

نام درس	نام طراحان
حسابان ۲ و ریاضی پایه	امیر محمد باقری نصرآبادی - شاهین پروازی - رحمان پوررحیم - عادل حسینی - طاهر دادستانی - وحید راحتی - محمدرضا راسخ - سهیل ساسانی - یاسین سپهر - علی سلامت - علی اصغر شریفی - علی شهبابی - حمید علیزاده - معین کرمی - سیدسپهر متولیان - لیلا مرادی - حمیدرضا نوش کاران - سهند ولیزاده
هندسه و آمار و ریاضیات گسسته	امیر حسین ابومحبوب - حنا اتفاق - علی احمدی قزل دشت - اسحاق اسفندیار - حمیدرضا امیری - علی ایمانی - محبوبه بهادری - فرزاد جوادی - سیدمحمدرضا حسینی فرد - محمد حمیدی - افشین خاصه خان - فرزانه خاکپاش - محمد خندان - کیوان دارابی - مصطفی دیداری - سوگند روشنی - علیرضا شریف خطیبی - هومن عقیلی - احمدرضا فلاح - امیرحسین ملازینل - مهرداد ملوندی - حمید ناصر
فیزیک	پویا شمشیری - خسرو ارغوانی فرد - بابک اسلامی - محمد اکبری - حسین الهی - عبدالرضا امینی نسب - زهره آقامحمدی - محمدعلی راست پیمان - بهنام رستمی - مسعود قره خانی - محسن قندچلر - مصطفی کیانی - آراس محمدی - حسین مخدومی - مرتضی مرتضوی - سیده ملیحه میر صالحی - سیدعلی میرنوری - حسام نادری - مصطفی واتقی
شیمی	هدی بهاری پور - محمدرضا پورچاوید - علی جدی - امیر حاتمیان - ارژنگ خانلری - حمید ذیحی - حسن رحمتی - کوکند - پویا رستگاری - فرزاد رضایی - علی رفیعی - سهراب صادقی زاده - محمدحسین صادقی مقدم - آترین صبا - علی طرفی - امیرحسین طیبی - محمد فائز نیا - میثم کوثری لشگری - علیرضا کیانی دوست - علی مجیدی - مجتبی محبوب - حسین ناصری نانی - میثم نوری

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی پایه	هندسه	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	سیدسپهر متولیان	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	حسین الهی	مجتبی محبوب
گروه ویراستاری	سینا صالحی آرین غلامی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	آرین غلامی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	آرین غلامی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	سینا صالحی حسین بصیر تر کمپور زهره آقامحمدی	احسان پنجه شاهی آترین صبا امیرحسین توحیدی
مسئول درس	سیدسپهر متولیان	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	حسین الهی	مجتبی محبوب
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	ابراهیم نوری	علیرضا نجفی
ویراستاران (مستندسازی)	معصومه صنعت کار - امیرمحمد علیپور - مهسا محمدنیا - فرشته کبرانی				
			سجاد بهارلویی		فاطمه الهی محسن دستجردی رزیتا حبیب اله

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری مسئول دفترچه: علیرضا همایون خواه
حروف نگار	فرزانه فتح اله زاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

حسابان ۱

۱- گزینه «۴»

(سیرسپهر متولیان)

گزینه (۱): با فرض $x = -2$ در رابطه، به معادله $\sqrt{y+3} = y+3$ می‌رسیم، که دو جواب $y = -2$ و $y = -3$ را دارد. از آن جایی که به ازای $x = -2$ دو مقدار برای y به دست آمده، پس این رابطه یک تابع نیست.

گزینه (۲): با فرض $x = 3$ در رابطه، به معادله $2y^3 - 5y = 0$ می‌رسیم، خواهیم داشت:

$$2y^3 - 5y = 0 \Rightarrow y(2y^2 - 5) = 0 \Rightarrow y = 0, y = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

از آن جایی که به ازای $x = 3$ سه مقدار برای y به دست آمده، پس این رابطه یک تابع نیست.

گزینه (۳): با فرض $x = 0$ در رابطه، به معادله $|y| = 1$ می‌رسیم که دو مقدار برای y به دست می‌آید.

گزینه (۴): ابتدا با ضابطه‌بندی داریم:

$$x = \sqrt[3]{2y - |y|} = \begin{cases} \sqrt[3]{2y} & ; y \geq 0 \\ \sqrt[3]{3y} & ; y < 0 \end{cases}$$

که در هر حالت به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ فقط یک y حقیقی پیدا می‌شود.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۲- گزینه «۲»

(سیرسپهر متولیان)

ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \sqrt{x-3} : x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ \sqrt{3-x} : 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow D_f = \{3\}$$

پس تابع f ، تنها مقدار $f(3) = 0$ را دارد. برای اینکه g با f برابر باشد،

عبارت درجه دوم زیر رادیکال باید ضریبی منفی از $(x-3)^2$ باشد.

$$ax^2 + 2x + b = a(x-3)^2 = ax^2 - 6ax + 9a$$

$$\Rightarrow -6a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = 9a = -3 \Rightarrow ab = 1$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

۳- گزینه «۳»

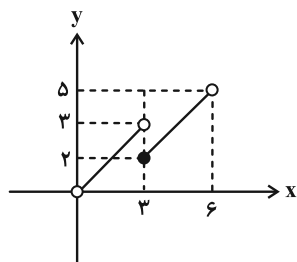
(امیرمحمدر باقری نصرآبادی)

به صورت زیر، در بازه‌های مختلف، ضابطه‌های مختلف تابع f را به دست می‌آوریم:

$$0 < x < 3 \Rightarrow 0 < \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

$$3 \leq x < 6 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 1 \Rightarrow f(x) = x - 1$$

و نمودار تابع به صورت زیر است:



سطح زیر این نمودار از یک مثلث و یک دوزنقه تشکیل شده است که مساحت آن برابر است با:

$$S = \left(\frac{3 \times 3}{2}\right) + \left(\frac{2+5}{2}\right) \times 3 = \frac{9}{2} + \frac{21}{2} = 15$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴- گزینه «۴»

(سعیل ساسانی)

$$(3, n-2) = (3, -2) \Rightarrow n-2 = -2 \Rightarrow n = 0$$

$$(m^2 - m, 1) = (2, 1) \Rightarrow m^2 - m = 2$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \frac{m^2 - m - 2}{(m-2)(m+1)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} \\ \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow (1, 5), (-2, 5)$$

$$\Rightarrow n = 0, m = -1 \Rightarrow (m, n) = (-1, 0)$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۵- گزینه «۳»

(عادل حسینی)

اگر f و f^{-1} بر هم مماس شوند، به معنای آن است که هر کدام بر خط

$y = x$ مماس هستند. پس داریم:

$$\xrightarrow{f(x)=x} ax^2 + \frac{3}{2} = x \Rightarrow ax^2 - x + \frac{3}{2} = 0$$

معادله بالا باید جواب مضاعف داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(a)\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - 6a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

پس $x \geq 0$; $f(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 9)$ و $f^{-1}(x) = \sqrt{6x - 9}$ است.

$$\Rightarrow f^{-1}(12a) = f^{-1}(2) = \sqrt{3}$$

(مسئله ۱- تابع: صفحه‌های ۵۷ تا ۶۲)

۶- گزینه «۴»

(علی شهرابی)

در تساوی $f(f(x)) = \frac{3f(x) - 2}{f(x) - 1}$ جای $f(x)$ ها، متغیر x قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x - 1}$$

برای محاسبه $f^{-1}(8)$ باید معادله $f(x) = 8$ را حل کنیم:

$$\frac{3x - 2}{x - 1} = 8 \Rightarrow 3x - 2 = 8x - 8 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow x = 6/5$$

پس: $f^{-1}(8) = 6/5$ است.

(مسئله ۱- تابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۷- گزینه «۴»

(کتاب زور ۹۸)

$$f(x) = \frac{2}{5}x - 4 \quad g(x) = x^3 + x$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(8) = a \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(8)) = a$$

ابتدا $f^{-1}(8)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}(8) = m \Rightarrow f(m) = 8 \Rightarrow \frac{2}{5}m - 4 = 8 \Rightarrow m = 30$$

$$g^{-1}(f^{-1}(8)) = g^{-1}(30) = a \Rightarrow g(a) = 30$$

$$\Rightarrow a^3 + a = 30 \xrightarrow{\text{امتحان گزینه‌ها}} a = 3$$

(مسئله ۱- تابع: صفحه‌های ۵۷ تا ۶۱ و ۶۶ تا ۶۸)

۸- گزینه «۱»

(عارل حسینی)

دامنه‌های دو تابع f و g به ترتیب $D_f = [-3, 3]$ و $D_g = [-5, +\infty)$ است و دامنه تابع $f \circ g$ را از رابطه زیر حساب می‌کنیم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \geq -5 \mid -3 \leq -\sqrt{x+5} \leq 3\}$$

پس داریم:

$$= \{x \geq -5 \mid \sqrt{x+5} \leq 3\} = \{x \geq -5 \mid x \leq 4\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = [-5, 4]$$

این بازه شامل ۱۰ عدد صحیح است.

(مسئله ۱- تابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۹- گزینه «۲»

(یاسین سپهر)

$$(f - g)\left(-\frac{7}{2}\right) = f\left(-\frac{7}{2}\right) - g\left(-\frac{7}{2}\right) = \left(2\left[-\frac{7}{2}\right] - 1\right) - \left[-\frac{35}{2}\right]$$

$$= -9 + 18 = 9$$

(مسئله ۱- تابع: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۱۰- گزینه «۱»

(محمدرضا راسخ)

می‌دانیم که همواره $0 \leq x - [x] < 1$ و مقدار $x - [x]$ به ازای x های صحیح برابر صفر می‌شود. پس دامنه تابع f برابر $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ شده و خواهیم داشت:

$$D_{g \circ f} = D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

حال ضابطه تابع $g \circ f$ را می‌نویسیم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x - [x]}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x - [x]} + \frac{1}{|x - [x]|}}$$

$$\xrightarrow{0 < x - [x] < 1} (g \circ f)(x) = \frac{x - [x]}{2}$$

حال داریم:

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x - [x]}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < (g \circ f)(x) < \frac{1}{2}$$

در نتیجه $a = 0$ و $b = \frac{1}{2}$ و لذا $2b + a = 1$ است.

(مسئله ۱- تابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)



ریاضی ۱

گزینه «۱» - ۱۱

(عادل حسینی)

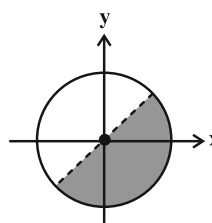
$$\cos \theta - \cot \theta = \cot \theta (\sin \theta - 1) < 0$$

عبارت $\sin \theta - 1$ همواره نامثبت است. پس برای برقراری نامساوی بالا، لازم

است که $\cot \theta$ مثبت باشد. به عبارت دیگر انتهای کمان θ باید در

ربع‌های اول یا سوم قرار بگیرد. از طرفی در محدوده مشخص شده شکل زیر،

$$\sin \theta < \cos \theta \text{ است.}$$



در شکل بالا، اگر بخش‌های مربوط به ربع‌های اول و سوم را در نظر بگیریم،

شکل گزینه «۱» حاصل می‌شود.

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱)

گزینه «۲» - ۱۲

(سیرسپهر متولیان)

روش اول: با توجه به روابط بین عبارات مثلثاتی، $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را به دست

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \quad \text{می‌آوریم:}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع چهارم } \alpha} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha + 0/75}{\tan \alpha + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{3} + 1} = \frac{\frac{3-\sqrt{7}}{4}}{\frac{3-\sqrt{7}}{3}} = \frac{3}{4} = 0/75$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{4} = 0/75$$

روش دوم:

$$\frac{\sin \alpha + 0/75}{\tan \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\tan \alpha + 1}$$

$$= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1} = \cos \alpha = 0/75$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

گزینه «۴» - ۱۳

(رهمان پوررمی)

شیب خط برابر با $\tan \alpha$ می‌باشد. بنابراین:

$$\tan \alpha = -2/5 \quad (*)$$

برای یافتن حاصل عبارت $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ ، صورت و مخرج را بر $\cos \alpha$

تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} \stackrel{(*)}{=} \frac{-2/5 + 1}{1 - (-2/5)} = \frac{-1/5}{3/5} = -\frac{1}{3}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

گزینه «۲» - ۱۴

(معین کریمی)

ابتدا دو طرف رابطه را به توان دو می‌رسانیم:

$$4 \sin^2 x + 9 \cos^2 x + 12 \sin x \cos x = 4$$

اگر به جای $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ قرار دهیم رابطه زیر به دست می‌آید:

$$5 \cos^2 x + 12 \sin x \cos x = 0$$

از $\cos x$ فاکتور می‌گیریم:

$$\cos x (5 \cos x + 12 \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \tan x : \text{تعریف نشده} \\ 5 \cos x = -12 \sin x \Rightarrow \tan x = \frac{-5}{12} \end{cases}$$

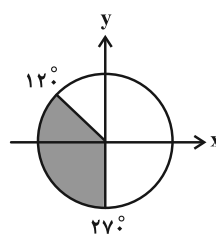
(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

۱۵- گزینه «۲»

(سهند ولی زاده)

با توجه به دایره مثلثاتی رسم شده داریم:

$$120^\circ < \alpha < 270^\circ \Rightarrow -1 \leq \cos \alpha < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{3m-1}{2} < 0$$



$$\times 2 \rightarrow -2 \leq 3m - 1 < 0$$

$$+1 \rightarrow -1 \leq 3m < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq m < \frac{1}{3}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱)

۱۶- گزینه «۱»

(عادل فسینی)

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}} \Rightarrow a^6 b = 1 \\ b = (\sqrt{6} + \sqrt{5})^3 \end{cases}$$

پس $a^3 b = \frac{1}{a} = a^{-3}$ است.

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۵۳ تا ۵۸ و ۶۵ تا ۶۷)

۱۷- گزینه «۳»

(علی اصغر شریفی)

$$A = (\delta^{-2})^{-\frac{5}{8}} = \delta^{\frac{5}{4}}$$

$$(\delta A)^{-\frac{2}{9}} = (\delta \times \delta^{\frac{5}{4}})^{-\frac{2}{9}} = (\delta^{\frac{9}{4}})^{-\frac{2}{9}} = \delta^{-\frac{2}{4}} = \delta^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱۸- گزینه «۴»

(شمیر علیرزاه)

برای موارد نادرست یک مثال نقض می‌یابیم:

نادرست است. $a = \frac{1}{2} \rightarrow (\frac{1}{2})^5 > (\frac{1}{2})^3$: گزینه «۱»

نادرست است. $a = -\frac{1}{2} \rightarrow (-\frac{1}{2})^6 > (-\frac{1}{2})^2$: گزینه «۲»

نادرست است. $a = -2 \rightarrow (-2)^5 > (-2)^4$ یا $a > 1$ یا $a < -1$: گزینه «۳»

دقت شود که رابطه $a^5 > a^4$ فقط برای $a > 1$ برقرار است.

درست است. $a < -1 \Rightarrow a^6 > a^4$: گزینه «۴»

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۳۸ تا ۵۳)

۱۹- گزینه «۱»

(طاہر راستانی)

$$\left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{\lambda ab - 2ab}{\lambda ab + 2ab} = \frac{6ab}{10ab} = \frac{3}{5}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۲۰- گزینه «۱»

(محمدرضا راسخ)

$$A = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow A = 2\sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow (A+1)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)



حسابان ۲

۲۱- گزینه «۲»

(علی سلامت)

برای تبدیل نمودار تابع $g(x)$ به نمودار $h(x)$ ابتدا لازم است آن را ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم. لذا عرض نقطه مورد نظر برابر ۱ خواهد بود.

در ضمن می‌دانیم نقطه A بر روی تابع $g(x)$ قرار دارد، پس داریم:

$$g(2) = -1 \Rightarrow f(4-1) - 1 = -1 \Rightarrow f(3) = 0$$

حال ورودی تابع $y = f(x+4) + 1$ ، یعنی $x+4$ را برابر ۳ قرار می‌دهیم

$$a+4=3 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow A'(-1, 1)$$

بنابراین نقطه جدید در ربع دوم قرار دارد.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۲۲- گزینه «۳»

(عادل مسینی)

ابتدا ضابطه g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x+1)^2 \xrightarrow{\text{طول نقاط دو برابر می‌شود.}} y = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} g(x) = \left(\frac{x+1}{2} + 1\right)^2 - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{(x+3)^2}{4} - 1$$

$$\xrightarrow{f(x)=g(x)} x^2 + 2x + 1 = \frac{x^2 + 6x + 9}{4} - 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = \frac{x^2 + 6x + 5}{4} \Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

معادله بالا دو جواب حقیقی دارد که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{2}{3}$ است. پس

مجموع طول نقاط برخورد نمودارهای f و g برابر $-\frac{2}{3}$ است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۲۳- گزینه «۱»

(عمیدرضا نوش‌کمران)

$$3 \leq \frac{3x}{2} \leq 6 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_{y=f\left(\frac{3x}{2}\right)} = [2, 4]$$

$$-2 \leq x-3 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_{y=g(x-3)} = [1, 4]$$

دامنه تابع h ، اشتراک دامنه‌های $f\left(\frac{3x}{2}\right)$ و $g(x-3)$ است، یعنی:

$$D_h = [2, 4] \cap [1, 4] = [2, 4]$$

(حسابان ۲- تابع: مرتبط با کار در کلاس ۱ صفحه ۱۰)

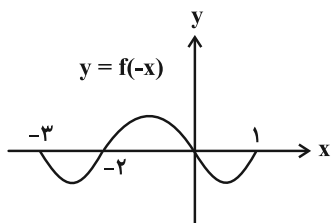
۲۴- گزینه «۲»

(شاهین پروازی)

با توجه به دامنه تابع f ، ابتدا دامنه تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$D_g: -f(-x) | f(-x) | \geq 0 \Rightarrow -f(-x) \geq 0 \Rightarrow f(-x) \leq 0$$

با رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ محدوده نامثبت را در نظر می‌گیریم:



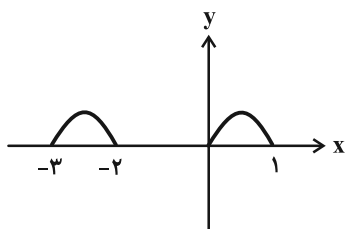
$$f(-x) \leq 0 \Rightarrow D_g = [-3, -2] \cup [0, 1]$$

حال ضابطه g را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \sqrt{-f(-x) | f(-x) |}$$

$$\xrightarrow{f(-x) \leq 0} g(x) = \sqrt{f^2(-x)} = |f(-x)|$$

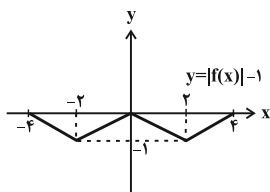
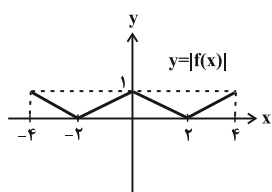
با توجه به دامنه تابع g ، نمودار نهایی به صورت زیر است:



(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۲۵- گزینه «۲»

(عمید علیزاده)





(سویل ساسانی)

۲۸- گزینه «۳»

از روی شکل معلوم است که ضابطه تابع به فرم $f(x) = -(x+2)^3 + 8$ می باشد. بعد از ساده سازی داریم:

$$-(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + 8 = -x^3 - 6x^2 - 12x$$

حال با فاکتورگیری از $-x$ عبارت را به فرم صورت سؤال درمی آوریم:

$$-x(x^2 + 6x + 12) = (0-x)(x^2 + 6x + 12)$$

و از مساوی قرار دادن عبارت اخیر و ضابطه سؤال:

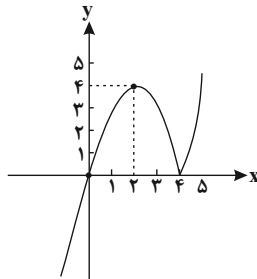
$$k=0, m=6, n=12 \Rightarrow \frac{k+n}{m} = \frac{0+12}{6} = 2$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۱۳ و ۱۴)

(لیلا مرادی)

۲۹- گزینه «۴»

قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم و نمودار تابع را رسم می کنیم:



$$y = |x-4| = \begin{cases} x^2 - 4x & ; x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & ; x < 4 \end{cases}$$

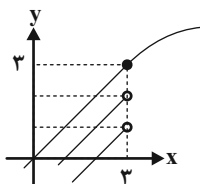
تابع در بازه $[2, 4]$ و هر زیرمجموعه ای از آن نزولی است، بنابراین $\text{Max}(b-a) = 4-2 = 2$.

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۱۷)

(ویدر رافتی)

۳۰- گزینه «۲»

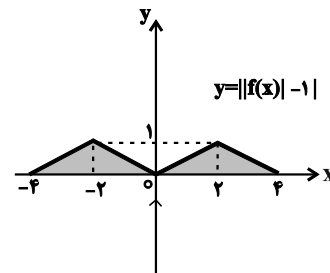


در رسم تابع f ، جایگاه نقطه توخالی $(3, 15-m)$ معلوم نیست. برای آن که تابع صعودی شود (طبق نمودار)، کافی است شرط زیر برقرار باشد:

$$15-m \leq f(3) = 3 \Rightarrow m \geq 12$$

پس در محدوده m ، ۱۱ عدد طبیعی قرار ندارد.

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۱۵ تا ۱۸)



$$\Rightarrow S_{\text{هاشورخوده}} = 2 \text{ (مساحت مثلث)} = 2 \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 1 \right) = 4$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۲ تا ۱۲)

۲۶- گزینه «۳» (علی شهرابی)

مرحله به مرحله از تابع $y = f(x)$ به تابع $y = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 6$ می رسمیم:

	۶ واحد بالا	۶ واحد بالا	۶ واحد بالا	۶ واحد بالا
	x ها، ۲ برابر	y ها، قرینه	x ها، ۲ برابر	y ها، قرینه
ضابطه	$f(x)$	$f\left(\frac{x}{2}\right)$	$-f\left(\frac{x}{2}\right)$	$g(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 6$
دامنه	$[-3, 4]$	$[-6, 8]$	$[-6, 8]$	$[-6, 8]$
برد	$[-1, 2]$	$[-1, 2]$	$[-2, 1]$	$[4, 7]$

$$\Rightarrow D_g \cap R_g = [-6, 8] \cap [4, 7] = [4, 7]$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۲ تا ۱۲)

(مشابه سوال ۵ فرادر ۱۴۰۴)

۲۷- گزینه «۳» (محمدرضا راسخ)

فرض می کنیم x_1, x_2, x_3, x_4 صفرهای تابع f باشند. در نتیجه

صفرهای تابع $y = -3f(5-2x)$ به صورت

$$\frac{5-x_1}{2}, \dots, \frac{5-x_4}{2} \text{ می باشد. حال داریم:}$$

$$\frac{5-x_1}{2} + \frac{5-x_2}{2} + \frac{5-x_3}{2} + \frac{5-x_4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 10 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

مجموع صفرهای تابع $y = f\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$ برابر می شود با:

$$2(x_1 + 1) + 2(x_2 + 1) + 2(x_3 + 1) + 2(x_4 + 1)$$

$$= 2(x_1 + x_2 + \dots + x_4) + 8 = 2(19) + 8 = 46$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه های ۲ تا ۱۲)



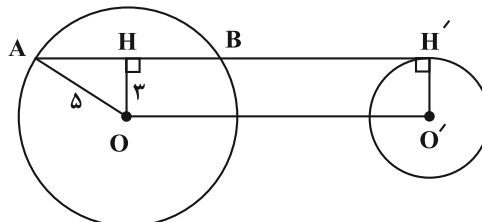
هندسه ۲

۳۱- گزینه «۴»

(شانه اتفاقی)

مطابق شکل چهارضلعی $OHH'O'$ مستطیل است، پس

$OH = R' = ۳$ است و در نتیجه در مثلث قائم الزاویه OAH داریم:



$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AH = 4$$

$$\Rightarrow AB = 2AH = 2 \times 4 = 8 \Rightarrow OO' = 2AB = 16$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$= \sqrt{16^2 - (5 - 3)^2} = \sqrt{256 - 4}$$

$$= \sqrt{252} = \sqrt{7 \times 36} = 6\sqrt{7}$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۳۲- گزینه «۱»

(فرزانه فاکپاش)

فرض کنید R و R' شعاع‌های دو دایره $(R > R')$ و TT' طول مماس

مشترک خارجی دو دایره باشد. چون دو دایره، فقط سه مماس مشترک

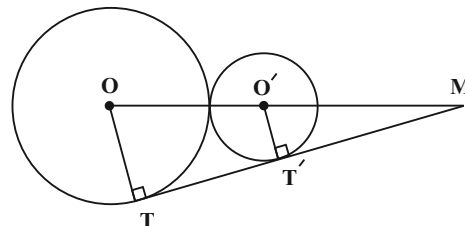
دارند، پس نسبت به هم مماس خارج هستند و در نتیجه داریم:

$$TT' = 2\sqrt{RR'} \xrightarrow{R=2R'} 2\sqrt{2R' \times R'} = 4\sqrt{2}R'$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ و ۲۳)

۳۳- گزینه «۲»

(مبویه بوادری)



طول خط‌المركزین دو دایره برابر است با:

$$OO' = R + R' = 9 + 4 = 13$$

در مثلث MOT، طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$O'T' \parallel OT \Rightarrow \frac{MO'}{MO} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{MO'}{MO' + 13} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow 9MO' = 4MO' + 52 \Rightarrow 5MO' = 52$$

$$\Rightarrow MO' = \frac{52}{5} = 10.4$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ و ۲۳)

۳۴- گزینه «۱»

(غریزانه فاکپاش)

اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر a باشد، آن گاه داریم:

$$r_a = \frac{S}{p - a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3a}{2} - a}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

در نتیجه محیط مثلث برابر $3a = 6$ واحد است.

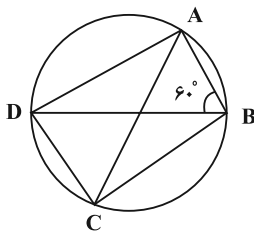
(هنر سه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۳۵- گزینه «۲»

(مهمر شمیری)

زاویه‌های روبه‌رو در چهارضلعی ABCD مکمل یکدیگرند، پس این

چهارضلعی محاطی است.



در مثلث ABD داریم:

$$\hat{A}DB + 60^\circ + 75^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}DB = 45^\circ$$

حال در دایره محیطی چهارضلعی ABCD داریم:

$$\hat{A}CB = \hat{A}DB = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \hat{A}CB = 45^\circ$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه ۲۷)

۳۶- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومحبوب)

طبق فرض در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $r = 2 - \sqrt{2}$ و

$r_b = r_c = \sqrt{2}$ است. داریم:

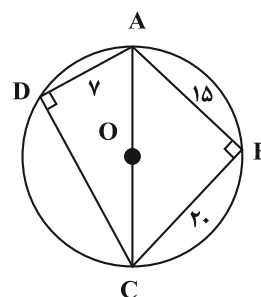
$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \\ \Rightarrow \frac{1}{r_a} &= \frac{1}{2 - \sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2(2 - \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})} \\ \Rightarrow r_a &= \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{(3\sqrt{2} - 4)} \times \frac{3\sqrt{2} + 4}{3\sqrt{2} + 4} \\ &= \frac{\sqrt{2}(2 + 2\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۵، ۲۶ و ۲۹)

۳۷- گزینه «۱»

(امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به اینکه عمود منصف‌های اضلاع چهارضلعی $ABCD$ هم‌رس هستند، پس این چهارضلعی محاطی است و چون مرکز دایره محیطی چهارضلعی (نقطه هم‌رسی عمود منصف‌ها) روی قطر AC قرار دارد، پس AC قطر دایره محیطی نیز هست و در نتیجه زوایای B و D قائمه هستند و طبق قضیه فیثاغورس داریم:



$$\begin{aligned} \triangle ABC : AC^2 &= AB^2 + BC^2 = 225 + 400 = 625 \\ \Rightarrow AC &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ADC : AC^2 &= CD^2 + AD^2 \Rightarrow 625 = CD^2 + 49 \\ \Rightarrow CD^2 &= 576 \Rightarrow CD = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{15 \times 20}{2} + \frac{24 \times 7}{2} \\ &= 150 + 84 = 234 \end{aligned}$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه ۲۷)

۳۸- گزینه «۴»

(مهمرب قنبران)

$\triangle CDF$ زاویه خارجی ADE و $\triangle BCD$ زاویه خارجی FCD است، بنابراین:

$$\begin{cases} \hat{CDF} = \hat{A} + \hat{E} = 2x + x = 3x \\ \hat{BCD} = \hat{F} + \hat{CDF} = (x + 30^\circ) + 3x = 4x + 30^\circ \end{cases}$$

چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{BCD} = 180^\circ \Rightarrow 2x + (4x + 30^\circ) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 6x = 150^\circ \Rightarrow x = 25^\circ$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه ۲۷)

۳۹- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومحبوب)

اندازه هر ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R ، برابر

$$2R \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ و اندازه هر ضلع } n \text{ ضلعی منتظم محیط بر همان دایره برابر } 2R \tan \frac{180^\circ}{n} \text{ است. پس خواسته سؤال برابر است با:}$$

$$\begin{aligned} \frac{2R \sin \frac{180^\circ}{10}}{10} &= \frac{\sin 18^\circ}{\tan 9^\circ} = \frac{\sin 18^\circ}{\frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}} = \frac{2 \sin 9^\circ \cos 9^\circ}{\sin 9^\circ} \\ &= 2 \cos^2 9^\circ = 2a^2 \end{aligned}$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴۰- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومحبوب)

طول هر ضلع n ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع r از رابطه

$$a = 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \text{ به دست می‌آید. بنابراین با فرض } n = 6 \text{ و } a = 4 \text{ داریم:}$$

$$4 = 2r \times \tan 30^\circ \Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$$

$$S = \pi r^2 = 12\pi$$

(هنر سه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)



هندسه ۱

۴۱- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومصوب)

در هر مثلث، نسبت ارتفاع‌های وارد بر دو ضلع، عکس نسبت اندازه‌های آن دو ضلع است. حال اگر $a = 9$ و $b = 15$ باشد، با توجه به فرض سؤال داریم:

$$h_a + h_b = 4h_c \xrightarrow{+h_c} \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_b}{h_c} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 4 \Rightarrow \frac{c}{9} + \frac{c}{15} = 4$$

$$\xrightarrow{\times 45} 5c + 3c = 180 \Rightarrow 8c = 180 \Rightarrow c = 22.5$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴۲- گزینه «۲»

(عمیر ناصر)

طبق قضیه تالس در دو مثلث AEC و ABC داریم:

$$DF \parallel AE \Rightarrow \frac{CF}{EF} = \frac{CD}{AD} \quad (1)$$

$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{CD}{AD} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{CF}{EF} = \frac{CE}{BE} \xrightarrow{CF=1/5 EF} \frac{CE}{BE} = \frac{2}{5} \Rightarrow BE = \frac{5}{2} CE$$

اگر $EF = x$ باشد، آن‌گاه از روابط بالا نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} CF = \frac{3x}{2} \\ BE = \frac{5x}{3} \end{cases}$$

دو مثلث EDF و BDC در ارتفاع رسم شده از رأس D مشترک‌اند، پس

نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های متناظر است و در نتیجه داریم:

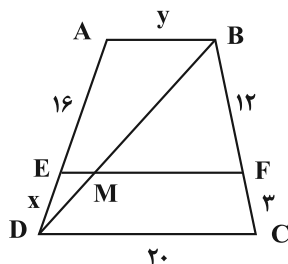
$$\frac{S_{EDF}}{S_{BDC}} = \frac{EF}{BC} = \frac{x}{\frac{3}{2}x + x + \frac{5}{3}x} = \frac{x}{\frac{25}{6}x} = \frac{6}{25} = 0.24$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴۳- گزینه «۱»

(علی احمدی قزل‌رشت)

خط BD را رسم می‌کنیم تا پاره‌خط EF را در نقطه M قطع کند.



طبق قضیه تالس در دوزنقه داریم:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BM}{MD} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

حالا از تعمیم قضیه تالس در مثلث‌های ABD و BDC استفاده می‌کنیم:

$$\triangle BDC : MF \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{MF}{DC} = \frac{BF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{MF}{20} = \frac{12}{15} \Rightarrow MF = 16$$

$$\Rightarrow EM = EF - MF = 18 - 16 = 2$$

$$\triangle ABD : EM \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{EM}{AB} = \frac{DE}{DA}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{4}{20} \Rightarrow y = 10$$

$$x + y = 4 + 10 = 14 \quad \text{بنابراین داریم:}$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۴۴- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومصوب)

بین طول اضلاع مثلث اولی، رابطه فیثاغورس برقرار است و لذا طبق عکس

قضیه فیثاغورس، این مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد. $(8^2 + 15^2 = 17^2)$

مثلث دومی که با مثلث اولی متشابه است، قطعاً قائم‌الزاویه می‌باشد و زمانی مساحت آن بیشترین مقدار ممکن می‌شود که اضلاع به طول x و y متناظر با

اضلاع به طول ۱۵ و ۱۷ در مثلث اولی باشد. داریم:

$$\frac{6}{8} = \frac{x}{15} = \frac{y}{17} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{45}{4} \\ y = \frac{51}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{بیشترین مساحت مثلث دوم} : S = \frac{1}{2} \left(6 \times \frac{45}{4} \right) = \frac{135}{4}$$

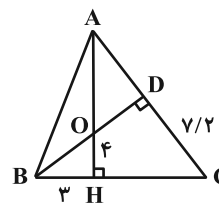
(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه ۳۸)



۴۵- گزینه «۴»

(اسحاق اسفندیار)

مطابق شکل داریم:



$$\Delta BOH : BO^2 = BH^2 + OH^2 \Rightarrow BO = 5$$

دو مثلث BDC و BHO به دلیل داشتن یک زاویه مشترک 90° و یک

زاویه مشترک $\hat{B}$ با هم متشابه هستند. بنابراین:

$$\Delta BHO \sim \Delta BDC \xrightarrow{(ز.ز)} \frac{OH}{CD} = \frac{BO}{BC}$$

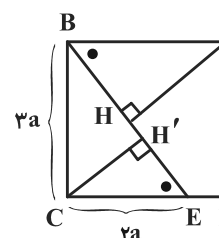
$$\Rightarrow \frac{4}{7/2} = \frac{5}{3+CH} \Rightarrow 3+CH=9 \Rightarrow CH=6$$

(هنر سه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۴۶- گزینه «۲»

(مهرزاد ملونری)

با فرض $ED = a$ ، اطلاعات صورت سؤال را در شکل زیر جای گذاری می‌کنیم:



طبق قضیه خطوط موازی و مورب، $\hat{ABH} = \hat{CEH'}$ است و در نتیجه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H} = \hat{H'} = 90^\circ \\ \hat{ABH} = \hat{CEH'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \Delta ABH \sim \Delta CEH'$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{CH'} = \frac{AB}{CE} = \frac{3a}{2a} \Rightarrow \frac{AH}{CH'} = \frac{3}{2} = 1/5$$

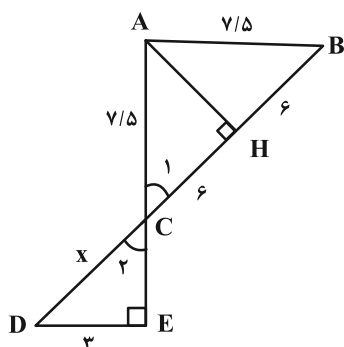
(هنر سه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۴۷- گزینه «۲»

(علی احمدی قزل‌رشت)

در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع وارد بر قاعده BC، میانه نظیر

این ضلع است، پس داریم: $BH = CH = 6$



طبق قضیه فیثاغورس در مثلث AHC، طول ارتفاع AH را به دست می‌آوریم:

$$\Delta AHC : AH^2 = AC^2 - CH^2 = 7^2 - 6^2$$

$$= (7/5 - 6)(7/5 + 6) = \frac{11}{4} \Rightarrow AH = \frac{9}{2}$$

دو مثلث AHC و DEC به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند، زیرا:

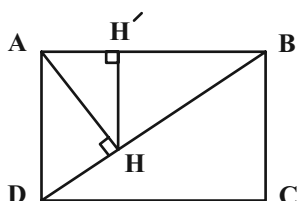
$$\left. \begin{array}{l} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \text{ (متقابل به راس)} \\ \hat{H} = \hat{E} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{(ز.ز)} \Delta AHC \sim \Delta DEC$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{AH}{DE} \Rightarrow \frac{15}{x} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 5$$

(هنر سه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۴۸- گزینه «۱»

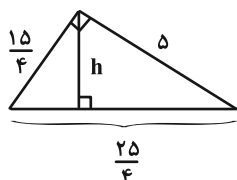
(امیر حسین ابومصوب)



$$\frac{x+y=35}{4} \rightarrow x + \frac{75}{4x} = \frac{35}{4} \xrightarrow{x \neq 0} 4x^2 - 35x + 75 = 0$$

$$\Rightarrow (4x-15)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{4} \Rightarrow y = 5 \\ x = 5 \Rightarrow y = \frac{15}{4} \end{cases}$$

فاصله رأس مربع بزرگ از نزدیک‌ترین ضلع مربع کوچک، همان طول ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه زیر است. داریم:



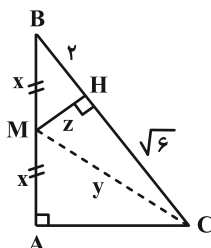
$$2 \times \text{مساحت مثلث} = \frac{15}{4} \times 5 = \frac{25}{4} h \Rightarrow h = 3$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

(هومن عقیلی)

۵۰- گزینه «۲»

M را به C وصل می‌کنیم. مطابق شکل، طبق قضیه فیثاغورس داریم:



$$\begin{aligned} y^2 &= z^2 + 6 \\ - x^2 &= z^2 + 4 \\ \hline y^2 - x^2 &= 2 \Rightarrow AC^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2} \end{aligned}$$

راه دوم:

$$\triangle BHM \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{y}{2x} = \frac{x}{2+\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{6}$$

$$AC^2 = (2 + \sqrt{6})^2 - 4(2 + \sqrt{6}) = (2 + \sqrt{6})(2 + \sqrt{6} - 4)$$

$$= (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2) = 2$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 144 + 48 = 192 \Rightarrow BD = 8\sqrt{3}$$

طبق روابط طولی در این مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 144 = BH \times 8\sqrt{3} \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}$$

حال اگر از H، عمود HH' را بر ضلع AB رسم کنیم، آن‌گاه طبق تعمیم

قضیه تالس در مثلث ABD داریم:

$$HH' \parallel DA \Rightarrow \frac{HH'}{DA} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow \frac{HH'}{6\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} \Rightarrow HH' = 3\sqrt{3}$$

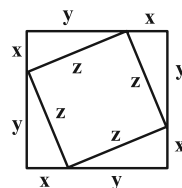
(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۵، ۳۱ و ۳۲)

۴۹- گزینه «۱»

(مهرادر ملونری)

مطابق شکل، رئوس مربع کوچک، اضلاع مربع بزرگ را به دو قسمت به

طول‌های x و y تقسیم کرده است. طبق فرض داریم:



$$\begin{cases} 4(x+y) = 35 \Rightarrow x+y = \frac{35}{4} \\ 4z = 25 \Rightarrow z = \frac{25}{4} \end{cases}$$

از طرفی طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy = z^2$$

$$\Rightarrow 2xy = \left(\frac{35}{4}\right)^2 - \left(\frac{25}{4}\right)^2 = \frac{(35-25)(35+25)}{4^2} = \frac{75}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{75}{4x}$$

هندسه ۳

۵۱- گزینه «۴»

(مهرادر ملونری)

با توجه به فرض برای دو ماتریس A و B داریم:

$$\begin{cases} A + 3B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\times 3} 3A - 3B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} 4A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس 4A برابر ۸ است. پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۲ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵ و ۱۹)

۵۲- گزینه «۱»

(افشین فاضله‌فان)

ماتریس AxB را محاسبه می‌کنیم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2b & 3 & 2c \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1 \\ 2c - 2 = 0 \Rightarrow c = 1 \\ -a + 2 + b = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۲ و ۱۷ تا ۱۹)

(مشابه تمرین ۶ صفحه ۲۱)

۵۳- گزینه «۱»

(امیرحسین ابومحبوب)

ماتریس A اسکالر است. بنابراین درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن برابر صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر یکدیگرند. بنابراین داریم:

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} x+1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 & x^2+x-y \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2 = x+y \Rightarrow y=2 \\ x^2+x-y=0 \xrightarrow{y=2} x^2+x-2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

تذکر: به ازای $x = -2$ ، درایه‌های واقع بر قطر اصلی نیز برابر صفر می‌شوند، که این مقدار با توجه به فرض غیرصفر بودن ماتریس A، قابل قبول نیست.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۲ و ۱۷ تا ۱۹)

۵۴- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومحبوب)

طبق تعریف برای درایه‌های ماتریس‌های A و B داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 2-1 \\ 2(2)-1 & 2^2-1 \\ 2(3)-1 & 2(2)-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 1-2+1 & 1-3+1 \\ 2+2(1) & 2^2-1 & 2-3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 12 & 9 & -3 \\ 20 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر است با: $4+9-5=8$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۵۵- گزینه «۴»

(امیرحسین ملازینل)

برای دو ماتریس مربعی دلخواه A و B، رابطه زیر همواره برقرار است:

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 + AB - BA$$

از آنجا که طبق فرض $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ شده است، نتیجه می‌گیریم $AB - BA = 0$ ، که این یعنی دو ماتریس A و B خاصیت تعویض‌پذیری دارند. در نتیجه:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & 4 \\ -a+3b & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 & 2a+6 \\ b-1 & 2b+3 \end{bmatrix}$$

حالا درایه‌های متناظر را برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} a-2 = a+2b \\ 2a+6 = 4 \\ b-1 = -a+3b \\ 2b+3 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = -1$$

در نتیجه $BA = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و جمع درایه‌های آن برابر صفر می‌شود.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۵۶- گزینه «۲»

(کیوان دارابی)

به جای محاسبه کل ماتریس ABC، همان ستون مطلوب را پیدا می‌کنیم.

$$ABC = A(BC)$$

(ستون چهارم $A \times (BC)$ = ستون چهارم $(A(BC))$)

(ستون چهارم $B \times C$ = ستون چهارم BC)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

طبق فرض مسئله: $A^3 - A^2 = mA + nI$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 38 & 85 \\ 17 & 38 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 5m \\ m & 2m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 29 & 65 \\ 13 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+n & 5m \\ m & 2m+n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ 2m+n = 29 \Rightarrow 26+n = 29 \Rightarrow n = 3 \end{cases}$$

در نتیجه: $m+n = 13+3 = 16$

روش دوم: طبق رابطه کیلی - همیلتون داریم:

$$A^2 = (2+2)A - (4-5)I \Rightarrow A^2 = 4A + I$$

$$\Rightarrow A^3 = A^2 \times A = (4A + I) \times A$$

$$\Rightarrow A^3 = 4A^2 + A = 4(4A + I) + A = 17A + 4I$$

$$\Rightarrow A^3 - A^2 = (17A + 4I) - (4A + I) = 13A + 3I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow m+n = 16$$

(هندسه ۳ - ماتریس و کاربرد: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۶۰. گزینه «۱» (مهردار ملونری)

با توجه به فرض، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۲»:

$$(AB)^T = (AB)(AB) = (AB)(B^T A) = A \underset{I}{B^T} A = A^2$$

گزینه «۳»:

$$(BA)^T = (BA)(BA) = B(AB)A = B(B^T A)A = \underset{I}{B^T} A^2 = A^2$$

همچنین از $AB = B^T A$ نتیجه می‌گیریم $BAB = B^T A = A$ و لذا

$$BA = BAB^T = (BAB)B^T = AB^T$$

گزینه «۴»:

$$(A^T B)^T = (A^T B)(A^T B) = A^T (BA)(AB)$$

$$= A^T (AB^T)AB = A^T (B^T A)B = I(AB)B = AB^T$$

در مورد گزینه «۱» داریم:

$$(AB^T)^T = (AB^T)(AB^T) = A(B^T A)B^T$$

$$= A(AB)B^T = A^T B^T = A^T$$

(هندسه ۳ - ماتریس و کاربرد: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

حال ماتریس A را از سمت چپ در ستون به دست آمده ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 8+8+24 = 40$$

(هندسه ۳ - ماتریس و کاربرد: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۵۷. گزینه «۴»

(علی ایمانی)

$$I = \begin{bmatrix} 3^{x-y} & 0 \\ x+y-z & 2^{x-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{x-1} = 1 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 3^{x-y} = 1 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow y = x = 1 \\ x+y-z = 0 \Rightarrow 1+1-z = 0 \Rightarrow z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 1+1+2 = 4$$

(هندسه ۳: ماتریس و کاربرد: صفحه ۱۹)

(برگرفته از کار در کلاس (۲) صفحه ۱۹)

۵۸. گزینه «۳»

(سولکر روشنی)

برای به دست آوردن توان‌های بزرگ ماتریس A ، سعی می‌کنیم الگویی را بین توان‌های آن تشخیص دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2A$$

$$\Rightarrow A^2 = A^2 A = (2A)A = 2A^2 = 2(2A) = 2^2 A$$

از روابط فوق می‌توانیم نتیجه بگیریم که $A^n = 2^{n-1} A$. بنابراین داریم:

$$A^{12} = 2^{11} A = \begin{bmatrix} 2^{11} & -2^{11} \\ -2^{11} & 2^{11} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های قطر اصلی} = 2 \times 2^{11} = 2^{12}$$

(هندسه ۳ - ماتریس و کاربرد: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۲۰)

۵۹. گزینه «۱»

(سیرمهرها مسینی فرد)

روش اول:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 85 \\ 17 & 38 \end{bmatrix}$$

آمار و احتمال

۶۱- گزینه «۴»

(مصطفی درباری)

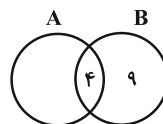
ابتدا متمم مجموعه مذکور را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(A \cup (A' \cap B'))' &= A' \cap (A' \cap B')' = A' \cap (A \cup B) \\ &= \underbrace{(A' \cap A)}_{\emptyset} \cup (A' \cap B) = A' \cap B = B - A\end{aligned}$$

پس مجموعه $B - A$ دارای $2^9 = 512$ زیرمجموعه است که یعنی ۹ عضو

دارد. $A \cap B$ نیز دارای ۱۵ زیرمجموعه ناتمامی است پس $2^4 = 16$

زیرمجموعه داشته و لذا ۴ عضو دارد. تعداد عضوهای مجموعه B برابر است با:



$$|B| = |B - A| + |A \cap B| = 9 + 4 = 13$$

پس مجموعه B دارای ۱۳ عضو بوده و $\binom{13}{2} = 78$ زیرمجموعه دوعضوی دارد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

۶۲- گزینه «۱»

(فرزانه شاکباش)

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned}(A \cap B)' \cap (A \cup B)' \cap C &= [(A' \cup B') \cap (A \cup B)] \cap C \\ &= \underbrace{[(A' \cap A) \cup B']}_{\emptyset} \cap C = B' \cap C\end{aligned}$$

طبق فرض مسئله، این مجموعه برابر مجموعه C است. بنابراین داریم:

$$B' \cap C = C \Rightarrow C - B = C$$

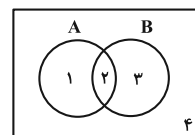
$$\xrightarrow{B \neq \emptyset} C \text{ و } B \Rightarrow B \cap C = \emptyset \text{ جدا از هم هستند.}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

۶۳- گزینه «۱»

(فرزاد جوادری)

نمودار ون را می‌کشیم و از روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها استفاده می‌کنیم:



$$\begin{aligned}&[(A \cup B) - B] \cap [(A \cap B) \cup B'] \\ &= [(1, 2, 3) - (2, 3)] \cap [(2) \cup (1, 4)] \\ &= [1] \cap [1, 2, 4] = (1) \text{ ناحیه } A - B\end{aligned}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

۶۴- گزینه «۳»

(سوکندر روشنی)

چون دو مجموعه A و B ناتمامی هستند، از فرض نتیجه می‌گیریم:

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B$$

پس قطعاً $c = 3$ است و حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 8 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 9 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 8 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 14 \\ a + b + c = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 3 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 13 \\ a + b + c = 9 \end{cases}$$

بنابراین پنج مقدار صحیح ۳، ۸، ۹، ۱۳ و ۱۴ قابل قبول است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۶۵- گزینه «۲»

(امیرمسین ایوبیوب)

با توجه به تعریف مجموعه‌های A و B داریم:

$$\begin{cases} n(A) = \left| \frac{100}{6} \right| = 16 \\ n(B) = \left| \frac{100}{8} \right| = 12 \\ n(A \cap B) = \left| \frac{100}{24} \right| = 4 \end{cases}$$

حالا طبق تعریف ضرب دکارتی داریم:

$$\begin{aligned}n(A \times B - B \times A) &= n(A \times B) - n((A \times B) \cap (B \times A)) \\ &= n(A) \times n(B) - (n(A \cap B))^2 \\ &= 16 \times 12 - 4^2 = 192 - 16 = 176\end{aligned}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۶۶- گزینه «۱»

(سیر ممد رضا حسینی فرد)

تعداد اعضای فضای نمونه این آزمایش برابر است با:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

حاصل ضرب اعداد رو شده دو تاس در صورتی عددی اول است که یک

تاس عدد یک و دیگری یکی از سه عدد ۲، ۳ و ۵ باشد. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} (1,2) \rightarrow \text{حالت ۲} \\ (1,3) \rightarrow \text{حالت ۲} \\ (1,5) \rightarrow \text{حالت ۲} \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = 3 \times 2 = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۶۷- گزینه «۳»

(اسحاق اسفندیار)

فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، حالت‌های انتخاب سالن‌ها توسط این

سه نفر است و چون هر نفر ۳ انتخاب دارد، پس:

$$n(S) = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

اگر A پیشامد حضور حداقل یک نفر در سالن ۳ باشد، آن‌گاه A' پیشامد

آن است که سالن ۳ خالی بماند که در این صورت هر فرد دارای ۲ انتخاب

$$n(A') = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

است، یعنی:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

بنابراین داریم:

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۶۸- گزینه «۳»

(سوکندر روشنی)

می‌دانیم جمع احتمال‌ها باید برابر یک بشود، بنابراین:

$$P(1) + P(2) + P(3) = 1 \Rightarrow \frac{\binom{4}{1}}{a \times 1!} + \frac{\binom{4}{2}}{a \times 2!} + \frac{\binom{4}{3}}{a \times 3!} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a} + \frac{3}{a} + \frac{2}{3a} = 1 \Rightarrow \frac{12 + 9 + 2}{3a} = 1 \Rightarrow a = \frac{23}{3}$$

مطلوب سوال برابر است با:

$$P(2) - P(3) = \frac{3}{a} - \frac{2}{3a} = \frac{7}{3a} = \frac{7}{23}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۶۹- گزینه «۲»

(امیرحسین ایومپوب)

فرض کنید $P(a) = x$ باشد. در این صورت داریم:

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1 \Rightarrow x + 2x + 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\{a, b\}) = P(a) + P(b) = x + 2x = 3x = \frac{3}{7} \\ P(\{b, c\}) = P(b) + P(c) = 2x + 4x = 6x = \frac{6}{7} \end{array} \right.$$

در نتیجه احتمال وقوع پیشامد $\{a, b\}$ به اندازه $\frac{3}{7}$ از احتمال وقوع

پیشامد $\{b, c\}$ کمتر است.

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۷۰- گزینه «۳»

(امیرحسین ملازینل)

اگر پیشامد ابتلای این فرد به گرمزدگی و آفتاب‌سوختگی را به ترتیب با A

و B نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B)$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B') = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$\Rightarrow 0/2 = 1 - (0/6 + 0/3 - P(A \cap B))$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0/1$$

احتمال اینکه این فرد فقط گرمزده شود، برابر است با:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0/6 - 0/1 = 0/5$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

ریاضیات گسسته

۷۱- گزینه «۳»

(عمیدرضا امیری)

اگر $a = 2$ و $b = 3$ باشد، آنگاه $ab = 6$ زوج است ولی $a + b = 5$ فرد می‌باشد. سایر موارد قضایای کلی هستند و همواره برقرارند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

۷۲- گزینه «۴»

(سوکندر روشنی)

بررسی گزینه‌ها:

(۱) نادرست؛ مثال نقض: اگر عدد گویا را صفر در نظر بگیریم، حاصل ضربش در هر عدد گنگ برابر صفر می‌شود که عددی گویا است.

(۲) نادرست؛ مثال نقض: به ازای $n = 6$ ، اعداد 6^3 و 6^5 به دست می‌آیند که هیچ کدام عدد اول نیستند.

(۳) نادرست؛ مثال نقض: $n = 3 \Rightarrow 2^6 + 1 = 65$

(۴) درست؛ زیرا برای این که رابطه گفته شده، درست باشد، باید حداقل یکی از اعداد a یا b صفر باشد:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a+b = a+b+2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{ab} = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0$$

بنابراین در مجموعه اعداد طبیعی، این گزاره درست است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲ و ۳)

۷۳- گزینه «۱»

(امیرمسین ابومصوب)

عدد $4k + 1$ قطعاً عددی فرد است و در صورتی که مربع کامل باشد، قطعاً مربع عددی فرد خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$4k + 1 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1$$

$$\Rightarrow k = n^2 + n = n(n + 1)$$

دقت کنید که طبق فرض $k > 2$ می‌توان گفت:

$$4k + 1 > 9 \Rightarrow (2n + 1)^2 > 9 \Rightarrow 2n + 1 > 3 \Rightarrow n > 1$$

پس k همواره به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی است.

بدیهی است عددی به فرم $n(n + 1)$ در صورت طبیعی بودن n ، هیچ‌گاه نمی‌تواند مربع کامل باشد و به ازای $n > 1$ ، هیچ‌گاه عددی اول نیست.

این عدد تنها در صورتی مضرب ۳ است که یکی از دو عدد n یا $n + 1$ مضرب ۳ باشند و مثلاً به ازای $n = 4$ ، نمی‌تواند مضرب ۳ باشد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳ تا ۶)

۷۴- گزینه «۳»

(کیوان دارابی)

می‌دانیم حاصل ضرب عدد گویا در عدد گویا، عددی گویا است، بنابراین:

$$-3(\alpha - \beta) = 3\beta - 3\alpha \in Q$$

بنابراین $3\beta - 3\alpha$ عددی گویا است. از طرفی:

$$3\beta + 2\alpha = 3\beta - 3\alpha + 5\alpha$$

که $3\beta - 3\alpha$ طبق نتیجه بالا عددی گویا است و 5α طبق فرض عددی گنگ است. در عین حال با برهان خلف ثابت می‌شود مجموع عددی گویا و عددی گنگ همواره گنگ است و در نتیجه $3\beta + 2\alpha$ عددی گنگ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه ۵)

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۸)

۷۵- گزینه «۲»

(سوکندر روشنی)

اگر مجذور عددی صحیح زوج باشد، خود عدد نیز زوج است. در نتیجه:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \text{زوج} \Rightarrow \begin{cases} n = 4k \\ \text{یا} \\ n-1 = 4k \Rightarrow n = 4k+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 \leq 4k \leq 99 \Rightarrow 3 \leq k \leq 24 \\ 10 \leq 4k+1 \leq 99 \Rightarrow 3 \leq k \leq 24 \end{cases} \Rightarrow \text{مقدار ۲۲}$$

$$\Rightarrow \text{مقدار ۲۲}$$

بنابراین n می‌تواند ۴۴ مقدار متمایز را اختیار کند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ مشابه کار در کلاس (ب) صفحه ۵)

۷۶- گزینه «۳»

(امیرمسین ابومصوب)

طبق اثبات به روش بازگشتی، حکم را درست فرض کرده و در نتیجه داریم:

$$x^2 + y^2 \geq x + y - \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 \geq 2x + 2y - 1$$

$$r = 5 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a_{\min} = 7r = 35 \quad \checkmark$$

$$r = 10 \Rightarrow b = 12 \Rightarrow a_{\max} = 7r = 70 \quad \checkmark$$

$$r = 15 \Rightarrow b = 18 \Rightarrow a = 105 \quad \times$$

پس تفاضل حداکثر و حداقل مقدار دو رقمی مقسوم برابر ۳۵ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۲، ۱۴ و ۱۵)

(کیوان دارابی)

گزینه «۱» - ۷۹

ابتدا عبارت داخل سوال را ساده‌تر می‌کنیم:

$$(12a^2, 9ab) = 3 | a | (4a, 3b)$$

از آنجا که b عددی فرد است، پس عامل ۲ ندارد. در نتیجه $3b$ نیز عامل ۲

ندارد. بنابراین عامل ۲ در این b م بی‌تأثیر است و می‌توانیم آن را کنار بگذاریم:

$$(4a, 3b) = (a, 3b)$$

$$(a, 3b) = | a | \quad \text{بنابراین } a | 3b \text{ و در نتیجه:}$$

$$(12a^2, 9ab) = 3 | a | \times | a | = 3a^2 \quad \text{بنابراین:}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۰، ۱۳، ۱۶ و ۱۷)

(امیرمسین ملازینل)

گزینه «۲» - ۸۰

مطابق فرض سوال می‌دانیم:

$$\begin{cases} a | 9k + 7 \xrightarrow{\times 7} a | 63k + 49 & (1) \\ a | 7k + 6 \xrightarrow{\times 9} a | 63k + 54 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a | (63k + 54) - (63k + 49)$$

$$\Rightarrow a | 5 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1, a = 5$$

در نتیجه اختلاف مقادیر طبیعی ممکن برای a برابر ۴ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ مشابه مثال صفحه ۱۲)

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y) + (x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)^2 + (x - y)^2 \geq 0$$

رابطه اخیر همواره درست است و تمام روابط برگشت‌پذیر هستند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۸)

(علیرضا شریف‌قطبی)

گزینه «۱» - ۷۷

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 = ab \quad (*)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0$$

$$\xrightarrow{(*)} a^2 + b^2 + (a+b)^2 = 0$$

رابطه اخیر به ازای هیچ زوج مرتبی مانند (a, b) که در آن a و b اعداد

صحیح و غیرصفر باشند، برقرار نیست.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ مشابه تمرین ۵ صفحه ۸)

(امیررضا فلاح)

گزینه «۳» - ۷۸

قضیه تقسیم را می‌نویسیم:

$$a = bq + r \xrightarrow{a=7r} 7r = bq + r \Rightarrow 6r = bq \quad (1)$$

با توجه به شرط تقسیم می‌دانیم:

$$r < b \xrightarrow{\times 6} 6r < 6b \Rightarrow bq < 6b \Rightarrow q < 6 \Rightarrow q_{\max} = 5$$

$$\xrightarrow{(1)} 6r = 5b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 | 6r \Rightarrow 5 | r & \text{یعنی } r \text{ مضرب } 5 \text{ است.} \\ 6 | 5b \Rightarrow 6 | b & \text{یعنی } b \text{ مضرب } 6 \text{ است.} \end{cases}$$

فیزیک ۲

۸۱- گزینه «۴»

(پول شمشیری)

با توجه به رابطه (۱) ظرفیت خازن نصف می شود. $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ (۱)

با توجه به رابطه (۲) و ثابت بودن V ، بار خازن نصف می شود.

$Q = CV$ (۲)

با توجه به رابطه (۳) و ثابت بودن V ، انرژی خازن نصف می شود.

$U = \frac{1}{2} CV^2$ (۳)

با توجه به رابطه (۴) و ثابت بودن V ، اندازه میدان بین صفحات خازن

نصف می شود. $E = \frac{V}{d}$ (۴)

(فیزیک ۲- الکتریسیته ساکن: صفحه های ۳۲ تا ۴۰)

۸۲- گزینه «۲»

(مسعود قره فانی)

طبق رابطه انرژی ذخیره شده در خازن داریم: $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

پس از آن که به اندازه ۲۵ درصد بار ذخیره شده در خازن، بار الکتریکی منفی از صفحه مثبت جدا کرده و به صفحه منفی منتقل کنیم، مقدار Q نیز ۲۵ درصد افزایش خواهد یافت؛ یعنی:

$Q_2 = 1/25 Q_1 = \frac{5}{4} Q \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} Q \right)^2 = \frac{25}{16} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right)$

$\Rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{9}{16} \times \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = 45J$

$\Rightarrow \frac{9}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{Q^2}{10 \times 10^{-6}} = 45J$

$\Rightarrow Q^2 = 16 \times 10^{-4} \Rightarrow Q = 4 \times 10^{-2} C$

$\Rightarrow Q = 40 \times 10^{-3} C = 40mC$

(فیزیک ۲- الکتریسیته ساکن: صفحه های ۳۸ تا ۴۰)

۸۳- گزینه «۳»

(آراس مومری)

با استفاده از رابطه ظرفیت خازن تخت داریم:

$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow d = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{C} = \frac{10 \times 9 \times 10^{-12} \times 20 \times 10^{-4}}{18 \times 10^{-9}} = 10^{-5} m$

و چون در صورت سؤال گفته است که اگر میدان بیشتر از $5 \times 10^7 \frac{N}{C}$ شود

خازن دچار فروریزش می شود پس اختلاف پتانسیل میان دو صفحه خازن نیز بیشینه می شود و داریم:

$E = \frac{V}{d} \Rightarrow V_{\max} = E_{\max} d = 5 \times 10^7 \times 10^{-5} = 500V$

حال طبق رابطه $q = CV$ ، بیشترین بار ذخیره شده در خازن را به دست می آوریم:

$q_{\max} = C V_{\max} \Rightarrow q_{\max} = 18 \times 10^{-9} \times 500 = 90 \times 10^{-7} C = 9 \mu C$

(فیزیک ۲- الکتریسیته ساکن: صفحه های ۳۲ تا ۳۸)

۸۴- گزینه «۴»

(فسرو ارغوانی فردر)

از رابطه $I = \frac{q}{t}$ استفاده می کنیم: $I = 50mA = 5 \times 10^{-2} A$

$\xrightarrow{q=ne} I = \frac{ne}{t} \Rightarrow 5 \times 10^{-2} = \frac{n \times 1.6 \times 10^{-19}}{120}$

$\Rightarrow n = \frac{60}{16} \times 10^{19} = 3.75 \times 10^{19}$ الکترون

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه های ۳۶ تا ۴۸)

۸۵- گزینه «۴»

(مسام نادری)

بنابه رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ ، چون مقاومت با طول سیم رابطه مستقیم دارد،

مقاومت $\frac{1}{2}$ از طول سیم برابر 9Ω $R_2 = \frac{1}{2} R_1 = \frac{1}{2} \times 18 = 9\Omega$ می شود.

اکنون اگر طول این سیم $(L_2 = \frac{1}{2} L_1)$ را به طول سیم

اولیه $(L_3 = L_1)$ برسانیم، چون جرم و در نتیجه حجم سیم ثابت می ماند،

مساحت سطح مقطع آن $\frac{1}{2}$ برابر می شود.

$V_2 = V_3 \Rightarrow A_2 L_2 = A_3 L_3$

$\xrightarrow{L_2 = \frac{1}{2} L_1} \xrightarrow{L_3 = L_1} A_2 \times \frac{1}{2} L_1 = A_3 \times L_1 \Rightarrow A_3 = \frac{1}{2} A_2$

اکنون با داشتن طول و سطح مقطع سیم در حالت جدید، مقاومت آن را می یابیم:

$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_3}{R_2} = \frac{L_3}{L_2} \times \frac{A_2}{A_3}$

$\xrightarrow{R_2 = 9\Omega} \xrightarrow{\frac{1}{2} L_1} \xrightarrow{\frac{1}{2} A_2} \frac{R_3}{9} = \frac{L_1}{\frac{1}{2} L_1} \times \frac{A_2}{\frac{1}{2} A_2} \Rightarrow \frac{R_3}{9} = 4 \Rightarrow R_3 = 36\Omega$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه های ۵۱ تا ۵۶)

۸۶- گزینه «۴»

(مسین الهی)

ابتدا با استفاده از رابطه $\rho' = \frac{m}{V}$ حجم کابل را به دست می آوریم:

$$\rho' = \rho = 2 \frac{g}{cm^3} = 2000 \frac{kg}{m^3}$$

$$m = \rho' \times V \Rightarrow 5 = 2000 \times V \Rightarrow V = \frac{5}{2000} m^3$$

$$\Rightarrow A \times L = \frac{5}{2000} m^3 \quad (I)$$

با استفاده از رابطه مقاومت کابل و همچنین قانون اهم داریم:

$$R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow{R=\frac{V}{I}} \frac{V}{I} = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{90}{75} = 2 \times 10^{-7} \times \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{30 \times 10^{-7}}{75} = \frac{L}{A} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(II), (I)} L^2 = \frac{5}{2000} \times \frac{30 \times 10^{-7}}{75} = \frac{15}{150} \times 10^{-5} = 10^{-4}$$

$$\Rightarrow L = 10^{-2} = 100 m$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه های ۴۹ تا ۵۲)

۸۷- گزینه «۴»

(عبدالرضا امینی نسب)

طبق متن کتاب درسی، گزینه «۴» صحیح نیست و بقیه گزینه ها صحیح هستند.

مقاومت نوری، نوعی از مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده

شده به آن بستگی دارد و با افزایش شدت نور، از مقاومت آن کاسته می شود.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه های ۵۲ تا ۵۹)

۸۸- گزینه «۱»

(مصطفی واثقی)

ابتدا با استفاده از داده های روی نمودار نسبت $\frac{R_A}{R_B}$ را می یابیم. با توجه به

نمودار، اگر V_A چهار واحد باشد I_A دو واحد و اگر V_B دو واحد

باشد، I_B چهار واحد می شود. بنابراین با استفاده از قانون اهم داریم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{V_A}{V_B} \times \frac{I_B}{I_A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{4}{2} \times \frac{4}{2} = 4$$

اکنون نسبت $\frac{I_A}{I_B}$ را به ازای اختلاف پتانسیل یکسان می یابیم:

$$I = \frac{V}{R} \xrightarrow{V_A=V_B} \frac{I_A}{I_B} = \frac{R_B}{R_A} \xrightarrow{\frac{R_B}{R_A}=\frac{1}{4}} \frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{4}$$

در آخر، با توجه به اینکه $I = \frac{q}{t}$ و $q = ne$ است، نسبت $\frac{n_A}{n_B}$ را پیدا می کنیم.

$$I = \frac{q}{t} = \frac{ne}{t} \Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = \frac{n_A}{n_B} \times \frac{t_B}{t_A}$$

$$\xrightarrow{\frac{t_A=t}{t_B=3t}} \frac{1}{4} = \frac{n_A}{n_B} \times \frac{3t}{t} \Rightarrow \frac{n_A}{n_B} = \frac{1}{12}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه های ۴۶ تا ۵۰)

۸۹- گزینه «۲»

(مسین الهی)

$$R_1 = \rho_1 \frac{L}{A} = 6 / 9 \times 10^{-5} \Omega \cdot m \times \frac{1 / 2 m}{2 / 3 \times 10^{-6} m^2} = 36 \Omega$$

$$R_2 = \rho_2 \frac{L}{A} = 10 / 25 \times 10^{-5} \Omega \cdot m \times \frac{1 / 2 m}{2 / 3 \times 10^{-6} m^2} = 54 \Omega$$

$$\frac{\Delta R}{R_1} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \times 100 = \frac{54 - 36}{36} \times 100 = \frac{18}{36} \times 100 = 50\%$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه های ۵۱ تا ۵۵)

۹۰- گزینه «۲»

(مهمرب اکبری)

بررسی گزینه های نادرست:

(۱) در یک سیم فلزی که اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر صفر است

الکترون های آزاد با تندی هایی از مرتبه $10^6 \frac{m}{s}$ در حال حرکت اند.

(۳) اندازه سرعت سوق در یک رسانای فلزی مثلاً در سیم های مسی از مرتبه

بزرگی $10^{-5} \frac{m}{s}$ یا $10^{-4} \frac{m}{s}$ است.

(۴) جهت قراردادی جریان الکتریکی I ، برخلاف جهت سوق الکترون ها است.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه های ۴۶ تا ۴۷)

فیزیک ۱

گزینه ۴» ۹۱-

(مصطفی کیانی)

وقتی فاصله بین مولکول‌ها را کم کنیم نیروی دافعه به هم وارد می‌کنند و وقتی مولکول‌ها را کمی از هم دور کنیم، این نیرو به صورت جاذبه ظاهر می‌شود.
(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۲)

گزینه ۲» ۹۲-

(مصطفی کیانی)

هر یک از عبارت‌ها را بررسی نموده و درستی یا نادرستی آن‌ها را مشخص می‌کنیم:
(الف) نادرست؛ چون نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آب کوچک‌تر از نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های آب و شیشه است، آب سطح شیشه را تر می‌کند.
(ب) درست؛ کشش سطحی در مایع‌ها، در واقع همان نیروی ربایشی از نوع هم‌چسبی موجود در سطح مایع است.

(پ) درست

(ت) نادرست؛ چون نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های جیوه و سطح داخلی لوله کوچک‌تر از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های جیوه است، جیوه درون لوله رو به پایین حرکت می‌کند و از سطح جیوه درون ظرف نیز پایین‌تر می‌رود.
بنابراین از چهار عبارت داده شده، دو عبارت آن درست‌اند.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۲)

گزینه ۴» ۹۳-

(زهرا آقاممیری)

فشار کل در عمق h از یک مایع برابر است با:
 $P = \rho gh + P_0$
 $\Rightarrow P = 1000 \times 10 \times 0.5 + 98000 = 100000 \text{ Pa} = 100 \text{ kPa}$
اگر در عمق h' فشار را با P' نشان دهیم، داریم:

$P' = 1/1 P \Rightarrow \rho gh' + P_0 = 1/1 \times (100000)$
 $\Rightarrow 1000 \times 10 \times h' = 15000 \Rightarrow h' = 1/5 \text{ m} = 15 \text{ cm}$
پس اگر 10 cm دیگر پایین برویم، فشار کل ۱۰ درصد افزایش می‌یابد.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

گزینه ۲» ۹۴-

(بهنام رستمی)

اگر سطح مقطع دهانه ظرف را a ، سطح مقطع کف ظرف را A و وزن مایع اضافه شده را F' فرض کنیم، رابطه زیر برقرار است:

$$F' = mg = 0/3 \times 10 = 3 \text{ N}$$

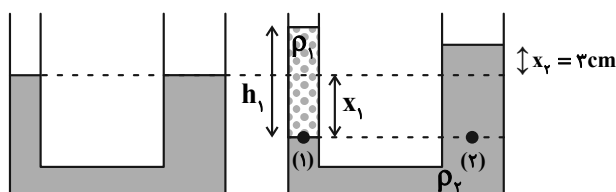
$$\Rightarrow \frac{\Delta F}{A} = \frac{F'}{a} \Rightarrow \Delta F = \frac{A}{a} F' \Rightarrow \Delta F = \frac{A}{\frac{1}{4} A} \times 3 = 12 \text{ N}$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

گزینه ۲» ۹۵-

(عبدالرضا امینی نسب)

هرگاه مایعی به شاخه سمت چپ اضافه شود، سطح مایع اولیه در این شاخه به اندازه x_1 پایین می‌رود و در شاخه سمت راست، سطح مایع به اندازه x_2 بالا می‌رود. بنابراین طبق صورت سؤال $x_2 = 3 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = -2 \text{ cm}$ می‌باشد.



حجم مایع جابه‌جا شده در دو طرف لوله یکسان می‌باشد، داریم:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 x_1 = A_2 x_2$$

$$\Rightarrow 30 \times x_1 = 60 \times 3 \Rightarrow x_1 = 6 \text{ cm}$$

در نهایت طبق اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز در نقاط (۱) و (۲) داریم:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 (x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow 1 h_1 = 2(6 + 3) \Rightarrow h_1 = 18 \text{ cm}$$

به عبارت دیگر ارتفاع مایع اضافه شده به سمت چپ برابر با 18 cm می‌باشد. در نتیجه جرم مایع اضافه شده برابر است با:

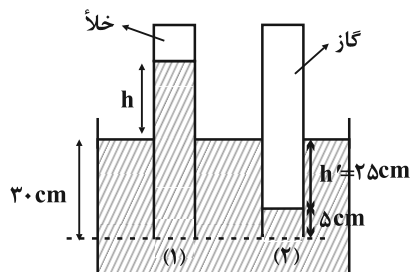
$$m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 A_1 h_1 = 1 \times 30 \times 18 = 540 \text{ g}$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

گزینه ۲» ۹۶-

(زهرا آقاممیری)

با استفاده از اصل برابری فشار در نقاط هم‌تراز داخل یک مایع ساکن در لوله (۱) داریم:



$$P_1 = \rho gh \xrightarrow{h=80-30=50 \text{ cm}} P_1 = 13600 \times 10 \times 0.5$$

$$\Rightarrow P_1 = 68000 \text{ Pa} = 68 \text{ kPa}$$

در لوله (۲) داریم:

$$P_2 = \rho gh' + P_1 = 13600 \times 10 \times 0.25 + 68000$$

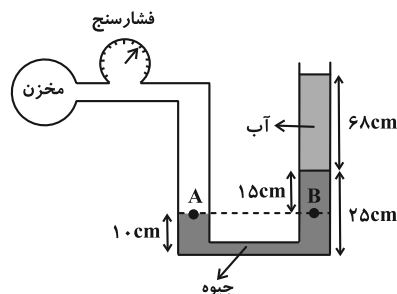
$$\Rightarrow P_2 = 102000 \text{ Pa} = 102 \text{ kPa}$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۹۷- گزینه «۳»

(سیرهملیه میرصالحی)

در مرحله اول فشار ستون آب را برحسب cmHg به دست می آوریم:



$$h_{\text{جیوه}} = \left(\frac{\rho_{\text{آب}}}{\rho_{\text{جیوه}}} \right) h_{\text{آب}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \left(\frac{1}{13/6} \right) \times 68 = 5 \text{ cmHg}$$

برای به دست آوردن فشار پیمانه‌ای مخزن، کافی است از قاعده هم‌فشاری نقاط هم‌تراز استفاده کنیم:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{مطلق}} = P_0 + P_{\text{آب}} + P_{\text{جیوه}}$$

$$P_{\text{مطلق}} - P_0 = P_{\text{آب}} + P_{\text{جیوه}} = 5 + 15 = 20 \text{ cmHg}$$

فشارسنج، فشار پیمانه‌ای مخزن را نشان می‌دهد. بنابراین از نسبت داده شده، فشار هوا را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{P_{\text{پیمانه‌ای}}}{P_{\text{مطلق}}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{P_0}{P_{\text{مطلق}}} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow P_{\text{مطلق}} = 100 \text{ cmHg}$$

$$P_{\text{پیمانه‌ای}} = P_{\text{مطلق}} - P_0 \Rightarrow 20 = 100 - P_0$$

$$\Rightarrow P_0 = 80 \text{ cmHg}$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۹)

۹۸- گزینه «۲»

(فسین مشرومی)

گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» از اثرات نیروی هم‌جسبی بین مولکول‌ها بوده و هر سه گزینه جلوه‌هایی از کشش سطحی هستند.

گزینه «۲» به اثر نیروی دگرچسبی بین جیوه و شیشه و کوچک‌تر بودن آن نسبت به نیروی هم‌جسبی بین مولکول‌های جیوه اشاره می‌کند و به کشش سطحی ارتباطی ندارد.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۲)

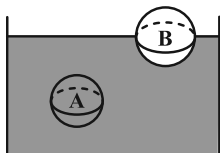
۹۹- گزینه «۳»

(حسین الهی)

کره توپر B روی سطح مایع شناور و کره توپر A داخل مایع غوطه‌ور است و به حالت تعادل قرار دارند. لذا نیروی شناوری و نیروی وزن هر یک از اجسام با یکدیگر برابر است:

$$\begin{cases} F_{bA} = m_A g \\ F_{bB} = m_B g \end{cases} \xrightarrow{F_{bB} > F_{bA}} m_B g > m_A g$$

$$\Rightarrow m_B > m_A \Rightarrow \rho_B V_B > \rho_A V_A \quad (*)$$



چون کره توپر B روی سطح مایع شناور است، لذا چگالی آن از چگالی مایع کمتر است و کره توپر A نیز چون غوطه‌ور می‌باشد، چگالی آن با چگالی مایع برابر است. بنابراین:

$$\rho_A > \rho_B \xrightarrow{(*)} V_B > V_A \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} > 1 \Rightarrow \frac{r_B}{r_A} > 1$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۱۰۰- گزینه «۴»

(سیرعلی میرنوری)

در ابتدا تندی جریان آب را در قسمت پهن‌تر می‌یابیم:

$$\Delta x = v \Delta t \Rightarrow 24 = 8t \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

$$t' = t_{\text{کل}} - t = 39 - 3 = 36 \text{ s}$$

$$\Delta x' = v' \Delta t' \quad \text{در لوله پهن‌تر داریم:}$$

$$\Delta x' = 96 - 24 = 72 \text{ cm} \rightarrow 72 = v' \times 36 \Rightarrow v' = 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

در نهایت داریم:

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \xrightarrow{r=2 \text{ cm}, v=8 \frac{\text{cm}}{\text{s}}} \frac{2}{8} = \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \Rightarrow r' = 4 \text{ cm}$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۳۳ تا ۳۵)

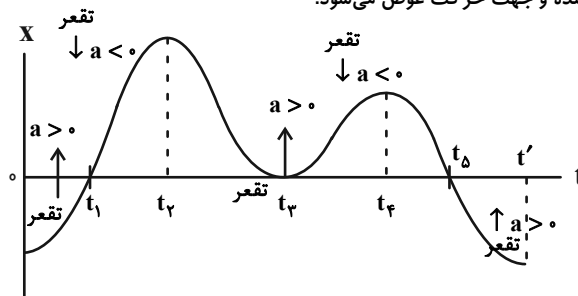


فیزیک ۳

۱۰۱- گزینه «۴»

(مسعود قره‌فانی)

جهت حرکت متحرک در نقاطی عوض می‌شود که سرعت از مثبت به منفی یا از منفی به مثبت تغییر کند. (یعنی در قله‌ها و دره‌های نمودار مکان - زمان که شیب نمودار تغییر می‌کند)، پس در لحظات t_1 و t_3 سرعت صفر شده و جهت حرکت عوض می‌شود.



همچنین در زمان‌هایی که جهت تقعر نمودار تغییر می‌کند جهت شتاب تغییر می‌کند یعنی جهت شتاب ۴ بار تغییر کرده است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۳ تا ۱۱۳)

۱۰۲- گزینه «۴»

(مفسن قنبرپور)

برای متحرک a و نمودار مکان - زمان آن داریم:

حرکت در نقاط A و C کندشونده است، چون در حال نزدیک شدن به قله و دره مجاور خود در نمودار مکان - زمان هستند. (اندازه شیب نمودار در حال کاهش است).

حرکت در نقاط B و D تندشونده است، چون در حال دور شدن از قله و دره مجاور خود در نمودار مکان - زمان هستند. (اندازه شیب نمودار در حال افزایش است).

برای متحرک b و نمودار سرعت - زمان آن داریم:

حرکت در نقاط E و G تندشونده است، چون در حال دور شدن از محور t در نمودار سرعت - زمان می‌باشند. (اندازه سرعتشان در حال افزایش است).

حرکت در نقاط F و H کندشونده است، چون در حال نزدیک شدن به محور t در نمودار سرعت - زمان می‌باشند. (اندازه سرعتشان در حال کاهش است).

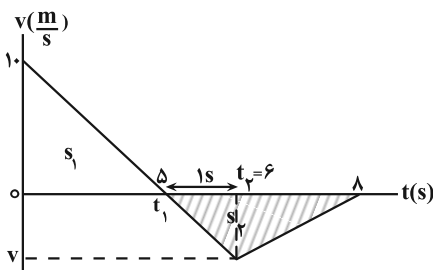
در نتیجه گزینه «۴» صحیح است که در آن، حرکت تمام نقاط مشخص شده، تندشونده هستند.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۱۳)

۱۰۳- گزینه «۳»

(مرتضی مرتضوی)

شتاب (شیب نمودار سرعت - زمان) از ابتدا تا لحظه t_1 خلاف جهت محور است. اندازه شتاب از t_1 تا t_2 برابر اندازه شتاب از t_2 تا لحظه $t = 8s$ است.



$$\left| \frac{v}{1} \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} v = 10 - 2t \\ t_1 = 5s \end{cases}$$

شتاب را در محدوده‌ای که شتاب در خلاف جهت محور است، به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{10}{5} = 2 \frac{m}{s^2}$$

و بعد معادله سرعت - زمان را می‌نویسیم و سرعت را در لحظه $t_1 = 5s$ به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -2 \times 5 + 10 = 0 \frac{m}{s}$$

مسافت متحرک در ۸ ثانیه نخست حرکت برابر مجموع اندازه جابه‌جایی‌ها است. (سطح زیر نمودار)

$$مسافت = |S_1| + |S_2| = \frac{10 \times 5}{2} + \frac{(10 - 10) \times 5}{2} = 25 + 3 = 28$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۰۴- گزینه «۱»

(سیده ملیحه میرصالحی)

حرکت خودروها، حرکت با سرعت ثابت است و معادله حرکت آن‌ها از رابطه $x = vt + x_0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{450 - 300}{10 - 0} = 15 \frac{m}{s}, \quad x_{A,0} = 300m$$

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - (-300)}{10 - 0} = 30 \frac{m}{s}, \quad x_{B,0} = -300m$$

$$x_A = 15t + 300, \quad x_B = 30t - 300$$

با داشتن معادله حرکت هر دو متحرک A و B داریم:

$$|x_A - x_B| = 150m \Rightarrow -15t + 600 = \pm 150 \Rightarrow \begin{cases} t = 5s \\ t = 30s \end{cases}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

(مشابه تمرین ۱-۶ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

۱۰۵- گزینه «۲»

(سیرعلی میرنوری)

با توجه به این که متحرک در دو مرحله، کل مسیر حرکت را پیموده است، با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\frac{\frac{1}{5}d, v_{av1} = v}{\frac{1}{5}d, v_{av2} = \frac{1}{4}v}$$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \frac{1}{5}d \\ \Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_{av1}} = \frac{1}{5} \frac{d}{v} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta x_2 = \frac{1}{4}d \\ \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_{av2}} = \frac{1}{4} \frac{d}{\frac{1}{4}v} = \frac{1}{v} \end{cases}$$



از طرفی x_1 و x_2 در لحظه‌هایی رخ می‌دهد که دو متحرک A (که با شتاب ثابت در حال حرکت است) و B (که با سرعت ثابت در حال حرکت است) در یک مکان قرار دارند. بنابراین با توجه به معادله حرکت متحرک A (حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم)، داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} t=t_1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 + x_0 \\ t=t_2 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + v_0t_2 + x_0 \end{cases} \quad (2)$$

بنابراین از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(\frac{1}{2}at_2^2 + v_0t_2 + x_0) - (\frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 + x_0)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} \\ &\Rightarrow v_B = \frac{a(t_2 + t_1) + 2v_0}{2} \\ &\Rightarrow v_B = \frac{(at_2 + v_0) + (at_1 + v_0)}{2} \Rightarrow v_B = \frac{v_A(t_2) + v_A(t_1)}{2} \\ &\Rightarrow v_B = \frac{v + (-5)}{2} \Rightarrow (v_{av})_B = v_B = 1 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

(معمری راست‌پیمان)

۱۰۹- گزینه «۱»

در ۶ ثانیه ابتدایی حرکت، داریم:

$$\begin{aligned} v_6 &= at_1 + v_0 \Rightarrow v_6 = 4 \times 6 + (-16) \Rightarrow v_6 = 8 \frac{m}{s} \\ \Delta x_1 &= \frac{v_6 + v_0}{2} \times t_1 = \frac{8 + (-16)}{2} \times 6 \Rightarrow \Delta x_1 = -24m \end{aligned}$$

در بازه زمانی ۶s تا ۱۰s داریم:

$$\begin{aligned} v_{10} &= at_2 + v_0 \Rightarrow v_{10} = -2 \times 4 + 8 \Rightarrow v_{10} = 0 \\ \Delta x_2 &= \frac{v_{10} + v_6}{2} \times t_2 = \frac{0 + 8}{2} \times 4 \Rightarrow \Delta x_2 = 16m \\ \Delta x_{کل} &= \Delta x_1 + \Delta x_2 = -24 + 16 = -8m \end{aligned}$$

بنابراین:

با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t} = \frac{-8}{10} = -0.8 \frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}| = 0.8 \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

(فسرو ارغوانی‌فر)

۱۱۰- گزینه «۴»

وقتی دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند، در یک لحظه مشخص، مکان آن‌ها با هم برابر می‌شود. پس:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = -t^2 - 4t \Rightarrow 2t^2 + 2t + 1 = 0 \\ \Delta &= b^2 - 4ac = 2^2 - 4(2)(1) = -4 < 0 \end{aligned}$$

دلتای این معادله درجه دوم کوچکتر از صفر است، بنابراین معادله فوق جواب ندارد. پس دو متحرک هیچگاه از کنار هم عبور نمی‌کنند.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\frac{4}{5}d + \frac{1}{5}d}{\frac{4d}{5v} + \frac{d}{5v}} = \frac{1}{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{1} \Rightarrow v_{av} = \frac{5}{8}v$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۵)

(مسام ناری)

۱۰۶- گزینه «۲»

حرکت خودرو را در جهت مثبت محور X فرض می‌کنیم. همچنین برای سادگی، مبدأ زمان و مکان را جایی در نظر می‌گیریم که محیطبان ترمز گرفته است که در $x_0 = 0m$ و $v_0 = 72 \frac{km}{h}$ است. از طرفی، چون سرعت خودرو در جهت مثبت محور X به تدریج در حال کاهش است، شتاب آن برخلاف جهت محور X و در نتیجه منفی خواهد شد. به این ترتیب داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow 0 - (20 \frac{m}{s})^2 = 2(-5 \frac{m}{s^2})(x - 0)$$

$$-400 = -10x \Rightarrow x = 40m$$

در نتیجه خودرو در $x = 40m$ متوقف می‌شود و چون در لحظه ترمز گرفتن، فاصله گوزن و خودرو $70m$ بوده است، فاصله بین خودرو و گوزن به صورت زیر به دست می‌آید:

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

(مشابه مثال ۱- ۱۳ صفحه ۱۸)

(مسام ناری)

۱۰۷- گزینه «۲»

موارد (پ) و (ث) صحیح نمی‌باشند و شکل صحیح آن‌ها به صورت زیر است:
(پ) بردار شتاب متوسط همواره هم‌جهت با بردار تغییر سرعت می‌باشد.
(ث) شیب خطی که نمودار سرعت- زمان را در دو لحظه به هم وصل می‌کند برابر با شتاب متوسط است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱ تا ۲۱)

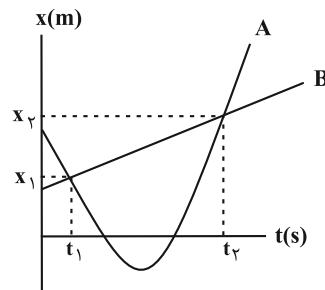
(برگرفته از آزمون نهایی شهریورماه سال ۱۳۹۹ و ۱۴۰۰)

(بابک اسلامی)

۱۰۸- گزینه «۲»

چون متحرک B با سرعت ثابت در مسیری مستقیم در حال حرکت است، بنابراین سرعت متوسط متحرک B با سرعت لحظه‌ای آن در هر بازه زمانی دلخواه یکسان است. برای محاسبه سرعت متحرک B داریم:

$$v_B = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (1)$$





شیمی ۲

۱۱۱- گزینه «۱»

(عمید زبئی)

بررسی همه گزینه‌ها:

- (۱) فلزات از جمله منابع تجدیدناپذیر هستند و آهنک استخراج و مصرف آن‌ها از آهنک بازگشت آن‌ها به طبیعت بیشتر است.
- (۲) پسماند سرانه سالانه فولاد، ۴۰ کیلوگرم است.
- (۳) در استخراج ۱۰۰۰ کیلوگرم آهن، تقریباً ۲۰۰۰ کیلوگرم سنگ معدن آهن استفاده می‌شود.
- (۴) از بازگردانی هفت قوطی فولادی آنقدر انرژی ذخیره می‌شود که می‌توان یک لامپ ۶۰ واتی را در حدود ۲۵ ساعت روشن نگه داشت.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

۱۱۲- گزینه «۳»

(ممد رضا پورچاوید)

بررسی سایر گزینه‌ها:

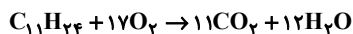
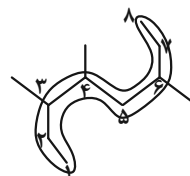
- (۱) عمده‌ترین قسمت نفت خام را هیدروکربن‌ها (نه کربوهیدرات‌ها) تشکیل داده‌اند.
- (۲) نفت خام مایعی غلیظ (و نه رقیق) است که رنگ آن سیاه یا قهوه‌ای متمایل به سبز است.
- (۴) کمتر از ۱۰ درصد نفت خام مصرفی در دنیا برای تولید الیاف و پارچه، شوینده‌ها، مواد آرایشی و بهداشتی، رنگ، پلاستیک، مواد منفجره و لاستیک به کار می‌رود.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۱۱۳- گزینه «۴»

(پویا رستگاری)

- ابتدا زنجیره اصلی را پیدا می‌کنیم و شماره‌گذاری می‌کنیم. با توجه به شماره‌گذاری صورت گرفته نام ترکیب به صورت ۳ و ۴ و ۶-تری‌متیل‌اوکتان است که فرمول آن معادل $C_{11}H_{24}$ می‌باشد. واکنش سوختن این ترکیب با گاز اکسیژن به صورت زیر است:



$$?LO_2 = 0 / \Delta mol C_{11}H_{24} \times \frac{17 mol O_2}{1 mol C_{11}H_{24}}$$

$$\times \frac{32 g O_2}{1 mol O_2} \times \frac{1 LO_2}{1 / 6 g O_2} = 170 LO_2$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۳۶ تا ۴۰)

۱۱۴- گزینه «۲»

(امیر هاتمیان)

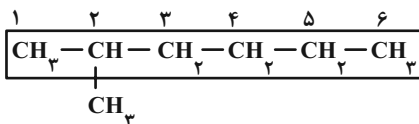
گرانروی آلکان‌ها با افزایش جرم مولی افزایش می‌یابد.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

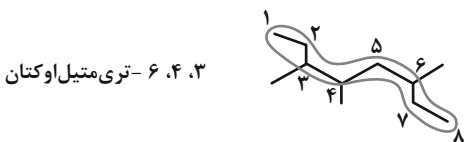
۱۱۵- گزینه «۱»

(علی رفیعی)

(۱) درست.



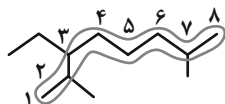
(۲) نادرست.



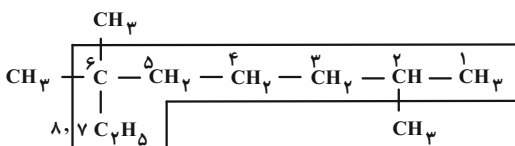
۳، ۴، ۶-تری‌متیل‌اوکتان

(۳) نادرست.

۳- اتیل-۲، ۷-دی‌متیل‌اوکتان



(۴) نادرست.



۲، ۶، ۶-تری‌متیل‌اوکتان

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم: صفحه‌های ۳۲ تا ۴۰)

۱۱۶- گزینه «۳»

(معمّر خاترنیا)

بررسی تمام گزینه‌ها:

مورد اول: پروپان (C_3H_8) نسبت به اتیلپنتان (C_7H_{16})، جرم مولی

کمتری دارد لذا نقطه جوش آن نیز از اتیلپنتان کمتر می‌باشد.

مورد دوم: تمایل به جاری شدن کمتر یعنی گرانروی بیشتر، وازلین نسبت به

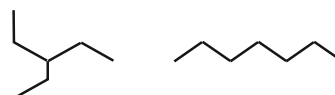
هگزان، گرانروی بیشتری دارد.

مورد سوم: قرار دادن فلزها در آلکان‌های مایع، مانع رسیدن آب به سطح فلز

می‌شود و از خوردگی فلز جلوگیری می‌کند. هگزان آلکانی مایع و بی‌رنگ

می‌باشد.

مورد چهارم: هر دو دارای ۶ پیوند کربن - کربن هستند.



(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را برانیم: صفحه‌های ۳۴ تا ۴۰)

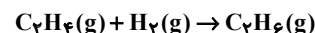
۱۱۷- گزینه «۳»

(مجتبی محبوب)

اتان برخلاف اتن با گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهد؛ زیرا هیدروکربنی

سیر شده است. بنابراین فقط گاز اتن با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد و

می‌توان مول اتن را محاسبه کرد.



$$? \text{ mol } C_2H_4 = \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 \text{ g } H_2} \times \frac{1 \text{ mol } C_2H_4}{1 \text{ mol } H_2} = 4 \text{ mol } C_2H_4$$

از طرفی با توجه به اینکه هر مول گاز در شرایط STP، ۲۲/۴ لیتر است پس

مقدار مول کل گازها را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{گاز } 12 \text{ mol} = \frac{1 \text{ گاز mol}}{22 / 4 \text{ L}} \times \text{گاز } 268 / 8 \text{ L} = \text{تعداد مول‌های گازی مخلوط}$$

بنابراین ۱۲ مول مخلوط گازی در اختیار داریم که ۴ مول آن را گاز اتن

تشکیل می‌دهد. پس درصد مولی اتان را به این صورت محاسبه می‌کنیم:

$$100 \times \frac{\text{تعداد مول اتان در مخلوط}}{\text{تعداد مول کل}} = \text{درصد مولی اتان}$$

$$\Rightarrow \frac{(12-4) \text{ mol}}{12 \text{ mol}} = \frac{8}{12} \times 100 \approx 66.6\%$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را برانیم: صفحه‌های ۳۶، ۳۷ و ۴۰ تا ۴۲)

۱۱۸- گزینه «۴»

(علی طرفی)

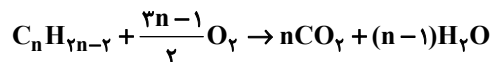
گاز اتن اولین عضو خانواده آلکن‌هاست نه دومین عضو!

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را برانیم: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۱۱۹- گزینه «۴»

(آترین صبا)

معادله سوختن کامل آلکین‌ها به صورت زیر است:



$$? \text{ g } H_2O = \frac{(n-1) \text{ mol } H_2O}{1 \text{ mol آلکین}} \times \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O}$$

$$= 27 \text{ g } H_2O \Rightarrow n = 4$$

$$C_4H_6 \Rightarrow H \text{ درصد جرمی} = \frac{6 \times 1}{(4 \times 12) + (6 \times 1)} \times 100 \approx 11\%$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را برانیم: صفحه ۴۲)

۱۲۰- گزینه «۴»

(محمدرحسین صادقی مقدم)

نفت سنگین کشورهای عربی در دمای اتاق کمتر از نفت برنت دریای شمال

تمایل به جاری شدن دارد زیرا از مولکول‌های بزرگ‌تری تشکیل شده است و

گرانروی بیشتری دارد.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را برانیم: صفحه‌های ۳۴، ۳۵، ۳۶ و ۳۷)

شیمی ۱

۱۲۱- گزینه «۲»

(میثم نوری)

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) طبق مدل کوانتومی ساختاری لایه‌ای برای اتم ارائه شد.

(۳) در گستره مرئی از طیف نشری خطی به دست آمده از اتم‌های هیدروژن، وجود چهار خط یا نوار رنگی با طول موج و انرژی معین، تأیید شده است.

(۴) نیلز بور بر این باور بود که از بررسی تعداد و جایگاه نوارهای رنگی در طیف نشری خطی اتم هیدروژن، می‌توان اطلاعات ارزشمندی از ساختار اتم هیدروژن به دست آورد.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱۲۲- گزینه «۱»

(محمدرضا پورماویر)

با دور شدن لایه‌ها از هسته اتم، سطح انرژی آن‌ها افزایش ولی اختلاف سطح انرژی آن‌ها کاهش می‌یابد.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱۲۳- گزینه «۱»

(علی ممبیدی)

بررسی عبارت‌های نادرست:

(الف) ۷ عنصر ستون اول و ۶ عنصر گروه دوم به همراه هلیوم از گروه ۱۸ام، عناصر دسته S را تشکیل می‌دهند. (۱۴ عنصر) همچنین در دوره سوم جدول تناوبی ۸ عنصر وجود دارد؛ بنابراین اختلاف خواسته شده برابر ۶ است.
(ب) زیرلایه ۳d در لایه سوم است اما در عنصرهای دوره سوم جدول تناوبی، الکترونی وارد آن نمی‌شود. الکترون‌گیری این زیرلایه در عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی انجام می‌شود.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۴)

۱۲۴- گزینه «۲»

(مسمن رمضانی کوکند)

بررسی همه موارد:

(آ) برای این سه زیرلایه، $n+1$ برابر است. بنابراین هر کدام که n کوچک‌تری داشته باشد، انرژی کمتری داشته و زودتر پر می‌شود. بنابراین:

$$5f < 6d < 7p$$

$$5f > 6d > 7p$$

(ب) مجموعه‌ای از زیرلایه‌ها با n برابر (به عنوان مثال $3s, 3p, 3d$) یک لایه الکترونی را تشکیل می‌دهند.

(پ) پنجمین زیرلایه (g)، ظرفیت پذیرش حداکثر ۱۸ الکترون را دارد.

$$18 = 2 + 4(4) \xrightarrow{l=4} 2 + 14 = 16$$

(ت) در دوره چهارم جدول، فقط زیرلایه‌های $4s$ و $4p$ پر می‌شوند که حداکثر ۸ الکترون دریافت می‌کنند.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۴)

۱۲۵- گزینه «۱»

(سهراب صادقی زاده)

در ۳۶ عنصر موجود در دوره‌های اول تا چهارم جدول تناوبی، آرایش الکترونی عنصرهای دسته‌های s و d به زیرلایه S ختم می‌شود که شامل ۱۸ عنصر می‌باشند.

در عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی، در آرایش الکترونی عنصرهای پتاسیم، منگنز، مس و آرسنیک، تنها یک زیرلایه نیمه‌پر وجود دارد. دقت کنید که عنصر کروم، دو زیرلایه نیمه‌پر دارد.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۱۲۶- گزینه «۴»

(مجتبی ممبوی)

عنصر مورد نظر عنصر 29Cu می‌باشد.

بررسی همه گزینه‌ها:

(۱) آرایش الکترونی این عنصر از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند.

(۲) جزو فلزات واسطه است و آرایش الکترونی آن به زیرلایه ۴s ختم می‌شود.

(۳) در دوره چهارم جدول قرار دارد و نهمین فلز واسطه دوره خود است نه نهمین فلز دوره خود.

(۴) اختلاف عدد اتمی 29Cu با گاز نجیب هم‌دوره خود یعنی 36Kr کمتر از اختلاف عدد اتمی آن با گاز نجیب دوره قبل از خود یعنی 18Ar است.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه عناصر: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۱۲۷- گزینه «۲»

(علیرضا کیانی دوست)

با توجه به اطلاعات ارائه شده عنصر X همان ${}_{35}\text{Br}$ است. عبارت دوم نادرست است. شمار جفت الکترون‌ها در آرایش الکترون - نقطه‌ای این عنصر برابر ۳ است.

(شیمی ۱- کیوان زارگانه عناصر: صفحه‌های ۳۰ تا ۴۰)

۱۲۸- گزینه «۲»

(هری بهاری پور)

فرمول شیمیایی کلسیم فسفید Ca_3P_2 است و نسبت شمار کاتیون به آنیون در آن $\frac{۳}{۲}$ است.

بررسی موارد:

الف) AlP ۱ ب) Mg_3N_2 $\frac{۳}{۲}$

ب) Ca_3N_2 $\frac{۳}{۲}$ ت) CaO ۱

پس در موارد «الف» و «ت» نسبت شمار کاتیون به آنیون در ترکیبات ارائه شده در آن‌ها با این نسبت در کلسیم فسفید برابر نیست.

(شیمی ۱- کیوان زارگانه عناصر: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۱۲۹- گزینه «۴»

(میثم کوثری لشکری)

عبارت‌های «آ» و «ت» نادرست هستند.

آ) در این دوره ${}_{20}\text{Ca}$ و همهٔ عنصرهای واسطه به جز ${}_{24}\text{Cr}$ و ${}_{29}\text{Cu}$ که شامل ۸ عنصر هستند دارای زیرلایهٔ $4s^2$ به عنوان آخرین زیرلایه خود هستند و ${}_{36}\text{Kr}$ هم با آرایش $4p^6$ در آخرین زیرلایه خود، همگی در آخرین زیرلایه از الکترون پر هستند که مجموعاً ۱۰ عنصر هستند.

ب) عنصرهای ${}_{19}\text{K}$ و ${}_{24}\text{Cr}$ و ${}_{29}\text{Cu}$ در آخرین زیرلایه خود آرایش $4s^1$ و ${}_{31}\text{Ga}$ آرایش $4p^1$ دارند.

پ) ($l=2$ یعنی زیر لایه d) دو عنصر ${}_{24}\text{Cr}$ و ${}_{25}\text{Mn}$ به ترتیب با آرایش $[18\text{Ar}]3d^5 4s^1$ و $[18\text{Ar}]3d^5 4s^2$ ویژگی مورد نظر را دارند و ۵ الکترون در $3d$ دارند.

ت) در مجموع ۸ عنصر دارای زیرلایهٔ پر با $n+l=5$ هستند. ($3d$ و $4p$ دارای این ویژگی هستند) از عنصر ${}_{29}\text{Cu}$ به بعد در $3d$ ، ۱۰ الکترون وجود دارد یعنی از گروه ۱۱ تا ۱۸ که شامل ۸ عنصر است. (عنصر گروه ۱۸ یعنی ${}_{36}\text{Kr}$ دارای آرایش $4p^6$ در زیرلایه آخر است و دو زیرلایهٔ کاملاً پر با $n+l=5$ دارد).

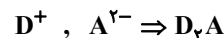
(شیمی ۱- کیوان زارگانه عناصر: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۴)

۱۳۰- گزینه «۴»

(امیر ماتیان)

عنصر C همان آرگون است. بنابراین عنصر A گوگرد، B کبر، D پتاسیم و E کلسیم است.

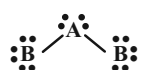
چون A از گروه ۱۶ بوده یون پایدار آن به صورت A^{2-} است و D عنصری از گروه ۱ می‌باشد که یون پایدار آن به صورت D^+ است. لذا داریم:



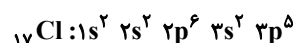
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) درست؛ چون عناصر D و E در گروه ۱ و ۲ جدول تناوبی قرار دارند لذا از عناصر دسته S می‌باشند.

۲) درست؛ A در گروه ۱۶ و B در گروه ۱۷ قرار دارد و در مولکول AB_2 عنصر A اتم مرکزی می‌باشد.



۳) درست؛ عنصر B همان ${}_{17}\text{Cl}$ می‌باشد که با رسم آرایش الکترونی آن داریم:



در لایهٔ ظرفیت آن $3p^5$ وجود دارد.

(شیمی ۱- کیوان زارگانه عناصر: صفحه‌های ۳۰ تا ۴۱)

شیمی ۳

۱۳۱- گزینه «۱»

(علی بری)

موارد «الف» و «ب» درست است.

بررسی موارد:

الف) درست؛ آب گل آلود و شربت معده هر دو مخلوط‌هایی ناپایدار و

سوسپانسیون هستند که در صورت توقف هم زدن آن‌ها، ته‌نشین می‌شوند.

ب) درست؛ ذرات موجود در مخلوط کلوئید و محلول برخلاف سوسپانسیون

در آب ته‌نشین نمی‌شوند و پایدار هستند.

پ) نادرست؛ مخلوط پایدار شده آب و روغن با استفاده از صابون، کلوئید است.

ت) نادرست؛ ذره‌های تشکیل‌دهنده سوسپانسیون پس از مدتی ته‌نشین

می‌شوند در نتیجه سوسپانسیون پایدار نیست.

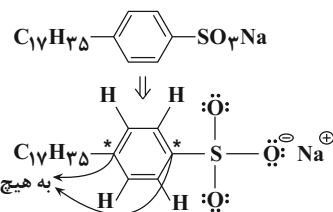
(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۶ و ۷)

(برگرفته از فور را بیازماید صفحه ۷)

۱۳۲- گزینه «۴»

(ارژنگ فائزلی)

ساختار پاک‌کننده به صورت زیر است:



به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیست.

بررسی برخی از گزینه‌ها:

۳(۱۶)

$$\frac{418}{23(12)} \approx 0.17$$

گزینه «۲»: نسبت خواسته شده برابر است با:

گزینه «۴»: در ساختار این صابون، ۲ اتم کربن وجود دارد که به هیچ اتم

هیدروژنی متصل نیست.

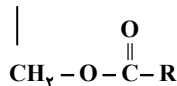
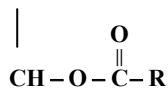
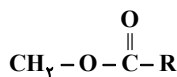
(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱۳۳- گزینه «۴»

(مجتبی محبوب)

با توجه به ساختار کلی استرهای بلند زنجیر سه عاملی که به صورت زیر

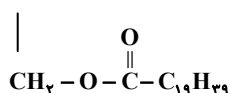
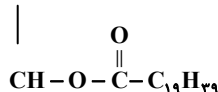
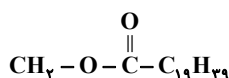
است، می‌توان تعداد کربن‌های گروه‌های R را به صورت زیر حساب کرد:



$$\text{R} \text{ تعداد کربن‌های گروه } = \frac{63-6}{3} = 19$$

بنابراین فرمول ساختاری استر بلند زنجیر با ۶۳ اتم کربن به صورت زیر است

و جرم مولی این ترکیب برابر $974 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ می‌باشد.



با توجه به ساختار استر بلند زنجیر می‌توان نتیجه گرفت که از واکنش این

استر با سدیم هیدروکسید کافی، صابونی با فرمول $\text{C}_{19}\text{H}_{39}\text{COONa}$

تولید می‌شود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ و ۶)

(امیر فاطمیان)

۱۳۴- گزینه «۴»

بررسی گزینه‌ها:

۱ و ۲) درست؛ با افزایش دما، قدرت پاک‌کنندگی صابون افزایش می‌یابد و

یا با افزایش دما مقدار درصد لکه باقی‌مانده کاهش می‌یابد.

۳) درست؛ هر چه مقدار صابون در آب بیشتر باشد، کف ایجاد شده بیشتر

می‌شود. (هنگامی که صابون حل شده در آب به یک مقدار مشخص برسد،

ارتفاع کف تغییری نمی‌کند.)

۴) نادرست؛ هر چه مقدار صابون بیشتر باشد مقدار پاک‌کنندگی نیز افزایش

می‌یابد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

(برگرفته از فور را بیازماید صفحه ۹)

۱۳۵- گزینه «۴»

(علیرضا کیانی دوست)

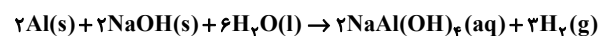
پاک کننده غیرصابونی نوعی پاک کننده خورنده نیست و فقط از راه برهم کش با ذرات در پاک سازی آلاینده ها نقش دارد.

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۰ تا ۱۲)

۱۳۶- گزینه «۲»

(فسین ناصری ثانی)

معادله موازنه شده واکنش:



پس مجموع ضرایب مواد شرکت کننده پس از موازنه برابر ۱۵ است.

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه ۱۳)

۱۳۷- گزینه «۳»

(مهمرضا پوریاوید)

اتیلن گلیکول ($\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$) و اتانول ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) به صورت مولکولی در آب حل می شوند و موادی اسیدی یا بازی به شمار نمی آیند. در حالی که کربن دی اکسید (CO_2) با حل شدن در آب غلظت یون هیدرونیوم را افزایش می دهد و یک اسید آرنیوس خواهد بود. همچنین انحلال منیزیم کلرید در آب باعث تغییر در غلظت یون های هیدرونیوم و هیدروکسید در آب نمی شود.

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۳ تا ۱۶)

(برگرفته از با هم بیندیشیم صفحه های ۱۴ و ۱۵)

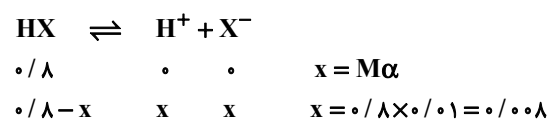
۱۳۸- گزینه «۱»

(فرزاد رضایی)

ابتدا غلظت مولی HX را با استفاده از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$M = \frac{10 \text{ a d}}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 15 \times 0.8}{150} = 0.8 \text{ mol.L}^{-1}$$

اکنون با استفاده از جدول تغییر غلظت داریم:



$$\frac{\text{مجموع غلظت یون ها}}{\text{غلظت اولیه HX}} = \frac{2x}{0.8} = \frac{2 \times 0.008}{0.8} = 0.02$$

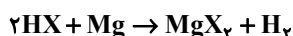
(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۷ تا ۱۹)

۱۳۹- گزینه «۲»

(امیرحسین طیبی)

بررسی همه گزینه ها:

(۱) از واکنش اسید با فلزات گاز هیدروژن آزاد می شود.



(۲) اسید قوی تر هنگام واکنش با فلز با سرعت بیشتری گاز هیدروژن آزاد می کند؛ در نتیجه محلول (آ) اسید قوی تر و دارای ثابت یونش بزرگ تر است.

(۳) هر چه اسید قوی تر باشد هنگام یونش یون های بیشتری تولید کرده و باعث افزایش رسانایی محلول می شود.

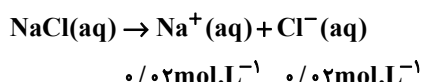
(۴) فورمیک اسید نسبت به نیتریک اسید، اسید ضعیف تری است.

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۶ تا ۲۴)

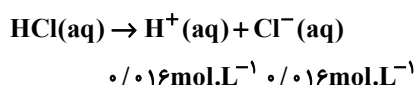
۱۴۰- گزینه «۲»

(همید زنبی)

غلظت یون های محلول (I) برابر 0.04 مولار است.



غلظت یون های محلول (II) برابر 0.032 مولار خواهد بود.



در محلول (III):

$$\alpha = \frac{[\text{H}^+]}{M_{\text{اسید}}} \times 100 \Rightarrow \alpha = \frac{[\text{H}^+]}{0.06} \times 100$$

$$\Rightarrow [\text{H}^+] = [\text{A}^-] = 0.012$$

غلظت کل یون ها 0.024 مولار خواهد بود.

در محلول (IV)، رسانایی الکتریکی صفر است چون اتانول غیرالکترولیت می باشد.

(شیمی ۳- مولکول ها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۶ تا ۱۹)