

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله اول

پایه دوازدهم

۲۳/ مرداد/ ۱۴۰۵

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۰۶

آزمون تعیین سطح
جامع پایه یازدهم

پایه	دهم	یازدهم	دوازدهم	مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
—	—	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۵۱	—	۳۵ دقیقه	۲۰	۱	۲۰	حسابان و ریاضیات پایه
—	—	کل کتاب صفحه ۹ تا ۷۵	—	۲۰ دقیقه	۳۰	۲۱	۱۰	هندسه
—	—	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۲۱	—	۲۰ دقیقه	۴۰	۳۱	۱۰	آمار و احتمال
—	—	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۳۰	—	۳۵ دقیقه	۶۵	۴۱	۲۵	فیزیک
—	—	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۳۳	—	۲۵ دقیقه	۹۰	۶۶	۲۵	شیمی
—	—	—	—	۱۳۵ دقیقه	۹۰ سؤال	—	—	مجموع

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - بابک سادات علی شهبازی - مصطفی کرمی - محمد گودزی - سروش موئینی - حسین نادری محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: علی افضل زاده - سروش موئینی - مازیار احمدی ناو	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراح: کیوان صارمی کارشناسان علمی: امیرحسین ابومحبوب - سید عباس حسینی	کیوان صارمی
آمار و احتمال	طراح: سروش موئینی کارشناس علمی: سید عباس حسینی	سعید قندچی - سروش موئینی
فیزیک	طراحان: امین امینی - علیرضا جعفری آثار - هادی حمزه پور - نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری - هادی نجفی	نوید شاهی - علیرضا جعفری آثار
شیمی	طراحان: فرشید ابراهیمی - عین الله ابوالفتحی - مهدی براتی - علی رفیعی معصومه سعیدی - سروش عبادی - هادی عبادی - یاسر عبداللهی محمد عظیمیان زواره - امیر قاسمی پور - محمد قهرمانی نژاد کارشناسان علمی: محمد مهدی کریمیان - مرتضی نصیرزاده	یاسر عبداللهی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاچانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سائز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



Azmoon.kheilisabz.com

۱- جمله اول یک دنباله حسابی، $\frac{1}{5}$ جمله سوم آن است. اگر مجموع بیست جمله اول این دنباله برابر ۸۰ باشد، جمله پنجم آن کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{2}$ (۲) $\frac{2}{2}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۲- نیمساز ناحیه‌های اول و سوم دستگاه مختصات، سهمی به معادله $y = mx^2 - x - 17m$ را در دو نقطه قطع می‌کند. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، طول این دو نقطه بزرگ‌تر از ۳- است؟

- (۱) $(-\frac{1}{3}, 0)$ (۲) $(0, \frac{1}{3})$ (۳) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{4})$ (۴) $(0, \frac{3}{4})$

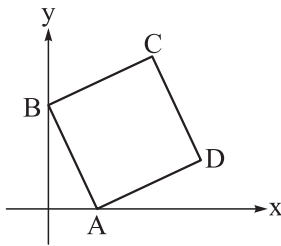
۳- اگر $1 = \sqrt{\frac{14a}{3}} + 11$ باشد، حاصل $7 + 6a$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۴- خط ℓ از نقطه $(5, 1)$ می‌گذرد و در یک نقطه نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ را قطع می‌کند. طول نقطه برخورد خط ℓ با محور طول‌ها کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{23}{5}$ (۳) $\frac{28}{5}$ (۴) $\frac{21}{5}$

۵- در شکل زیر، چهارضلعی ABCD مربع است. اگر $A(1, 0)$ و $C(3, 4)$ باشد، اختلاف طول و عرض نقطه D کدام است؟



- (۱) ۲ (۲) ۳

- (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

۶- برد تابع f با ضابطه $f(x) = x + [-x]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $[-1, 0]$ (۲) $[-1, 0)$ (۳) $(-1, 0)$ (۴) $[-1, 0)$

۷- دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \begin{cases} a & ; x = 3 \\ \frac{x^2 - b}{x - 3} & ; x \neq 3 \end{cases}$ و $g(x) = x + c$ مساوی‌اند. حاصل $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۵

۸- نمودار تابع خطی f از نقطه $(-1, 2)$ و نمودار وارون آن از نقطه $(4, f(1))$ می‌گذرد. مقدار $f^{-1}(-\frac{1}{3})$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

محل انجام محاسبات

۹- تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{ax+4}$ و تابع $g = \{(a, 0), (1, b-1), (b, c), (3, -1)\}$ مفروض است. اگر $\frac{f}{g} = \{(1, c), (\frac{4}{3}, 0)\}$ باشد، حاصل $f(-5c)$ کدام است؟

$$5\sqrt{2} \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$2\sqrt{7} \quad (1)$$

۱۰- دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \frac{5x-1}{2x-3}$ و $g(x) = \frac{5}{3}x + m$ مفروض اند. اگر $(f^{-1} \circ g)(1) = m$ باشد، $(f^{-1} \circ g)(\frac{m}{2})$ کدام می‌تواند باشد؟

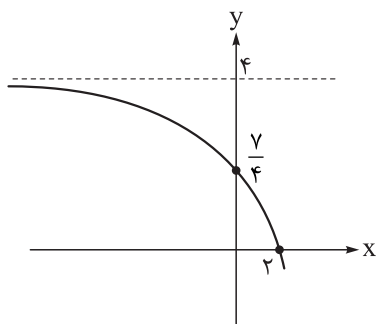
$$\frac{37}{68} \quad (4)$$

$$\frac{23}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{23} \quad (2)$$

$$-\frac{68}{37} \quad (1)$$

۱۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a - b \times c^{ax-b}$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $f(3)$ کدام است؟



$$-\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$-\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{7}{3} \quad (3)$$

$$-2 \quad (4)$$

۱۲- اگر $\log_3 3 = 1/6$ و $\log_9 5 = 0/725$ باشد، حاصل $\log_6 15$ تقریباً کدام است؟

$$\frac{49}{25} \quad (4)$$

$$\frac{97}{50} \quad (3)$$

$$\frac{246}{125} \quad (2)$$

$$\frac{248}{125} \quad (1)$$

۱۳- اگر $x = \alpha$ جواب معادله $\log_5(x+2) + \log_5(x^2+x+1) = 2$ باشد، حاصل $[2\alpha]$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۱۴- انتهای کمان α روی دایره مثلثانی در ناحیه دوم دستگاه مختصات قرار گرفته و $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ است. حاصل عبارت

$$\frac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) - \cos(\alpha + \pi)}{|\cot^2 \alpha - 1|}$$

کدام است؟

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{21} \quad (4)$$

$$\frac{1-2\sqrt{2}}{21} \quad (3)$$

$$\frac{2\sqrt{2}-1}{21} \quad (2)$$

$$-\frac{1+2\sqrt{2}}{21} \quad (1)$$

محل انجام محاسبات

۱۵- نمودار تابع f را در راستای محور طول‌ها، $\frac{\pi}{4}$ واحد به چپ و در راستای محور عرض‌ها، $\frac{1}{4}$ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

نمودار نهایی بر نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ منطبق شده است. حاصل $f(-\frac{5\pi}{3})$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ (۳) $-\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ (۴) $-\sqrt{2} + \frac{3}{2}$

۱۶- اگر $\tan \frac{\alpha}{2} - \cot \frac{\alpha}{2} = -3$ باشد، حاصل $\sin 2\alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{12}{13}$ (۲) $-\frac{12}{13}$ (۳) $\frac{5}{13}$ (۴) $-\frac{5}{13}$

۱۷- تابع f با ضابطه $f(x) = |x^2| - \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$ مفروض است. حاصل $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ کدام است؟ ([])، نماد جزء صحیح است.

(۱) -4 (۲) -3 (۳) -2 (۴) -1

۱۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x+1} - [x]}{\sqrt[3]{x-2} - [\frac{x}{2}]}$ کدام است؟ ([])، نماد جزء صحیح است.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3} \sin x + 2 \cos(x + \frac{\pi}{3})}{2x - \pi}$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

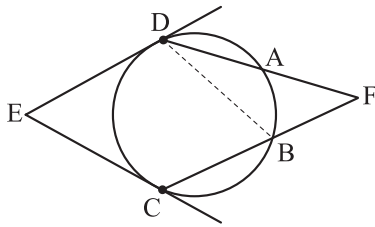
۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - [x]} & ; -\frac{1}{2} \leq x < a \\ \frac{x+b}{2x+1} & ; x \geq a \end{cases}$ روی دامنه‌اش پیوسته است. اگر a عددی حسابی باشد، حاصل

$f(\frac{a-b}{4})$ کدام است؟ ([])، نماد جزء صحیح است.

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

محل انجام محاسبات

۲۱- در شکل زیر، $\widehat{DC} = 3\widehat{AB}$ و $\hat{E} = \hat{F}$ است. زاویه DBC چند درجه است؟



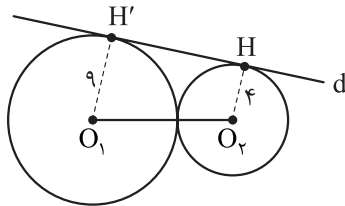
(۱) ۶۲/۵

(۲) ۶۵

(۳) ۶۷/۵

(۴) ۶۹

۲۲- در شکل زیر، خط d بر دایره‌های $C_1(O_1, 9)$ و $C_2(O_2, 4)$ مماس است. مساحت چهارضلعی O_1O_2HH' کدام است؟



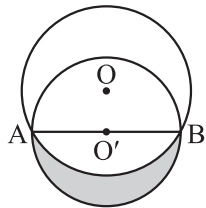
(۱) ۲۸

(۲) ۳۹

(۳) ۵۶

(۴) ۷۸

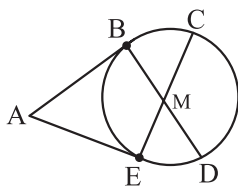
۲۳- دایره‌های به مراکز O و O' مطابق شکل مفروض‌اند. اگر شعاع دایره‌ها برابر ۱ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مساحت ناحیه رنگی



چه قدر از $\frac{\pi}{24}$ بیشتر است؟

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۴- در شکل زیر، AB و AE بر دایره مماس‌اند و نقطه M ، وسط وتر BD است. اگر $ME = 4$ ، $MC = 9$ و محیط



چهارضلعی $ABME$ برابر ۲۶ واحد باشد، طول AB کدام است؟

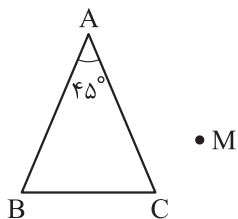
(۲) ۸

(۱) ۷/۵

(۴) ۹

(۳) ۸/۵

۲۵- مطابق شکل، نقطه M خارج مثلث ABC با زاویه رأس 45° درجه است. نقطه M را ابتدا نسبت به ضلع AC بازتاب



می‌دهیم تا نقطه M' و سپس M' را نسبت به ضلع AB بازتاب می‌دهیم تا نقطه M'' به دست آید. اگر فاصله نقاط M و M''

برابر ۶ باشد، مساحت مثلث AMM'' کدام است؟

(۲) ۱۸

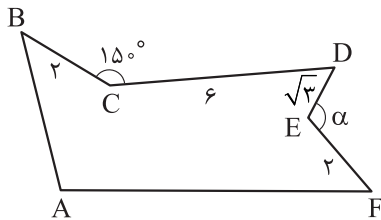
(۱) ۹

(۴) ۲۴

(۳) ۱۲

محل انجام محاسبات

۲۶- در شکل زیر، می‌خواهیم بدون آن که محیط چندضلعی تغییر کند، مساحتش را افزایش دهیم. اگر میزان افزایش مساحت ۹ واحد سطح باشد، زاویه α چند درجه است؟ ($\alpha > 90^\circ$)



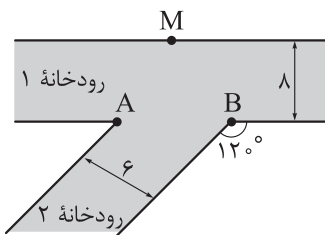
(۱) 150°

(۲) 135°

(۳) 120°

(۴) 165°

۲۷- در شکل زیر می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، سه اسکله بسازیم. جای دو اسکله A و B مطابق شکل مشخص است. اگر اسکله M را در نقطه‌ای از ساحل بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM، کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند، کم‌ترین مقدار $AM + MB$ کدام است؟



(۱) $2\sqrt{19}$

(۲) $4\sqrt{3}$

(۳) $8\sqrt{3}$

(۴) $4\sqrt{19}$

۲۸- مثلث ABC با طول اضلاع $AB = 5$ ، $AC = \sqrt{79}$ و $BC = 8$ مفروض است. اگر AM میانه وارد بر ضلع BC باشد، مقدار $\cos \hat{BAM}$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{24}{25}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۱) $\frac{1}{2}$

۲۹- در مثلثی با ضلع‌های ۴، ۷ و ۱۰، نیمساز زاویه متوسط را رسم می‌کنیم. محیط کوچک‌ترین مثلث حاصل از این رسم کدام است؟

(۲) $6 + \sqrt{30}$

(۱) $5 + 3\sqrt{33}$

(۴) $5 + 2\sqrt{7}$

(۳) $6 + 5\sqrt{2}$

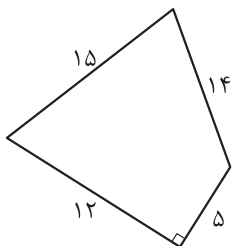
۳۰- مساحت چهارضلعی شکل زیر کدام است؟

(۲) ۱۲۰

(۱) ۱۱۴

(۴) ۱۴۴

(۳) ۱۳۲



محل انجام محاسبات

۳۱- اگر $r \sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow$ درست باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) دقیقاً دو تا از گزاره‌های p , q و r درست‌اند. (۲) حداکثر دو تا درست‌اند.
(۳) فقط یکی از آن‌ها درست است. (۴) حتماً هر سه نادرست‌اند.

۳۲- با کدام گزاره $P(x, y)$ ، گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} ; P(x, y)$ درست است؟

- (۱) $xy = 1$ (۲) $x = y^2$ (۳) $y = x^2$ (۴) $y = 2^x$

۳۳- اگر A و B به ترتیب ۴ و ۶ عضوی باشند، تعداد اعضای $B \times A - A \times B$ ، حداقل m و حداکثر n خواهد بود. $n - m$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۹ (۴) ۱۶

۳۴- اگر $P(A) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و احتمال رخ دادن فقط یکی از آن‌ها $\frac{3}{5}$ باشد، مقدار $P(B' | A')$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{20}$ (۲) $\frac{9}{20}$ (۳) $\frac{11}{20}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۵- در فضای نمونه‌ای چهارعضوی $S = \{p, t, r, q\}$ ، مقادیر احتمال پیشامدهای ساده، دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{12}$ می‌سازند. بیشترین مقدار احتمال یک پیشامد دوعضوی در S چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{7}{12}$

۳۶- در کیسه A ، چهار مهره سفید و ۶ مهره سیاه و در کیسه B ، هفت مهره سفید و ۳ مهره سیاه داریم. مهره‌ای از کیسه A برداشته و در کیسه B قرار می‌دهیم، سپس مهره‌ای از B برمی‌داریم. چه قدر احتمال دارد این مهره سفید باشد؟

- (۱) $\frac{29}{55}$ (۲) $\frac{26}{55}$ (۳) $\frac{37}{55}$ (۴) $\frac{27}{55}$

۳۷- در ۱۵ داده آماری، میانگین داده‌های بیشتر از چارک سوم و داده‌های کم‌تر از چارک اول به ترتیب ۲۱ و ۷ و میانگین داده‌های رو و درون جعبه ۱۶ است. میانگین داده‌ها کدام است؟

- (۱) $15/1$ (۲) $15/2$ (۳) $15/3$ (۴) $15/4$

۳۸- ضریب تغییرات داده‌های $2/7$ و $2/8, 2/9, 3/6, 3/6$ کدام است؟ ($\sqrt{10} \approx 3/15$)

- (۱) $0/105$ (۲) $0/108$ (۳) $0/111$ (۴) $0/117$

۳۹- نمونه ۲۵ عضوی با اطمینان ۹۵ درصد، میانگین جامعه را در بازه $[15/12, 16/88]$ برآورد می‌کند. اگر انحراف معیار جامعه و نمونه برابر باشند، ضریب تغییرات اعضای نمونه کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{80}$ (۲) $\frac{3}{160}$ (۳) $\frac{3}{40}$ (۴) $\frac{1}{64}$

۴۰- نمونه انتخابی از اعداد طبیعی ۱ تا n ، به صورت ۱۹، ۱۶، ۱۷ و ۴ است. برآورد n براساس میانه کدام است؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴) ۳۴

محل انجام محاسبات

۴۱- عدد اتمی عنصر منیزیم برابر ۱۲ است. بار الکتریکی هسته اتم منیزیم چند میکروکولن است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

(۲) $1/92 \times 10^{-13}$

(۱) $1/92 \times 10^{-12}$

(۴) $7/5 \times 10^{-13}$

(۳) $7/5 \times 10^{-12}$

۴۲- در شکل زیر، دو گوی مشابه به جرم $3/6 \text{ g}$ و بار الکتریکی یکسان q در فاصله 1 cm از هم قرار دارند و گوی بالایی به صورت معلق است. هر یک از گوی‌ها چند الکترون دریافت کنند تا از نظر الکتریکی خنثی شوند؟

($g = 10 \text{ N/kg}$ و $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ، $k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)



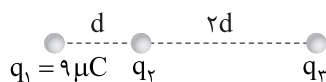
(۱) $1/25 \times 10^{11}$

(۲) $1/25 \times 10^{12}$

(۳) 8×10^{11}

(۴) 8×10^{12}

۴۳- در شکل زیر، نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از بارهای الکتریکی نقطه‌ای، برابر صفر است. مجموع دو بار q_2 و q_3 چند میکروکولن است؟



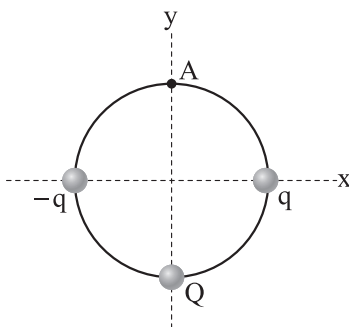
(۲) 40

(۱) 32

(۴) -40

(۳) -32

۴۴- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی محیط دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطه A در SI برابر $\vec{E} = \vec{i} - \vec{j}$ باشد، $\frac{Q}{q}$ برابر کدام است؟



(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $2\sqrt{2}$

(۳) $-\sqrt{2}$

(۴) $-2\sqrt{2}$

محل انجام محاسبات

۴۵- در یک میدان الکتریکی یکنواخت، ذره‌ای با بار الکتریکی $2\text{ }\mu\text{C}$ از نقطه A تا نقطه B جابه‌جا می‌شود و انرژی جنبشی آن $50\text{ }\mu\text{J}$ افزایش می‌یابد. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر 100 V باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه B برابر چند ولت است؟ (تنها نیروی وارد بر ذره، نیروی الکتریکی است.)

- (۱) ۲۵ (۲) -۲۵ (۳) ۷۵ (۴) ۱۲۵

۴۶- یک ماهواره به شکل مکعبی به ضلع 50 cm در اثر عبور از لایه‌های جو، دارای بار الکتریکی Q می‌شود. اگر چگالی سطحی بار الکتریکی روی سطح این ماهواره در SI برابر 8×10^{-10} باشد، Q چند نانوکولن است؟ (از تجمع بار روی لبه‌ها چشم‌پوشی کنید.)

- (۱) $1/2$ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۰ (۴) $0/2$

۴۷- خازنی به ظرفیت $6\text{ }\mu\text{F}$ به یک باتری 15 V متصل است. اگر فاصله بین صفحات خازن را ۲۵ درصد کاهش دهیم، بار الکتریکی خازن چند میکروکولن تغییر می‌کند؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۲۰

۴۸- ظرفیت خازنی $12\text{ }\mu\text{F}$ و بار الکتریکی آن q است. اگر 3 mC بار الکتریکی از صفحه منفی به صفحه مثبت منتقل شود، انرژی ذخیره‌شده در خازن به اندازه ۸ J زیاد می‌شود. q چند میلی‌کولن است؟

- (۱) $30/5$ (۲) $33/5$ (۳) ۲۹ (۴) ۳۵

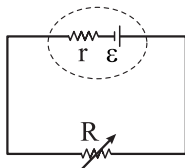
۴۹- لامپی به مقاومت الکتریکی $6\text{ }\Omega$ به اختلاف پتانسیل ثابت 4 V متصل است. در مدت یک دقیقه، چند الکترون از این لامپ عبور می‌کند؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19}\text{ C}$)

- (۱) 5×10^{21} (۲) 5×10^{20} (۳) $2/5 \times 10^{21}$ (۴) $2/5 \times 10^{20}$

۵۰- طول سیم مسی A، ۲۰ درصد بیشتر از طول سیم مسی B است. اگر مقاومت الکتریکی دو سیم برابر باشد، جرم سیم A چند برابر جرم سیم B است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{25}{36}$ (۴) $\frac{36}{25}$

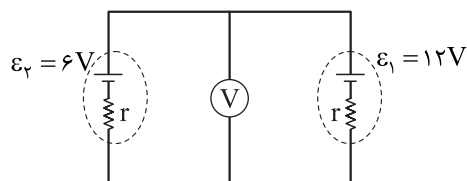
۵۱- در مدار شکل زیر، اگر مقدار مقاومت متغیر از $4\text{ }\Omega$ به $9\text{ }\Omega$ برسد، جریان الکتریکی عبوری از آن از 4 A به 2 A می‌رسد. نیروی محرکه باتری چند ولت است؟



- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

محل انجام محاسبات

۵۲- در مدار شکل زیر، ولت‌سنج آرمانی چند ولت را نشان می‌دهد؟



(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

۵۳- دو سربیک بخاری برقی را به اختلاف پتانسیل الکتریکی 220 V وصل می‌کنیم و جریان الکتریکی 20 A از آن می‌گذرد. اگر این بخاری برقی به مدت ۴ ساعت در روز کار کند و قیمت برق مصرفی به ازای هر کیلووات ساعت 50 تومان باشد، هزینه یک ماه (۳۰ روز) مصرف این بخاری چند تومان می‌شود؟

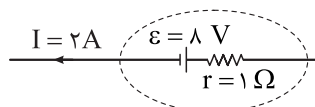
(۴) ۲۶۴۰

(۳) ۲۸۲۰

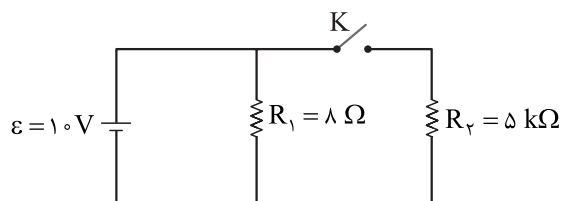
(۲) ۲۶۴۰۰

(۱) ۲۸۲۰۰

۵۴- باتری شکل زیر در یک مدار قرار دارد. در یک بازه زمانی یک دقیقه‌ای، کدام یک از موارد زیر درباره این باتری درست است؟

(۱) 720 J انرژی الکتریکی از باتری خارج می‌شود.(۲) 720 J انرژی الکتریکی وارد باتری می‌شود.(۳) 1200 J انرژی الکتریکی از باتری خارج می‌شود.(۴) 1200 J انرژی الکتریکی وارد باتری می‌شود.

۵۵- در مدار شکل زیر، با بستن کلید K، جریان عبوری از باتری آرمانی چند میلی‌آمپر تغییر می‌کند؟



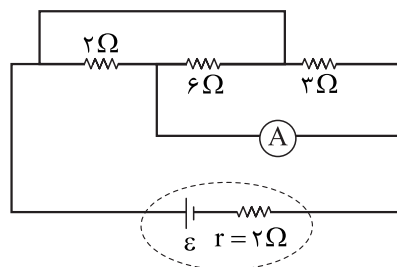
(۱) ۲

(۲) ۲۰

(۳) ۱/۲۵

(۴) ۱۲/۵

۵۶- در مدار شکل زیر، آمپرسنج آرمانی، 2 A را نشان می‌دهد. نیروی محرکه باتری چند ولت است؟



(۱) ۶

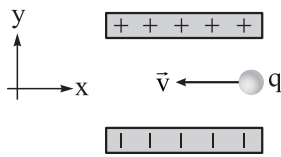
(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۱۲

محل انجام محاسبات

۵۷- در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی منفی و جرم ناچیز با تندی $3 \times 10^4 \text{ m/s}$ در امتداد محور x ، وارد فضایی می‌شود که در آن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت وجود دارد. اگر اندازه میدان الکتریکی 90 N/C باشد، برای این که ذره در همان امتداد محور x به حرکتش ادامه دهد، کم‌ترین مقدار میدان مغناطیسی باید چند گاوس و در چه جهتی باشد؟ (نیروی مقاومت هوا ناچیز است.)



$$\otimes, 30 \quad (2)$$

$$\otimes, 27 \quad (1)$$

$$\odot, 30 \quad (4)$$

$$\odot, 27 \quad (3)$$

۵۸- از سیم راستی که موازی محور x است، جریان الکتریکی 5 A در جهت محور x می‌گذرد. اگر میدان مغناطیسی در محل سیم، برحسب تسلا به صورت $\vec{B} = 0/6 \vec{i} + 0/8 \vec{j}$ باشد، نیروی وارد بر 20 سانتی‌متر از سیم چند نیوتون و در چه جهتی است؟ (محور x و y در صفحه به صورت x است.)

$$\odot, 0/8 \quad (4)$$

$$\otimes, 0/8 \quad (3)$$

$$\odot, 1 \quad (2)$$

$$\otimes, 1 \quad (1)$$

۵۹- تعداد حلقه‌ها و طول سیم‌لوله A به ترتیب 2 و $\frac{1}{4}$ برابر تعداد حلقه‌ها و طول سیم‌لوله B است. اگر از این دو سیم‌لوله جریان الکتریکی یکسان عبور کند، میدان مغناطیسی یکنواخت درون سیم‌لوله A چند برابر میدان مغناطیسی یکنواخت درون سیم‌لوله B است؟

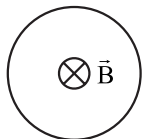
$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۶۰- در شکل زیر، قطر حلقه حامل جریان، برابر $2/5 \text{ cm}$ و میدان مغناطیسی حاصل از حلقه در مرکز آن برابر $B = 2 \text{ G}$ است. جریان الکتریکی عبوری از حلقه چند آمپر و در چه جهتی است؟ $(\mu_0 = 12/5 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$



$$4 \text{ پادساعتگرد} \quad (2)$$

$$4 \text{ ساعتگرد} \quad (1)$$

$$8 \text{ پادساعتگرد} \quad (4)$$

$$8 \text{ ساعتگرد} \quad (3)$$

۶۱- سطح حلقه رسانایی، به شکل مربع با ضلع 20 cm ، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 5 T قرار دارد. اگر در مدت $0/02 \text{ s}$ ، حلقه را طوری بچرخانیم که سطح آن موازی با خط‌های میدان مغناطیسی شود، اندازه نیروی محرکه القایی متوسط ایجادشده در حلقه در این مدت چند ولت است؟

$$0/1 \quad (4)$$

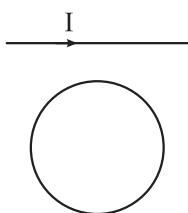
$$0/2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

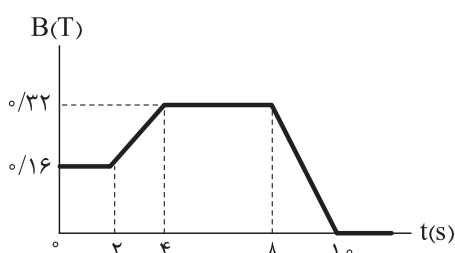
محل انجام محاسبات

۶۲- در شکل زیر، حلقهٔ رسانایی در نزدیکی یک سیم بلند حامل جریان I قرار دارد. کدام یک از تغییرات زیر، در حلقهٔ جریان الکتریکی ساعتگرد القا می‌کند؟



- (۱) کاهش جریان I ، دور کردن حلقه از سیم
- (۲) افزایش جریان I ، دور کردن حلقه از سیم
- (۳) کاهش جریان I ، نزدیک کردن حلقه به سیم
- (۴) افزایش جریان I ، نزدیک کردن حلقه به سیم

۶۳- یک حلقهٔ رسانای مربع شکل به ضلع 5 cm و مقاومت الکتریکی $1\ \Omega$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. خطوط میدان مغناطیسی، عمود بر سطح حلقه است. مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می‌کند. بزرگی جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t_1 = 0\text{ s}$ تا $t_2 = 10\text{ s}$ چند میلی آمپر است؟



- (۱) $0/4$
- (۲) $0/8$
- (۳) 4
- (۴) 8

۶۴- جریان الکتریکی عبوری از یک القاگر فرضی 300 A و انرژی ذخیره شده در آن یک کیلووات ساعت است. ضریب القاوری این القاگر چند هانری است؟

- (۱) 8
- (۲) 36
- (۳) 80
- (۴) 360

۶۵- معادلهٔ جریان عبوری از یک مولد جریان متناوب در SI به صورت $i = 5 \sin 250\pi t$ است. در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، جریان عبوری از مولد برای اولین بار بیشینه می‌شود؟

- (۱) $\frac{1}{20}$
- (۲) $\frac{1}{50}$
- (۳) $\frac{1}{200}$
- (۴) $\frac{1}{500}$

محل انجام محاسبات

۶۶- ویژگی‌های «توانایی از دست دادن الکترون، رسانایی الکتریکی بالا و تعلق داشتن به دسته p جدول دوره‌ای» را به

کدام عنصر می‌توان نسبت داد؟

(۱) سومین عنصر گروه ۱۴

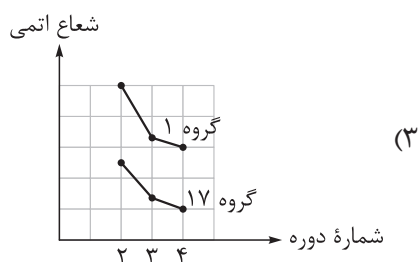
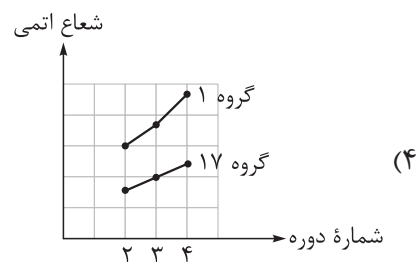
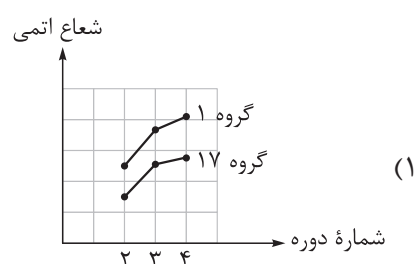
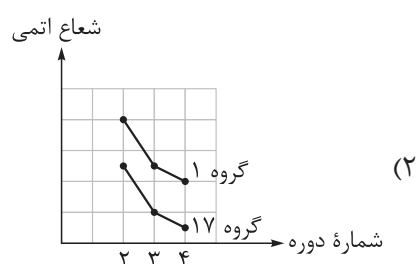
(۲) عنصری از دوره سوم با ۶ الکترون ظرفیتی

(۳) عنصری با عدد اتمی ۲۰

(۴) عنصری با آرایش الکترونی $[Kr] 4d^1 5s^2 5p^2$

۶۷- نمودار تغییر شعاع اتمی سه عنصر نخست گروه‌های اول و هفدهم جدول دوره‌ای، بر حسب شماره دوره آن‌ها به کدام

صورت زیر درست‌تر است؟



۶۸- اگر مجموع $(n + l)$ الکترون‌های ظرفیت اتم عنصر A از دسته p جدول دوره‌ای برابر ۱۴ باشد، کدام مورد نادرست است؟

(۱) عنصر A خصلت نافلزی کمتری نسبت به X دارد.

(۲) تفاوت عدد اتمی آن با اولین فلز هم‌گروه خود برابر ۳۲ است.

(۳) شعاع اتمی بیشتری نسبت به نافلزترین عنصر جدول تناوبی دارد.

(۴) در جدول تناوبی، میان عنصرهای فلزی و نافلزی هم‌دوره خود قرار گرفته است.

محل انجام محاسبات

۶۹- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

(۱) اگر آرایش الکترونی یون پایدار M^{n+} به $3d^9$ ختم شود، برای n دو مقدار متفاوت می‌توان در نظر گرفت.

(۲) در واکنش محلول آهن (III) کلرید با سدیم هیدروکسید، رسوبی به رنگ قرمز - قهوه‌ای حاصل می‌شود.

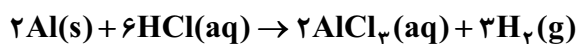
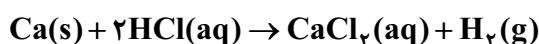
(۳) واکنش $CuO + Ti \rightarrow Cu + TiO_2$ ، به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

(۴) هر چه فلزی واکنش‌پذیرتر باشد، ترکیب‌هایش پایدارتر از خودش هستند.

۷۰- اگر حجم گاز هیدروژن حاصل از واکنش یک گرم فلز آلومینیم ناخالص با هیدروکلریک اسید در شرایط STP، با

حجم گاز هیدروژن حاصل از واکنش دو گرم فلز کلسیم ناخالص با هیدروکلریک اسید در همان شرایط برابر باشد، نسبت

درصد خلوص Al به Ca در نمونه‌های اولیه کدام است؟ ($Al = 27, Ca = 40 : g.mol^{-1}$)



۱ / ۸ (۲)

۰ / ۹ (۱)

۰ / ۴ (۴)

۲ / ۵ (۳)

۷۱- اگر در نمونه‌ای به جرم ۱۴۸ گرم از لیتیم کربنات ناخالص، تعداد اتم‌های کربن برابر 3×10^{23} باشد، درصد خلوص

لیتیم کربنات در این نمونه کدام است و اگر نمونه‌ای به جرم ۴۰۰ گرم از لیتیم کربنات با همین درصد خلوص با مقدار کافی محلول HCl

طبق معادله زیر واکنش دهد، مجموع جرم گازهای تولیدی، به تقریب چند گرم است؟ (بازده درصدی انجام این واکنش را برابر ۶۰٪

در نظر بگیرید، در قسمت ناخالص نمونه لیتیم کربنات، کربن وجود ندارد، ($H = 1, Li = 7, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)



۵۰ / ۳ - ٪۵۰ (۲)

۸۳ / ۸ - ٪۲۵ (۱)

۵۰ / ۳ - ٪۲۵ (۴)

۸۳ / ۸ - ٪۵۰ (۳)

۷۲- مجموع اعداد، در نام آیوپاک آلکانی که به اشتباه «۲، ۳- دی‌اتیل - ۵، ۳- دی‌متیل هپتان» نام‌گذاری شده، کدام است؟

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

محل انجام محاسبات

۷۳- مخلوطی گازی شامل نخستین عضو خانواده آلکان‌ها (A)، آلکن‌ها (X) و آلکین‌ها (D) با ۲/۱ مول گاز هیدروژن به طور کامل واکنش داده و فراورده‌های سیرشده تشکیل می‌شود. اگر شمار مول‌های X و D در مخلوط اولیه یکسان و نصف شمار مول‌های A باشد، حجم مخلوط اولیه هیدروکربن‌ها در شرایط STP چند لیتر است؟

- (۱) ۶۲/۷۲ (۲) ۴۷/۰۴
(۳) ۳۱/۳۶ (۴) ۱۵/۶۸

۷۴- کدام موارد زیر در ارتباط با نفتالن درست است؟

الف) در ساختار آن، ۲۴ پیوند اشتراکی وجود دارد.

ب) تفاوت شمار پیوندهای $C-H$ و پیوندهای $C-C$ در ساختار آن، برابر با شمار پیوندهای $C=C$ مولکول آن است.
پ) سرگروه خانواده هیدروکربن‌های آروماتیک است.

ت) تفاوت جرم مولی آن با جرم مولی سیکلوهگزان برابر با جرم مولی پروپان است.

- (۱) «الف» - «ب» (۲) «ب» - «پ»
(۳) «پ» - «ت» (۴) «الف» - «ت»

۷۵- نسبت جرمی کربن به هیدروژن در هیدروکربنی به فرمول C_xH_y برابر ۹ است. اگر اضافه کردن آن به مقدار کمی از محلول برم در یک حلال آلی، سبب بی‌رنگ شدن محلول، این هیدروکربن متعلق به خانواده است.
($H=1, C=12: g.mol^{-1}$)

- (۱) شود - آلکن‌ها (۲) نشود - آلکان‌ها
(۳) شود - آلکین‌ها (۴) نشود - سیکلوآلکان‌ها

۷۶- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) اگر انرژی گرمایی ماده A از ماده B بیشتر باشد، میانگین تندی ذره‌های سازنده ماده A از ماده B بیشتر است.
(۲) در واکنش‌هایی که در دمای ثابت انجام می‌شوند ($\Delta\theta = 0$)، میان سامانه و محیط، انرژی مبادله نمی‌شود.
(۳) اگر از سوختن دو دگرشکل A و B از یک عنصر به ترتیب X و Y کیلوژول گرما آزاد شود، به طوری که $X > Y$ باشد، پایداری آلوتروپ A از B بیشتر است.
(۴) گرما و دما به ترتیب برای توصیف یک فرایند و توصیف یک ماده به کار می‌روند.

محل انجام محاسبات

۷۷- در یک کارخانه صنعتی از آلیاژهای A و B برای بهبود خواص الکتریکی استفاده می‌شود. اگر ۱۰۰ گرم از هر آلیاژ در دمای 60°C داشته باشیم، کدام مورد درست است؟ (از مبادله گرما توسط سایر مواد صرف نظر شود).

($c_{\text{Au}} = 0.128 \text{ J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$, $c_{\text{Al}} = 0.9 \text{ J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$)

آلیاژ	درصد جرمی طلا	درصد جرمی آلومینیم	درصد جرمی سایر مواد
A	۷۵	۱۵	۱۰
B	۷۵	۲۰	۵

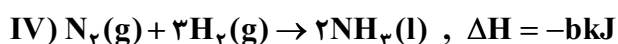
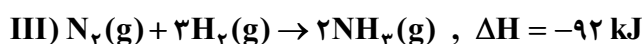
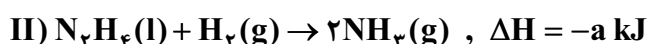
(۱) اگر آلیاژها را در دمای اتاق قرار دهیم، آلیاژ B زودتر با محیط هم‌دمای می‌شود.

(۲) در آلیاژ A، ظرفیت گرمایی طلا از ظرفیت گرمایی آلومینیم بیشتر است.

(۳) به ازای مقدار یکسانی از آب و روغن، این آلیاژها دمای آب 30°C را نسبت به روغن 30°C ، سریع‌تر افزایش می‌دهند.

(۴) در صورت دادن گرمای یکسان به دو آلیاژ، افزایش دمای آلیاژ A بیشتر از آلیاژ B خواهد بود.

۷۸- با توجه به واکنش‌های زیر، کدام گزینه نادرست است؟



(۱) a همانند b، عددی مثبت است.

(۲) در فرایند تولید $4/48$ لیتر گاز آمونیاک در شرایط STP مطابق واکنش (I)، $18/7$ کیلوژول گرما آزاد می‌شود.

(۳) اگر آنتالپی تبخیر آمونیاک برابر 23 kJ.mol^{-1} باشد، مقدار b برابر ۱۳۸ است.

(۴) آنتالپی واکنش $\text{N}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2(\text{g}) \rightarrow \text{N}_2\text{H}_4(\text{l})$ برابر $(a + b)$ کیلوژول است.

۷۹- اگر ترکیب‌های A و B ایزومر یکدیگر باشند، چه تعداد از ویژگی‌های زیر برای آن‌ها یکسان است؟

• جرم مولی

• شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی

• نوع نیروی جاذبه بین مولکولی

• پایداری

• چگالی

• ارزش سوختی

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

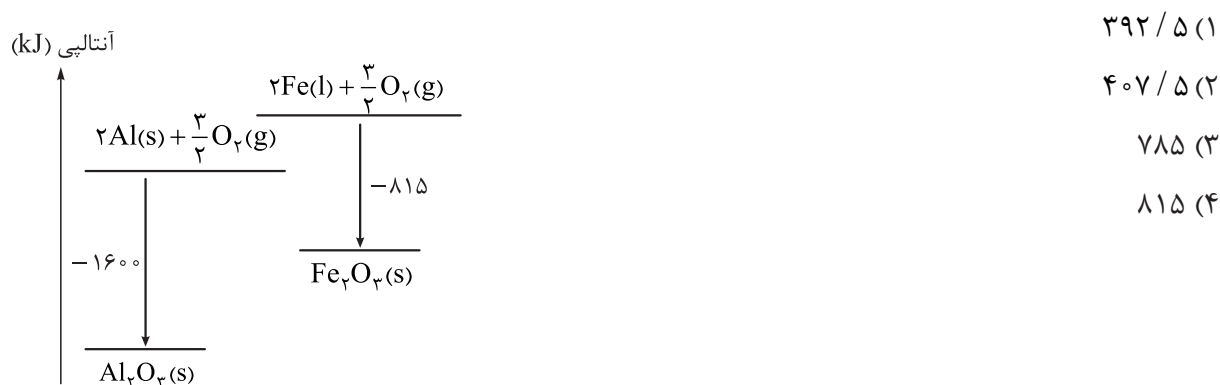
محل انجام محاسبات

۸۰- کدام مورد، درست است؟

- (۱) اگر آنتالپی پیوند $H-S$ برابر a kJ باشد، ΔH واکنش $H_2S(g) \rightarrow 2H(g) + S(s)$ برابر $2a$ kJ خواهد بود.
- (۲) محاسبه ΔH واکنش $H_2(g) + F_2(g) \rightarrow 2HF(g)$ ، به کمک آنتالپی‌های پیوند، با داده‌های تجربی تفاوت زیادی دارد.
- (۳) انرژی مورد نظر برای تبدیل هر گرم $Cl_2(g)$ به اتم‌های مجزا، کمتر از مقدار انرژی لازم برای تبدیل یک گرم $Br_2(g)$ به اتم‌های مجزا است.

- (۴) در ساختار متانول، انرژی لازم برای شکستن پیوند $O-H$ نسبت به $C-O$ و $C-H$ ، بیشتر است.
- ۸۱- از سوختن کامل یک گرم مخلوط گازی شامل $H_2(g)$ و $CH_4(g)$ در اکسیژن، $73/06$ kJ گرما آزاد می‌شود. نسبت مولی H_2 به CH_4 در مخلوط گازی اولیه، کدام است؟ (ارزش سوختی گازهای هیدروژن و متان در شرایط آزمایش به ترتیب برابر $142/9$ و $55/6$ کیلوژول بر گرم است، $H=1, C=12: g.mol^{-1}$)
- ۲ (۱)
۱ (۲)
۴ (۳)
۳ (۴)

۸۲- با توجه به نمودار زیر، به ازای تولید ۱ مول آهن در فرایند ترمیت، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟



۸۳- کدام مورد درست است؟

- (۱) در واکنش $X(g) \rightarrow 2Y(g)$ ، رابطه $\frac{\Delta n(X)}{\Delta t} = \frac{\Delta n(Y)}{2\Delta t}$ برقرار است.
- (۲) در واکنش $A(l) + 2B(g) \rightarrow 3D(g)$ ، سرعت مصرف A بر حسب مولار بر ثانیه، $\frac{1}{3}$ سرعت تولید D است.
- (۳) اگر شیب نمودار غلظت - زمان دو ماده شرکت‌کننده در یک واکنش، قرینه یکدیگر باشد، سرعت تولید یا مصرف آن‌ها با هم برابر است.
- (۴) اگر سرعت متوسط مصرف M در واکنش $2M(g) \rightarrow 3Z(g)$ ، $1/25 \times 10^{-3}$ مول بر ثانیه باشد، سرعت متوسط واکنش برابر با $4/5$ مول بر ساعت است.

محل انجام محاسبات

۸۴- جدول زیر مربوط به واکنش تبدیل قند موجود در جوانه گندم (مالتوز) به گلوکز است.

زمان (دقیقه)	غلظت مولی (mol.L ⁻¹)	۰	۱	۳	۷	۱۴
	[C _۶ H _{۱۲} O _۶]	۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴
	[C _{۱۲} H _{۲۲} O _{۱۱}]	۰/۱۰	۰/۰۹۵	۰/۰۹	۰/۰۸۵	۰/۰۸



در ۳ دقیقه نخست، سرعت تولید گلوکز چند مولار بر ثانیه است و نسبت سرعت مصرف مالتوز در ۳ دقیقه اول به ۷ دقیقه دوم واکنش به تقریب کدام است؟

$$۲ - ۱/۱۱ \times ۱۰^{-۴} \quad ۴/۶۷ - ۱/۱۱ \times ۱۰^{-۴}$$

$$۲ - ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۲} \quad ۴/۶۷ - ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۲}$$

۸۵- کدام موارد درست است؟ (H = ۱, C = ۱۲, F = ۱۹ : g.mol⁻¹)

الف) نسبت شمار اتم‌های کربن به هیدروژن در مولکول‌های سیانواتن و وینیل بنزن، یکسان است.

ب) شمار پیوندها در مونومر سازنده تفلون با شمار پیوندهای C—C در آلکانی که جرم مولی یکسانی با این مونومر دارد، برابر است.

پ) تفلون نقطه ذوب بالایی داشته و همانند اغلب پلیمرها در حلال‌های آلی حل می‌شود.

ت) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در وینیل کلرید و گوگرد دی‌اکسید، برابر است.

(۱) «الف» - «پ» (۲) «ب» - «ت»

(۳) «الف» - «ب» (۴) «پ» - «ت»

۸۶- کدام مورد درباره الکل‌های یک‌عاملی غیرحلقوی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، درست است؟



(۱) در ساختار آن‌ها، گروه هیدروکسیل وجود دارد و نیروی بین مولکولی غالب آن‌ها، پیوند هیدروژنی است.

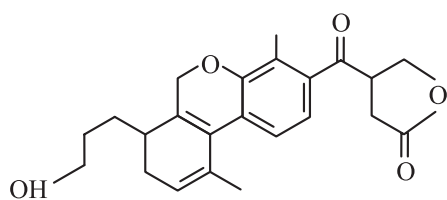
(۲) جرم مولی آن‌ها نسبت به آلکان هم‌کربن خود، ۱۶ گرم بیشتر است.

(۳) اگر به جای گروه عاملی در دومین عضو آن‌ها، گروه کربوکسیل جایگزین شود، پرکاربردترین اسید آلی به دست می‌آید.

(۴) با افزایش شمار اتم‌های کربن در آن‌ها، شمار پیوندهای اشتراکی و خاصیت چربی‌گریزی آن‌ها افزایش می‌یابد.

محل انجام محاسبات

۸۷- کدام گزینه، درباره ترکیب داده شده، نادرست است؟



(۱) هر مول از آن برای سوختن کامل به ۲۷ مول گاز اکسیژن نیاز دارد.

(۲) شمار گروه‌های متیل در این ترکیب، دو برابر شمار این گروه‌ها در ساختار مونومر سازنده سرنگ است.

(۳) تنها دارای گروه‌های عاملی هیدروکسیل، اتری و کتونی است.

(۴) توانایی شرکت در واکنش استری شدن و تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد.

۸۸- برای فرمول‌های $C_6H_8O_2$ و $C_7H_6O_2$ ، به ترتیب از راست به چپ، چند ساختار استری می‌توان در نظر گرفت؟

(۴) ۲، ۳

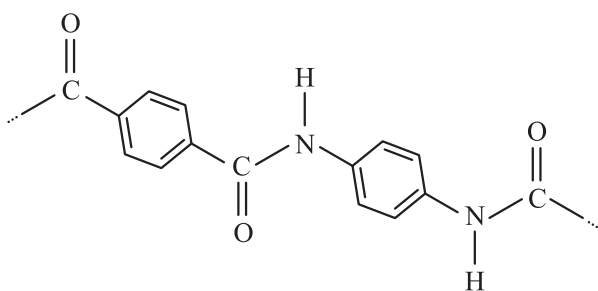
(۳) ۱، ۳

(۲) ۱، ۲

(۱) ۲، ۴

۸۹- برای آبکافت کامل ۱۱/۹ گرم از پلیمر زیر، به تقریب چند گرم آب نیاز است؟

($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16 : g.mol^{-1}$)



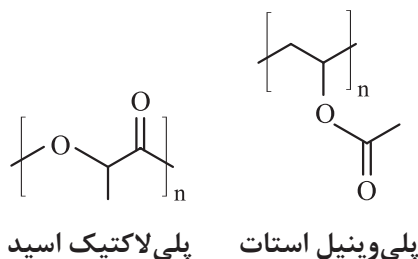
(۱) ۱/۸

(۲) ۲/۷

(۳) ۳/۶

(۴) ۵/۴

۹۰- با توجه به ساختار پلیمرهای داده شده، کدام مورد درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)



پلی لاکتیک اسید

پلی وینیل استات

(۱) وینیل استات و لاکتیک اسید، ایزومر یکدیگرند.

(۲) در فرایند تولید هر دو پلیمر، آب نیز به عنوان فراورده جانبی تولید می‌شود.

(۳) تفاوت جرم مولی وینیل استات با متیل فورمات، برابر ۲۸ گرم است.

(۴) اگر n برابر ۵۰۰ باشد، جرم مولی پلی لاکتیک اسید برابر ۳۶ کیلوگرم بر مول است.

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله اول

پایه دوازدهم

۲۳/ مرداد/ ۱۴۰۵

۱۴۰۵-۰۶

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - بابک سادات - علی شهبازی - مصطفی کرمی - محمد گودرزی - سروش موئینی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه	کیوان صارمی
آمار و احتمال	سروش موئینی
فیزیک	امین امینی - علیرضا جعفری آثار - هادی حمزه پور - نوید شاهی
شیمی	فرشید ابراهیمی - عین الله ابوالفتحی - مهدی براتی - علی رفیعی - معصومه سعیدی - امیر قاسمی پور - محمد قهرمانی نژاد - سروش عبادی - هادی عبادی - یاسر عبداللهی - محمد عظیمیان زواره

نام درس	مستول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل زاده سروش موئینی مازیار احمدی ناو	سید محمدمهدی حسینی عاطفه خان محمدی سهند محمدکریم نژاد
هندسه	کیوان صارمی	کیوان صارمی	کیوان صارمی	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی مریم نظری ابوالفضل ناصری
فیزیک	نوید شاهی	علیرضا جعفری آثار	علیرضا جعفری آثار	علیرضا جباری هادی نجفی	آیدین طهماسبلی زاده امیر محمودی انزابی سعید مجبی فاطمه نجفی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	عماد ربیعی	محمدمهدی کریمیان مرتضی نصیرزاده	سوران اشراقی هادی عبادی علیرضا فرضعلی مهدیس محبت پناه

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور



Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون

بیتا ابراهیمی - علیرضا جعفری - عادل حسینی - مینا کریمزاده

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - زهرا صفری الهه صفری - فاطمه علی اکبری - محیا غنی فرد نادره ناز آوری - ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	مریم حسین زاده - سپیده سخائی - الهام سهرابی طاهره صادق نژاد - مائده صبری - نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند - مهدیه گل پور - دریا لطفی



Azmoon.kheilisabz.com

۱ جمله اول یک دنباله حسابی، $\frac{1}{5}$ جمله سوم آن است. اگر مجموع بیست جمله اول این دنباله برابر 80 باشد، جمله پنجم آن کدام است؟

۱/۵ (۴)

۱/۸ (۳)

۲ (۲)

۲/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

مجموع n جمله اول دنباله حسابی a_n با قدرنسبت d از روابط زیر به دست می آید:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

یا

$$S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

گام اول: جمله عمومی دنباله را $a_n = a_1 + (n-1)d$ می گیریم، داریم:

$$\xrightarrow{a_1 = \frac{1}{5}a_2} a_1 = \frac{1}{5}(a_1 + 2d) \Rightarrow 4a_1 = 2d \Rightarrow a_1 = \frac{d}{2}$$

در این شرایط طبق روابط درس باکس، مجموع n جمله اول $S_n = \frac{d}{2}n^2$ است.

گام دوم: مجموع بیست جمله اول را برابر 80 قرار می دهیم:

$$S_{20} = \frac{d}{2} \times 400 = 80 \Rightarrow d = \frac{2}{5}$$

گام سوم: خواسته سؤال را حساب می کنیم:

$$a_n = \frac{1}{5} + (n-1)\frac{2}{5} = \frac{2n-1}{5} \Rightarrow a_5 = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نیمساز ناحیه‌های اول و سوم دستگاه مختصات، سهمی به معادله $y = mx^2 - x - 17m$ را در دو نقطه قطع می‌کند.

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، طول این دو نقطه بزرگ‌تر از ۳ است؟

خط $y = x$

$$\left(0, \frac{1}{3}\right) \quad (2)$$

$$\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \quad (1)$$

$$\left(0, \frac{3}{4}\right) \quad (4)$$

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right) \quad (3)$$

مشاوره اگر بخواهیم صفرهای یک تابع را بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از یک عدد خاص در نظر بگیریم، سعی می‌کنیم با انتقالی درست، مسئله را صرفاً به مسئله علامت صفرها تغییر دهیم.

پاسخ: گزینه ۴

درس‌Box

اگر α و β جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ، مجموع جواب‌ها و $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$ حاصل ضرب آن‌ها است.

وضعیت صفرهای تابع f با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ مطابق جدول زیر است:

$\Delta < 0$	تابع، صفر حقیقی ندارد.	
$\Delta = 0$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$ تنها صفر تابع است.	
$\Delta > 0$	$P > 0$	هر دو صفر تابع، منفی است: $S < 0$
		هر دو صفر تابع، مثبت است: $S > 0$
	$P < 0$	صفرهای تابع غیرهم علامت‌اند: $S < 0$
		صفرهای تابع غیرهم علامت‌اند: $S > 0$

گام اول: سهمی را با خط $y = x$ تقاطع می‌دهیم:

$$mx^2 - x - 17m = x \Rightarrow mx^2 - 2x - 17m = 0$$

Δ ی معادله بالا همواره مثبت است ($\Delta = 4 + 68m^2 > 0$)، بنابراین خط $y = x$ سهمی را قطعاً در دو نقطه قطع می‌کند. طول نقاط برخورد سهمی $y = mx^2 - 2x - 17m$ را باید بزرگ‌تر از ۳ بگیریم، این یعنی صفرهای تابع f با ضابطه $f(x) = mx^2 - 2x - 17m$ باید بزرگ‌تر از ۳ باشد.

برای سادگی تابع f را ۳ واحد به راست انتقال می‌دهیم؛ $g(x) = f(x-3)$ ، در این صورت باید صفرهای تابع جدید هر دو مثبت باشند.

گام دوم: ضابطه تابع جدید را می‌سازیم:

$$g(x) = m(x-3)^2 - 2(x-3) - 17m = mx^2 - (6m+2)x - 8m+6$$

گام سوم: S و P هر دو باید مثبت باشند:

$$\begin{cases} S = \frac{6m+2}{m} > 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{3} \text{ یا } m > 0 \\ P = \frac{-8m+6}{m} > 0 \Rightarrow 0 < m < \frac{3}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$$

پاسخ خیلی تشریحی

اگر $2a + \sqrt{\frac{14a}{3}} + 11 = 1$ باشد، حاصل $6a + 7$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

پاسخ: گزینه ۲

۲a رو ببر سمت راست و به توان ۲ برسون.

Hint

درس Box

برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ به روش روسی، ابتدا معادله $r^2 + br + ac = 0$ را حل می‌کنیم، سپس جواب‌های به‌دست‌آمده برای r را به a تقسیم می‌کنیم تا مقادیر x به دست آید.

مثال

$$3x^2 + 8x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{روسی}} r^2 + 8r - 9 = (r+9)(r-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -9 \\ r_2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{14a}{3}} + 11 = 1 - 2a$$

با شرط $-\frac{33}{14} \leq a \leq \frac{1}{4}$ ، طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{14a}{3} + 11 = 4a^2 - 4a + 1 \Rightarrow 4a^2 - \frac{26}{3}a - 10 = 0 \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} 6a^2 - 13a - 15 = 0$$

گام دوم: معادله بالا را به روش روسی حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow r^2 - 13r - 90 = (r-18)(r+5) = 0 \Rightarrow r_1 = 18, r_2 = -5 \xrightarrow{\div 6} a_1 = 3, a_2 = -\frac{5}{6}$$

اما a_1 قابل قبول نیست؛ زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کند.

گام سوم: پس $a = -\frac{5}{6}$ و در نتیجه $6a + 7 = 2$ است.

خط ℓ از نقطه $(5, 1)$ می‌گذرد و در یک نقطه نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ را قطع می‌کند. طول نقطه برخورد خط ℓ با محور طول‌ها کدام می‌تواند باشد؟

گلدانی است.

$$\frac{23}{5} (2)$$

$$\frac{21}{5} (4)$$

$$\frac{3}{2} (1)$$

$$\frac{28}{5} (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

نمودار تابع گلدانی:



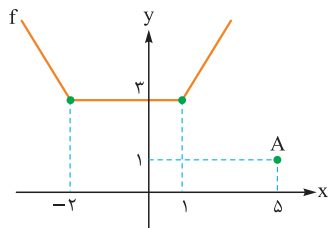
$$f(x) = |x - a| + |x - b|$$

گام اول: شیب خط ℓ را m می‌گیریم، معادله آن به صورت زیر است:

$$y - 1 = m(x - 5)$$

طول نقطه برخورد این خط با محور x ، برابر $x_0 = 5 - \frac{1}{m}$ است.

گام دوم: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است:



برای این که خط ℓ فقط در یک نقطه نمودار تابع f را قطع کند، دو حالت وجود دارد:

الف) خط ℓ از نقطه $(-2, 3)$ نیز بگذرد:

$$\Rightarrow m = \frac{1-3}{5-(-2)} = -\frac{2}{7}$$

ب) شیب خط، عضو مجموعه $(-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$ باشد:

$$m \leq -2 \text{ یا } m > 2$$

گام سوم: در هر حالت گام قبلی، حدود x_0 را حساب می‌کنیم:

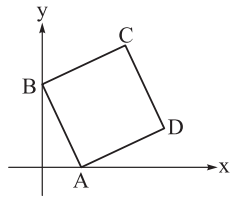
$$\text{الف) } x_0 = 5 - \frac{1}{-\frac{2}{7}} = 5 + \frac{7}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} m \leq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{m} < 0 \Rightarrow 5 < 5 - \frac{1}{m} \leq \frac{11}{2} \\ m > 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{m} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{2} < 5 - \frac{1}{m} < 5 \end{cases}$$

اگر خط ℓ قائم باشد، $x_0 = 5$ است؛ بنابراین مجموعه تمام مقادیر قابل قبول برای x_0 برابر است با: $(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}] \cup \{\frac{17}{2}\}$.

در بین گزینه‌ها، فقط $\frac{23}{5}$ عضو مجموعه بالا است.

۵ در شکل زیر، چهارضلعی ABCD مربع است. اگر $A(1,0)$ و $C(3,4)$ باشد، اختلاف طول و عرض نقطه D کدام است؟



۳ (۲)

۲ (۱)

$\frac{7}{2}$ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

نقطه B رو به دست بیاری، راحت مختصات نقطه D به دست میاد.

Hint

مختصات نقطه وسط پاره خط: اگر نقطه M، نقطه وسط پاره خط AB باشد، داریم:

$$M = \frac{A+B}{2} : \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

نتیجه این نکته این است که در متوازی الاضلاع ABCD داریم:

$$A + C = B + D$$

یعنی در متوازی الاضلاع، مجموع مختصات رئوس مقابل با هم برابر است.

در هر مربع، قطرهای عمود منصف یکدیگرند؛ بنابراین حاصل ضرب شیبهای خطوط شامل قطرهای برابر -۱ می شود.

نکته

گام اول: ابتدا شیب خط شامل قطر AC را می نویسیم:

$$A(1,0), C(3,4) \Rightarrow m_{AC} = \frac{4-0}{3-1} = 2$$

گام دوم: پس شیب خط شامل قطر BD برابر $-\frac{1}{2}$ می شود. نقطه وسط قطر نیز نقطه $O(2,2)$ است:

$$O = \frac{A+C}{2}$$

سپس معادله خط شامل قطر BD را می نویسیم:

$$\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ O(2,2) \end{cases} : y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

اگر مختصات نقاط A و B را $A(\alpha, 0)$ و $B(0, \beta)$ در نظر بگیریم، برای این که چهارضلعی مربع باشد، لازم است که مختصات نقطه C به صورت $C(\beta, \alpha + \beta)$ باشد. به کمک این نکته عرض نقطه B برابر ۳ به دست می آید.

په جور دیگه

گام سوم: بنابراین مختصات نقطه B به صورت $B(0, 3)$ است. حالا طبق درس پاکس داریم:

$$\xrightarrow{A+C=B+D} (1,0) + (3,4) = (0,3) + D \Rightarrow D(4,1)$$

اختلاف طول و عرض نقطه D برابر $4-1=3$ است.

برد تابع f با ضابطه $f(x) = x + [-x]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

(۴) $[-1, 0)$

(۳) $(-1, 0)$

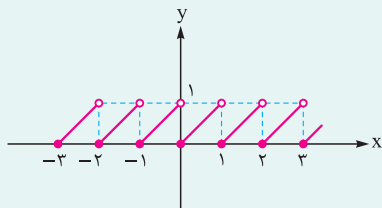
(۲) $[-1, 0]$

(۱) $(-1, 0]$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

تابع معروف $y = x - [x]$:



برد این تابع بازه $[0, 1)$ است.

گام اول: اگر $g(x) = x - [x]$ باشد، $f(x) = -g(-x)$ است:

$$g(-x) = -x - [-x] \Rightarrow -g(-x) = x + [-x]$$

گام دوم: چون برد تابع g بازه $[0, 1)$ است، برد تابع f بازه $[-1, 0)$ است:

$$0 \leq g(-x) < 1 \Rightarrow -1 < -g(-x) \leq 0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۷ دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \begin{cases} a & ; x = 3 \\ \frac{x^2 - b}{x - 3} & ; x \neq 3 \end{cases}$ و $g(x) = x + c$ مساوی‌اند. حاصل $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: دامنه هر دو تابع $\mathbb{R}$ است. برای این که تابع f در $x = 3$ حد داشته باشد، یعنی حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - b}{x - 3}$ موجود باشد، لازم است حد عبارت صورت صفر باشد:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - b) = 9 - b = 0 \Rightarrow b = 9$$

گام دوم: بنابراین ضابطه تابع f به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} a & ; x = 3 \\ x + 3 & ; x \neq 3 \end{cases}$$

این یعنی، برای تساوی دو تابع لازم است که $c = 3$ و $a = g(3) = 6$ باشد:

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{6+9}{3} = 5$$

نمودار تابع خطی f از نقطه $(f(-1), 2)$ و نمودار وارون آن از نقطه $(4, f(1))$ می‌گذرد. مقدار $f^{-1}(-\frac{1}{2})$ کدام است؟

۸

$f(x) = mx + h$	۲ (۲)	۴ (۱)
	-۲ (۴)	-۱ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

اگر نمودار تابع f از نقطه (α, β) بگذرد، نمودار وارون آن از نقطه (β, α) می‌گذرد و بالعکس.

نکته

گام اول: ضابطه تابع را $f(x) = mx + h$ می‌گیریم. در این تابع داریم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$f(1) = m + h, \quad f(-1) = -m + h$$

گام دوم: نمودار تابع f از نقاط $(f(1), 4)$ و $(f(-1), 2)$ عبور می‌کند:

$$\Rightarrow \begin{cases} m(-m + h) + h = 2 \Rightarrow -m^2 + mh + h = 2 \\ m(m + h) + h = 4 \Rightarrow m^2 + mh + h = 4 \end{cases}$$

گام سوم: طرفین معادله بالا را از طرفین معادله پایین کم می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

اما $m = -1$ غیر قابل قبول است؛ زیرا:

$$-1 - h + h = 2 \Rightarrow -1 = 2 \times$$

بنابراین $m = 1$ قابل قبول است و داریم:

$$-1 + h + h = 2 \Rightarrow h = \frac{3}{2}$$

گام چهارم: پس ضابطه تابع f ، $f(x) = x + \frac{3}{2}$ است و داریم:

$$\xrightarrow{f^{-1}(-\frac{1}{2})=\alpha} f(\alpha) = \alpha + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -2$$

۹ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{ax+4}$ و تابع $g = \{(a, 0), (1, b-1), (b, c), (3, -1)\}$ مفروض است. اگر $\frac{f}{g} = \{(1, c), (\frac{4}{3}, 0)\}$ باشد، حاصل $f(-5c)$ کدام است؟

$$5\sqrt{2} \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$2\sqrt{7} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

جبر توابع: مهم‌ترین مسئله در رابطه جبری بین توابع، پیدا کردن دامنه تابع نهایی است:

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: دامنه تابع $\frac{f}{g}$ قطعاً زیرمجموعه دامنه‌های دو تابع f و g است.

$$\Rightarrow \{1, \frac{4}{3}\} \subseteq \{a, 1, b, 3\} \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

دقت کنید که مقدار a نمی‌تواند $\frac{4}{3}$ باشد؛ زیرا در آن صورت $\frac{4}{3}$ عضو دامنه تابع $\frac{f}{g}$ نخواهد بود؛ بنابراین تا این جا داریم:

$$g = \{(a, 0), (1, \frac{1}{3}), (\frac{4}{3}, c), (3, -1)\}$$

گام دوم: صفر تابع $\frac{f}{g}$ همان صفر تابع f است؛ بنابراین $f(\frac{4}{3}) = 0$ است:

$$\Rightarrow f(\frac{4}{3}) = \sqrt{\frac{4}{3}a + 4} = 0 \Rightarrow a = -3$$

پس $f(x) = \sqrt{4-3x}$ است.

گام سوم: حالا تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f}{g} = \{(1, \frac{f(1)}{g(1)}), (\frac{4}{3}, \frac{f(\frac{4}{3})}{g(\frac{4}{3})})\} = \{(1, 3), (\frac{4}{3}, 0)\}$$

بنابراین $c = 3$ است.

گام چهارم: حالا خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$f(-5c) = f(-15) = \sqrt{49} = 7$$

درس Box

۱۰ دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \frac{5x-1}{2x-3}$ و $g(x) = \frac{5}{3}x + m$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1} \circ g)(1) = m$ باشد، کدام می‌تواند باشد؟ $(f^{-1} \circ g^{-1})(\frac{m}{2})$

$\frac{37}{68}$ (۴)

$\frac{23}{2}$ (۳)

$-\frac{2}{23}$ (۲)

$-\frac{68}{37}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



• ضابطه وارون تابع خطی $f(x) = ax + b$ ، $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ است.

• ضابطه وارون تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

• وارون تابع $f \circ g$ ، تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: از تساوی $f^{-1}(g(1)) = m$ ، نتیجه می‌گیریم که $f(m) = g(1)$ است:

$$\Rightarrow \frac{5m-1}{2m-3} = \frac{5}{3} + m \Rightarrow 6m^2 + m - 15 = 15m - 3 \Rightarrow 6m^2 - 14m - 12 = 0 \xrightarrow{\div 2} 3m^2 - 7m - 6 = 0$$

گام دوم: معادله بالا را به روش روسی حل می‌کنیم:

$$3m^2 - 7m - 6 = (m-9)(m+2) = 0 \Rightarrow m_1 = 9, m_2 = -2 \xrightarrow{\div 3} m_1 = 3, m_2 = -\frac{2}{3}$$

گام سوم: در هر دو حالت، خواسته سؤال را حساب می‌کنیم:

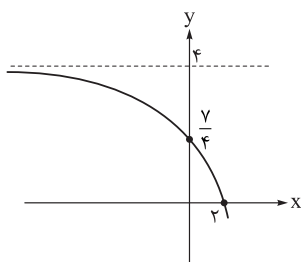
الف) $m = 3$: $g(x) = \frac{5}{3}x + 3 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{3}{5}(x-3)$

$$\Rightarrow (f^{-1} \circ g^{-1})(\frac{m}{2}) = f^{-1}(g^{-1}(\frac{3}{2})) = f^{-1}(-\frac{9}{10}) \xrightarrow{f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{2x-5}} (f^{-1} \circ g^{-1})(\frac{m}{2}) = \frac{37}{68}$$

ب) $m = -\frac{2}{3}$: $g(x) = \frac{5x-2}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{3x+2}{5} \Rightarrow (f^{-1} \circ g^{-1})(\frac{m}{2}) = f^{-1}(g^{-1}(-\frac{1}{3})) = f^{-1}(\frac{1}{5})$

$$\xrightarrow{f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{2x-5}} (f^{-1} \circ g^{-1})(\frac{m}{2}) = \frac{2}{23}$$

۱۱ نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a - b \times c^{ax-b}$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $f(3)$ کدام است؟



(۱) $-\frac{4}{3}$

(۲) $-\frac{5}{3}$

(۳) $-\frac{7}{3}$

(۴) -2

مشاوره در توابع نمایی،

همواره ضابطه $y = \alpha \times \beta^x + \gamma$ را ضابطه استاندارد در نظر بگیرید.

ممکن است α و β خود روابط جداگانه‌ای برحسب پارامترهای مسئله داشته باشند، مثلاً در این

سؤال $f(x) = a - \frac{b}{c} \times (c^a)^x$

است که در آن $\alpha = -\frac{b}{c}$ و $\beta = c^a$ است.

پاسخ: گزینه ۱

در نمودار تابع نمایی $f(x) = a + m \times n^x$ ، برد تابع یکی از بازه‌های $(-\infty, a)$ یا $(a, +\infty)$ است.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق مشاوره، ضابطه تابع f را در نظر می‌گیریم.

$$f(x) = a - k \times \beta^x$$

گام دوم: طبق نکته $a = 4$ است، همچنین $f(0) = \frac{4}{4}$ است:

$$\Rightarrow \frac{4}{4} = a - k \times \beta^0 = a - k \xrightarrow{a=4} k = \frac{9}{4}$$

گام سوم: پس تا این‌جا $f(x) = 4 - \frac{9}{4} \times \beta^x$ است و چون $f(2) = 0$ است، داریم:

$$f(2) = 4 - \frac{9}{4} \times \beta^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = \frac{16}{9} \xrightarrow{\beta > 0} \beta = \frac{4}{3}$$

گام چهارم: در نتیجه، $f(x) = 4 - \frac{9}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^x$ است و داریم:

$$f(3) = 4 - \frac{9}{4} \times \frac{64}{27} = -\frac{4}{3}$$

اگر $\log_2 3 \approx 1/6$ و $\log_4 5 \approx 0/725$ باشد، حاصل $\log_6 15$ تقریباً کدام است؟

$\frac{49}{25}$ (۴)

$\frac{97}{50}$ (۳)

$\frac{246}{125}$ (۲)

$\frac{248}{125}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

ویژگی های لگاریتم:

$$1) \begin{cases} \log_c x + \log_c y = \log_c xy \\ \log_c x - \log_c y = \log_c \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$2) \log_{c^n} x^m = \frac{m}{n} \log_c x$$

$$3) \log_c x = \frac{1}{\log_x c}$$

ویژگی تغییر مبنا:

$$4) \log_y x = \frac{\log_c x}{\log_c y} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \log_{x_1} x_1 \times \log_{x_2} x_2 \times \log_{x_3} x_3 \times \dots \times \log_{x_{n+1}} x_n = \log_{x_{n+1}} x_1$$

گام اول: ابتدا $\log_3 5$ را به دست می آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\log_4 5 = \log_{2^2} 5 = \frac{1}{2} \log_2 5 \approx 0/725 \Rightarrow \log_2 5 \approx 1/45$$

و طبق نتیجه ویژگی (۴) درس باکس، $\log_2 5$ را به دست می آوریم:

$$\log_2 5 = \log_2 5 \times \log_2 3 \approx 1/45 \times 1/6 = 2/32$$

گام دوم: خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$\log_6 15 = \log_{2 \times 3} (3 \times 5) = \frac{1}{2} (\log_2 3 + \log_2 5) \Rightarrow \log_6 15 \approx \frac{1}{2} (1/6 + 2/32) = \frac{1}{2} (3/92) = 1/96 = \frac{49}{25}$$

۱۳

اگر $x = \alpha$ جواب معادله $\log_{\Delta}(x+2) + \log_{\Delta}(x^2+x+1) = 2$ باشد، حاصل $[2\alpha]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

۵ (۴

۴ (۳

۳ (۲

۲ (۱

پاسخ: گزینه ۲

دوتا لگاریتم سمت چپ رو یکی کن.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\log_{\Delta}((x+2)(x^2+x+1)) = 2 \Rightarrow \log_{\Delta}(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = 2$$

و طبق ویژگی های لگاریتم داریم:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = \Delta^2 = 25$$

گام دوم: به کمک اتحاد مکعب دوجمله ای، معادله زیر را داریم:

$$(x+1)^3 + 1 = 25 \Rightarrow (x+1)^3 = 24 \Rightarrow x = \sqrt[3]{24} - 1$$

گام سوم: پس $\alpha = \sqrt[3]{24} - 1$ است. $\sqrt[3]{3} \approx 1/4$ از $\sqrt{2} \approx 1/4$ بزرگ تر و از $\frac{3}{4}$ کوچک تر است؛ بنابراین داریم:

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \frac{3}{4} \Rightarrow \underbrace{\sqrt[3]{24} - 1}_{1/8} < \alpha < 2 \Rightarrow 3/6 < 2\alpha < 4 \Rightarrow [2\alpha] = 3$$

چرا $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \frac{3}{4}$ ؟

نکته

$$\begin{cases} \sqrt[3]{3} > \sqrt{2} \xrightarrow[\text{ریشه ششم}]{\text{توان ۶}} 9 > 8 \quad \checkmark \\ \sqrt[3]{3} < \frac{3}{4} \xrightarrow[\text{ریشه سوم}]{\text{توان ۳}} 3 < \frac{27}{8} \Leftrightarrow 24 < 27 \quad \checkmark \end{cases}$$

۱۴ انتهای کمان α روی دایره مثلثاتی در ناحیه دوم دستگاه مختصات قرار گرفته و $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ است. حاصل عبارت

$$\frac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) - \cos(\alpha + \pi)}{|\cot^2 \alpha - 1|} \quad \text{کدام است؟}$$

$$\frac{2\sqrt{2}-1}{21} \quad (2)$$

$$-\frac{1+2\sqrt{2}}{21} \quad (1)$$

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{21} \quad (4)$$

$$\frac{1-2\sqrt{2}}{21} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \quad \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha \quad \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم قرینه:

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha \quad \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha \quad \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$$

گام اول: ابتدا مقادیر $\cos \alpha$ و $\cot \alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}{\frac{1}{9} + \cos^2 \alpha = 1} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

در نتیجه، $\cot \alpha = -2\sqrt{2}$ است.

گام دوم: طبق درس باکس داریم:

$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

حالا می‌توانیم حاصل عبارت را حساب کنیم:

$$\frac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) - \cos(\alpha + \pi)}{|\cot^2 \alpha - 1|} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}}{|(-2\sqrt{2})^2 - 1|} = \frac{1-2\sqrt{2}}{21}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۵

نمودار تابع f را در راستای محور طول‌ها، $\frac{\pi}{4}$ واحد به چپ و در راستای محور عرض‌ها، $\frac{1}{4}$ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

نمودار نهایی بر نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ منطبق شده است. حاصل $f(-\frac{5\pi}{3})$ کدام است؟

$$\sqrt{2} + \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

$$-\sqrt{2} + \frac{3}{4} \quad (4)$$

$$-\sqrt{2} + \frac{1}{4} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

Hint گ برعکس انتقال بده تا به f برسی.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: اگر نمودار تابع g را $\frac{\pi}{4}$ واحد به راست و $\frac{1}{4}$ واحد به پایین انتقال دهیم، به نمودار تابع f می‌رسیم:

$$f(x) = g(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = 2 \cos(x - \frac{7\pi}{12}) + \frac{1}{4}$$

گام دوم: حال، خواسته سؤال را حساب می‌کنیم:

$$f(-\frac{5\pi}{3}) = 2 \cos(-\frac{27\pi}{12}) + \frac{1}{4} = 2 \cos(\frac{9\pi}{4}) + \frac{1}{4} = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{4} = \sqrt{2} + \frac{1}{4}$$

۱۶ اگر $\tan \frac{\alpha}{2} - \cot \frac{\alpha}{2} = -3$ باشد، حاصل $\sin 2\alpha$ کدام است؟

$-\frac{5}{13}$ (۴)

$\frac{5}{13}$ (۳)

$-\frac{12}{13}$ (۲)

$\frac{12}{13}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

اتحادهای مثلثاتی دو برابر کمان:

درس Box

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \Rightarrow \cos 2\theta = \begin{cases} 2 \cos^2 \theta - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\cot \theta - \tan \theta = 2 \cot 2\theta$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در ابتدا $\cot \alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\cot \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} = 3 \Rightarrow 2 \cot \alpha = 3 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{3}{2}$$

یعنی $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ است.

گام دوم: حالا از اتحاد $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{12}{13}$$

تابع f با ضابطه $f(x) = |[x^2] - \log_{\sqrt{2}} x|$ مفروض است. حاصل $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x)$ کدام است؟ () ، نماد

جزء صحیح است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا داریم:

$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_{\sqrt{2}^{-1}} x = -\log_{\sqrt{2}} x$$

$$\Rightarrow f(x) = |[x^2] + \log_{\sqrt{2}} x|$$

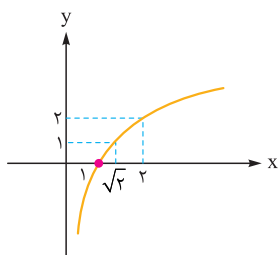
گام دوم: در یک همسایگی چپ $x = \sqrt{2}$ ، $[x^2] = 1$ است؛ زیرا:

$$x < \sqrt{2} \Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow [x^2] = 1$$

همچنین در یک همسایگی راست $x = \sqrt{2}$ داریم:

$$x > \sqrt{2} \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow [x^2] = 4$$

گام سوم: حالا براساس نمودار تابع $y = \log_{\sqrt{2}} x$ می‌توانیم حاصل‌حدها را حساب کنیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = |1 + 1| = 2 \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = |4 + 2| = 6 \end{cases}$$

در نتیجه، خواسته سؤال $-4 = 2 - 6$ است.

۱۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x+1} - [x]}{\sqrt[3]{x-2} - [\frac{x}{4}]}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{3}{2}$

مشاوره در محاسبه حدها، همیشه در ابتدا مقدار عبارت‌های جزء صحیح و علامت عبارت‌های قدرمطلق را تعیین کنید.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** در یک همسایگی چپ $x = 3$ داریم:

$$[\frac{x}{4}] = [1/\delta] = 1$$

$$[3^-] = 2$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt[3]{x-2} - 1}$$

پس باید حد زیر را حساب کنیم:

گام دوم: از مزدوج صورت و چاق مخرج استفاده می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt[3]{x-2} - 1} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} \times \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1}{\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-2)} + 1} \right)$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3(x-3)}{4(x-3)} = \frac{3}{4}$$

۱۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3} \sin x + 2 \cos(x + \frac{\pi}{3})}{2x - \pi}$ کدام است؟

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$-\sqrt{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

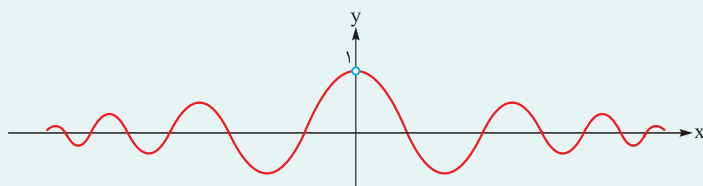
-1 (۱)

پاسخ: گزینه ۲

Hint $x - \frac{\pi}{2}$ رو متغیر t بگیریم.

درس Box

نمودار تابع $y = \frac{\sin x}{x}$



با توجه به نمودار، مشخص است که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ است.

پاسخ خیلی تشریحی گام اول: $x - \frac{\pi}{2}$ را متغیر جدید t می‌گیریم، پس اگر $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 0$:

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \sin(t + \frac{\pi}{2}) + 2 \cos(t + \frac{5\pi}{6})}{2t}$$

گام دوم: به کمک اتحادهای مثلثاتی، صورت کسر بالا را ساده می‌کنیم:

$$\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t$$

$$\cos(t + \frac{5\pi}{6}) = \cos t \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \sin t \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \cos t - \sqrt{3} \cos t - \sin t}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{2t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -\frac{1}{2}$$

۲۰ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - [x]} & ; -\frac{1}{2} \leq x < a \\ \frac{x+b}{2x+1} & ; x \geq a \end{cases}$ روی دامنه‌اش پیوسته است. اگر a عددی حسابی باشد،

$a \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

حاصل $f(\frac{a-b}{4})$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{4} & (۲) \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & (۴) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \frac{3}{2} & (۱) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & (۳) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۲

تابع $y = [x]$ تو نقاط صحیح ناپیوسته‌ست.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓
گام اول: در ضابطه بالایی، اولین نقطه‌ای که پیوستگی تابع را از بین می‌برد، $x = 0$ است؛ بنابراین برای این که این نقطه را از دامنه ضابطه بالایی حذف کنیم، لازم است که $a \leq 0$ باشد. از آنجا که طبق فرض، a عددی حسابی است، پس $a = 0$:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - [x]} & ; -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ \frac{x+b}{2x+1} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

گام دوم: تابع باید در $x = 0$ هم پیوسته باشد:

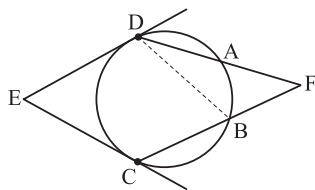
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{2x - [x]} = \sqrt{-(-1)} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+b}{2x+1} = b \end{cases} \xrightarrow{\text{پیوستگی}} b = 1$$

گام سوم: در نهایت داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - [x]} & ; -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ \frac{x+1}{2x+1} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{a-b}{4}\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \sqrt{2\left(-\frac{1}{4}\right) - \left[-\frac{1}{4}\right]} + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در شکل زیر، $\widehat{DC} = 3\widehat{AB}$ و $\hat{E} = \hat{F}$ است. زاویه $\widehat{DBC}$ چند درجه است؟



(۱) ۶۲ / ۵

(۲) ۶۵

(۳) ۶۷ / ۵

(۴) ۶۹

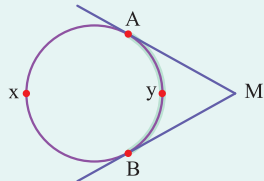
پاسخ: گزینه ۳

(۱) شش نوع زاویه مهم در دایره وجود دارد که همه آن‌ها را در جدول زیر برایتان آورده‌ایم.

درس Box

نوع زاویه	تعریف	شکل	اندازه زاویه	مثال
مرکزی	زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و اضلاعش شعاع‌های دایره هستند.		$\alpha = \widehat{AB}$	
محاطی	زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاعش وترهایی از دایره هستند.		$\alpha = \frac{\widehat{AC}}{2}$	
ظلی	زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن وتر از دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است.		$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$	
زاویه بین دو وتر	زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره ساخته می‌شود.		$\alpha = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$	
زاویه بین امتداد دو وتر	زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر در خارج دایره ساخته می‌شود.		$\alpha = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2}$	
زاویه بین دو مماس	زاویه‌ای که از برخورد دو مماس در خارج دایره ساخته می‌شود.		$\alpha = \frac{\widehat{AxB} - \widehat{AyB}}{2}$	
زاویه بین امتداد و وتر و مماس	زاویه‌ای که از برخورد امتداد یک وتر و مماس در خارج دایره ساخته می‌شود.		$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$	

(۲) زاویه بین دو مماس ($\hat{M}$ در شکل زیر) و کمان کوچکی که در دایره می‌سازد:

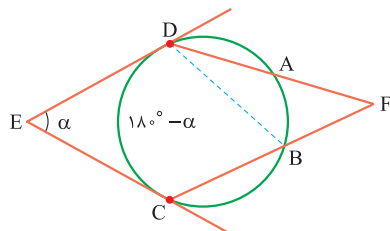


$$\hat{M} + \widehat{AyB} = 180^\circ$$

کمان کوچک
هم $\widehat{AyB}$
کمان بزرگ
که کاری
بهاش نداریم!

زاویه $\hat{M}$ و $\widehat{AyB}$ ، مکمل یکدیگرند (مجموعشان 180° درجه‌س).

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در شکل زیر، $\hat{E}$ زاویه بین دو مماس است، پس طبق مورد (۲) درس باکس می‌توانیم فرض کنیم:



$$\hat{E} = \alpha, \quad \widehat{DC} = 180^\circ - \alpha$$

گام دوم: از این که $\widehat{DC} = 3\widehat{AB}$ است، نتیجه می‌گیریم که:

$$\widehat{AB} = \frac{180^\circ - \alpha}{3} = 60^\circ - \frac{\alpha}{3}$$

گام سوم: $\hat{F}$ ، زاویه بین امتداد دو وتر است، پس:

$$\hat{F} = \frac{\widehat{DC} - \widehat{AB}}{2} = \frac{(180^\circ - \alpha) - (60^\circ - \frac{\alpha}{3})}{2} = \frac{120^\circ - \frac{2\alpha}{3}}{2} = 60^\circ - \frac{\alpha}{3} \quad (2)$$

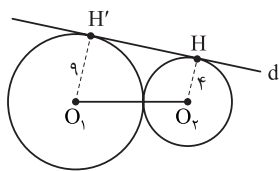
گام چهارم: به گفته سؤال $\hat{E}$ و $\hat{F}$ برابرند:

$$\hat{E} = \hat{F} \xrightarrow{(1), (2)} \alpha = 60^\circ - \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

گام پنجم: طبق شکل، $\widehat{DBC}$ زاویه محاطی است، پس برابر است با نصف کمان مقابلش:

$$\widehat{DBC} = \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 67.5^\circ$$

در شکل زیر، خط d بر دایره‌های $C_1(O_1, 9)$ و $C_2(O_2, 4)$ مماس است. مساحت چهارضلعی O_1O_2HH' کدام است؟



۲۸ (۱)

۳۹ (۲)

۵۶ (۳)

۷۸ (۴)

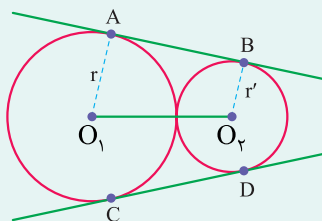
پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) برای محاسبه طول مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره به شعاع‌های r و r' که طول خط‌المركزیشان $OO' = d$ است؛ از این رابطه‌ها استفاده کنید:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (r - r')^2} \quad \text{و} \quad \text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (r + r')^2}$$

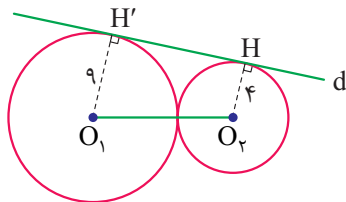
(۲) اگر دو دایره با شعاع‌های r و r' مثل شکل زیر مماس خارج بودند، به جای این‌که از روابط بالا طول مماس مشترک‌هایشان را پیدا کنید، سریعاً بگویید طول مماس مشترک خارجی‌شان $2\sqrt{rr'}$ و طول مماس مشترک داخلی‌شان صفر است.



$$AB = CD = 2\sqrt{rr'} \quad \text{و} \quad \text{طول مماس مشترک داخلی} = 0$$

مثلاً اگر دو دایره با شعاع ۹ و ۴ مماس خارج باشند، طول مماس مشترک خارجی‌شان $2\sqrt{9 \times 4} = 12$ و طول مماس مشترک داخلی‌شان صفر است.

گام اول: در شکل زیر، شعاع‌های O_1H' و O_2H بر مماس مشترک دو دایره عمودند، پس این دو شعاع موازی‌اند و چهارضلعی O_1O_2HH' دوزنقه است، ارتفاعش هم HH' است.



گام دوم: HH' همان طول مماس مشترک دو دایره مماس خارج با شعاع‌های ۴ و ۹ است که طبق مورد (۲) درس‌باکس باید بشود:

$$HH' = 2\sqrt{O_1H' \times O_2H} \Rightarrow HH' = 2\sqrt{4 \times 9} = 2\sqrt{36} = 12$$

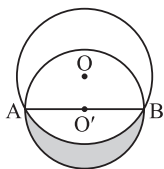
گام سوم: مساحت دوزنقه O_1O_2HH' می‌شود:

$$S = HH' \times \frac{O_1H' + O_2H}{2} = 12 \times \frac{9 + 4}{2} = 78$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۲۳

دایره‌های به مراکز O و O' مطابق شکل مفروض‌اند. اگر شعاع دایره‌ها برابر ۱ و $\frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، مساحت ناحیه رنگی چه قدر از $\frac{\pi}{4}$ بیشتر است؟



$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۳)$$

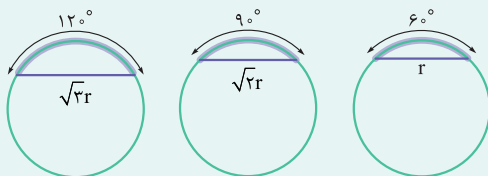
پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) در مورد قطاع و قطعه مطالب جدول زیر را بلد باشید:

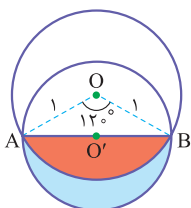
مساحت	شکل	تعریف	
$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$		سطح محصور بین دو شعاع از یک دایره	قطاع
$S = \underbrace{\frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2}_{S_{\text{قطاع } AOB}} - \underbrace{\frac{1}{2} r^2 \sin \alpha}_{S_{\Delta AOB}}$		سطح محصور بین یک وتر و کمان متناظرش در یک دایره	قطعه

(۲) بعضی وقت‌ها به جای این‌که اندازه یک کمان را بدهند، طول وتر متناظر با آن کمان را می‌دهند. در یک دایره به شعاع r ، اندازه کمان متناظر با وترهایی که طولشان r ، $\sqrt{2}r$ و $\sqrt{3}r$ هست مطابق شکل‌های زیر به راحتی پیدا می‌شوند:



$$r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

گام اول: شعاع دایره کوچک‌تر برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است، پس AB که قطر دایره کوچک‌تر است می‌شود: طول وتر AB ، برابر شعاع دایره بزرگ‌تر شود، پس طبق مورد (۲) درس باکس می‌توانیم بگوییم:



$\widehat{AB} = 120^\circ$ است. چون در شکل بالا $\widehat{AOB}$ برای دایره بزرگ‌تر زاویه مرکزی است؛ پس:

گام دوم: اگر مساحت ناحیه قرمز را از نیم‌دایره به قطر AB کم کنیم به مساحت قسمت آبی می‌رسیم.

● مساحت قطعه قرمز:

$$S = S_{\text{قطاع } OAB} - S_{\Delta AOB} = \left(\frac{120^\circ}{360^\circ} \pi (1)^2 \right) - \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 120^\circ \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

● مساحت نیم‌دایره به قطر AB :

$$S_{\text{نیم‌دایره}} = \frac{\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{2} = \frac{3}{8} \pi$$

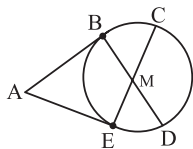
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام سوم: خواسته سؤال می شود:

$$S_{\text{آبی رنگ}} = S_{\text{نیم دایره}} - S = \left(\frac{3}{8}\pi\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\downarrow$
 مقداری که
 از $\frac{\pi}{24}$
 بیشتر است.

در شکل زیر، AB و AE بر دایره مماس‌اند و نقطه M، وسط وتر BD است. اگر $ME = 4$ ، $MC = 9$ و محیط چهارضلعی ABME برابر ۲۶ واحد باشد، طول AB کدام است؟



(۱) ۷ / ۵

(۲) ۸

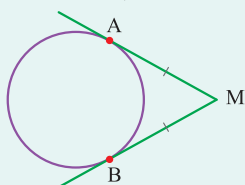
(۳) ۸ / ۵

(۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

(۱) طبق شکل زیر، از هر نقطه خارج دایره مثل M، می‌توانیم دو مماس بر دایره رسم کنیم. طول این دو مماس با هم برابر است.

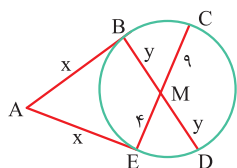


(۲) در هر دایره وقتی دو وتر یا امتدادشان با هم برخورد می‌کنند، بین تکه‌هایی که می‌سازند، یک سری رابطه برقرار است. مشابه این رابطه‌ها بین تکه‌هایی که از برخورد امتداد یک وتر و مماس ساخته می‌شود هم وجود دارد. خوب است که این رابطه‌ها را با هم در جدول زیر ببینیم:

			شکل
$MT^2 = MC \times MD$	$MA \times MB = MC \times MD$	$MA \times MB = MC \times MD$	رابطه

گام اول: به گفته سؤال در شکل زیر، M وسط BD است؛ پس فرض می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$MB = MD = y$$

از طرفی مماس‌هایی که از نقطه A بر دایره کشیده‌ایم طولشان برابرند؛ پس فرض می‌کنیم:

$$AB = AE = x$$

گام دوم: در شکل بالا، وترهای BD و CE، داخل دایره همدیگر را قطع کردند، پس طبق روابط طولی در دایره می‌توانیم بنویسیم:

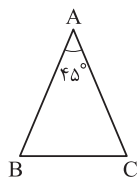
$$MB \times MD = ME \times MC \Rightarrow y \times y = 4 \times 9 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$$

گام سوم: محیط چهارضلعی ABME برابر ۲۶ است؛ پس:

$$x + x + \underset{6}{y} + 4 = 26 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

طول AB همان $x = 8$ است.

مطابق شکل، نقطه M خارج مثلث ABC با زاویه رأس ۴۵° درجه است. نقطه M را ابتدا نسبت به ضلع AC بازتاب می‌دهیم تا نقطه M' و سپس M' را نسبت به ضلع AB بازتاب می‌دهیم تا نقطه M'' به دست آید. اگر فاصله نقاط M و M'' برابر ۶ باشد، مساحت مثلث AMM'' کدام است؟



۱۸ (۲)

۹ (۱)

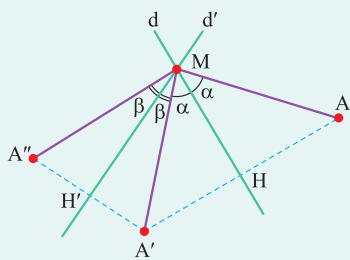
۲۴ (۴)

۱۲ (۳)

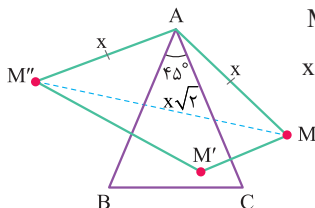
پاسخ: گزینه ۱

درس Box

به نقطه A و خط‌های متقاطع d و d' در شکل زیر توجه کنید. در این شکل اول A را نسبت به d و بعد A' را نسبت به d' بازتاب می‌دهیم تا به نقطه A'' برسیم. با این کار، اولاً $MA = MA' = MA''$ و دوماً $\widehat{AMH} = \widehat{A''MH'}$ می‌شود. حالا با کمی دقت باید متوجه بشوید که نقطه A را می‌توان با دوران به مرکز M و زاویه $2(\alpha + \beta)$ روی A'' تصویر کرد.



بنابراین ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، یک دوران است. دورانی با زاویه دو برابر زاویه بین دو محور، به مرکز نقطه برخورد محورها.



گام اول: باتوجه به درس باکس می‌توانیم بگوییم، در شکل مقابل $\widehat{MAM''} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

و در نتیجه مثلث AMM'' ، مثلثی قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است؛ پس اگر طول ساقش را x

بگیریم، طبق فیثاغورس طول MM'' می‌شود $x\sqrt{2}$.

گام دوم: به گفته سؤال $MM'' = 6$ است؛ پس:

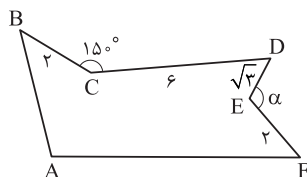
$$x\sqrt{2} = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

مساحت مثلث AMM'' می‌شود:

$$S = \frac{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9 \times 2}{2} = 9$$

پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر، می‌خواهیم بدون آن که محیط چندضلعی تغییر کند، مساحتش را افزایش دهیم. اگر میزان افزایش مساحت ۹ واحد سطح باشد، زاویه α چند درجه است؟ ($\alpha > 90^\circ$)



۱) 15°

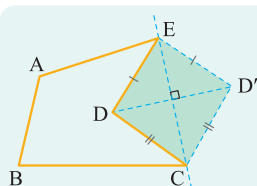
۲) 135°

۳) 120°

۴) 165°

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

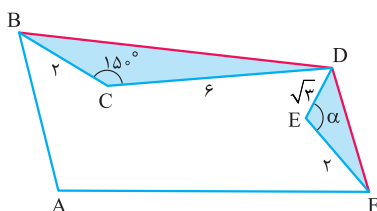


مسائل هم‌محیطی: به پنج‌ضلعی ABCDE در شکل مقابل نگاه کنید. می‌خواهیم مساحت این پنج‌ضلعی را افزایش بدهیم، به شرطی که محیطش و تعداد اضلاعش تغییر نکند. برای این کار، رأس زاویه بزرگ‌تر از 180° (رأس D در شکل مقابل) را نسبت به خطی که از رأس‌های کناری آن (خط گذرنده از C و E) می‌گذرد، بازتاب می‌دهیم تا به نقطه D' برسیم.

با نگاه دوباره به شکل متوجه می‌شویم که پنج‌ضلعی ABCD'E همونیه که دنبالشیم، چون با این‌که محیطش تغییر نکرده (یادت نرفته که بازتاب طولی بودش؟)، ولی مساحتش به اندازه مساحت ناحیه رنگی بیشتر شده. به زبون خودمونی، کلید حل مسئله‌های هم‌محیطی، برطرف کردن فرورفتگی‌های چندضلعی با بازتاب (است مثلاً تو شکل بالا، فرورفتگی D رو با بازتاب برطرف کردیم).

مقدار افزایش مساحت در مسئله‌های هم‌محیطی، دو برابر مساحت مثلثی است که توسط رأس زاویه بازتاب‌شده و محور بازتاب ساخته می‌شود. مثلاً در شکل بالا مقدار افزایش مساحت برابر $2S_{EDC}$ است.

طبق نکته‌ای که در درس‌باکس بالا گفتیم، میزان افزایش مساحت دو برابر مجموع مساحت‌های رنگی است؛ پس:



$$2(S_{BCD} + S_{DEF}) = 9 \Rightarrow 2\left[\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin 15^\circ\right) + \left(\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \sin \alpha\right)\right] = 9$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 6 + 2\sqrt{3} \sin \alpha = 9 \Rightarrow 2\sqrt{3} \sin \alpha = 3 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \text{ یا } 120^\circ$$

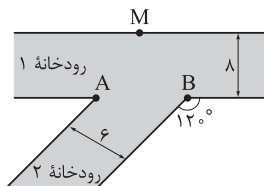
چون α منفرد است، پس $\alpha = 120^\circ$.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، سه اسکله بسازیم. جای دو اسکله A و B مطابق شکل مشخص است. اگر اسکله M را در نقطه‌ای از ساحل بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM، کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند،

کم‌ترین مقدار $AM + MB$ کدام است؟



(۱) $2\sqrt{19}$

(۲) $4\sqrt{3}$

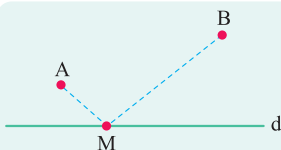
(۳) $8\sqrt{3}$

(۴) $4\sqrt{19}$

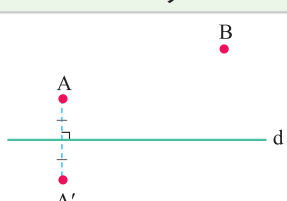
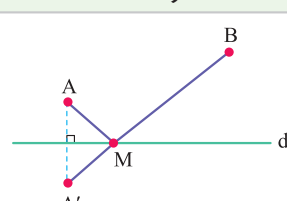
پاسخ: گزینه ۴

درس: Box

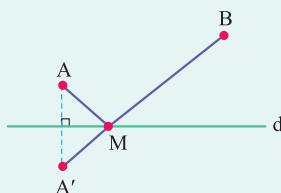
مسئله هرون: در این مسئله، دو نقطه A و B در یک طرف خط d قرار دارند (شکل مقابل).



می‌خواهیم نقطه‌ای مثل M را روی خط d پیدا کنیم که مسیر AMB (همون $AM + MB$)، کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد. نقطه M مطابق جدول زیر در دو مرحله پیدا می‌شود:

مرحله (۱)	مرحله (۲)
	
بازتاب یکی از نقاط مثلاً A را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم تا به نقطه A' برسیم.	نقطه A' را به B وصل می‌کنیم تا d را در نقطه M قطع کند. M همان نقطه‌ای است که به دنبالش هستیم.

در مسئله هرون (۱) (شکل زیر) همواره $AM + MB = A'B$ است؛ یعنی به جای محاسبه $AM + MB$ می‌توانیم $A'B$ را به دست آوریم.

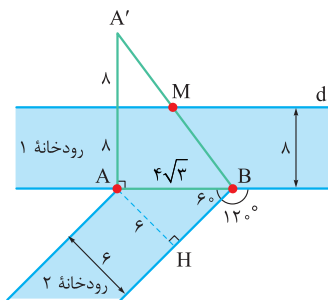


نکته

گام اول: با مسئله هرون طرفیم، طبق درس‌بکس، نقطه A را نسبت به d بازتاب می‌دهیم تا به نقطه A' برسیم. در مثلث قائم‌الزاویه ABH، برای زاویه 60° ، سینوس می‌نویسیم تا به طول AB برسیم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

گام دوم: طبق درس‌بکس، در شکل مقابل رابطه $AM + MB = A'B$ برقرار است:



پس برای محاسبه خواسته مسئله کافی است طول A'B را به کمک فیثاغورس در مثلث AA'B پیدا کنیم:

$$A'B = \sqrt{16^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{4^2(4^2 + 3)} = 4\sqrt{19}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مثث ABC با طول اضلاع $AB = 5$ ، $AC = \sqrt{79}$ و $BC = 8$ مفروض است. اگر AM میانه وارد بر ضلع BC باشد، مقدار $\cos \hat{BAM}$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{24}{25}$ (۳)

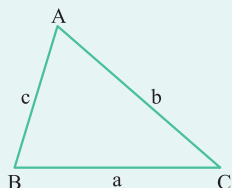
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) قضیه کسینوسها: به مثث ABC با ضلعهای a، b و c در شکل زیر نگاه کنید. طبق قضیه کسینوسها بین a، b و c و کسینوس زاویههای داخلی مثث، این رابطهها برقرار است:

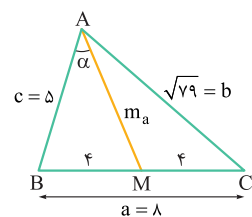


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

(۲) قضیه میانهها: با این قضیه یاد می گیرید که وقتی طول ضلعهای یک مثث را داشته باشید، چه طور باید طول میانههایش را به دست بیاورید.

جدول زیر را ببینید:

			شکل
$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$	$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$	$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$	رابطه



گام اول: شکل مسئله به صورت مقابل است: پاسخ خیلی تشریحی ✓

طول میانه AM را حساب می کنیم:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 79 + 25 = 2m_a^2 + \frac{64}{2} \Rightarrow 2m_a^2 = 72 \Rightarrow m_a^2 = 36 \Rightarrow m_a = 6$$

گام دوم: الان طول هر سه ضلع مثث ABM را داریم، پس می توانیم به کمک قضیه کسینوسها، کسینوس هر زاویه ای از آن را پیدا کنیم. این جا α را می خواهیم، پس می نویسیم:

$$MB^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \times AM \times \cos \alpha \Rightarrow 4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 60 \cos \alpha = 45 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

در مثلثی با ضلع‌های ۴، ۷ و ۱۰، نیمساز زاویه متوسط را رسم می‌کنیم، محیط کوچک‌ترین مثلث حاصل از این رسم کدام است؟

$$۶ + \sqrt{۳۰} \quad (۲)$$

$$۵ + ۳\sqrt{۳۳} \quad (۱)$$

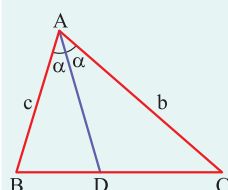
$$۵ + ۲\sqrt{۷} \quad (۴)$$

$$۶ + ۵\sqrt{۲} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

(۱) قضیه نیمسازهای داخلی مثلث: این قضیه در مورد تکه‌هایی که هر نیمساز داخلی روی ضلع مقابلش درست می‌کند حرف دارد؛ حرفش هم این است که طول این تکه‌ها متناسب با طول ضلع‌های کناری‌شان هستند. این یعنی در مثلث زیر که نیمساز داخلی،

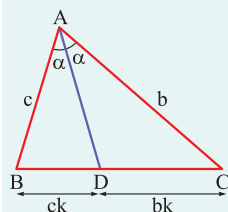


روی ضلع مقابلش، تکه‌های BD و DC را ایجاد کرده است، می‌توانیم بنویسیم: طول ضلع کناری BD، c هستند.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$$

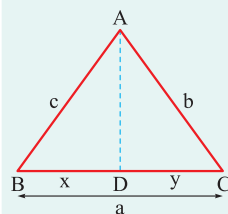
طول ضلع کناری DC، b هستند.

برای این که کارتان در محاسبات راحت‌تر بشود، رابطه $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$ را به صورت $BD = ck$ و $DC = bk$ روی شکل بنویسید.



برای درک بهتر، شکل مقابل را ببینید:

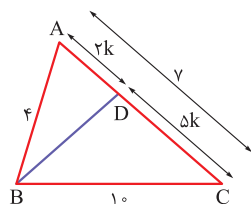
(۲) هر وقت طول ۳ ضلع مثلث (a، b و c) معلوم بود و طول یکی از نیمسازهای داخلی را می‌خواستید، اول طول تکه‌هایی که آن نیمساز روی ضلع مقابلش ایجاد کرده (x و y) را پیدا کنید و بعد، از این رابطه استفاده کنید:



$$[حاصل ضرب تکه‌هایی که نیمساز روی ضلع مقابلش درست می‌کند] - [حاصل ضرب ضلع‌های کناری نیمساز] = (طول نیمساز)^2$$

$$xy - bc = AD^2$$

گام اول: شکل مسئله به صورت زیر است. نیمساز زاویه متوسط، بر ضلع متوسط، یعنی ضلع به طول ۷ وارد می‌شود. برای نیمساز BD در شکل، طبق مورد (۱) درس باکس می‌توانیم بنویسیم:



$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} AD = 2k \\ DC = 5k \end{cases}$$

گام دوم: جمع طول AD و DC باید بشود طول AC:

$$2k + 5k = 7 \Rightarrow 7k = 7 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \begin{cases} AD = 2k = 2 \\ DC = 5k = 5 \end{cases}$$

گام سوم: مثلث کوچک حاصل از رسم BD همان مثلث ABD است که محیطش را می‌خواهیم. برای رسیدن به محیط طول نیمساز BD را لازم داریم که طبق مورد (۲) درس باکس می‌شود:

$$BD^2 = AB \times BC - AD \times DC \Rightarrow BD^2 = (4 \times 10) - (2 \times 5) = 30 \Rightarrow BD = \sqrt{30}$$

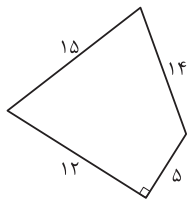
پس محیط مثلث ABD می‌شود:

$$محیط = AB + BD + AD = 4 + \sqrt{30} + 2 = 6 + \sqrt{30}$$



پاسخ خیلی تشریحی

۳۰. مساحت چهارضلعی شکل زیر کدام است؟



۱۱۴ (۱)

۱۲۰ (۲)

۱۳۲ (۳)

۱۴۴ (۴)

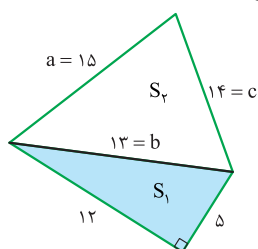
پاسخ: گزینه ۱

درس Box

قضیه هرون: اگر P نصف محیط مثلثی با ضلع‌های a ، b و c باشد، مساحت آن برابر می‌شود با:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

گام اول: با افزودن پاره‌خط سیاه در شکل زیر، چهارضلعی را به دو مثلث تبدیل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه آبی، با توجه به این‌که ۵، ۱۲ و ۱۳ فیثاغورسی‌اند، طول پاره‌خط سیاه می‌شود ۱۳. مساحت مثلث آبی هم می‌شود:



$$S_1 = \frac{5 \times 12}{2} = 30$$

گام دوم: مساحت مثلث با ضلع‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را به کمک قضیه هرون حساب می‌کنیم. اول P را باید به دست آوریم:

$$P = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

حالا فرمول هرون:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{21 \times (21-15)(21-13)(21-14)} =$$

$$\sqrt{\overset{7 \times 3}{21} \times \overset{6}{6} \times \overset{8}{8} \times \overset{7}{7}} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 16} = 7 \times 3 \times 4 = 84$$

گام سوم: مساحت چهارضلعی می‌شود:

$$S_1 + S_2 = 30 + 84 = 114$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر $r \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim r$ درست باشد، کدام نتیجه گیری درست است؟

- (۱) دقیقاً دو تا از گزاره های p ، q و r درست اند.
(۲) حداکثر دو تا درست اند.
(۳) فقط یکی از آن ها درست است.
(۴) حتماً هر سه نادرست اند.

پاسخ: گزینه ۲

کریس Box

گزاره: جمله خبری که درست یا نادرست است. (درست: T و نادرست: F)

ارزش گزاره: ارزش هر گزاره ۲ حالت دارد (درست یا نادرست). برای n گزاره، 2^n ارزش مختلف داریم.

اعمال روی گزاره ها:

نماد	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
عنوان فارسی	نقیض	ترکیب فصلی «یا»	ترکیب عطفی «و»	ترکیب شرطی	ترکیب دوشروطی
چه زمانی درست است؟	p نادرست باشد.	بین p و q حداقل یکی درست باشد.	p و q هر دو درست باشند.	هر دو درست یا p نادرست باشد.	p و q ارزش یکسان داشته باشند.

گزاره های خاص:

گزاره همواره درست را با T نشان می دهیم، مثلاً $p \Rightarrow p$ یا $p \vee \sim p$ یا $p \Leftrightarrow p$ همواره درست اند.

گزاره همواره غلط را با F نشان می دهیم، مثلاً $p \wedge \sim p$ یا $p \Leftrightarrow \sim p$ همواره نادرست اند.

ترکیب با گزاره های خاص:

$P \vee T \equiv T$	$P \vee F \equiv P$	$P \Rightarrow T \equiv T$
$P \wedge T \equiv P$	$P \wedge F \equiv F$	$T \Rightarrow P \equiv P$
$P \Leftrightarrow T \equiv P$		$F \Rightarrow P \equiv T$
$P \Leftrightarrow F \equiv \sim P$		$P \Rightarrow F \equiv \sim P$

نقیض گزاره های مرکب:

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ قوانین دمرگان	$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

تبدیل شرطی به عطفی:

اگر از $p \Rightarrow q$ نوشتن نیامد بپایش بنویسید $\sim p \vee q$ (اولی را نقیض و علامت شرط را به $\vee$ تبدیل کنید).

گام اول: جدول ارزش سه گزاره p ، q و r را رسم می کنیم:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

پاسخ خیلی تشریحی ✓

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\sim r$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim r$
د	د	د	د	ن	ن
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د

گام دوم: برای ارزش $p \Rightarrow q$ ، اگر p درست و q نادرست بود، «ن» می‌گذاریم و بقیه جاها «د». برای ارزش $\sim r$ ، برعکس ارزش‌های r را می‌نویسیم.

گام سوم: اگر ستون‌های ۴ و ۵ مثل هم باشند، برای $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim r$ ، ارزش درست را می‌گذاریم و گرنه نادرست.

گام چهارم: در سطرهای ۲، ۳، ۶ و ۸ جدول، گزاره نهایی درست شد. در این سطرها به ترتیب ۲، ۲، ۱ و ۰ تا از گزاره‌های p ، q و r درست بودند.

یعنی حداکثر ۲ تا درست هستند؛ اما سایر گزینه‌ها نادرست‌اند.

گزینه‌های (۱) و (۴) با توجه به سطر ششم و گزینه (۳) در سطر هشتم نادرست است.

در خصوص گزاره منطقی $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ، کدام مورد صحیح است؟

(سوال ۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

(۲) همواره نادرست است.

(۱) همواره درست است.

(۴) تنها وقتی درست است که q نادرست باشد.

(۳) تنها وقتی درست است که p درست باشد.

کنکور

با کدام گزاره $P(x, y)$ ، گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} ; P(x, y)$ درست است؟

(۴) $y = 2^x$

(۳) $y = x^2$

(۲) $x = y^2$

(۱) $xy = 1$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

گزاره‌نما: جمله خبری دارای متغیر که به ازای مقادیر مختلف متغیر، درست یا نادرست می‌شود.

دامنه (D): مجموعه‌ای که مقادیر متغیر را از آن برمی‌داریم.

جواب (S): زیرمجموعه‌ای از دامنه که اگر متغیر گزاره‌نما را از آن برداریم، تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود.

مثلاً در گزاره‌نمای « x زوج است» دامنه متغیر، مجموعه اعداد صحیح است؛ مجموعه جواب $\{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ است.

سور عمومی (V): $\forall x ; P(x)$ وقتی درست است که گزاره‌نمای $P(x)$ همواره درست باشد.

سور وجودی (E): $\exists x ; P(x)$ وقتی درست است که حداقل برای یک x در دامنه، ارزش $P(x)$ درست باشد.

ترتیب سورها: $\forall x \exists y ; P(x, y)$ با $\exists y \forall x ; P(x, y)$ فرق دارد!

وقتی می‌گویید برای هر x ، یک y وجود دارد (V می‌تواند برای x های مختلف، متفاوت باشد)، اما در $\exists y \forall x$ باید یک y ثابت، برای تمام x ها، گزاره‌ای درست بسازد.

گام اول: سورها را می‌خوانیم.

پاسخ خیلی تشریحی

برای هر عدد صحیح x ، یک عدد صحیح y وجود دارد که ...

گام دوم: بررسی گزینه‌های غلط:

گزینه (۱): ضرب x و y برابر ۱ است (V معکوس x است). $\times$ مثلاً معکوس $x = 5$ صحیح نیست.

گزینه (۲): x مربع y است. $\times$ مثلاً $x = 5$ مربع عدد صحیح نیست.

گزینه (۴): ۲ به توان x می‌شود y . $\times$ مثلاً برای $x = -1$ ، حاصل 2^x صحیح نیست.

گام سوم: گزینه (۳) درست است؛ مربع هر عدد صحیح x ، عدد صحیح y می‌شود.

۳۳ اگر A و B به ترتیب ۴ و ۶ عضوی باشند، تعداد اعضای $B \times A - A \times B$ ، حداقل m و حداکثر n خواهد بود. $n - m$ کدام است؟

۱۶ (۴)

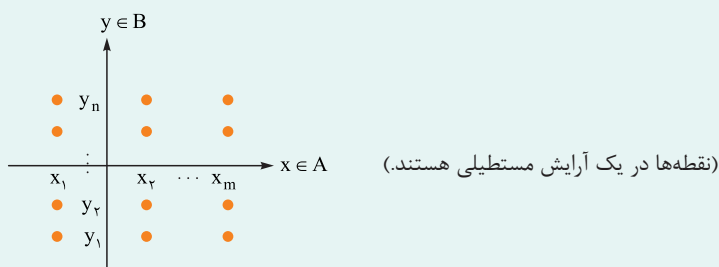
۹ (۳)

۱ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ضرب دکارتی دو مجموعه A و B به صورت $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ تعریف می‌شود، یعنی مجموعه زوج‌های مرتبی که مؤلفه اول آن‌ها از A و مؤلفه دوم آن‌ها عضو B باشد، اگر $A = B$ باشد، $A \times A$ را A^2 هم می‌نامیم. اگر دو مجموعه ناتهی و نابرابر باشند، هرگز $A \times B$ و $B \times A$ مساوی نیستند. نمودار ضرب دکارتی $A \times B$ برای دو مجموعه A و B با m و n عضو به شکل زیر است:



فرمول اشتراک ضرب دکارتی:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = \underbrace{(A \cap C)}_{\text{اشتراک } x \text{ ها}} \times \underbrace{(B \cap D)}_{\text{اشتراک } y \text{ ها}}$$

دو نتیجه مهم:

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$$

$$A^2 \cap B^2 = (A \cap B)^2$$

شمارش تعداد اعضا:

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B)$$

$$n(A \times B \cap B \times A) = n(A^2 \cap B^2) = (n(A \cap B))^2$$

$$n(A \times B \cup B \times A) = n(A \times B) + n(B \times A) - n(A \times B \cap B \times A)$$

$$n(A \times B - B \times A) = n(A \times B) - n(A \times B \cap B \times A)$$

گام اول: A و B به ترتیب ۴ و ۶ عضو دارند؛ پس: $B \times A$ دارای $6 \times 4 = 24$ عضو است.

گام دوم: در درس باکس دیدیم که:

$$n(B \times A - A \times B) = n(B \times A) - n(B \times A \cap A \times B) = n(B)n(A) - (n(A \cap B))^2$$

پس تعداد اعضا می‌شود:

$$24 - n(A \cap B)^2$$

گام سوم: $n(A \cap B)$ می‌تواند ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد؛ یعنی حاصل $n(B \times A - A \times B)$ می‌تواند حداکثر $24 - 0^2$ و حداقل $24 - 4^2$ باشد و اختلاف بیشترین و کم‌ترین آن، $n - m = 16$ است.

درس Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۴ اگر $P(A) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و احتمال رخ دادن فقط یکی از آن‌ها $\frac{3}{5}$ باشد، مقدار $P(B' | A')$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{20}$ (۲) $\frac{9}{20}$ (۳) $\frac{11}{20}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

قوانین احتمال:

اگر احتمال دو پیشامد A و B و اشتراک آن‌ها را بدانیم، داریم:

رخ A) (ندهد.)	$P(A') = 1 - P(A)$	
حداقل یکی از A و B رخ (دهد.)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	
فقط A (رخ دهد.)	$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$	
هیچ کدام رخ ندهند.)	$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$	
فقط یکی (رخ دهد.)	$P(A - B) + P(B - A) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$	

فرمول احتمال شرطی:

احتمال رخ دادن A در شرایطی که B رخ داده است، برابر است با:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نتایج برای متمم‌ها:

$$P(A | B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} \quad (\text{اگر B رخ ندهد، A رخ دهد})$$

$$P(A' | B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} \stackrel{\text{تفکیک}}{=} 1 - P(A | B) \quad (\text{می‌دانیم B رخ داده، حالا A رخ ندهد})$$

$$P(A' | B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} \quad (\text{به فرض این‌که B رخ نداده، A رخ ندهد})$$

گام اول: دیدیم که احتمال رخ دادن «فقط یکی از آن‌ها» برابر است با:

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - 2P(A \cap B)$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کنیم}} 2P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{5} = \frac{20 + 15 - 18}{60} = \frac{17}{60} \xrightarrow{\div 2} P(A \cap B) = \frac{17}{120}$$

گام دوم: طبق فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(B' | A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')}$$

$$\xrightarrow{\text{قوانین احتمال}} \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))}{1 - P(A)} = \frac{1 - (\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{17}{120})}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1 - \frac{40 + 30 - 17}{120}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{7}{60}}{\frac{1}{3}} = \frac{7}{20}$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۵ در فضای نمونه‌ای چهارعضوی $S = \{p, t, r, q\}$ ، مقادیر احتمال پیشامدهای ساده، دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{12}$ می‌سازند. بیشترین مقدار احتمال یک پیشامد دوعضوی در S چه قدر است؟

$\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

در فضاهای نمونه‌ای غیرهم‌شانس فرمول $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ برقرار نیست.

حل مسئله را از شرط $P(S) = 1$ شروع می‌کنیم و مجموع احتمال‌ها را مساوی ۱ قرار می‌دهیم. باید احتمال همه اعضای S را برحسب یک مجهول بنویسیم.

اگر احتمال پیشامدهای ساده متناسب با a, b, c و ... باشند آن‌ها را ax, bx, cx و ... می‌گیریم.

اگر مقادیر احتمال‌ها دنباله حسابی بسازند $x, x+d, x+2d, \dots$ هستند.

در دنباله هندسی هم $x, xq, xq^2, \dots$ در نظر می‌گیریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** مقادیر احتمال‌ها را $a, \frac{1}{12}a, \frac{2}{12}a, \frac{3}{12}a$ و $a + \frac{3}{12}$ در نظر می‌گیریم (دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{12}$). جمع احتمال‌ها برابر است با:

$$P(S) = \sum P(x_i) = a + a + \frac{1}{12}a + a + \frac{2}{12}a + a + \frac{3}{12}a = 4a + \frac{6}{12}a = 1$$

پس: $4a = \frac{1}{8}$ و بنابراین $a = \frac{1}{32}$

گام دوم: بیشترین مقدار برای احتمال یک پیشامد دوعضوی برابر است با:

$$P(\{x_1, x_2\})_{\max} = \underbrace{a + \frac{2}{12}a + a + \frac{3}{12}a}_{\text{جمع دوتای بزرگ‌تر}} = 2a + \frac{5}{12}a \xrightarrow{a=\frac{1}{32}} \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ یک فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله هندسی با قدرنسبت کمتر از واحد، تشکیل دهند و واسطه هندسی آن‌ها $\frac{1}{5}$ باشد، کم‌ترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در S ، چه قدر است؟

(سوال ۱۲۶ کنکور ریاضی ۱۳۹۱)

$\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ (۲)

$\frac{2-\sqrt{2}}{10}$ (۴)

$\frac{2-\sqrt{2}}{5}$ (۱)

$\frac{2-\sqrt{3}}{10}$ (۳)

کنکور

در کیسه A، چهار مهره سفید و ۶ مهره سیاه و در کیسه B، هفت مهره سفید و ۳ مهره سیاه داریم. مهره‌ای از کیسه A برداشته و در کیسه B قرار می‌دهیم، سپس مهره‌ای از B برمی‌داریم. چه قدر احتمال دارد این مهره سفید باشد؟

$$\frac{27}{55} \quad (۴)$$

$$\frac{37}{55} \quad (۳)$$

$$\frac{26}{55} \quad (۲)$$

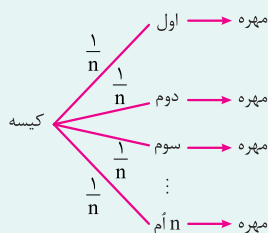
$$\frac{29}{55} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

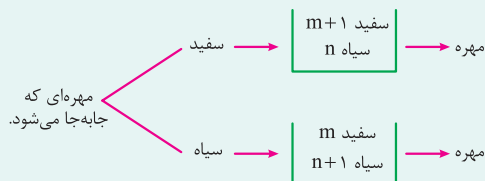
درس Box

۳ نوع مسئله قانون جمع احتمال درباره کیسه (ظرف، جعبه) داریم:

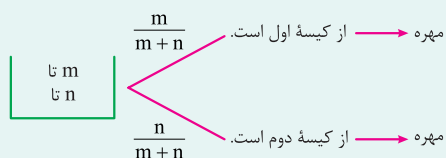
نوع اول: چند کیسه داریم، از یک کیسه به تصادف یک یا چند مهره بیرون می‌آوریم. نمودار درختی این شکلی است:



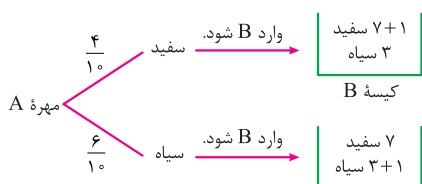
نوع دوم: از یک کیسه مهره‌ای بیرون می‌آوریم و در کیسه دوم می‌اندازیم. سپس از کیسه دوم مهره‌ای بیرون می‌آوریم. باید رنگ مهره اول را معلوم کرد و ترکیب جدید کیسه دوم را نوشت:



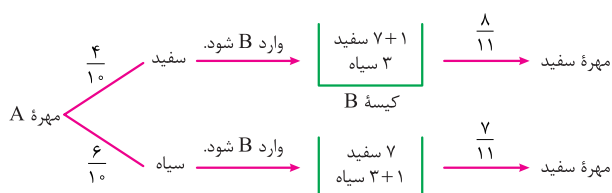
نوع سوم: m مهره از کیسه اول و n مهره از کیسه دوم را در کیسه سوم می‌ریزیم، سپس از کیسه سوم مهره بیرون می‌آید:



گام اول: از کیسه A مهره‌ای بیرون می‌آید. این مهره با احتمال $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ سفید و با احتمال $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ سیاه است. گام دوم: حالا مهره خارج شده از کیسه A وارد کیسه B می‌شود:



گام سوم: حالا از B یک مهره بیرون می‌آوریم. در حالت بالا با احتمال $\frac{8}{11}$ و در حالت پایین به احتمال $\frac{7}{11}$ سفید است، پس نمودار درختی به شکل زیر کامل می‌شود:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

پس طبق قانون جمع احتمال داریم:

$$P(\text{اولی سیاه} \mid \text{دومی سفید}) + P(\text{اولی سفید} \mid \text{دومی سفید}) = P(\text{مهره سفید})$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{8}{11} + \frac{6}{10} \times \frac{7}{11} = \frac{32+42}{110} = \frac{74}{110} = \frac{37}{55}$$

در ۱۵ داده آماری، میانگین داده‌های بیشتر از چارک سوم و داده‌های کمتر از چارک اول به ترتیب ۲۱ و ۷ و میانگین داده‌های رو و درون جعبه ۱۶ است. میانگین داده‌ها کدام است؟

$$۱۵/۴ \quad (۴)$$

$$۱۵/۳ \quad (۳)$$

$$۱۵/۲ \quad (۲)$$

$$۱۵/۱ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

میانگین برابر است با:

درس Box

جمع
تعداد

پس مجموع داده‌ها می‌شود:

میانگین $\times$ تعداد = مجموع

تعداد فرد: میانه داده شماره $\frac{n+1}{2}$ است.
در ۲۱ داده: یازدهمی
میان عددی است که در وسط داده‌های مرتب‌شده قرار دارد.
تعداد زوج: میانه، معدل داده‌های $\frac{n}{2}$ ام و $\frac{n}{2} + 1$ ام است.
در ۲۴ داده: معدل دوازدهمی و سیزدهمی

نیمه اول داده‌ها: داده‌های قبل از میانه $\leftarrow$ چارک اول: میانه نیمه اول است.

نیمه دوم داده‌ها: داده‌های بعد از میانه $\leftarrow$ چارک سوم: میانه نیمه دوم است.

سهم هر قسمت:

چارک سوم				میانه		چارک اول	
۲۵٪	۲۵٪	۲۵٪	۲۵٪	۵۰٪	۵۰٪	۲۵٪	۲۵٪
$\frac{N}{4}$	$\frac{N}{4}$	$\frac{N}{4}$	$\frac{N}{4}$	$\frac{N}{2}$ تقریباً	$\frac{N}{2}$ تقریباً	$\frac{N}{4}$	$\frac{N}{4}$

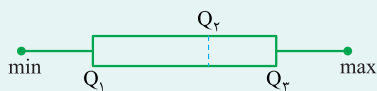
بیشتر از چارک اول: ۷۵ درصد

بین چارک اول و سوم: ۵۰ درصد

کمتر از چارک سوم: ۷۵ درصد

تعداد داده‌های بیشتر از چارک سوم و کمتر از چارک اول، هر دو برابر $\left[\frac{n}{4} \right]$ است.

نمودار جعبه‌ای:



حواستان به تفاوت «درون جعبه» و «روی جعبه» باشد:

$$Q_1 < x_i < Q_3 \Leftarrow \text{درون جعبه}$$

$$Q_1 \leq x_i \leq Q_3 \Leftarrow \text{رو و درون جعبه}$$

گام اول: در ۱۵ داده آماری $\left[\frac{N}{4} \right] = ۳$ داده بیشتر از چارک سوم و ۳ داده کمتر از چارک اول هستند؛ پس تعداد سایر داده‌ها (رو و درون جعبه) می‌شود:

$$۱۵ - ۳ - ۳ = ۹$$

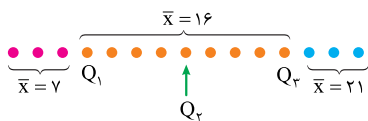


ببینید:

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: در صورت سؤال میانگین را داده:



جمع داده‌ها را از ضرب تعداد در میانگین به دست می‌آوریم:

$$\text{جمع داده‌های کم‌تر از چارک اول} = 3 \times 7 = 21$$

$$\text{جمع داده‌های بیشتر از چارک سوم} = 3 \times 21 = 63$$

$$\text{جمع داده‌های بین چارک سوم و اول} = 9 \times 16 = 144$$

گام سوم: پس جمع کل داده‌ها $21 + 144 + 63 = 228$ است و داریم:

$$\bar{x}_{\text{کل}} = \frac{\text{جمع کل}}{\text{تعداد کل}} = \frac{228}{15} \stackrel{\div 3}{=} \frac{76}{5} = 15.2$$

۳۸ ضریب تغییرات داده‌های $۲/۷$ و $۲/۸, ۲/۹, ۳, ۳/۶$ کدام است؟ ($\sqrt{۱۰} \approx ۳/۱۵$)

۰/۱۱۷ (۴)

۰/۱۱۱ (۳)

۰/۱۰۸ (۲)

۰/۱۰۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

نکته

اگر هر داده را منهای میانگین کنیم، به مقادیر حاصل «انحراف از میانگین» می‌گویند.

جمع انحراف از میانگین‌ها همیشه صفر است:

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$$

اگر مقادیر انحراف از میانگین را به توان ۲ برسانیم با هم جمع و بر تعداد تقسیم کنیم به «واریانس» می‌رسیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

جذر واریانس «انحراف معیار» نام دارد:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

از تقسیم انحراف معیار بر میانگین، ضریب تغییرات به دست می‌آید:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

CV واحد ندارد، برای مقایسه پراکندگی به کار می‌رود و معمولاً درصدی بیان می‌شود.

گام اول: میانگین داده‌های $۲/۷$ و $۲/۸, ۲/۹, ۳, ۳/۶$ برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{\text{جمع}}{\text{تعداد}} = \frac{۲/۷ + ۲/۸ + ۲/۹ + ۳ + ۳/۶}{۵} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

گام دوم: هر داده را منهای میانگین کنیم:

$$x_i - \bar{x} = x_i - ۳: -۰/۳, -۰/۲, -۰/۱, ۰, ۰/۶$$

گام سوم: این اعداد را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x_i - \bar{x})^2: ۰/۰۹, ۰/۰۴, ۰/۰۱, ۰, ۰/۳۶$$

با هم جمع و بر تعداد تقسیم می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{۰/۰۹ + ۰/۰۴ + ۰/۰۱ + ۰ + ۰/۳۶}{۵} = \frac{۰/۵۰}{۵} = ۰/۱ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۰/۱}$$

گام چهارم: CV برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۰/۱}}{۳} = \frac{۱}{۳\sqrt{۱۰}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۳ \times ۱۰} \xrightarrow{\sqrt{۱۰} \approx ۳/۱۵} \frac{۳/۱۵}{۳ \times ۱۰} = \frac{۱/۰۵}{۱۰} = ۰/۱۰۵$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمونه ۲۵ عضوی با اطمینان ۹۵ درصد، میانگین جامعه را در بازه $[۱۵/۸۸, ۱۶/۱۲]$ برآورد می کند. اگر انحراف معیار جامعه و نمونه برابر باشند، ضریب تغییرات اعضای نمونه کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{۸۰}$ (۲) $\frac{۳}{۱۶۰}$ (۳) $\frac{۳}{۴۰}$ (۴) $\frac{1}{۶۴}$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

اگر میانگین نمونه n عضوی از جامعه، $\bar{X}$ باشد، با اطمینان ۹۵ درصد میانگین جامعه در بازه $[\bar{X} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}]$ قرار دارد. این بازه، برآورد میانگین جامعه است. σ هم انحراف معیار جامعه است.

طول بازه اطمینان، $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

طول بازه اطمینان با $\frac{1}{\sqrt{n}}$ متناسب است، پس مثلاً اگر تعداد اعضای نمونه ۱۶ برابر شود، طول بازه اطمینان $\frac{1}{۴}$ برابر خواهد شد.

نکته

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: بازه $[\bar{X} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}]$ به صورت $[۱۵/۸۸, ۱۶/۱۲]$ شده است؛ پس عدد وسط بازه برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{۱۵/۸۸ + ۱۶/۱۲}{۲} = ۱۶$$

گام دوم: نمونه $n = ۲۵$ عضو دارد؛ پس طول بازه برابر است با:

$$\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۴\sigma}{۵} = ۱۶/۱۲ - ۱۵/۸۸ = ۰/۲۴ \Rightarrow \sigma = \frac{۰/۲۴}{\frac{۴}{۵}} = ۰/۳$$

گام سوم: ضریب تغییرات نمونه برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} \xrightarrow[\bar{X}=16]{\sigma=0/3} \frac{0/3}{16} = \frac{3}{160}$$

۴۰. نمونه انتخابی از اعداد طبیعی ۱ تا n ، به صورت ۱۹، ۱۶، ۱۷ و ۴ است. برآورد n براساس میانه کدام است؟

۳۴ (۴)

۳۳ (۳)

۳۲ (۲)

۳۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

یک تمرین مهم کتاب درسی:

میانه و میانگین اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ...، n برابر است با:

$$\frac{n+1}{2}$$

حالا اگر میانگین (یا میانه) نمونه برابر k باشد، برآورد نقطه‌ای می‌گویید:

$$\frac{n+1}{2} = k$$

یعنی برآورد مقدار n می‌شود:

$$2k - 1$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: میانه نمونه برابر است با:

۴، ۱۶، ۱۷، ۱۹

$$Q_2 = \text{عدد وسط} = \frac{16+17}{2} = 16.5$$

گام دوم: میانه جامعه با اعضای ۱ تا n برابر است با:

$$Q_2 = \frac{n+1}{2}$$

گام سوم: برآورد ما این است که $\frac{n+1}{2} = 16.5$ و بنابراین داریم:

$$n = 2 \times 16.5 - 1 = 32$$

درس Box

عدد اتمی عنصر منیزیم برابر ۱۲ است. بار الکتریکی هسته اتم منیزیم چند میکروکولن است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

(۲) $1/92 \times 10^{-13}$

(۱) $1/92 \times 10^{-12}$

(۴) $7/5 \times 10^{-13}$

(۳) $7/5 \times 10^{-12}$

پاسخ: گزینه ۱

Hint

با توجه به این که عدد اتمی، تعداد پروتون‌ها را در یک اتم خنثی نشان می‌دهد، به کمک رابطه $q = \pm ne$ ، بار الکتریکی هسته را محاسبه کنید.

درس‌Box

اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی:

بار الکتریکی یک جسم، مضرب درستی از بار بنیادی e است.

$$q = \pm ne$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$: اختلاف تعداد پروتون‌ها و الکترون‌های جسم

$+$: در صورتی که تعداد پروتون‌ها بیشتر از تعداد الکترون‌ها باشد.

$-$: در صورتی که تعداد الکترون‌ها بیشتر از تعداد پروتون‌ها باشد.

وقتی n الکترون از جسم خنثای A به جسم خنثای B انتقال یابد، جسمی که الکترون از دست دهد، دارای بار مثبت و جسمی که الکترون اضافی دریافت کند، دارای بار منفی خواهد شد.

با توجه به این که عدد اتمی منیزیم را می‌دانیم، در اتم خنثای منیزیم، ۱۲ الکترون و ۱۲ پروتون وجود دارد و هسته اتم شامل پروتون با بار مثبت و نوترون بدون بار است، پس بار هسته برابر است با:

$$q = +ne \xrightarrow[n=12]{e=1/6 \times 10^{-19} \text{ C}} q = 12 \times 1/6 \times 10^{-19} = 1/92 \times 10^{-18} \text{ C}$$

$$\Rightarrow q = 1/92 \times 10^{-18} \text{ C} \times \frac{1 \mu\text{C}}{10^{-6} \text{ C}} = 1/92 \times 10^{-12} \mu\text{C}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، دو گوی مشابه به جرم $3/6 \text{ g}$ و بار الکتریکی یکسان q در فاصله 1 cm از هم قرار دارند و گوی بالایی به صورت معلق است. هر یک از گوی‌ها چند الکترون دریافت کنند تا از نظر الکتریکی خنثی شوند؟

$$(g = 10 \text{ N/kg} \text{ و } e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}, k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$



$$1/25 \times 10^{11} \quad (1)$$

$$1/25 \times 10^{12} \quad (2)$$

$$8 \times 10^{11} \quad (3)$$

$$8 \times 10^{12} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا نیروهای الکتریکی و وزن وارد بر گوی معلق را برابر قرار می‌دهیم تا بار الکتریکی هر گوی به دست آید، سپس به کمک اصل توانیده‌بودن بار الکتریکی، خواسته تست را حساب می‌کنیم.

Hint

قانون کولن:

درس Box

اندازه نیروی الکتریکی (الکتروستاتیکی) بین دو بار نقطه‌ای که در راستای خط مستقیم بین آن‌ها اثر می‌کند، با حاصل ضرب بزرگی آن‌ها متناسب است و با مربع فاصله بین آن‌ها نسبت وارون دارد.

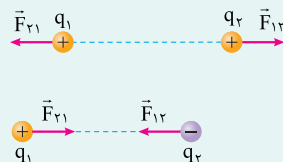
$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$

F : اندازه نیروی الکتریکی (N)

$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \text{ ثابت کولن}$$

q_1 و q_2 : بارهای الکتریکی نقطه‌ای (C)

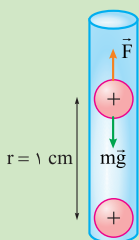
r : فاصله بین دو بار (m)



تکنیک محاسباتی 90° : هنگام عددگذاری در رابطه قانون کولن، اگر بارهای الکتریکی برحسب μC و فاصله دو بار برحسب cm نوشته شوند، برای آن که نیرو برحسب N به دست آید باید ضریب k را $90 \text{ N.cm}^2 / \mu\text{C}^2$ بنویسیم.

گام اول: مطابق شکل، به گوی بالایی دو نیرو وارد می‌شود، یکی نیروی رو به پایین وزن و دیگری نیروی رو به بالای دافعه الکتریکی که گوی پایینی به آن وارد می‌کند. چون گوی معلق است، این دو نیرو هم‌اندازه‌اند؛ بنابراین:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$F = mg \Rightarrow k \frac{|q| |q|}{r^2} = mg \xrightarrow{\text{تکنیک محاسباتی } 90^\circ} 90 \times \frac{|q|^2}{1^2} = 3/6 \times 10^{-3} \times 10$$

$$\Rightarrow |q|^2 = \frac{3/6 \times 10^{-2}}{90} = \frac{36 \times 10^{-2}}{900} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |q| = \frac{6 \times 10^{-1}}{30} = \frac{1}{50} \mu\text{C} \xrightarrow{q > 0} q = \frac{1}{50} \mu\text{C}$$

گام دوم: به کمک اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی، تعداد پروتون‌های اضافی هر گوی را به دست می‌آوریم. تعداد الکترون‌های مورد نیاز برای خنثی‌شدن هر گوی برابر همین تعداد است، پس:

$$q = ne \xrightarrow{q = \frac{1}{50} \mu C = \frac{1}{50} \times 10^{-6} C} \frac{1}{50} \times 10^{-6} = n \times 1.6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = \frac{1}{50 \times 1.6} \times 10^{13} = 1.25 \times 10^{11}$$

کتاب درسی

در شکل زیر، دو گوی مشابه به جرم 25 g و بار یکسان مثبت q در فاصله 10 cm از هم قرار دارند، به طوری که گوی بالایی به حالت معلق مانده است.

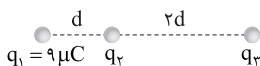
(فیزیک (۲) ریاضی - تمرین ۷ صفحه ۴ کتاب درسی)

الف) اندازه بار q را به دست آورید.

ب) تعداد الکترون‌های کنده‌شده از هر گوی چه قدر است؟



در شکل زیر، نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از بارهای الکتریکی نقطه‌ای، برابر صفر است. مجموع دو بار q_2 و q_3 چند میکروکولن است؟



۴۰ (۲)

۳۲ (۱)

-۴۰ (۴)

-۳۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

کرتس Box

اگر به جای دو ذره، تعدادی بار الکتریکی نقطه‌ای داشته باشیم، نیروی الکتریکی وارد بر هر ذره، برابند نیروهایی است که هر یک از ذره‌های دیگر در غیاب سایر ذره‌ها، بر آن ذره وارد می‌کنند.

گام اول: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 صفر است و چون بار q_3 خارج فاصله دو بار قرار گرفته، پس بارهای q_1 و q_2 ناهمنام هستند؛ یعنی بار q_2 منفی است و چون نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_1 هم صفر است، پس بار q_3 باید مثبت باشد.
 $q_2 < 0$, $q_3 > 0$

گام دوم: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 صفر است، پس $F_{13} = F_{23}$ باید هم‌اندازه باشد؛ یعنی:

$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow \frac{k |q_1| |q_3|}{r_{13}^2} = \frac{k |q_2| |q_3|}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{9}{9d^2} = \frac{|q_2|}{4d^2} \Rightarrow |q_2| = 4 \mu C \xrightarrow{q_2 < 0} q_2 = -4 \mu C$$

گام سوم: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 صفر است، پس:

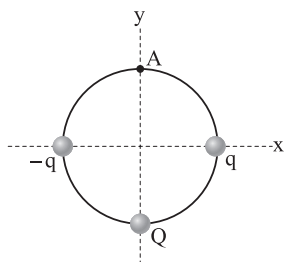
$$F_{12} = F_{23} \Rightarrow \frac{k |q_1| |q_2|}{r_{12}^2} = \frac{k |q_2| |q_3|}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{9}{d^2} = \frac{|q_3|}{4d^2} \Rightarrow |q_3| = 36 \mu C \xrightarrow{q_3 > 0} q_3 = 36 \mu C$$

گام چهارم: حالا می‌رویم سراغ خواسته سؤال:

$$q_2 + q_3 = -4 + 36 = 32 \mu C$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی محیط دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطه A در SI برابر $\vec{E} = \vec{i} - \vec{j}$ باشد، $\frac{Q}{q}$ برابر کدام است؟



- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) $2\sqrt{2}$
- (۳) $-\sqrt{2}$
- (۴) $-2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار:

می‌خواهیم میدان الکتریکی حاصل از بار ذره‌ای q را در نقطه‌ای به فاصله r از آن به دست آوریم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2}$$

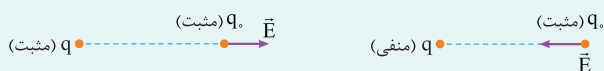
E: اندازه میدان الکتریکی (N/C)

$$k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2} \text{ ثابت کولن}$$

q: بار الکتریکی ای که میدان را ایجاد کرده است. (C)

r: فاصله بار تا نقطه‌ای که میدان الکتریکی را در آن نقطه می‌خواهیم. (m)

همان‌طور که قبلاً گفته شد، جهت بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ هم‌جهت با نیروی الکتریکی وارد بر بار آزمون q_0 است که به طور فرضی در آن نقطه قرار می‌گیرد. پس جهت میدان الکتریکی، از بارهای مثبت رو به خارج و به سوی بارهای منفی است.

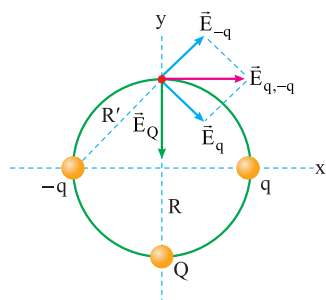


گام اول: بردار میدان الکتریکی خالص در نقطه A، شامل مؤلفه‌های $\vec{i}$ و $\vec{j}$ است. با توجه به مکان بار Q و مکان بارهای هم‌اندازه q و -q، مؤلفه $\vec{j}$ آن برابر با میدان الکتریکی بار Q در نقطه A و مؤلفه $\vec{i}$ برابر با برابری میدان‌های الکتریکی بارهای q و -q است.

$$\vec{E} = \vec{i} - \vec{j} \text{ (N/C)} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_Q = -\vec{j} \text{ (N/C)} \Rightarrow E_Q = 1 \text{ N/C} & \text{(I)} \\ \vec{E}_{q,-q} = \vec{i} \text{ (N/C)} \Rightarrow E_{q,-q} = 1 \text{ N/C} & \text{(II)} \end{cases}$$

$\vec{E}_Q$ در خلاف جهت محور y، یعنی به سوی بار Q است، پس: ($Q < 0$)

$\vec{E}_{q,-q}$ در جهت محور x است؛ بنابراین همان‌طور که در شکل زیر نشان دادیم، باید $q < 0$ و در نتیجه $-q > 0$ باشد.



گام دوم: اندازه میدان‌های حاصل از هر یک از بارها را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$E_Q = k \frac{|Q|}{(2R)^2} = k \frac{|Q|}{4R^2} \text{ (III)}$$

پاسخ خیلی تشریحی

$$R' = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R^2 = \sqrt{2}R$$

$$E_q = E_{-q} = k \frac{|q|}{R'^2} = k \frac{|q|}{(\sqrt{2}R)^2} = k \frac{|q|}{2R^2}$$

E_q و E_{-q} بر هم عمودند؛ بنابراین برآیند آن‌ها برابر است با:

$$E_{q,-q} = \sqrt{E_q^2 + E_{-q}^2} \xrightarrow{E_q = E_{-q}} E_{q,-q} = \sqrt{2}E_q = \sqrt{2}k \frac{|q|}{2R^2} \quad (IV)$$

گام سوم: به کمک روابط (I) تا (IV) می‌توان نوشت:

$$\frac{E_Q}{E_q} = \frac{k \frac{|Q|}{r^2 R^2}}{\sqrt{2} k \frac{|q|}{2 R^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|Q|}{\sqrt{2} |q|} \Rightarrow \frac{|Q|}{|q|} = \sqrt{2} \xrightarrow{Q < q} \frac{Q}{q} = \sqrt{2}$$

در یک میدان الکتریکی یکنواخت، ذره‌ای با بار الکتریکی $-2 \mu\text{C}$ از نقطه A تا نقطه B جابه‌جا می‌شود و انرژی جنبشی آن $50 \mu\text{J}$ افزایش می‌یابد. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر 100 V باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه B برابر چند ولت است؟ (تنها نیروی وارد بر ذره، نیروی الکتریکی است.)

- (۱) ۲۵
(۲) -۲۵
(۳) ۷۵
(۴) ۱۲۵

پاسخ: گزینه ۴

کارت Box

اگر تنها نیروی وارد بر بار الکتریکی q ، نیروی حاصل از میدان الکتریکی باشد، طبق قضیه کار - انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$\Delta K = W_E = -\Delta U_E$$

ΔK : تغییر انرژی جنبشی (J)

W_E : کار میدان الکتریکی (J)

ΔU_E : تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)

وقتی ذره باردار بین دو نقطه دلخواه جابه‌جا می‌شود، نسبت تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی به بار ذره را اختلاف پتانسیل الکتریکی بین آن دو نقطه می‌گوییم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$$

$\Delta V = V_p - V_1$: اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)

V_1 : پتانسیل الکتریکی در نقطه (۱) (V)

V_p : پتانسیل الکتریکی در نقطه (۲) (V)

ΔU_E : تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)

q : بار الکتریکی (C)

گام اول: افزایش انرژی جنبشی معادل با کاهش انرژی پتانسیل است: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\Delta K = -\Delta U_E$$

$$\Delta U_E = -q\Delta V \Rightarrow \Delta K = -q(V_B - V_A)$$

گام دوم: با جای‌گذاری داده‌ها، مقدار V_B را به دست می‌آوریم:

$$50 \times 10^{-6} = -(-2 \times 10^{-6} (V_B - 100))$$

$$\Rightarrow V_B = +25 + 100 = 125 \text{ V}$$

یک ماهواره به شکل مکعبی به ضلع 50 cm در اثر عبور از لایه‌های جو، دارای بار الکتریکی Q می‌شود. اگر چگالی سطحی بار الکتریکی روی سطح این ماهواره در SI برابر 8×10^{-10} باشد، Q چند نانوکولن است؟ (از تجمع بار روی لبه‌ها چشم‌پوشی کنید).

(۲) 120

(۱) $1/2$

(۴) $0/2$

(۳) 20

پاسخ: گزینه ۱

کوتاه‌نویس Box

اگر مساحت سطحی که بار روی آن توزیع شده است، A و بار الکتریکی موجود در آن سطح برابر Q باشد، چگالی سطحی بار را با نماد σ نشان می‌دهند و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

بار (C) $\uparrow$
چگالی سطحی بار (C/m²) $\leftarrow$
مساحت سطح (m²) $\downarrow$

گام اول: رابطه چگالی سطحی بار الکتریکی را می‌نویسیم و بار را به دست می‌آوریم. حواستان باشد که اگر ضلع مکعب a باشد، مساحت سطح آن برابر $6a^2$ است.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow Q = \sigma \cdot A \xrightarrow{A=6a^2} Q = \sigma \times 6a^2$$

گام دوم: حالا داده‌های مسئله را جای گذاری می‌کنیم:

$$Q = \sigma \times 6a^2$$

$$\xrightarrow{\sigma = 8 \times 10^{-10} \text{ C/m}^2, a = 50 \times 10^{-2} \text{ m}} Q = 8 \times 10^{-10} \times 6 \times (50 \times 10^{-2})^2 = 8 \times 6 \times 25 \times 10^{-12} = 6 \times 20 \times 10^{-12} = 120 \times 10^{-12} \text{ C}$$

$$\Rightarrow Q = 120 \times 10^{-12} \text{ C} = 120 \text{ nC}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

خازنی به ظرفیت $6 \mu F$ به یک باتری $15 V$ متصل است. اگر فاصله بین صفحات خازن را 25% کاهش دهیم، بار الکتریکی خازن چند میکروکولن تغییر می کند؟

۶۰ (۲)

۳۰ (۱)

۱۲۰ (۴)

۹۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

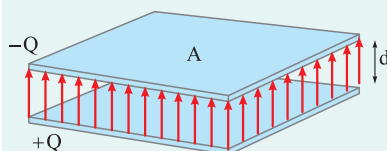
ابتدا ظرفیت خازن در حالت دوم را به دست آورید؛ سپس به کمک رابطه $\Delta Q = \Delta C \times V$ ، تغییر بار خازن را محاسبه کنید.

Hint

درس Box

۱) رابطه ظرفیت خازن براساس مشخصات ساختاری آن:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$$



C: ظرفیت خازن (F فاراد)

κ : ثابت دی الکتریک

ϵ_0 : ضریب گذردهی الکتریکی خلأ $= 8.85 \times 10^{-12} F/m$

A: مساحت مقابل صفحهها (m^2)

d: فاصله جدایی صفحهها (m)

۲) کمترین κ برای هوا و خلأ بوده و برابر یک فرض می شود و برای سایر اجسام نارسانا $\kappa > 1$ می باشد.

۳) نسبت بار الکتریکی ذخیره شده روی صفحه های یک خازن به اختلاف پتانسیل دو سر صفحه های آن، همواره عدد ثابتی است که به این عدد ثابت، ظرفیت خازن می گویند:

بار ذخیره شده روی صفحهها (C)

$$C = \frac{Q}{V} \leftarrow \text{ظرفیت خازن (F)}$$

اختلاف پتانسیل بین صفحهها (V)

گام اول: ابتدا رابطه ظرفیت خازن با دی الکتریک را می نویسیم و C_p را به دست می آوریم:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_p}{C_1} = \frac{d_1}{d_p} \xrightarrow{d_p = d_1 - 0.25d_1 = 0.75d_1 = \frac{3}{4}d_1} \frac{C_p}{6} = \frac{d_1}{\frac{3}{4}d_1} \Rightarrow C_p = 8 \mu f$$

گام دوم: حال از دیگر رابطه ظرفیت خازن، مقدار تغییرات بار را محاسبه می کنیم:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = CV \Rightarrow \Delta Q = \Delta C \times V \xrightarrow{\frac{\Delta C = (8-6) = 2 \mu F}{V = 15 V}} \Delta Q = 2 \times 15 = 30 \mu C$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ظرفیت خازنی $12 \mu F$ و بار الکتریکی آن q است. اگر 3 mC بار الکتریکی از صفحه منفی به صفحه مثبت منتقل شود، انرژی ذخیره شده در خازن به اندازه 8 J زیاد می شود. q چند میلی کولن است؟

۳۵ (۴)

۲۹ (۳)

۳۳/۵ (۲)

۳۰/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: تغییر انرژی خازن با انتقال بار $\Delta Q = 3 \text{ mC}$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta U = U_f - U_i$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{(q + \Delta Q)^2}{2C} - \frac{q^2}{2C} = \frac{2\Delta Q q + (\Delta Q)^2}{2C}$$

گام دوم: با جای گذاری داده ها، q را به دست می آوریم:

$$\Delta Q = 3 \times 10^{-3} \text{ C}, C = 12 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$8 = \frac{2 \times 3 \times 10^{-3} q + (3 \times 10^{-3})^2}{2 \times 12 \times 10^{-6}}$$

$$\Rightarrow q = \frac{8 \times 2 \times 12 \times 10^{-6} - 9 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-3}} = \frac{183 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow q = 30/5 \times 10^{-3} \text{ C} = 30/5 \text{ mC}$$

لامپی به مقاومت الکتریکی $6\ \Omega$ به اختلاف پتانسیل ثابت 4 V متصل است. در مدت یک دقیقه، چند الکترون از این لامپ عبور می‌کند؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19}\text{ C}$)

- (۱) 5×10^{21} (۲) 5×10^{20}
(۳) $2/5 \times 10^{21}$ (۴) $2/5 \times 10^{20}$

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا جریان الکتریکی عبوری را از قانون اهم ($R = \frac{V}{I}$) محاسبه کنید و سپس به کمک رابطه $I = \frac{ne}{t}$ ، تعداد الکترون‌هایی که از لامپ عبور می‌کند را به دست آورید.

درس Box

در رساناهای اهمی، مقاومت الکتریکی در ولتاژهای متفاوت و در دمای ثابت، همواره مقدار ثابتی است. در واقع در وسیله‌هایی که از قانون اهم پیروی می‌کنند، نسبت اختلاف پتانسیل به جریان عبوری همواره مقداری ثابت است؛ این مقدار ثابت را مقاومت الکتریکی رسانا می‌نامند:

اختلاف پتانسیل (V)

$$R = \frac{V}{I}$$

مقاومت الکتریکی (Ω) ←

جریان عبوری (A)

گام اول: ابتدا جریان عبوری از لامپ را به کمک قانون اهم به دست می‌آوریم. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\text{ A}$$

گام دوم: با ترکیب دو رابطه $q = ne$ و $I = \frac{q}{t}$ ، تعداد الکترون‌هایی را که در یک دقیقه از لامپ عبور می‌کند، محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{ne}{t} \Rightarrow n = \frac{It}{e} = \frac{\frac{2}{3} \times 60}{1.6 \times 10^{-19}} = 2/5 \times 10^{20}$$

طول سیم مسی A، ۲۰ درصد بیشتر از طول سیم مسی B است. اگر مقاومت الکتریکی دو سیم برابر باشد، جرم سیم A چند برابر جرم سیم B است؟

$$\frac{6}{5} \quad (2)$$

$$\frac{5}{6} \quad (1)$$

$$\frac{36}{25} \quad (4)$$

$$\frac{25}{36} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

مقاومت الکتریکی رسانا:

درس Box

طول رسانا (m) $\rightarrow R = \rho \frac{L}{A}$ ← مقاومت الکتریکی (Ω)
مساحت مقطع (m^۲) $\rightarrow A$
مقاومت ویژه (Ω.m)

گام اول: از رابطه $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{AL}$ ، A را استخراج کرده و در رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ می‌گذاریم و برای تفکیک بهتر، چگالی را با ρ' و مقاومت ویژه را با ρ نشان داده‌ایم:

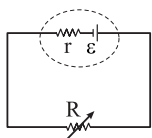
$$R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow{A = \frac{m}{\rho' L}} R = \rho \frac{L}{\frac{m}{\rho' L}} = \rho \rho' \frac{L^2}{m}$$

گام دوم: رابطه به‌دست‌آمده را به صورت نسبتی می‌نویسیم و چون هر دو سیم هم‌جنس‌اند؛ چگالی (ρ') و مقاومت ویژه (ρ) آن‌ها یکسان است. در نتیجه:

$$\frac{R_A}{R_B} = \left(\frac{L_A}{L_B}\right)^2 \times \frac{m_B}{m_A} \xrightarrow{\frac{R_A}{R_B} = \frac{L_A}{L_B} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = 1.2} 1 = \frac{1.44}{1.00} \times \frac{m_B}{m_A} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{1.44}{1.00} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{36}{25}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مدار شکل زیر، اگر مقدار مقاومت متغیر از $4\ \Omega$ به $9\ \Omega$ برسد، جریان الکتریکی عبوری از آن از 4 A به 2 A می‌رسد. نیروی محرکه باتری چند ولت است؟



۱۸ (۲)

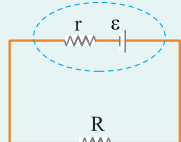
۱۶ (۱)

۲۴ (۴)

۲۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

رابطه جریان الکتریکی در یک مدار تک حلقه:



$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

I: جریان الکتریکی (A)

ε: نیروی محرکه مولد (V)

R: مقاومت خارجی مدار (Ω)

r: مقاومت درونی مولد (Ω)

گام اول: معادله جریان الکتریکی را در هر دو حالت نوشته و آن‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم تا مقاومت درونی مولد به دست آید:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{\varepsilon}{R_2 + r}}{\frac{\varepsilon}{R_1 + r}} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1 + r}{R_2 + r} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{4 + r}{9 + r} \Rightarrow 18 + 2r = 16 + 4r \Rightarrow 2 = 2r \Rightarrow r = 1\ \Omega$$

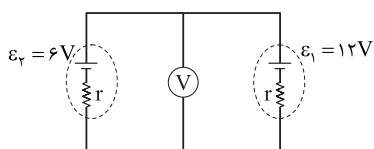
گام دوم: با معلوم بودن مقاومت درونی، نیروی محرکه باتری نیز به دست می‌آید:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r} \Rightarrow 4 = \frac{\varepsilon}{4 + 1} \Rightarrow \varepsilon = 4 \times 5 = 20\text{ V}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درس Box

۵۲ در مدار شکل زیر، ولت‌سنج آرمانی چند ولت را نشان می‌دهد؟



۸ (۱)

۹ (۲)

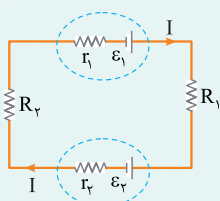
۱۰ (۳)

۱۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

مدار شکل مقابل، شامل دو باتری ϵ_1 و ϵ_2 ($\epsilon_1 > \epsilon_2$) است که در جهت‌های مخالف بسته شده‌اند. در مورد این مدار باید موارد زیر را بدانید:



• تعیین جهت جریان عبوری از مدار به عهده باتری ϵ_1 (که نیروی محرکه الکتریکی بزرگ‌تری دارد) است.

• مقدار جریان عبوری از مدار برابر است با:

$$I = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{R_{eq} + r_1 + r_2}$$

• باتری ϵ_1 ، تولیدکننده انرژی است: $V_1 = \epsilon_1 - r_1 I$ اختلاف پتانسیل دو سر باتری ϵ_1

• باتری ϵ_2 ، مصرف‌کننده انرژی است: $V_2 = \epsilon_2 + r_2 I$ اختلاف پتانسیل دو سر باتری ϵ_2

گام اول: جریان عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری‌ها) را حساب می‌کنیم:

$$I = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{r + r} = \frac{12 - 6}{2r} = \frac{3}{r} \text{ A}$$

گام دوم: ولت‌سنج آرمانی، اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از باتری‌ها را نشان می‌دهد، پس:

$$V_V = V_1 = \epsilon_1 - rI = 12 - r \times \frac{3}{r} = 9 \text{ V}$$

$$V_V = V_2 = \epsilon_2 + rI = 6 + r \times \frac{3}{r} = 9 \text{ V}$$

یا

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۵۳

دو سر یک بخاری برقی را به اختلاف پتانسیل الکتریکی $V = 220$ وصل می‌کنیم و جریان الکتریکی $A = 20$ از آن می‌گذرد. اگر این بخاری برقی به مدت ۴ ساعت در روز کار کند و قیمت برق مصرفی به ازای هر کیلووات ساعت 50 تومان باشد، هزینه یک ماه (۳۰ روز) مصرف این بخاری چند تومان می‌شود؟

(۲) 26400

(۱) 28200

(۴) 2640

(۳) 2820

مشاوره این سؤال مشابه تمرین کتاب درسی است، تمرین‌ها و مثال‌های حل شده کتاب را دست کم نگیرید.

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا با استفاده از رابطه $P = VI$ ، توان مصرفی بخاری را به دست آورید. سپس با جای گذاری توان به دست آمده در رابطه $U = Pt$ ، انرژی مصرف شده در یک ماه را محاسبه کنید و در نهایت هزینه برق مصرفی در یک ماه را حساب کنید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: توان مصرفی بخاری را به دست می‌آوریم:

$$P = VI = 220 \times 20 = 4400 \text{ W} = 4.4 \text{ kW}$$

گام دوم: انرژی مصرف شده توسط بخاری را در مدت یک ماه (۳۰ روز و هر روز ۴ ساعت) حساب می‌کنیم:

$$U = Pt = 4.4 \text{ kW} \times (30 \times 4 \text{ h}) = 528 \text{ kWh}$$

گام سوم: بهای برق مصرفی به ازای هر کیلووات ساعت 50 تومان است، پس:

$$\text{تومان} = 528 \times 50 = 26400 = \text{هزینه یک ماه مصرف بخاری}$$

وقتی دو سر یک بخاری برقی را به اختلاف پتانسیل $V = 220$ وصل کنیم، جریان $A = 10$ از آن می‌گذرد.

(فیزیک (۲) ریاضی - مثال ۲-۸ صفحه ۶۷ کتاب درسی)

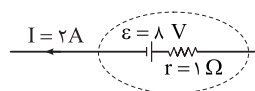
الف) توان این بخاری چه قدر است؟

ب) اگر این بخاری به مدت $h = 300$ در روز کار کند و قیمت برق مصرفی به ازای هر کیلووات ساعت 50 تومان باشد،

هزینه یک ماه مصرف این بخاری چه قدر می‌شود؟

کتاب
درسی

باتری شکل زیر در یک مدار قرار دارد. در یک بازه زمانی یک دقیقه‌ای، کدام یک از موارد زیر درباره این باتری درست است؟



(۱) 720 J انرژی الکتریکی از باتری خارج می‌شود.

(۲) 720 J انرژی الکتریکی وارد باتری می‌شود.

(۳) 1200 J انرژی الکتریکی از باتری خارج می‌شود.

(۴) 1200 J انرژی الکتریکی وارد باتری می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: از آن جایی که جریان از پایانه منفی باتری خارج شده، باتری در حال دریافت انرژی است؛ بنابراین توان ورودی به باتری را حساب می‌کنیم:

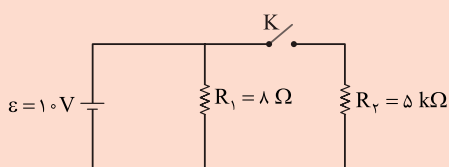
$$V = \varepsilon + Ir = 8 + 2 \times 1 = 10 \text{ V}$$

$$P = IV = 2 \times 10 = 20 \text{ W}$$

گام دوم: حالا انرژی الکتریکی وارد شده به باتری را محاسبه می‌کنیم:

$$W = Pt = 20 \times 60 = 1200 \text{ J}$$

۵۵ در مدار شکل زیر، با بستن کلید K، جریان عبوری از باتری آرمانی چند میلی آمپر تغییر می کند؟



۲ (۱)

۲۰ (۲)

۱/۲۵ (۳)

۱۲/۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در حالتی که کلید باز است، جریان عبوری از مولد را به دست می آوریم:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r} \xrightarrow{R_1 = 8 \Omega, r = 0} I_1 = \frac{10}{8} \text{ A}$$

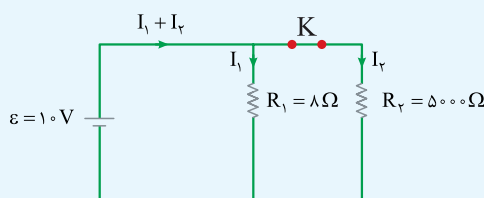
گام دوم: نسبت جریان الکتریکی در حالت دوم که کلید بسته است، به حالت اول که کلید باز است را به دست می آوریم:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{\varepsilon}{R_1 + r}}{\frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + r}} \xrightarrow{r=0} \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{8}{8 + 5000}$$

$$\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{8 + 5000}{5000} = \frac{5008}{5000}$$

گام سوم: اختلاف جریان عبوری از باتری را در دو حالت حساب می کنیم:

$$I_2 - I_1 = \frac{5008}{5000} I_1 - I_1 = I_1 \left(\frac{8}{5000} \right) \xrightarrow{I_1 = \frac{10}{8} \text{ A}} I_2 - I_1 = \frac{10}{8} \times \frac{8}{5000} = \frac{1}{500} = 2 \times 10^{-3} \text{ A} = 2 \text{ mA}$$



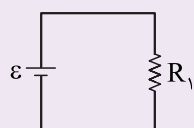
$$R_2 = \frac{V_2}{I_2} \Rightarrow I_2 = \frac{V_2}{R_2} \xrightarrow{V_2 = \varepsilon} I_2 = \frac{10}{5000} = 2 \text{ mA}$$

په چور ديگه

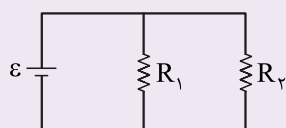
از آنجایی که باتری، آرمانی است، اختلاف پتانسیل دو سر هر دو مقاومت پس از وصل کلید برابر $\varepsilon = 10 \text{ V}$ است. در شکل مقابل، جریان عبوری از باتری قبل از وصل کلید K، برابر I_1 و پس از وصل کلید K برابر $I_1 + I_2$ است؛ بنابراین پس از وصل کلید، جریان عبوری از باتری به اندازه I_2 زیاد شده است. I_2 برابر است با:

در مدار (الف)، مقاومت $R_1 = 10 \Omega$ و نیروی محرکه باتری آرمانی $\varepsilon = 20 \text{ V}$ است. در مدار (ب)، مقاومت $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ به طور موازی به دو سر مقاومت R_1 متصل می شود. جریان عبوری از باتری چند میلی آمپر تغییر می کند؟

(سؤال ۷۲ کنکور تهری ۱۳۰۴ (فارج از کشور))



(الف)



(ب)

۱/۸ (۲)

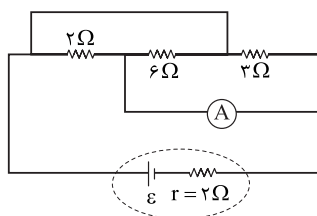
۲/۲ (۴)

۰/۲ (۱)

۲/۰ (۳)

کنکور

۵۶ در مدار شکل زیر، آمپرسنج آرمانی، 2 A را نشان می‌دهد. نیروی محرکه باتری چند ولت است؟



۶ (۱)

۸ (۲)

۹ (۳)

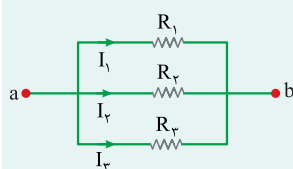
۱۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

(۱) نقاطی از مدار که به وسیله سیم‌های رابط (با مقاومت ناچیز) به یکدیگر وصل می‌شوند، هم‌پتانسیل هستند. مقاومت الکتریکی آمپرسنج آرمانی، صفر است و پتانسیل دو سر آن نیز یکسان است.

(۲) در به هم بستن موازی مقاومت‌ها، دو سر آن‌ها به وسیله سیم‌های رابط به یکدیگر متصل شده و اختلاف پتانسیل یکسان دارند، اما جریان الکتریکی کل، بین آن‌ها تقسیم می‌شود.

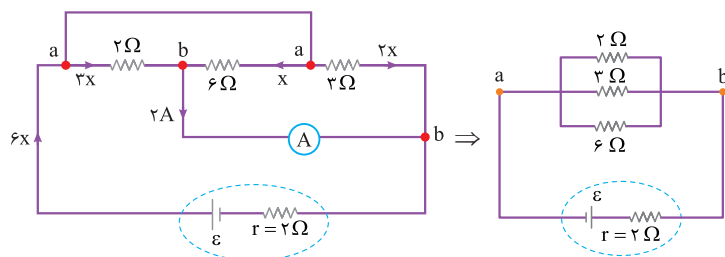


$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (R_{eq} = \text{مقاومت معادل } \Omega)$$

گام اول: شکل ساده‌تری از مدار رسم می‌کنیم: اگر جریان شاخه ۶ اهمی را x در نظر بگیریم، جریان شاخه‌های 3Ω و 2Ω به ترتیب $2x$ و $3x$ خواهد بود.

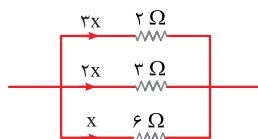


گام دوم: مقاومت معادل مدار و سپس جریان عبوری از مولد را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = 1 \Rightarrow R_{eq} = 1\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{\varepsilon}{1+2} = \frac{\varepsilon}{3} \text{ A}$$

گام سوم: جریان عبوری از مقاومت‌ها را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از قاعده انشعاب در نقطه b داریم:

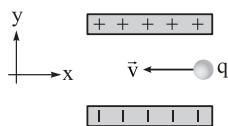


$$3x + x = 2 \Rightarrow x = 0.5 \text{ A}$$

$$I = 6x \Rightarrow I = 6 \times 0.5 = 3 \text{ A} \Rightarrow \varepsilon = 3I = 3 \times 3 = 9 \text{ V}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی منفی و جرم ناچیز با تندی $3 \times 10^4 \text{ m/s}$ در امتداد محور x ، وارد فضایی می‌شود که در آن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت وجود دارد. اگر اندازه میدان الکتریکی 90 N/C باشد، برای این که ذره در همان امتداد محور x به حرکتش ادامه دهد، کم‌ترین مقدار میدان مغناطیسی باید چند گاوس و در چه جهتی باشد؟ (نیروی مقاومت هوا ناچیز است.)



- (۱) 27° $\otimes$
 (۲) 30° $\otimes$
 (۳) 27° $\odot$
 (۴) 30° $\odot$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

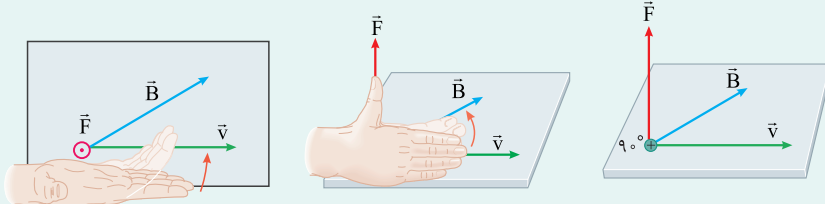
(۱) اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

اندازه میدان مغناطیسی (T) بزرگی بار (C)

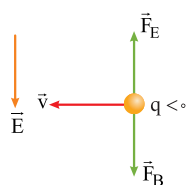
$$F_B = |q| v B \sin \theta \rightarrow \text{زاویه بین بردارهای سرعت و میدان مغناطیسی}$$

اندازه سرعت (m/s) اندازه نیرو (N)

(۲) تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار مثبت با استفاده از قاعده دست راست: اگر چهار انگشت دست راست را در جهت $\vec{v}$ قرار دهیم، به گونه‌ای که جهت خم شدن چهار انگشت در جهت $\vec{B}$ باشد؛ انگشت شست، جهت نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ را نشان می‌دهد.



گام اول: چون $q < 0$ است، $\vec{F}_E$ و $\vec{E}$ خلاف جهت هم هستند، یعنی $\vec{F}_E$ رو به بالا است. برای این که ذره در همان امتداد محور x به حرکتش ادامه دهد، باید نیروی خالص وارد بر ذره صفر باشد؛ یعنی نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باید به سمت پایین باشد:



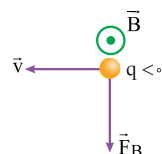
گام دوم: نیروی خالص وارد بر ذره برابر با صفر است، پس:

$$\vec{F}_E + \vec{F}_B = 0 \Rightarrow F_E - F_B = 0 \Rightarrow F_E = F_B \Rightarrow Eq = qvB \sin \theta \Rightarrow B = \frac{E}{v \sin \theta}$$

کم‌ترین مقدار میدان مغناطیسی در حالتی به دست می‌آید که $\sin \theta$ در مخرج کسر بیشترین مقدار، یعنی مقدار یک را داشته باشد، در نتیجه:

$$B = \frac{E}{v} = \frac{90}{3 \times 10^4} = 3 \times 10^{-3} \text{ T} = 3 \times 10^{-3} \text{ T} \times \frac{10^4 \text{ G}}{1 \text{ T}} = 30 \text{ G}$$

گام سوم: جهت میدان مغناطیسی با توجه به قاعده دست راست و نیز با توجه به منفی بودن بار، برون سو است.



از سیم راستی که موازی محور x است، جریان الکتریکی 5 A در جهت محور x می‌گذرد. اگر میدان مغناطیسی در

محل سیم، بر حسب تسلا به صورت $\vec{B} = 0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}$ باشد، نیروی وارد بر 20 سانتی‌متر از سیم چند نیوتون و در

چه جهتی است؟ (محور x و y در صفحه به صورت $\vec{x}$ و $\vec{y}$ است.)

- (۲) $\odot$ ، ۱
(۴) $\odot$ ، ۰.۸

- (۱) $\otimes$ ، ۱
(۳) $\otimes$ ، ۰.۸

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت از رابطه زیر به دست می‌آید:

طول بخشی از سیم (m) جریان عبوری از سیم (A)

$$F = I B \ell \sin \theta \rightarrow \text{زاویه بین سیم و میدان}$$

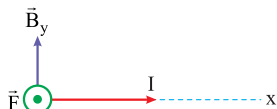
بزرگی میدان مغناطیسی (T) اندازه نیروی مغناطیسی (N)

گام اول: سیم موازی محور x ها است و این جاست که باید حواستان جمع باشد، زیرا شما مؤلفه‌ای از میدان را نیاز دارید که با سیم و جریان زاویه بسازد و مؤلفه y این شرط را دارد و اگر طبق قاعده دست راست عمل کنیم، جهت نیرو برون سو است.

گام دوم: مطابق فرمول درس باکس عمل می‌کنیم:

$$F = IB\ell \sin \theta \xrightarrow[\ell = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \theta = 90^\circ]{I = 5 \text{ A}, B_y = 0.8 \text{ T}}$$

$$F = 5 \times 0.8 \times 0.2 \times 1 = 0.8 \text{ N}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

تعداد حلقه‌ها و طول سیملوله A به ترتیب ۲ و $\frac{1}{4}$ برابر تعداد حلقه‌ها و طول سیملوله B است. اگر از این دو سیملوله جریان الکتریکی یکسان عبور کند، میدان مغناطیسی یکنواخت درون سیملوله A چند برابر میدان مغناطیسی یکنواخت درون سیملوله B است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

رابطه میدان مغناطیسی درون سیملوله:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

B: اندازه میدان مغناطیسی (T)

μ_0 : تراوایی مغناطیسی خلأ (T.m / A)

N: تعداد حلقه‌ها

I: جریان الکتریکی (A)

l: طول سیملوله (m)

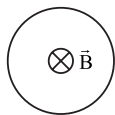
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: از رابطه میدان مغناطیسی درون سیملوله استفاده می‌کنیم:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

گام دوم: رابطه را به صورت نسبتی می‌نویسیم و نسبت $\frac{B_A}{B_B}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{B_A}{B_B} = \frac{N_A}{N_B} \times \frac{l_B}{l_A} \times \frac{I_A}{I_B} = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

۶۰. در شکل زیر، قطر حلقه حامل جریان، برابر $2/5 \text{ cm}$ و میدان مغناطیسی حاصل از حلقه در مرکز آن برابر $B = 2 \text{ G}$ است. جریان الکتریکی عبوری از حلقه چند آمپر و در چه جهتی است؟ $(\mu_0 = 12/5 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$



- (۱) ۴، ساعتگرد
(۲) ۴، پادساعتگرد
(۳) ۸، ساعتگرد
(۴) ۸، پادساعتگرد

پاسخ: گزینه ۱

رابطه میدان مغناطیسی در مرکز یک پیچۀ مسطح:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$

B : اندازه میدان مغناطیسی (T)

μ_0 : تراوایی مغناطیسی خلأ (T.m / A)

N : تعداد حلقه‌ها

I : جریان الکتریکی (A)

R : شعاع حلقه‌ها (m)

گام اول: از رابطه میدان مغناطیسی در مرکز حلقه استفاده می‌کنیم:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2R}$$

$$I = \frac{2RB}{N\mu_0} \xrightarrow[N=1, \mu_0=12/5 \times 10^{-7} \text{ T.m/A}]{2R=2/5 \text{ cm}=2/5 \times 10^{-2} \text{ m}, B=2 \text{ G}=2 \times 10^{-4} \text{ T}} I = \frac{2/5 \times 10^{-2} \times 2 \times 10^{-4}}{12/5 \times 10^{-7}} = 4 \text{ A}$$

گام دوم: با استفاده از قاعده دست راست، جهت جریان را ساعتگرد به دست می‌آوریم.

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

سطح حلقهٔ رسانایی، به شکل مربع با ضلع 20 cm ، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 0.5 T قرار دارد. اگر در مدت 0.2 s ، حلقه را طوری بچرخانیم که سطح آن موازی با خط‌های میدان مغناطیسی شود، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط ایجادشده در حلقه در این مدت چند ولت است؟

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) 0.2
(۴) 0.1

مشاوره در این مدل تست‌ها که تغییر زاویه باعث تغییر شار مغناطیسی شده، حواستون باشه زاویهٔ مورد نظر زاویهٔ بین نیم‌خط عمود بر صفحه و میدان مغناطیسی است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط ایجادشده در حلقه را از رابطهٔ $\varepsilon_{av} = \left| -NAB \frac{\cos \theta_2 - \cos \theta_1}{\Delta t} \right|$ محاسبه کنید.

Hint

درس‌Box

طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، با تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه، نیروی محرکه‌ای در حلقه القا می‌شود. اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$|\varepsilon_{av}| = \left| -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| \Rightarrow \begin{cases} |\varepsilon_{av}| = \left| -NAB \frac{\cos \theta_2 - \cos \theta_1}{\Delta t} \right| & \text{اگر تغییر شار ناشی از تغییر زاویه باشد:} \\ |\varepsilon_{av}| = \left| -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} \right| & \text{اگر تغییر شار ناشی از تغییر میدان باشد:} \\ |\varepsilon_{av}| = \left| -NB \cos \theta \frac{\Delta A}{\Delta t} \right| & \text{اگر تغییر شار ناشی از تغییر مساحت باشد:} \end{cases}$$

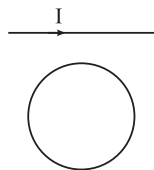
تغییر زاویهٔ بین نیم‌خط عمود بر صفحه و میدان مغناطیسی، باعث تغییر شار مغناطیسی و ایجاد نیروی محرکهٔ القایی متوسط شده است. در حالت اول که سطح حلقه عمود بر میدان مغناطیسی قرار دارد، زاویهٔ بین نیم‌خط عمود بر صفحه و میدان، صفر درجه است و در حالت دوم که سطح حلقه موازی با میدان مغناطیسی است، این زاویه 90° است، پس:

پاسخ خیلی تشریحی

$$|\varepsilon_{av}| = \left| -NAB \frac{\cos \theta_2 - \cos \theta_1}{\Delta t} \right| = \left| -1 \times (20 \times 20 \times 10^{-4}) \times 0.5 \times \frac{(\cos 90^\circ - \cos 0^\circ)}{0.2} \right|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_{av}| = \frac{4 \times 10^{-2} \times 0.5}{0.2} = 0.1\text{ V}$$

در شکل زیر، حلقهٔ رسانایی در نزدیکی یک سیم بلند حامل جریان I قرار دارد. کدام یک از تغییرات زیر، در حلقهٔ جریان الکتریکی ساعتگرد القا می‌کند؟



- (۱) کاهش جریان I ، دور کردن حلقه از سیم
- (۲) افزایش جریان I ، دور کردن حلقه از سیم
- (۳) کاهش جریان I ، نزدیک کردن حلقه به سیم
- (۴) افزایش جریان I ، نزدیک کردن حلقه به سیم

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

ابتدا جهت میدان مغناطیسی ناشی از سیم بلند و میدان مغناطیسی القایی حلقه را تعیین کنید؛ سپس به کمک قانون لنز، تغییراتی که باعث ایجاد این میدان می‌شود را پیدا کنید.

درس Box

قانون لنز بیان می‌کند که وقتی شار مغناطیسی تغییر می‌کند، جریان در جهتی در حلقه القا می‌شود که میدان مغناطیسی ناشی از آن با تغییر شار مخالفت می‌کند؛ یعنی:

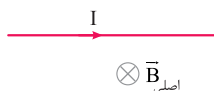
• وقتی شار مغناطیسی افزایش می‌یابد، میدان مغناطیسی اصلی و القایی در خلاف جهت هم هستند:



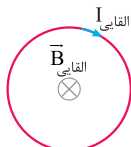
• وقتی شار مغناطیسی کاهش می‌یابد، میدان مغناطیسی اصلی و القایی هم جهت هستند:



میدان مغناطیسی ناشی از سیم مستقیم در مرکز حلقه را به کمک قاعدهٔ دست راست مشخص می‌کنیم:



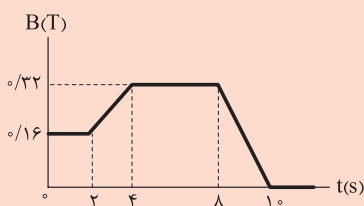
برای این که در حلقه، جریان الکتریکی ساعتگرد القا شود، طبق قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی القایی در مرکز حلقه باید درون سو باشد:



چون میدان مغناطیسی حاصل از سیم در مرکز حلقه و میدان مغناطیسی القایی در مرکز حلقه هم جهت هستند، طبق قانون لنز، باید در گزینه‌ها به دنبال تغییراتی باشیم که میدان یا جریان ناشی از سیم بلند را کاهش می‌دهد. در بین گزینه‌ها، کاهش جریان یا دور کردن حلقه از سیم باعث کاهش میدان می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یک حلقهٔ رسانای مربع شکل به ضلع 5 cm و مقاومت الکتریکی $1\ \Omega$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. خطوط میدان مغناطیسی، عمود بر سطح حلقه است. میدان مغناطیسی، مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می کند. بزرگی جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t_1 = 0\text{ s}$ تا $t_2 = 10\text{ s}$ چند میلی آمپر است؟



(۱) 0.4

(۲) 0.8

(۳) 4

(۴) 8

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا به کمک نمودار، آهنگ تغییر میدان مغناطیسی در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 را به دست آورید. در ادامه به کمک قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، ε_{av} و سپس I_{av} را حساب کنید.

Hint

درس Box

(۱) قانون القای الکترومغناطیسی فاراده:

با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک مدار بسته، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود. نیروی محرکهٔ القایی متوسط در این مدار از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad \Phi = BA \cos \theta \quad \varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta B}{\Delta t} A \cos \theta$$

آهنگ تغییر شار مغناطیسی (Wb/s) تعداد حلقه‌ها آهنگ تغییر اندازهٔ میدان مغناطیسی (T/s)

فقط B تغییر کند. زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و نیم خط عمود بر سطح حلقه

نیروی محرکهٔ القایی متوسط (V) مساحت حلقه (m^2)

(۲) جریان القایی متوسط:

$$I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R}$$

مقاومت (Ω) جریان (A)

گام اول: به آهنگ تغییر شار مغناطیسی در بازهٔ زمانی $t = 0\text{ s}$ تا $t = 10\text{ s}$ نیاز داریم. به کمک نمودار می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B_{10\text{s}} - B_{0\text{s}}}{10 - 0} = \frac{0 - 0.16}{10} = -0.016\text{ T/s}$$

گام دوم: جریان القایی متوسط در حلقه در این بازهٔ زمانی به صورت زیر به دست می‌آید:

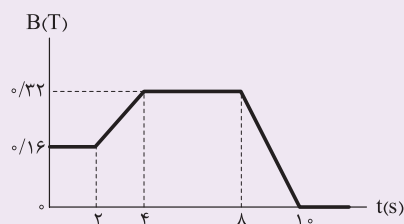
$$I_{av} = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} = \frac{|-N \frac{\Delta B}{\Delta t} A \cos \theta|}{R} = \frac{|-1 \times (-0.016) \times (0.05 \times 0.05) \times \cos 0|}{0.1}$$

$$= \frac{4 \times 10^{-5}}{0.1} = 4 \times 10^{-4}\text{ A} \xrightarrow{1\text{ A} = 10^3\text{ mA}} I_{av} = 0.4\text{ mA}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یک حلقهٔ رسانای مربع شکل به ضلع 2 cm و مقاومت الکتریکی $1\ \Omega$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. خطوط میدان مغناطیسی، عمود بر صفحهٔ حلقه است. میدان مغناطیسی مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می کند. جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t = 2\text{ s}$ تا $t = 10\text{ s}$ چند میلی آمپر است؟

(سوال ۷۱ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت اول)



(۱) صفر

(۲) 0.04

(۳) 0.06

(۴) 0.08

۶۴

جریان الکتریکی عبوری از یک القاگر فرضی $A = 300$ و انرژی ذخیره شده در آن یک کیلووات ساعت است. ضریب القاوری این القاگر چند هانری است؟

۳۶۰ (۴)

۸۰ (۳)

۳۶ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

انرژی ذخیره شده در سیملوله:

درس Box

ضریب القاوری سیملوله

$$U = \frac{1}{2} L I^2 \rightarrow \text{جریان عبوری از سیملوله} \quad \leftarrow \text{انرژی (J)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: انرژی ذخیره شده در سیملوله را برحسب ژول به دست می آوریم:

$$U = 1 \text{ kW} \cdot h \times \frac{10^3 \text{ W}}{1 \text{ kW}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 36 \times 10^5 \text{ W} \cdot s = 36 \times 10^5 \text{ J}$$

گام دوم: ضریب القاوری سیملوله به صورت زیر حساب می شود:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow 36 \times 10^5 = \frac{1}{2} L \times (300)^2 \Rightarrow L = \frac{2 \times 36 \times 10^5}{9 \times 10^4} = 80 \text{ H}$$

متخصصان صنعت برق، علاقه مندند راه های مؤثری را برای ذخیره انرژی الکتریکی تولیدی در ساعت های کم مصرف (کم باری) بیابند تا با استفاده از آن، نیاز مشترکان را در ساعت های پرمصرف (اوج بار) تأمین کنند. یک ایده فرضی، استفاده از یک القاگر بزرگ است. ضریب القاوری این القاگر چه قدر باشد تا بتواند 10 kWh انرژی الکتریکی را در پیچه حامل جریان $A = 200$ ذخیره کند؟

(فیزیک (۲) ریاضی - مثال ۴ - ۶ صفحه ۱۲۱ کتاب درسی)

کتاب درسی

۶۵ معادله جریان عبوری از یک مولد جریان متناوب در SI به صورت $I = 0.5 \sin 250\pi t$ است. در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، جریان عبوری از مولد برای اولین بار بیشینه می‌شود؟

(۲) $\frac{1}{500}$

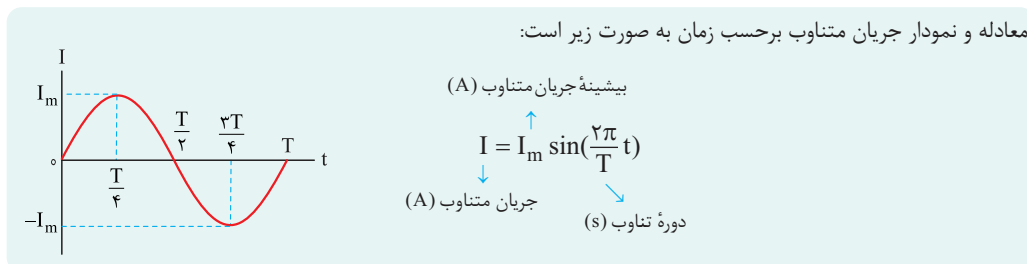
(۱) $\frac{1}{200}$

(۴) $\frac{1}{5000}$

(۳) $\frac{1}{2000}$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: به کمک معادله جریان متناوب، دوره تناوب جریان را به دست می‌آوریم:

$$\frac{2\pi}{T} = 250\pi \Rightarrow T = \frac{1}{125} \text{ s}$$

گام دوم: جریان برای اولین بار در لحظه $t = \frac{T}{4}$ بیشینه می‌شود، پس:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{125 \times 4} = \frac{1}{500} \text{ s}$$

ویژگی‌های «توانایی از دست دادن الکترون، رسانایی الکتریکی بالا و تعلق داشتن به دسته p جدول دوره‌ای» را به کدام عنصر می‌توان نسبت داد؟

ویژگی فلزها است.

(۱) سومین عنصر گروه ۱۴

(۲) عنصری از دوره سوم با ۶ الکترون ظرفیتی

(۳) عنصری با عدد اتمی ۲۰

(۴) عنصری با آرایش الکترونی $[Kr] 4d^1 5s^2 5p^2$

پاسخ: گزینه ۴

ویژگی‌های فلزها، نافلزها و شبه‌فلزها:

کد Box

فلز	نافلز	شبه‌فلز
تمایل به از دست دادن الکترون	تمایل به گرفتن و اشتراک گذاشتن الکترون	تمایل به اشتراک گذاشتن الکترون
رسانایی الکتریکی بالا	رسانایی الکتریکی ندارد (به جز گرافیت)	رسانایی الکتریکی کم
رسانایی گرمایی دارد	رسانایی گرمایی ندارد	رسانایی گرمایی دارد
چکش‌خوار	شکننده	شکننده
دارای سطح صیقلی	دارای سطح کدر	دارای سطح صیقلی

توانایی از دست دادن الکترون و رسانایی الکتریکی بالا متعلق به ویژگی فلزها است؛ یعنی سؤال به دنبال فلز متعلق به دسته p (گروه ۱۳ تا ۱۸) می‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): سومین عنصر گروه ۱۴، Ge می‌باشد که یک شبه‌فلز (نه فلز!) است:

گروه ۱۴

C	→ نافلز
Si	} شبه‌فلز
Ge	
Sn	} فلز
Pb	

گزینه (۲): در دوره سوم جدول تناوبی، عناصر متعلق به دسته S و p حضور دارند و عناصر دسته S، ۱ یا ۲ الکترون ظرفیتی دارند. ← عنصر مربوطه متعلق به دسته p می‌باشد:

$$X = [1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^n] \Rightarrow 2 + n = 6 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow X = {}_{16}S$$

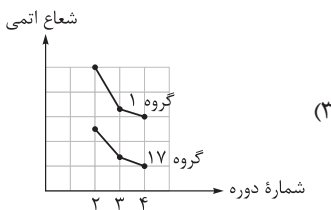
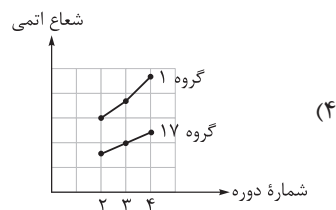
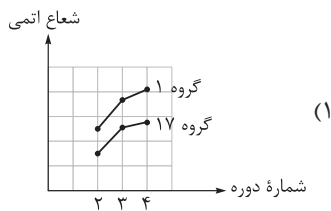
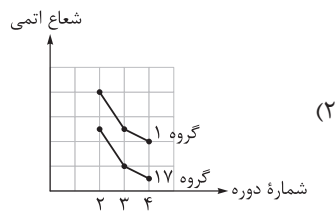
الکترون‌های ظرفیتی

گوگرد نافلز (نه فلز!) است.

گزینه (۳): عنصری با عدد اتمی ۲۰، Ca است که در دوره چهارم و گروه دوم و در دسته S (نه p!) جای دارد.

گزینه (۴): آرایش الکترونی مورد نظر متعلق به فلز Sn از گروه ۱۴ و دوره پنجم است که یک فلز متعلق به دسته p می‌باشد.

نمودار تغییر شعاع اتمی سه عنصر نخست گروه‌های اول و هفدهم جدول دوره‌ای، بر حسب شماره دوره آن‌ها به کدام صورت زیر درست‌تر است؟

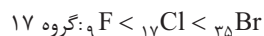
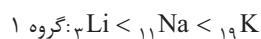


پاسخ: گزینه ۴

در یک دوره، از چپ به راست، شعاع اتمی عناصر کاهش و در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی عناصر افزایش می‌یابد.

با توجه به این که در یک گروه با افزایش شماره دوره، شعاع اتمی زیاد می‌شود، گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شوند!

مقایسه شعاع اتمی سه عنصر اول گروه‌های ۱ و ۱۷ به صورت زیر است:



با توجه به جدول کتاب درسی، شعاع ${}_{3}\text{Li}$ حتی از ${}_{35}\text{Br}$ نیز بیشتر می‌باشد؛ بنابراین گزینه (۱) نیز رد می‌شود و جواب درست، گزینه (۴) است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر مجموع $(n + l)$ الکترون‌های ظرفیت اتم عنصر A از دسته p جدول دوره‌ای برابر ۱۴ باشد، کدام مورد نادرست است؟
 (۱) عنصر A خصلت نافلزی کم‌تری نسبت به $X_{۱۶}$ دارد.
 (۲) تفاوت عدد اتمی آن با اولین فلز هم‌گروه خود برابر ۳۲ است.
 (۳) شعاع اتمی بیشتری نسبت به نافلزترین عنصر جدول تناوبی دارد.
 (۴) در جدول تناوبی، میان عنصرهای فلزی و نافلزی هم‌دوره خود قرار گرفته است.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

آرایش الکترونی عنصرهای دسته p به $ns^2 np^m$ ختم می‌شود.

گام اول: ابتدا با رسم آرایش الکترونی اتم A، مجموع $n + l$ الکترون‌های ظرفیت آن را حساب می‌کنیم:

$$A = \dots \dots \dots \underbrace{ns^2 np^m}_{\text{الکترون‌های ظرفیت}} \Rightarrow (n + l) = 2(n + 0) + m(n + 1) \Rightarrow 2n + mn + m = (2 + m)n + m = 14$$

گام دوم: با استفاده از عددگذاری، n و m را به دست می‌آوریم و سپس عنصر A را مشخص می‌کنیم:

$$(2 + m)n + m = 14 \xrightarrow{n \geq 2 \Rightarrow \text{در لایه اول، p نداریم}} \begin{cases} n = 2, m = \frac{10}{3} \times \\ n = 3, m = 2 \checkmark \Rightarrow A = {}_{14}\text{Si} \\ n = 4, m = \frac{6}{5} \times \end{cases}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): عنصر ${}_{14}\text{Si}$ خصلت نافلزی (واکنش‌پذیری) کم‌تری نسبت به $S_{۱۶}$ دارد. ✓

گزینه (۲): اولین فلز هم‌گروه ${}_{14}\text{Si}$ ، $Sn_{۵۰}$ می‌باشد که تفاوت عدد اتمی آن‌ها برابر $50 - 14 = 36$ است. ✗

گزینه (۳): ${}_{14}\text{Si}$ شعاع اتمی بیشتری نسبت به F دارد، زیرا در یک دوره پایین‌تر و سمت چپ‌تر از آن قرار دارد. ✓

گزینه (۴): ${}_{14}\text{Si}$ یک شبه‌فلز بوده و در دوره سوم، مانند مرزی میان فلزها و نافلزها است. ✓

Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar
فلز				نافلز			

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) اگر آرایش الکترونی یون پایدار M^{n+} به $3d^9$ ختم شود، برای n دو مقدار متفاوت می‌توان در نظر گرفت.
- (۲) در واکنش محلول آهن (III) کلرید با سدیم هیدروکسید، رسوبی به رنگ قرمز - قهوه‌ای حاصل می‌شود.
- (۳) واکنش $CuO + Ti \rightarrow Cu + TiO_2$ ، به طور طبیعی انجام‌پذیر است.
- (۴) هر چه فلزی واکنش‌پذیرتر باشد، ترکیب‌هایش پایدارتر از خودش هستند.

پاسخ: گزینه ۱

گزینه (۱) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

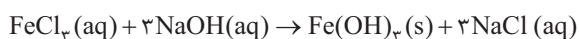
بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): برای رسیدن به آرایش الکترونی اتم از کاتیون آن در عناصر دسته d، ابتدا به میزان بار کاتیون، الکترون به زیرلایه s لایه بعدی می‌دهیم و اگر بار کاتیون بیشتر از ۲ باشد، باقی‌مانده الکترون‌ها را به زیرلایه d می‌دهیم. حالت‌های مختلف n را بررسی می‌کنیم:

$$M^{n+} = [18Ar] 3d^9 \begin{cases} n=1 \Rightarrow M = [18Ar] 3d^9 4s^1 \times \\ n=2 \Rightarrow M = [18Ar] 3d^9 4s^2 \xrightarrow{-2e^- Cu} [18Ar] 3d^{10} 4s^1 \checkmark \\ n=3 \Rightarrow M = [18Ar] 3d^{10} 4s^2 \Rightarrow {}_30Zn \text{ (روی کاتیون ۲ بار مثبت تشکیل می‌دهد.)} \times \end{cases}$$

n تنها یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

گزینه (۲): معادله واکنش محلول آهن (III) کلرید با سدیم هیدروکسید به صورت زیر است:



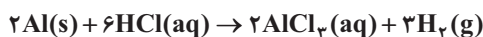
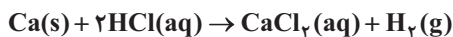
در این واکنش، رسوب $Fe(OH)_3$ تشکیل می‌شود که یک رسوب قرمز - قهوه‌ای رنگ است.

گزینه (۳): فلز تیتانیم، واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به فلز مس دارد؛ بنابراین واکنش $CuO + Ti \rightarrow Cu + TiO_2$ به طور طبیعی انجام می‌شود.

گزینه (۴): کاملاً درسته! هر چه فلزی واکنش‌پذیرتر باشد، ترکیب‌هایش پایدارتر از خودش هستند.

۷۰

اگر حجم گاز هیدروژن حاصل از واکنش یک گرم فلز آلومینیم ناخالص با هیدروکلریک اسید در شرایط STP، با حجم گاز هیدروژن حاصل از واکنش دو گرم فلز کلسیم ناخالص با هیدروکلریک اسید در همان شرایط برابر باشد، نسبت درصد خلوص Al به Ca در نمونه‌های اولیه کدام است؟ ($Al = 27, Ca = 40 : g.mol^{-1}$)



۱ / ۸ (۲)

۰ / ۹ (۱)

۰ / ۴ (۴)

۲ / ۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

Hint

گازها در دما و فشار یکسان، حجم مولی یکسانی دارند؛ در نتیجه نسبت حجم دو گاز برابر با نسبت شمار مول‌های آن‌ها است.

گام اول: مقدار مول گاز هیدروژن تولیدشده به ازای مصرف ۱ گرم آلومینیم با خلوص $x\%$ را به دست می‌آوریم:

$$1 \text{ g Al ناخالص} \times \frac{x \text{ g Al}}{100 \text{ g Al ناخالص}} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{3 \text{ mol H}_2}{2 \text{ mol Al}} = \frac{x}{18} \times 10^{-2} \text{ mol H}_2$$

گام دوم: مقدار مول گاز هیدروژن تولیدشده به ازای مصرف دو گرم کلسیم با خلوص $y\%$ را به دست می‌آوریم:

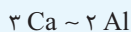
$$2 \text{ g Ca ناخالص} \times \frac{y \text{ g Ca}}{100 \text{ g Ca ناخالص}} \times \frac{1 \text{ mol Ca}}{40 \text{ g Ca}} \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{1 \text{ mol Ca}} = \frac{y}{20} \times 10^{-2} \text{ mol H}_2$$

گام سوم: مول گاز هیدروژن تولیدشده در دو واکنش را برابر قرار می‌دهیم و سپس نسبت درصد خلوص Al (x) به درصد خلوص

Ca (y) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{18} \times 10^{-2} = \frac{y}{20} \times 10^{-2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{18}{20} = 0/9$$

معادله اول را در ۳ ضرب می‌کنیم تا ضریب H_2 در دو معادله یکسان شود، سپس بین Ca و Al تناسب برقرار می‌کنیم:



$$\frac{\text{درصد خلوص Ca} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{درصد خلوص Al} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{3 \times \frac{\text{درصد خلوص Ca}}{100}}{3 \times 40} = \frac{1 \times \frac{\text{درصد خلوص Al}}{100}}{2 \times 27}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \times 27 \times \text{درصد خلوص Ca} = 3 \times \frac{1}{4} \times \text{درصد خلوص Al} \Rightarrow \frac{\text{درصد خلوص Al}}{\text{درصد خلوص Ca}} = \frac{27}{30} = 0/9$$

په‌چور دیگه

اگر در نمونه‌ای به جرم ۱۴۸ گرم از لیتیم کربنات ناخالص، تعداد اتم‌های کربن برابر $3/0 \times 10^{23}$ باشد، درصد خلوص لیتیم کربنات در این نمونه کدام است و اگر نمونه‌ای به جرم ۴۰۰ گرم از لیتیم کربنات با همین درصد خلوص با مقدار کافی محلول HCl طبق معادله زیر واکنش دهد، مجموع جرم گازهای تولیدی، به تقریب چند گرم است؟ (بازده درصدی انجام این واکنش را برابر ۶۰٪ در نظر بگیرید، در قسمت ناخالص نمونه لیتیم کربنات، کربن وجود ندارد، $H = 1, Li = 7, C = 12, O = 16; g \cdot mol^{-1}$)



$$50/3 - 25/4$$

$$83/8 - 25/4$$

$$50/3 - 25/4$$

$$83/8 - 25/4$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا از تعداد اتم‌های کربن به تعداد مول کربن می‌رسیم:

$$3/0 \times 10^{23} \text{ mol C} \times \frac{1 \text{ mol C}}{6/02 \times 10^{23} \text{ mol C}} = \frac{1}{2} \text{ mol C}$$

گام دوم: به کمک تعداد مول کربن، جرم خالص لیتیم کربنات را حساب می‌کنیم:

$$1 Li_2CO_3 \sim 1 C \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ mol C} \times \frac{1 \text{ mol } Li_2CO_3}{1 \text{ mol C}} \times \frac{74 \text{ g } Li_2CO_3}{1 \text{ mol } Li_2CO_3} = 37 \text{ g } Li_2CO_3$$

گام سوم: درصد خلوص لیتیم کربنات را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{مقدار خالص}}{\text{مقدار کل}} \times 100 = \frac{37}{148} \times 100 = 25\%$$

گام چهارم: مجموع جرم گازهای تولیدشده را به دست می‌آوریم:

به ازای مصرف ۱ مول لیتیم کربنات ۱ مول CO_2 و ۱ مول آب تولید می‌شود.

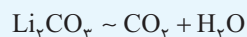
$$1 Li_2CO_3 \sim 1 CO_2 + 1 H_2O \Rightarrow 1 Li_2CO_3 \sim 62 \text{ g گاز}$$

$$400 \text{ g } Li_2CO_3 \text{ ناخالص} \times \frac{25 \text{ g } Li_2CO_3}{100 \text{ g } Li_2CO_3 \text{ ناخالص}} \times \frac{1 \text{ mol } Li_2CO_3}{74 \text{ g } Li_2CO_3} \times \frac{62 \text{ g گاز}}{1 \text{ mol } Li_2CO_3} \times \frac{60}{100} = 50/3 \text{ g}$$

په جور دیگه



$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{تعداد}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{148 \times \frac{x}{100}}{1 \times 74} = \frac{3/0 \times 10^{23}}{1 \times 6/02 \times 10^{23}} \Rightarrow x = \frac{100}{4} = 25\%$$



$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{مجموع جرم}}{(\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}) + (\text{جرم مولی} \times \text{ضریب})} = \frac{400 \times \frac{25}{100} \times \frac{60}{100}}{(1 \times 44) + (1 \times 18)} \Rightarrow y = \frac{60 \times 62}{74} = 50/3 \text{ g گاز}$$

مجموع اعداد، در نام آیوپاک آلکانی که به اشتباه «۲، ۳ - دی اتیل - ۳، ۵ - دی متیل هپتان» نام گذاری شده، کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

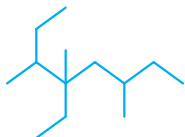
۱۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

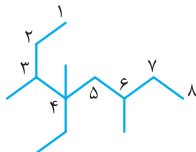
در این دست از سؤالات که یک ترکیب با نام گذاری اشتباه به ما می دهند و در مورد نام گذاری درست آن سؤال می پرسند، باید ساختار همان نام گذاری اشتباه را رسم کرده و سپس نام گذاری صحیح را انجام دهیم.

گام اول: ساختار با نام اشتباه را رسم می کنیم:



گام دوم: طول ترین زنجیره هیدروکربنی را شناسایی می کنیم:

گام سوم: مشخص کردن جهت شماره گذاری اتم های کربن: از چپ به راست شماره گذاری می کنیم، چون شماره شاخه های فرعی کم تر می شود ($3446 < 3556$):



گام چهارم: نام گذاری می کنیم:

نام درست ترکیب به صورت ۴ - اتیل - ۳، ۴، ۶ - تری متیل اوکتان است که مجموع شماره شاخه های فرعی آن برابر $17 = 3 + 4 + 4 + 6$ می باشد.

مخلوطی گازی شامل نخستین عضو خانواده آلکان‌ها (A)، آلکن‌ها (X) و آلکین‌ها (D) با ۲/۱ مول گاز هیدروژن به طور کامل واکنش داده و فراورده‌های سیرشده تشکیل می‌شود. اگر شمار مول‌های X و D در مخلوط اولیه یکسان و نصف شمار مول‌های A باشد، حجم مخلوط اولیه هیدروکربن‌ها در شرایط STP چند لیتر است؟

$$۶۲ / ۷۲ (۱)$$

$$۴۷ / ۵۴ (۲)$$

$$۳۱ / ۳۶ (۳)$$

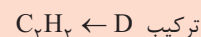
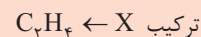
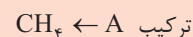
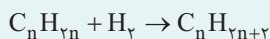
$$۱۵ / ۶۸ (۴)$$

مشاوره واکنش سیرشدن آلکن‌ها و آلکین‌ها با هیدروژن و استوکیومتری مخلوط‌ها، از تیپ‌های پر تکرار کنکور سراسری است. این سؤال یک شبیه‌سازی و پیش‌بینی بسیار خوب از کنکور سراسری می‌باشد. راه‌حل این گونه سؤالات را به خوبی یاد بگیرید.

پاسخ: گزینه ۱

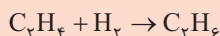
آلکان‌ها با هیدروژن واکنش نمی‌دهند. ابتدا از طریق هیدروژن مصرف‌شده، به مول X و D می‌رسیم و سپس حجم مخلوط اولیه را به دست می‌آوریم.

آلکن‌ها و آلکین‌ها با گاز هیدروژن واکنش می‌دهند و تبدیل به فراورده سیرشده (آلکان هم‌کربن) می‌شوند. واکنش‌های مورد نظر به صورت زیر می‌باشد:

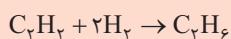


گام اول: طبق صورت سؤال، فرض می‌کنیم x مول از ترکیب‌های X و D و ۲x مول از ترکیب A در مخلوط وجود دارد.

گام دوم: با توجه به واکنش‌های سیرشدن آلکن‌ها و آلکین‌ها، مقدار مول هیدروژن مصرف‌شده را به دست می‌آوریم:



$$x \text{ mol } C_2H_4 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{1 \text{ mol } C_2H_4} = x \text{ mol } H_2$$



$$x \text{ mol } C_2H_2 \times \frac{2 \text{ mol } H_2}{1 \text{ mol } C_2H_2} = 2x \text{ mol } H_2$$

$$x + 2x = 3x = 2/1 \Rightarrow x = 0/7$$

گام سوم: حجم مخلوط اولیه را در شرایط STP به دست می‌آوریم:

$$x + x + 2x = 4x = 4 \times 0/7 = 2/8 \text{ mol}$$

$$2/8 \text{ mol} \times \frac{22.4 \text{ L}}{1 \text{ mol}} = 62/72 \text{ L}$$

۱۱/۲ لیتر مخلوطی از گازهای اتان، اتن و اتین در شرایط STP با ۰/۱۵ مول گاز هیدروژن به طور کامل واکنش می‌دهد و فراورده‌های سیرشده، تشکیل می‌شود. اگر شمار مول‌های اتن و اتین در این مخلوط با هم برابر باشد، چند درصد از مول‌های مخلوط اولیه را گاز اتان تشکیل می‌دهد؟

(سؤال ۲۴۲ کنکور تهرانی ۱۴۰۰)

$$۸۰ (۴)$$

$$۶۰ (۳)$$

$$۴۰ (۲)$$

$$۲۰ (۱)$$

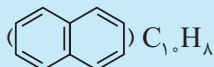
Hint

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی

کنکور

کدام موارد زیر در ارتباط با نفتالن درست است؟



الف) در ساختار آن، ۲۴ پیوند اشتراکی وجود دارد.

ب) تفاوت شمار پیوندهای C—H و پیوندهای C—C در ساختار آن، برابر با شمار پیوندهای C=C مولکول آن است.

پ) سرگروه خانواده هیدروکربنهای آروماتیک است.

ت) تفاوت جرم مولی آن با جرم مولی سیکلوهگزان برابر با جرم مولی پروپان است.



(۲) «ب» - «پ»

(۴) «الف» - «ت»

(۱) «الف» - «ب»

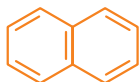
(۳) «پ» - «ت»

پاسخ: گزینه ۴

عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نفتالن از خانواده هیدروکربنهای آروماتیک است و فرمول مولکولی آن، $C_{10}H_8$ و ساختار آن به صورت زیر می‌باشد:



بررسی عبارت‌ها:

(الف)

شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار هیدروکربن‌ها را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها} = \frac{(1 \times \text{شمار اتم‌های هیدروژن}) + (4 \times \text{شمار اتم‌های کربن})}{2}$$

$$\text{تعداد پیوندها در نفتالن} = \frac{(10 \times 4) + (8 \times 1)}{2} = 24$$

ب) تعداد پیوندهای C—H، تعداد پیوندهای C—C و تعداد پیوند C=C در ساختار نفتالن به ترتیب برابر ۸، ۶ و ۵ است.

پ) سرگروه هیدروکربنهای آروماتیک، بنزن است نه نفتالن.

ت) با توجه به فرمول مولکولی نفتالن و سیکلوهگزان داریم:

$$C_{10}H_8 - C_6H_{12} = 4C - 4H = 48 - 4 = 44 \text{ g}$$

جرم مولی پروپان (C_3H_8) نیز برابر ۴۴ گرم است.



۷۵

نسبت جرمی کربن به هیدروژن در هیدروکربنی به فرمول C_xH_y برابر ۹ است. اگر اضافه کردن آن به مقدار کمی از محلول برم در یک حلال آلی، سبب بی‌رنگ شدن محلول، این هیدروکربن متعلق به خانواده است.

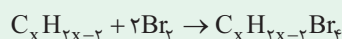
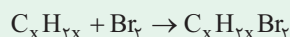
($H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

- (۱) شود - آلکن‌ها
(۲) نشود - آلکان‌ها
(۳) شود - آلکین‌ها
(۴) نشود - سیکلوآلکان‌ها

مشاوره واکنش آلکن‌ها و آلکین‌ها با محلول برم و بی‌رنگ کردن آن از مفاهیم و مسائل پرتکرار در کنکور سراسری است.

پاسخ: گزینه ۳

آلکن‌ها و آلکین‌ها سیر نشده هستند و می‌توانند برم را بی‌رنگ کنند:



گام اول: نسبت جرمی کربن به هیدروژن را حساب می‌کنیم: **پاسخ خیلی تشریحی ✓**

$$\frac{\text{جرم کربن در } C_xH_y}{\text{جرم هیدروژن در } C_xH_y} \Rightarrow \frac{12x}{y} = 9 \Rightarrow 4x = 3y \quad (*)$$

گزینه‌های (۱) و (۴) همین‌جا رد می‌شوند، زیرا در آلکن‌ها و سیکلوآلکان‌ها، رابطه $y = 2x$ برقرار است.

گام دوم: اگر ترکیب مورد نظر، محلول برم را بی‌رنگ کند، آلکین و اگر بی‌رنگ نکند، آلکان می‌باشد:

$$\text{اگر آلکان باشد} \Rightarrow y = 2x + 2 \xrightarrow{(*)} y = 1/5y + 2 \Rightarrow y = -4x$$

$$\text{اگر آلکین باشد} \Rightarrow y = 2x - 2 \xrightarrow{(*)} y = 1/5y - 2 \Rightarrow y = 4x \checkmark$$

هیدروکربنی به فرمول C_xH_y شناسایی شده است. افزودن چند قطره از آن به مقدار کمی از محلول برم در یک حلال آلی، سبب بی‌رنگ شدن محلول می‌شود.

الف) این هیدروکربن جزء آلکان‌ها، آلکن‌ها یا سیکلوآلکان‌ها است؟ چرا؟

ب) نسبت جرمی کربن به هیدروژن در آن برابر با ۶ و جرم مولی آن برابر با ۱۴۰/۲ گرم است. فرمول مولکولی آن را بیابید.

پ) با مراجعه به نمودار صفحه ۳۶، حالت فیزیکی این هیدروکربن را پیش‌بینی کنید.

(شیمی (۲) - تمرین‌های دوره‌ای صفحه ۵۰ کتاب درسی)

کتاب درسی

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) اگر انرژی گرمایی ماده A از ماده B بیشتر باشد، میانگین تندی ذره‌های سازنده ماده A از ماده B بیشتر است.
- (۲) در واکنش‌هایی که در دمای ثابت انجام می‌شوند ($\Delta\theta = 0$)، میان سامانه و محیط، انرژی مبادله نمی‌شود.
- (۳) اگر از سوختن دو دگرشکل A و B از یک عنصر به ترتیب x و y کیلوژول گرما آزاد شود، به طوری که $x > y$ باشد، پایداری آلوتروپ A از B بیشتر است.
- (۴) گرما و دما به ترتیب برای توصیف یک فرایند و توصیف یک ماده به کار می‌روند.

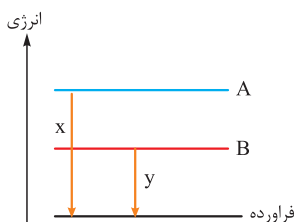
پاسخ: گزینه ۴

گزینه (۴) برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی گزینه‌ها:

- گزینه (۱): انرژی گرمایی، به جرم و دما (میانگین تندی) اجسام وابسته است؛ در نتیجه اگر انرژی گرمایی ماده A بیشتر از ماده B باشد، لزوماً دمای بیشتری ندارد و ممکن است جرم بیشتری داشته باشد.
- گزینه (۲): عمده انرژی مبادله‌شده در واکنش، وابسته به تغییر انرژی پتانسیل فراورده‌ها و واکنش‌دهنده‌ها است؛ در نتیجه حتی اگر $\Delta\theta = 0$ باشد، بین سامانه و محیط انرژی مبادله می‌شود.
- گزینه (۳): فراورده حاصل از سوختن دو آلوتروپ یکسان است؛ در نتیجه تفاوت در ΔH واکنش به دلیل تفاوت در سطح انرژی آلوتروپ‌ها می‌باشد.
- با توجه به نمودار زیر، A سطح انرژی بیشتری نسبت به B دارد ← ناپایدارتر است:



- گزینه (۴): دما و انرژی گرمایی، هر دو برای توصیف یک نمونه ماده به کار می‌روند، ولی گرما از ویژگی‌های یک نمونه ماده نیست. تغییر دما و گرما هر دو، برای توصیف یک فرایند به کار می‌روند.

میزان دما - میزان انرژی گرمایی ← توصیف انرژی گرمایی

تغییر دما - گرما ← توصیف یک فرایند

در یک کارخانه صنعتی از آلیاژهای A و B برای بهبود خواص الکتریکی استفاده می‌شود. اگر ۱۰۰ گرم از هر آلیاژ در دمای 60°C داشته باشیم، کدام مورد درست است؟ (از مبادله گرما توسط سایر مواد صرف نظر شود).
 $(c_{\text{Au}} = 0/128 \text{ J.g}^{-1} \cdot ^{\circ}\text{C}^{-1}, c_{\text{Al}} = 0/9 \text{ J.g}^{-1} \cdot ^{\circ}\text{C}^{-1})$

آلیاژ	درصد جرمی طلا	درصد جرمی آلومینیم	درصد جرمی سایر مواد
A	۷۵	۱۵	۱۰
B	۷۵	۲۰	۵

- (۱) اگر آلیاژها را در دمای اتاق قرار دهیم، آلیاژ B زودتر با محیط هم‌دمای می‌شود.
- (۲) در آلیاژ A، ظرفیت گرمایی طلا از ظرفیت گرمایی آلومینیم بیشتر است.
- (۳) به ازای مقدار یکسانی از آب و روغن، این آلیاژها دمای آب 30°C را نسبت به روغن 30°C ، سریع‌تر افزایش می‌دهند.
- (۴) در صورت دادن گرمای یکسان به دو آلیاژ، افزایش دمای آلیاژ A بیشتر از آلیاژ B خواهد بود.

پاسخ: گزینه ۴



● با Qهای برابر و بدون دانستن جرم ← ظرفیت گرمایی و تغییر دمای جسم رابطه عکس دارند.
 اگر به جرم‌های یکسان از دو ماده، مقدار مساوی گرما دهیم، ماده‌ای که ظرفیت گرمایی ویژه کم‌تری دارد، افزایش دمای بیشتری خواهد داشت:

$$c = \frac{Q}{m\Delta\theta} \xrightarrow{Q \text{ و } m \text{ ثابت‌اند}} c \propto \frac{1}{\Delta\theta}$$

● با جرم و Qهای برابر ← ظرفیت گرمایی ویژه و تغییر دمای جسم رابطه عکس دارند.

بنابراین به‌طور خلاصه و مفید، می‌توان گفت که:

$$Q \downarrow \Rightarrow \Delta\theta \downarrow \Rightarrow c \uparrow \text{ گرمای ویژه} \xrightarrow{\text{جرم یکسان}} \Delta\theta \downarrow \Rightarrow C \uparrow \text{ ظرفیت گرمایی: یکسان } Q$$

جرم دو آلیاژ و همچنین جرم فلز طلا (Au) موجود در آن‌ها یکسان است. با توجه به این‌که سایر مواد موجود در آلیاژ، گرما مبادله نمی‌کنند، هر چه درصد جرمی و در نتیجه جرم فلز آلومینیم (Al) موجود در آلیاژ بیشتر باشد، ظرفیت گرمایی و همچنین گرمای ویژه آن آلیاژ بیشتر خواهد بود؛ بنابراین می‌توان گفت که آلیاژ B نسبت به آلیاژ A، ظرفیت گرمایی و همچنین گرمای ویژه بیشتری دارد و بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که با دادن گرمای یکسان به دو آلیاژ، افزایش دمای آلیاژ A بیشتر از آلیاژ B خواهد بود. بررسی سایر گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): *اتفاقاً برعکس!* با توجه به ظرفیت گرمایی و گرمای ویژه بیشتر آلیاژ B نسبت به آلیاژ A، می‌توان نتیجه گرفت که تغییر دمای آلیاژ B نسبت به آلیاژ A کندتر رخ داده و اگر آلیاژها را در دمای اتاق (25°C) قرار دهیم، آلیاژ A زودتر با محیط هم‌دمای می‌شود.

گزینه (۲): در آلیاژ A، جرم فلزهای طلا (Au) و آلومینیم (Al) موجود، به ترتیب برابر با ۷۵ و ۱۵ گرم است؛ بنابراین داریم:

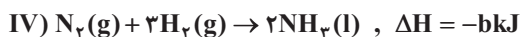
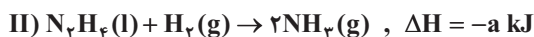
$$C = m \times c$$

$$\Rightarrow C_{\text{Au}} = 75 \times 0/128 = 9/6 \text{ J.}^{\circ}\text{C}^{-1}, C_{\text{Al}} = 15 \times 0/9 = 13/5 \text{ J.}^{\circ}\text{C}^{-1}$$

بنابراین در این آلیاژ، ظرفیت گرمایی آلومینیم از ظرفیت گرمایی طلا بیشتر است.

گزینه (۳): *باز هم برعکس!* می‌دانیم که ظرفیت گرمایی ویژه آب بیشتر از روغن است؛ در نتیجه تغییر دمای آب کندتر از روغن است.

با توجه به واکنش‌های زیر، کدام گزینه نادرست است؟



(۱) a همانند b، عددی مثبت است.

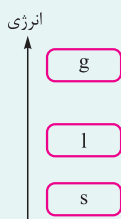
(۲) در فرایند تولید ۴ / ۴۸ لیتر گاز آمونیاک در شرایط STP مطابق واکنش (I)، ۱۸ / ۷ کیلوژول گرما آزاد می‌شود.

(۳) اگر آنتالپی تبخیر آمونیاک برابر 23 kJ.mol^{-1} باشد، مقدار b برابر ۱۳۸ است.

(۴) آنتالپی واکنش $N_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow N_2H_4(l)$ برابر $(a + b)$ کیلوژول است.

پاسخ: گزینه ۴

مقایسه سطح انرژی یک ماده در حالت‌های فیزیکی مختلف به صورت زیر است:



به عنوان نمونه، اگر در یک واکنش گرماده، حالت فیزیکی فراورده از g به l تغییر کند، ΔH واکنش منفی‌تر می‌شود، چون اختلاف سطح انرژی بین فراورده و واکنش‌دهنده افزایش پیدا می‌کند.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): واکنش‌های (II) و (IV)، گرماده هستند و ΔH آن‌ها منفی است؛ بنابراین a و b، اعدادی مثبت هستند.

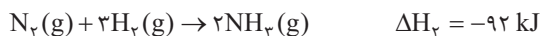
گزینه (۲): با توجه به واکنش (I)، انرژی آزاد شده را محاسبه می‌کنیم:

$$4/48 \text{ L } NH_3 \times \frac{1 \text{ mol } NH_3}{22.4 \text{ L } NH_3} \times \frac{187 \text{ kJ}}{2 \text{ mol } NH_3} = 18/7 \text{ kJ}$$

گزینه (۳): معادله تبخیر آمونیاک به صورت زیر است:



گام اول: با توجه به قانون هس و جمع‌پذیری واکنش‌ها، با استفاده از واکنش (III) به (IV) می‌رسیم:



گام دوم: برای این‌که $NH_3(g)$ را از بین ببریم، واکنش بالایی را در ۲ ضرب می‌کنیم و همان واکنش پایینی را می‌نویسیم:



گزینه (۴): اگر وارونه واکنش‌های (II) و (IV) را جمع کنیم، آنتالپی واکنش حاصل به صورت $(a + b) \text{ kJ}$ خواهد بود؛ اما جمع این دو واکنش، با واکنش داده‌شده در گزینه (۴) یکسان نیست:



برای رسیدن به واکنش $N_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow N_2H_4(l)$ ، باید روی هر ۴ واکنش، تغییراتی اعمال کنیم؛ یعنی آنتالپی این واکنش، فقط به a و b بستگی ندارد.

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

اگر ترکیب‌های A و B ایزومر یکدیگر باشند، چه تعداد از ویژگی‌های زیر برای آن‌ها یکسان است؟

- جرم مولی
- شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی
- نوع نیروی جاذبه بین مولکولی
- پایداری
- چگالی
- ارزش سوختی

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایزومرها ترکیب‌هایی با فرمول مولکولی یکسان ولی ساختار متفاوت می‌باشند. فقط مورد اول و دوم، برای آن‌ها یکسان است.

بررسی موارد:

موارد اول و دوم: با توجه به این‌که ایزومرها فرمول مولکولی یکسانی دارند، جرم مولی و شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در ساختار آن‌ها برابر است.

مورد سوم: ایزومرها لزوماً نیروی بین مولکولی یکسانی ندارند. برای مثال دی‌متیل اتر ($\text{CH}_3 - \text{O} - \text{CH}_3$) و اتانول ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$)، ایزومر هم هستند که نیروی بین مولکولی در اتانول پیوند هیدروژنی است، ولی در دی‌متیل اتر، وان‌در‌والسی است.

مورد چهارم: ایزومرها به دلیل تفاوت در ساختار، سطح انرژی و در نتیجه پایداری متفاوتی دارند.

مورد پنجم: ایزومرها به دلیل تفاوت در نحوه آرایش اتم‌ها، در حالت مایع و جامد حجم متفاوتی اشغال می‌کنند و در نتیجه چگالی متفاوتی نیز دارند.

مورد ششم: ایزومرها به دلیل تفاوت در ساختار، سطح انرژی متفاوتی دارند و ارزش سوختی آن‌ها نیز متفاوت است.

۸۰ کدام مورد، درست است؟

- (۱) اگر آنتالپی پیوند $H-S$ برابر $a \text{ kJ}$ باشد، واکنش $H_2S(g) \rightarrow 2H(g) + S(s)$ و ΔH واکنش برابر $2a \text{ kJ}$ خواهد بود.
- (۲) محاسبه ΔH واکنش $H_2(g) + F_2(g) \rightarrow 2HF(g)$ ، به کمک آنتالپی‌های پیوند، با داده‌های تجربی تفاوت زیادی دارد.
- (۳) انرژی مورد نظر برای تبدیل هر گرم $Cl_2(g)$ به اتم‌های مجزا، کمتر از مقدار انرژی لازم برای تبدیل یک گرم $Br_2(g)$ به اتم‌های مجزا است.
- (۴) در ساختار متانول، انرژی لازم برای شکستن پیوند $O-H$ نسبت به $C-H$ و $C-O$ ، بیشتر است.

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گزینه (۱): آنتالپی پیوند برای حالت‌های گازی تعریف می‌شود؛ بنابراین اگر در یک واکنش یکی از مواد حالت مایع یا جامد داشته باشد، نمی‌توانیم از آنتالپی پیوند برای محاسبه ΔH واکنش استفاده کنیم.
- گزینه (۲): تمامی پیوندها از نوع ساده هستند و حالت تمامی مواد، گازی است؛ در نتیجه می‌توان از آنتالپی پیوند برای محاسبه ΔH واکنش استفاده کرد. زمانی محاسبه ΔH یک واکنش به کمک آنتالپی پیوند با داده‌های تجربی تفاوت دارد که مولکول‌های شرکت‌کننده در واکنش، پیچیده باشند و برای اغلب پیوندها از «میانگین آنتالپی پیوند» استفاده شود.
- گزینه (۳): انرژی مورد نیاز برای تبدیل Cl_2 به اتم‌های مجزا (آنتالپی پیوند) از Br_2 بیشتر است.
- آنتالپی پیوند: $Cl-Cl > Br-Br$
- دقت کنید که با توجه به کم‌تر بودن جرم مولی Cl نسبت به Br ، شمار مول‌ها در هر گرم Cl_2 بیشتر از هر گرم Br_2 است که این مورد علاوه بر بیشتر بودن آنتالپی پیوند $Cl-Cl$ ، باعث بیشتر بودن انرژی لازم برای شکستن پیوندها در Cl_2 می‌شود.
- گزینه (۴): درسته زیرا آنتالپی پیوند $O-H$ از $C-H$ و $C-O$ بیشتر است.
- آنتالپی پیوند: $O-H > C-O > C-H$

از سوختن کامل یک گرم مخلوط گازی شامل $H_2(g)$ و $CH_4(g)$ در اکسیژن، $73/06 \text{ kJ}$ گرما آزاد می‌شود. نسبت مولی H_2 به CH_4 در مخلوط گازی اولیه، کدام است؟ (ارزش سوختی گازهای هیدروژن و متان در شرایط آزمایش به ترتیب برابر $142/9$ و $55/6$ کیلوژول بر گرم است، $(H = 1, C = 12 : g.mol^{-1})$)

۲ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: جرم گاز هیدروژن را x و جرم گاز متان را $(1-x)$ گرم در نظر می‌گیریم و گرمای سوختن هر کدام را محاسبه می‌کنیم:

$$x \text{ g } H_2 \times \frac{142/9 \text{ kJ}}{1 \text{ g } H_2} = 142/9 \times x \text{ kJ}$$

$$(1-x) \text{ g } CH_4 \times \frac{55/6 \text{ kJ}}{1 \text{ g } CH_4} = (55/6 - 55/6 \times x) \text{ kJ}$$

گام دوم: از سوختن مخلوط ۱ گرمی مورد نظر، $73/06 \text{ kJ}$ انرژی آزاد شده است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

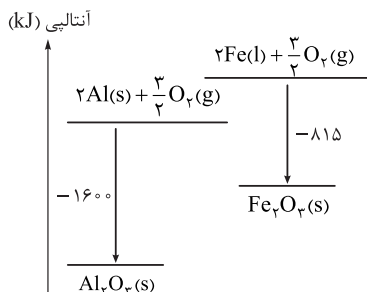
$$142/9 \times x + 55/6 - 55/6 \times x = 73/06 \Rightarrow 87/3 \times x = 17/46 \Rightarrow x = 0/2$$

بنابراین مخلوط مورد نظر، $0/2$ گرم H_2 و $0/8$ گرم CH_4 دارد.

گام سوم: تعداد مول هر کدام را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 0/2 \text{ g } H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 \text{ g } H_2} &= 0/1 \text{ mol } H_2 \\ 0/8 \text{ g } CH_4 \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{16 \text{ g } CH_4} &= 0/05 \text{ mol } CH_4 \end{aligned} \Rightarrow \frac{\text{mol } H_2}{\text{mol } CH_4} = \frac{0/1}{0/05} = 2$$

با توجه به نمودار زیر، به ازای تولید ۱ مول آهن در فرایند ترمیت، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟



۳۹۲ / ۵ (۱)

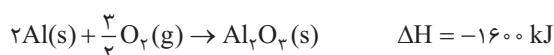
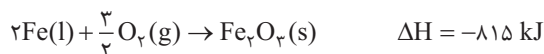
۴۰۷ / ۵ (۲)

۷۸۵ (۳)

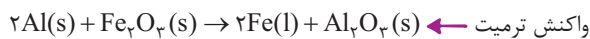
۸۱۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

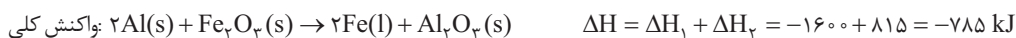
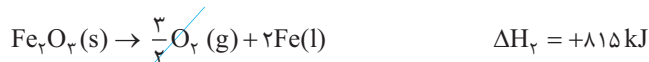
گام اول: واکنش‌های داده‌شده را می‌نویسیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی



گام دوم: با استفاده از قانون هس به واکنش ترمیت می‌رسیم:



برای این که Fe_2O_3 را در سمت واکنش‌دهنده ایجاد کنیم، واکنش بالایی را وارونه می‌کنیم:



گام سوم: محاسبه انرژی آزادشده به ازای تولید یک مول آهن:

$$1 \text{ mol Fe} \times \frac{785 \text{ kJ}}{2 \text{ mol Fe}} = 392.5 \text{ kJ}$$

۸۳ کدام مورد درست است؟

(۱) در واکنش $X(g) \rightarrow 2Y(g)$ ، رابطه $\frac{\Delta n(X)}{\Delta t} = \frac{\Delta n(Y)}{2\Delta t}$ برقرار است.

(۲) در واکنش $A(l) + 2B(g) \rightarrow 3D(g)$ ، سرعت مصرف A برحسب مولار بر ثانیه، $\frac{1}{3}$ سرعت تولید D است.

(۳) اگر شیب نمودار غلظت - زمان دو ماده شرکت کننده در یک واکنش، قرینه یکدیگر باشد، سرعت تولید یا مصرف آن‌ها با هم برابر است.

(۴) اگر سرعت متوسط مصرف M در واکنش $2M(g) \rightarrow 3Z(g)$ ، $1/25 \times 10^{-3}$ مول بر ثانیه باشد، سرعت متوسط واکنش برابر با ۴/۵ مول بر ساعت است.

پاسخ: گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): در واکنش $X \rightarrow 2Y$ ، واکنش دهنده است در نتیجه تغییرات مول آن (Δn) منفی می‌باشد در حالی که تغییرات مول Y که فراورده می‌باشد، مثبت است. واضحاً یک عدد مثبت و منفی برابر نیستند. **یه علامت منفی در رابطه کمه!**

گزینه (۲): A به حالت مایع است؛ در نتیجه تغییر غلظت برحسب مولار برای آن تعریف نمی‌شود. زیرا غلظت مواد جامد و مایع خالص همواره عددی ثابت است.

گزینه (۳): درسته، اندازه شیب نمودار مول - زمان متناسب با سرعت تولید و مصرف مواد است.

گزینه (۴):

گام اول: سرعت واکنش را با استفاده از سرعت مصرف M برحسب مول بر ثانیه حساب می‌کنیم:

$$R_{\text{واکنش}} = \frac{R_M}{2} = \frac{1/25 \times 10^{-3}}{2} = \frac{5}{8} \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{s}}$$

گام دوم: سرعت واکنش را از مول بر ثانیه به مول بر ساعت تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{5}{8} \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{s}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = 2/25 \frac{\text{mol}}{\text{h}}$$

جدول زیر مربوط به واکنش تبدیل قند موجود در جوانه گندم (مالتوز) به گلوکز است.

زمان (دقیقه)	غلظت مولی (mol.L ⁻¹)				
	۱۴	۷	۳	۱	۰
[C _۶ H _{۱۲} O _۶]	۰/۰۴	۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۰۱	۰
[C _{۱۲} H _{۲۲} O _{۱۱}]	۰/۰۸	۰/۰۸۵	۰/۰۹	۰/۰۹۵	۰/۱۰



در ۳ دقیقه نخست، سرعت تولید گلوکز چند مولار بر ثانیه است و نسبت سرعت مصرف مالتوز در ۳ دقیقه اول به

۷ دقیقه دوم واکنش به تقریب کدام است؟

$$\begin{aligned} (۲) \quad & ۴/۶۷ - ۱/۱۱ \times ۱۰^{-۴} \\ (۳) \quad & ۲ - ۱/۱۱ \times ۱۰^{-۴} \\ (۴) \quad & ۴/۶۷ - ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۲} \\ (۵) \quad & ۲ - ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۲} \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۲

گام اول: سرعت تولید گلوکز در ۳ دقیقه نخست را به دست می‌آوریم:

$$R = \frac{\Delta[C_6H_{12}O_6]}{\Delta t} = \frac{2 \times 10^{-2}}{3 \times 60} = \frac{1}{9} \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \approx 1/11 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

گام دوم: تغییرات غلظت مالتوز در ۳ دقیقه اول و ۷ دقیقه دوم را به دست می‌آوریم:

$$\Delta t_{0-3} \Rightarrow -\Delta[C_{12}H_{22}O_{11}] = -(0/09 - 0/1) = 0/01 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Delta t_{3-14} \Rightarrow -\Delta[C_{12}H_{22}O_{11}] = -(0/08 - 0/085) = 0/005 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: نسبت سرعت مصرف مالتوز در بازه‌های مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$\frac{R_{0-3}}{R_{3-14}} = \frac{\frac{\Delta[C_{12}H_{22}O_{11}]_{0-3}}{\Delta t_{0-3}}}{\frac{\Delta[C_{12}H_{22}O_{11}]_{3-14}}{\Delta t_{3-14}}} = \frac{\frac{10^{-2}}{3}}{\frac{5 \times 10^{-3}}{7}} = \frac{14}{3} = 4/67$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام موارد درست است؟ ($H = 1, C = 12, F = 19 : g.mol^{-1}$)

الف) نسبت شمار اتم‌های کربن به هیدروژن در مولکول‌های سیانو اتن و وینیل بنزن، یکسان است.
ب) شمار پیوندها در مونومر سازنده تفلون با شمار پیوندهای $C - C$ در آلکانی که جرم مولی یکسانی با این مونومر دارد، برابر است.

پ) تفلون نقطه ذوب بالایی داشته و همانند اغلب پلیمرها در حلال‌های آلی حل می‌شود.
ت) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در وینیل کلرید و گوگرد دی‌اکسید، برابر است.

- (۱) «الف» - «پ»
(۲) «ب» - «ت»
(۳) «الف» - «ب»
(۴) «پ» - «ت»

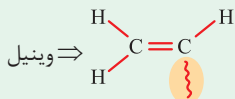
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

بررسی موارد:

الف)

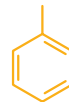
اگر از مولکول اتن، یک اتم هیدروژن جدا شود، به گروه باقی‌مانده وینیل گفته می‌شود. برای مثال وینیل کلرید یعنی اتنی که یک هیدروژن از دست داده است و کلر جای آن قرار گرفته است:



وینیل بنزن همان استیرن است. فرمول مولکولی سیانو اتن ($CH_2=CH-CN$) به صورت C_3H_3N و فرمول مولکولی استیرن



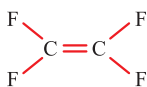
($CH_2=CH$) به صورت C_8H_8 است، در نتیجه نسبت شمار اتم‌های C به H در دوی آن‌ها برابر ۱ می‌باشد.



ب)

گام اول: به دست آوردن تعداد پیوندها:

مونومر سازنده تفلون، (تترافلورو اتن) دارای ساختار روبه‌رو است:



با توجه به شکل، در این ترکیب ۶ پیوند وجود دارد.

گام دوم: به دست آوردن آلکان مورد نظر:

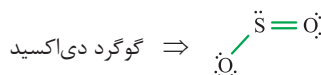
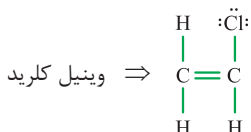
جرم مولی C_4F_4 برابر $100 g.mol^{-1}$ است.

$$C_nH_{2n+2} \xrightarrow{\text{جرم مولی}} 12(n) + 1(2n+2) = 14n+2 \xrightarrow{14n+2=100} n=7$$

در ساختار هر آلکان n کربنی، n-1 پیوند C-C وجود دارد.

پ) تفلون در حلال‌های آلی حل نمی‌شود.

ت) ساختار وینیل کلرید و گوگرد دی‌اکسید به صورت زیر است:



$$\frac{\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

کدام مورد دربارهٔ الکل‌های یک‌عاملی غیرحلقوی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، درست است؟

($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

ROH

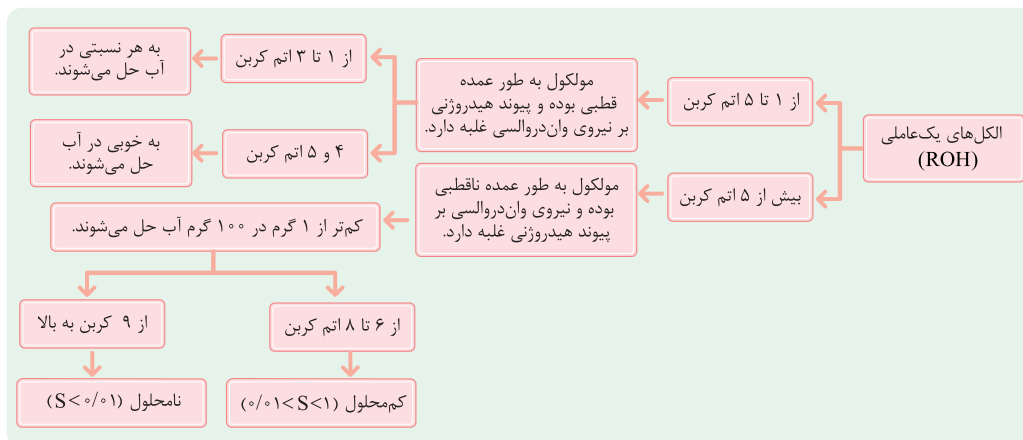
- (۱) در ساختار آن‌ها، گروه هیدروکسیل وجود دارد و نیروی بین مولکولی غالب آن‌ها، پیوند هیدروژنی است.
- (۲) جرم مولی آن‌ها نسبت به آلکان هم‌کربن خود، ۱۶ گرم بیشتر است.
- (۳) اگر به جای گروه عاملی در دومین عضو آن‌ها، گروه کربوکسیل جایگزین شود، پرکاربردترین اسید آلی به دست می‌آید.
- (۴) با افزایش شمار اتم‌های کربن در آن‌ها، شمار پیوندهای اشتراکی و خاصیت چربی‌گریزی آن‌ها افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

بررسی گزینه‌ها:

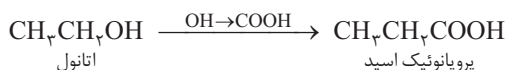
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینهٔ (۱): الکل‌ها دارای گروه عاملی هیدروکسیل هستند تا این‌جا درست! ولی نیروی بین مولکولی غالب در الکل اول، هیدروژنی است و با افزایش شمار اتم‌های کربن، نیروی بین مولکولی غالب به صورت وان‌دروالسی خواهد بود.



گزینهٔ (۲): فرمول کلی الکل‌هایی با زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده و بدون حلقه به صورت $C_nH_{2n+2}O$ می‌باشد، همان‌طور که واضح است، نسبت به آلکان هم‌کربن (C_nH_{2n+2})، یک اتم O ($16 g.mol^{-1}$) بیشتر دارند.

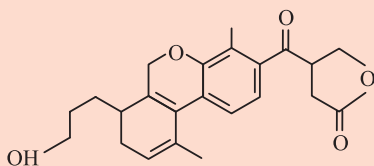
گزینهٔ (۳): دومین عضو الکل‌ها، اتانول است. اگر به جای عامل هیدروکسیل، عامل کربوکسیل جایگزین شود، به پروپانویک اسید می‌رسیم:



اما پرکاربردترین اسید آلی، استیک اسید (CH_3COOH) است.

گزینهٔ (۴): با افزایش شمار اتم‌های کربن، تعداد پیوندها افزایش می‌یابد، اما خاصیت چربی‌گریزی مولکول کاهش می‌یابد، زیرا بخش ناقطبی مولکول بزرگ‌تر شده و خاصیت چربی‌دوستی آن افزایش می‌یابد.

کدام گزینه، درباره ترکیب داده شده، نادرست است؟



(۱) هر مول از آن برای سوختن کامل به ۲۷ مول گاز اکسیژن نیاز دارد.

(۲) شمار گروه‌های متیل در این ترکیب، دو برابر شمار این گروه‌ها در ساختار مونومر سازنده سرنگ است.

(۳) تنها دارای گروه‌های عاملی هیدروکسیل، اتری و کتونی است.

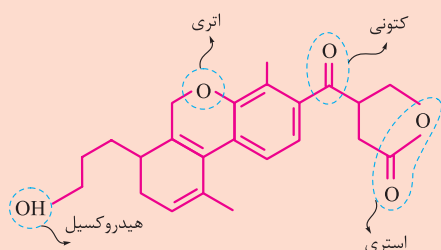
(۴) توانایی شرکت در واکنش استری شدن و تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد.

پروپین

پاسخ: گزینه ۳

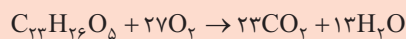
در ساختار ترکیب مورد نظر، گروه عاملی استری نیز وجود دارد:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): فرمول مولکولی ترکیب داده شده، $C_{23}H_{26}O_5$ است و معادله واکنش موازنه شده سوختن آن به صورت زیر است:



به ازای مصرف ۱ مول از این ترکیب، ۲۷ مول گاز اکسیژن مصرف می‌شود.

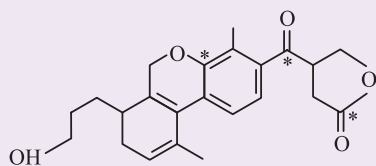
گزینه (۲): در ساختار این ترکیب ۲ گروه متیل ($-CH_3$) وجود دارد. مونومر سازنده سرنگ، پروپین ($CH_2=CH-CH_3$) است

که در ساختار خود فقط یک گروه متیل دارد؛ بنابراین شمار گروه‌های متیل ترکیب داده شده، دو برابر شمار گروه‌های متیل در پروپین است.

گزینه (۴): ترکیب مدنظر به دلیل داشتن گروه هیدروکسیل (OH)، در واکنش استری شدن شرکت می‌کند و می‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

(سوال ۱۰۰ کنکور تهرانی ۱۴۰۲ - نوبت اول)

چند مورد از مطالب زیر درباره ترکیب داده شده درست است؟



۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

- شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در مولکول آن برابر است.
- دارای گروه عاملی هیدروکسیل، اتری، کتونی و استری است.
- عدد اکسایش اتم‌های کربن ستاره‌دار، در مجموع برابر +۶ است.
- می‌تواند در واکنش استری شدن و تشکیل پیوند هیدروژنی شرکت کند.

کنکور



برای فرمول‌های $C_4H_8O_2$ و $C_3H_6O_2$ ، به ترتیب از راست به چپ، چند ساختار استری می‌توان در نظر گرفت؟

۳، ۲ (۴)

۳، ۱ (۳)

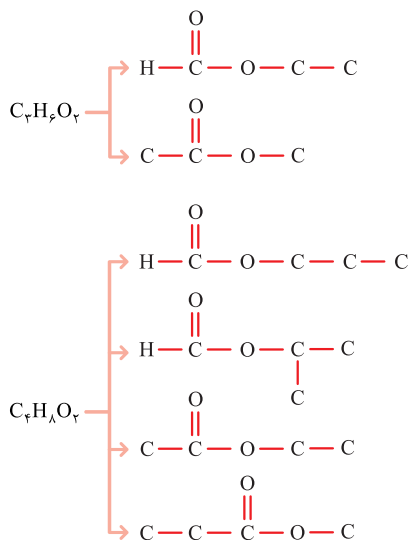
۲، ۱ (۲)

۴، ۲ (۱)

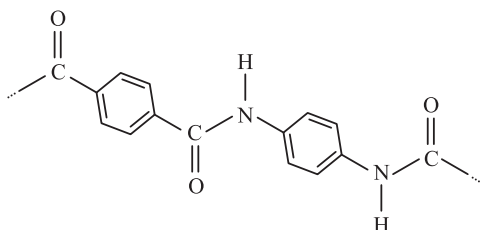
پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ساختار کلی استرها به صورت $R-\overset{\overset{O}{\parallel}}{C}-O-R'$ است که در آن R می‌تواند هیدروژن یا گروه کربنی باشد، در حالی که R' فقط می‌تواند گروه کربنی باشد:



برای آبکافت کامل ۱۱/۹ گرم از پلیمر زیر، به تقریب چند گرم آب نیاز است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16 : g.mol^{-1}$)



۱/۸ (۱)

۲/۷ (۲)

۳/۶ (۳)

۵/۴ (۴)

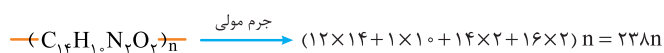
پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: واکنش آبکافت پلی آمیدها به صورت زیر است:



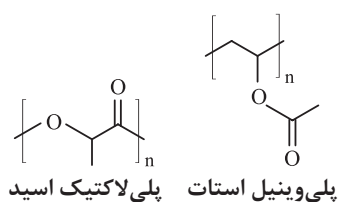
گام دوم: با توجه به ساختار داده شده، فرمول پلیمر و جرم مولی آن را به دست می آوریم:



گام سوم: جرم آب مصرفی را محاسبه می کنیم:

$$11/9 \text{ g پلی آمید} \times \frac{1 \text{ mol پلی آمید}}{238n \text{ g پلی آمید}} \times \frac{2n \text{ mol } H_2O}{1 \text{ mol پلی آمید}} \times \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O} = 1/8 \text{ g } H_2O$$

۹۰ با توجه به ساختار پلیمرهای داده شده، کدام مورد درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)



- (۱) وینیل استات و لاکتیک اسید، ایزومر یکدیگرند.
- (۲) در فرایند تولید هر دو پلیمر، آب نیز به عنوان فراورده جانبی تولید می شود.
- (۳) تفاوت جرم مولی وینیل استات با متیل فورمات، برابر ۲۸ گرم است.
- (۴) اگر n برابر ۵۰۰ باشد، جرم مولی پلی لاکتیک اسید برابر ۳۶ کیلوگرم بر مول است.

پاسخ: گزینه ۴

تولید پلیمرها:

درس Box

در حد کتاب درسی، واکنش های تولید پلیمرها را می توان به دو دسته کلی تقسیم کرد:

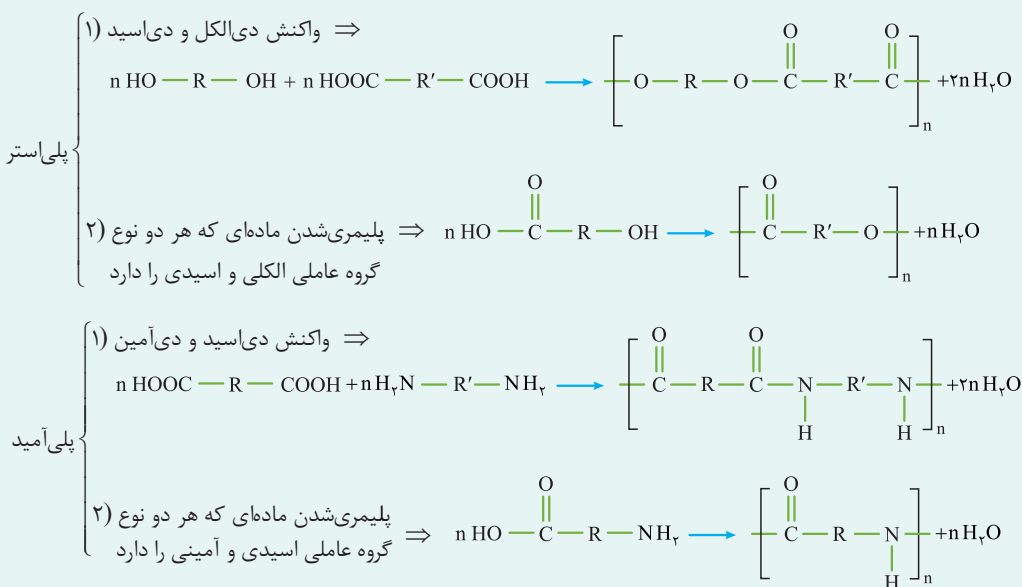
● واکنش تولید پلی اتن و مشتقات آن:

در این نوع واکنش ها، پیوند $C = C$ موجود در زنجیره کربنی مونومر، شکسته شده و پلیمر، تنها فراورده واکنش است.



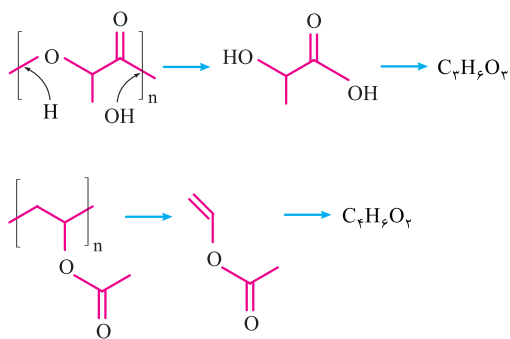
● واکنش تولید پلی استرها و پلی آمیدها:

در این گونه واکنش ها، علاوه بر پلیمر، مولکول کوچکی مانند آب نیز تولید می شود:



ابتدا مونومر پلیمرهای داده شده را به دست می آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): وینیل استات و لاکتیک اسید، فرمول مولکولی متفاوت دارند؛ در نتیجه ایزومر یکدیگر نیستند.

گزینه (۲): در فرایند تولید پلی‌وینیل استات، در دما و فشار زیاد، پیوندهای $C=C$ شکسته شده و از طرفین به یکدیگر اضافه می‌شوند.

در این فرایند برخلاف تولید پلی‌استرها، آب تولید نمی‌شود.

گزینه (۳): فرمول متیل فرمات (استر ۲ کربنی) به صورت $C_2H_4O_2$ است:

$$C_4H_8O_4 - C_2H_4O_2 = C_2H_4 = 26 \text{ g.mol}^{-1}$$

گزینه (۴): با توجه به ساختار، فرمول پلی‌لاکتیک اسید به صورت $\text{—}[C_3H_4O_2]_n\text{—}$ می‌باشد، در نتیجه جرم مولی آن برابر

$$72n = (3 \times 12 + 4 \times 1 + 2 \times 16)n = 72n \text{ است:}$$

$$72n = 72(500) = 36000 \text{ g.mol}^{-1} = 36 \text{ kg.mol}^{-1}$$