکنش با $C^{2+}(aq)$ نقش اکسنده را ایفا کنند و باعث اکسایش آن شوند.

نیم‌واکنش کاهش	$E^\circ(V)$
$A^+(aq)+e^- \rightarrow A(s)$	+۱/۳۳
$B^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow B(s)$	+۰/۸۷
$C^{3+}(aq)+e^- \rightarrow C^{2+}(aq)$	−۰/۱۲
$D^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow D(s)$	−۱/۵۹

۱) فقط $D^{3+}(aq)$

۲) $A(s)$ و $B(s)$

۳) فقط $A^+(aq)$

۴) $A^+(aq)$ و $B^{2+}(aq)$

نکته برای این‌که گونهٔ X بتواند گونهٔ Y را اکسید کند، باید گونهٔ X کاهش و گونهٔ Y اکسایش یابد؛ بنابراین قدرت کاهندگی گونهٔ Y باید نسبت به گونهٔ X بیشتر باشد و E° نیم‌واکنش کاهش آن کم‌تر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی در این‌جا برای این‌که گونه‌ای بتواند $C^{2+}(aq)$ را اکسید کند، E° نیم‌واکنش کاهش آن باید از E° نیم‌واکنش کاهش (C^{3+}/C^{2+}) بیشتر باشد؛ بنابراین با توجه به جدول، گونه‌های A^+ و B^{2+} در واکنش با C^{2+} می‌توانند آن را اکسید کنند و خودشان کاهش یابند.

گول نخوری *مواستون باشه* که $A(s)$ و $B(s)$ گونه‌های **کاهنده‌ای** هستند که با $C^{2+}(aq)$ واکنش نمی‌دهند.

با توجه به جدول زیر به پرسش‌ها پاسخ دهید. *(تمرین‌های دوره‌ای ـ صفحهٔ ۶۴)*

نیم‌واکنش کاهش	$E^\circ(V)$
$A^+(aq)+e^- \rightarrow A(s)$	+۱/۳۳
$B^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow B(s)$	+۰/۸۷
$C^{3+}(aq)+e^- \rightarrow C^{2+}(aq)$	−۰/۱۲
$D^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow D(s)$	−۱/۵۹

الف) کدام گونه قوی‌ترین و کدام ضعیف‌ترین اکسنده است؟

ب) کدام گونه قوی‌ترین و کدام ضعیف‌ترین کاهنده است؟

پ) کدام گونه(ها) می‌توانند C^{2+} را اکسید کنند؟

۸۳ آلیاژی از فلزهای آلومینیم و قلع به جرم ۱۰ گرم، با مقدار کافی محلول آهن (II) سولفات واکنش داده و پس از کامل‌شدن واکنش، درون ظرف ۱۵/۷ گرم مادهٔ جامد وجود دارد. بر این اساس چند درصد جرمی آلیاژ اولیه را فلز قلع تشکیل داده و در پایان اختلاف جرم دو عنصر فلزی در مخلوط جامد باقی‌مانده، چند گرم است؟ $(Sn = 119, Fe = 56, Al = 27 : g.mol^{-1})$

$E^\circ(Sn^{2+} / Sn) = -0/14V$

$E^\circ(Al^{3+} / Al) = -1/66V$

$E^\circ(Fe^{2+} / Fe) = -0/44V$

۱) ۱/۱ – ٪۵۴

۲) ۲/۷ – ٪۵۴

۳) ۲/۷ – ٪۷۳

۴) ۱/۱ – ٪۷۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شمار مول‌های Al و Sn موجود در آلیاژ را به ترتیب برابر x و y در نظر می‌گیریم؛ بنابراین با توجه به جرم این آلیاژ داریم:

$27x + 119y = 10$

گام دوم: با توجه به E° نیم سلول‌های آلومینیم (Al)، قلع (Sn) و آهن (Fe)، ترتیب قدرت کاهندگی آن‌ها به صورت $Sn < Fe < Al$ است؛ بنابراین فقط فلز Al می‌تواند مطابق معادلهٔ زیر با محلول آهن (II) سولفات، واکنش دهد:

$2Al(s) + 3FeSO_4(aq) \rightarrow Al_2(SO_4)_3(aq) + 3Fe(s)$

حال چون واکنش انجام‌شده کامل و مقدار محلول $FeSO_4$، به اندازهٔ کافی است، تودهٔ جامد برجای‌مانده در پایان واکنش، شامل فلزهای قلع و آهن می‌باشد؛ در نتیجه تمام فلز Al موجود در آلیاژ در واکنش فوق مصرف شده و بدین ترتیب، جرم فلز Fe تولیدشده در این واکنش را می‌توانیم به راحتی محاسبه کنیم:

$$\frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{Al}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Fe}} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\text{جرم Fe تولید شده}}{3 \times 56} \rightarrow \text{جرم Fe تولید شده} = 84x\ g$$

گام سوم: با توجه به جرم مواد جامد موجود در پایان واکنش و همچنین جرم آلیاژ اولیه، تفاوت جرم فلزهای Sn و Fe موجود در تودهٔ جامد برجای‌مانده در پایان واکنش را می‌یابیم.

$$\begin{cases} 27x + 119y = 10 \\ 84x + 119y = 15/7 \end{cases}$$

$$57x = 5/7 \rightarrow x = 0/1$$

در نتیجه در تودهٔ جامد نهایی، ۸/۴ گرم فلز Fe و $15/7 - 8/4 = 7/3$ گرم فلز Sn وجود دارد که اختلاف جرم آن‌ها برابر است با:

$8/4 - 7/3 = 1/1\ g$

گام چهارم: با توجه به این‌که فلز Sn در طول این فرایند، دست‌نخورده باقی مانده و در واکنش شرکت نمی‌کند، درصد جرمی آن در آلیاژ اولیه برابر است با:

$$\text{درصد جرمی Sn در آلیاژ} = \frac{\text{جرم Sn}}{\text{جرم آلیاژ}} \times 100 = \frac{7/3}{10} \times 100 = ٪73$$

۸۴ دربارهٔ واکنش اکسایش ـ کاهش بین گونه‌های داده‌شده، کدام مطلب نادرست است؟

$Ce^{4+}(aq)+e^- \rightarrow Ce^{3+}(aq), E^\circ = -1/72\ V$

$Al^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow Al(s), E^\circ = -1/66\ V$

۱) کاتیون $Ce^{3+}(aq)$ در این واکنش، کاهنده است.

۲) قدرت کاهندگی $Al(s)$ از $Ce^{4+}(aq)$ کم‌تر است.

۳) E° واکنش برابر $+0/06$ ولت بوده و به صورت خودبه‌خودی پیش می‌رود.

۴) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد پس از موازنهٔ معادلهٔ آن، برابر با ۸ بوده و ۳ الکترون در آن مبادله شده است.

مشاوره در سوالات مربوط به نیم‌واکنش‌های کاهشی و E° مربوط به آن‌ها، مقایسهٔ قدرت کاهندگی، بین گونه‌های سمت راست و مقایسهٔ قدرت اکسندگی، بین گونه‌های سمت چپ نیم‌واکنش انجام می‌شود و تنها با دقت و توجه به این نکتهٔ پرتکرار، *فیلی راحت!* به پاسخ درست تست می‌رسیدیم!

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به E° نیم‌واکنش‌های داده‌شده، **قدرت کاهندگی Ce^{3+} از آلومینیم بیشتر بوده** و واکنش بین آن‌ها به صورت $Al^{3+}(aq)+3Ce^{3+}(aq) \rightarrow Al(s)+3Ce^{4+}(aq)$ می‌باشد؛ زیرا هر چه E° یک نیم‌واکنش کاهش، منفی‌تر باشد، گونهٔ سمت راست آن، کاهندهٔ قوی‌تری است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): کاتیون Al^{3+}، نقش اکسنده و Ce^{3+}، نقش کاهنده را دراین واکنش دارند.

گزینهٔ (۳): نیم‌واکنش اکسایش Ce^{3+}، آندی و نیم‌واکنش کاهش Al^{3+} کاتدی است؛ بنابراین برای محاسبهٔ E° این سلول داریم:

$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = -1/66-(-1/72) = 0/06\ V$

اگر نیم‌واکنش‌ها را از E° بیشتر به E° کم‌تر (از بالا به پایین) مرتب کنیم، گونهٔ سمت راست پایین‌تر می‌تواند با گونهٔ سمت چپ بالاتر به صورت خودبه‌خودی واکنش دهد؛ در نتیجه واکنش فوق به صورت خودبه‌خودی پیش خواهد رفت.

گزینهٔ (۴): در واکنش انجام‌شده، مجموع ضرایب استوکیومتری مواد برابر $3+1+3+1=8$ است.

نکته شمار الکترون مبادله‌شده به ازای واکنش موازنه‌شده برابر است با:

تغییر بار الکتریکی اکسنده × ضریب اکسنده × شمار اتم‌ها در اکسنده = تعداد مول الکترون مبادله‌شده براساس معادلهٔ موازنه‌شده

تغییر بار الکتریکی کاهنده × ضریب کاهنده × شماره اتم‌ها در کاهنده =

$$\text{تعداد } e^- \text{ مبادله‌شده} = \underbrace{1}_{\text{تغییر بارالکتریکی}} \times \underbrace{3}_{\text{تعداد اتم‌ها در } Al^{3+}} \times \underbrace{1}_{\text{ضریب } Al^{3+}} \quad \text{یا} \quad \underbrace{1}_{\text{تغییر بارالکتریکی}} \times \underbrace{3}_{\text{تعداد اتم‌ها در } Ce^{3+}} \times \underbrace{1}_{\text{ضریب } Ce^{3+}} = 3$$

بنابراین طبق معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، ۳ الکترون در آن مبادله می‌شود.

دربارهٔ واکنش اکسایش ـ کاهش بین گونه‌های داده‌شده، کدام مطلب، نادرست است؟ *(ریاضی داخل ۹۹)*

$Ce^{4+}(aq)+e^- \rightarrow Ce^{3+}(aq), E^\circ = -1/72\ V$

$Cr^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow Cr(s), E^\circ = -0/74\ V$

۱) کاتیون $Ce^{3+}(aq)$ در این واکنش، کاهنده است.

۲) قدرت کاهندگی $Ce^{4+}(aq)$ از $Cr(s)$ بیشتر است.

۳) E° واکنش برابر $+0/98$ ولت است و به صورت طبیعی (خودبه‌خود) پیشرفت دارد.

۴) مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد پس از موازنهٔ معادلهٔ آن، برابر ۸ است و ۳ الکترون در آن مبادله شده است.

۸۵ کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) در سلول سوختی متان ـ اکسیژن، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی، از الکترودی که در آن گاز متان جریان دارد به سمت الکترودی است که در آن گاز اکسیژن وارد می‌شود.

الکترود آند

الکترود کاتد

ب) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن نسبت به سلول‌های سوختی مربوط به هیدروکربن‌ها، علاوه بر تولید کم‌تر گاز گلخانه‌ای، احتمال بروز خطر نیز کم‌تر است.

پ) جهت حرکت یون هیدرونیوم در غشای سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، همانند جهت حرکت کاتیون Cu^{2+} در سلول گالوانی آهن ـ مس و از سمت آند به کاتد است.

ت) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول متانول برابر ۰/۰۱۶ ولت باشد، emf سلول‌های هیدروژن ـ اکسیژن و متانول ـ اکسیژن، ۰/۰۱۶ ولت اختلاف خواهد داشت.

۱) الف ـ پ
۲) الف ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) ب ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

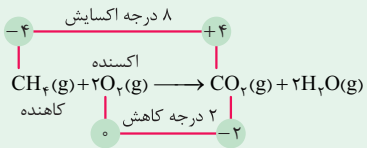
بررسی عبارت‌ها:

عبارت‌های «الف» و «ب»:

نکته در مورد سلول سوختی متان ـ اکسیژن، نکات زیر را به یاد داشته باشید:

۱) *اگه یادتون باشه!* متان همان گاز شهری است؛ بنابراین یکی از مزیت‌های این سلول سوختی درمقایسه با سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، تولید راحت‌تر و در دسترس بودن CH_4 است.

۲) واکنش انجام‌شده در سلول سوختی متان، به صورت زیر است:



در آند این سلول، گاز متان اکسایش می‌یابد؛ پس کاهنده است. از طرفی در کاتد این سلول، گاز اکسیژن کاهش می‌یابد و نقش اکسنده را بازی می‌کند!

۳) شیمی‌دان‌ها با طراحی این سلول‌های سوختی *سر از پا نمی‌شناختن! ولی دیدن که علاقه‌مندان به محیط زیست، مسابی از دست اونا شاکی هستن! اگه گفتین چرا؟* در این سلول سوختی، علاوه بر H_2O که در سلول سوختی هیدروژن هم تولید می‌شد، گاز CO_2 نیز تولید می‌شود. CO_2 هم *تو کار* اثر گلخانه‌ای و آلوده‌کردن *محیط زیسته!*

نوع سلول سوختی	مزیت	عیب
هیدروژن	آلوده‌کنندهٔ محیط زیست نیست.	خطرناک و آتش‌گیر
متان	ارزان‌تر و کم‌خطرتر	آلوده‌کنندهٔ محیط زیست است.

در سلول سوختی متان ـ اکسیژن، جهت حرکت الکترون‌ها از **آند (که گاز متان اکسایش می‌یابد) به سمت کاتد (که گاز اکسیژن کاهش می‌یابد)** است. هم‌چنین حواستان باشد که یکی از معایب سلول‌های سوختی هیدروژن ـ اکسیژن نسبت به سلول‌های سوختی متان ـ اکسیژن این است که احتمال بروز خطر در آن‌ها بالاتر است.

پ) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، یون هیدرونیوم از طریق غشای مبادله‌کننده از آند به کاتد می‌رود و در سلول گالوانی آهن ـ مس (آهن آند و مس کاتد است)، کاتیون‌های Fe^{2+} از دیوارهٔ متخلخل به سمت کاتد حرکت می‌کنند؛ نه کاتیون‌های Cu^{2+}!

ت) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، emf سلول برابر است با:

$$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{اکسیژن}} - E^\circ_{\text{هیدروژن}}$$

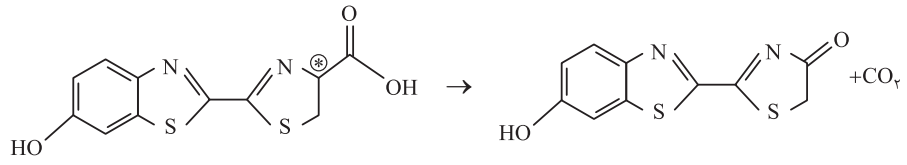
و در سلول سوختی متانول ـ اکسیژن نیز emf سلول برابر است با:

$$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{اکسیژن}} - E^\circ_{\text{متانول}}$$

بنابراین اختلاف ولتاژ این دو سلول برابر است با:

$$E^\circ_{\text{متانول}} - \cancel{E^\circ_{\text{هیدروژن}}}^{\text{(صفر)}} = E^\circ_{\text{متانول}} = ۰/۰۱۶\,V$$

۸۶ نور تولیدشده توسط کرم شب‌تاب، نتیجهٔ انجام واکنش شیمیایی زیر است. این واکنش‌ها به بیولومینسانس معروف‌اند که از طریق آن‌ها این جانور و برخی جانوران دیگر، به جفت خود پیام می‌دهند. واکنش‌دهنده در این واکنش شیمیایی، لوسیفرین کرم شب‌تاب و آنزیمی که این واکنش را کاتالیز می‌کند، لوسیفراز نام دارد. عدد اکسایش کربن ستاره‌دار در واکنش‌دهندهٔ این واکنش، چند واحد تغییر می‌کند؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

مشاوره تعین اعداد اکسایش اتم‌ها در ساختار ترکیب‌های آلی، یکی از مواردی است که بارها و بارها در کنکور سراسری مورد پرسش واقع شده است؛ در نتیجه شما هم حتماً سعی کنید به تسلط کافی در این مبحث برسید که *سؤال کنکور در کمین شماست.*

درس Box

برای تعیین عدد اکسایش اتم‌ها، در مواد مولکولی یا یون‌های چندتایی، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

شمار الکترون‌های نسبت داده‌شده به اتم − شمار الکترون‌های ظرفیت اتم = عدد اکسایش اتم

همان‌طور که می‌دانید شمار الکترون‌های ظرفیت برای عنصرهای گروه ۱ و ۲، همان شمارهٔ گروه و برای عنصرهای گروه ۱۳ به بعد، برابر با یکان شمارهٔ گروه است.

شمارهٔ گروه	۱	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
اتم	۱H	۴Be	۱۳Al, ۵B	۵۰Sn, ۳۲Ge, ۱۴Si, ۶C	۱۵P, ۷N	۳۴Se, ۱۶S, ۸O	۵۳I, ۳۵Br, ۱۷Cl, ۹F
شمار الکترون‌های ظرفیت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

برای تعیین شمار الکترون‌های نسبت داده‌شده به هر اتم، پس از رسم ساختار لوویس گونهٔ مورد نظر، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

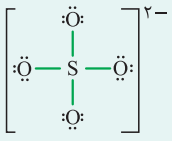
- به ازای هر جفت‌الکترون پیوندی میان دو اتم یکسان، یک الکترون به هر اتم نسبت می‌دهیم.
- به ازای هر جفت‌الکترون پیوندی میان دو اتم متفاوت، هر دو الکترون را به اتم با خصلت نافلزی بیشتر، نسبت می‌دهیم.
- همهٔ الکترون‌های ناپیوندی روی هر اتم را به همان اتم نسبت می‌دهیم.

توجه: در محاسبهٔ عدد اکسایش اتم‌ها، بهتر است مقایسهٔ خصلت نافلزی چند عنصر زیر را *بلد باشین:*

خصلت نافلزی: $F > O > N > Cl > Br > I > S > C > H$

مثال: عدد اکسایش اتم گوگرد را در یون سولفات (SO_4^{2-}) مشخص کنید.

پاسخ: اول ساختار لوویس یون سولفات را رسم می‌کنیم:

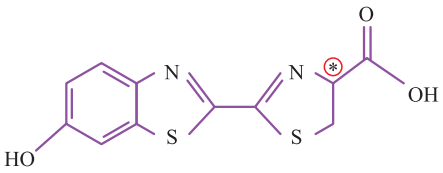


در یک گروه از بالا به پایین خصلت نافلزی کاهش می‌یابد ($O > S$:خصلت نافلزی)؛ بنابراین از ۸ الکترون پیوندی بین گوگرد و اتم‌های اکسیژن، هیچ الکترونی به گوگرد نسبت نمی‌دهیم.

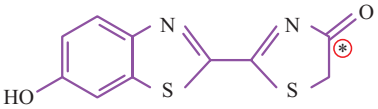
گوگرد در گروه ۱۶ قرار دارد و دارای ۶ الکترون ظرفیتی است؛ پس خواهیم داشت:

شمار الکترون‌های نسبت داده‌شده به اتم گوگرد − شمار الکترون‌های ظرفیت اتم گوگرد = عدد اکسایش گوگرد $= 6 - 0 = +6$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عدد اکسایش کربن ستاره‌دار در ترکیب واکنش‌دهنده و عدد اکسایش آن کربن در ترکیب حاصل را محاسبه می‌کنیم:



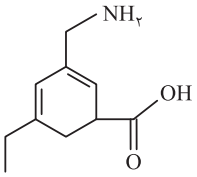
عدد اکسایش کربن = شمار الکترون‌های ظرفیت اتم کربن − شمار الکترون‌های نسبت داده‌شده به اتم کربن $= 4 - (2 + 1 + 1) = 0$



عدد اکسایش کربن = شمار الکترون‌های ظرفیت اتم کربن − شمار الکترون‌های نسبت داده‌شده به اتم کربن $= 4 - 1 = +3$

بنابراین عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار، ۳ واحد تغییر می‌کند.

۸۷ در شکل زیر، چند درصد از اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش صفر هستند و در صورت سوختن کامل این ماده، چند اتم کربن دچار ۶ واحد تغییر عدد اکسایش می‌شوند؟



چون عدد اکسایش C در CO_2، برابر ۴+ است؛ در واقع *سؤال اینه که* چند اتم کربن در ساختار این ماده، عدد اکسایش ۲− دارند.

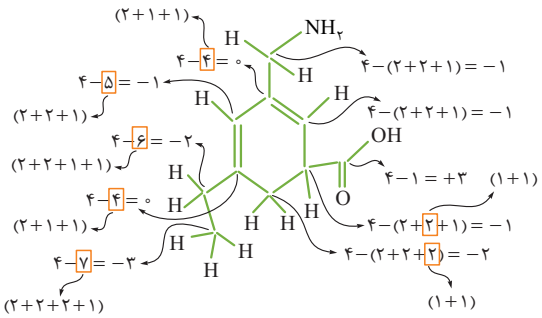
۱) ۲۰٪ − ۲

۲) ۲۰٪ − ۳

۳) ۳۰٪ − ۲

۴) ۳۰٪ − ۳

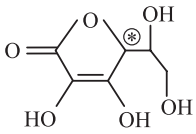
پاسخ خیلی تشریحی ابتدا عدد اکسایش کربن‌های موجود در ترکیب را محاسبه می‌کنیم:



در نتیجه از ده کربن موجود در ساختار این ترکیب، ۲ اتم کربن، عدد اکسایش صفر دارند؛ *که می‌شه* ۲۰٪!

در اثر سوختن این ترکیب، همهٔ اتم‌های کربن به کربن دی‌اکسید تبدیل شده و عدد اکسایش آن‌ها به ۴+ می‌رسد؛ بنابراین برای آن‌که عدد اکسایش کربن در طی سوختن، ۶ واحد تغییر کرده باشد، باید عدد اکسایش آن در ترکیب برابر ۲− باشد که در این ساختار، دو اتم کربن عدد اکسایش برابر ۲− دارند.

۸۸ ترکیب زیر نشان دهندهٔ ساختار آسکوربیک اسید، ریزمغذی‌ای حیاتی برای گونه‌های پیشرفتهٔ پستانداران از جمله انسان است. با توجه به آن، کدام مطلب نادرست است؟



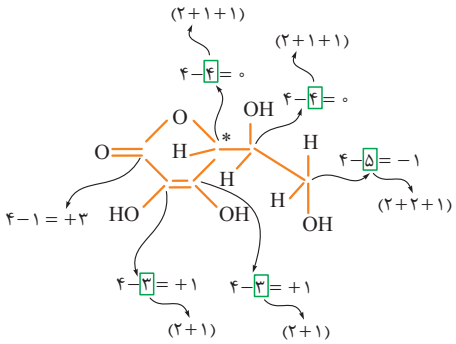
۱) این ترکیب به دلیل توانایی تشکیل پیوندهای هیدروژنی با مولکول‌های آب، به راحتی در آب حل می‌شود.

۲) مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن در آن، برابر با تعداد گروه‌های عاملی هیدروکسیل در ساختار آن است.

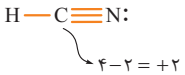
۳) در ساختار این ترکیب، عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار، کم‌تر از اتم کربن گروه عاملی استری است.

۴) عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار در ساختار آن، برابر با عدد اکسایش اتم کربن در هیدروژن سیانید است.

پاسخ خیلی تشریحی در ساختار آسکوربیک اسید، عدد اکسایش اتم‌های کربن را محاسبه می‌کنیم:



در نتیجه عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار در ساختار این ترکیب، برابر صفر است، اما عدد اکسایش اتم کربن در هیدروژن سیانید (HCN)، برابر است با:



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): آسکوربیک اسید با داشتن ۴ گروه هیدروکسیل $(-OH)$، پیوند هیدروژنی با آب تشکیل داده و به خوبی در آب حل می‌شود.

گزینهٔ (۲): مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن در ساختار آسکوربیک اسید و شمار گروه‌های هیدروکسیل موجود در ساختار آن، برابر ۴ است.

نکته برای به دست آوردن مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن، لازم نیست تک‌تک آن‌ها را بررسی کرده و بعد با هم جمع کنیم. کافیه از رابطهٔ زیر، در ترکیب آسکوربیک اسید $(C_6H_8O_6)$، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن را مجهول گذاشته و حساب کنیم:

$$C_6H_8O_6 : (6C) + (8\times(+1)) + (6\times(-2)) = 0 \Rightarrow 6C = +4$$

گزینهٔ (۳): در ساختار این ترکیب عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار، برابر صفر بوده، اما عدد اکسایش اتم کربن گروه استری، برابر $+3$ است.

۸۹ در واکنش زیر و پس از موازنهٔ کامل معادلهٔ آن، نسبت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها به مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها کدام است؟

$$Sn^{2+}(aq) + Cr_2O_7^{2-}(aq) + H^+(aq) \rightarrow Sn^{4+}(aq) + Cr_2O_3(aq) + H_2O(l)$$

۱) ۰/۶۷

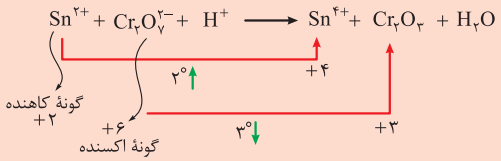
۲) ۰/۶۹

۳) ۱/۴۴

۴) ۱/۵۰

مشاوره موازنه به روش اکسایش ـ کاهش، از مباحث بسیار مهم است و برای تسلط به آن، باید بسیار تمرین کنید؛ در نتیجه *لازمه که* تست‌های متنوعی از این مباحث بزنید *تا بتونید* توکنکور از پسش بربیایین!

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا گونهٔ کاهنده و اکسنده و میزان تغییرات عدد اکسایش آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:



دراین واکنش، به ازای مصرف هر مول گونهٔ کاهندهٔ (Sn^{2+})، ۲ مول الکترون و به ازای مصرف هر مول گونهٔ اکسنده $(Cr_2O_7^{2-})$، $۲ \times ۳ = ۶$ مول الکترون مبادله می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$۳Sn^{2+} + Cr_2O_7^{2-} + H^+ \rightarrow ۳Sn^{4+} + Cr_2O_3 + H_2O$$

در گام بعدی به روش وارسی، موازنه را ادامه می‌دهیم:

$$۳Sn^{2+} + Cr_2O_7^{2-} + ۸H^+ \rightarrow ۳Sn^{4+} + Cr_2O_3 + ۴H_2O$$

بدین ترتیب در این واکنش، مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها به ترتیب برابر با ۱۲ و ۸ بوده و در نتیجه نسبت خواسته‌شده برابر $\frac{۱۲}{۸} = ۱/۵$ می‌باشد.

گول نخوری در موازنه به روش اکسایش ـ کاهش، *مواستون باشه که* اگر اتمی که عدد اکسایش آن تغییر می‌کند، دارای زیروند باشد، باید تغییرات عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کنید؛ مثلاً اتم‌های Cr در هر واحد فرمولی از $Cr_2O_7^{2-}$، مجموعاً $۲ \times ۳ = ۶$ واحد کاهش پیدا کرده و به Cr_2O_3 تبدیل می‌شوند.

در واکنش داده‌شده و پس از موازنهٔ کامل معادلهٔ آن، نسبت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها به مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها کدام است؟ *(تجربی خارج ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)*

$$Fe^{2+}(aq) + MnO_4^-(aq) + H^+(aq) \rightarrow Fe^{3+}(aq) + Mn^{2+}(aq) + H_2O(l)$$

۱) ۱/۰

۲) ۱/۴

۳) ۱/۶

۴) ۰/۸

۹۰ در اثر واکنش ۲/۳ گرم گاز NO_2 با یک لیتر آب، غلظت نیتریک اسید در محلول به ۲۱۰۰ ppm رسیده است. اگر همراه با تولید نیتریک اسید، یکی از اکسیدهای نیتروژن نیز تولید شده باشد، عدد اکسایش N در اکسید حاصل برابر چند است و با انجام این واکنش، چند مول الکترون مبادله می‌شود؟ (چگالی محلول‌ها $1\ g.mL^{-1}$ بوده و حجم محلول در طول انجام واکنش، ثابت باقی می‌ماند.)

$$aNO_2 + 1H_2O \rightarrow bN_xO_y + 2HNO_3$$

۱) $+2$، $\frac{1}{30}$

۲) $+5$، $\frac{1}{30}$

۳) $+2$، $\frac{1}{20}$

۴) $+5$، $\frac{1}{20}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ واکنش نیتروژن دی‌اکسید با آب را نوشته و با موازنهٔ آن، مقادیر مجهول را به دست می‌آوریم:

$$aNO_2 + H_2O \rightarrow bN_xO_y + 2HNO_3$$

از آن‌جایی که به ازای مصرف ۲/۳ گرم NO_2، غلظت HNO_3 به ۲۱۰۰ ppm رسیده است، نسبت ضرایب استوکیومتری HNO_3 و NO_2 را به دست می‌آوریم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$2/3\ g\ NO_2 \times \frac{1\ mol\ NO_2}{46\ g\ NO_2} \times \frac{2\ mol\ HNO_3}{a\ mol\ NO_2} \times \frac{63\ g\ HNO_3}{1\ mol\ HNO_3} = \frac{63\times 2}{20a}$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{HNO_3}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{NO_2}} \Rightarrow \frac{2/3}{a\times 46} = \frac{HNO_3\ \text{جرم}}{2\times 63} \Rightarrow HNO_3\ \text{جرم} = \frac{63\times 2}{20a}$$

با توجه به غلظت HNO_3 داریم:

$$ppm = \frac{HNO_3\ \text{جرم}}{\text{جرم محلول}}\times 10^6 \Rightarrow \frac{\frac{63\times 2}{20a}}{1000}\times 10^6 = 2100 \Rightarrow \frac{63\times 2}{2a} = 21 \Rightarrow a = 3$$

حال با توجه به معادلهٔ واکنش داریم:

$$3NO_2 + H_2O \rightarrow bN_xO_y + 2HNO_3$$

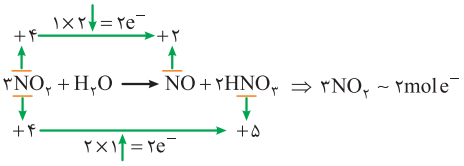
موازنهٔ N: $3 = 2 + bx \rightarrow (b, x \geq 1) \Rightarrow b = x = 1$

موازنهٔ O: $6 + 1 = by + 6 \Rightarrow (b, y \geq 1) \Rightarrow b = y = 1$

بنابراین واکنش موازنه‌شده به صورت مقابل است: $3NO_2 + H_2O \rightarrow NO + 2HNO_3$

اکسید نیتروژن حاصل، NO و عدد اکسایش نیتروژن در آن برابر $+2$ است.

گام دوم: با توجه به واکنش موازنه‌شده و شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آن، شمار مول الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش را به ازای مصرف ۲/۳ گرم گاز NO_2، حساب می‌کنیم:



$$3NO_2 \sim 2\ mol\ e^-$$

استفاده از کسر تبدیل:

$$2/3\ g\ NO_2 \times \frac{1\ mol\ NO_2}{46\ g\ NO_2} \times \frac{2\ mol\ e^-}{3\ mol\ NO_2} = \frac{1}{30}\ mol\ e^-$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{NO_2}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{2/3}{3\times 46} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{30}\ mol\ e^-$$

۹۱ چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- منیزیم را در صنعت از برقکافت محلول آبی منیزیم کلرید ($MgCl_2(aq)$) به دست می‌آورند.
- علت پایین‌تربودن سطح مایع در لولهٔ مربوط به کاتد در فرایند برقکافت آب، تولید گاز اکسیژن بیشتر در آن است.
- با انجام فرایند برقکافت آب، به تدریج غلظت مادهٔ الکترولیت در سلول برقکافت افزایش می‌یابد.
- در سلول استخراج سدیم از $NaCl(l)$، در آند گاز زردرنگی ($Cl_2(g)$) تولید می‌شود که از آن می‌توان یکی از مواد مورد نیاز در فرایند استخراج منیزیم از آب دریا ($HCl(aq)$) را تأمین کرد.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- در صنعت، منیزیم از برقکافت **منیزیم کلرید مذاب** ($MgCl_2(l)$) و طی واکنش $MgCl_2(l) \rightarrow Mg(l) + Cl_2(g)$ به دست می‌آید؛ نه برقکافت محلول آبی منیزیم کلرید ($MgCl_2(aq)$)!

نکته در برقکافت آب که طی واکنش $2H_2O(l) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$ انجام می‌شود، اکسیژن در آند و هیدروژن در کاتد تولید می‌شود و حجم گاز تولیدی در آند، نصف گاز تولیدی در کاتد است.

- در فرایند برقکافت آب، **سطح مایع در لولهٔ مربوط به آند بیشتر از کاتد است**؛ زیرا حجم گاز اکسیژن تولیدی در آند از حجم گاز هیدروژن تولیدی در کاتد، کم‌تر است.
- در سلول برقکافت آب با مصرف آب، غلظت الکترولیت به دلیل کاهش حجم محلول، افزایش می‌یابد.
- در فرایند استخراج سدیم طی واکنش $2NaCl(l) \rightarrow 2Na(l) + Cl_2(g)$، گاز کلر در آند و فلز سدیم در کاتد تولید می‌شود که می‌توان از کلر حاصل برای تهیهٔ HCl و استفاده در استخراج منیزیم استفاده کرد.

۹۲ اگر الکترون‌های آزادشده از اکسایش ۵۲ گرم فلز روی در باتری دگمه‌ای روی ـ نقره (واکنش موازنه شود: $Zn(s)+Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s)+Ag(s)$)، در نیم‌واکنش کاتدی سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب مصرف شود، چند گرم فلز سدیم تولید و چند لیتر گاز (در شرایط STP) آزاد می‌شود؟ $(Zn=65, Na=23 : g.mol^{-1})$

$Na^+(l)+e^- \rightarrow Na(l)$

۱) ۱۷/۹۲ – ۱۸/۴

۲) ۳۵/۸۴ – ۱۸/۴

۳) ۱۷/۹۲ – ۳۶/۸

۴) ۳۵/۸۴ – ۳۶/۸

Hint ابتدا شمار الکترون‌های حاصل از اکسایش ۵۲ گرم Zn در باتری دگمه‌ای روی ـ نقره را محاسبه کن، سپس با توجه به معادلهٔ واکنش برقکافت NaCl(l)، جرم Na(l) و حجم گاز Cl_2 تولیدی در شرایط STP را با مصرف همان مقدار الکترون در واکنش، به دست بیاور.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** شمار الکترون‌های آزادشده به ازای اکسایش ۵۲ گرم فلز روی در واکنش را به دست می‌آوریم:

$$Zn(s)+Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s)+2Ag(s)$$

استفاده از کسر تبدیل:

$$52\,g\,Zn \times \frac{1\,mol\,Zn}{65\,g\,Zn} \times \frac{2\,mol\,e^-}{1\,mol\,Zn} = 1/6\,mol\,e^-$$

یه جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Zn}} = \frac{\text{mol}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{52}{1\times 65} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1/6\,mol\,e^-$$

گام دوم: معادلهٔ واکنش کلی و نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی برقکافت سدیم کلرید مذاب را می‌نویسیم:

نیم‌واکنش آندی (در قطب مثبت): $2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g)+2e^-$

نیم‌واکنش کاتدی (در قطب منفی): $2Na^+(l)+2e^- \rightarrow 2Na(l)$

واکنش کلی سلول: $2NaCl(l) \rightarrow 2Na(l)+Cl_2(g)$

گام سوم: براساس میزان الکترون مبادله‌شده، جرم سدیم و حجم گاز کلر تولیدشده را محاسبه می‌کنیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$1/6\,mol\,e^- \times \frac{2\,mol\,Na}{2\,mol\,e^-} \times \frac{23\,g\,Na}{1\,mol\,Na} = 36/8\,g\,Na$$

$$1/6\,mol\,e^- \times \frac{1\,mol\,Cl_2}{2\,mol\,e^-} \times \frac{22/4\,L\,Cl_2}{1\,mol\,Cl_2} = 17/92\,L\,Cl_2$$

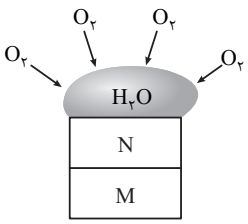
یه جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Na}} = \frac{\text{mol}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{x}{2\times 23} = \frac{1/6}{2} \Rightarrow x = 36/8\,g\,Na$$

$$\frac{\text{حجم گاز}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{Cl_2}} = \frac{\text{mol}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{x}{1\times 22/4} = \frac{1/6}{2} \Rightarrow x = 17/92\,L\,Cl_2$$

گول نخوری در این سؤال *باید هواستون باشه* به ازای تولید هر مول سدیم، یک مول الکترون و به ازای تولید هر مول گاز کلر، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود و *اگر هواستون به ضریب‌ها نباشه*، جرم سدیم و حجم کلر رو به اشتباه *ممکنه دو برابر یا نصف جواب درست* به دست بیاورید.

۹۳ براساس شکل زیر، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) اگر **M** و **N** به ترتیب آلومینیم و روی باشند، در قطرهٔ آب، غلظت یون‌های Zn^{2+} به تدریج افزایش می‌یابد.

ب) اگر **M** و **N** به ترتیب طلا و نقره باشند، با ایجاد خاصیت اسیدی در آب، غلظت هر دو کاتیون مربوط به طلا و نقره افزایش می‌یابد.

پ) اگر **M** فلز آهن و **N** فلز روی باشد، از این ترکیب در ساخت کانال کولر استفاده می‌شود. در این صورت فلز **M** در برابر خوردگی محافظت می‌شود.

ت) اگر **M** و **N** به ترتیب از جنس آهن و قلع باشند، از آن برای ساخت ظروف بسته‌بندی مواد غذایی استفاده می‌شود.

۱) الف ـ ب

۲) ب ـ پ

۳) پ ـ ت

۴) الف ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) اگر M و N به ترتیب Al و Zn باشند، با قرارگرفتن آن‌ها در معرض اکسیژن و رطوبت، آلومینیم چون کاهنده قوی‌تری است، اکسید شده و **غلظت گونهٔ Al^{3+} در قطرهٔ آب افزایش می‌یابد.**

ب) با ایجاد خاصیت اسیدی در آب، غلظت یون هیدرونیوم در آن افزایش می‌یابد؛ ولی *هواستون باشه که* **فلزهای نقره و طلا با اسید واکنش نمی‌دهند.**

پ) این جمله به دلیل پدیدهٔ حفاظت کاتدی درست است. اجازه بدهید با جزئیات بیشتری توضیح دهم.

آهن در حضور اکسیژن و رطوبت دچار خوردگی می‌شود. در این فرایند، آهن اکسید می‌شود. این واکنش الکتروشیمیایی شامل دو نیم‌واکنش است:

نیم‌واکنش اکسایش: $Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

حفاظت کاتدی: برای جلوگیری از خوردگی آهن، می‌توان از روش حفاظت کاتدی استفاده کرد. در این روش، فلز فعال‌تری (با پتانسیل کاهشی کم‌تر) مانند روی (Zn) به آهن متصل می‌شود.

روی به عنوان آند قربانی می‌شود: در این حالت، روی به عنوان آند عمل می‌کند و اکسید می‌شود و از اکسیدشدن آهن جلوگیری می‌کند. به عبارت دیگر، روی به جای آهن قربانی شده و خورده می‌شود.

کاربرد در کانال کولر: کانال‌های کولر اغلب در معرض رطوبت قرار دارند و به همین دلیل مستعد خوردگی هستند. با استفاده از ورق‌های گالوانیزه (ورق آهن پوشش داده‌شده با روی) در ساخت کانال کولر، می‌توان از خوردگی آهن جلوگیری کرد.

ت)

آهن + لایهٔ نازکی از فلز قلع(Sn) ← حلبی ← (کاربرد) ساخت ظروف بسته‌بندی مواد غذایی

نکته

حالا برای جمع‌بندی نگاهی به جدول *همع وهور* زیر بیندازید:

نوع آهن	آهن گالوانیزه (آهن سفید) (آهن + لایهٔ نازکی از فلز روی)	حلبی (آهن + لایهٔ نازکی از فلز قلع)
نوع حفاظت آهن	فیزیکی + کاتدی	فقط فیزیکی
آند	روی	آهن
نیم‌واکنش اکسایش	$Zn(s) \longrightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$	$Fe(s) \longrightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$
کاتد	آهن	قلع
نیم‌واکنش کاهش	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \longrightarrow 4OH^-(aq)$	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \longrightarrow 4OH^-(aq)$
گونهٔ کاهنده	Zn	Fe
گونهٔ اکسنده	O_2	O_2
رسوب تشکیل شده در پایان واکنش	روی هیدروکسید	آهن (III) هیدروکسید ($Fe(OH)_3$)
کاربرد	تانکر آب و کانال کولر	ظروف بسته‌بندی مواد غذایی

۹۴ کدام مطلب، نادرست است؟

انحلال‌پذیری $< \frac{1\,g}{100\,g H_2O}$

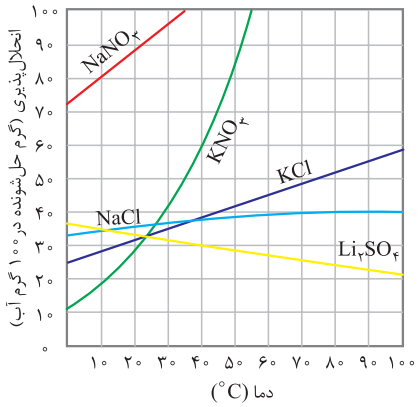
۱) اغلب سنگ‌های کلیه از رسوب‌کردن برخی نمک‌های کلسیم‌دار در کلیه‌ها تشکیل می‌شوند.

۲) اگر حداکثر ۰/۳ گرم از ماده‌ای در ۲۵ گرم آب در دمای اتاق حل شود، آن ماده جزء مواد محلول در آب دسته‌بندی می‌شود.

۳) انحلال‌پذیری نمک‌ها به نوع آن‌ها و دما بستگی دارد، اما تأثیر دما بر میزان انحلال‌پذیری آن‌ها یکسان نیست.

۴) انحلال‌پذیری پتاسیم کلرید در هر دمایی بیشتر از انحلال‌پذیری لیتیم سولفات در آب است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ طبق نمودارهای انحلال‌پذیری دو نمک KCl و Li_2SO_4 برحسب دما، تا قبل از دمای حدود $24^\circ C$، انحلال‌پذیری لیتیم سولفات بیشتر بوده و از دمای حدود $24^\circ C$ به بعد، انحلال‌پذیری KCl بیشتر می‌شود.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *کاملاً درسته!*

گزینهٔ (۲): انحلال‌پذیری این ماده در ۱۰۰ گرم آب، برابر است با:

$$\text{آب } 100\,g \times \frac{\text{ماده } 0/3\,g}{\text{آب } 25\,g} = \text{ماده } 1/2\,g$$

با توجه به این‌که انحلال‌پذیری آن در دمای اتاق، **بیشتر از ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب است**، پس جزء مواد **محلول در آب** دسته‌بندی می‌شود.

گزینهٔ (۳): نمودار انحلال‌پذیری برحسب دما، برای اغلب نمک‌ها صعودی بوده ولی برای برخی از آن‌ها مانند لیتیم سولفات نزولی است؛ در نتیجه تأثیر دما بر تغییر میزان انحلال‌پذیری همهٔ آن‌ها یکسان نیست!

۹۵ کدام مورد، همواره درست است؟

۱) رابطهٔ انحلال‌پذیری نمک‌ها با دما، معکوس این رابطه در گازها است.

۲) در دمای معیّن، مقایسهٔ انحلال‌پذیری سه نمک $NaNO_3$، $NaCl$ و $C_{12}H_{22}O_{11}$ به صورت $C_{12}H_{22}O_{11} > NaNO_3 > NaCl$ است.

۳) در اثر حل‌کردن 1×10^{-7} گرم باریم سولفات در ۱۰۰ گرم آب در دمای $25^\circ C$، مخلوطی ناهمگن پدید می‌آید.

۴) در اثر اضافه‌کردن ۱ گرم نقره کلرید به ۱۰۰ گرم آب در دمای $25^\circ C$، تعداد یون‌های موجود در آب افزایش می‌یابد.

درس Box

انحلال‌پذیری

بیشترین مقدار از یک حل‌شونده که در ۱۰۰ گرم از حلال و در دمای معین حل می‌شود، **انحلال‌پذیری** نام دارد.

دسته‌بندی مواد براساس میزان انحلال‌پذیری در آب در دمای $25^\circ C$

- محلول: انحلال‌پذیری بیش از ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب
- کم‌محلول: انحلال‌پذیری بین ۰/۰۱ گرم تا ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب
- نامحلول: انحلال‌پذیری کم‌تر از ۰/۰۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب

نوع ماده	انحلال‌پذیری	نمونه
محلول	بیش از ۱ گرم	شکر ($C_{12}H_{22}O_{11}$)، سدیم نیترات ($NaNO_3$)، سدیم کلرید ($NaCl$)، ۵ الکل راست‌زنجیر اول (متانول، اتانول، ۱ ـ پروپانول، ۱ ـ بوتانول، ۱ ـ پنتانول)، استون، اتیلن گلیکول، اوره و ...
کم محلول	بین ۰/۰۱ گرم تا ۱ گرم	کلسیم سولفات ($CaSO_4$)، الکل‌های راست‌زنجیر با ۶ تا ۸ اتم کربن (۱ ـ هگزانول، ۱ ـ هپتانول و ۱ ـ اوکتانول)
نامحلول	کم‌تر از ۰/۰۱ گرم	$CaCO_3, Fe_2O_3, Fe(OH)_3, Fe(OH)_2, Mg(OH)_2, BaSO_4, Ca_3(PO_4)_2, AgCl$ $Mg(RCOO)_2, Ca(RCOO)_2$ (رسوب صابون در آب سخت)

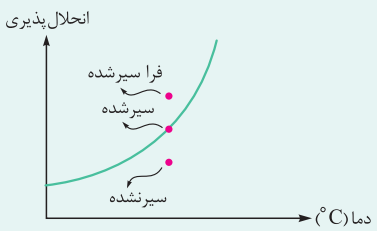
در ترکیب‌های نامحلول، $Fe(OH)_2$ سبزرنگ، $Fe(OH)_3$ قرمز ـ قهوه‌ای (آجری)، Fe_2O_3 قرمز ـ قهوه‌ای (آجری) و بقیهٔ رسوب‌ها سفیدرنگ هستند.

برخی مواد به هر نسبتی در آب حل می‌شوند؛ یعنی نمی‌توانیم از آن‌ها محلول سیرشده‌ای تهیه کنیم. مانند: سه الکل اول یعنی متانول (CH_3OH)، اتانول (C_2H_5OH) و ۱ ـ پروپانول (C_3H_7OH)، استون (C_3H_6O) و اتیلن گلیکول (CH_2OHCH_2OH).

دسته‌بندی انواع محلول‌ها براساس میزان حل‌شوندهٔ موجود در آن

- سیرشده: دقیقاً به اندازهٔ انحلال‌پذیری، حل‌شونده دارد.
- سیرنشده: کم‌تر از میزان انحلال‌پذیری حل‌شونده دارد و می‌تواند مقدار حل‌شوندهٔ بیشتری در خود حل کند.
- فراسیرشده: بیشتر از میزان انحلال‌پذیری حل‌شونده دارد.

محلول فراسیرشده، ناپایدار است و با ضربه، مقداری حل‌شونده رسوب می‌کند.

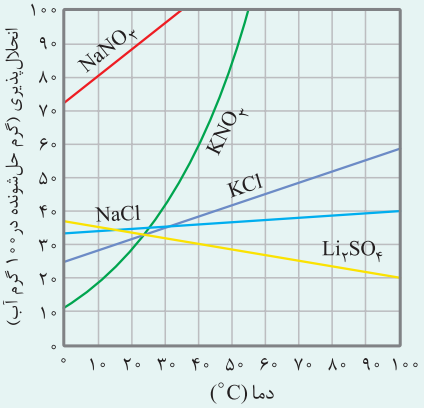


اغلب سنگ‌های کلیه از رسوب‌کردن برخی نمک‌های کلسیم‌دار در کلیه‌ها تشکیل می‌شود. در افرادی که به سنگ کلیه مبتلا می‌شوند، مقدار این نمک‌ها در ادرار از میزان انحلال‌پذیری آن‌ها بیشتر است.

عوامل تعیین‌کنندهٔ انحلال‌پذیری نمک‌ها

۱) **نوع ماده:** مهم‌ترین عامل تعیین‌کنندهٔ انحلال‌پذیری است. **مثلاً** در دمای $25^\circ C$، حداکثر ۳۶ گرم $NaCl$ و $2/1\times10^{-4}$ گرم $AgCl$ در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شود.

۲) **دما:**



- نمودار اغلب نمک‌ها صعودی است (مثل $NaNO_3$ ، KNO_3 و KCl)؛ یعنی در این نمک‌ها انحلال‌پذیری با دما رابطهٔ مستقیم دارد.
- نمودار بعضی نمک‌ها نزولی است (مثل Li_2SO_4)؛ یعنی در محلول این نمک، انحلال‌پذیری با دما رابطهٔ معکوس دارد.
- نمودار $NaCl$ تقریباً خط افقی است؛ یعنی انحلال‌پذیری آن وابستگی کم‌تری به دما دارد.

نکته ترکیباتی که نمودار انحلال‌پذیری ـ دمای آن‌ها صعودی است، انحلال گرماگیر و ترکیباتی که نمودار انحلال‌پذیری ـ دمای آن‌ها نزولی است، انحلال گرماده دارند.

پاسخ خیلی تشریحی

خب بریم یکی‌یکی گزینه‌ها رو بررسی کنیم:

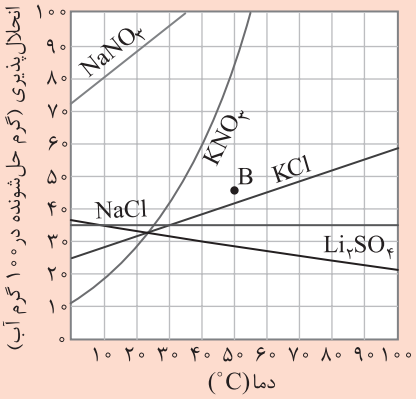
گزینهٔ (۱): رابطهٔ انحلال‌پذیری نمک‌ها با دما، قاعدهٔ معیّنی ندارد، برای بعضی‌ها مستقیم و برای بعضی دیگر معکوس می‌باشد و **همواره معکوس تأثیر دما بر انحلال‌پذیری گازها نیست.**

گزینهٔ (۲): *هواستون باشه که* شکر جزء نمک‌ها (ترکیبات یونی) نیست!

گزینهٔ (۳): عدد 1×10^{-7} کم‌تر از انحلال‌پذیری $BaSO_4$ در آب است؛ بنابراین این مقدار از آن در آب حل شده و رسوب نمی‌کند.

گزینهٔ (۴): $AgCl$ انحلال‌پذیری خیلی کمی در آب دارد، اما اگر مقدار ناچیزی از آن را در آب حل کنیم، همان مقدار ناچیز نیز در آب به طور کامل تفکیک و باعث افزایش تعداد یون‌های موجود در آب می‌شود.

۹۶ با توجه به نمودار «انحلال‌پذیری ـ دما» داده‌شده، چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟



- در نقطهٔ **B**، محلول‌های دارای یون کلرید، فراسیرشده‌اند.
- تفاوت انحلال‌پذیری نمک‌های دارای یون نیترات در دمای $30^\circ C$، به تقریب برابر ۴۰ گرم است.
- در دمای $10^\circ C$، مجموع انحلال‌پذیری نمک‌های سدیم کلرید و پتاسیم نیترات، برابر انحلال‌پذیری سدیم نیترات است.
- اگر انحلال‌پذیری یک نمک در دمای $10^\circ C$ برابر ۳۳ گرم باشد، آن نمک، پتاسیم کلرید با معادلهٔ انحلال‌پذیری: $S = 0/6\theta + 27$ است.

نمک‌های KNO_3 و $NaNO_3$

نقطهٔ مشخص‌شده، بالای نمودار انحلال‌پذیری است.

محلول‌های دو نمک KCl و NaCl

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

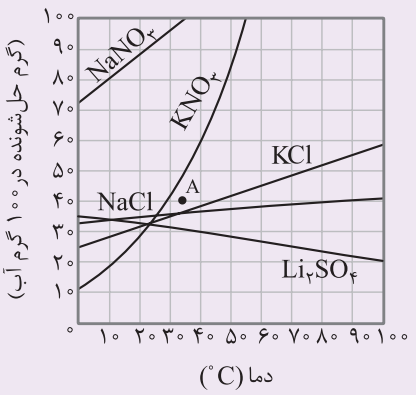
مشاوره آشنایی با مفاهیم اولیهٔ انحلال‌پذیری نمک‌ها در آب و هم‌چنین تسلط بر جزئیات و مسائل آن‌ها، از مباحثی است که هر ساله پای ثابت سوالات کنکورهای سراسری محسوب می‌شود؛ در نتیجه *بدون تسلط به این مباحث، ارزش به راحتی عبور نکنید که خیلی مهمن!*

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های دوم، سوم و چهارم نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- محلول‌های NaCl و KCl دارای یون کلرید هستند. نقطهٔ B بالاتر از نمودار انحلال‌پذیری این دو نمک قرار دارد و به همین دلیل محلول‌ها در این نقطه در حالت فراسیرشده می‌باشند.
- نمک‌های KNO_3 و $NaNO_3$ دارای یون نیترات هستند، در دمای $30^\circ C$، انحلال‌پذیری این دو نمک به ترتیب ۴۳ و ۹۶ گرم در ۱۰۰ گرم آب است که تفاوت آن حدود ۵۳ گرم می‌باشد.
- در دمای $10^\circ C$، انحلال‌پذیری نمک‌های NaCl و KNO_3 به ترتیب ۳۵ و ۱۸ گرم در ۱۰۰ گرم آب است که مجموع آن‌ها برابر با ۵۳ گرم می‌شود، اما در این دما، انحلال‌پذیری نمک $NaNO_3$، برابر ۸۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.
- *اولاً* انحلال‌پذیری KCl در دمای $10^\circ C$، حدود ۲۸ گرم است، *دوماً* معادلهٔ انحلال‌پذیری آن به صورت $S = 0/3\theta + 27$ است.

با توجه به نمودار «انحلال‌پذیری ـ دما» نشان داده شده، چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟ *(تجربی داخل ۱۴۰۰)*



- در نقطهٔ **A**، محلول‌های دارای یون نیترات، سیرشده‌اند.
- تفاوت انحلال‌پذیری نمک‌های دارای یون کلرید در $90^\circ C$، به تقریب، برابر ۱۵ گرم است.
- در دمای $25^\circ C$، مجموع انحلال‌پذیری نمک‌های دارای یون K^+، با انحلال‌پذیری $NaNO_3$ در این دما، برابر است.
- اگر انحلال‌پذیری یک نمک در دمای $20^\circ C$، برابر ۳۳ گرم باشد، آن نمک، لیتیم سولفات با معادلهٔ انحلال‌پذیری: $S = +0/15\theta + 35$، است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۷ اگر غلظت مولار نمک X در محلولی سیرشده از آن در دمای $40^\circ C$ برابر ۲/۳ مول بر لیتر باشد، چند گرم از این محلول سیرشده را از دمای $40^\circ C$ تا $10^\circ C$ سرد کنیم تا ۰/۰۸ مول رسوب حاصل شود؟ (انحلال‌پذیری نمک X در دمای $10^\circ C$ برابر ۱۵ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. چگالی محلول نمک X در دمای $40^\circ C$ را برابر با ۱/۱۵ گرم بر میلی‌لیتر و جرم مولی نمک X را برابر ۱۰۰ گرم بر مول در نظر بگیرید.)

۱) ۲۵

۲) ۵۰

۳) ۱۰۰

۴) ۱۵۰

مشاوره سوالات ترکیبی، بسیار در سوالات آزمون‌های آزمایشی و هم‌چنین کنکورهای سراسری، مورد توجه طراحان هستند. برای حل این سوالات، *علاوه بر حفظ نونسردی! لازمه* که به هر یک از مفاهیم ترکیب‌شده، تسلط داشته باشید تا گام‌به‌گام حل سؤال را پیش ببرید و در مواقع مورد نیاز، بتوانید از دانسته‌های خود در مباحث مختلف، به خوبی در حل تست بهره بگیرید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با استفاده از رابطهٔ $M=\frac{10ad}{\text{جرم مولی}}$، درصد جرمی محلول سیرشدهٔ نمک X را در دمای $40^\circ C$ حساب می‌کنیم:

$$2/3=\frac{10\times a\times 1/15}{100}\rightarrow a=\%20$$

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ بین انحلال‌پذیری و درصد جرمی محلول سیرشده، انحلال‌پذیری این نمک را در دمای $40^\circ C$ به دست می‌آوریم:

$$a=\frac{S}{S+100}\times 100\rightarrow \cancel{20}^{1}=\frac{S}{S+100}\times\cancel{100}^{5}\rightarrow 5S=S+100\rightarrow S=\frac{100}{4}=25\frac{g}{100\,g\,H_2O}$$

گام سوم: با توجه به عدد انحلال‌پذیری در دماهای $40^\circ C$ و $10^\circ C$، می‌توانیم یک هم‌ارزی بین مقدار محلول سیرشده در دمای $40^\circ C$ و مقدار رسوب ناشی از سردکردن محلول تا دمای $10^\circ C$ برقرار کنیم؛ به طوری که اگر ۱۲۵ گرم محلول سیرشده را از دمای $40^\circ C$ تا $10^\circ C$ سرد کنیم، ۱۰ گرم رسوب تشکیل خواهد شد.

$$\left.\begin{array}{l}40^\circ C\rightarrow 125\,g\ \text{محلول سیرشده}\\10^\circ C\rightarrow 115\,g\ \text{محلول سیرشده}\end{array}\right\}\Rightarrow 10\,g\ \text{رسوب}$$

گام چهارم: قرار است ۰/۰۸ مول رسوب نمک X تشکیل شود که معادل ۸ گرم از آن است:

$$0/08\,mol\ \text{نمک}\times\frac{100\,g\ \text{نمک}}{1\,mol\ \text{نمک}}=8\,g\ \text{نمک}$$

در نهایت و در سکانس پایانی! محاسبه می‌کنیم که چند گرم محلول باید سرد شود تا ۸ گرم رسوب این نمک تشکیل شود:

$$8\,g\ \text{رسوب}\times\frac{125\,g\ \text{محلول سیرشده}}{10\,g\ \text{رسوب}}=\frac{1000}{10}=100\,g\ \text{محلول سیرشده}$$

۹۸ اگر ۴۸۰ گرم محلول سیرشدهٔ پتاسیم دی‌کرومات ($K_2Cr_2O_7$) با دمای $35^\circ C$ را تا دمای $90^\circ C$ گرم کنیم و بتوانیم ۲۰۰ گرم دیگر نمک $K_2Cr_2O_7$ در آن حل کنیم، انحلال‌پذیری این نمک در دمای $35^\circ C$ کدام است؟ (انحلال‌پذیری $K_2Cr_2O_7$ در دمای $90^\circ C$، برابر ۷۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.)

۱) ۱۰

۲) ۱۵

۳) ۲۰

۴) ۲۵

Hint

ابتدا مقدار انحلال‌پذیری نمک مورد نظر را در دمای $35^\circ C$، برابر x در نظر بگیر. حالا فرض کن $100+x$ گرم محلول سیرشدهٔ این نمک از دمای $35^\circ C$ تا دمای $90^\circ C$ گرم شود؛ در نتیجه با توجه با مقدار انحلال‌پذیری نمک در دمای $90^\circ C$، می‌توانیم $70-x$ گرم نمک دیگر را نیز در این دما حل کنیم تا محلول اولیه مجدداً به حالت سیرشده درآید. حال با توجه به این‌که اگر جرم محلول اولیه، ۴۸۰ گرم باشد، ۲۰۰ گرم نمک دیگر در دمای $90^\circ C$ در محلول قابل انحلال می‌باشد، می‌توانی مقدار x را به راحتی حساب کنی که *همون خواستهٔ سواله!*

پاسخ خیلی تشریحی

انحلال‌پذیری $K_2Cr_2O_7$ را در دمای $35^\circ C$، برابر با x در نظر می‌گیریم؛ در نتیجه اگر $100+x$ گرم از محلول سیرشدهٔ آن در دمای $35^\circ C$ را تا دمای $90^\circ C$ گرم کنیم، مقدار نمکی که می‌توانیم باز هم در این محلول حل کنیم، می‌شود $70-x$ گرم.

$$\left.\begin{array}{l}\text{دمای } 35^\circ C \rightarrow 100+x \text{ g محلول سیرشده}\\ \text{دمای } 90^\circ C \rightarrow 100+70 \text{ g محلول سیرشده}\end{array}\right\} \Rightarrow 70-x \text{ g نمک اضافه‌شده}$$

بنابراین هم‌ارزی بین نمک اضافه‌شده و محلول سیرشدهٔ اولیه به صورت زیر است:

$$100+x \text{ g محلول سیرشده} \sim 70-x \text{ g نمک اضافه‌شده}$$

از طرفی اگر ۴۸۰ گرم محلول سیرشده را گرم کنیم، ۲۰۰ گرم دیگر می‌توانیم در آن حل کنیم؛ پس با بررسی تساوی زیر، می‌توانیم مقدار x را *بحسابیم*.

$$\text{نمک اضافه‌شده } 200 \text{ g} = \text{محلول سیرشده } 480 \text{ g} \times \frac{\text{نمک اضافه‌شده } 70-x \text{ g}}{\text{محلول سیرشده } 100+x \text{ g}}$$

$$\Rightarrow \frac{70-x}{100+x} = \frac{\overset{10}{\cancel{200}}}{\underset{24}{\cancel{480}}} \xrightarrow{\text{جمع صورت در مخرج}} \frac{70-x}{100+x+(70-x)} = \frac{10}{24+(10)} \Rightarrow \frac{\overset{10}{\cancel{70}}-x}{10} = \frac{10}{\underset{2}{\cancel{34}}}$$

$$\Rightarrow 70-x=50 \Rightarrow x=20$$

مشاوره تسلط بر جزئیات متن کتاب و هم‌چنین تمرینات آن، رمز اصلی پاسخ‌گویی در بسیاری از سوالات کنکور سراسری می‌باشد؛ پس حتماً سعی کنید کتاب درسی را با دقت و ریزبینی بیشتری بخوانید و به همهٔ قسمت‌های مختلف آن، تسلط کافی حاصل کنید.

۹۹ کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟

الف) آب تنها ماده‌ای است که به هر سه حالت فیزیکی جامد، مایع و گاز در طبیعت یافت می‌شود. ← سر منفی

ب) باریکهٔ آب، از سمت اتم‌های اکسیژن، به میلهٔ شیشه‌ای که به موی خشک مالش داده شده، منحرف می‌شود.

پ) همهٔ مولکول‌های خطی، مانند CO_2، ناقطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند. ← دارای بار الکتریکی منفی

ت) در مواد مولکولی با مولکول‌های ناقطبی، با افزایش جرم مولی، نقطهٔ جوش افزایش می‌یابد. ← ↑ قدرت نیروهای بین مولکولی

۱) الف ـ ت

۲) ب ـ پ

۳) ب ـ ت

۴) الف ـ پ

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «ب» و «پ» نادرست‌اند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

الف) *این‌که معلومه درسته؛ جملهٔ خود کتابه!*

ب) میلهٔ شیشه‌ای مالش داده شده به موهای خشک، دارای بار الکتریکی **منفی** شده و در نتیجه مولکول‌های آب، **از سر مثبت خود (اتم‌های هیدروژن)** به سمت آن منحرف می‌شوند.

پ) *نه والا!* مولکول‌های **خطی و قطبی** *زیادی داریم* (مثل SCO و ...) که **در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند**.

ت) در مولکول‌های ناقطبی، با افزایش جرم مولی، نیروی بین مولکولی قوی‌تر شده و نقطهٔ جوش افزایش می‌یابد.

۱۰۰ درستی یا نادرستی علمی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- در ساختار یخ، هر اتم اکسیژن به چهار اتم هیدروژن از مولکول‌های دیگر متصل است.
- هر حلقهٔ شش‌ضلعی در ساختار یخ، از شش مولکول H_2O ساخته شده و هر ضلع آن از دو نوع پیوند متفاوت تشکیل شده است.
- با تبدیل مایعات به حالت جامد، حجمشان افزایش می‌یابد.
- به محلول‌هایی که حلال در آن‌ها یک ترکیب آلی باشد، محلول‌های غیرآبی گفته می‌شود.

هر ضلع شامل ۲ نوع پیوند: یک پیوند اشتراکی یک پیوند هیدروژنی است.

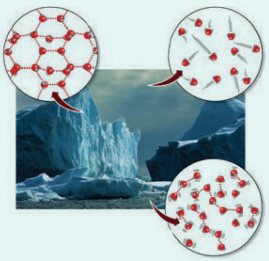
↓ کاهش چگالی

۱) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۲) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست
۴) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست

درس Box

پیوند هیدروژنی در آب

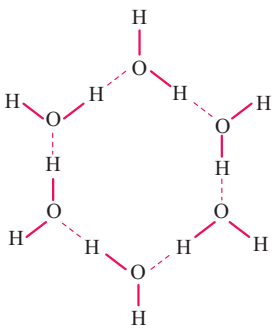
- بخار (g): مولکول‌های جدا از هم ـ گویی پیوند هیدروژنی میان آن‌ها وجود ندارد ـ انتقال آزادنه و نامنظم مولکول‌ها
- مایع (l): پیوندهای هیدروژنی قوی بین مولکول‌ها - جابه‌جایی و لغزش مولکول‌ها روی هم



- جامد (یخ، s): ساختار منظم ـ مولکول‌ها در جاهای به نسبت ثابت (تنها حرکت ارتعاشی) ـ اتم‌های O در رأس حلقه‌های شش‌ضلعی ـ شبکه‌ای مانند کندوی زنبور عسل ـ فضاهای خالی منظم

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارت‌های دوم و چهارم درست، اما عبارت‌های اول و سوم، نادرست‌اند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:



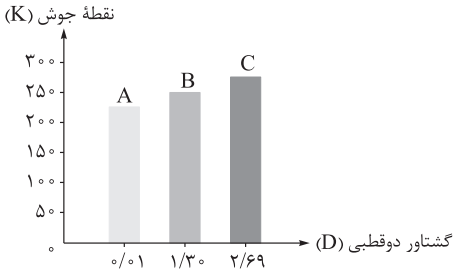
عبارت های اول و دوم: در ساختار یخ، هر اتم O در یک مولکول آب به دو اتم H در همان مولکول با پیوند اشتراکی و به دو اتم H از دو مولکول دیگر با پیوند هیدروژنی متصل است.

هم‌چنین با توجه به شکل مقابل، مشخص است که در هر شش‌ضلعی موجود در ساختار یخ، ۶ مولکول آب وجود دارد؛ به طوری که هر ضلع آن، شامل یک پیوند اشتراکی و یک پیوند هیدروژنی است.

عبارت سوم: **همهٔ مایعات به این صورت نیستند.** آب ماده‌ای است که پس از انجماد، حجمش افزایش می‌یابد.

عبارت چهارم: در برخی محلول‌ها، آب حلال نیست. علاوه بر آب حلال‌های دیگری نیز وجود دارند. سه ترکیب آلی اتانول (C_2H_5OH یا همون C_2H_6O)، استون (C_3H_6O یا همون) و هگزان (C_6H_{14}) به عنوان حلّال به کار می‌روند. به محلول‌های حاصل از حلّال‌های آلی، **محلول غیرآبی** گفته می‌شود.

۱۰۱ با توجه به نمودار زیر که مقایسهٔ نقطهٔ جوش سه مادهٔ آلی با جرم مولی تقریباً یکسان را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟



۱) جهت‌گیری و منظم‌شدن مولکول‌های A در میدان الکتریکی محسوس‌تر است.

۲) اگر نقطهٔ جوش مواد B و C به ترتیب، ۲۵۰ و ۲۷۵ کلوین باشد، میزان قطبیت مادهٔ C، ۱۰ درصد بیشتر از مادهٔ B است.

۳) در شرایط یکسان، انحلال‌پذیری مادهٔ C در هگزان از بقیه کم‌تر است.

۴) این نمودار را می‌توان به اثر گشتاور دوقطبی (برحسب دبای)، بر نقطهٔ جوش (برحسب کلوین) نسبت داد که نمودار آن همواره خطی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به این‌که جرم مولی این سه مادهٔ آلی تقریباً یکسان است؛ بنابراین با توجه به نمودار، مقایسهٔ میزان قطبیت و در نتیجه قدرت نیروهای بین مولکولی آن‌ها به صورت $A < B < C$ است. **هر چه قطبیت یک ماده بیشتر باشد (مادهٔ C)، انحلال‌پذیری آن در یک حلال ناقطبی (مثل هگزان) کم‌تر خواهد بود.**

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): جهت‌گیری **مولکول‌های قطبی‌تر (مولکول‌های C)**، در میدان الکتریکی محسوس‌تر است.

گزینهٔ (۲): ارتباط میان میزان قطبیت مولکول‌ها و نقطهٔ جوش آن‌ها به صورت **مستقیم** اما **غیرخطی** است؛ *درسته که* دمای جوش مادهٔ C، ۱۰ درصد بیشتر از مادهٔ B است $\left(\frac{۲۷۵-۲۵۰}{۲۵۰}\times ۱۰۰ = ٪۱۰\right)$، اما هیچ لزومی ندارد که میزان قطبیت آن هم ۱۰ درصد بیشتر باشد.

گزینهٔ (۴): *کی گفته همواره خطی می‌شه؟! درسته که* این نمودار اثر گشتاور دوقطبی بر نقطهٔ جوش را نشان می‌دهد ولی **لزوماً ارتباط میان آن‌ها به صورت خطی نیست!**

۱۰۲ دربارهٔ انحلال چند ترکیب داده‌شده در آب، رابطهٔ زیر برقرار است؟

«میانگین قدرت پیوند یونی در ترکیب و پیوندهای هیدروژنی در آب > نیروی جاذبهٔ یون- دوقطبی در محلول»

مواد نامحلول یا کم محلول در آب

الف) سدیم کلرید
ب) آهن (III) هیدروکسید
پ) لیتیم سولفات
ت) پتاسیم نیترات
ث) کلسیم فسفات
ج) کلسیم سولفات

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

نکته فرایند انحلال، زمانی رخ می‌دهد که جاذبه‌های نهایی در محلول، از میانگین جاذبه‌های اولیه در حل‌شوندهٔ خالص و حلال خالص، بیشتر باشد.

شرط انحلال: (میانگین جاذبه‌ها در حل‌شوندهٔ خالص و حلال خالص) < (جاذبه‌های حل‌شونده با حلال در محلول)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **رابطهٔ داده‌شده به معنی آن است که مادهٔ مورد نظر در آب محلول نیست!** یعنی انحلال‌پذیری آن در دمای $25^\circ C$، باید کم‌تر از ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب بوده و جزء مواد نامحلول یا کم‌محلول در آب باشد.

مواد «ب» (آهن (III) هیدروکسید ($Fe(OH)_3$) و «ث» (کلسیم فسفات ($Ca_3(PO_4)_2$)) در آب **نامحلول** بوده و مادهٔ «ج» (کلسیم سولفات ($CaSO_4$)) در آب **کم‌محلول** است؛ در نتیجه رابطهٔ گفته‌شده در مورد ترکیب‌های «ب»، «ث» و «ج» برقرار است.

دربارهٔ انحلال چند ترکیب داده‌شده در آب، رابطهٔ زیر برقرار است؟ *(ریاضی داخل ۹۹)*

میانگین قدرت پیوند یونی در ترکیب و پیوندهای هیدروژنی در آب > نیروی جاذبهٔ یون ـ دوقطبی در محلول

الف) نقره کلرید
ب) باریم سولفات
پ) آهن (III) هیدروکسید
ت) منیزیم کلرید
ث) کلسیم فسفات
ج) لیتیم سولفات

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۰۳ چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- تأثیر تغییر فشار بر انحلال‌پذیری KNO_3، بسیار بیشتر از Li_2SO_4 در دمای معین است.
- طبق قاعدهٔ «شبیه، شبیه را حل می‌کند» هیچ مقداری از مولکول‌های ناقطبی در حلال‌های قطبی حل نمی‌شوند.
- یک نمونهٔ آب به جرم ۸ کیلوگرم که حاوی ۵۲ میلی‌گرم اکسیژن به صورت محلول است، برای زندگی اغلب ماهی‌ها مناسب است.
- گاز NO با آب واکنش شیمیایی نمی‌دهد و انحلال‌پذیری آن در هر فشاری بیشتر از دیگر مولکول‌های ناقطبی است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

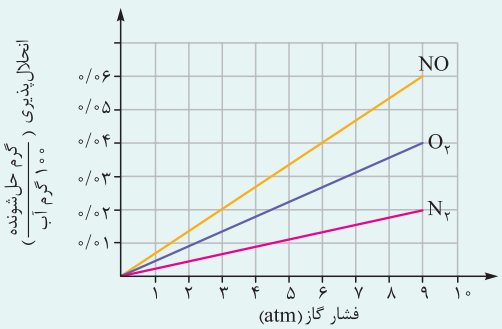
انحلال گازها در آب به سه عامل بستگی دارد:

۱) **نوع گاز**
- اولویت ۱: واکنش با آب: گازی که با آب واکنش دهد، زیاد حل می‌شود. مثل: HCl، NH_3، CO_2 و ...
- اولویت ۲: قطبیت: با جرم مولی مشابه، گازهای قطبی بیشتر در آب حل می‌شوند. $NO > O_2$: انحلال‌پذیری در آب
- اولویت ۳: جرم مولی: با افزایش جرم مولی، انحلال‌پذیری گازها افزایش می‌یابد. $O_2 > N_2$: انحلال‌پذیری در آب

گازهای NO، O_2 و N_2 با آب واکنش نمی‌دهند.

۲) فشار: در دمای ثابت، با افزایش فشار گاز، انحلال‌پذیری آن در آب افزایش می‌یابد. این نتیجه‌گیری قانون هنری نام دارد.

نمودار انحلال گازها برحسب فشار، در دمای ثابت، کاملاً خطی است. در دمای ثابت، اگر فشار یک گاز دو برابر شود، انحلال‌پذیری گاز نیز دو برابر می‌شود.



شیب هر گاز، با توجه به نوع گاز و دما تعیین می‌شود: شیب نمودار: $NO > O_2 > N_2$

توجه: گازهای NO، O_2 و N_2 با آب واکنش نمی‌دهند.

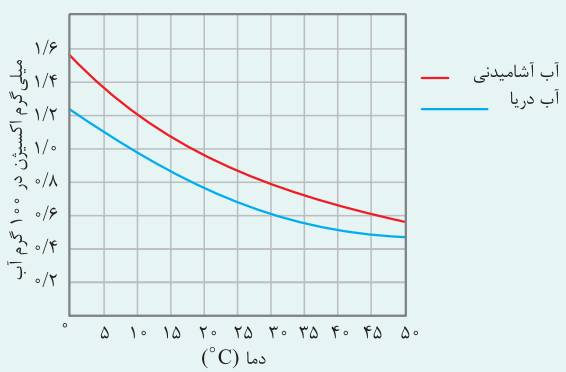
۳) دما: در فشار ثابت، با افزایش دما، انحلال‌پذیری گازها در آب کاهش می‌یابد.

در هوای گرم ماهی‌ها به سطح آب می‌آیند، چون اکسیژن در آب کاهش یافته و سطح آب چون در تماس با هواست، اکسیژن بیشتری دارد.

گاز حل‌شده در نوشابهٔ خنک، بیشتر از نوشابهٔ گرم است.

مقدار نمک موجود در آب دریا بر میزان انحلال‌پذیری گازها اثر دارد. با افزایش مقدار نمک در آب، انحلال‌پذیری گاز اکسیژن کاهش می‌یابد.

اکسیژن کافی و محلول در آب $(O_2(aq))$ برای ادامهٔ زندگی ماهی‌ها ضروری است.



ادامهٔ زندگی اغلب ماهی‌ها هنگامی امکان‌پذیر است که غلظت اکسیژن محلول در آب بیشتر از ۵ ppm باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فقط عبارت سوم درست است.

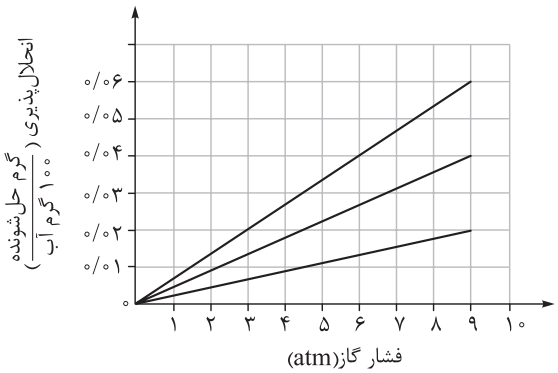
- تغییر فشار بر انحلال‌پذیری نمک‌ها در آب تاثیری ندارد.
- مواد ناقطبی مثل O_2 در آب که قطبی است، به مقدار کمی حل می‌شوند.
- باید بررسی کنیم که آیا در این محلول، غلظت اکسیژن بیشتر از ۵ ppm است یا نه.

$$ppm = \frac{\text{گرم اکسیژن}}{\text{گرم محلول}} \times 10^6 = \frac{52 \times 10^{-3}}{8 \times 10^3} \times 10^6 = \frac{52}{8} = 6/5 \text{ ppm}$$

از آن‌جا که غلظت اکسیژن بیشتر از ۵ ppm است، برای زندگی اغلب ماهی‌ها مناسب است.

- انحلال‌پذیری گاز CO_2 (ناقطبی) در هر فشاری از NO بیشتر است.

۱۰۴ نمودار زیر انحلال‌پذیری ۳ گاز O_2، N_2 و NO را در دمای $20^\circ C$ نشان می‌دهد. اگر درصد جرمی و غلظت مولار یکی از گازها با چگالی ۱/۰۵ گرم بر میلی‌لیتر در آب به ترتیب برابر ۴/۸ درصد و ۱/۸ مول بر لیتر باشد، انحلال‌پذیری آن در همین دما و در فشار $4/5\,atm$ کدام است و در دمای $20^\circ C$ و فشار $0/3\,atm$، حداکثر چند گرم گاز NO را می‌توان در ۱۰۰g آب حل کرد؟ $(O=16, N=14 : g.mol^{-1})$



۱) ۰/۰۰۲ _ ۰/۰۲

۲) ۰/۰۰۲ _ ۰/۰۱

۳) ۰/۰۰۱ _ ۰/۰۲

۴) ۰/۰۰۱ _ ۰/۰۱

مشاوره مسائل مربوط به انحلال‌پذیری گازها، از مباحثی است که بسیار مورد علاقه و توجه طراحان کنکور سراسری در سال‌های اخیر بوده است؛ بنابراین *لازمه که* به خوبی به این مبحث مسلط شوید. از سؤالات این مبحث نترسید، محاسبات سختی ندارند و فقط باید در مراحل حل‌کردن سؤال و به ویژه هنگام استفاده از نمودار، *دقتتون رو به ماکزیمم برسونید!*

پاسخ خیلی تشریحی

می‌دانیم که در شرایط یکسان، مقایسهٔ انحلال‌پذیری سه گاز به صورت مقابل است:

$$\underset{\text{گاز قطبی}}{NO} > \underset{\substack{\text{گاز ناقطبی با جرم مولی بیشتر}}}{O_2} > \underset{\substack{\text{گاز ناقطبی با جرم مولی کم‌تر}}}{N_2}$$

پس در نمودار داده‌شده، خط‌ها از بالا به پایین به ترتیب مربوط به NO، O_2 و N_2 هستند.

قسمت اول:

ابتدا با استفاده از فرمول $M=\frac{10ad}{\text{جرم مولی}}$، جرم مولی گاز مورد نظر را در شرایط داده‌شده حساب می‌کنیم:

$$M=\frac{10ad}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow 1/8=\frac{10\times 4/8\times 1/05}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \text{جرم مولی}=\frac{10\times 4/8\times 1/05}{1/8}=\frac{\overset{8}{\cancel{48}}\times 10/5}{\underset{3}{\cancel{18}}}=\frac{84}{3}=28\,g.mol^{-1}$$

بنابراین گاز مورد نظر، N_2 است.

حالا با توجه به نمودار، انحلال‌پذیری گاز N_2 در دمای $20^\circ C$ و در فشار ۴/۵ اتمسفر، برابر با ۰/۰۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.

قسمت دوم:

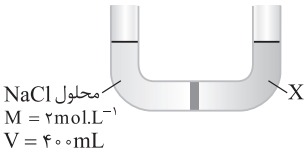
نکته طبق قانون هنری، نمودار انحلال‌پذیری گازها برحسب فشار، در دمای ثابت، کاملاً خطی است؛ یعنی داریم:

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{P_2}{P_1}$$

با در نظر گرفتن یک نقطه در نمودار انحلال‌پذیری گاز NO (مثلاً در فشار ۹ اتمسفر)، انحلال‌پذیری آن را در فشار ۰/۳ اتمسفر به دست می‌آوریم. انحلال‌پذیری گاز NO در فشار ۹ اتمسفر، برابر با ۰/۰۶ گرم در ۱۰۰ گرم آب است:

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{P_2}{P_1} \rightarrow \frac{S_2}{0/06}=\frac{0/3}{9} \rightarrow S_2=\frac{0/3\times 0/06}{9}=\frac{3\times 6}{9\times 1000}=0/002\frac{g\ NO}{100g\ H_2O}$$

۱۰۵ شکل زیر، محلول مادهٔ X و محلولی از نمک خوراکی را نشان می‌دهد که به وسیلهٔ غشای نیمه‌تراوا از یکدیگر جدا شده‌اند. چند مورد از مطالب زیر درست است؟

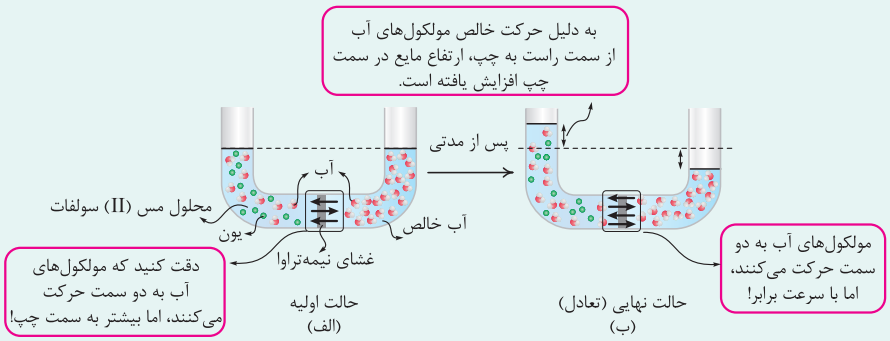


- اگر X، آب‌مقطر باشد و با گذشت زمان، ۱۰۰ میلی‌لیتر از حجم آن کاسته شود، غلظت مولی محلول نمک خوراکی به $۱/۶ mol.L^{-۱}$ خواهد رسید.
- اگر X، آب‌مقطر باشد و وزنه‌ای سنگین بر روی محلول نمک خوراکی قرار بگیرد، با گذشت زمان غلظت محلول نمک خوراکی افزایش خواهد یافت.
- اگر X، محلول آبی نقره نیترات با غلظت ۳ مولار باشد، با گذشت زمان رسوب سفیدرنگی در سمت محلول X ایجاد خواهد شد.
- اگر X، محلول ۴ مولار نمک خوراکی باشد،با گذشت زمان به طور خودبه‌خودی ارتفاع مایع در ستون سمت راست، کاهش خواهد یافت.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

اسمز (گذرندگی): به انتقال خودبه‌خودی مولکول‌های آب از غشای نیمه‌تراوا، از محیط رقیق به غلیظ، اسمز (گذرندگی) گفته می‌شود.



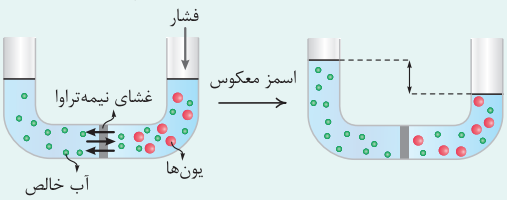
پس از مدتی ارتفاع آب در ستون سمت راست (رقیق) کم‌تر شده و در ستون سمت چپ (غلیظ) بیشتر می‌شود. در این انتقال **مولکول‌های آب می‌توانند به هر دو جهت بروند، اما برایند انتقال آب از محیط رقیق به محیط غلیظ است.**

- متورم‌شدن حبوبات و میوه‌های خشک درون آب ← انتقال خودبه‌خودی آب از محیط رقیق به داخل میوه (محیط غلیظ). در این فرایند، برخی نمک‌ها، ویتامین‌ها و ... از بافت میوه به آب راه می‌یابند.
- چروکیده‌شدن خیار در آب شور (تهیهٔ خیارشور) ← انتقال خودبه‌خودی آب از داخل خیار (محیط رقیق) به آب شور (محیط غلیظ).

نکته دیوارهٔ سلول‌ها در گیاهان روزنه‌های بسیار ریز دارد. این روزنه‌ها فقط اجازهٔ گذر به برخی ذره‌ها و مولکول‌های کوچک را می‌دهند؛ مثل آب و یون‌ها. ولی از گذر مولکول‌های درشت‌تر جلوگیری می‌کنند. این دیواره‌ها **غشای نیمه‌تراوا** نامیده می‌شوند.

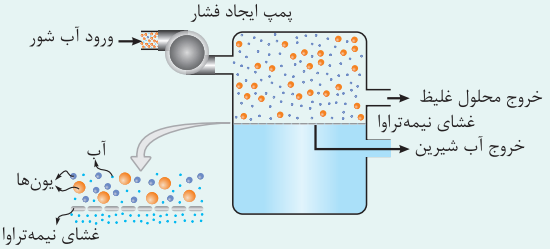
نکته *هواستون باشه که* در فرایند اسمز، در نهایت، غلظت حل‌شونده‌ها در دو طرف الزاماً برابر نمی‌شود.

اسمز معکوس (اسمز وارونه): اگر به ستون سمت چپ (غلیظ) فشار وارد کنیم، مولکول‌های آب، در جهت عکسِ اسمز، از محیط غلیظ به محیط رقیق می‌روند.



- به انتقال غیر خودبه‌خودی مولکول‌های آب، از محیط غلیظ به محیط رقیق، توسط عامل بیرونی (فشار)، اسمز معکوس می‌گوییم. در این فرایند نیز مولکول‌های آب می‌توانند به هر دو جهت بروند، اما برایند انتقال آب از محیط غلیظ به محیط رقیق است.

نکته به روش اسمز معکوس، با اعمال فشار در قسمت آب شور، می‌توانیم از آب دریا، آب شیرین تهیه کنیم:



نکته کیفیت آب (از نظر مقدار حل‌شونده‌ها در آن) می‌تواند بر مدت‌زمان استفادهٔ مؤثر از غشای نیمه‌تراوا در این فرایند تأثیر بگذارد.

جمع‌بندی

مقایسهٔ اسمز و اسمز معکوس در یک نگاه!

فرایند / ویژگی		اسمز	اسمز معکوس
جهت خالص انتقال مولکول‌های حلال (آب)		از محلول رقیق‌تر به محلول غلیظ‌تر	از محلول غلیظ‌تر به محلول رقیق‌تر
نوع فرایند		خودبه‌خودی	غیرخودبه‌خودی (اعمال فشار)
تغییر غلظت محلول‌ها با گذشت زمان	محلول رقیق	غلیظ‌تر می‌شود.	رقیق‌تر می‌شود.
	محلول غلیظ	رقیق‌تر می‌شود.	غلیظ‌تر می‌شود.
تغییر حجم و ارتفاع محلول‌ها با گذشت زمان	محلول رقیق	کاهش می‌یابد.	افزایش می‌یابد.
	محلول غلیظ	افزایش می‌یابد.	کاهش می‌یابد.
تفاوت غلظت مولی محلول‌های اولیه با گذشت زمان چه تغییری می‌کند؟		کم‌تر می‌شود.	بیشتر می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های اول و دوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- با عبور ۱۰۰ میلی‌لیتر آب به ستون سمت چپ، حجم محلول NaCl، به ۵۰۰ میلی‌لیتر رسیده و رقیق‌تر می‌شود. اما شمار مول‌های NaCl موجود در آن ثابت می‌ماند؛ در نتیجه غلظت مولی محلول رقیق‌شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M_1V_1 = M_2V_2 \rightarrow ۲\times۴۰۰ = M_2\times۵۰۰ \rightarrow M_2 = \frac{۲\times۴۰۰}{۵۰۰} = ۱/۶\ mol.L^{-1}$$

- با اعمال فشار در ستون سمت چپ، فرایند اسمز معکوس رخ داده و مولکول‌های آب از چپ به راست (از محیط غلیظ به رقیق) می‌روند؛ بنابراین غلظت محلول نمک خوراکی افزایش می‌یابد.
- دو محلول توسط غشای نیمه‌تراوا جدا شده‌اند؛ در نتیجه رسوبی تشکیل نمی‌شود؛ زیرا فقط مولکول‌های آب جابه‌جا می‌شوند و یون‌ها جابه‌جا نمی‌شوند!
- در این حالت، ستون سمت چپ رقیق‌تر بوده و جهت خالص حرکت مولکول‌های آب از محیط رقیق (ستون چپ)، به محیط غلیظ (ستون راست) است؛ از این‌رو ارتفاع مایع در ستون سمت راست افزایش خواهد یافت.