۱- فرض کنیم $f(1)=1$ و $f(x-1)=-f(x)$. اگر $g(x)=xf(x)-f(2x+1)$، مقدار $f'(1)+g'(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- هرگاه $g(x)=f(\frac{1}{x})$ و $f'(x)=x+\frac{2}{x}$، مقدار $g''(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۶ ۳) ۳۴ ۴) ۱۶

۳- اگر $f(x)=\frac{3x+8}{x+1}$، شیب خط مماس بر وارون تابع در نقطهٔ تلاقی تابع و وارون در ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) ۵ ۲) -5 ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{-1}{5}$

۴- استوانه‌ای درون یک کره به شعاع ۴ محاط شده است. در لحظه‌ای که ارتفاع استوانه به ۴ می‌رسد، آهنگ تغییر حجم استوانه کدام است؟

۱) 2π ۲) 8π ۳) 12π ۴) 4π

۵- تابع $f(x)=\frac{ax-9}{x-a}$ در بازهٔ $(1,+\infty)$ صعودی اکید است. a برابر با چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۴

۶- مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-x^2$ کدام است؟

۱) $\sqrt[4]{2}$ ۲) $\sqrt[4]{4}-4$ ۳) ۲ ۴) صفر

۷- حجم بزرگ‌ترین مخروط قائم که درون کره‌ای به شعاع R محاط شده باشد، چه کسری از حجم کره است؟

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{32}{81}$ ۴) $\frac{4}{27}$

۸- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2x-1}$ در بازهٔ $[1,4]$، چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=1$ است؟

۱) $\frac{-3}{35}$ ۲) $\frac{-3}{7}$ ۳) $\frac{-2}{21}$ ۴) $\frac{-2}{63}$

۹- چندجمله‌ای درجه‌دوم f در تساوی $f(x+3)-f(x-1)=3x+2$ صدق می‌کند. آهنگ تغییر لحظه‌ای f در نقطهٔ $x=7$ چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

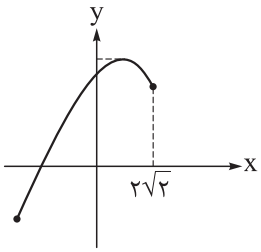
۱۰- مجموع ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^3-12x-11$ در بازهٔ $[-1,4]$ چه‌قدر است؟

۱) -27 ۲) -22 ۳) -18 ۴) -12

۱۱- نقطه‌ای با کدام طول برای تابع $f(x)=\cos^2 x+\sin x$ یک نقطهٔ بحرانی است، ولی یک نقطهٔ اکسترمم مطلق نیست؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

۱۲- نمودار تابع $f(x)=x+\sqrt{a-x^2}$ مطابق شکل است. مقدار ماکزیمم تابع f، چند برابر a است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\sqrt{۲}$

۴) ۲

۱۳- یکنوایی تابع $y=\frac{x|x|}{x+۲}$ در بازهٔ $(-\infty,-۲)$ چگونه است؟

۱) صعودی
۲) نزولی
۳) ابتدا صعودی سپس نزولی
۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

۱۴- اگر $A=\frac{۱}{۶+۴\sqrt{۳}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}}$، مقدار $(۲A+۱)^۲$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

۱۵- اگر $a=(\sqrt{۶}-۱)^۲$، مقدار $A=\sqrt{\frac{a+۲}{۲۵}+\frac{۱}{a}}$ کدام است؟

۱) ۰/۸
۲) ۰/۴
۳) ۰/۳۶
۴) ۰/۶

۱۶- به ازای کدام عدد طبیعی n، تساوی $۲\sqrt{۲}-\frac{n\sqrt{۲}-۲۷}{n+۶\sqrt{۲}+۱}=۳$ برقرار است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۶
۳) ۱۵
۴) ۱۷

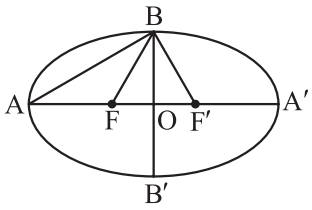
۱۷- یکی از عوامل تجزیهٔ عبارت، $(x^۲-ax-۴)^۲-۶۴$ برابر $x+۲$ است. کدام عبارت الزاماً از عامل‌های دیگر آن است؟

۱) $x-۲$
۲) $x+۶$
۳) $x-۶$
۴) $x+۴$

۱۸- حاصل $A=\frac{\sqrt{۲۰}}{۱۰-۲\sqrt{۵}}\times(\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}-\sqrt{\sqrt{۱۲}+۴})$ کدام است؟

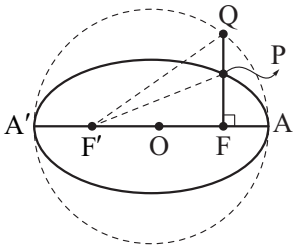
۱) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$
۳) $-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

۱۹- مطابق شکل، F و F' کانون‌های بیضی و BB' قطر کوچک آن است. اگر مساحت مثلث ABO چهار برابر مساحت مثلث BFF' باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

۲۰- بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' مطابق شکل زیر مفروض است. از نقطهٔ F عمودی به AA' رسم می‌کنیم تا بیضی و دایره به قطر AA' را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کند. اگر فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A یکسان و مساحت مثلث PQF' برابر $۴/۵$ باشد، حاصل $AF \times A'F'$ کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}+۶$
۲) $۳\sqrt{۳}+۶$
۳) $۶\sqrt{۳}+۹$
۴) $۶\sqrt{۲}+۹$

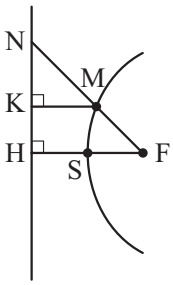
۲۱- نقطهٔ $(۴,۰)$ کانون و محور yها خط هادی یک سهمی است. این سهمی خط $y = ۲$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $۲\frac{۱}{۸}$
۲) $۲\frac{۱}{۴}$
۳) $۲\frac{۳}{۸}$
۴) $۲\frac{۱}{۲}$

۲۲- کانون سهمی به معادلهٔ $۲x^۲ - ۴x + ۳y = b$ روی نیمساز ناحیهٔ چهارم قرار دارد. عرض رأس این سهمی کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۸}$
۲) $-\frac{۱۱}{۸}$
۳) $\frac{۵}{۸}$
۴) $-\frac{۵}{۸}$

۲۳- در شکل زیر، نقطهٔ N را طوری روی خط هادی سهمی انتخاب کرده‌ایم که فاصلهٔ آن از کانون سهمی (F)، سه برابر فاصلهٔ کانونی سهمی باشد. حاصل $\frac{KH}{NH}$ کدام است؟



۱) $۰/۶$
۲) $۰/۵$
۳) $۰/۴$
۴) $۰/۳$

۲۴- مساحت قسمتی از نمودار $|x+۱| \le y \le ۲$ که در ناحیهٔ اول مختصات قرار ندارد، کدام است؟

۱) $۳/۵$
۲) ۳
۳) $۲/۵$
۴) ۴

۲۵- سه نقطهٔ $A(۱,۲,-۴)$، $B(۳,-۴,۰)$ و $C(۴,۰,-۴)$ را در فضا در نظر بگیرید. اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، M در کدام ناحیه قرار دارد و طول CM کدام است؟

۱) ناحیهٔ هفتم و ۳
۲) ناحیهٔ هشتم و $۲\sqrt{۲}$
۳) ناحیهٔ هفتم و $۲\sqrt{۲}$
۴) ناحیهٔ هشتم و ۳

۲۶- فرض کنید زاویهٔ بین دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

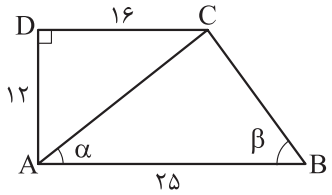
الف) اگر $\theta = ۹۰^\circ$، آن‌گاه $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$

ب) اگر $\theta > ۹۰^\circ$، آن‌گاه $|\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$ و $|\vec{a}|$

پ) اگر $\theta < ۹۰^\circ$، آن‌گاه $|\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$ و $|\vec{a}|$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۷- در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه ABCD مطابق شکل، قطر AC رسم شده است. حاصل $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ کدام است؟



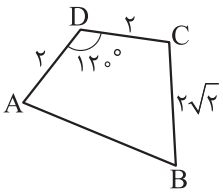
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۲۸- در مثلث ABC به اضلاع $AB=c$، $AC=b$ و $BC=a$، اگر $۵(a^۲-b^۲-c^۲)=۴\sqrt{۶}bc$ آن‌گاه طول شعاع دایرهٔ محیطی، چند برابر a است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۴}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

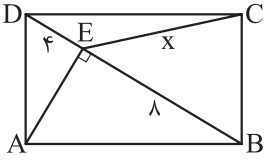
۲۹- چهارضلعی رسم‌شده در شکل روبه‌رو محاطی است. طول ضلع AB کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$ ۲) $۲+\sqrt{۳}$

۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۳۰- در مستطیل ABCD مطابق شکل، AE بر قطر BD عمود است. اگر $DE=۴$ و $BE=۸$ باشد، طول EC کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۵}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۶}$

۳۱- هفت نقطه روی محیط یک دایره هستند. تعداد مثلث‌هایی که با سه نقطه از این هفت نقطه می‌توان رسم کرد، چند برابر تعداد پنج‌ضلعی‌هایی است که با پنج نقطه از این هفت نقطه می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

۳۲- با حروف کلمهٔ «گلزاری» چند کلمهٔ شش‌حرفی می‌توان ساخت به طوری که شامل عبارت «گل» باشند و در آن‌ها دو حرف «ز» و «ا» کنار یکدیگر نباشند؟

۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۱۴

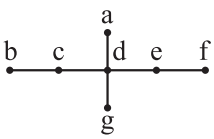
۳۳- چند عدد ده‌رقمی با ارقام ۳ و ۴ می‌توان نوشت که مضرب ۶ نباشد؟

۱) ۸۴۳ ۲) ۸۵۳ ۳) ۸۶۳ ۴) ۸۷۳

۳۴- اگر $n\gamma(P_n) = ۱۰$ باشد، کدام گراف مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتا دارد؟

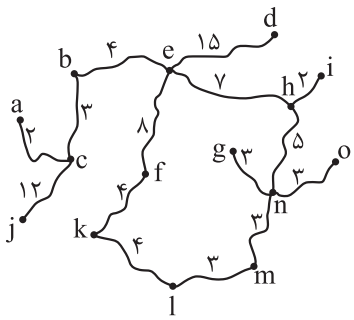
۱) P_n ۲) $P_{n+۱}$ ۳) $P_{n-۱}$ ۴) $P_{n+۲}$

۳۵- گراف روبه‌رو چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟



۱) ۸ ۲) ۶
۳) ۴ ۴) ۱۲

۳۶- نقشهٔ مقابل نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به گونه‌ای که فاصلهٔ هر روستا با نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کم‌ترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. چند بیمارستان باید احداث کنیم؟



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۳۷- گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۸ و کم‌ترین اندازه، دارای ۷ـ مجموعهٔ یک‌عضوی است. با اضافه‌کردن حداقل چند یال به این گراف، دوری به طول ۸ ایجاد می‌شود؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۸- چند عدد ۷رقمی مضرب ۵ با ارقام ۱,۵,۳,۲,۰,۰,۰ می‌توان ساخت؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۶۰

۳۹- ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در اتاق‌های ۲نفره، ۳نفره و ۴نفره اسکان پیدا کنند به طوری که فرد A در اتاق ۳نفره باشد؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۸۴۰ ۳) ۶۱۰ ۴) ۲۱۰

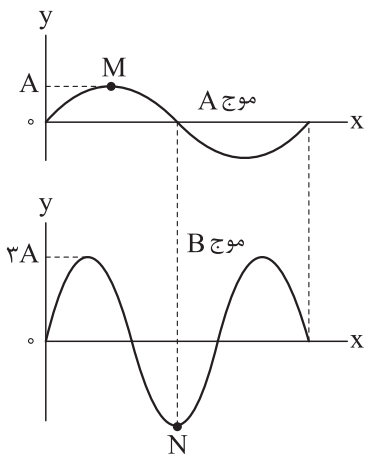
۴۰- در چند جایگشت از حروف SARASARI هیچ‌کدام از حروف I و A کنار هم نیستند؟

۱) ۵۷۶ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۵

۴۱- نیروی کشش یک تار ۶۰N است و هنگامی که با بسامد ۲۵۰Hz به ارتعاش درمی‌آید، طول موج در آن ۲۰cm می‌شود. اگر چگالی تار $8\,g/cm^3$ باشد، قطر مقطع آن چند میلی‌متر است؟ $(\pi \simeq 3)$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۲- در شکل زیر، دو موج عرضی A و B در دو طناب متفاوت منتشر می‌شوند. اگر تندی انتشار موج A، ۲ برابر تندی انتشار موج B باشد، بیشینهٔ تندی ذرهٔ M چند برابر بیشینهٔ تندی ذرهٔ N است؟



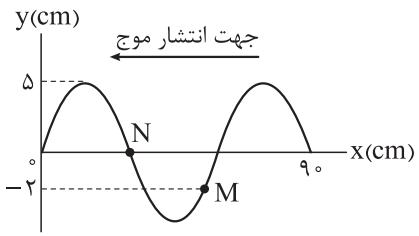
۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۴}{۹}$

۴۳- تصویر یک موج عرضی که در طنابی در حال انتشار است، در لحظهٔ $t = ۰$ به شکل زیر است. اگر تندی متوسط ذرهٔ M از طناب در مدتی که موج ۳۰cm در محیط پیشروی می‌کند، برابر $۰/۵\,m/s$ باشد، شتاب ذرهٔ N از طناب در لحظهٔ $t = ۰/۴۵\,s$ در SI کدام است؟ $(\pi^۲ \simeq ۱۰)$



۱) $-۵\sqrt{۲}\,\vec{j}$

۲) $+۵\sqrt{۲}\,\vec{j}$

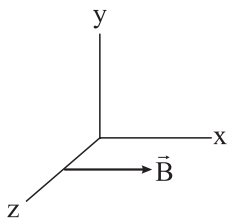
۳) $-\frac{۲۵}{۴}\sqrt{۲}\,\vec{j}$

۴) $+\frac{۲۵}{۴}\sqrt{۲}\,\vec{j}$

۴۴- شنونده‌ای از فاصلهٔ ۶۴۰ متری یک چشمهٔ صوت به فاصلهٔ ۱۶۰ متری آن می‌رود. تراز شدت صوتی که می‌شنود چند دسی‌بل افزایش می‌یابد؟ $(\log ۲ = ۰/۳)$

۱) ۰/۶ ۲) ۱/۲ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۴۵- شکل زیر، جهت میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی را در یک نقطه و در یک لحظه نشان می‌دهد. اگر جهت انتشار موج در جهت مثبت محور z باشد، جهت میدان الکتریکی در این لحظه و در این مکان کدام است؟



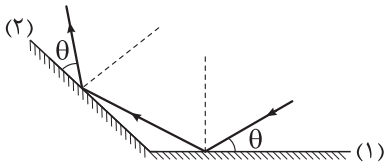
۱) $-y$

۲) $+y$

۳) $-z$

۴) $+z$

۴۶- مطابق شکل، پرتوی نوری به آینهٔ (۱) و در ادامه به آینهٔ (۲) می‌تابد. اگر امتداد پرتوی بازتاب از آینهٔ (۲) با امتداد پرتوی تابش به آینهٔ (۱) زاویهٔ ۱۲۰° بسازد، θ چند درجه است؟



۱) ۲۰
۲) ۳۰
۳) ۴۰
۴) ۶۰

۴۷- اختلاف طول موج دو موج الکترومغناطیسی A و B در خلأ برابر $۶۰۰\ nm$ و بسامد موج A، ۴ برابر بسامد موج B است. انرژی هر یک از فوتون‌های مربوط به موج A چند الکترون ولت است؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm)$

۱) ۰/۶۲ ۲) ۱/۵۵ ۳) ۶/۲ ۴) ۱۵/۵

۴۸- شدت تابشی امواج الکترومغناطیسی که به سطحی به مساحت $۲۰۰\ cm^۲$ می‌رسد، برابر $۴\ W/m^۲$ است. اگر بسامد این موج $۵\times۱۰^{۱۴}\ Hz$ باشد، در هر دقیقه چند فوتون به این سطح می‌رسد؟ $(h = ۶\times۱۰^{-۳۴}\ J\cdot s)$

۱) $۱/۶\times۱۰^{۱۹}$ ۲) $۱/۶\times۱۰^{۲۰}$ ۳) $۹/۶\times۱۰^{۱۹}$ ۴) $۹/۶\times۱۰^{۲۰}$

۴۹- کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ مدل‌های اتمی تامسون و رادرفورد درست است؟

۱) در مدل اتمی تامسون، بار مثبت که سهم ناچیزی در جرم اتم دارد، به طور همگن در سراسر آن پخش شده است.

۲) در مدل اتمی رادرفورد، با حرکت الکترون به دور هسته، طول موج امواج الکترومغناطیسی گسیلی از آن به تدریج افزایش می‌یابد.

۳) مدل اتمی رادرفورد، برخلاف مدل اتمی تامسون، طیف خطی گسیل‌شده از اتم‌ها را توجیه می‌کند.

۴) در مدل اتمی رادرفورد، بنابر فیزیک کلاسیک، حرکت شتابدار الکترون به دور هسته، سبب تابش امواج الکترومغناطیسی می‌شود.

۵۰- با تابش نوری با بسامد f بر سطح یک فلز، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد، برای افزایش بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها کدام‌یک از تغییرهای زیر مؤثر است؟

الف) زمان تابش نور را افزایش دهیم.

ب) از فلزی با بسامد آستانهٔ کم‌تر استفاده کنیم.

پ) از نوری با بسامد بیشتر از f استفاده کنیم.

ت) بدون تغییر بسامد، شدت نور تابیده را افزایش دهیم.

۱) الف و ت ۲) ب و پ ۳) ب و ت ۴) الف و پ

۵۱- الکترون در اتم هیدروژن در تراز $n = ۴$ قرار دارد. این الکترون مستقیماً به حالت پایه می‌رود و فوتون گسیلی به فلزی برخورد می‌کند که تابع کار آن $۵/۲۵\ eV$ است. بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از فلز چند الکترون ولت است؟ $(E_R = ۱۳/۶\ eV)$

۱) ۴/۴ ۲) ۷/۵ ۳) ۷/۲۵ ۴) ۴/۲۵

۵۲- در آزمایش فوتوالکتریک طول موج آستانهٔ فلزی $۴۰۰\ nm$ است. نوری با طول موج λ به فلز می‌تابد و سبب گسیل فوتوالکترونی با بیشینهٔ تندی $۸\times۱۰^۵\ m/s$ می‌شود. λ چند نانومتر است؟

$(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C, c = ۳\times۱۰^۸\ m/s, h = ۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV.s, m_e = ۹\times۱۰^{-۳۱}\ kg)$

۱) ۸۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۵۰

۵۳- کدام‌یک از موارد زیر، دربارهٔ الکترونی که در اتم هیدروژن از مدار $n_1 = 2$ به $n_2 = 4$ گذار می‌کند، درست است؟ $(e = 1/6\times10^{-19}C\,,\, E_R = 13/6\,eV)$

۱) این الکترون، فوتونی با انرژی $4/08\times10^{-19}J$ گسیل می‌کند.

۲) این الکترون، فوتونی با انرژی $4/08\times10^{-19}J$ جذب می‌کند.

۳) این الکترون، فوتونی با انرژی $5/44\times10^{-19}J$ گسیل می‌کند.

۴) این الکترون، فوتونی با انرژی $5/44\times10^{-19}J$ جذب می‌کند.

۵۴- در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، اختلاف شعاع مدار الکترون در سومین و چهارمین حالت برانگیخته چند پیکومتر است؟ (شعاع بور برای اتم هیدروژن $5/29\times10^{-11}m$ است.)

۱) ۵۲/۹ ۲) ۳۷۰/۳ ۳) ۴۷۶/۱ ۴) ۵۲۹

۵۵- انرژی فوتون متعلق به کوتاه‌ترین طول موج رشتهٔ براکت $(n' = 4)$ هیدروژن اتمی چند الکترون‌ولت است؟ $(hc = 1240\,eV.nm\,,\, R = 0/01\,(nm)^{-1})$

۱) ۰/۲۷۹ ۲) ۰/۷۷۵ ۳) ۲/۷۹ ۴) ۷/۷۵

۵۶- در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، انرژی فوتون متعلق به اولین خط رشتهٔ براکت $(n' = 4)$ برابر E_1، و انرژی فوتون متعلق به دومین خط رشتهٔ بالمر $(n' = 2)$ برابر E_2 است. $E_1 - E_2$ برابر چند ریدبرگ است؟

۱) ۰/۲۱ ۲) −۰/۲۱ ۳) ۰/۱۶۵ ۴) −۰/۱۶۵

۵۷- در اتم هیدروژن، الکترونی در چهارمین حالت برانگیخته است. طول موج پرتوی فرابنفشی که این الکترون می‌تواند گسیل کند، چند میکرومتر است؟ $(R = 0/01\,(nm)^{-1})$

۱) $\frac{5}{48}$ ۲) $\frac{8}{75}$ ۳) $\frac{5}{96}$ ۴) $\frac{4}{75}$

۵۸- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) در پدیدهٔ فلوئورسانی، طول موج نور گسیل‌یافته معمولاً برابرِ همان طول موج نور فرودی یا کوچک‌تر از آن است.

ب) برخی از خط‌های تاریک موجود در طیف خورشید، ناشی از جذب طول موج‌های مربوط به این خط‌ها توسط گازهای جو خورشید است.

پ) همهٔ اجسام در هر دمایی از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند که در دماهای معمولی بیشتر تابش‌های گسیل‌شده، در ناحیهٔ فروسرخ قرار دارند.

ت) طیف گسیلی جسم جامد، برخلاف گازهای کم‌فشار و رقیق، خطی و ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است.

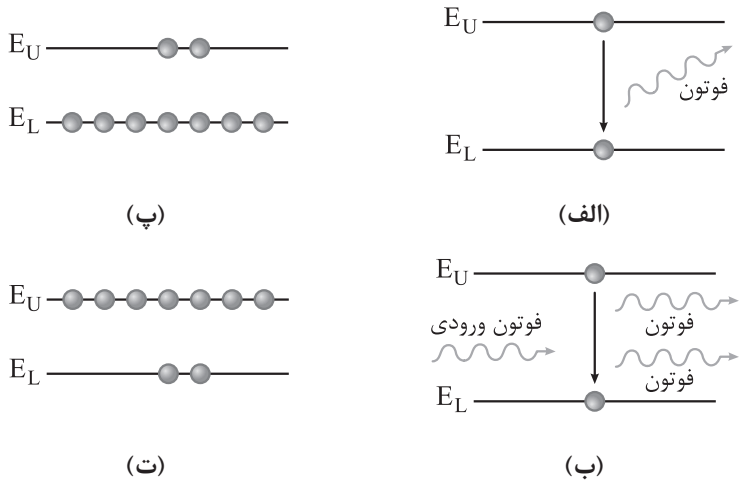
۱) الف و ب ۲) الف و ت

۳) پ و ت ۴) ب و پ

۵۹- الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n = 7$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اگر این الکترون به حالت پایه برود، به ترتیب از راست به چپ، امکان گسیل چند نوع فوتون با انرژی متفاوت، و چند نوع فوتون در ناحیهٔ فروسرخ وجود دارد؟

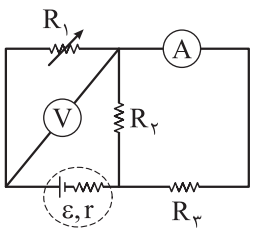
۱) ۲۱، ۱۰ ۲) ۲۱، ۱۱ ۳) ۲۸، ۱۰ ۴) ۲۸، ۱۱

۶۰- به ترتیب از راست به چپ، کدام شکل نشان‌دهندهٔ فرایند گسیل القایی، و کدام شکل نشان‌دهندهٔ وضعیت وارونی جمعیت در لیزر است؟



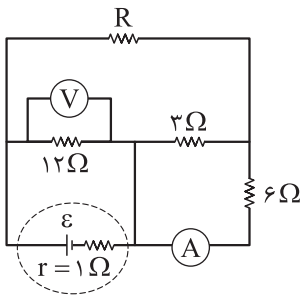
۱) الف و پ
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) ب و ت

۶۱- در مدار شکل روبه‌رو، با کاهش مقاومت R_1، مقدارهایی که آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب چگونه تغییر می‌کند؟



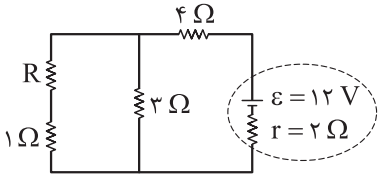
۱) افزایش ـ ثابت
۲) کاهش ـ افزایش
۳) افزایش ـ کاهش
۴) کاهش ـ ثابت

۶۲- در مدار شکل مقابل، ولت‌سنج آرمانی ۱۲ V و آمپرسنج آرمانی ۱ A را نشان می‌دهند. نیروی محرکهٔ مولد چند ولت است؟



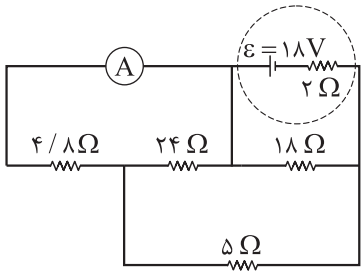
۱) ۸
۲) ۱۴
۳) ۱۵
۴) ۱۶

۶۳- در مدار شکل مقابل، اگر توان مصرفی مقاومت ۳ Ω، ۱۲ برابر توان مصرفی مقاومت ۱ Ω باشد، توان مصرفی مقاومت ۴ Ω چند وات است؟



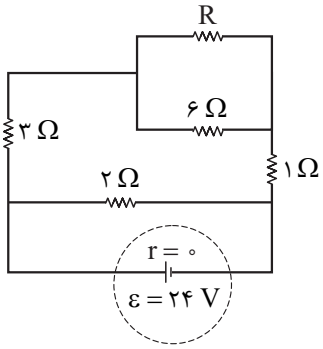
۱) ۳۶
۲) ۱۸
۳) ۹
۴) ۴/۵

۶۴- در مدار زیر، آمپرسنج آرمانی، جریان چند آمپر را نشان می‌دهد؟



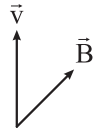
۱) ۱/۲۵
۲) ۱/۵
۳) ۱/۷۵
۴) ۲/۲۵

۶۵- در مدار زیر، اگر توانِ مصرفی مقاومت ۳اهمی، $\frac{۹}{۸}$ برابر توانِ مصرفی مقاومت ۶اهمی باشد، توانِ مصرفی کلِ مدار چند وات است؟



۱) ۲۸۸
۲) ۳۶۰
۳) ۳۲۰
۴) ۳۸۴

۶۶- پوزیترونی با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در حرکت است و $\vec{v}$ و $\vec{B}$ در همین صفحه قرار دارند. در لحظهٔ نشان داده‌شده، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر پوزیترون کدام است؟



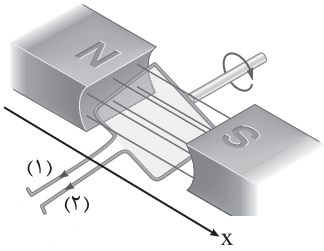
۱) ⊗
۲) ⊙
۳) →
۴) ←

۶۷- در شکل زیر، یک آهنربای میله‌ای و یک عقربهٔ مغناطیسی در یک صفحه قرار دارند. اگر آهنربا حول مرکز خود و در جهت ساعتگرد یک دور کامل دوران کند، عقربهٔ مغناطیسی چند درجه و در چه جهتی دوران می‌کند؟



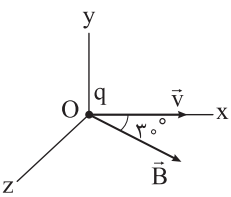
۱) ۳۶۰، ساعتگرد
۲) ۳۶۰، پادساعتگرد
۳) ۷۲۰، ساعتگرد
۴) ۷۲۰، پادساعتگرد

۶۸- در شکل زیر، حلقهٔ رسانای مستطیل‌شکلی که حامل جریان الکتریکی I است، درون میدان مغناطیسی یکنواخت، در جهت نشان داده شده می‌چرخد. جهت میدان مغناطیسی و جهت جریان I به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



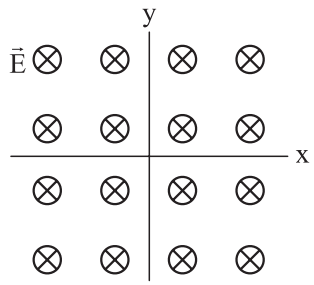
۱) در جهت محور x، (۱)
۲) در جهت محور x، (۲)
۳) در خلاف جهت محور x، (۱)
۴) در خلاف جهت محور x، (۲)

۶۹- در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = ۵\mu C$ با تندی $۴۰ km/s$ در جهت محور x پرتاب شده است و بردار سرعت آن با میدان مغناطیسی $B = ۴۰۰ G$ که عمود بر محور y است، زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره، برحسب نیوتون در لحظهٔ پرتاب کدام است؟



۱) $۰/۰۴\vec{j}$
۲) $۰/۰۰۴\vec{j}$
۳) $-۰/۰۴\vec{j}$
۴) $-۰/۰۰۴\vec{j}$

۷۰- در شکل زیر، میدان الکتریکی یکنواخت $E = ۵۰\ N/C$، عمود بر صفحه و به سمت داخل آن است. پروتونی با تندی $۲۰۰\ m/s$ در جهت محور y پرتاب می‌شود. اگر با اعمال میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، پروتون بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ میدان مغناطیسی $\vec{B}$ الزاماً درست است؟



الف) $\vec{B}$ در جهت محور x است.

ب) $\vec{B}$ در خلاف جهت محور x است.

پ) اندازهٔ $\vec{B}$ برابر $۰/۲۵\ T$ است.

ت) کمینهٔ اندازهٔ $\vec{B}$ برابر $۰/۲۵\ T$ است.

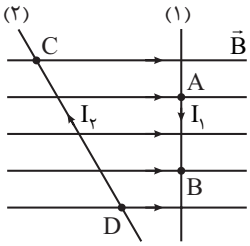
۱) الف و پ ۲) ب و پ

۳) پ ۴) ت

۷۱- از سیمی به طول $۲\ m$ که به صورت افقی و در راستای شرق به غرب قرار دارد، جریان $۲\ A$ از شرق به غرب عبور می‌کند. اگر بزرگی میدان مغناطیسی زمین در محل سیم $۰/۴۵\ G$ و شیب مغناطیسی در این محل ۳۰° باشد، اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون است؟

۱) $۱/۸\times۱۰^{-۴}$ ۲) $۱/۸\times۱۰^{-۵}$ ۳) ۹×۱۰^{-۴} ۴) ۹×۱۰^{-۵}

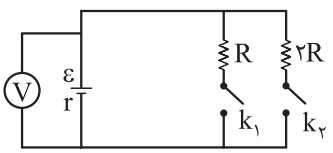
۷۲- در شکل زیر، دو سیم (۱) و (۲) در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارند. اگر جریان الکتریکی عبوری از سیم (۱)، ۲ برابر جریان الکتریکی عبوری از سیم (۲) و نیروی مغناطیسی وارد بر قطعهٔ AB از سیم (۱) برابر $\vec{F}$ باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر قطعهٔ CD از سیم (۲)، کدام است؟



۱) $۴\vec{F}$ ۲) $-۴\vec{F}$

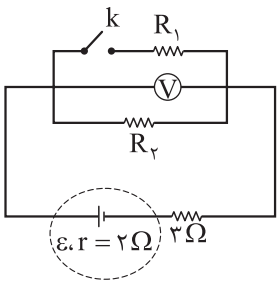
۳) $\vec{F}$ ۴) $-\vec{F}$

۷۳- در مدار شکل مقابل، اگر کلید $k_۱$ را ببندیم و کلید $k_۲$ باز باشد، ولت‌سنج آرمانی عدد $۳\ V$ و اگر کلید $k_۲$ را ببندیم و کلید $k_۱$ باز باشد، ولت‌سنج عدد $۴\ V$ را نشان می‌دهد. اگر هر دو کلید $k_۱$ و $k_۲$ را ببندیم، ولت‌سنج چند ولت را نشان می‌دهد؟



۱) $\frac{۱۲}{۷}$ ۲) ۲ ۳) $۲/۴$ ۴) $\frac{۲۴}{۷}$

۷۴- در مدار شکل روبه‌رو، ابتدا کلید k بسته است. با بازشدن آن، عددی که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد و توان خروجی باتری به ترتیب چگونه تغییر می‌کنند؟



۱) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد

۲) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد

۳) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد

۴) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد

۷۵- در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = (0/2\,T)\vec{i}$، ذرهٔ بارداری با بار الکتریکی $-2\,\mu C$ و جرم $2\,g$ در میدان مغناطیسی در حال حرکت است. در لحظه‌ای که سرعت ذره برابر $\vec{v} = (2\times10^5\,m/s)\vec{i} + (-10^5\,m/s)\vec{j}$ است، اندازهٔ شتاب ذره چند متر بر مربع ثانیه است؟ (تنها نیروی وارد بر ذره، نیروی مغناطیسی است.)

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۷۶- کدام مطلب در مورد مواد یونی درست است؟

۱) این مواد در حالت جامد، ساختاری منظم از اتم‌ها دارند.

۲) نقطهٔ ذوب و جوش بالاتری نسبت به مواد کووالانسی دارند.

۳) در حالت جامد رسانای جریان الکتریکی نیستند، اما در حالت مذاب یا محلول در آب رسانا هستند.

۴) این مواد به طور معمول در حلال‌های ناقطبی حل می‌شوند.

۷۷- چه تعداد از ویژگی‌های زیر را می‌توان با فلزها مرتبط دانست؟

- **رسانایی الکتریکی در حالت جامد**
- **سخت و شکننده**
- **رسانایی گرمایی**
- **آرایشی از یون‌ها با بار ناهمنام**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۸- با توجه به مولکول‌های داده‌شده کدام مطلب درست است؟

a) کلروفرم **b) دی‌متیل اتر** **c) کربونیل سولفید** **d) آمونیاک**

۱) همهٔ مولکول‌ها قطبی هستند و با بررسی آن‌ها، بزرگ‌ترین نسبت جفت‌الکترون‌های پیوندی به جفت‌الکترون‌های ناپیوندی، برابر ۲ است.

۲) مولکول c همانند مولکول هیدروژن سیانید، قطبی است و در مقایسهٔ نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی این مولکول با مولکول هیدروژن سیانید، محدودهٔ رنگ سرخ، وسیع‌تر است.

۳) با جایگزین‌کردن اتم H با F در مولکول d، گشتاور دوقطبی کاهش می‌یابد.

۴) با جایگزین‌کردن یک اتم Cl با H در مولکول a، مولکولی متقارن ایجاد می‌شود که رفتار مشابهی با کربن تتراکلرید در میدان الکتریکی دارد.

۷۹- کدام مطلب نادرست است؟

۱) اگر مولکول ABC ساختاری خمیده داشته باشد، A، B و C می‌توانند سه عنصر متوالی از جدول تناوبی باشند که در دما و فشار اتاق به شکل مولکول‌های دواتمی گازی وجود دارند.

۲) در مولکول خمیدهٔ YX_2، اگر X یک هالوژن باشد، ممکن است احتمال حضور الکترون‌های پیوندی در اطراف هستهٔ اتم‌های X، بیشتر باشد.

۳) با این‌که همهٔ جامدهای فلزی، رسانای جریان برق هستند، اما همهٔ آن‌ها سخت نیستند.

۴) ماده‌ای که در حالت مایع رسانا نیست، می‌تواند در سه گروه از انواع جامدها قرار داشته باشد.

۸۰- نمونه‌ای از آلومینیم با چگالی ۲/۷ گرم بر سانتی‌متر مکعب که در دریای الکترونی آن $۱/۲۰۴\times۱۰^{۲۵}$ الکترون وجود دارد را در نظر بگیرید. اگر در مدت‌زمان معینی این نمونه با اکسیژن کافی واکنش دهد به طوری که در این بازهٔ زمانی، ۴۰ درصد از این نمونه دچار اکسایش شود، جرم فراوردهٔ حاصل چند گرم است و در این مدت، چه حجمی (برحسب سانتی‌متر مکعب) از آلومینیم دچار اکسایش نشده است؟ $(Al = ۲۷, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) ۶۸ ـ ۲۷ ۲) ۶۸ ـ ۴۰ ۳) ۱۳۶ ـ ۲۷ ۴) ۱۳۶ ـ ۴۰

۸۱- کدام مطلب درست است؟

۱) تفاوت فروپاشی ΔH شبکهٔ LiF و NaCl، کم‌تر از تفاوت فروپاشی ΔH شبکهٔ LiCl و NaF است.

۲) شمار الکترون‌های مبادله‌شده برای تولید ۰/۵ مول منیزیم اکسید، نصف شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش تولید هر مول پتاسیم یدید است.

۳) اگر نسبت بار به شعاع یون کلسیم به نسبت بار به شعاع یون لیتیم به تقریب برابر ۱/۳۷ باشد، در صورتی که شعاع یون لیتیم برابر ۶۸ پیکومتر باشد، شعاع یون کلسیم، ۳۱ پیکومتر از آن بزرگ‌تر است.

۴) اگر نسبت بار به شعاع یون سدیم برابر $۹/۸۰\times۱۰^{-۳}$ باشد و شعاع این یون برابر ۱۰۲ پیکومتر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که با تشکیل کاتیون، ۶۰ درصد از شعاع اتمی سدیم کاهش می‌یابد.

۸۲- چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟

- **رسانایی الکتریکی، برخلاف تنوع عدد اکسایش از جمله رفتارهای شیمیایی فلزها محسوب نمی‌شود.**
- **هر مولکول از رنگدانهٔ معدنی مورد استفاده برای ایجاد رنگ سفید، جرم مولی متوسطی دارد و درشت‌مولکول نیست.**
- **در محلول نمک‌های وانادیم که به رنگ بنفش دیده می‌شود، یون پایدار وانادیم مشاهده نمی‌شود.**
- **کوارتز همانند ترکیبی که به عنوان ساینده در سنباده به کار می‌رود، در ساختار خود حلقه‌های شش‌گوشه دارد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۳- کدام مطلب درست است؟

۱) فولاد برخلاف تیتانیم با ذرات موجود در آب دریا واکنش نمی‌دهد.

۲) محلول همهٔ فلزهای واسطه که اعداد اکسایش متنوعی دارند، به رنگ‌های گوناگون مشاهده می‌شود.

۳) علت اصلی استفاده از تیتانیم برای ساختن قطعات موجود در موتور جت، نقطهٔ ذوب بالا و مقاومت بالا در برابر سایش است.

۴) نیتینول آلیاژی از دومین عنصر دستهٔ d و هشتمین عنصر تناوب چهارم است.

۸۴- اگر در واکنش تولید کلسیم برمید از یون‌های گازی سازنده‌اش، اختلاف جرم واکنش‌دهنده‌ها برابر ۸۰ گرم باشد و ۱۳۰۰ کیلوژول انرژی ..... شود، می‌توان نتیجه گرفت که آنتالپی فروپاشی شبکهٔ کلسیم برمید برابر ..... کیلوژول بر مول است. $(Br = ۸۰, Ca = ۴۰ : g.mol^{-۱})$

۱) آزاد ـ ۶۵۰ ۲) مصرف ـ ۱۹۵۰ ۳) مصرف ـ ۶۵۰ ۴) آزاد ـ ۱۹۵۰

۸۵- کدام مطلب در مورد یک واکنش گرماده نادرست است؟

۱) ΔH (تغییر آنتالپی) در این واکنش منفی است.

۲) انرژی فعال‌سازی واکنش رفت از انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت، بیشتر است.

۳) انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت برابر با فاصلهٔ بین سطح آنتالپی مواد فراورده و نقطهٔ اوج نمودار است.

۴) اگر به این واکنش کاتالیزگر اضافه کنیم، انرژی فعال‌سازی واکنش کاهش می‌یابد.

۸۶- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) دستاورد تولید اوره پس از سنتز آمونیاک صورت گرفت.

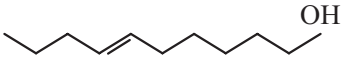
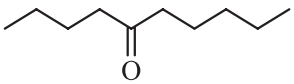
ب) در هوای آلوده علاوه بر گازهای هواکره، می‌توان اکسیدی از نیتروژن به رنگ قهوه‌ای یافت که از آرایش هشت‌تایی پیروی می‌کند.

پ) در بررسی غلظت آلاینده‌های هوا در یک کلان‌شهر، وقتی غلظت گاز NO در حال کاهش باشد، غلظت گازهای $NO_۲$ و $O_۳$ رو به افزایش می‌گذارد.

ت) در دمای اتاق گازهای $N_۲$ و $O_۲$، با یکدیگر واکنش‌داده و باعث افزایش غلظت گاز نیتروژن مونوکسید می‌شوند.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ ۳) ب ـ ت ۴) پ ـ ت

۸۷- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

- اگر جسمی طول موج‌های ۴۰۰ تا ۶۳۰ نانومتر را از نور مرئی جذب کند، به احتمال زیاد به رنگ بنفش دیده خواهد شد.
- اجسام از بین امواج الکترومغناطیس، تنها با نور مرئی برهم‌کنش دارند.
- برای تشخیص این‌که ماده‌ای به فرمول $C_{10}H_{20}O$ دارای یکی از دو ساختار  یا  است، می‌توان از طیف‌سنجی فروسرخ استفاده کرد.
- در روش‌های طیف‌سنجی (مثلاً در دستگاه M.R.I) از برهم‌کنش پرتوهای الکترومغناطیس با مواد بهره می‌برند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۸- در واکنش فرضی $2A + Y \rightarrow D$ حداقل انرژی لازم برای انجام واکنش برابر ۱۵۰ کیلوژول است. در صورت مصرف کامل ۰/۵ مول ماده Y در واکنش، ۱۰۰ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. بر این اساس چه تعداد از موارد زیر درست است؟

- واکنش گرماده بوده و در نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش، اختلاف سطح انرژی قله با فراورده‌ها برابر ۳۵۰ کیلوژول است.
- استفاده از کاتالیزگر مناسب می‌تواند باعث تولید ۵۰ کیلوژول گرما در ازای تولید یک مول D شود.
- در این واکنش مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها از فراورده‌ها، کم‌تر است.
- افزایش دما در این واکنش باعث کاهش انرژی فعال‌سازی و افزایش سرعت واکنش می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۹- کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن درست است؟

الف) در شرایط یکسان، کاتالیزگر پودر روی نسبت به توری پلاتینی، کاهش بیشتری در انرژی فعال‌سازی ایجاد می‌کند.

ب) واکنش در حضور جرقه یا توری پلاتینی با سرعت نزدیک به هم و انرژی فعال‌سازی مشابه، صورت می‌گیرد.

پ) در دمای اتاق به رغم پایداری بیشتر فراورده‌ها نسبت به واکنش‌دهنده‌ها، به خاطر عدم تأمین انرژی فعال‌سازی، واکنش پیشرفت چندانی ندارد.

ت) تأثیر پودر روی و توری پلاتینی بر آنتالپی واکنش، مشابه یکدیگر است.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ت

۹۰- چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ واکنش‌های منجر به کاهش میزان آلاینده‌های تولیدی در خودروهای بنزینی درست است؟

- هر سه واکنش در دمای اتاق به رغم انجام‌پذیری، سرعت چندانی ندارد.
- هر سه واکنش دارای $\Delta H < 0$ و E_a زیاد هستند.
- استفاده از توری‌هایی از جنس Rh, Pd, Pt در خودروها، به منظور کاهش میزان آلاینده‌ها صورت می‌گیرد.
- هنگام روشن و گرم شدن خودرو در زمستان نسبت به تابستان، عملکرد مطلوب کاتالیزگرها کم‌تر مشاهده می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۱- کدام گزینه در مورد خودروهای دیزلی و مبدل کاتالیستی مناسب برای آن‌ها نادرست است؟

۱) درون خودروهای دیزلی، دو آلاینده تولید می‌شود که برخی اتم‌های آن‌ها به آرایش هشت‌تایی پایدار نمی‌رسد.

۲) از آمونیاک برای کاهش میزان آلایندگی اکسیدهای نیتروژن و کربن استفاده می‌شود.

۳) فرایند کاهش میزان آلایندگی هیدروکربن‌ها در این خودروها به کمک مبدل کاتالیستی صورت می‌گیرد.

۴) حذف مقداری از گازهای CO و C_xH_y، پیش از حذف اکسیدهای نیتروژن صورت می‌گیرد.

۹۲- اگر در واکنش زیر ضریب استوکیومتری اکسیدهای نیتروژن با هم برابر باشد، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

$$NO(g) + NO_2(g) + NH_3(g) \rightarrow N_2(g) + H_2O(g)$$

- **واکنش دارای دو اکسنده و یک کاهنده است.**
- **در واکنش موازنه‌شده، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود.**
- **اگر واکنش به گونه‌ای دچار تغییر شود که ضریب NO دو برابر ضریب NO_2 شود، مجموع ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده، برابر ۷۵ خواهد شد.**
- **در این واکنش، تنها اتم نیتروژن دچار تغییر عدد اکسایش شده است.**

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۹۳- کدام مطلب، نادرست است؟

۱) نگه‌داری سیب‌زمینی در انبار تاریک و خشک، از جوانه‌زنی و فساد آن جلوگیری می‌کند.

۲) نگه‌داری کشمش در ظرف دربسته داخل یخچال، به دلیل رطوبت بالا منجر به کپک‌زدگی آن می‌شود.

۳) نگه‌داری نان در فریزر، به دلیل کاهش فعالیت میکروبی، زمان ماندگاری آن را افزایش می‌دهد.

۴) نگه‌داری روغن زیتون در ظرف شیشه‌ای تیره و در جای خنک، از اکسایش و کاهش کیفیت آن جلوگیری می‌کند.

۹۴- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- **افزودن محلول سدیم کلرید به محلول نقره نیترات، باعث تشکیل بسیار سریع رسوب خاکستری‌رنگ نقره کلرید می‌شود.**
- **سرعت تشکیل زنگار ترد و شکننده بر اثر زنگ‌زدن اشیای آهنی، بیشتر از سرعت زرد و پوسیده‌شدن کاغذ در گذر زمان است.**
- **مجموع شمار اتم‌های مولکول قند موجود در جوانهٔ گندم، ۳/۷۵ برابر مجموع شمار اتم‌های کربن در مولکول گلوکز است.**
- **چهرهٔ آشکار ردپای غذا نشان می‌دهد که سالانه حدود ۳۰ درصد از غذایی که در جهان تولید می‌شود، به مصرف نمی‌رسد و به زباله تبدیل می‌شود.**
- **شاخه‌ای از علم شیمی که به بررسی شرایط و چگونگی انجام واکنش‌های شیمیایی و عوامل مؤثر بر سرعت آن‌ها می‌پردازد، سینتیک شیمیایی نام دارد.**

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

۹۵- در کدام گزینه، ترتیب انجام واکنش‌ها از راست به چپ، از سریع‌ترین به کندترین به درستی آمده است؟

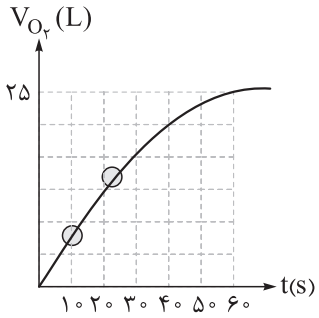
۱) سوختن چوب کبریت ـ پختن تخم مرغ ـ تشکیل الماس ـ زنگ‌زدن آهن

۲) انفجار آتشفشان ـ پوسیدن کاغذ ـ تشکیل نفت خام ـ ترش‌شدن شیر

۳) سوختن بنزین ـ تجزیهٔ پلاستیک ـ فاسدشدن گوشت ـ تشکیل سنگ مرمر

۴) انفجار بمب ـ هضم غذا ـ رسیدن میوه ـ تشکیل فسیل

۹۶- اگر نمودار زیر، حجم گاز آزادشده بر اثر انجام واکنش: $2KNO_3(s) \rightarrow 2KNO_2(s) + O_2(g)$ را نشان دهد، به تقریب چند ثانیه زمان لازم است تا جرم فراوردهٔ جامد تولیدشده با جرم واکنش‌دهندهٔ باقی‌مانده برابر شود؟ (چگالی گاز O_2 در شرایط آزمایش، برابر با $0/96\ g.L^{-1}$ است؛ $K=39, O=16, N=14 : g.mol^{-1}$)



۱) ۱۰

۲) ۲۳

۳) ۳۵

۴) ۴۲

۹۷- با توجه به واکنش زیر که در ظرفی با حجم ثابت انجام می‌شود، چند مورد از موارد زیر نادرست است؟

$A(g) + 2B(g) \rightarrow 3C(g)$

- اگر در لحظه‌ای سرعت متوسط مصرف A، برابر با $0/02\ mol.L^{-1}.s^{-1}$ باشد، سرعت متوسط تولید C برابر با $0/06\ mol.L^{-1}.s^{-1}$ خواهد بود.
- اگر در لحظه‌ای سرعت متوسط تولید C، برابر با $1/2\ mol.L^{-1}.min^{-1}$ باشد، سرعت متوسط واکنش برابر با $0/06\ mol.L^{-1}.s^{-1}$ خواهد بود.
- اگر در شروع واکنش، غلظت A برابر با $0/4\ mol.L^{-1}$ و غلظت B برابر با $0/8\ mol.L^{-1}$ باشد، پس از مدت‌زمانی که غلظت C به $0/6\ mol.L^{-1}$ می‌رسد، غلظت A و B به ترتیب برابر با $0/2\ mol.L^{-1}$ و $0/4\ mol.L^{-1}$ خواهد بود.
- اگر نمودار غلظت ـ زمان برای هر سه ماده رسم شود، شیب نمودار برای مادهٔ A، یک‌سوم شیب نمودار برای مادهٔ C و قرینهٔ آن خواهد بود.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

۹۸- اگر سرعت متوسط مصرف هیدروژن پراکسید در واکنش زیر، برابر با $0/002$ مولار بر ثانیه باشد، به ترتیب سرعت متوسط مصرف MnO_2، چند گرم بر ثانیه و سرعت متوسط تولید اکسیژن، چند لیتر بر دقیقه است؟ (شرایط را STP، دما را ثابت و حجم محلول را ۲ لیتر در نظر بگیرید؛ $MnO_2 = 87\ g.mol^{-1}$)

$H_2O_2\ (aq) + MnO_2\ (s) \rightarrow MnO\ (s) + O_2\ (g) + H_2O\ (l)$

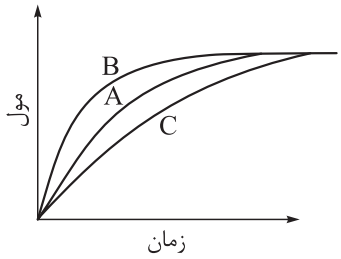
۱) ۰/۳۴۸ ، ۵/۳۷۶

۲) ۰/۳۴۸ ، ۲/۶۸۸

۳) ۰/۱۷۴ ، ۵/۳۷۶

۴) ۰/۱۷۴ ، ۲/۶۸۸

۹۹- با توجه به نمودار زیر که مربوط به تولید یک فراورده در یک واکنش در شرایط مختلف است، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) اگر منحنی A مربوط به واکنش پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق باشد، منحنی B می‌تواند مربوط به همین واکنش در دمای $40^{\circ}C$ باشد.

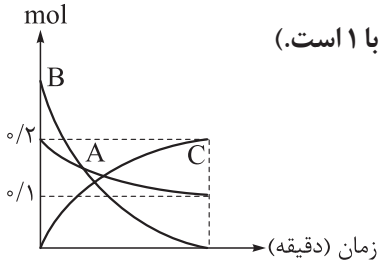
ب) خاک باغچه می‌تواند منحنی تولید بخار آب حاصل از سوختن قند را از A به C تبدیل کند و مدت‌زمان انجام واکنش را کاهش دهد.

پ) استفاده از پتاسیم به جای سدیم در واکنش آن با آب سرد و در همان شرایط، می‌تواند منحنی تولید گاز هیدروژن را از A به B تبدیل کند.

ت) اگر منحنی A مربوط به تولید رادیکال‌ها بر اثر انجام واکنش‌های متنوع و پیچیده در بدن ما باشد، منحنی C تأثیر لیکوپن بر میزان تولید این رادیکال‌ها را نشان می‌دهد.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ ۳) ب ـ ت ۴) پ ـ ت

۱۰۰- با توجه به نمودار زیر، در لحظه‌ای که شمار مول‌های A، ۲ برابر شمار مول‌های C می‌شود، ۴۰ درصد از شمار مول‌های B مصرف شده است. شمار مول‌های اولیهٔ B و نسبت مجموع ضرایب فراورده به مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (ضریب A در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، برابر با ۱ است.)



۱) ۰/۳ ـ ۰/۵ ۲) ۰/۳ ـ ۰/۴

۳) ۰/۴ ـ ۰/۴ ۴) ۰/۴ ـ ۰/۵

۱۰۱- درستی یا نادرستی مطالب زیر در ارتباط با بنزوئیک اسید، به ترتیب کدام است؟

- **افزودن آن به مواد غذایی، منجر به حذف واکنش‌های شیمیایی فاسدکنندهٔ مواد غذایی می‌شود.**
- **یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک و نوعی رنگ‌دهنده است که در تمشک و توت‌فرنگی وجود دارد.**
- **آشناترین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها است که به صورت هدفمند به مواد خوراکی افزوده می‌شود.**
- **نوعی مادهٔ شیمیایی با ویژگی‌های خاص است که از آن به عنوان افزودنی به منظور افزایش زمان ماندگاری و کیفیت مواد غذایی در صنایع غذایی استفاده می‌شود.**

۱) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست ۲) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست

۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست ۴) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست

۱۰۲- در یک واکنش شیمیایی، سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ A، برابر با سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ B و جرم مولی مادهٔ A، ۱/۵ برابر جرم مولی مادهٔ B است. کدام مورد همواره درست است؟

۱) سرعت متوسط واکنش، برابر با سرعت متوسط ماده با جرم مولی بیشتر است.

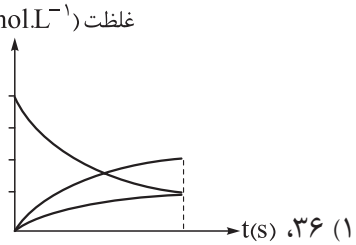
۲) یکی از آن‌ها واکنش‌دهنده و دیگری فراورده است.

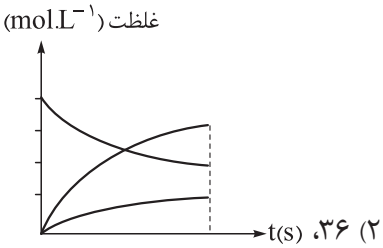
۳) در واحد زمان، تغییر شمار مول‌های A، ۱/۵ برابر تغییر شمار مول‌های B است.

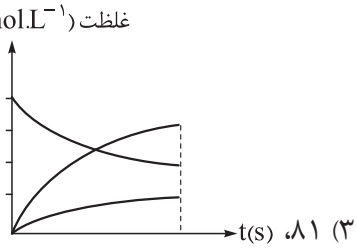
۴) ضریب استوکیومتری ماده با جرم مولی کم‌تر، ۱/۵ برابر ضریب استوکیومتری دیگری است.

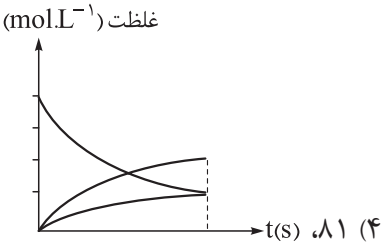
۱۰۳- اگر تغییرات غلظت مواد شرکت‌کننده در یک واکنش شیمیایی به صورت جدول زیر باشد، سرعت متوسط تولید مادهٔ B در بازهٔ زمانی ۱۲ تا ۱۸ ثانیه، چند مولار بر ساعت است و کدام نمودار، تغییرات غلظت مولار اجزای شرکت‌کننده در این واکنش را به درستی نشان می‌دهد؟

زمان (ثانیه)	غلظت ($mol.L^{-1}$)		
	C	B	A
۰	۰	۰	۱/۲۰
۶	۰/۱۵	۰/۴۵	۰/۹۰
۱۲	۰/۲۴	۰/۷۲	۰/۷۲
۱۸	۰/۲۸۵	x	۰/۶۳

۱) ۳۶،


۲) ۳۶،


۳) ۸۱،


۴) ۸۱،


۱۰۴- کدام موارد زیر در ارتباط با رادیکال‌های آزاد و بازدارنده‌های آن‌ها، نادرست است؟

الف) رادیکال‌های آزاد، گونه‌های فعال و ناپایداری هستند که می‌توانند به بافت‌های بدن آسیب برسانند.

ب) بازدارنده‌ها با به دام انداختن رادیکال‌های آزاد، از سرعت واکنش‌های ناخواسته در بدن می‌کاهند.

پ) میوه‌ها و سبزیجات حاوی ترکیباتی هستند که می‌توانند به عنوان بازدارنده عمل کنند.

ت) رادیکال‌های آزاد به دلیل داشتن الکترون‌های جفت‌نشده، واکنش‌پذیری پایینی دارند.

۱) الف ـ پ
۲) ب ـ ت
۳) پ ـ ت
۴) فقط ت

۱۰۵- اگر در واکنش فرضی: $2AB(g) \rightarrow A_2(g) + B_2(g)$، واکنش‌دهنده با غلظت یک مولار شروع به تجزیه کند، غلظت آن در هر ساعت، ۰/۱ برابر می‌شود. اگر این واکنش در حضور کاتالیزگر هر ۱۵ دقیقه با همین روند پیشرفت کند، در لحظه‌ای که ۹۹/۹۹ درصد مادهٔ اولیه مصرف شده باشد، تفاوت زمان انجام واکنش در حضور و عدم حضور کاتالیزگر چند دقیقه است و با به کار بردن کاتالیزگر، سرعت متوسط واکنش چند برابر می‌شود؟ (دما را ثابت در نظر بگیرید.)

۱) ۱۸۰، ۸
۲) ۱۲۰، ۴
۳) ۱۲۰، ۸
۴) ۱۸۰، ۴

۱ فرض کنیم $f(۱)=۱$ و $f(x-۱)=-f(x)$. اگر $g(x)=xf(x)-f(۲x+۱)$، مقدار $g'(۱)+f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

مشاوره برخی از بچه‌ها فقط فرمول‌های مشتق را حفظ کرده و از فرمول مشتق تابع مرکب غافل می‌شوند. فرمول مشتق تابع مرکب بیان می‌کند که چگونه باید از تابع $y=f(u)$ مشتق بگیرید.

درس Box

مشتق تابع مرکب

مشتق تابع $f(x)$ همان $f'(x)$ می‌شود، اما برای مشتق‌گیری از $f(u)$ که u یک عبارت برحسب x است، داریم:

$$(f(u))'=u'\times f'(u)$$

↓ مشتق تابع مرکب ↘ مشتق عبارت درون

مثلاً: $(f(x^۲+۱))'=۲x\times f'(x^۲+۱)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق فرمول مشتق تابع مرکب، داریم:

$$f(x-۱)=-f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} (۱)f'(x-۱)=-f'(x)$$

گام دوم:

$$g(x)=xf(x)-f(۲x+۱) \Rightarrow g'(x)=(۱)f(x)+xf'(x)-۲f'(۲x+۱)$$

$$\xrightarrow{x=۱} g'(۱)=f(۱)+f'(۱)-۲f'(۳)=۱+f'(۱)-۲f'(۳)$$

گام سوم: باید از رابطهٔ $f'(x-۱)=-f'(x)$، ارتباطی بین $f'(۱)$ و $f'(۳)$ پیدا کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x=۲ \Rightarrow f'(۱)=-f'(۲) \\ x=۳ \Rightarrow f'(۲)=-f'(۳) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(۱)=f'(۳)$$

گام چهارم:

$$g'(۱)=۱+f'(۱)-۲f'(۳)=۱+f'(۱)-۲f'(۱)=۱-f'(۱) \Rightarrow g'(۱)+f'(۱)=۱$$

۲ هرگاه $g(x)=f(\frac{۱}{x})$ و $f'(x)=x+\frac{۲}{x}$، مقدار $g''(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

دو بار از g مشتق بگیریم و $\frac{۱}{۲}$ قرار دهیم.

۱) ۴۰
۲) ۵۶
۳) ۳۴
۴) ۱۶

مشاوره از بحث مشتق معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید که در بیشتر مواقع یکی مربوط به فرمول‌های مشتق و دیگری بررسی مشتق‌پذیری (نقاط گوشه و مماس قائم و ...) است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از دو طرف رابطه $g(x)=f(\frac{۱}{x})$ مشتق می‌گیریم:

$$g'(x)=(\frac{۱}{x})'f'(\frac{۱}{x})=-\frac{۱}{x^۲}f'(\frac{۱}{x})$$

گام دوم: دوباره مشتق می‌گیریم:

$$g''(x)=(-\frac{۱}{x^۲})'f'(\frac{۱}{x})+(\frac{-۱}{x^۲})(-\frac{۱}{x^۲})f''(\frac{۱}{x})$$

$$=\frac{۲}{x^۳}f'(\frac{۱}{x})+(\frac{-۱}{x^۲})(-\frac{۱}{x^۲})f''(\frac{۱}{x})=\frac{۲}{x^۳}f'(\frac{۱}{x})+\frac{۱}{x^۴}f''(\frac{۱}{x})$$

گام سوم: $x=\frac{۱}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$g''(\frac{۱}{۲})=\frac{۲}{\frac{۱}{۸}}f'(۲)+\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}f''(۲)=۱۶f'(۲)+۱۶f''(۲)$$

گام چهارم:

$$f'(x)=x+\frac{۲}{x}\xrightarrow{x=۲}f'(۲)=۲+\frac{۲}{۲}=۳$$

گام پنجم:

$$f'(x)=x+\frac{۲}{x}\xrightarrow{\text{مشتق}}f''(x)=۱-\frac{۲}{x^۲}\Rightarrow f''(۲)=۱-\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

گام ششم:

$$g''(\frac{۱}{۲})=۱۶f'(۲)+۱۶f''(۲)=۱۶(۳)+۱۶(\frac{۱}{۲})=۴۸+۸=۵۶$$

۳ اگر $f(x)=\frac{۳x+۸}{x+۱}$، شیب خط مماس بر وارون تابع در نقطهٔ تلاقی تابع و وارون در ناحیهٔ اول کدام است؟

مشتق $f^{-۱}$ در جواب معادلهٔ $f=f^{-۱}$

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{-۱}{۵}$

مشاوره نمونهٔ خوب از یک سؤال ترکیبی مشابه کنکور! ۱) پیداکردن وارون ۲) حل معادله ۳) مشتق

درس Box

تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq ۰, c\neq ۰)$ در یک نگاه

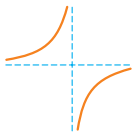
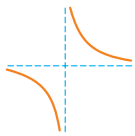
نکته

۱) $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$

۲) تابع یک مجانب قائم دارد که ریشهٔ مخرج است: $cx+d=۰ \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$

۳) تابع یک مجانب افقی دارد که نسبت ضرایب x بالا به پایین است: $y=\frac{a}{c}$

۴) نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:

شرط	نمودار	وضعیت یکنوایی	وضعیت تقعر (نقطهٔ عطف ندارد.)
$ad-bc>۰$		در هر شاخه صعودی	ابتدا رو به بالا و بعد رو به پایین
$ad-bc<۰$		در هر شاخه نزولی	ابتدا رو به پایین و بعد رو به بالا

۵) $f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ (برای وارون جای d و a را عوض کرده و آن‌ها را قرینه می‌کنیم.)

۶) اگر $c=۰$، تابع هموگرافیک نبوده و تبدیل به تابع خطی می‌شود.

۷) اگر $ad-bc=۰$ باشد، صورت و مخرج ساده شده و تابع تبدیل به تابع ثابت می‌گردد.

۸) اگر بازه شامل مجانب قائم باشد، تابع در آن بازه، غیریکنواست.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق نکتهٔ درس‌باکس داریم: $f^{-۱}(x)=\frac{-x+۸}{x-۳}$

گام دوم: محل برخورد f و $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=f^{-۱}(x) \Rightarrow \frac{-x+۸}{x-۳}=\frac{۳x+۸}{x+۱} \Rightarrow -x^۲-x+۸x+۸=۳x^۲-۹x+۸x-۲۴$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۸x-۳۲=۰ \xrightarrow{\div ۴} x^۲-۲x-۸=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=-۲ \end{cases}$$

چون محل برخورد در ناحیهٔ اول است، پس $x=۴$ قابل قبول است؛ بنابراین محل برخورد نقطهٔ $(۴,۴)$ است.

گام سوم: از $f^{-۱}$ مشتق می‌گیریم:

$$(f^{-۱})'(x)=\frac{(-۱)(-۳)-۸}{(x-۳)^۲}=\frac{-۵}{(x-۳)^۲}$$

$$(f^{-۱})'(۴)=\frac{-۵}{(۴-۳)^۲}=-۵$$

۴ استوانه‌ای درون یک کره به شعاع ۴ محاط شده است. در لحظه‌ای که ارتفاع استوانه به ۴ می‌رسد، آهنگ تغییر حجم استوانه کدام است؟

مشتق حجم

۱) ۲π

۲) ۸π

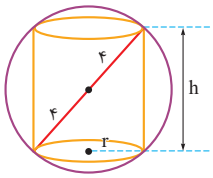
۳) ۱۲π

۴) ۴π

مشاوره کاربرد مشتق شامل موضوعات: ۱) یکنوایی تابع ۲) نقاط بحرانی ۳) نقاط اکسترمم نسبی ۴) نقاط اکسترمم مطلق ۵) بهینه‌سازی و ۶) رسم نمودار می‌شود. از این‌ها معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید. مطالب این فصل پیوستگی زیادی به یکدیگر دارند و برای حل یک تست تقریباً باید روی کل نکات مسلط باشید.

Hint یک شکل بکشید و ارتباط بین ارتفاع و شعاع قاعدهٔ استوانه را با شعاع کره به دست آورید. با جای‌گذاری از حجم استوانه مشتق بگیرید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** شکل مقابل را رسم می‌کنیم:



گام دوم: ارتباط r و h به صورت $h^۲+(۲r)^۲=۸^۲$ می‌شود، پس $h^۲+۴r^۲=۶۴$، پس:

$$r^۲=\frac{۶۴-h^۲}{۴}=۱۶-\frac{h^۲}{۴}$$

گام سوم: حجم استوانه $V=\pi r^۲h$ است که با جای‌گذاری $r^۲$ برحسب h داریم:

$$V=\pi(۱۶-\frac{h^۲}{۴})h=۱۶\pi h-\frac{\pi}{۴}h^۳$$

گام چهارم: آهنگ تغییر وقتی $h=۴$ است، همان $V'(۴)$ است؛ پس:

$$V'=۱۶\pi-\frac{۳\pi}{۴}h^۲ \xrightarrow{h=۴} V'(۴)=۱۶\pi-\frac{۳\pi}{۴}\times ۱۶=۱۶\pi-۱۲\pi=۴\pi$$

۵ تابع $f(x)=\frac{ax-۹}{x-a}$ در بازهٔ $(۱,+\infty)$ صعودی اکید است. a برابر با چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۵
۲) ۷
۳) ۳
۴) ۴

اگر گفته بود a کدام عدد صحیح می‌تواند باشد کاملاً فرق داشت.

مشاوره در بحث نمودار، نمودار تابع‌های هموگرافیک و درجه‌سوم خیلی مهم هستند. حتماً نکات آن‌ها را به یاد داشته باشید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: $x=a$ مجانب قائم تابع است، پس بازهٔ داده‌شده نباید شامل مجانب باشد (چون در این صورت تابع در این بازه غیریکنوا می‌شود)، پس $a\leq ۱$ باید باشد.

گام دوم: مشتق تابع در بازهٔ $(۱,+\infty)$ باید مثبت باشد:

$$f'(x)=\frac{-a^۲-(-۹)}{(x-a)^۲}=\frac{۹-a^۲}{(x-a)^۲}>۰ \Rightarrow ۹-a^۲>۰ \Rightarrow -۳<a<۳$$

گام سوم: با اشتراک دو محدودهٔ به‌دست‌آمده برای a داریم: $-۳<a\leq ۱$ پس a اعداد صحیح ۱و $۰,-۱,-۲$ (یعنی چهار عدد صحیح) می‌تواند باشد.

عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی

۶ مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=۳\sqrt[۳]{x^۲}-x^۲$ کدام است؟

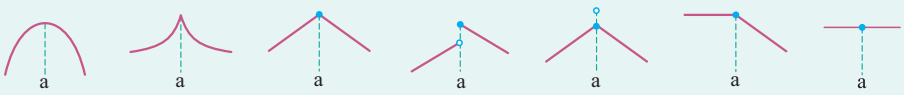
۱) $۳\sqrt[۴]{۲}$
۲) $۳\sqrt[۴]{۴}-۴$
۳) ۲
۴) صفر

مشاوره نقطهٔ اکسترمم نسبی را با مطلق قاطی نکنید! روش به دست آوردن آن‌ها شبیه هم هست، اما تفاوت‌هایی دارد.

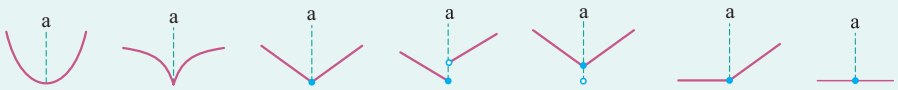
درس Box

نقاط اکسترمم نسبی

تابع f در نقطهٔ $x=a$ ماکزیمم نسبی دارد؛ هرگاه عرض آن از نقاط همسایه‌اش بیشتر (یا مساوی) باشد، مثلاً تمام نقاط $x=a$ در نمودارهای زیر ماکزیمم نسبی هستند:



تابع f در $x=a$ مینیمم نسبی دارد؛ هرگاه عرض آن از نقاط همسایه‌اش کم‌تر (یا مساوی) باشد، مثلاً تمام نقاط $x=a$ در نمودارهای زیر مینیمم نسبی هستند:



نکته

۱) اگر تابع در بازهٔ (a,b) ثابت باشد (خط افقی) تمام نقاط هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی هستند.

۲) نقاط ابتدا یا انتهای بازه یا دامنهٔ تابع، اکسترمم نسبی به حساب نمی‌آیند، چون تابع در همسایگی آن‌ها تعریف نشده است.

۳) تابع در نقاط اکسترمم نسبی ممکن است مشتق داشته باشد یا نداشته باشد، اما اگر مشتق داشته باشد، حتماً صفر است؛ پس در نقاط اکسترمم نسبی مشتق صفر است یا وجود ندارد؛ این یعنی تمام نقاط اکسترمم نسبی، بحرانی هستند.

۴) برای به دست آوردن نقاط اکسترمم نسبی در تابع‌های مشتق‌پذیر:

۱) $f'(x)$ را محاسبه کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم.

۲) ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم. (نقاط بحرانی)

۳) f' را تعیین علامت می‌کنیم. اگر در $x=a$ مشتق تغییر علامت بدهد، $x=a$ اکسترمم نسبی است و در غیر این صورت خیر.

۴) اگر f' از مثبت به منفی تغییر علامت بدهد، $x=a$ ماکزیمم نسبی و اگر f' از منفی به مثبت تغییر علامت بدهد، $x=a$ مینیمم نسبی تابع f است.

x		a	
f'	+	۰	−
f	↗	max نسبی	↘

x		a	
f'	−	۰	+
f	↘	min نسبی	↗

۵) اگر $x=a$ ریشهٔ سادهٔ f' باشد، حتماً در این نقطه تغییر علامت می‌دهد (در نتیجه a طول نقطهٔ اکسترمم نسبی f می‌شود.) ولی اگر $x=a$ ریشهٔ مضاعف f' باشد، مشتق در این نقطه تغییر علامت نداده و a نقطهٔ اکسترمم نخواهد بود.

دو ویژگی مهم نقاط اکسترمم نسبی:

اگر تابع f در نقطهٔ (α,β) مشتق‌پذیر بوده (مثل تابع‌های چندجمله‌ای و کسری و گویا و مثلثاتی) و دارای اکسترمم نسبی باشد:

۱) $f(\alpha)=\beta$ (یعنی نقطه در تابع صدق می‌کند.)
۲) $f'(\alpha)=۰$ (یعنی α ریشهٔ مشتق است.)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** $D_f=\mathbb{R}$ است. ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

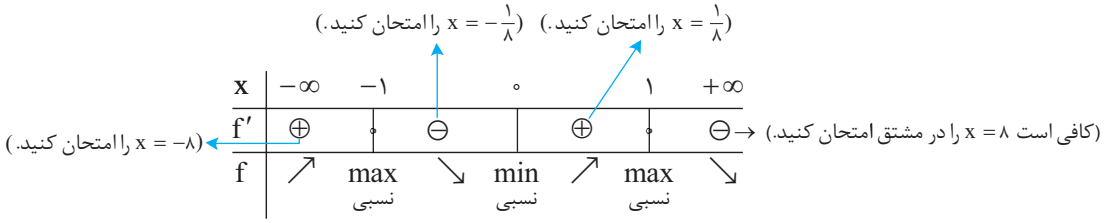
$$f(x)=۳\sqrt[۳]{x^۲}-x^۲=۳\times x^{\frac{۲}{۳}}-x^۲ \Rightarrow f'(x)=۳\times\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}-۲x=\frac{۲}{\sqrt[۳]{x}}-۲x=۰$$

در ریشه‌های صورت مشتق صفر می‌شود.

$$\Rightarrow \frac{۲-۲x\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x}}=۰ \Rightarrow ۲x\sqrt[۳]{x}=۲ \Rightarrow x\sqrt[۳]{x}=۱ \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^۳.x=۱ \Rightarrow x^۴=۱ \Rightarrow x=\pm۱$$

برای $x=۰$ مشتق نداریم.

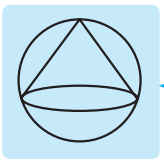
گام دوم: مشتق (یعنی $f'(x)=\frac{۲-۲x\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x}}$) را تعیین علامت می‌کنیم:



گام سوم: تابع در $x=۱$ و $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد، اما $f(۱)=۲$ و $f(-۱)=۲$.

پس مقدار ماکزیمم نسبی در هر دو نقطه برابر ۲ است.

۷ حجم بزرگ‌ترین مخروط قائم که درون کره‌ای به شعاع R محاط شده باشد، چه کسری از حجم کره است؟



۱) $\frac{۸}{۲۷}$
۲) $\frac{۴}{۹}$
۳) $\frac{۳۲}{۸۱}$
۴) $\frac{۴}{۲۷}$

مشاوره کتاب درسی حسابان درموضوع بهینه‌سازی تمرین‌های زیادی ندارد، اما در عوض کتاب ریاضی ۲ تجربی یک درس را به این موضوع اختصاص داده است. خوب است نگاهی به تمرین‌های آن کتاب داشته باشید.

درس Box

بهینه‌سازی (به دست آوردن بیشترین یا کم‌ترین مقدار یک کمیت)

۱) تابعی که قرار است ماکزیمم یا مینیمم شود را می‌نویسیم.

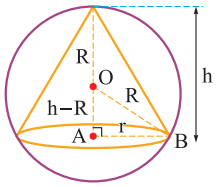
۲) تابع به دست آمده معمولاً دومتغیره است. از رابطهٔ داده‌شده در مسئله یا قضایای هندسی (مثل فیثاغورس و تالس و ...) ارتباطی بین دو متغیر پیدا می‌کنیم.

۳) یکی از متغیرها را برحسب دیگری پیدا کرده و در تابع اولیه جای‌گذاری می‌کنیم.

۴) مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم. جواب به دست آمده معمولاً عددی است که به ازای آن بیشترین (یا کم‌ترین) مقدار خواسته‌شده به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شکل مقابل را رسم می‌کنیم:



گام دوم: $V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ است. پس باید ارتباطی بین h و r پیدا کنیم تا با جای‌گذاری، تابع حجم یک‌متغیره شود.

$$\overset{\Delta}{OAB}: r^۲ + (h-R)^۲ = R^۲ \Rightarrow r^۲ + h^۲ - ۲hR + R^۲ = R^۲ \Rightarrow r^۲ = ۲hR - h^۲$$

گام سوم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi(۲hR - h^۲)h = \frac{۲\pi R}{۳}h^۲ - \frac{\pi}{۳}h^۳$$

گام چهارم: متغیر حجم برابر h است. با مشتق‌گیری داریم:

$$V' = \frac{۴\pi R}{۳}h - \pi h^۲ = ۰ \Rightarrow \frac{۴\pi R}{۳}h = \pi h^۲ \Rightarrow \frac{۴}{۳}R = h$$

گام پنجم: اگر h را برابر با $\frac{۴}{۳}R$ قرار دهیم بیشترین حجم مخروط به دست می‌آید:

$$V_{max} = \frac{۱}{۳}\pi(۲(\frac{۴}{۳}R)R - \frac{۱۶}{۹}R^۲)(\frac{۴}{۳}R) = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{۸}{۳}R^۲ - \frac{۱۶}{۹}R^۲)(\frac{۴}{۳}R) = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{۸}{۹}R^۲)(\frac{۴}{۳}R)$$

گام ششم:

$$\frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{کره}}} = \frac{\frac{\pi}{۳}(\frac{۸}{۹}\times\frac{۴}{۳}R^۳)}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳} = \frac{۱}{۳}\times\frac{۸}{۹} = \frac{۸}{۲۷}$$

حواستون باشه: در گام چهارم نشان داده‌ایم که اگر مخروطی درون کره محاط شود بیشترین حجم مخروطی وقتی به دست می‌آید که $h = \frac{۴}{۳}R$. خوب است این نکته را حفظ باشید.

۸ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}+\frac{۱}{۲x-۱}$ در بازهٔ $[۱,۴]$، چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=۱$ است؟

$f'(۱)$ ← $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

۱) $\frac{-۳}{۳۵}$ ۲) $\frac{-۳}{۷}$ ۳) $\frac{-۲}{۲۱}$ ۴) $\frac{-۲}{۶۳}$

مشاوره از بحث آهنگ تغییر معمولاً یک سؤال در کنکور مطرح می‌شود که جزء سؤال‌های سادهٔ کنکور است. از فرمول‌های آن غافل نشوید.

Hint آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$ همان $\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}$ است.

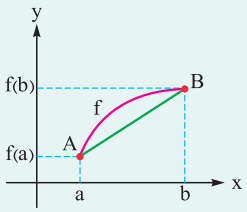
درس Box

آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$ برابر است با:

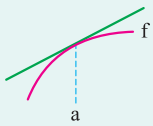
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

یعنی b و a را در تابع قرار داده تا $f(b)$ و $f(a)$ به دست آید. آهنگ متوسط همان تغییرات y به تغییرات x است.



تعبیر هندسی: شیب پاره‌خط AB = آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$

آهنگ تغییر در لحظهٔ a (یا نقطهٔ a) همان $f'(a)$ است.



تعبیر هندسی: آهنگ تغییر در نقطهٔ a همان شیب خط مماس بر تابع f در نقطه‌ای با طول a است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۱,۴]$ برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} a=۱ \Rightarrow f(a)=f(۱)=۲ \\ b=۴ \Rightarrow f(b)=f(۴)=۲+\frac{۱}{۷} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{۲+\frac{۱}{۷}-۲}{۴-۱}=\frac{\frac{۱}{۷}}{۳}=\frac{۱}{۲۱}$$

گام دوم: آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۱$ همان $f'(۱)$ است؛ پس داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\frac{-۲}{(۲x-۱)^۲} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}-۲=-\frac{۳}{۲}$$

گام سوم:

$$\frac{\text{آهنگ تغییر متوسط}}{\text{آهنگ لحظه‌ای}}=\frac{\frac{۱}{۲۱}}{-\frac{۳}{۲}}=-\frac{۲}{۶۳}$$

۹ چندجمله‌ای درجه‌دوم f در تساوی $f(x+3)-f(x-1)=3x+2$ صدق می‌کند. آهنگ تغییر لحظه‌ای f در نقطهٔ $x=7$ چه‌قدر است؟

$f'(7)$

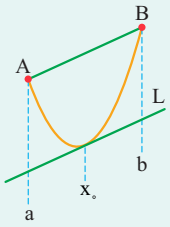
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

مشاوره یک سؤال خوب و خلاقیتی که دشوارشدهٔ یک تمرین کتاب درسی است. به نکتهٔ درس‌نامه در مورد تابع‌های درجه‌دوم حتماً توجه کنید.

Hint در تابع‌های درجه‌دوم آهنگ تغییر متوسط در یک بازه با آهنگ تغییر لحظه‌ای در وسط بازه برابر است.

درس Box

ارتباط آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای در تابع‌های درجه‌دوم



اگر f یک تابع درجه‌دوم (سهمی) باشد، آهنگ متوسط f در بازهٔ $[a,b]$ با آهنگ لحظه‌ای (مشتق) در وسط بازه برابر است؛ یعنی اگر $x_0=\frac{a+b}{2}$ باشد: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

تعبیر هندسی: شیب خط AB با شیب خط مماس L یکسان بوده و دو خط موازی‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: آهنگ تغییر در $x=7$ همان $f'(7)$ است. به دست آوردن ضابطهٔ تابع از رابطهٔ داده‌شده طولانی است، اما با توجه به درس‌باکس، آهنگ تغییر در $x=7$ با آهنگ متوسط در بازه‌هایی که $x=7$ وسط آن‌هاست (مثل بازهٔ $[۶,۸]$ یا $[۵,۹]$ یا ...) یکسان است.

گام دوم: اگر در رابطهٔ $f(x+3)-f(x-1)=3x+2$، $x=6$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود: $f(9)-f(5)=20$

گام سوم: آهنگ تغییر متوسط در بازه‌ای به صورت $[۵,۹]$ با $f'(7)$ برابر است؛ پس داریم:

$$f'(7)=\frac{f(9)-f(5)}{9-5}=\frac{20}{4}=5$$

۱۰ مجموع ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^3-12x-11$ در بازهٔ $[-1,4]$ چه‌قدر است؟

عرض بالاترین و پایین‌ترین نقطهٔ نمودار

۱) -27 ۲) -22 ۳) -18 ۴) -12

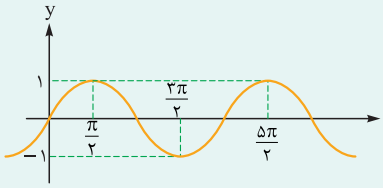
مشاوره سؤال ساده، مشابه تمرین‌های کتاب درسی و سؤال‌های نهایی. به روش تعیین اکسترمم‌های مطلق و نسبی مسلط باشید.

Hint $f'(x)=0$ و عرض نقاط بحرانی را به دست آورید.

درس Box

ماکزیمم یا مینیمم مطلق (اکسترمم مطلق) تابع f

به نقطه یا نقاطی که بالاتر (پایین‌تر) از بقیهٔ نقاط تابع در بازهٔ $[a,b]$ (یا دامنهٔ f) قرار دارند؛ ماکزیمم مطلق (مینیمم مطلق) تابع f در بازهٔ مورد نظر می‌گوییم. مثلاً در تابع $y=\sin x$ با نمودار مقابل، نقاط $(\frac{\pi}{2},1)$ و $(\frac{5\pi}{2},1)$ ماکزیمم مطلق و نقطهٔ $(\frac{3\pi}{2},-1)$ مینیمم مطلق تابع هستند (البته دقت دارید که نقطهٔ اکسترمم مطلق، منحصر به فرد نیست).



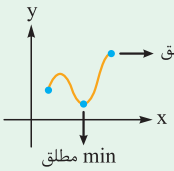
نکته

۱) اگر نقطه‌ای ماکزیمم یا مینیمم مطلق باشد به آن اکسترمم مطلق می‌گوییم.

۲) به عرض نقطهٔ اکسترمم مطلق، مقدار اکسترمم مطلق می‌گوییم، مثلاً در تابع $y=\sin x$، مقدار ماکزیمم مطلق برابر ۱ و مقدار مینیمم مطلق برابر -1 است. (اگر تابع ماکزیمم مطلق داشته باشد مقدار آن منحصربه‌فرد است یا مقدار مینیمم مطلق در صورت وجود منحصربه‌فرداست)

۳) نقاط ابتدا یا انتهای دامنه می‌توانند اکسترمم مطلق باشند یا نباشند.

۴) اگر f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد؛ حتماً ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد. برای به دست آوردن این نقاط:



الف) نقاط بحرانی f در بازه را به دست می‌آوریم (نقاطی که $f'(x)=0$ یا $f'(x)$ وجود ندارد). دقت کنید که نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ $[a,b]$ نیز بحرانی هستند، چون مشتق در این نقاط وجود ندارد.

ب) تمام نقاط را در تابع قرار داده و y نقاط را به دست می‌آوریم.

ج) نقطه‌ای که بزرگ‌ترین y را دارد، ماکزیمم مطلق و نقطه‌ای که کوچک‌ترین y را دارد، مینیمم مطلق است.

۵) اگر نمودار تابع f معروف باشد، به جای استفاده از مشتق می‌توانیم نمودار را رسم کنیم و اکسترمم‌های مطلق آن را به دست آوریم. (به‌خصوص در تابع‌های براکتی این روش بسیار مناسب‌تر از مشتق است.)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نقاط بحرانی تابع را در بازهٔ $[-1,4]$ به دست می‌آوریم. تابع نقطهٔ مشتق‌ناپذیر ندارد؛ پس کافی است جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ را به دست آوریم:

$$f(x)=x^3-12x-11$$

$$f'(x)=3x^2-12=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \quad (\text{در بازه نیست.}) \end{cases}$$

گام دوم: نقاط بحرانی در بازهٔ $[-1,4]$ به صورت $x=-1$، $x=2$ و $x=4$ هستند که باید با قراردادن آن‌ها در تابع $f(x)$، عرض آن نقاط را به دست آوریم:

$$x=-1 \Rightarrow f(-1)=(-1)^3+12-11=0$$

$$x=2 \Rightarrow f(2)=8-24-11=-27 \Rightarrow (2,-27)=\text{نقطهٔ مینیمم مطلق}$$

$$x=4 \Rightarrow f(4)=64-48-11=5 \Rightarrow (4,5)=\text{نقطهٔ ماکزیمم مطلق}$$

مقدار ماکزیمم مطلق برابر ۵ و مقدار مینیمم مطلق برابر -27 است که مجموع آن‌ها برابر -22 می‌شود.

۱۱ نقطه‌ای با کدام طول برای تابع $f(x)=\cos^{۲}x+\sin x$ یک نقطهٔ بحرانی است، ولی یک نقطهٔ اکسترمم مطلق نیست؟

ماکزیمم یا مینیمم

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

مشاوره سؤال بسیارمهمی است. دقت کنید که نقاط بحرانی ممکن است، اکسترمم مطلق نباشند.

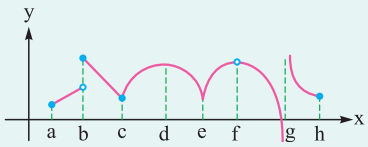
Hint نقاط بحرانی، ریشه‌های مشتق هستند.

درس Box

نقاط بحرانی تابع f

نقاطی از دامنهٔ تابع که $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ وجود ندارد را نقاط بحرانی تابع f می‌گوییم. (دقت دارید اگر c عضو دامنهٔ تابع نباشد، بحرانی به حساب نمی‌آید.)

مثلاً در تابع مقابل داریم:



۱) تابع در نقاط a، b و h ناپیوسته است؛ پس مشتق هم ندارد و این نقاط بحرانی هستند.

۲) تابع در نقطهٔ c مشتق ندارد (مشتق چپ و راست نابرابر است)؛ پس c هم بحرانی است.

۳) $f'(d)=۰$ (مماس افقی)؛ پس d بحرانی است.

۴) $f'(e)=\infty$؛ پس e هم بحرانی است.

۵) تابع در f تعریف‌نشده است؛ پس f نقطهٔ بحرانی نیست.

۶) تابع در g تعریف‌نشده است؛ پس g نقطهٔ بحرانی نیست.

نکته برای به دست آوردن نقاط بحرانی تابع‌های چندجمله‌ای، گویا و مثلثاتی (سینوسی و کسینوسی) کافی است از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: دورهٔ تناوب تابع $T=۲\pi$ است؛ پس نمودار تابع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، در بقیهٔ دامنه نیز تکرار می‌شود، یعنی کافی است نقاط بحرانی و اکسترمم‌های مطلق را در این بازه بررسی کنیم.

گام دوم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow -۲\cos x\sin x+\cos x=۰ \Rightarrow \cos x(-۲\sin x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\cos x=۰ \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\\ -۲\sin x+۱=۰ \Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

گام سوم: عرض نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم.

$f(\frac{۳\pi}{۲})=۰-۱=-۱$ مینیمم مطلق ، $f(\frac{\pi}{۲})=۰+۱=۱$ ، $f(۰)=۱+۰=۱$

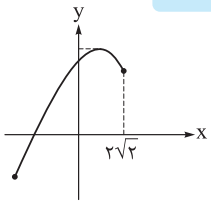
$f(\frac{۵\pi}{۶})=(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۴}$ ماکزیمم مطلق ، $f(\frac{\pi}{۶})=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۴}$ ماکزیمم مطلق

$f(۲\pi)=۱+۰=۱$

گام چهارم: در بین گزینه‌ها نقطه‌ای با طول $x=\frac{\pi}{۲}$ بحرانی است؛ ولی اکسترمم مطلق نیست.

۱۲ نمودار تابع $f(x)=x+\sqrt{a-x^2}$ مطابق شکل است. مقدار ماکزیمم تابع f، چند برابر a است؟

عرض بالاترین نقطه



۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\sqrt{2}$

۴) ۲

مشاوره مشابه این سؤال بارها و بارها در کنکور مطرح شده است. از مبحث مشتق معمولاً ۴ سؤال در کنکور مطرح می‌شود که دو تا از آن‌ها مربوط به کاربرد مشتق می‌شود.

Hint با توجه به دامنه، a را به دست آورید.

درس Box

نقاط بحرانی تابع $y=\sqrt{f(x)}$

۱) ابتدا دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم. اگر دامنه به صورت $[a,b]$ باشد، ابتدا و انتهای دامنه نقاط بحرانی هستند.

۲) مشتق می‌گیریم، یعنی: $y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

۳) نقاطی که $f'(x)=0$ (مشتق صفر) یا $f(x)=0$ (مشتق وجود ندارد) به شرطی که عضو دامنه باشند، همگی بحرانی هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: انتهای دامنهٔ تابع $x=2\sqrt{2}$ است که باید زیر رادیکال را صفر کند ($2\sqrt{2}$ لب مرز دامنه است):

$$a-(2\sqrt{2})^2=0 \Rightarrow a=8$$

به عبارت دیگر $a=8$ بوده است که دامنهٔ $\sqrt{8-x^2}$ به صورت زیر می‌شود:

$$8-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 8 \Rightarrow -2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}$$

گام دوم: اکسترمم‌های مطلق تابع را در دامنه یعنی بازهٔ $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$ به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1+\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}=0 \Rightarrow 1=\frac{x}{\sqrt{8-x^2}} \Rightarrow \sqrt{8-x^2}=x \xrightarrow{x\geq 0} 8-x^2=x^2$$

$$\Rightarrow 8=2x^2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=+2$$

نقاط بحرانی تابع $x=+2$ و $x=\pm 2\sqrt{2}$ (نقاط مشتق‌ناپذیر) است، اما با توجه به نمودار واضح است که ماکزیمم مطلق به ازای $x=2$ رخ می‌دهد:

مقدار ماکزیمم مطلق $=f(2)=2+\sqrt{8-4}=4$

گام سوم:

$$\frac{\text{مقدار ماکزیمم مطلق}}{a}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

صعودی یا نزولی بودن

۱۳ یکنوایی تابع $y=\frac{x|x|}{x+2}$ در بازهٔ $(-\infty,-2)$ چگونه است؟

۱) صعودی
۲) نزولی
۳) ابتدا صعودی سپس نزولی
۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

مشاوره در توابع شامل قدرمطلق برای ساده‌سازی سؤال، اول قدرمطلق را حذف کنید.

Hint از تابع $y=\frac{-x^2}{x+2}$ مشتق بگیرید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: $x<-2$ باید باشد؛ پس $|x|=-x$.

گام دوم: یکنوایی تابع $y=\frac{-x^2}{x+2}$ را با مشتق بررسی می‌کنیم. برای این کار باید مشتق را تعیین علامت کنیم: (دقت کنید که چون تابع در $x=-2$ تعریف نشده است مشتق هم ندارد.)

$$y'=\frac{-2x(x+2)-(-x^2)}{(x+2)^2}=\frac{-x^2-4x}{(x+2)^2}=0 \Rightarrow -x^2-4x=0$$

$$\Rightarrow x^2+4x=0 \Rightarrow x(x+4)=0 \Rightarrow x=0, x=-4$$

x	$-\infty$		-4		-2		0
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0
y		↘		↗	‖	↗	

گام سوم: تابع در بازهٔ $(-\infty,-4)$ نزولی و در بازهٔ $(-4,-2)$ صعودی است.

۱۴ اگر $A=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۶+۴\sqrt{۳}}$، مقدار $(۲A+۱)^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۸

مشاوره گویاکردن مخرج کسرها به صورت غیرمستقیم در برخی از سؤال‌های کنکور ظاهر می‌شود. حتماً روی آن کار کنید.

Hint صورت و مخرج کسرها را در مزدوج مخرج ضرب کنید.

درس Box

گویاکردن مخرج کسر

هدف از گویاکردن مخرج کسر، این است که در مخرج، عبارت‌های رادیکالی نداشته باشیم. برای این کار با ضرب صورت و مخرج کسر *(برای این‌که کسر اصلی عوض نشه)* در عبارت‌های مناسب، رادیکال‌های مخرج را از بین می‌بریم. با توجه به این‌که مخرج به چه صورتی باشد، دسته‌بندی زیر را برای گویاکردن در نظر می‌گیریم:

۱) اگر مخرج به شکل $\sqrt[n]{a^k}\ (۰<k<n)$ باشد، با ضرب صورت و مخرج در $\sqrt[n]{a^{n-k}}$، توان a با فرجه برابر می‌شود و رادیکال از بین می‌رود.

مثلاً می‌خواهیم مخرج کسر $\frac{۲}{\sqrt[۵]{x^۳}}$ را گویا کنیم:

$$\frac{۲}{\sqrt[۵]{x^۳}}\times\frac{\sqrt[۵]{x^۲}}{\sqrt[۵]{x^۲}}=\frac{۲\sqrt[۵]{x^۲}}{\sqrt[۵]{x^۵}}=\frac{۲\sqrt[۵]{x^۲}}{x}$$

۲) اگر مخرج به صورت $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ یا $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ باشد، برای گویاکردن، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

مثلاً برای گویاکردن عبارت $\frac{a}{\sqrt{a}+۲\sqrt{b}}$ داریم:

$$\frac{a}{\sqrt{a}+۲\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}-۲\sqrt{b}}{\sqrt{a}-۲\sqrt{b}}=\frac{a(\sqrt{a}-۲\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^۲-(۲\sqrt{b})^۲}=\frac{a(\sqrt{a}-۲\sqrt{b})}{a-۴b}$$

۳) اگر مخرج به صورت $\sqrt[۳]{a}\pm\sqrt[۳]{b}$ یا $\sqrt[۳]{a^۲}\pm\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}$ باشد، صورت و مخرج را در قسمت چاق یا لاغر اتحاد چاق و لاغر ضرب می‌کنیم.

مثلاً برای گویاکردن مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}+۱}$ داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱}{(\sqrt[۳]{x})^۳+۱}=\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱}{x+۱}$$

(دقت!)

۴) اگر مخرج کسر، ترکیبی از موارد بالا باشد، نیاز است که از هر دو روش استفاده کرده یا از یک روش چند بار استفاده کنیم.

مثلاً برای گویاکردن مخرج کسر $\frac{۱}{(۱-\sqrt{۲})(\sqrt[۳]{۲}-۱)}$ داریم:

$$\frac{۱}{\underbrace{(۱-\sqrt{۲})}_{\text{مزدوج}}\underbrace{(\sqrt[۳]{۲}-۱)}_{\text{چاق و لاغر}}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲^۲}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{\sqrt[۳]{۲^۲}+\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{(۱+\sqrt{۲})(\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱)}{(۱-۲)(۲-۱)}=-(۱+\sqrt{۲})(\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مخرج هر کدام از کسرها را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}}\times\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}{(۲\sqrt{۳})^۲-(۳\sqrt{۲})^۲}=\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}{۱۲-۱۸}=\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}{-۶}=\frac{۲\sqrt{۳}}{-۶}+\frac{۳\sqrt{۲}}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{۱}{۶+۴\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳+۲\sqrt{۳}}\times\frac{۳-۲\sqrt{۳}}{۳-۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳-۲\sqrt{۳}}{۹-۱۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳-۲\sqrt{۳}}{-۳}=\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{-۳}+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳})=\frac{۱}{۲}(-۱+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳})=-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

گام دوم:

$$A=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$$

گام سوم: مقدار $(۲A+۱)^۲$ را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که $۲A=\sqrt{۲}-۱$؛ پس:

$$(۲A+۱)^۲=(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲=۲$$

۱۵ اگر $a=(\sqrt{۶}-۱)^۲$، مقدار $A=\sqrt{\frac{a+۲}{۲۵}+\frac{۱}{a}}$ کدام است؟

۱) ۰/۸
۲) ۰/۴
۳) ۰/۳۶
۴) ۰/۶

مشاوره اگر در محاسبات مورد نیاز سؤال‌های کنکور (جمع و تفریق عبارت‌ها و کسرها، توان، رادیکال و اتحاد) با اشکالات اساسی مواجه هستید، یک برنامهٔ ویژه برای برطرف‌کردن این مشکل داشته باشید.

Hint حاصل a را به دست آورده و جای‌گذاری کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** حاصل a را محاسبه کنیم:

$$a=(\sqrt{۶}-۱)^۲=\sqrt{۶}^۲-۲\sqrt{۶}+۱^۲=۷-۲\sqrt{۶}$$

گام دوم:

$$a+۲=۹-۲\sqrt{۶}\ ,\ \frac{۱}{a}=\frac{۱}{۷-۲\sqrt{۶}}\times\frac{۷+۲\sqrt{۶}}{۷+۲\sqrt{۶}}=\frac{۷+۲\sqrt{۶}}{۴۹-(۲\sqrt{۶})^۲}=\frac{۷+۲\sqrt{۶}}{۴۹-۲۴}=\frac{۷+۲\sqrt{۶}}{۲۵}$$

گام سوم: A را محاسبه می‌کنیم:

$$A=\sqrt{\frac{a+۲}{۲۵}+\frac{۱}{a}}=\sqrt{\frac{۹-۲\sqrt{۶}}{۲۵}+\frac{۷+۲\sqrt{۶}}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

۱۶ به ازای کدام عدد طبیعی n، تساوی $2\sqrt{2}-\frac{n\sqrt{2}-27}{n+6\sqrt{2}+1}=3$ برقرار است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۶
۳) ۱۵
۴) ۱۷

مشاوره برای رسیدن به درصدهای بالای ریاضی در کنکور، اولین قدم تسلط روی مفاهیم پایه مثل اتحاد و تجزیه، اعمال روی کسرها و رادیکال‌ها، توان است. بیشتر سؤال‌های کنکور با این مباحث ترکیب می‌شوند. بنابراین بدون تسلط کافی روی این مباحث امکان پرداختن به سایر موضوعات وجود ندارد.

Hint مخرج‌مشترک بگیرید. رادیکال‌های متشابه با هم جمع و تفریق می‌شوند.

درس Box

قواعد رادیکال‌ها

قاعده	توضیح فارسی	مثال
$\sqrt{x}=a \Rightarrow x,a\geq 0$	هم زیر رادیکال و هم حاصل رادیکال با فرجهٔ زوج نمی‌تواند منفی باشد.	$\sqrt{9}=3$ نه این‌که $\sqrt{9}=\pm 3$
$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$	توان دو با رادیکال ساده شده و با قدرمطلق آزاد می‌شود.	$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=\lvert \underbrace{1-\sqrt{2}}_{<0}\rvert=\sqrt{2}-1$
$\sqrt{x}^2=x$	x اصلاً نمی‌تواند منفی باشد، پس ۲ با رادیکال ساده می‌شود.	$\sqrt{x+1}^2=x+1(x\geq -1)$
$\sqrt{x^2+y^2}\neq\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$	رادیکال روی جمع و تفریق پخش نمی‌شود.	$\sqrt{x\pm y}\neq\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$
$\sqrt{63}=\sqrt{9\times 7}=3\sqrt{7}$	مربع‌های کامل از زیر رادیکال بیرون می‌آیند.	$\sqrt{a^2x}=\lvert a\rvert\sqrt{x}$
$\sqrt{\frac{x}{2}}\times\sqrt{\frac{3}{x}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\quad(x>0)$	در ضرب و تقسیم رادیکال‌های هم‌فرجه می‌توانیم آن‌ها را به زیر یک رادیکال ببریم.	$\sqrt{x}\times\sqrt{y}=\sqrt{xy}$ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}$ $(x,y>0)$
$3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(3-4)\sqrt{2}=-\sqrt{2}$	دو رادیکال متشابه با هم جمع و تفریق می‌شوند.	$a\sqrt{x}$ و $b\sqrt{x}$ دو رادیکال متشابه

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مخرج‌مشترک (همان $n+6\sqrt{2}+1$) می‌گیریم و برابر با ۳ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2\sqrt{2}}{1}-\frac{n\sqrt{2}-27}{n+6\sqrt{2}+1}=\frac{(2\sqrt{2})(n+6\sqrt{2}+1)-(n\sqrt{2}-27)}{n+6\sqrt{2}+1}=\frac{2n\sqrt{2}+24+2\sqrt{2}-n\sqrt{2}+27}{n+6\sqrt{2}+1}=\frac{(n+2)\sqrt{2}+51}{6\sqrt{2}+n+1}=3$$

گام دوم: طرفین ـ وسطین می‌کنیم:

$$(n+2)\sqrt{2}+51=18\sqrt{2}+3(n+1)$$

گام سوم: این تساوی فقط وقتی برقرار است که $n+2=18$ و $51=3(n+1)$.

از هر دو تساوی $n=16$ به دست می‌آید، پس $n=16$ باید باشد.

حواستون باشه: در به دست آوردن حاصل $-\frac{x+y}{a}$، منفی هم برای x و هم برای y می‌آید، چون:

$$-\frac{x+y}{a}=\frac{-(x+y)}{a}=\frac{-x-y}{a}$$

۱۷ یکی از عوامل تجزیهٔ عبارت $(x^۲-ax-۴)^۲-۶۴$ برابر $x+۲$ است. کدام عبارت الزاماً از عامل‌های دیگر آن است؟

۱) $x-۲$ ۲) $x+۶$ ۳) $x-۶$ ۴) $x+۴$

اگر عبارت را تجزیه کنیم $(x+۲)$ دیده می‌شود.

مشاوره هرچند احتمال طرح چنین سؤالی در کنکور کم است، اما برای ساده‌سازی تابع‌ها یا رفع ابهام نیاز به تجزیهٔ عبارت‌ها دارید.

Hint از اتحاد مزدوج استفاده کنید یا این‌که از بحث به دست آوردن باقی‌مانده بدون انجام عمل تقسیم بهره ببرید.

درس Box

به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$

۱) ریشهٔ مقسوم‌علیه را به دست می‌آوریم:

$$ax+b=۰ \Rightarrow x=\frac{-b}{a}$$

۲) ریشه را در f قرار می‌دهیم تا باقی‌مانده که یک عدد است به دست آید؛ پس $R=f(-\frac{b}{a})$.

نکته اگر $R=۰$ باشد، چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر است.

یادآوری اتحادها:

۱) اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای: $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$

۲) اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای: $(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$

۳) اتحاد مزدوج: $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

۴) اتحاد یک جمله‌مشترک: $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

۵) اتحاد مکعب مجموع: $(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳$

$$(\text{اولی}+\text{دومی})^۳=(\text{اولی})^۳+۳(\text{اولی})^۲(\text{دومی})+۳(\text{اولی})(\text{دومی})^۲+(\text{دومی})^۳$$

در صورتی که در دو طرف این اتحاد، b را به $-b$ تبدیل کنیم، همان جمله‌های اتحاد مکعب مجموع، یکی در میان مثبت و منفی می‌شوند. بنابراین:

۶) اتحاد مکعب تفاضل: $(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$

دو اتحاد دیگر، مجموع مکعبات (و تفاضل مکعبات) یا چاق و لاغر هم است. توجه دارید که علامت حاصل با علامت قسمت لاغر، یکسان و با علامت ab متفاوت است.

۷) اتحاد چاق و لاغر:

$$\text{مکعب دومی}+\text{مکعب اولی}=(\text{مربع دومی}+\text{ضرب دوتا}-\text{مربع اولی})(\text{دومی}+\text{اولی})$$

$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳$$

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳$$

روش‌های تجزیه

شبیه تجزیهٔ اعداد، اگر عبارت‌های جبری را به صورت ضرب عبارت‌ها با درجهٔ کوچک‌تر دربیاوریم، آن‌ها را تجزیه کرده‌ایم.

۱) استفاده از اتحادها

در به دست آوردن حاصل عبارت‌ها با استفاده از اتحادها، معمولاً از سمت چپ اتحاد، به سمت راست می‌رویم، اما در تجزیه، معمولاً از سمت راست به چپ حرکت می‌کنیم.

۲) دسته‌بندی

برای تجزیهٔ برخی از عبارت‌های جبری نمی‌توانیم به صورت مستقیم از اتحادها استفاده کنیم. یکی از راه‌های تجزیهٔ این عبارت‌ها، این است که جمله‌های عبارت‌های جبری را به گونه‌ای با هم دسته‌بندی کنیم که بعد از فاکتورگیری، دارای عامل مشترک باشند؛ مثلاً:

$$x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^2+1)$$

۳) شکستن جملات

برخی از عبارت‌های جبری ممکن است با دسته‌بندی اولیه نیز تجزیه نشوند. در این مواقع ممکن است با نوشتن یک جمله، به صورت جمع چند جمله، بتوانیم آن‌ها را با هم دسته‌بندی کنیم؛ مثلاً می‌خواهیم x^3-3x+2 را تجزیه کنیم. در مرحلهٔ اول نمی‌توانیم دسته‌بندی کنیم، اما اگر $-3x=-2x-x$ بنویسیم، داریم:

$$x^3-3x+2=x^3-x-2x+2=x(x^2-1)-2(x-1)=x(x-1)(x+1)-2(x-1)=(x-1)(\overbrace{x(x+1)}^{x^2+x}-2)$$

$$=(x-1)(x+2)(x-1)=(x+2)(x-1)^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ روش اول: **گام اول**: چندجمله‌ای $P(x)=(x^2-ax-4)^2-64$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است؛ پس به ازای ریشهٔ مقسوم‌علیه (یعنی $x=-2$) صفر می‌شود:

$$((-2)^2-a(-2)-4)^2-64=0 \Rightarrow (2a)^2=64 \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=\pm4$$

پس چندجمله‌ای به صورت $(x^2\pm4x-4)^2-64$ است.

گام دوم: ریشهٔ گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2^2\pm4(2)-4)^2-64=0 \Rightarrow$ $P(x)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است.

به ازای سایر گزینه‌ها، باقی‌مانده برابر صفر نمی‌شود؛ مثلاً در گزینهٔ (۲) داریم:

$$x+6=0 \Rightarrow x=-6 \Rightarrow ((-6)^2\pm4(6)-4)^2-64=(32\pm4(6))^2-64\neq0$$

روش دوم: $P(x)$ را با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد یک جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم:

گام اول:

$$a=4 \Rightarrow (x^2-4x-4)^2-64=(x^2-4x-4)^2-8^2=(x^2-4x-4-8)(x^2-4x-4+8)$$

$$=\underbrace{(x^2-4x-12)}_{\text{دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها ۴- و ضرب آن ۱۲- باشد.}}(x^2-4x+4)=(x-6)(x+2)(x-2)^2$$

گام دوم:

$$a=-4 \Rightarrow (x^2+4x-4)^2-64=(x^2+4x-4-8)(x^2+4x-4+8)=\underbrace{(x^2+4x-12)}_{\text{دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها ۴+ و ضرب آن ۱۲- باشد.}}(x^2+4x+4)$$

$$=(x+6)(x-2)(x+2)^2$$

در هر دو حالت، $P(x)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است.

۱۸ حاصل $A=\frac{\sqrt{۲۰}}{۱۰-۲\sqrt{۵}}\times(\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}-\sqrt{\sqrt{۱۲}+۴})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$

۳) $-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

مشاوره سؤال مهمی است که مشابه آن بارها در کنکور آمده است. یکی از مفاهیم پایه، رادیکال و اعمال روی آن‌ها است که علاوه بر سؤال مستقیم در بسیاری از سؤال‌ها به صورت غیرمستقیم هم حضور دارد.

Hint $\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}-\sqrt{\sqrt{۱۲}+۴}$ را برابر با B قرار داده و به توان ۲ برسانید.

درس Box

ساده‌کردن رادیکال‌های مرکب $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

۱) سعی می‌کنیم زیر رادیکال را مربع کامل کنیم یعنی دو عدد a و b را طوری پیدا کنیم که:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{(a\pm b)^۲}=|a\pm b|$$

$a^۲+b^۲$ $\quad$ $۲ab$

مثلاً برای ساده‌کردن $\sqrt{۸-۲\sqrt{۷}}$ دو عدد طوری پیدا می‌کنیم که $۲ab=۲\sqrt{۷}$ و $a^۲+b^۲=۸$ باشد، این دو عدد $a=\sqrt{۷}$ و $b=۱$ است. داریم:

$$(\sqrt{۷}-۱)^۲=۷+۱-۲\sqrt{۷}=۸-۲\sqrt{۷}\Rightarrow\sqrt{۸-۲\sqrt{۷}}=\sqrt{(\sqrt{۷}-۱)^۲}=|\underbrace{\sqrt{۷}-۱}_{\oplus}|=\sqrt{۷}-۱$$

۲) ابتدا $C=\sqrt{A^۲-B}$ را به دست می‌آوریم و سپس از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

مثلاً برای ساده‌کردن $\sqrt{۹-\sqrt{۳۲}}$ داریم:

$$A=۹,B=۳۲\Rightarrow C=\sqrt{۹^۲-۳۲}=\sqrt{۴۹}=۷$$

$$\sqrt{۹-\sqrt{۳۲}}=\sqrt{\frac{۹+۷}{۲}}-\sqrt{\frac{۹-۷}{۲}}=\sqrt{۸}-۱=۲\sqrt{۲}-۱$$

نکته برای ساده‌کردن عبارت‌هایی به صورت $\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}$ می‌توانیم دو رادیکال مرکب را از روش‌های بالا ساده کنیم یا این‌که کل عبارت را برابر با مقداری فرض کرده و دو طرف را به توان دو برسانیم. (مثل این سؤال)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: B را برابر با عبارت داخل پرانتز گرفته و دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$B=\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}-\sqrt{۴+\sqrt{۱۲}}\Rightarrow B^۲=۴-\sqrt{۱۲}+۴+\sqrt{۱۲}-۲\sqrt{(۴-\sqrt{۱۲})(۴+\sqrt{۱۲})}$$

$$=۸-۲\sqrt{۱۶-۱۲}=۸-۴=۴$$

$$B^۲=۴\Rightarrow B=\pm۲$$

گام دوم: $\sqrt{۱۲}+۴>۴-\sqrt{۱۲}$؛ پس B عددی منفی بوده و $B=-۲$ قابل قبول است.

گام سوم: می‌توانیم مخرج عبارت $\frac{\sqrt{۲۰}}{۱۰-۲\sqrt{۵}}$ را گویا کنیم، اما بهتر است ابتدا آن را ساده کنیم و بعد گویا کنیم. اگر $۲\sqrt{۵}\sqrt{۵}=۱۰$

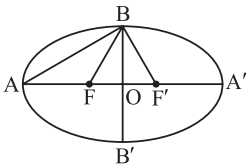
بنویسیم، داریم:

$$\frac{\sqrt{۲۰}}{۱۰-۲\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}(\sqrt{۵}-۱)}=\frac{۱}{\sqrt{۵}-۱}\times\frac{\sqrt{۵}+۱}{\sqrt{۵}+۱}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۵-۱}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$$

گام چهارم:

$$A=-۲\times\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}=-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

۱۹ مطابق شکل، F و F' کانون‌های بیضی و BB' قطر کوچک آن است. اگر مساحت مثلث ABO چهار برابر مساحت مثلث BFF' باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۸}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$

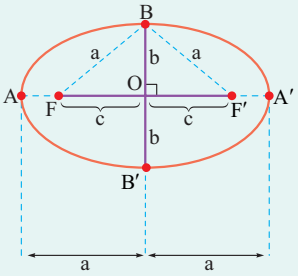
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

مشاوره سؤالی ساده که مشابه یکی از سؤال‌های امتحان‌های نهایی سال‌های گذشته است.

Hint AA' و BB' بر هم عمودند، مساحت مثلث‌ها را بر حسب a، b و c بنویسید.

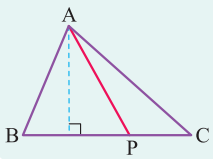
درس Box

۱) در شکل رسم‌شده، F و F' کانون‌های بیضی و O مرکز آن است. نقاط A و A' رأس‌های کانونی و B و B' رأس‌های غیرکانونی نامیده می‌شوند. AA' بلندترین و BB' کوتاه‌ترین قطر بیضی است و طول پاره‌خط‌ها برحسب پارامترهای a، b و c مشخص شده‌اند. هم‌چنین توجه داشته باشید که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BOF می‌توان نتیجه گرفت: $a^۲ = b^۲ + c^۲$.



۲) میزان کشیدگی یا بازشدگی بیضی با پارامتری به نام خروج از مرکز (e) سنجیده می‌شود و بنا به تعریف داریم $e = \frac{c}{a}$، خروج از مرکز بیضی همیشه عددی بین صفر و یک است.

۳) اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع مشترک باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع مشترک.



$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{BP}{CP}, \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}} = \frac{BP}{BC}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

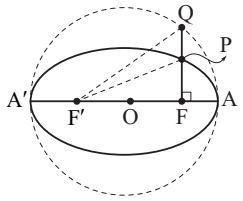
گام اول (محاسبهٔ $\frac{OA}{FF'}$): اگر مساحت $\triangle ABO$ ۴ برابر $\triangle BFF'$ باشد، چون هر دوی آن‌ها ارتفاع مشترک BO را دارند، آن‌گاه نسبت قاعده‌های آن‌ها، یعنی $\frac{OA}{FF'}$ نیز ۴ است. یا به عبارتی:

$$S_{ABO} = ۴S_{BFF'} \Rightarrow \frac{۱}{۲}BO \cdot OA = ۴(\frac{۱}{۲}BO \cdot FF') \Rightarrow OA = ۴FF'$$

گام دوم (محاسبهٔ خروج از مرکز بیضی): OA همان a یا نصف قطر بزرگ بیضی و FF' فاصلهٔ کانونی بیضی یا همان $۲c$ است، پس داریم:

$$OA = ۴FF' \Rightarrow a = ۴(۲c) \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۸}$$

۲۰ بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' مطابق شکل زیر مفروض است. از نقطهٔ F عمودی به AA' رسم می‌کنیم تا بیضی و دایره به قطر AA' را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کند. اگر فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A یکسان و مساحت مثلث PQF' برابر $۴/۵$ باشد، حاصل $AF \times A'F'$ کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}+۶$

۲) $۳\sqrt{۳}+۶$

۳) $۶\sqrt{۳}+۹$

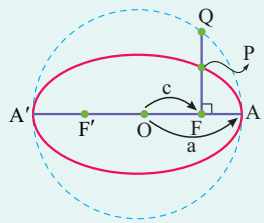
۴) $۶\sqrt{۲}+۹$

مشاوره با سؤال دشواری مواجهیم که برای حل آن، باید نکته‌ای را که در درس‌باکس گفته‌ایم، بلد باشید.

درس Box

نکته

مطابق شکل مقابل، اگر از یکی از کانون‌های بیضی، عمودی بر قطر AA' رسم کنیم تا بیضی و دایرهٔ به قطر AA' را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کند، داریم:



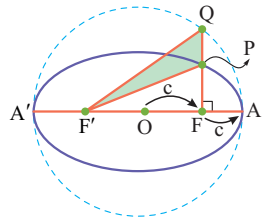
$$\boxed{PF=\frac{b^۲}{a}},\ \boxed{QF=b}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ b بر حسب c):

چون فاصلهٔ F از نقاط O و A یکسان است، پس $OF=FA=c$ است و در نتیجه $a=c+c=۲c$،

بنابراین:



$$a^۲=b^۲+c^۲ \xrightarrow{a=۲c} ۴c^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow b^۲=۳c^۲ \Rightarrow b=c\sqrt{۳}$$

گام دوم (محاسبهٔ PQ بر حسب c): با استفاده از درس‌باکس، PF و QF را به دست می‌آوریم و آن‌ها را از یکدیگر کم می‌کنیم تا PQ به دست آید.

$$\begin{cases} PF=\frac{b^۲}{a}=\frac{(c\sqrt{۳})^۲}{۲c}=\frac{۳}{۲}c \\ QF=b=c\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow PQ=QF-PF \Rightarrow PQ=c\sqrt{۳}-\frac{۳}{۲}c=\frac{۱}{۲}c(۲\sqrt{۳}-۳)$$

گام سوم (محاسبهٔ $c^۲$): مساحت مثلث PQF' برابر با $۴/۵$ است، پس:

$$S_{PQF'}=۴/۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲}FF'\times PQ=۴/۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۲c)\times(\frac{۱}{۲}c(۲\sqrt{۳}-۳))=۴/۵ \Rightarrow c^۲(۲\sqrt{۳}-۳)=۹$$

$$\Rightarrow c^۲=\frac{۹}{۲\sqrt{۳}-۳}$$

عبارت به‌دست‌آمده را گویا می‌کنیم:

$$c^۲=\frac{۹}{۲\sqrt{۳}-۳}\times\frac{۲\sqrt{۳}+۳}{۲\sqrt{۳}+۳} \Rightarrow c^۲=\frac{۹(۲\sqrt{۳}+۳)}{۳}=۳(۲\sqrt{۳}+۳)$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): از طرفی دیگر $AF=A'F'=c$ است، بنابراین:

$$AF\times A'F'=c\times c=c^۲ \Rightarrow AF\times A'F'=۳(۲\sqrt{۳}+۳)=۶\sqrt{۳}+۹$$

۲۱ نقطهٔ $(۴,۰)$ کانون و محور yها خط هادی یک سهمی است. این سهمی خط $y=۲$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $۲\frac{۱}{۸}$ ۲) $۲\frac{۱}{۴}$ ۳) $۲\frac{۳}{۸}$ ۴) $۲\frac{۱}{۲}$

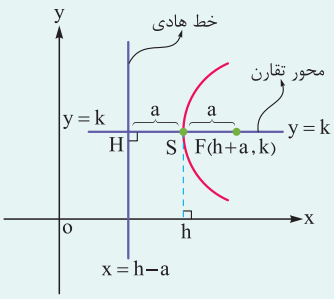
مشاوره نوشتن معادلهٔ سهمی با معلوم‌بودن معادلهٔ خط هادی و مختصات رأس، یک تیپ بسیار پرتکرار در سؤال‌های سهمی چه در امتحان نهایی و چه در کنکور است. این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های امتحان نهایی طراحی شده است.

درس Box

سهمی افقی: اگر محور تقارن یک سهمی موازی محور xها باشد (یا به بیان دیگر، خط هادی آن موازی محور yها باشد)، سهمی را افقی گوییم.

سهمی‌های افقی در دستگاه مختصات:

۱) اگر دهانهٔ سهمی به راست باز شود:



رأس سهمی: $S(h,k)$

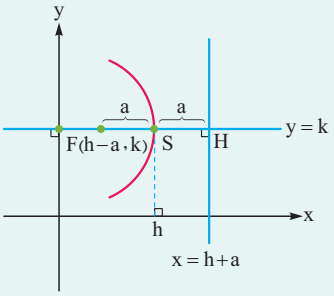
معادلهٔ استاندارد سهمی: $(y-k)^۲=۴a(x-h)$

محور تقارن سهمی خط: $y=k$

خط هادی: $x=h-a$

کانون: $F(h+a,k)$

۲) اگر دهانهٔ سهمی به چپ باز شود:



رأس سهمی: $S(h,k)$

معادلهٔ سهمی استاندارد: $(y-k)^۲=-۴a(x-h)$

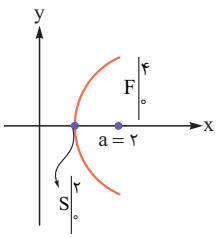
محور تقارن سهمی: $y=k$

خط هادی: $x=h+a$

کانون: $F(h-a,k)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (پیداکردن رأس سهمی): رأس سهمی دقیقاً در وسط کانون و خط هادی قرار دارد؛ پس مختصات آن $S(۲,۰)$ و فاصلهٔ کانونی سهمی $a=۲$ است.



گام دوم (نوشتن رابطهٔ سهمی): سهمی افقی و رو به راست است. پس معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$(y-k)^۲=۴a(x-h) \Rightarrow (y-۰)^۲=۸(x-۲)$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ صورت سؤال): حالا $y=۲$ را در معادلهٔ سهمی جای‌گذاری می‌کنیم تا طول این نقطهٔ مورد نظر سؤال را پیدا کنیم:

$$۴=۸(x-۲) \Rightarrow x=۲+\frac{۴}{۸}=۲\frac{۱}{۲}$$

۲۲ کانون سهمی به معادلهٔ $۲x^۲ - ۴x + ۳y = b$ روی نیمساز ناحیهٔ چهارم قرار دارد. عرض رأس این سهمی کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۱۱}{۸}$

۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $-\frac{۵}{۸}$

مشاوره شاید بتوان گفت مهم‌ترین تیپ سؤال‌های سهمی، سؤال‌هایی است که در آن‌ها باید از روی معادلهٔ گسترده، بتوانید فاصلهٔ کانونی، مختصات نقاط مهم و معادلهٔ خط‌های مهم سهمی را به دست آورید.

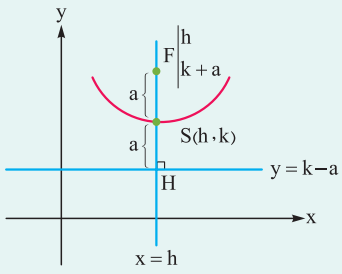
Hint معادله را به صورت استاندارد نوشته، از خواص سهمی‌های قائمی که دهانهٔ آن‌ها رو به پایین باز می‌شود استفاده کنید.

درس Box

سهمی قائم: اگر محور تقارن سهمی موازی محور yها باشد (یا به بیان دیگر، خط هادی سهمی موازی محور xها باشد) سهمی را قائم می‌نامیم.

سهمی‌های قائم در دستگاه مختصات:

اگر دهانهٔ سهمی به بالا باز شود.



معادلهٔ استاندارد سهمی: $(x-h)^۲ = ۴a(y-k)$

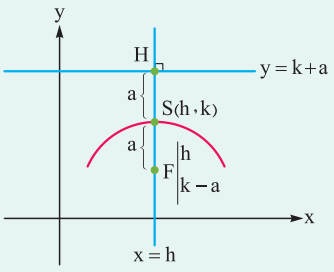
رأس سهمی: $S(h,k)$

محور تقارن سهمی: $x = h$

خط هادی: $y = k - a$

کانون: $F(h, k+a)$

اگر دهانهٔ سهمی به پایین باز شود.



معادلهٔ استاندارد سهمی: $(x-h)^۲ = -۴a(y-k)$

رأس سهمی: $S(h,k)$

محور تقارن سهمی: $x = h$

خط هادی: $y = k + a$

کانون: $F(h, k-a)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (نوشتن معادلهٔ استاندارد): معادلهٔ داده‌شده را به معادلهٔ استاندارد سهمی تبدیل می‌کنیم.

$$۲x^۲ - ۴x + ۳y = b \Rightarrow ۲(x^۲ - ۲x) = -۳y + b \Rightarrow ۲((x-۱)^۲ - ۱) = -۳y + b$$

$$\Rightarrow ۲(x-۱)^۲ = -۳y + b + ۲ \Rightarrow (x-۱)^۲ = \frac{-۳}{۲}(y + \frac{b+۲}{-۳})$$

حالا مختصات رأس و فاصلهٔ کانونی سهمی را به دست می‌آوریم:

$$S(۱, \frac{b+۲}{۳}), ۴a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۸}$$

گام دوم (محاسبهٔ طول و عرض کانون سهمی): با توجه به معادلهٔ استاندارد، این سهمی قائم است و دهانهٔ آن به پایین باز می‌شود،

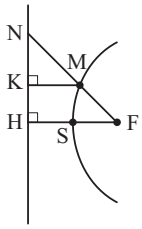
عرض کانون سهمی را به دست می‌آوریم:

$$y_F = y_S - a = y_S - \frac{۳}{۸}$$

از طرفی کانون سهمی روی خط $y = -x$ قرار دارد، پس داریم:

$$y_F = -x_F \xrightarrow{x_F = x_S = ۱} y_S - \frac{۳}{۸} = -۱ \Rightarrow y_S = -\frac{۵}{۸}$$

۲۳ در شکل زیر، نقطهٔ N را طوری روی خط هادی سهمی انتخاب کرده‌ایم که فاصلهٔ آن از کانون سهمی (F)، سه برابر فاصلهٔ کانونی سهمی باشد. حاصل $\frac{KH}{NH}$ کدام است؟



۱) ۰/۶

۲) ۰/۵

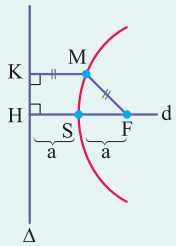
۳) ۰/۴

۴) ۰/۳

درس Box

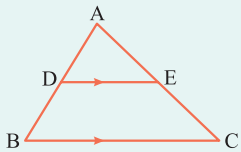
۱) سهمی:

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت (خط هادی) و یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط (کانون) به یک فاصله‌اند.



$MF = MK$

۲) قضیهٔ تالس: در شکل زیر DE با BC موازی است، داریم:

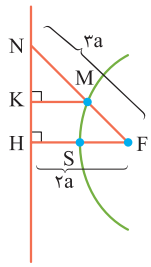


تالس جزءبه‌جزء: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

تالس جزءبه‌کل: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (استفاده از قضیهٔ تالس در $\overset{\Delta}{NHF}$):



طبق فرض سؤال، NF سه برابر فاصلهٔ کانونی است، یعنی $NF = ۳a$.

طبق تالس جزءبه‌کل در مثلث $\overset{\Delta}{NHF}$ داریم:

$$KM \parallel HF \Rightarrow \frac{KM}{HF} = \frac{MN}{NF} \Rightarrow \frac{KM}{۲a} = \frac{NM}{۳a} \Rightarrow \frac{KM}{NM} = \frac{۲a}{۳a} = \frac{۲}{۳}$$

گام دوم (محاسبهٔ خواسته سؤال): می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی سهمی از کانون و از خط هادی با یکدیگر برابر است، پس: $KM = MF$، پس مطابق آن‌چه در گام اول به دست آوردیم، داریم:

$$\frac{KM}{MN} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{KM=MF} \frac{MF}{MN} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{MF}{MN + MF} = \frac{۲}{۳+۲} \Rightarrow \frac{MF}{NF} = \frac{۲}{۵}$$

بار دیگر با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث $\overset{\Delta}{NHF}$، داریم:

$$\frac{KH}{NH} = \frac{MF}{NF} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

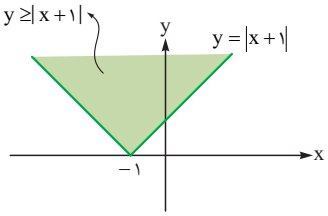
۲۴ مساحت قسمتی از نمودار $۲ \le y \le |x+۱|$ که در ناحیهٔ اول مختصات قرار ندارد، کدام است؟

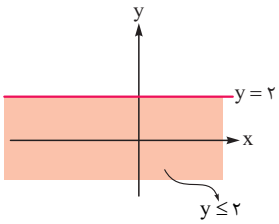
۱) ۳/۵ ۲) ۳

۳) ۲/۵ ۴) ۴

Hint ناحیهٔ مورد نظر، اشتراک دو ناحیهٔ $y \le ۲$ و $y \ge |x+۱|$ است.

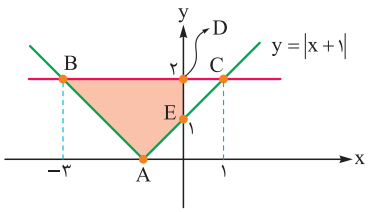
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال):** نمودارهای $y = |x+۱|$ و $y = ۲$ را در دستگاه مختصات رسم‌کرده و ناحیه‌های متناظر با $y \ge |x+۱|$ و $y \le ۲$ را مشخص می‌کنیم.





گام دوم (رسم شکل ناحیهٔ مورد نظر سؤال): نقاط تقاطع نمودار $y = |x+۱|$ را با خط $y = ۲$ به دست می‌آوریم.

دقت کنید که ناحیهٔ $|x+۱| \le y \le ۲$ از اشتراک دو ناحیهٔ مشخص‌شده در گام اول به دست می‌آید و در شکل مقابل، قسمتی از این ناحیه را که در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات قرار ندارد، مشخص کرده‌ایم.



$$|x+۱| = ۲ \Rightarrow x+۱ = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۳ \end{cases}$$

گام سوم (محاسبهٔ مساحت قسمت رنگی): برای به دست آوردن مساحت قسمت رنگی ابتدا مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم و سپس مساحت مثلث CDE را از آن کم می‌کنیم.

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۴ - \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ = ۴ - ۰/۵ = ۳/۵$$

۲۵ سه نقطهٔ $A(۱,۲,-۴)$ ، $B(۳,-۴,۰)$ و $C(۴,۰,-۴)$ را در فضا در نظر بگیرید. اگر نقطهٔ **M** وسط پاره‌خط **AB** باشد، **M** در کدام ناحیه قرار دارد و طول **CM** کدام است؟

۱) ناحیهٔ هفتم و ۳
۲) ناحیهٔ هشتم و $۲\sqrt{۲}$
۳) ناحیهٔ هفتم و $۲\sqrt{۲}$
۴) ناحیهٔ هشتم و ۳

مشاوره خیلی از دانش‌آموزان در ناحیه‌بندی فضای مختصات مشکل دارند، توصیه می‌کنیم مورد (۳) درس‌باکس این سؤال را حتماً بلد باشید.

درس Box

۱) مختصات نقطهٔ وسط یک پاره‌خط: اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند. مختصات نقطهٔ M وسط AB به صورت زیر است:

$$M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲},\frac{z_۱+z_۲}{۲})$$

۲) فاصلهٔ بین دو نقطه (اندازهٔ پاره‌خط) در فضا: هر گاه $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند، فاصلهٔ بین آن‌ها (اندازهٔ پاره‌خط AB) برابر است با:

$$\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$$

۳) برای تعیین ناحیهٔ نقطهٔ $P(x,y,z)$ در فضا، ابتدا ناحیهٔ نقطهٔ $(x\ ,\ y)$ را در صفحه مشخص کنید، فرض کنید این نقطه در ناحیهٔ nام صفحه قرار می‌گیرد، اگر $z>۰$ آن‌گاه P درناحیهٔ nام فضا قرار می‌گیرد و اگر $z<۰$ آن‌گاه P در ناحیهٔ $(۴+n)$ام فضا قرار می‌گیرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (پیدا کردن مختصات نقطه M): مختصات نقطهٔ M به صورت $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲},\frac{z_A+z_B}{۲})=(۲,-۱,-۲)$ است. نقطهٔ $(۲,-۱)$ در صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ در ربع چهارم واقع است و چون ارتفاع M منفی است، پس این نقطه در فضای $\mathbb{R}^۳$ در ناحیهٔ $۸=۴+۴$ام قرار دارد.

گام دوم (یافتن طول CM): با توجه به مختصات نقاط C و M، طول CM را به دست می‌آوریم.

$$CM=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۰-(-۱))^۲+(-۴-(-۲))^۲}=۳$$

۲۶ فرض کنید زاویهٔ بین دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

الف) اگر $\theta = 90^\circ$، آن‌گاه $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$

ب) اگر $\theta > 90^\circ$، آن‌گاه $|\vec{a}-\vec{b}| < |\vec{b}|$ و $|\vec{a}|$

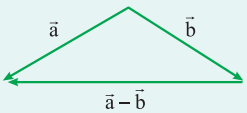
پ) اگر $\theta < 90^\circ$، آن‌گاه $|\vec{a}-\vec{b}| > |\vec{b}|$ و $|\vec{a}|$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

درس Box

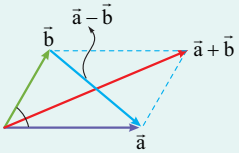
۱) تفاضل دو بردار:

دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را طوری قرار می‌دهیم که ابتدای بردار $\vec{b}$ بر ابتدای بردار $\vec{a}$ واقع شود. برداری که انتهای بردار $\vec{b}$ را به انتهای بردار $\vec{a}$ وصل می‌نماید، تفاضل بردار $\vec{b}$ از بردار $\vec{a}$ یعنی بردار $\vec{a}-\vec{b}$ را مشخص می‌کند.



۲) قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع:

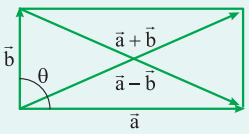
اگر مطابق شکل، بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشند، قطرهای این متوازی‌الاضلاع، بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ هستند.



نکته

اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه:

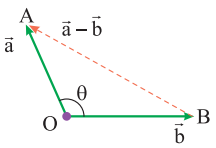
$\hat{\theta} = 90^\circ \Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$



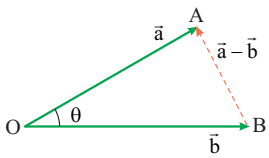
پاسخ خیلی تشریحی ✔

طبق درس‌باکس گزارهٔ (الف) درست است.

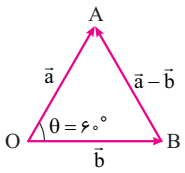
در مورد گزارهٔ (ب): اگر $\theta > 90^\circ$، آن‌گاه θ بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث OAB است، پس ضلع روبه‌روی آن هم بزرگ‌ترین ضلع مثلث است.



در مورد گزارهٔ (پ): اگر $\theta < 90^\circ$، آن‌گاه در مورد مقایسهٔ $|\vec{a}-\vec{b}|$ با $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ نمی‌توان حکم کلی داد، شکل‌های زیر را ببینید:



$|\vec{a}-\vec{b}| < |\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$

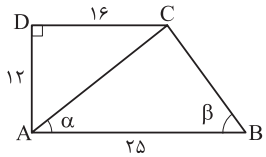


$|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}| = |\vec{b}|$

(مثال نقض برای ردّ گزارهٔ پ)

درنتیجه ۲تا از گزاره‌ها درست هستند.

۲۷ در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه **ABCD** مطابق شکل، قطر **AC** رسم شده است. حاصل $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

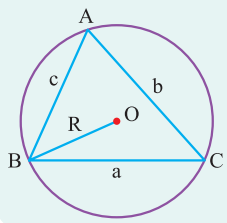
۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۳}{۵}$

Hint در مثلث ABC از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده کنید.

درس Box

قضیهٔ سینوس‌ها



در مثلث ABC رابطهٔ زیر برقرار است. در این رابطه که به قضیهٔ سینوس‌ها معروف است، R شعاع دایره محیطی مثلث ABC است:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$$

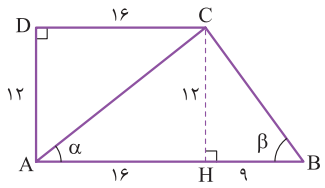
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (تحلیل سؤال): طبق قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم: $\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin\alpha}$، به بیان دیگر $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{BC}{AC}$ است.

پس باید طول BC و AC را به دست بیاوریم.

گام دوم (محاسبهٔ طول‌های AC و BC):

در مثلث ACD طبق فیثاغورس داریم:



$$\overset{\triangle}{ACD}: AC^۲=AD^۲+CD^۲=۱۲^۲+۱۶^۲=۲۰^۲ \Rightarrow AC=۲۰$$

ارتفاع CH را رسم می‌کنیم، چهارضلعی AHCD مستطیل است. پس $AH=۱۶$ و $CH=۱۲$، حالا طبق فیثاغورس در مثلث BCH داریم:

$$\overset{\triangle}{BCH}: BC^۲=CH^۲+BH^۲=۱۲^۲+۹^۲=۱۵^۲ \Rightarrow BC=۱۵$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): با توجه به گام اول، داریم:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{BC}{AC}=\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۳}{۴}$$

۲۸ در مثلث ABC به اضلاع $AB=c$، $AC=b$ و $BC=a$، اگر $5(a^2-b^2-c^2)=4\sqrt{6}bc$ آن‌گاه طول شعاع دایرهٔ محیطی، چند برابر a است؟

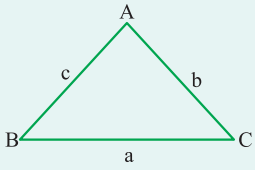
۱) $\frac{2\sqrt{6}}{4}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

Hint در مثلث ABC، قضیهٔ کسینوس‌ها را بر حسب زاویهٔ A بنویسید.

درس Box

قضیه کسینوس‌ها

در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها.



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\hat{C}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اوّل (نوشتن فرض سؤال، به شکل مناسب): می‌خواهیم رابطهٔ مفروض سؤال را تا حد امکان، شبیه به قضیهٔ کسینوس‌ها برای ضلع a بنویسیم:

$$5(a^2-b^2-c^2)=4\sqrt{6}bc \Rightarrow a^2-b^2-c^2=\frac{4\sqrt{6}}{5}bc \Rightarrow a^2=b^2+c^2+\frac{4\sqrt{6}}{5}bc$$

گام دوم (محاسبهٔ سینوس و کسینوس زاویهٔ $\hat{A}$): قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC را برای ضلع a می‌نویسیم و از مقایسهٔ آن با رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال کسینوس زاویهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A} \\ \text{فرض}: a^2=b^2+c^2+\frac{4\sqrt{6}}{5}bc \end{cases} \Rightarrow -2\cos\hat{A}=\frac{4\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \cos A=\frac{-2\sqrt{6}}{5}$$

طبق رابطهٔ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$، سینوس زاویهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\cos\hat{A}=\frac{-2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \cos^2\hat{A}=\frac{24}{25}$$

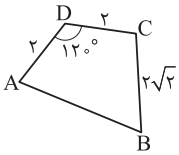
$$1-\cos^2\hat{A}=\sin^2\hat{A} \Rightarrow \sin^2\hat{A}=\frac{1}{25} \xrightarrow{0^\circ<\hat{A}<80^\circ} \sin\hat{A}=\frac{1}{5}$$

گام سوم (محاسبهٔ شعاع دایره محیطی مثلث):

مطابق فرمول، شعاع دایرهٔ محیطی را به دست می‌آوریم:

$$R=\frac{a}{2\sin\hat{A}}=\frac{a}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}a=2/5a$$

۲۹ چهارضلعی رسم‌شده در شکل روبه‌رو محاطی است. طول ضلع **AB** کدام است؟



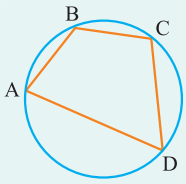
۱) $\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$
۲) $۲+\sqrt{۳}$
۳) ۴
۴) $۲\sqrt{۳}$

مشاوره می‌دانید که در هندسه، سؤال‌های ترکیبی بین مباحث، بسیار مهم هستند، در این سؤال که شبیه یکی از سؤال‌های کنکورهای گذشته است، «خواص چهارضلعی محاطی» با «قضیهٔ کسینوس‌ها» ترکیب شده است.

Hint قطر AC را رسم کنید و در دو مثلث ایجادشده، قضیهٔ کسینوس‌ها را بنویسید.

درس Box

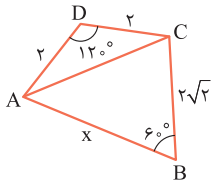
قضیه: یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر هر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند:



$$\hat{A}+\hat{C}=B+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ طول AC): طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ACD داریم:



$$\overset{\triangle}{ACD}: AC^۲=۲^۲+۲^۲-۲\times۲\times۲\cos۱۲۰^\circ=۴+۴+۴=۱۲$$

گام دوم (محاسبهٔ طول AB): در چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل هستند، پس $\hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۲۰^\circ=۶۰^\circ$ است.

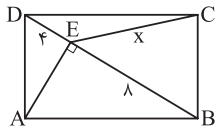
طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC، طول ضلع $AB=x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\overset{\triangle}{ABC}: AC^۲=x^۲+۸-۲(۲\sqrt{۲})x\cos۶۰^\circ=x^۲-۲\sqrt{۲}x+۸$$

$$\Rightarrow x^۲-۲\sqrt{۲}x+۸=۱۲ \Rightarrow x^۲-۲\sqrt{۲}x-۴=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲\sqrt{۲}\pm\sqrt{۲۴}}{۲} \xrightarrow{x>۰} x=\frac{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۴\times۶}}{۲}=\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$$

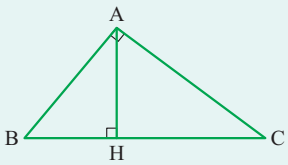
۳۰ در مستطیل $ABCD$ مطابق شکل، AE بر قطر BD عمود است. اگر $DE = ۴$ و $BE = ۸$ باشد، طول EC کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۵}$
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $۵\sqrt{۲}$
۴) $۳\sqrt{۶}$

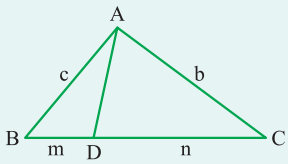
درس Box

۱) روابط طولی مثلث قائم‌الزاویه: مطابق شکل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، AH ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:



$$AC^۲ = BC \times CH$$
$$AB^۲ = BC \times BH$$

۲) قضیه استوارت: در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D را روی ضلع BC در نظر می‌گیریم، با توجه به شکل، داریم:



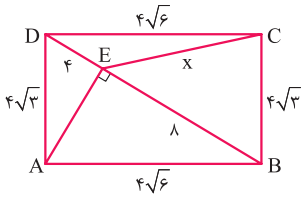
$$AD^۲ = \frac{b^۲ \cdot m + c^۲ \cdot n}{m+n} - mn$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ طول و عرض مستطیل): مثلث ABD قائم‌الزاویه و AE ارتفاع آن است، حالا با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، طول و عرض مستطیل را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} AD^۲ = DE \cdot DB = ۴ \times ۱۲ = ۴۸ \Rightarrow AD = ۴\sqrt{۳} \\ AB^۲ = BE \cdot BD = ۸ \times ۱۲ = ۹۶ \Rightarrow AB = ۴\sqrt{۶} \end{cases}$$

گام دوم (محاسبهٔ طول EC): حال با استفاده از قضیهٔ استوارت در مثلث BDC داریم:



$$EC^۲ = \frac{DE \times BC^۲ + BE \times DC^۲}{DB} - DE \times BE$$
$$\Rightarrow x^۲ = \frac{۴ \times (۴\sqrt{۳})^۲ + ۸ \times (۴\sqrt{۶})^۲}{۱۲} - ۴ \times ۸ = \frac{۴ \times ۴۸ + ۸ \times ۹۶}{۱۲} - ۳۲ = ۴۸$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

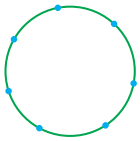
۳۱ هفت نقطه روی محیط یک دایره هستند. تعداد مثلث‌هایی که با سه نقطه از این هفت نقطه می‌توان رسم کرد، چند برابر تعداد پنج‌ضلعی‌هایی است که با پنج نقطه از این هفت نقطه می‌توان رسم کرد؟

مشاوره سؤال ساده‌ای است که با درک مفهوم «انتخاب» حل می‌شود.

۱) ۱
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۷}{۴}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

هر سه نقطه‌ای که از این هفت نقطه انتخاب کنیم یک مثلث می‌سازند. همین‌طور هر پنج نقطه‌ای که انتخاب کنیم یک پنج‌ضلعی می‌سازند.



بنابراین داریم:

$$\frac{\binom{۷}{۳}}{\binom{۷}{۵}} = \frac{\frac{۷!}{۳!۴!}}{\frac{۷!}{۵!۲!}} = \frac{۵}{۳}$$

۳۲ با حروف کلمهٔ «گلزاری» چند کلمهٔ شش‌حرفی می‌توان ساخت به طوری که شامل عبارت «گل» باشند و در آن‌ها دو حرف «ز» و «ا» کنار یکدیگر نباشند؟

۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۱۴

درس Box

محاسبهٔ تعداد حالت‌ها به کمک اصل متمم

در بعضی از مسائل احتمال، محاسبهٔ آن چیزی که مسئله نمی‌خواهد به مراتب راحت‌تر از محاسبهٔ آن چیزی است که می‌خواهد. در این موارد بهتر است ابتدا تعداد حالت‌های آن چیزی که مطلوب نیست را پیدا کنیم و سپس جواب را از تعداد کل حالت‌ها کم کنیم، یعنی از اصل متمم به صورت زیر استفاده کنیم:

تعداد حالت‌های مطلوب = تعداد کل حالت‌ها - تعداد حالت‌های نامطلوب

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تعداد حالت‌هایی را می‌خواهیم که شامل عبارت «گل» باشند ولی حروف «ز» و «ا» کنار هم نیستند. پس باید از اصل متمم استفاده کنیم. در نتیجه ابتدا تمام حالت‌هایی را به دست می‌آوریم که کلمه شامل عبارت «گل» هست اما در مورد «ز» و «ا» هیچ شرطی نداریم.

(گل) (ز) (ا) (ر) (ی)

هر کدام از بسته‌ها قابلیت جایگشت را برای ایجاد کلمهٔ جدید دارند، پس تعداد کل حالت‌ها $5!$ است.

گام دوم: حالا به سراغ محاسبهٔ متمم خواستهٔ صورت سؤال می‌رویم، یعنی زمانی که عبارت «گل» در کلمه وجود دارد و «ز» و «ا» کنار یکدیگرند.

(گل) (زا) (ر) (ی)

هر کدام از بسته‌ها می‌توانند جابه‌جا شوند پس به طور کلی $4!$ حالت داریم که به خاطر جابه‌جایی «ز» و «ا» با یکدیگر تعداد کل حالت‌ها می‌شود:

$4!2!$

حالا طبق اصل متمم تعداد حالت‌هایی که عبارت «گل» در کلمه وجود دارد و «ز» و «ا» کنار هم نیستند برابر است با:

$5!-4!2!=120-48=72$

۳۳ چند عدد ده‌رقمی با ارقام ۳ و ۴ می‌توان نوشت که مضرب ۶ نباشد؟

۱) ۸۴۳
۲) ۸۵۳
۳) ۸۶۳
۴) ۸۷۳

مشاوره استفاده از اصل متمم در حل این تیپ از سؤالات نکتهٔ اصلی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

برای هر کدام از رقم‌های این عدد ده‌رقمی قراردادن دو عدد ۳ یا ۴ امکان‌پذیر است. پس به طور کلی $۲^{۱۰}$ حالت برای این عدد وجود دارد.

از اصل متمم استفاده می‌کنیم و تعداد حالت‌هایی که عدد مضرب ۶ می‌شود را محاسبه می‌کنیم. برای این‌که عدد مضرب ۶ باشد باید هم مضرب ۲ و هم ۳ باشد. پس رقم یکان این عدد حتماً ۴ است. برای این‌که عددی مضرب ۳ باشد باید مجموع ارقامش مضربی از ۳ باشد. فرض می‌کنیم از ۹ رقم باقی‌مانده (به‌جز یکان آن که ۴ است) n رقم عدد ۴ باشد، بنابراین $۹-n$ رقم نیز ۳ است.

$$\text{مجموع ارقام}: ۳(۹-n)+۴n+\underset{\text{یکان}}{۴}=\text{عددی مضرب } ۳ \Rightarrow n+۳۱=۳$$

$$\Rightarrow n=۲,۵,۸$$

پس در حالتی که ۲ یا ۵ یا ۸ رقم از ۹ رقم قبل از یکان، ۴ باشد، این عدد مضرب ۶ می‌شود.

حالا تعداد اعدادی که مضرب ۶ می‌شوند را محاسبه می‌کنیم.

$$\binom{۹}{۲}+\binom{۹}{۵}+\binom{۹}{۸}=۳۶+۱۲۶+۹=۱۷۱$$

۱۷۱ عدد مضرب ۶اند، پس طبق اصل متمم داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{کل حالت‌ها } ۲^{۱۰}=۱۰۲۴\\ \text{مضارب } ۶=۱۷۱\end{array}\right\} \Rightarrow ۱۰۲۴-۱۷۱=۸۵۳$$

پس ۸۵۳ عدد مضرب ۶ نیستند.

۳۴ اگر $n\gamma(P_n) = ۱۰$ باشد، کدام گراف مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتا دارد؟

فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد.

۱) P_n
۲) $P_{n+۱}$
۳) $P_{n-۱}$
۴) $P_{n+۲}$

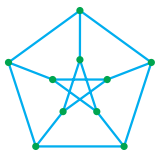
مشاوره عدداحاطه‌گری گراف‌های خاص مثل گراف‌های P_n و C_n و پترسن خیلی‌خیلی مهم هستند.

Hint

$$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$$

درس Box

بررسی عدد احاطه‌گری و تعداد γ ـ مجموعه‌های گراف‌های خاص

گراف	عدد احاطه‌گری	تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم (γ ـ مجموعه‌ها)
K_p (کامل)	$\gamma(K_p) = ۱$	p (هر رأس یک γ ـ مجموعه است.)
$\bar{K}_p$ (تهی)	$\gamma(\bar{K}_p) = p$	۱ (مجموعهٔ کل رأس‌ها)
P_n (مسیر)	$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$	اگر n مضرب ۳ باشد، فقط یک γ ـ مجموعه دارد. در غیر این صورت مستقیم شمارش می‌کنیم.
C_n (دور)	$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$	اگر n مضرب ۳ باشد، سه‌تا γ ـ مجموعه دارد.
 پترسن	$\gamma = ۳$	۱۰تا γ ـ مجموعه دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: $\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$، پس $n \times \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil = ۱۰$.

گام دوم: n مقسوم‌علیه ۱۰ است؛ پس با جست‌وجو داریم:

$n = ۱ \Rightarrow ۱ \times \left\lceil \frac{۱}{۳} \right\rceil = ۱ \times ۱ = ۱$

$n = ۲ \Rightarrow ۲ \times \left\lceil \frac{۲}{۳} \right\rceil = ۲ \times ۱ = ۲$

$n = ۵ \Rightarrow ۵ \times \left\lceil \frac{۵}{۳} \right\rceil = ۵ \times ۲ = ۱۰$ ✓

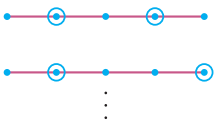
$n = ۱۰ \Rightarrow ۱۰ \times \left\lceil \frac{۱۰}{۳} \right\rceil = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$

گام سوم: اگر $n = ۵$ باشد، $P_{n+۱} = P_۶$ که طبق درس‌باکس چون تعداد رأس‌ها مضرب ۳ است، فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد.

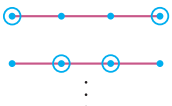


حواستون باشه: سایر گزینه‌ها بیشتر از یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارند.

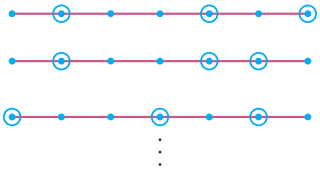
گزینهٔ (۱):



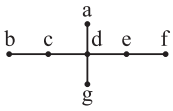
گزینهٔ (۳):



گزینهٔ (۴):



۳۵ گراف روبه‌رو چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟

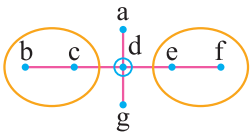


۱) ۸
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۱۲

مشاوره سؤال دشواری است. تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال هم فرمول مشخصی ندارد. اول از همه دقت کنید که هر احاطه‌گر مینیمم، مینیمال هست، پس اول آن‌ها را به دست آورید.

Hint احاطه‌گرهای مینیمال را به دو گروه تقسیم کنید: d باشد یا d نباشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال را به دو گروه تقسیم می‌کنیم.



۱) مجموعه شامل d باشد:

رأس d رأس‌های g و a را احاطه می‌کند، پس چون مجموعه مینیمال است g و a را نباید انتخاب کنیم. از بین $\{b,c\}$ یک رأس (به دو حالت) و از بین $\{e,f\}$ نیز یک رأس (به دو حالت) باید انتخاب کنیم پس ۴ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال شامل d وجود دارد.

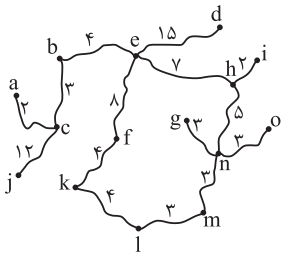
$\{d,b,e\},\{d,b,f\},\{d,c,e\},\{d,c,f\}$

۲) مجموعه شامل d نباشد: برای احاطه‌شدن a,g حتماً باید عضو مجموعهٔ احاطه‌گر باشند؛ هم‌چنین از بین $\{b,c\}$ نیز یک رأس (به دو حالت) و از بین $\{e,f\}$ نیز یک رأس (به دو حالت) باید انتخاب کنیم، پس در این حالت نیز ۴ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال به دست می‌آید.

$۸ = ۴ + ۴$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال داریم.

حواستون باشه: اگر b,c را با هم انتخاب کنیم مجموعه دیگر مینیمال نیست، چون با حذف یکی مشکلی پیش نیامده و مجموعه هنوز احاطه‌گر است.

۳۶ نقشهٔ مقابل نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به گونه‌ای که فاصلهٔ هر روستا با نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کم‌ترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. چند بیمارستان باید احداث کنیم؟



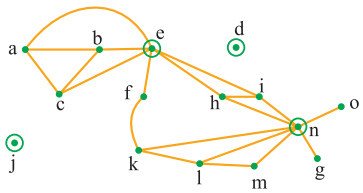
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

مشاوره سؤال ساده‌ای است مشابه یکی از تمرین‌های کتاب درسی. کاربرد احاطه‌گرها را در این سؤال می‌بینید.

Hint از رأس‌های کناری شروع کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به ازای هر روستا یک رأس قرار داده و دو رأس را به هم وصل می‌کنیم. هرگاه فاصلهٔ آن‌ها بیشتر از ۱۰ km نباشد (یعنی کم‌تر یا مساوی ۱۰ باشد)، بخشی از گراف به دست آمده به صورت مقابل است:



گام دوم: کافی است عدد احاطه‌گری گراف را پیدا کنیم. رأس‌های j,d حتماً عضو مجموعهٔ احاطه‌گر باشند، اما با انتخاب e,n کل رأس‌های دیگر احاطه می‌شود؛ پس $\gamma(G)=۴$.

حواستون باشه: در رأس‌های d,j حتماً باید بیمارستان احداث کنیم، چون فاصلهٔ نزدیک‌ترین روستا تا آن‌ها بیشتر از ۱۰ km بوده؛ بنابراین هیچ روستای دیگری آن‌ها را پوشش نمی‌دهد. برای حل سؤال نیاز به کشیدن گراف نبود و فقط برای تفهیم بهتر رسم شده است. از بین رأس‌های دیگر حداقل دو رأس باید انتخاب می‌کردیم، چون رأسی نیست که همهٔ رأس‌های دیگر را به غیر از رأس‌های ایزوله j و d احاطه کند.

۳۷ گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۸ و کم‌ترین اندازه، دارای ۷ ـ مجموعهٔ یک‌عضوی است. با اضافه‌کردن حداقل چند یال به این گراف، دوری به طول ۸ ایجاد می‌شود؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم که یک عضو دارد.

مشاوره سؤال احاطه‌گری حتماً ارزش سرمایه‌گذاری در کنکور دارد. با حل تعداد نسبتاً کمی تست می‌توانید از پس سؤال آن برآیید.

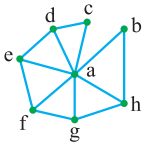
Hint گراف G رأسی دارد که کل رأس‌های دیگر را پوشش می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: گراف ۷ ـ مجموعهٔ تک‌عضوی دارد، پس رأسی دارد که به همهٔ رأس‌های دیگر متصل است؛ چون گراف کم‌ترین اندازه را دارد، پس به صورت مقابل است:



گام دوم: اگر ۶ یال به صورت مقابل اضافه کنیم، گراف دارای دور bacdefghb به طول ۸ می‌شود.



۳۸ چند عدد ۷رقمی مضرب ۵ با ارقام ۱,۵,۳,۲,۰,۰,۰ می‌توان ساخت؟

عدد ۷رقمی فقط با همین ۷ رقم و با همین تعداد تکرار

۱) ۱۲۰
۲) ۲۴۰
۳) ۳۰۰
۴) ۳۶۰

مشاوره از فصل سوم درس گسسته، ۳ سؤال در کنکور مطرح می‌شود. هر چند احتمال طرح سؤال از بحث جایگشت باتکرار، کم‌تر از بقیهٔ مباحث است، ولی سؤالی مشابه این به صورت مستقیم یا در قالب احتمال ممکن است مطرح شود.

Hint رقم یکان صفر یا ۵ باید باشد.

درس Box

جایگشت با اشیای دارای تکرار

قضیهٔ جایگشت باتکرار: اگر n شیء داشته باشیم، به طوری که n_1 تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن‌ها از نوع kام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

مثلاً تعداد اعداد ۹رقمی با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ برابر است با:

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 2!}$$

(تعداد یک‌ها) (تعداد دوها) (تعداد چهارها)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد؛ پس دو حالت در نظر می‌گیریم:

گام دوم: رقم یکان ۵ باشد:

$$A = \{1,2,3\} \times \underline{\quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad} \times \{5\}$$

$\underline{\quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad}$ → جایگشت ۰,۰,۰ و دو رقم از A $= \frac{5!}{3!} = 20$

(سه رقم صفر)

پس تعداد اعداد در این حالت برابر $3 \times 20 = 60$ می‌شود.

گام سوم: رقم یکان صفر باشد:

$$A = \{1,5,3,2\} \times \underline{\quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad} \times \{0\}$$

$\underline{\quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad}$ → جایگشت ۰,۰ و سه رقم از A $= \frac{5!}{2!} = 60$

پس تعداد اعداد در این حالت برابر $4 \times 60 = 240$ می‌شود.

گام چهارم: طبق اصل جمع تعداد اعداد مطلوب برابر $60 + 240 = 300$ تا می‌شود.

۳۹ ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در اتاق‌های ۲نفره، ۳نفره و ۴نفره اسکان پیدا کنند به طوری که فرد A در اتاق ۳نفره باشد؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۸۴۰

۳) ۶۱۰ ۴) ۲۱۰

مشاوره این سؤال تغییریافتهٔ یکی از تمرین‌های کتاب درسی است که قطعاً در کنکورهای آینده مطرح خواهد شد. این سؤال با ادبیات افراز نیز می‌تواند مطرح شود.

Hint با انتخاب مناسب، افراد را به اتاق‌ها اختصاص دهید.

درس Box

مسئلهٔ اتاق‌ها

فرض کنید می‌خواهیم n نفر را در اتاق‌های $n_1, n_2, \ldots, n_r$ نفره جای دهیم $(n_1 + n_2 + \cdots = n)$. تعداد حالت‌های انجام کار طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار برابر است با:

الف) اگر n_1، n_2 و ... همگی متفاوت باشند (ظرفیت اتاق متفاوت باشد)، تعداد حالت‌های اسکان برابر است با: $\frac{n!}{(n_1)!(n_2)!\ldots}$

مثلاً اگر بخواهیم ۹ نفر را در اتاق ۲، ۳ و ۴نفره اسکان بدهیم، تعداد حالت‌ها برابر $\frac{9!}{2!3!4!}$ می‌شود.

ب) اگر kتا از اتاق‌ها مثل هم باشند (ظرفیت یکسانی داشته باشند)، تعداد حالت‌ها برابر است با: $\frac{n!}{k!(n_1)!(n_2)!\ldots}$

مثلاً اگر بخواهیم ۹ نفر را در اتاق‌های۳، ۳ و ۲نفره اسکان دهیم، تعداد حالت‌های انجام کار برابر است با:

$$\frac{9!}{2!\times 3!\times 3!\times 2!}$$ ← (دو اتاق ۳نفره داشتیم.)

پاسخ خیلی تشریحی **روش اول:** فرد A را در اتاق ۳نفره قرار می‌دهیم. ۸ نفر را باید در اتاق‌های ۲، ۲ و ۴نفره اسکان دهیم. جابه‌جایی دو نفر در اتاق ۲نفره مهم نیست این مثل آن می‌ماند که در جایگشت ۸شیئی دو شیء مثل هم باشند (شبیه همین اتاق ۴نفره و ۲ نفر باقی‌مانده به همراه A)؛ پس طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار، تعداد راه‌ها برابر است با:

(دقت دارید که ظرفیت اتاق‌ها متفاوت است پس مخرج همین است.)

$$\frac{8!}{2!2!4!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{2\times 2\times 4!} = 420$$

روش دوم: **گام اول:** فرد A را در اتاق ۳نفره قرار می‌دهیم؛ پس کافی است ۸ نفر باقی‌مانده را در اتاق ۲نفره، اتاق ۳نفره که دو جای خالی دارد و اتاق ۴نفره اسکان دهیم.

گام دوم: به $\binom{8}{2}$ روش دو نفر انتخاب کرده و در اتاق ۲نفره اسکان می‌دهیم.

گام سوم: به $\binom{6}{2}$ روش دو نفر از افراد باقی‌مانده را انتخاب کرده و همراه A در اتاق ۳نفره قرار می‌دهیم.

گام چهارم: به $\binom{4}{4}$ روش ۴ نفر باقی‌مانده را نیز در اتاق ۴نفره قرار می‌دهیم.

گام پنجم: اتاق‌ها ظرفیت‌های مختلفی داشتند، پس با هم متفاوت هستند؛ بنابراین طبق اصل ضرب پاسخ برابر است با:

$$\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{4} = \frac{8\times 7}{2}\times\frac{6\times 5}{2}\times 1 = 28\times 15 = 420$$

حواستون باشه: دقیقاً همین مسئله می‌تواند با ادبیات زیر نیز مطرح گردد:

مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f,g,h,f\}$ را به چند صورت می‌توان به مجموعه‌های ۲، ۳ و ۴عضوی افراز کرد، به طوری که a عضو مجموعهٔ ۳عضوی باشد!

۴۰ در چند جایگشت از حروف SARASARI هیچ‌کدام از حروف I و A کنار هم نیستند؟

بین A با A و A با I فاصله هست.

۱) ۵۷۶
۲) ۱۲۰
۳) ۶۰
۴) ۱۵

مشاوره انواع و اقسام جایگشت (کنار هم، یک‌درمیان، باتکرار، با ترتیب خاص، فاصله‌دار، rتایی و ...) خیلی مهم هستند. درس‌باکس را به دقت مطالعه کنید.

Hint حروف S,R,S,R را بچینید و A,A,A,I را در بین یا کناره‌ها جاسازی کنید.

درس Box

بررسی دو تیپ مهم جایگشت

۱) جایگشت n شیء متمایز $=n!$

۲) **جایگشت‌های کنار هم**: اگر بخواهیم تعدادی شیء همگی کنار هم باشند، آن‌ها را به هم بسته و یک شیء فرض می‌کنیم. جایگشت‌های این بسته به همراه سایر اشیاء را در نظر گرفته و در جایگشت‌های داخل بسته ضرب می‌کنیم.

۳) **جایگشت‌های فاصله‌دار**: ممکن است تعدادی شیء داشته باشیم که نخواهیم هیچ دوتایی از آن‌ها کنار هم باشند. ابتدا بقیهٔ اشیاء را می‌چینیم بعد جای خالی بین و کنار آن‌ها در نظر گرفته و اشیای فاصله‌دار را در آن مکان‌ها قرار می‌دهیم (مثل این سؤال).

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق درس‌باکس ابتدا حروف S,R,S,R را به $\frac{۴!}{۲!۲!}=۶$ روش می‌چینیم.

گام دوم: حروف A,A,A,I را باید در □ قرار دهیم:

□ S □ R □ S □ R □

گام سوم: به $\binom{۵}{۴}=۵$ روش چهارتا از □ را انتخاب می‌کنیم.

گام چهارم: به $\frac{۴!}{۳!}=۴$ روش حروف A,A,A,I را در ۴ مربع قرار می‌دهیم.

گام پنجم: طبق اصل ضرب تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$۶\times۵\times۴=۱۲۰$

۴۱ نیروی کشش یک تار $۶۰N$ است و هنگامی که با بسامد $۲۵۰Hz$ به ارتعاش درمی‌آید، طول موج در آن $۲۰cm$ می‌شود. اگر چگالی تار $۸g/cm^۳$ باشد، قطر مقطع آن چند میلی‌متر است؟ $(\pi \simeq ۳)$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

Hint

ابتدا تندی انتشار موج را از رابطهٔ $v = \lambda f$ محاسبه می‌کنیم و سپس در رابطهٔ $v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ جای‌گذاری می‌کنیم تا خواستهٔ سؤال به دست آید.

درس Box

رابطهٔ تندی انتشار موج عرضی در یک فنر یا طناب، برحسب پارامترهای چگالی و سطح مقطع به صورت زیر است:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \xrightarrow[V=AL]{\rho=\frac{m}{V} \Rightarrow m=\rho V} v = \sqrt{\frac{FL}{\rho AL}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \xrightarrow{A=\pi r^۲}$$

توجه کنید که سیم یا تار به صورت استوانه است و حجم آن از رابطهٔ $V = AL$ محاسبه می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک طول موج و بسامد، تندی انتشار موج را محاسبه می‌کنیم:

$$v = \lambda f = ۲۰\times۱۰^{-۲}\times۲۵۰ = ۵۰\,m/s \quad (I)$$

گام دوم: تندی انتشار موج از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \xrightarrow{(I)} ۵۰ = \sqrt{\frac{۶۰}{۸\times۱۰^۳\times\underbrace{۳r^۲}_{\pi r^۲}}} \Rightarrow ۵۰ = \sqrt{\frac{۱}{۴۰۰r^۲}} \Rightarrow ۵۰ = \frac{۱}{۲۰r} \Rightarrow r = \frac{۱}{۱۰^۳}m \Rightarrow r = ۱mm$$

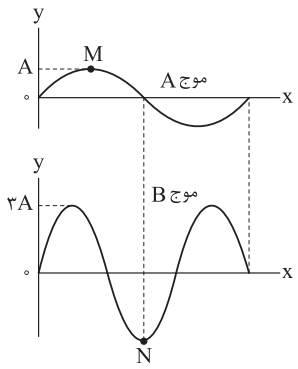
سؤال از ما قطر مقطع را خواسته است، پس:

$$۲r = d = ۲mm$$

گول نخوری

حواست باشه که سؤال **قطر** مقطع رو خواسته، در حالی که ما از رابطهٔ سطح مقطع (A) اندازهٔ **شعاع** رو به دست میاریم.

۴۲ در شکل زیر، دو موج عرضی **A** و **B** در دو طناب متفاوت منتشر می‌شوند. اگر تندی انتشار موج **A**، ۲ برابر تندی انتشار موج **B** باشد، بیشینهٔ تندی ذرهٔ **M** چند برابر بیشینهٔ تندی ذرهٔ **N** است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

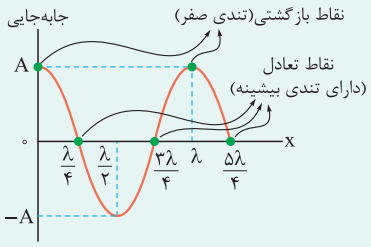
۴) $\frac{۴}{۹}$

Hint

چون دو موج عرضی A و B در دو طناب متفاوت (دو محیط متفاوت) منتشر می‌شوند، پس ابتدا به کمک داده‌های نمودار، رابطهٔ بسامد دو موج را به دست می‌آوریم و سپس از رابطهٔ $v_{max} = A\omega = A(۲\pi f)$ نسبت بیشینهٔ تندی ذره‌ها را می‌نویسیم.

درس Box

شکل روبه‌رو نمودار جابه‌جایی ـ مکان یک موج عرضی را نشان می‌دهد. به کمک نمودار می‌توانیم طول موج، دامنه و نقاط تعادل و بازگشتی موج را مشخص کنیم:



فرمول محاسبهٔ طول موج برای امواج عرضی و طولی به صورت زیر است:

دورهٔ تناوب(s)
طول موج(m) ← $\lambda = vT = \frac{v}{f}$
تندی(m/s)
بسامد(Hz)

موج در نقطهٔ تعادل دارای بیشینهٔ تندی است که از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$v_{max} = A\omega = A(۲\pi f)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به نمودار و طبق داده‌های صورت سؤال، اطلاعات زیر را داریم:

(۱) $A_B = ۳A \quad , \quad A_A = A$

(۲) $\lambda_A = \frac{۳}{۲}\lambda_B$

(۳) $v_A = ۲v_B$

گام دوم: طبق رابطهٔ تندی انتشار دو موج، نسبت بسامد دو موج A و B را به دست می‌آوریم:

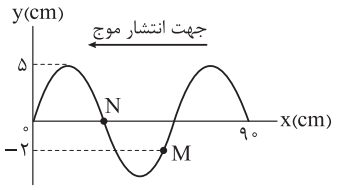
$$\left.\begin{matrix} v_A = ۲v_B \\ v = \lambda f \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_A f_A = ۲\lambda_B f_B \xrightarrow{\lambda_A = \frac{۳}{۲}\lambda_B} \frac{۳}{۲}\lambda_B f_A = ۲\lambda_B f_B$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴} f_A = f_B \Rightarrow \frac{۳}{۴} f_M = f_N$$

گام سوم: نقاط M و N در وضعیت تعادل دارای بیشینهٔ تندی هستند، پس از رابطهٔ بیشینهٔ تندی داریم:

$$v_{max} = A(۲\pi f) \Rightarrow \frac{v_{max,M}}{v_{max,N}} = \frac{A_M}{A_N} \times \frac{f_M}{f_N} = \frac{A}{۳A} \times \frac{f_M}{\frac{۳}{۴} f_M} = \frac{۴}{۹}$$

۴۳ تصویر یک موج عرضی که در طنابی در حال انتشار است، در لحظهٔ $t=0$ به شکل زیر است. اگر تندی متوسط ذرهٔ **M** از طناب در مدتی که موج $30\,cm$ در محیط پیشروی می‌کند، برابر $0/5\,m/s$ باشد، شتاب ذرهٔ **N** از طناب در لحظهٔ $t=0/45\,s$ در **SI** کدام است؟ $(\pi^2\simeq 10)$



۱) $-5\sqrt{2}\,\vec{j}$

۲) $+5\sqrt{2}\,\vec{j}$

۳) $-\frac{25}{4}\sqrt{2}\,\vec{j}$

۴) $+\frac{25}{4}\sqrt{2}\,\vec{j}$

درس Box

۱) رابطهٔ تندی متوسط

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$$

$s_{av}=$ تندی متوسط (m/s)

$l=$ مسافت طی‌شده (m)

$\Delta t=$ مدت‌زمان (s)

۲) هر ذرهٔ نوسانی از محیط، همچون چشمهٔ موج، در هر نصف دوره $(\frac{T}{2})$ مسافتی به اندازهٔ دو برابر دامنه $(2A)$ را می‌پیماید.

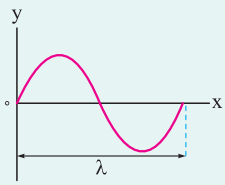
۳) رابطهٔ بسامد زاویه‌ای برحسب دوره:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

$\omega=$ بسامد زاویه‌ای (rad/s)

$T=$ دوره (s)

۴) طول موج (λ)، برابر با مسافتی است که موج در مدت دورهٔ تناوب نوسان طی می‌کند.



۵) رابطهٔ شتاب هر ذرهٔ نوسانگر برحسب مکان:

$$a=-\omega^2 y$$

$a=$ شتاب (m/s^2)

$\omega=$ بسامد زاویه‌ای (rad/s)

$y=$ مکان نوسانگر (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

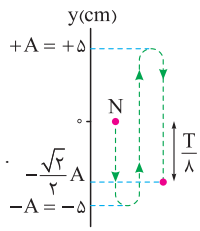
گام اول: با توجه به شکل داده‌شده داریم:

$$\frac{3}{2}\lambda=90\Rightarrow\lambda=60\,cm$$

بنابراین وقتی موج $30\,cm$ در محیط پیشروی می‌کند، یعنی نصف طول موج را پیموده و زمانی معادل نصف دوره $(\frac{T}{2})$ سپری شده است. هم‌چنین در این مدت ذرهٔ نوسانی **M** مسافتی معادل دو برابر دامنه $(2A)$ را می‌پیماید.

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\xrightarrow[l=2A=2\times5\times10^{-2}=10^{-1}\,m]{s_{av}=0/5\,m/s,\ \Delta t=\frac{T}{2}}0/5=\frac{10^{-1}}{\frac{T}{2}}\Rightarrow\frac{T}{4}=10^{-1}\Rightarrow T=0/4\,s$$

گام دوم: شتاب ذرهٔ **N** از طناب در لحظهٔ $t=0/45\,s$ خواسته شده است. پس باید مکان ذرهٔ **N** در این لحظه را پیدا کنیم:



$$t=0/45\,s=0/4+0/05=T+\frac{T}{8}$$

جابه‌جایی ذرهٔ **N** بعد از زمان T صفر است، اما در $\frac{T}{8}$ بعد از آن فاصلهٔ $\frac{\sqrt{2}}{2}A$ را رو به پایین طی می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$y_N=-\frac{\sqrt{2}}{2}A=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times5\times10^{-2}\,m$$

گام سوم: بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم و به کمک آن، شتاب ذرهٔ N برحسب مکان آن را به دست می‌آوریم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0/4} = 5\pi \, rad/s$$

$$a = -\omega^2 y \xrightarrow[y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 5\times 10^{-2} m]{\omega = 5\pi \, rad/s} a = -(5\pi)^2 \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 5\times 10^{-2})$$

$$\xrightarrow{\pi^2=10} a = -250\times(-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 5\times 10^{-2}) = 250\times 0/5\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25}{4}\sqrt{2}\, m/s^2$$

جهت شتاب رو به بالا است؛ بنابراین در لحظهٔ $t = 0/45\, s$ و در SI می‌توان نوشت:

$$\vec{a}_N = (+\frac{25}{4}\sqrt{2}\, m/s^2)\vec{j}$$

۴۴ شنونده‌ای از فاصلهٔ ۶۴۰متری یک چشمهٔ صوت به فاصلهٔ ۱۶۰متری آن می‌رود. تراز شدت صوتی که می‌شنود چند دسی‌بل افزایش می‌یابد؟ $(\log ۲ = ۰/۳)$

۱) ۰/۶ ۲) ۱/۲ ۳) ۶ ۴) ۱۲

مشاوره این تست، یکی از سؤال‌های امتحانی نهایی دوازدهم تجربی در خرداد ۱۴۰۳ بوده است.

درس Box

۱) شدت صوت یک چشمهٔ صوتی، با مربع فاصله آن از چشمه، رابطهٔ عکس دارد.

$$\frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

$I_۱$ = شدت صوت در فاصلهٔ $r_۱$ از چشمهٔ صوت $(W/m^۲)$

$I_۲$ = شدت صوت در فاصلهٔ $r_۲$ از چشمهٔ صوت $(W/m^۲)$

۲) برای مقایسهٔ شدت صوت در دو حالت مختلف و محاسبهٔ تغییر تراز شدت صوت داریم:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱}$$

$\beta_۱$ = تراز شدت صوت در حالت اول (dB)

$\beta_۲$ = تراز شدت صوت در حالت دوم (dB)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا نسبت شدت صوت در دو حالت داده‌شده را به دست می‌آوریم:

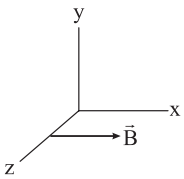
$$\frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{r_۱}{r_۲})^۲ \xrightarrow[r_۲ = ۱۶۰\,m]{r_۱ = ۶۴۰\,m} \frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{۶۴۰}{۱۶۰})^۲ = ۴^۲ = ۱۶$$

گام دوم: تغییر تراز شدت صوت بین دو حالت را محاسبه می‌کنیم:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱} \xrightarrow{\frac{I_۲}{I_۱} = ۱۶ = ۲^۴} \beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log ۲^۴$$

$$\Rightarrow \beta_۲ - \beta_۱ = ۴۰ \log ۲ \xrightarrow{\log ۲ = ۰/۳} \beta_۲ - \beta_۱ = ۴۰ \times ۰/۳ = ۱۲\,dB$$

۴۵ شکل زیر، جهت میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی را در یک نقطه و در یک لحظه نشان می‌دهد. اگر جهت انتشار موج در جهت مثبت محور z باشد، جهت میدان الکتریکی در این لحظه و در این مکان کدام است؟



۱) $-y$

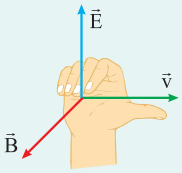
۲) $+y$

۳) $-z$

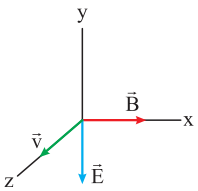
۴) $+z$

درس Box

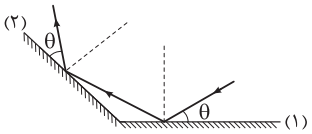
یکی از ویژگی‌های امواج الکترومغناطیسی آن است که اگر چهار انگشت دست راست خود را در جهت $\vec{E}$ گرفته و آن‌ها را به طرف $\vec{B}$ خم کنیم، انگشت شست، جهت انتشار موج را نشان می‌دهد.



پاسخ خیلی تشریحی ✔ میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در سوی محور x و جهت انتشار در سوی محور z است؛ بنابراین با توجه به قاعدهٔ دست راست که در درس‌باکس به آن اشاره شد، باید جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ در سوی منفی محور y باشد.



۴۶ مطابق شکل، پرتوی نوری به آینهٔ (۱) و در ادامه به آینهٔ (۲) می‌تابد. اگر امتداد پرتوی بازتاب از آینهٔ (۲) با امتداد پرتوی تابش به آینهٔ (۱) زاویهٔ ۱۲۰° بسازد، θ چند درجه است؟



۱) ۲۰

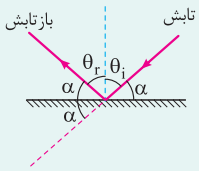
۲) ۳۰

۳) ۴۰

۴) ۶۰

درس Box

۱) قانون عمومی بازتاب: برای همهٔ انواع موج هنگام بازتاب (از یک مانع)، زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتابش برابر است.

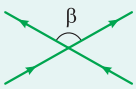


$$\theta_i = \theta_r$$

$\theta_i =$ زاویهٔ تابش

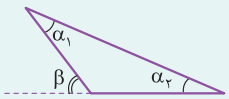
$\theta_r =$ زاویهٔ بازتاب

۲) زاویهٔ بین دو پرتو، هنگامی معنا دارد که این دو پرتو، اضلاع آن زاویه را بسازند و هر دو پرتو از رأس آن زاویه، رو به خارج باشند. مثلاً در شکل روبه‌رو زاویهٔ بین دو پرتو با β نشان داده شده است:



۳) یادآوری از درس هندسه:

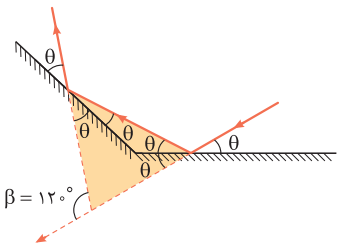
در یک مثلث، هر زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن:



$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ پرتوی تابش بر سطح آینهٔ (۱) و پرتوی بازتاب از سطح آینهٔ (۲) را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را قطع کنند. زاویهٔ بین این دو پرتو را با β نشان می‌دهیم که ۱۲۰° است.

با توجه به نکتهٔ ۳ درس‌باکس در مثلث رنگی می‌توان نوشت:



$$\beta = ۲\theta + ۲\theta \Rightarrow ۱۲۰ = ۴\theta \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

۴۷ اختلاف طول موج دو موج الکترومغناطیسی **A** و **B** در خلأ برابر ۶۰۰ nm و بسامد موج **A**، ۴ برابر بسامد موج **B** است. انرژی هر یک از فوتون‌های مربوط به موج **A** چند الکترون ولت است؟ **(hc = ۱۲۴۰ eV.nm)**

۱) ۰/۶۲ ۲) ۱/۵۵

۳) ۶/۲ ۴) ۱۵/۵

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔

گام اول: طول موج A را حساب می‌کنیم. طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{c}{f}$ و با توجه به این‌که بسامد موج A، ۴ برابر بسامد موج B است، در می‌یابیم طول موج A، $\frac{۱}{۴}$ طول موج B است. از طرفی با توجه به اختلاف طول موج A و B داریم:

$$\begin{cases} \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{f_B}{f_A} = \frac{۱}{۴} \\ \lambda_B - \lambda_A = ۶۰۰\,nm \end{cases} \Rightarrow ۴\lambda_A - \lambda_A = ۶۰۰\,nm \Rightarrow \lambda_A = ۲۰۰\,nm$$

گام دوم: انرژی هر یک از فوتون‌های موج A را حساب می‌کنیم:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow E_A = \frac{۱۲۴۰}{۲۰۰} = ۶/۲\,eV$$

۴۸ شدت تابشی امواج الکترومغناطیسی که به سطحی به مساحت $200\ cm^2$ می‌رسد، برابر $4\ W/m^2$ است. اگر بسامد این موج $5\times10^{14}\ Hz$ باشد، در هر دقیقه چند فوتون به این سطح می‌رسد؟ $(h = 6\times10^{-34}\ J\cdot s)$

۱) $1/6\times10^{19}$
۲) $1/6\times10^{20}$
۳) $9/6\times10^{19}$
۴) $9/6\times10^{20}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: انرژی هر فوتون را حساب می‌کنیم:

$$E_{\text{فوتون}} = hf \Rightarrow E_{\text{فوتون}} = 6\times10^{-34}\times5\times10^{14} = 3\times10^{-19}\ J$$

گام دوم: انرژی که در هر دقیقه به سطح می‌رسد را حساب می‌کنیم:

$$I = \frac{E}{At} \Rightarrow 4 = \frac{E}{200\times10^{-4}\times60} \Rightarrow E = 4/8\ J$$

گام سوم: تعداد فوتون‌ها را به دست می‌آوریم:

$$E = nE_{\text{فوتون}} \Rightarrow 4/8 = n\times3\times10^{-19} \Rightarrow n = 1/6\times10^{19}$$

۴۹ **کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ مدل‌های اتمی تامسون و رادرفورد درست است؟**

۱) در مدل اتمی تامسون، بار مثبت که سهم ناچیزی در جرم اتم دارد، به طور همگن در سراسر آن پخش شده است.

۲) در مدل اتمی رادرفورد، با حرکت الکترون به دور هسته، طول موج امواج الکترومغناطیسی گسیلی از آن به تدریج افزایش می‌یابد.

۳) مدل اتمی رادرفورد، برخلاف مدل اتمی تامسون، طیف خطی گسیل‌شده از اتم‌ها را توجیه می‌کند.

۴) در مدل اتمی رادرفورد، بنابر فیزیک کلاسیک، حرکت شتابدار الکترون به دور هسته، سبب تابش امواج الکترومغناطیسی می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق متن کتاب درسی، گزینهٔ (۴) صحیح است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱) نادرست است؛ زیرا در مدل اتمی تامسون، بار منفی که سهم ناچیزی در جرم اتم دارد، به طور همگن در سراسر آن پخش شده است.

گزینهٔ (۲) نادرست است؛ زیرا افزایش طول موج امواج الکترومغناطیسی گسیلی در اثر نزدیک‌شدن چرخش الکترون به هسته، ناسازگاری مدل رادرفورد با واقعیت و نارسایی این مدل است.

گزینهٔ (۳) نادرست است؛ زیرا هیچ‌یک از مدل‌های رادرفورد و تامسون، طیف خطی گسیل‌شده از اتم‌ها را توجیه نمی‌کنند.

گزینهٔ (۴) درست است؛ زیرا مدل رادرفورد بر مبنای فیزیک کلاسیک ارائه شده است.

۵۰ با تابش نوری با بسامد f بر سطح یک فلز، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد، برای افزایش بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها کدام‌یک از تغییرهای زیر مؤثر است؟

الف) زمان تابش نور را افزایش دهیم.

ب) از فلزی با بسامد آستانهٔ کم‌تر استفاده کنیم.

پ) از نوری با بسامد بیشتر از f استفاده کنیم.

ت) بدون تغییر بسامد، شدت نور تابیده را افزایش دهیم.

۱) الف و ت ۲) ب و پ

۳) ب و ت ۴) الف و پ

Hint در پدیدهٔ فوتوالکتریک، باید تأثیر تغییر بسامد نور، تغییر بسامد آستانه در اثر تغییر فلز و تغییر شدت نور تابیده را بر انرژی جنبشی بررسی کنید.

درس Box قانون پایستگی انرژی در پدیدهٔ فوتوالکتریک بیان می‌کند که: $hf = W + K$

اگر W برابر با W_0 (تابع کار فلز) شود، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها بیشینه می‌شود و داریم:

$$K_{max} = hf - W_0 = hf - hf_0$$

از رابطهٔ بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم که با افزایش شدت تابش، مقدار انرژی که به هر الکترون می‌رسد تا از سطح فلز کنده شود تغییر نمی‌کند، در واقع انرژی جنبشی فقط تابع بسامد نور فرودی و جنس فلز (تابع کار) است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها، تأثیر تغییر f و f_0 را بررسی می‌کنیم:

$$K_{max} = hf - \underbrace{hf_0}_{\text{تابع کار فلز}}$$

با توجه به رابطهٔ بالا می‌بینیم که با افزایش بسامد نور فرودی و با تغییر فلز و کاهش بسامد آستانه، بیشینهٔ انرژی جنبشی افزایش می‌یابد.

افزایش زمان تابش نور و افزایش شدت نور تابیده‌شده باعث افزایش تعداد فوتوالکترون‌ها می‌شود ولی تأثیری روی انرژی جنبشی ندارد.

۵۱ الکترون در اتم هیدروژن در تراز $n = ۴$ قرار دارد. این الکترون مستقیماً به حالت پایه می‌رود و فوتون گسیلی به فلزی برخورد می‌کند که تابع کار آن $۵/۲۵\ eV$ است. بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از فلز چند الکترون ولت است؟ $(E_R = ۱۳/۶\ eV)$

۱) ۴/۴
۲) ۷/۵
۳) ۷/۲۵
۴) ۴/۲۵

مشاوره این تست مشابه سؤال کنکور ریاضی نوبت اول ۱۴۰۳ است.

Hint ابتدا به کمک رابطهٔ ریدبرگ، انرژی فوتون گسیلی را محاسبه کنید و سپس در رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی، داده‌ها را جای‌گذاری کنید.

درس Box

۱) انرژی الکترون در اتم هیدروژن در مدار nاُم:

$$E_n = \frac{-۱۳/۶}{n^۲}$$ ← شمارهٔ مدار الکترون

وقتی در اتم هیدروژن، الکترون در یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) به یک حالت مانا با انرژی کم‌تر (E_L) می‌رود یک فوتون گسیل می‌کند که انرژی این فوتون از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$$E_{\text{فوتون}} = E_U - E_L$$

۲) بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در پدیدهٔ فوتوالکتریک از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شود:

$$K_{max} = E_{\text{فوتون}} - \underset{\text{تابع‌کار}}{W_۰}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا باید انرژی فوتون گسیلی را محاسبه کنیم. طبق رابطهٔ ریدبرگ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{فرودی}} = \dfrac{-۱۳/۶}{n^۲} \\ E_{\text{فرودی}} = E_۴ - E_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow E_۴ - E_۱ = -۱۳/۶\left(\frac{۱}{۴^۲} - \frac{۱}{۱^۲}\right) = -۱۳/۶\left(\frac{۱}{۱۶} - ۱\right)$$

$$\Rightarrow E_{\text{فرودی}} = -۱۳/۶ \times \left(\frac{-۱۵}{۱۶}\right) = ۱۲/۷۵\ eV$$

گام دوم: در رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی، $E_{\text{فرودی}}$ و $W_۰$ را داریم، پس:

$$K_{max} = E_{\text{فرودی}} - W_۰ = ۱۲/۷۵ - ۵/۲۵ = ۷/۵\ eV$$

۵۲ در آزمایش فوتوالکتریک طول موج آستانهٔ فلزی $400\ nm$ است. نوری با طول موج λ به فلز می‌تابد و سبب گسیل فوتوالکترونی با بیشینهٔ تندی $8\times10^{5}\ m/s$ می‌شود. λ چند نانومتر است؟ $(e=1/6\times10^{-19}C\ ,c=3\times10^{8}\ m/s,h=4\times10^{-15}eV.s,m_e=9\times10^{-31}\ kg)$

۱) ۸۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۵۰

مشاوره اثر فوتوالکتریک در اکثر کنکورهای سال‌های اخیر مطرح شده است سعی کنید محاسبات مربوط به آن را بیشتر تمرین کنید.

Hint ابتدا بیشینهٔ انرژی جنبشی را محاسبه کنید و سپس از رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکتریک، طول موج نور تابیده‌شده را به دست آورید. به یکاهای h و λ توجه کنید و کمیت‌ها را در رابطه براساس یکای SI جای‌گذاری کنید.

درس Box

با توجه به معادلهٔ فوتوالکتریک می‌توانیم بنویسیم:

$$K_{max}=h\,c\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}\right)$$

(c: تندی نور در خلأ (m/s)، λ: طول موج تابشی به سطح فلز، λ_0: طول موج آستانه)

انرژی جنبشی از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شود:

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا بیشینهٔ انرژی جنبشی را به دست می‌آوریم:

$$K_{max}=\frac{1}{2}m_ev^2=\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times(8\times10^{5})^2=\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times64\times10^{10}=4/5\times64\times10^{-21}J$$

گام دوم: با استفاده از معادلهٔ فوتوالکتریک داریم:

$$K_{max}=hc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}\right)\Rightarrow 4/5\times64\times10^{-21}=4\times10^{-15}\times3\times10^{8}\times\underbrace{1/6\times10^{-19}}_{\text{تبدیل J به er}}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{400}\right)\times\underbrace{10^{+9}}_{\text{تبدیل m به nm}}$$

$$\Rightarrow\frac{4/5\times64\times10^{-21}}{1/6\times10^{-19}}=1200\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{400}\right)=\frac{1200}{\lambda}-3$$

$$\Rightarrow1/8+3=\frac{1200}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{1200}{4/8}=250\ nm$$

۵۳ کدام‌یک از موارد زیر، دربارهٔ الکترونی که در اتم هیدروژن از مدار $n_1 = 2$ به $n_2 = 4$ گذار می‌کند، درست است؟

$(e = 1/6\times10^{-19}C\ ,\ E_R = 13/6\ eV)$

۱) این الکترون، فوتونی با انرژی $4/08\times10^{-19}J$ گسیل می‌کند.

۲) این الکترون، فوتونی با انرژی $4/08\times10^{-19}J$ جذب می‌کند.

۳) این الکترون، فوتونی با انرژی $5/44\times10^{-19}J$ گسیل می‌کند.

۴) این الکترون، فوتونی با انرژی $5/44\times10^{-19}J$ جذب می‌کند.

Hint فقط کافیه به این نکته توجه کنی که گذار به مدار بالا بوده، پس با جذب انرژی همراه است و داده‌ها را در رابطهٔ $E_n = \frac{-E_R}{n^2}$ جای‌گذاری کنی تا اختلاف انرژی دو مدار رو به دست بیاری.

درس Box طبق فرضیه‌های بور، الکترون فقط روی مدارهای خاصی می‌تواند گردش کند و فقط مقدارهای معینی از انرژی را می‌تواند داشته باشد. انرژی الکترون در مدار nام از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شود:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2}$$

- در رابطهٔ بالا E_R اندازهٔ انرژی در مدار nاُم پایه $(n=1)$ است که برابر با $13/6\ eV$ است.
- برای تبدیل یکای eV به J داریم: $1\ eV = 1/6\times10^{-19}\ J$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ از رابطهٔ $E_n = -\frac{E_R}{n^2}$ برای حل این سؤال استفاده می‌کنیم:

$$E_4 - E_2 = -\frac{E_R}{(4)^2} - (-\frac{E_R}{2^2}) = \frac{-E_R}{16} + \frac{E_R}{4} = \frac{3}{16}E_R = \frac{3}{16}\times13/6\ eV$$

$$\Rightarrow\ E_4 - E_2 = \frac{3}{16}\times13/6\times1/6\times10^{-19}J = 4/08\times10^{-19}\ J$$

الکترون برای گذار از مدار $n=2$ به مدار $n=4$ باید $4/08\times10^{-19}J$ انرژی جذب کند.

۵۴ در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، اختلاف شعاع مدار الکترون در سومین و چهارمین حالت برانگیخته چند پیکومتر است؟ (شعاع بور برای اتم هیدروژن $۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱}m$ است.)

۱) ۵۲/۹ ۲) ۳۷۰/۳ ۳) ۴۷۶/۱ ۴) ۵۲۹

مشاوره این سؤال مشابه کنکور خارج تجربی ۸۵ و کنکور ریاضی ۹۵ است.

Hint فقط کافیه شمارهٔ مدار مربوط به سومین $(n=۴)$ و چهارمین $(n=۵)$ حالت برانگیخته را پیدا کنی و در رابطهٔ مدل اتمی بور $(a_n = a_۰n^۲)$ جای‌گذاری کنی.

درس Box طبق مدل اتمی بور، شعاع مدارهای اتم هیدروژن نمی‌توانند هر مقداری داشته باشند و فقط مقادیر خاصی را می‌توانند به خود بگیرند؛ یعنی:

$r_n = n^۲ a_۰$ → شعاع بور (کوچک‌ترین مدار اتم هیدروژن)

n: شمارهٔ مدار، nام: شعاع مدار

پاسخ خیلی تشریحی ✔ سومین حالت برانگیخته یعنی $n_۱ = ۴$ و چهارمین حالت برانگیخته یعنی $n_۲ = ۵$. شعاع هر مدار در مدل اتمی بور از رابطهٔ $r_n = n^۲a_۰$ محاسبه می‌شود؛ پس اختلاف شعاع دو مدار برابر است با:

$$\Delta r = r_۵ - r_۴ = a_۰(۵^۲ - ۴^۲) = ۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱}\times(۲۵-۱۶) = ۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱}\times۹ = ۴۷/۶۱\times۱۰^{-۱۱}m$$

$$\Rightarrow \Delta r = ۴۷۶/۱\,pm$$

۵۵ انرژی فوتون متعلق به کوتاه‌ترین طول موج رشتهٔ براکت ($n' = ۴$) هیدروژن اتمی چند الکترون‌ولت است؟

$(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm\ ,\ R = ۰/۰۱\ (nm)^{-۱})$

۱) ۰/۲۷۹ ۲) ۰/۷۷۵

۳) ۲/۷۹ ۴) ۷/۷۵

Hint ابتدا به کمک معادلهٔ ریدبرگ طول موج را حساب کنید و سپس با استفاده از رابطهٔ $E = \frac{hc}{\lambda}$، انرژی فوتون را به دست آورید.

درس Box

۱) مقدار انرژی هر فوتون با بسامد نور رابطهٔ مستقیم دارد و از معادلهٔ مقابل به دست می‌آید: $E = hf$

اگر در معادلهٔ بالا، معادل f یعنی $\frac{c}{\lambda}$ را جای‌گذاری کنیم به رابطهٔ مقابل می‌رسیم: $E = \frac{hc}{\lambda}$

۲) طول موج طیف‌های اتمی گاز هیدروژن را دانشمندی به نام ریدبرگ به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}})$$

ثابت ریدبرگ — طول موج — شمارهٔ تراز پایین — شمارهٔ تراز بالا

- در هر رشته، کوتاه‌ترین طول موج مربوط به $n = \infty$ است.
- در معادلهٔ ریدبرگ با قراردادن n' های متفاوت، به رشته‌های خاصی می‌رسیم که در جدول زیر مشاهده می‌کنید:

نام رشته	n'	n	معادلهٔ ریدبرگ
لیمان	۱	۲,۳,۴,...	$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{۱^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}})$
بالمر	۲	۳,۴,۵,...	$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{۲^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}})$
پاشن	۳	۴,۵,۶,...	$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{۳^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}})$
براکت	۴	۵,۶,۷,...	$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{۴^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}})$
پفوند	۵	۶,۷,۸,...	$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{۵^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}})$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: کوتاه‌ترین طول موج با $n = \infty$ متناظر است، پس طبق رابطهٔ $\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}})$ داریم:

$$\frac{۱}{\lambda} = ۰/۰۱(\frac{۱}{۴^{۲}} - \frac{۱}{\infty}) = \frac{۱}{۱۶۰۰} \Rightarrow \lambda = ۱۶۰۰\ nm$$

گام دوم: از معادلهٔ $E = \frac{hc}{\lambda}$، انرژی فوتون را محاسبه می‌کنیم:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow E = \frac{۱۲۴۰}{۱۶۰۰} = ۰/۷۷۵\ eV$$

۵۶ در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن، انرژی فوتون متعلق به اولین خط رشتهٔ براکت $(n' = ۴)$ برابر $E_۱$، و انرژی فوتون متعلق به دومین خط رشتهٔ بالمر $(n' = ۲)$ برابر $E_۲$ است. $E_۱ - E_۲$ برابر چند ریدبرگ است؟

۱) ۰/۲۱ ۲) −۰/۲۱

۳) ۰/۱۶۵ ۴) −۰/۱۶۵

Hint از رابطهٔ ریدبرگ، انرژی فوتون مربوط به اولین خط رشتهٔ براکت یعنی $n' = ۴$ و $n = ۵$ و دومین خط رشتهٔ بالمر یعنی $n' = ۲$ و $n = ۴$ را حساب کنید و اختلاف آن‌ها را به دست آورید.

درس Box طبق رابطهٔ ریدبرگ داریم:

$$E_U - E_L = hf \Rightarrow \left(\frac{-E_R}{n_U^۲}\right) - \left(\frac{-E_R}{n_L^۲}\right) = hf$$

$$\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}} E_R\left(\frac{۱}{n_L^۲} - \frac{۱}{n_U^۲}\right) = \frac{hc}{\lambda}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس برای هر حالت، انرژی را بر حسب E_R محاسبه می‌کنیم:

$$E = E_R\left(\frac{۱}{n_L^۲} - \frac{۱}{n_U^۲}\right) \Rightarrow \begin{cases} E_۱ = E_R\left(\frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۲۵}\right) = E_R\left(\frac{۹}{۴۰۰}\right) \\ E_۲ = E_R\left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۱۶}\right) = E_R\left(\frac{۳}{۱۶}\right) \end{cases}$$

حال خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$E_۱ - E_۲ = E_R\left(\frac{۹}{۴۰۰}\right) - E_R\left(\frac{۳}{۱۶}\right) = -۰/۱۶۵E_R$$

۵۷ در اتم هیدروژن، الکترونی در چهارمین حالت برانگیخته است. طول موج پرتوی فرابنفشی که این الکترون می‌تواند گسیل کند، چند میکرومتر است؟ $(R = ۰/۰۱\ (nm)^{-۱})$

۱) $\frac{۵}{۴۸}$ ۲) $\frac{۸}{۷۵}$ ۳) $\frac{۵}{۹۶}$ ۴) $\frac{۴}{۷۵}$

Hint حالت پایه $n' = ۱$ و چهارمین حالت برانگیخته $n = ۵$ است؛ پس داده‌ها را در رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲})$ جای‌گذاری می‌کنیم.

درس Box درس‌باکس (۲) تست ۵۵ را مطالعه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ چهارمین حالت برانگیخته یعنی $n = ۵$. چون طول موج پرتوی فرابنفش خواسته شده، طبق جدول ۴-۱ کتاب درسی، الکترون باید به مدار $n' = ۱$ گذار انجام دهد؛ پس با جای‌گذاری داده‌ها در معادلهٔ ریدبرگ داریم:

$$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲}) = ۰/۰۱(\frac{۱}{۱^۲} - \frac{۱}{۵^۲}) = ۹۶ \times ۱۰^{-۴}\ nm^{-۱}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{۱۰^۴}{۹۶} \times \underbrace{۱۰^{-۹}}_{\text{تبدیل m به nm}} \times \underbrace{۱۰^۶}_{\text{تبدیل m به μm}} = \frac{۱۰}{۹۶} = \frac{۵}{۴۸}\ \mu m$$

۵۸ کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) در پدیدهٔ فلوئورسانی، طول موج نور گسیل‌یافته معمولاً برابرِ همان طول موج نور فرودی یا کوچک‌تر از آن است.

ب) برخی از خط‌های تاریک موجود در طیف خورشید، ناشی از جذب طول موج‌های مربوط به این خط‌ها توسط گازهای جو خورشید است.

پ) همهٔ اجسام در هر دمایی از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند که در دماهای معمولی بیشتر تابش‌های گسیل‌شده، در ناحیهٔ فروسرخ قرار دارند.

ت) طیف گسیلی جسم جامد، برخلاف گازهای کم‌فشار و رقیق، خطی و ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است.

۱) الف و ب ۲) الف و ت

۳) پ و ت ۴) ب و پ

درس Box

- در پدیدهٔ فلوئورسانی، طول موج گسیل‌یافته نمی‌تواند از طول موج نور فرودی کوتاه‌تر باشد و معمولاً برابر همان طول موج نور فرودی یا بزرگ‌تر از آن است.
- در سال ۱۸۱۴ با مشاهدهٔ دقیق طیف خورشید، خط‌های تاریک نازکی در آن کشف شد که تجربه نشان داد خط‌های تاریکی که فرانهوفر در طیف خورشید کشف کرده ناشی از جذب طول موج‌های مربوط به این خط‌ها توسط گازهای موجود در جو خورشید است و خط‌های دیگر به سبب جذب نور در گازهای جو زمین پدید می‌آیند.
- همهٔ اجسام در هر دمایی باشند از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند و در دماهای معمولی بیشتر تابش گسیل‌شده از سطح اجسام در ناحیهٔ فروسرخ طیف قرار دارد.
- تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد ناشی از برهم‌کنش‌های قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است در حالی که گازهای کم‌فشار و رقیق که اتم‌های منفرد آن‌ها از برهم‌کنش‌های قوی موجود در جسم جامد آزادند به جای طیف پیوسته، طیف گسسته، گسیل می‌کنند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس موارد «ب» و «پ» درست و موارد «الف» و «ت» نادرست هستند.

۵۹ الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n = ۷$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اگر این الکترون به حالت پایه برود، به ترتیب از راست به چپ، امکان گسیل چند نوع فوتون با انرژی متفاوت، و چند نوع فوتون در ناحیهٔ فروسرخ وجود دارد؟

۱) ۲۱، ۱۰
۲) ۲۱، ۱۱
۳) ۲۸، ۱۰
۴) ۲۸، ۱۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تمام گذارهای ممکن یعنی گذار از مدارهای $n > ۱$ به مدار $n' = ۱$؛ پس:

رشتهٔ لیمان ← $(۱ \to ۲)\ (۱ \to ۳)\ (۱ \to ۴)\ (۱ \to ۵)\ (۱ \to ۶)\ (۱ \to ۷)$

رشتهٔ بالمر ← $(۲ \to ۳)\ (۲ \to ۴)\ (۲ \to ۵)\ (۲ \to ۶)\ (۲ \to ۷)$

رشتهٔ پاشن ← $(۳ \to ۴)\ (۳ \to ۵)\ (۳ \to ۶)\ (۳ \to ۷)$

رشتهٔ براکت ← $(۴ \to ۵)\ (۴ \to ۶)\ (۴ \to ۷)$

رشتهٔ پفوند ← $(۵ \to ۶)\ (۵ \to ۷)$

رشتهٔ همفریس (اسم این رشته در کتاب درسی نیامده است و لازم نیست حفظ باشید) ← $(۶ \to ۷)$

تمام گذارهای ممکن، ۲۱ گذار است.

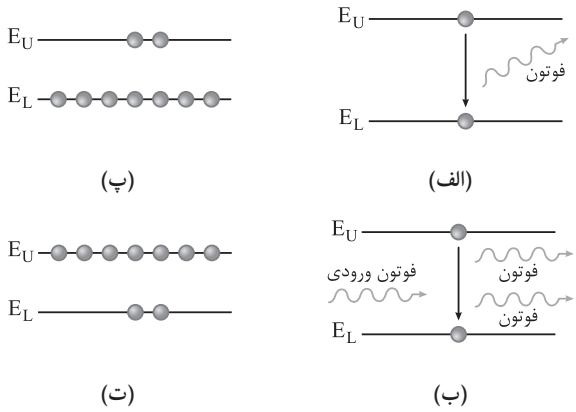
یه‌جور دیگه اگر در هیدروژن، الکترون در مدار nام قرار داشته باشد، تعداد تمام گذارهای ممکن الکترون برای این‌که به حالت پایه برسد، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{تعداد کل} = \frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$$

تمام طول موج‌های رشته‌های پاشن $(n' = ۳)$، براکت $(n' = ۴)$، پفوند $(n' = ۵)$ و همفریس $(n' = ۶)$ مربوط به ناحیهٔ طیفی فروسرخ است؛ پس جمعاً ۱۰ نوع فوتون در ناحیهٔ فروسرخ قرار دارند.

۶۰ به ترتیب از راست به چپ، کدام شکل نشان‌دهندهٔ فرایند گسیل القایی، و کدام شکل نشان‌دهندهٔ وضعیت وارونی جمعیت در لیزر است؟

مشاوره این سؤال مشابه کنکور داخل تجربی نوبت دوم ۱۴۰۲ است.



۱) الف، پ
۲) الف، ت
۳) ب، پ
۴) ب، ت

Hint مفاهیم مربوط به لیزر را دقیق مطالعه کنید.

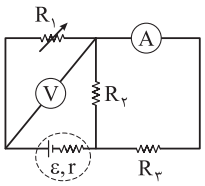
درس Box

۱) در حالت معمول، بیشتر الکترون‌ها در تراز پایه با انرژی کم‌تر قرار دارند. اگر اتم انرژی لازم را دریافت کند، الکترون‌های بیشتری به تراز انرژی بالاتر برانگیخته می‌شوند و تعداد الکترون‌ها در ترازهایی معروف به تراز شبه‌پایدار نسبت به تراز پایین‌تر بیشتر می‌شود که در این حالت وارونی جمعیت رخ داده است.

۲) اگر الکترون به طور خودبه‌خودی از تراز بالاتر به تراز پایین‌تر گذاری انجام دهد، فوتون در جهت کاتوره‌ای گسیل می‌کند (گسیل خودبه‌خودی)، اما اگر یک فوتون که انرژی آن دقیقاً برابر اختلاف انرژی دو تراز باشد، الکترون برانگیخته را تحریک کند تا به تراز پایین‌تر برود، فوتون خروجی دقیقاً هم‌جهت، هم‌بسامد و هم‌فاز با فوتون ورودی گسیل می‌شود که این فرایند گسیل القایی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ شکل (الف) مربوط به گسیل خودبه‌خودی و شکل (ب) مربوط به گسیل القایی است. وارونی جمعیت نیز در شکل (ت) اتفاق افتاده است.

۶۱ در مدار شکل روبه‌رو، با کاهش مقاومت R_1، مقدارهایی که آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب چگونه تغییر می‌کند؟



۱) افزایش ـ ثابت
۲) کاهش ـ افزایش
۳) افزایش ـ کاهش
۴) کاهش ـ ثابت

پاسخ‌خیلی تشریحی ✔

گام اول: با کاهش مقاومت R_1، مقاومت معادل مدار کاهش می‌یابد، در نتیجه جریان خروجی از باتری (I) افزایش می‌یابد. با توجه به رابطهٔ $V_{\text{باتری}} = \varepsilon - Ir$، با افزایش جریان خروجی از باتری، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری کاهش می‌یابد.

گام دوم: جریان کل (I) بین دو مقاومت موازی R_2 و R_3 تقسیم می‌شود. از آن‌جا که مقاومت‌های R_3 و R_2 ثابت هستند، جریان کل که در حالت دوم افزایش یافته، بین آن‌ها تقسیم شده و جریان عبوری از R_2 و R_3 نیز به همان نسبت زیاد می‌شود؛ پس مقدار آمپرسنج که جریان عبوری از R_3 را نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

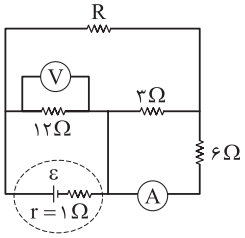
گام سوم: اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری، برابر با مجموع اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت R_1 و مقاومت R_2 است. به عبارتی داریم:

$$V_{\text{باتری}} = V_{R_1} + V_{R_2}$$

$V_{\text{باتری}}$: کاهش ↓ — V_{R_1}: افزایش ↓

با توجه به کاهش اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری و افزایش اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت R_2 (به دلیل افزایش جریان عبوری از آن)، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت R_1 که همان عدد ولت‌سنج است، کاهش می‌یابد.

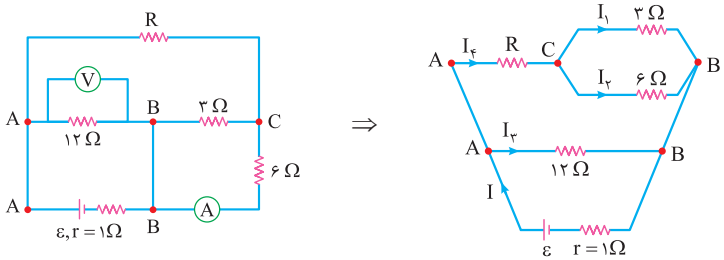
۶۲ در مدار شکل مقابل، ولت‌سنج آرمانی $12\ V$ و آمپرسنج آرمانی $1\ A$ را نشان می‌دهند. نیروی محرکهٔ مولد چند ولت است؟



۱) ۸
۲) ۱۴
۳) ۱۵
۴) ۱۶

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل، مدار را به صورت ساده‌تر رسم می‌کنیم.



گام دوم: جریان عبوری از آمپرسنج، همان جریان عبوری از مقاومت $6\ \Omega$ است. مقاومت $6\ \Omega$ و $3\ \Omega$ با هم موازی هستند، بنابراین اختلاف پتانسیل الکتریکی آن‌ها با هم برابر است.

$$V_{3\Omega} = V_{6\Omega} \Rightarrow 3 \times I_1 = 6 \times I_2 \xrightarrow{I_2 = 1A} 3I_1 = 6 \Rightarrow I_1 = 2\ A$$

گام سوم: جریان عبوری از مقاومت $12\ \Omega$ را به دست می‌آوریم:

$$V_{\text{ولت‌سنج}} = 12 \times I_3 \Rightarrow 12 = 12 \times I_3 \Rightarrow I_3 = 1\ A$$

گام چهارم: طبق قاعدهٔ انشعاب در شکل بالا داریم:

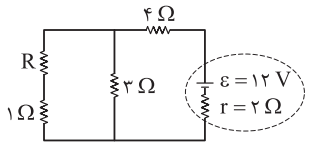
در گره C: $I_4 = I_1 + I_2 \Rightarrow I_4 = 2 + 1 = 3\ A$

کل $I = I_3 + I_4 \Rightarrow I = 1 + 3 = 4\ A$

گام پنجم: اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با عدد ولت‌سنج است، بنابراین داریم:

$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - I_{\text{کل}} r \Rightarrow 12 = \varepsilon - 4(1) \Rightarrow \varepsilon = 16\ V$$

۶۳ در مدار شکل مقابل، اگر توان مصرفی مقاومت $۳\,\Omega$، ۱۲ برابر توان مصرفی مقاومت $۱\,\Omega$ باشد، توان مصرفی مقاومت $۴\,\Omega$ چند وات است؟



۱) ۳۶

۲) ۱۸

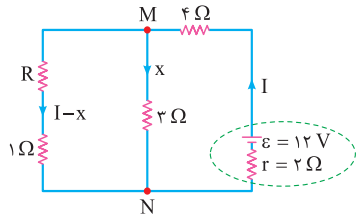
۳) ۹

۴) ۴/۵

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در شکل مقابل تقسیم‌بندی جریان I، بین دو شاخه مشخص شده است.

جریان کل (خروجی از باتری) را I در نظر گرفتیم.



گام دوم: توان مصرفی مقاومت $۳\,\Omega$، ۱۲ برابر توان مصرفی مقاومت $۱\,\Omega$ است، بنابراین داریم:

$$P_{۳\Omega} = ۱۲P_{۱\Omega} \xrightarrow{P=RI^۲} ۳(x)^۲ = ۱۲(۱)(I-x)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۴(I-x)^۲ \Rightarrow x = ۲I - ۲x \Rightarrow x = \frac{۲I}{۳}$$

گام سوم: اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطهٔ M و N را در نظر می‌گیریم تا مقاومت R را به دست آوریم:

$$V_{MN} = V_{MN} \Rightarrow x(۳) = (I-x)(R+۱) \Rightarrow \frac{۲I}{۳}\times ۳ = \frac{I}{۳}\times(R+۱) \Rightarrow ۶ = R+۱ \Rightarrow R = ۵\,\Omega$$

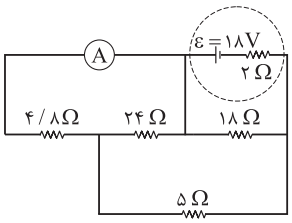
گام چهارم: جریان کل مدار را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} = \frac{۱۲}{(۴+\frac{۶\times ۳}{۶+۳})+۲} = \frac{۱۲}{۸} = ۱/۵\ A$$

گام پنجم: توان مصرفی مقاومت $۴\,\Omega$ به دست می‌آید.

$$P_{۴\Omega} = RI^۲ = ۴\times(\frac{۳}{۲})^۲ = ۹\ W$$

۶۴ در مدار زیر، آمپرسنج آرمانی، جریان چند آمپر را نشان می‌دهد؟

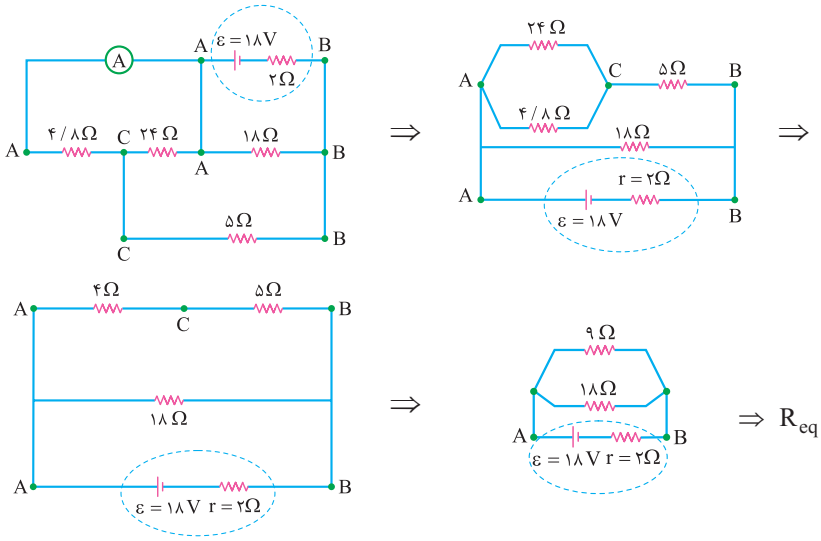


۱) ۱/۲۵
۲) ۱/۵
۳) ۱/۷۵
۴) ۲/۲۵

مشاوره یکی از پارامترهای مهم در جلسهٔ کنکور، مدیریت زمان است؛ به همین دلیل توصیه می‌شود سؤالات تحلیل مدار را که وقت‌گیر هستند، در اولویت‌های بعدی حل سؤال قرار دهید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا نقاط هم‌پتانسیل را نام‌گذاری می‌کنیم و مدار را به صورت ساده‌تر درمی‌آوریم:

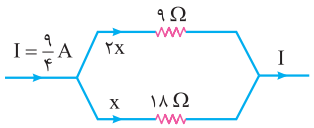


$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{۹\times۱۸}{۹+۱۸} = ۶\ \Omega$$

گام دوم: جریان خروجی از باتری را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} = \frac{۱۸}{۶+۲} = \frac{۱۸}{۸} = \frac{۹}{۴}\ A$$

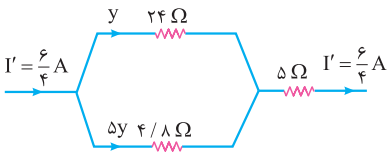
گام سوم: جریان I را بین شاخه‌های بالا و پایین تقسیم می‌کنیم:



$$\Rightarrow ۳x = \frac{۹}{۴} \Rightarrow x = \frac{۳}{۴}\ A$$

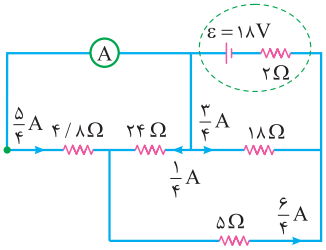
بنابراین جریان عبوری از مقاومت ۱۸ Ω، برابر $\frac{۳}{۴}$ A و جریان عبوری از شاخهٔ بالایی که ۹ Ω است، برابر $\frac{۶}{۴}$ A است.

گام چهارم: جریان عبوری از شاخهٔ بالایی را بین مقاومت‌ها تقسیم می‌کنیم:



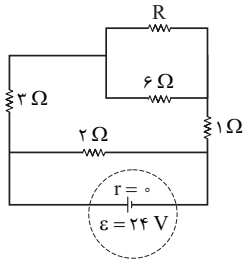
$$y + ۵y = \frac{۶}{۴} \Rightarrow ۶y = \frac{۶}{۴} \Rightarrow y = \frac{۱}{۴}\ A$$

گام پنجم: جریان‌های به‌دست‌آمده را در مدار رسم می‌کنیم، با توجه به این‌که جریانی که از آمپرسنج می‌گذرد، همان جریانی است که از مقاومت ۴/۸ اهمی عبور می‌کند، داریم:



$$I_A = \frac{۵}{۴}\ A = ۱/۲۵ A$$

۶۵ در مدار زیر، اگر توانِ مصرفی مقاومت ۳اهمی، $\frac{۹}{۸}$ برابر توانِ مصرفی مقاومت ۶اهمی باشد، توانِ مصرفی کلِ مدار چند وات است؟



۱) ۲۸۸

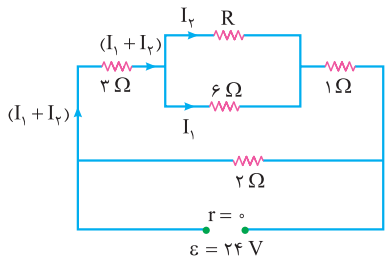
۲) ۳۶۰

۳) ۳۲۰

۴) ۳۸۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شکل زیر، شکل ساده‌شدهٔ مدار است و جریان عبوری از مقاومت ۳ Ω و جریان عبوری از مقاومت‌های ۶اهمی و R را نمایش می‌دهد.



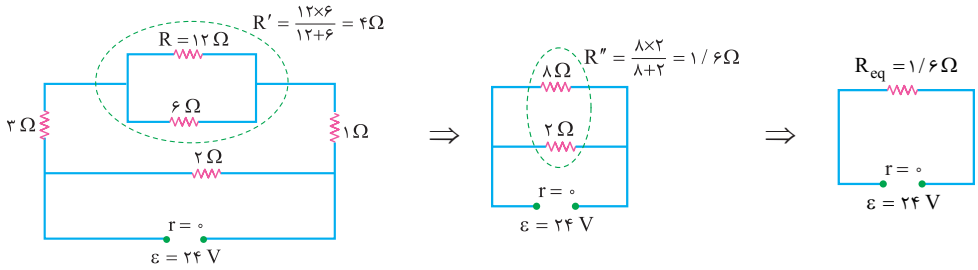
توان مصرفی مقاومت ۳اهمی، $\frac{۹}{۸}$ برابر توان مصرفی مقاومت ۶اهمی است؛ بنابراین طبق رابطهٔ $P = RI^۲$ و شکل گام اول، داریم:

$$P_{۳\Omega} = \frac{۹}{۸}P_{۶\Omega} \Rightarrow ۳(I_۱+I_۲)^۲ = \frac{۹}{۸}\times ۶I_۱^۲ \Rightarrow (I_۱+I_۲)^۲ = \frac{۹}{۴}I_۱^۲ \Rightarrow I_۱+I_۲ = \frac{۳}{۲}I_۱ \Rightarrow I_۱ = ۲I_۲$$

گام دوم: مقاومت‌های R و ۶اهمی موازیند.

$$۶I_۱ = RI_۲ \Rightarrow ۶\times ۲I_۲ = RI_۲ \Rightarrow R = ۱۲\Omega$$

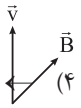
گام سوم: اختلاف پتانسیل دو سر مدار ثابت است و طبق رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$، برای محاسبهٔ توان کل باید مقاومت مدار را حساب کنیم:



گام چهارم: توان مصرفی کل مدار را به دست می‌آوریم:

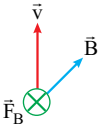
$$P = \frac{V^۲}{R_{eq}} = \frac{(۲۴)^۲}{۱/۶} = ۳۶۰\ W$$

۶۶ پوزیترونی با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در حرکت است و $\vec{v}$ و $\vec{B}$ در همین صفحه قرار دارند. در لحظهٔ نشان داده‌شده، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر پوزیترون کدام است؟



۱) $\otimes$ ۲) $\odot$ ۳) $\rightarrow$ ۴)

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ پوزیترون ذره‌ای است با جرم الکترون و بار پروتون؛ بنابراین بار الکتریکی آن مثبت است. به کمک قاعدهٔ دست راست جهت نیروی مغناطیسی به صورت درون‌سو است.



۶۷ در شکل زیر، یک آهنربای میله‌ای و یک عقربهٔ مغناطیسی در یک صفحه قرار دارند. اگر آهنربا حول مرکز خود و در جهت ساعتگرد یک دور کامل دوران کند، عقربهٔ مغناطیسی چند درجه و در چه جهتی دوران می‌کند؟



۱) ۳۶۰، ساعتگرد
۲) ۳۶۰، پادساعتگرد
۳) ۷۲۰، ساعتگرد
۴) ۷۲۰، پادساعتگرد

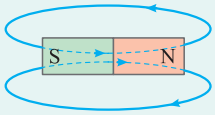
مشاوره این تست براساس یکی از فعالیت‌های کتاب درسی و مشابه کنکور ریاضی ۹۶ و کنکور ریاضی ۱۴۰۱ طراحی شده است.

Hint

کافی است آهنربا را یک دور کامل در جهت ساعتگرد بچرخانید و در هر حالت، عقربهٔ مغناطیسی را در جهت میدان مغناطیسی آهنربا قرار دهید.

درس Box

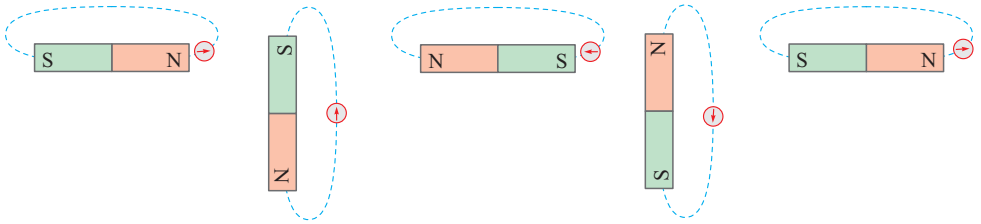
خطوط میدان مغناطیسی در اطراف آهنربا از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شوند، ولی جهت خطوط میدان مغناطیسی در داخل آهنربا از قطب S به سمت قطب N است.



جهت عقربهٔ مغناطیسی در هر نقطه از فضا جهت بردار میدان مغناطیسی در آن نقطه را نشان می‌دهد. دقت کنید قطب N عقربه، جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

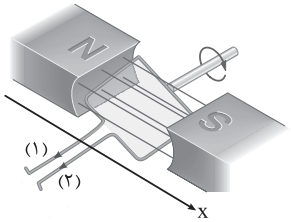
پاسخ خیلی تشریحی ✔

آهنربا را به صورت ساعتگرد یک دور کامل می‌چرخانیم و در هر مرحلهٔ ۹۰ درجه‌ای با توجه به این‌که جهت میدان مغناطیسی از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شود، جهت عقربهٔ مغناطیسی را مشخص می‌کنیم.



پس عقربهٔ مغناطیسی 360° و در جهت پادساعتگرد دوران می‌کند.

۶۸ در شکل زیر، حلقهٔ رسانای مستطیل‌شکلی که حامل جریان الکتریکی I است، درون میدان مغناطیسی یکنواخت، در جهت نشان داده شده می‌چرخد. جهت میدان مغناطیسی و جهت جریان I به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۱) در جهت محور x ، (۱)

۲) در جهت محور x ، (۲)

۳) در خلاف جهت محور x ، (۱)

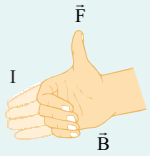
۴) در خلاف جهت محور x ، (۲)

Hint

جهت میدان مغناطیسی را مشخص کنید، سپس با توجه به جهت چرخش میله، جهت نیروهای وارد بر آن را تعیین کنید. در پایان به کمک قاعدهٔ دست راست جهت I را مشخص کنید.

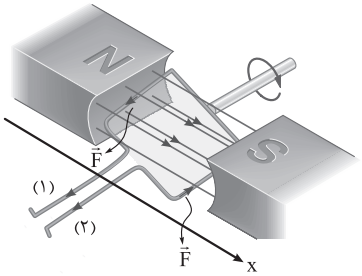
درس Box

جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم راست حامل جریان I که در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دارد، از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود، به این صورت که چهار انگشت دست راست را در جهت جریان قرار می‌دهیم، به گونه‌ای که جهت خم‌شدن چهار انگشت در جهت $\vec{B}$ باشد. در این صورت انگشت شست جهت نیرو را نشان می‌دهد.

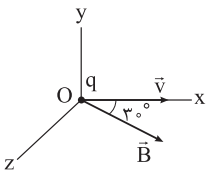


پاسخ خیلی تشریحی ✔

خطوط میدان مغناطیسی در اطراف آهنربا همواره از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شوند. پس میدان مغناطیسی در جهت محور x است. جهت چرخش میله نشان می‌دهد که نیروهای وارد بر اجزای حلقه مطابق شکل زیر است. حالا اگر از قاعدهٔ دست راست کمک بگیریم، به راحتی می‌توان فهمید که جریان I عبوری از حلقه در جهت (۱) است.



۶۹ در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = 5\mu C$ با تندی $40 km/s$ در جهت محور x پرتاب شده است و بردار سرعت آن با میدان مغناطیسی $B = 400 G$ که عمود بر محور y است، زاویهٔ 30° می‌سازد. نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره، برحسب نیوتون در لحظهٔ پرتاب کدام است؟



۱) $0/04\vec{j}$

۲) $0/004\vec{j}$

۳) $-0/04\vec{j}$

۴) $-0/004\vec{j}$

مشاوره این سؤال مشابه کنکور ریاضی ۱۴۰۱ طراحی شده است.

Hint ابتدا به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت نیرو را مشخص کنید، سپس برای محاسبهٔ اندازهٔ نیرو، داده‌های سؤال را در رابطهٔ $F = qvB\sin\theta$ جای‌گذاری کنید.

درس Box ۱) اگر ذره‌ای با بار الکتریکی q و سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در حال حرکت باشد، به آن نیروی $\vec{F}$ وارد می‌شود که اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

زاویهٔ بین بردار $\vec{v}$ و بردار $\vec{B}$

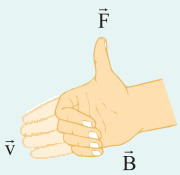
$$F = q\,v\,B\,\sin\theta$$

← نیروی مغناطیسی (N)

بار الکتریکی (C) — میدان مغناطیسی (T) — اندازهٔ سرعت (m/s)

۲) تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک مثبت در میدان مغناطیسی:

اگر ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی قرار بگیرد، مطابق شکل، طبق قاعدهٔ دست راست جهت نیروی مغناطیسی تعیین می‌شود. چهار انگشت دست راست را در جهت $\vec{v}$ می‌گیریم؛ به طوری‌که جهت خم‌شدن چهار انگشت، جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را نشان دهد، در این صورت شست دست جهت بردار نیرو $(\vec{F})$ را نشان می‌دهد.

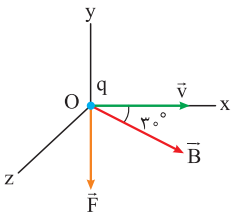


اگر بار ذره منفی بود، در نهایت جهت نیرو را برعکس می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** از رابطهٔ $F = qvB\sin\theta$، اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذره را به دست می‌آوریم:

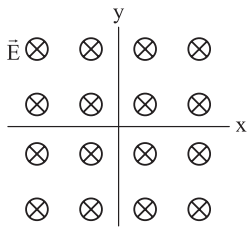
$$F = 5\times10^{-6}\times40\times10^{3}\times400\times10^{-4}\times\frac{1}{2} = 0/004\,N$$

گام دوم: برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره از قاعدهٔ دست راست کمک می‌گیریم:



پس نیروی مغناطیسی برابر $F = (-0/004\,N)\vec{j}$ می‌شود.

۷۰ در شکل زیر، میدان الکتریکی یکنواخت $E = ۵۰ N/C$، عمود بر صفحه و به سمت داخل آن است. پروتونی با تندی $۲۰۰ m/s$ در جهت محور y پرتاب می‌شود. اگر با اعمال میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، پروتون بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ میدان مغناطیسی $\vec{B}$ الزاماً درست است؟



الف) $\vec{B}$ در جهت محور x است.

ب) $\vec{B}$ در خلاف جهت محور x است.

پ) اندازهٔ $\vec{B}$ برابر $۰/۲۵ T$ است.

ت) کمینهٔ اندازهٔ $\vec{B}$ برابر $۰/۲۵ T$ است.

۱) الف و پ

۲) ب و پ

۳) پ

۴) ت

مشاوره وقتی ذرهٔ باردار متحرک هم‌زمان در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی قرار می‌گیرد، ابتدا باید نیروهای الکتریکی و مغناطیسی وارد بر ذره را جدا بررسی کنیم و بعد آن‌ها را با هم مقایسه کنیم.

Hint ابتدا جهت نیروی الکتریکی و نیروی مغناطیسی را مشخص کنید. سپس با توجه به این‌که ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه داده، نیروهای مغناطیسی و الکتریکی را با هم برابر قرار دهید تا طبق داده‌ها، B را به دست آورید.

درس Box

اگر بار q در میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرار بگیرد، نیروی الکتریکی وارد بر آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

میدان الکتریکی (N/C)

$\vec{F} = q\vec{E}$ ← نیروی الکتریکی (N)

بار الکتریکی (C)

اگر $q > ۰ \Leftarrow$ $\vec{E}$ و $\vec{F}$ هم‌جهت هستند.

اگر $q < ۰ \Leftarrow$ $\vec{E}$ و $\vec{F}$ خلاف جهت هم هستند.

اگر ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q در ناحیه‌ای از فضا عبور کند که هم‌زمان تحت تأثیر دو میدان الکتریکی و مغناطیسی قرار بگیرد و ذره بدون انحراف، مسیر مستقیم خود را طی کند، باید نیروی خالص وارد بر آن صفر باشد، پس:

$$\vec{F}_T = ۰ \Rightarrow \vec{F}_B + \vec{F}_E + \vec{W} + \ldots = ۰$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ چون ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه داده است، پس اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره با اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذره برابر و جهت آن‌ها مخالف هم است. با توجه به این‌که $q > ۰$ است، $\vec{E}$ و $\vec{F}_E$ هم‌جهت هستند (جهت $\vec{F}_E$ درون‌سو است)، پس $\vec{F}_B$ باید برون‌سو باشد.

حالا با توجه به این‌که ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه داده است، پس:

$$\vec{F}_E + \vec{F}_B = ۰ \Rightarrow |F_E| = |F_B| \Rightarrow E\cancel{q} = \cancel{q} vB\sin\theta \Rightarrow B = \frac{E}{v\sin\theta} = \frac{۵۰}{۲۰۰\sin\theta}$$

$$\Rightarrow B = \frac{۱}{۴\sin\theta} \Rightarrow B_{min} = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵ T$$ (نادرستی عبارت «پ» و درستی عبارت «ت»)

چون اندازهٔ میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برابر با $\frac{۱}{۴\sin\theta}$ است، پس با توجه به $\sin\theta$، جهت میدان مغناطیسی می‌تواند با $\vec{v}$ هر زاویه‌ای بسازد. پس عبارت‌های «الف» و «ب» الزاماً درست نیستند.

۷۱ از سیمی به طول $2m$ که به صورت افقی و در راستای شرق به غرب قرار دارد، جریان $2A$ از شرق به غرب عبور می‌کند. اگر بزرگی میدان مغناطیسی زمین در محل سیم $0/45G$ و شیب مغناطیسی در این محل 30° باشد، اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون است؟

۱) $1/8\times10^{-4}$
۲) $1/8\times10^{-5}$
۳) 9×10^{-4}
۴) 9×10^{-5}

مشاوره برای حل این مدل تست‌ها، فقط کافیه بتونی زاویهٔ θ رو تشخیص بدی، بقیهٔ راه حل یه جای‌گذاری ساده است.

Hint داده‌های سؤال را در رابطهٔ $F = ILB\sin\theta$ جای‌گذاری کنید.

درس Box

۱) بردار میدان مغناطیسی زمین در بیشتر نقاط زمین کاملاً افقی نیست و امتداد آن با سطح افق زاویه‌ای می‌سازد که به آن شیب مغناطیسی می‌گویند. شیب مغناطیسی وابسته به مکان جغرافیایی است.

۲) اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر سیمی به طول L و حامل جریان I که در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$F = I\,L\,B\,\sin\theta$

F: نیروی مغناطیسی (N)
I: جریان الکتریکی (A)
L: طول سیمی که درمیدان مغناطیسی قرارگرفته (m)
B: میدان مغناطیسی (T)
θ: زاویهٔ بین خطوط میدان با جهت جریان

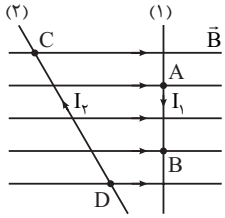
پاسخ خیلی تشریحی میدان مغناطیسی زمین را طبق قرارداد به طرف شمال یعنی درون‌سو ($\otimes$) در نظر می‌گیرند، در نتیجه زاویهٔ بین خطوط میدان و جهت جریان 90° است. دقت کنید شیب مغناطیسی، زاویهٔ بین عقربهٔ مغناطیسی (خطوط میدان) با سطح افق است و با زاویهٔ خطوط میدان با جهت جریان رابطه‌ای ندارد.

نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان از رابطهٔ $F = ILB\sin\theta$ محاسبه می‌شود، پس:

$$F = 2\times2\times0/45\times\underbrace{10^{-4}}_{\text{تبدیل G به T}}\times\underbrace{\sin90^\circ}_{1} = 1/8\times10^{-4}\ N$$

گول نخوری اگر به اشتباه به جای زاویهٔ بین میدان مغناطیسی و جهت جریان، شیب مغناطیسی زمین را جای‌گذاری کنی، به گزینهٔ اشتباه (۴) می‌رسی.

۷۲ در شکل زیر، دو سیم (۱) و (۲) در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارند. اگر جریان الکتریکی عبوری از سیم (۱)، ۲ برابر جریان الکتریکی عبوری از سیم (۲) و نیروی مغناطیسی وارد بر قطعهٔ **AB** از سیم (۱) برابر $\vec{F}$ باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر قطعهٔ **CD** از سیم (۲)، کدام است؟



۱) $۴\vec{F}$

۲) $-۴\vec{F}$

۳) $\vec{F}$

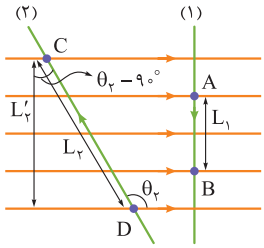
۴) $-\vec{F}$

Hint

از آن‌جایی که در میدان مغناطیسی یکنواخت، خطوط موازی و با فاصلهٔ یکسان از هم قرار دارند، نسبت طول سیم‌های AB و CD را پیدا کنید و سپس رابطهٔ $F = ILB\sin\theta$ را به صورت نسبتی برای هر دو سیم بنویسید تا نسبت F ها را به دست بیاورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: چون میدان مغناطیسی یکنواخت است، فاصلهٔ تمام خطوط یکسان است، یعنی در شکل ما $L'_۲ = ۲L_۱$ است؛ پس:



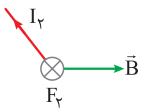
$$L'_۲ = L_۲\cos(\theta_۲ - ۹۰^\circ) = L_۲\sin\theta_۲$$

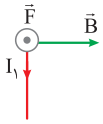
گام دوم: حال از رابطهٔ نسبتی $F = ILB\sin\theta$ داریم:

$$\frac{F_۱}{F_۲} = \frac{I_۱}{I_۲}\times\frac{L_۱}{L_۲}\times\frac{B}{B}\times\frac{\overbrace{\sin\theta_۱}^{۱}}{\sin\theta_۲} \xrightarrow{I_۱=۲I_۲} \frac{F}{F_۲} = \frac{۲I_۲}{I_۲}\times\frac{L_۱}{\underbrace{L_۲\sin\theta_۲}_{L'_۲}}$$

$$\xrightarrow{L'_۲=۲L_۱} \frac{F}{F_۲} = ۲\times\frac{۱}{۲} = ۱ \Rightarrow F = F_۲$$

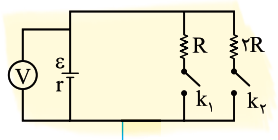
گام سوم: برای تعیین جهت نیرو، از قاعدهٔ دست راست کمک می‌گیریم:





پس $\vec{F}_۲ = -\vec{F}$.

۷۳ در مدار شکل مقابل، اگر کلید k_1 را ببندیم و کلید k_2 باز باشد، ولت‌سنج آرمانی عدد $3\ V$ و اگر کلید k_2 را ببندیم و کلید k_1 باز باشد، ولت‌سنج عدد $4\ V$ را نشان می‌دهد. اگر هر دو کلید k_1 و k_2 را ببندیم، ولت‌سنج چند ولت را نشان می‌دهد؟



ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت خارجی را نشان می‌دهد

۱) $\frac{۱۲}{۷}$

۲) ۲

۳) ۲/۴

۴) $\frac{۲۴}{۷}$

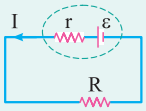
مشاوره باز و بسته کردن کلید در مدار، حالت به هم بستن مقاومت‌ها را تغییر می‌دهد و شما باید سری یا موازی بودن مقاومت‌ها را تشخیص بدهید. پس از کلید نترسید! کلاً از چیزی نترسید! شجاع باشید و به آن حمله کنید تا راه مبارزه با آن را یاد بگیرید!

Hint

با توجه به این‌که ولت‌سنج در حالت اول و دوم به ترتیب اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های R و ۲R را نشان می‌دهد، اختلاف پتانسیل آن‌ها را با استفاده از رابطه‌های $V = RI$ و $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$ به دست بیاورید و با یکدیگر مقایسه کنید. توجه کنید که ولت‌سنج در حالت سوم اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت خارجی معادل را نشان می‌دهد.

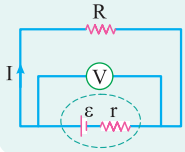
درس Box

۱) مدار تک‌باتری زیر را در نظر بگیرید. جریان الکتریکی این مدار از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R+r}$$

۲) در شکل زیر عددی که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد برابر با اختلاف پتانسیل دو سر باتری و هم‌چنین برابر با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R است.



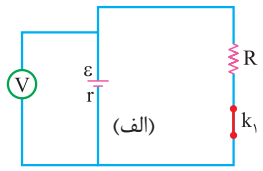
$$V = \varepsilon - rI \quad , \quad V = RI$$

افت پتانسیل در باتری

پاسخ خیلی تشریحی ✔

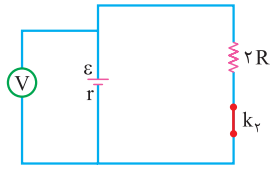
با بستن کلید k_1 و بازکردن کلید k_2، مقاومت R وارد مدار شده و مقاومت ۲R از مدار خارج می‌شود؛ بنابراین شکل مدار به صورت شکل «الف» می‌شود.

ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R را نشان می‌دهد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:



$$V = RI \xrightarrow[I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}]{V=۳V} ۳ = \frac{R\varepsilon}{R+r} \quad (۱)$$

با بستن کلید k_2 و بازکردن کلید k_1، مقاومت ۲R وارد مدار شده و مقاومت R از مدار خارج می‌شود؛ بنابراین شکل مدار به صورت شکل «ب» می‌شود.



(ب)

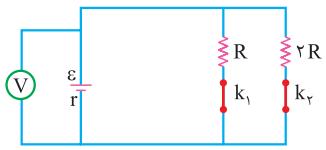
ولت‌سنج در این حالت اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۲R را نشان می‌دهد؛ بنابراین داریم:

$$V = RI \xrightarrow[I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}]{V=۴V} ۴ = \frac{۲R\varepsilon}{۲R+r} \quad (۲)$$

اگر معادلهٔ «۱» را به معادلهٔ «۲» تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{۳}{۴}=\frac{\frac{R\varepsilon}{R+r}}{\frac{۲R\varepsilon}{۲R+r}} \Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{۲R+r}{۲R+۲r} \Rightarrow ۶R+۶r=۸R+۴r \Rightarrow R=r$$

حالا اگر هر دو کلید $k_۱$ و $k_۲$ را ببندیم، هر دو مقاومت R و $۲R$ وارد مدار می‌شوند (شکل «پ»).

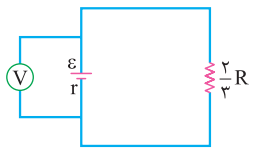


(پ)

دو مقاومت R و $۲R$ با توجه به شکل «پ» با یکدیگر موازی هستند و مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

$$R_{eq}=\frac{R\times ۲R}{R+۲R} \Rightarrow R_{eq}=\frac{۲}{۳}R$$

پس شکل مدار به صورت شکل «ت» می‌شود.



(ت)

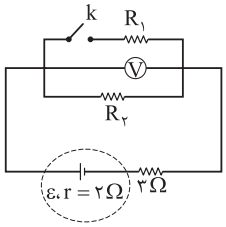
ولت‌سنج در این حالت اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $\frac{۲}{۳}R$ را نشان می‌دهد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$V=RI \Rightarrow V=\frac{۲}{۳}R\times\frac{\varepsilon}{\frac{۲}{۳}R+r} \Rightarrow V=\frac{۲R\varepsilon}{۲R+۳r} \quad (۳)$$

اگر معادلهٔ (۳) را بر معادلهٔ (۲) تقسیم کنیم، می‌توانیم مقداری را که ولت‌سنج در حالت سوم نشان می‌دهد، به دست بیاوریم.

$$\frac{V}{۴}=\frac{\frac{۲R\varepsilon}{۲R+۳r}}{\frac{۲R\varepsilon}{۲R+r}} \Rightarrow \frac{V}{۴}=\frac{۲R+r}{۲R+۳r} \xrightarrow{R=r} \frac{V}{۴}=\frac{۳R}{۵R} \Rightarrow \frac{V}{۴}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow V=۲/۴V$$

۷۴ در مدار شکل زیر، ابتدا کلید k بسته است. با بازشدن آن، عددی که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد و توان خروجی باتری به ترتیب چگونه تغییر می‌کنند؟



۱) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد

۲) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد

۳) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد

۴) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد

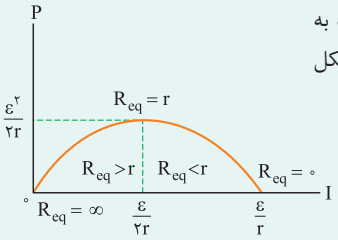
مشاوره بررسی تغییر ویژگی‌های مقاومت و باتری به صورت کیفی، یکی از مهارت‌هایی است که باید بلد باشید، چون در کنکور سراسری سؤال می‌آید.

Hint

ابتدا تغییرات مقاومت معادل و جریان الکتریکی خروجی از باتری را به صورت کیفی به دست بیاورید. سپس با کمک تغییرات اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت $۳\,\Omega$ و باتری، تغییرات اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_۲$ را به صورت کیفی به دست بیاورید و در آخر با استفاده از نمودار توان خروجی باتری برحسب جریان الکتریکی خروجی از باتری، تغییرات توان خروجی باتری را به دست بیاورید.

درس Box

۱) می‌دانیم که توان خروجی باتری از رابطهٔ $P = \varepsilon I - rI^۲$ به دست می‌آید. با توجه به این رابطه، نمودار توان خروجی باتری برحسب جریان الکتریکی $(P-I)$، همانند شکل روبه‌رو از نوع درجه دو است.



۲) تشخیص کیفی تغییرات جریان یا اختلاف پتانسیل در بخشی از مدار در اثر تغییر مقاومت مدار:

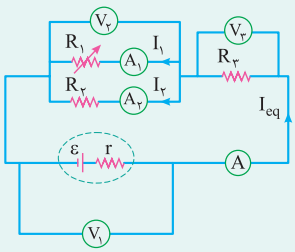
قبل از هر چیز به این دو نکته توجه کنید:

نکته

۱) افزایش مقاومت رئوستا در هر کجای مدار باعث افزایش مقاومت معادل مدار و کاهش آن، باعث کاهش مقاومت معادل می‌شود.

۲) در مقاومت‌های موازی، بستن کلید باعث کاهش مقاومت معادل مدار و بازکردن آن، باعث افزایش مقاومت معادل مدار می‌شود.

حالا برای تشخیص تغییرات مورد نظر، دستورالعمل زیر را همراه با مدار زیر اجرا می‌کنیم. در مدار زیر فرض می‌کنیم مقاومت رئوستا زیاد شده است.



۱) افزایش یا کاهش مقاومت معادل مدار را مشخص می‌کنیم. مثلاً در مدار بالا با افزایش مقاومت $R_۱$، مقاومت کل مدار زیاد می‌شود.

۲) به کمک رابطهٔ $I_{eq} = \dfrac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$، تغییر جریان کل مدار را تشخیص می‌دهیم. مثلاً در شکل داده‌شده داریم:

$$I_{eq} = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} \xrightarrow{\text{افزایش } R_{eq}} \text{کاهش } I_{eq}$$

پس با افزایش مقاومت $R_۱$، آمپرسنج A جریان کم‌تری را نشان می‌دهد.

۳) به کمک رابطهٔ $V_{eq} = \varepsilon - rI_{eq}$، تغییرات اختلاف پتانسیل دو سر باتری را تعیین می‌کنیم. در شکل بالا با کاهش I_{eq} می‌توانیم بگوییم:

$$V_{eq} = \varepsilon - rI_{eq} \xrightarrow{\text{کاهش } I_{eq}} \text{افزایش } V_{eq}$$

یعنی ولت‌سنج $V_۱$ عدد بزرگ‌تری را نمایش می‌دهد.

۴) از این‌جا به بعد، قدم‌به‌قدم به کمک رابطهٔ $V = RI$، قاعدهٔ جمع اختلاف پتانسیل‌ها و قاعدهٔ جریان در گره‌ها، به محل تغییر مقاومت نزدیک می‌شویم.

برای مدار بالا داریم:

$V_۳$ کاهش می‌یابد. $\xrightarrow[\text{ثابت است. } R_۳]{\text{کاهش } I_{eq}}$ $V_۳ = R_۳ I_{eq}$

پس ولت‌سنج V_3 عدد کم‌تری را نشان می‌دهد.

$$V_{eq} = V_3 + V_2 \Rightarrow V_2 = V_{eq} - V_3 \xrightarrow[\text{کاهش } V_3]{\text{افزایش } V_{eq}} \text{افزایش } V_2$$

تکلیف ولت‌سنج V_2 هم معلوم شد؛ یعنی اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های R_1 و R_2 افزایش یافته است.

$$V_2 = R_2 I_2 \xrightarrow[\text{ثابت است.} R_2]{\text{افزایش } V_2} \text{افزایش } I_2$$

در این مدار، آمپرسنج A_2 جریان بیشتری را نشان می‌دهد.

$$I_{eq} = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = I_{eq} - I_2 \xrightarrow[\text{افزایش } I_2]{\text{کاهش } I_{eq}} \text{کاهش } I_1$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

وقتی کلید k قطع می‌شود، مقاومت R_1 از مدار حذف می‌شود؛ بنابراین مقاومت الکتریکی مدار افزایش و در نتیجه جریان الکتریکی خروجی از باتری طبق رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$ کاهش می‌یابد.

$$I = \frac{\varepsilon}{\uparrow R_{eq} + r} \xrightarrow{\text{با افزایش } R_{eq}} I \text{ کاهش می‌یابد.}$$

از طرفی چون جریان الکتریکی گذرنده از مقاومت $3\,\Omega$ کاهش می‌یابد، پس اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن هم کاهش می‌یابد.

$$V_{3\Omega} = RI \downarrow \xrightarrow[\text{و ثابت ماندن } R]{\text{با کاهش } I} V_{3\Omega} \text{ کاهش می‌یابد.}$$

هم‌چنین طبق رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$، با کاهش جریان الکتریکی خروجی از باتری و ثابت‌ماندن ε، اختلاف پتانسیل دو سر باتری افزایش می‌یابد.

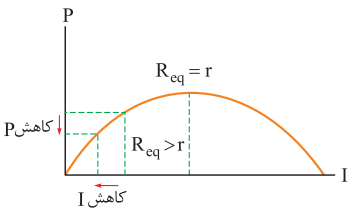
$$V_{\text{باتری}} = \overset{\text{ثابت}}{\varepsilon} - rI \downarrow \xrightarrow[\text{و ثابت ماندن } r, \varepsilon]{\text{با کاهش } I} V_{\text{باتری}} \text{ افزایش می‌یابد.}$$

از طرفی اختلاف پتانسیل دو سر باتری، برابر با مجموع اختلاف پتانسیل‌های دو مقاومت $3\,\Omega$ و R_2 است. چون اختلاف پتانسیل الکتریکی مقاومت $3\,\Omega$ کاهش و اختلاف پتانسیل الکتریکی باتری افزایش می‌یابد، پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که اختلاف پتانسیل الکتریکی مقاومت R_2 افزایش یافته است.

$$\uparrow V_{\text{باتری}} = \downarrow V_{3\Omega} + V_{R_2} \xrightarrow[\text{و افزایش } V_{\text{باتری}}]{\text{با کاهش } V_{3\Omega}} V_{R_2} \text{ افزایش می‌یابد.}$$

بنابراین عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد. (رد گزینه‌های (۱) و (۳))

حالا برای این‌که تغییرات توان خروجی باتری را پیدا کنیم. از نمودار توان خروجی باتری برحسب جریان الکتریکی خروجی از باتری کمک می‌گیریم.



با توجه به مدار، مقاومت معادل مدار از $3\,\Omega$ بیشتر است. از طرفی چون $r = 2\,\Omega$ است، پس $R_{eq} > r$ است.

بنابراین با توجه به نمودار $P - I$، با کاهش جریان (I)، توان خروجی باتری هم کاهش می‌یابد.

۷۵ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = (0/2\ T)\vec{i}$، ذرهٔ بارداری با بار الکتریکی $-2\ \mu C$ و جرم $2\ g$ در حال حرکت است. در لحظه‌ای که سرعت ذره برابر $\vec{v} = (2\times10^5\ m/s)\vec{i} + (-10^5\ m/s)\vec{j}$ است، اندازهٔ شتاب ذره چند متر بر مربع ثانیه است؟ (تنها نیروی وارد بر ذره، نیروی مغناطیسی است.)

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

مشاوره این سؤال ترکیبی از دینامیک و مغناطیس است و برای حل این سؤال باید علاوه بر مغناطیس، قانون دوم نیوتون را هم بلد باشید.

Hint

اندازهٔ نیروی مغناطیسی را به دست بیاورید و از قانون دوم نیوتون استفاده کنید.

درس Box

۱) اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر بار الکتریکی متحرک در یک میدان مغناطیسی یکنواخت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$F = |q| vB\sin\theta$

$|q|$: اندازهٔ بار الکتریکی (C)
B: اندازهٔ میدان مغناطیسی (T)
θ: زاویهٔ بین جهت سرعت و جهت میدان مغناطیسی (rad)
v: تندی بار الکتریکی (m/s)
F: اندازهٔ نیروی مغناطیسی (N)

۲) طبق قانون دوم نیوتون اگر بر جسمی نیروی خالص غیر صفری وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو شتاب می‌گیرد. این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم و هم‌جهت با آن و با جرم جسم نسبت وارون دارد.

$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m}$

$\vec{F}_{net}$: نیروی خالص (N)
m: جرم جسم (kg)
$\vec{a}$: شتاب جسم (m/s^2)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بردار میدان مغناطیسی در راستای محور x است و بردار سرعت ذره از دو مؤلفه که یکی در راستای محور x و دیگری در راستای محور y است، تشکیل شده است. چون مؤلفهٔ y بردار سرعت بر بردار میدان مغناطیسی عمود است، پس نیروی مغناطیسی بر ذره وارد می‌شود؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$F_B = |q| v_y B_x \sin\theta \xrightarrow[B_x = 0/2\ T,\ \theta = 90^\circ]{|q| = 2\times10^{-6}\ C,\ v_y = -10^5\ \frac{m}{s}} F_B = 2\times10^{-6}\times10^5\times0/2\times1 \Rightarrow F_B = 0/04\ N$$

حالا شتاب ذره را با استفاده از قانون دوم نیوتون به دست می‌آوریم.

$$F_{net} = ma \xrightarrow[m=2\times10^{-3}\ kg]{F_B=0/04\ N} 0/04 = 2\times10^{-3}a \Rightarrow a = 20\ m/s^2$$

۷۶ کدام مطلب در مورد مواد یونی درست است؟

۱) این مواد در حالت جامد، ساختاری منظم از اتم‌ها دارند.

۲) نقطهٔ ذوب و جوش بالاتری نسبت به مواد کووالانسی دارند.

۳) در حالت جامد رسانای جریان الکتریکی نیستند، اما در حالت مذاب یا محلول در آب رسانا هستند.

۴) این مواد به طور معمول در حلال‌های ناقطبی حل می‌شوند.

مشاوره برای پاسخ به این سؤال، لازم است با ساختار، خواص و ویژگی‌های مواد یونی آشنا باشید و بتوانید آن‌ها را با مواد کووالانسی و سایر دسته‌های مواد مقایسه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گزینهٔ (۱): نادرست؛ مواد یونی در حالت جامد، ساختاری منظم از **یون‌ها** (ذرات باردار) دارند، نه اتم‌های خنثی. این یون‌ها با آرایش خاصی در کنار هم قرار می‌گیرند و شبکهٔ بلوری را تشکیل می‌دهند.

گزینهٔ (۲): نادرست؛ مواد یونی به طور کلی نقطهٔ ذوب و جوش پایین‌تری نسبت به مواد کووالانسی دارند. برخی مواد کووالانسی مانند الماس و گرافیت (که ساختار شبکه‌ای دارند)، نقطهٔ ذوب و جوش بسیار بالایی دارند که حتی از برخی مواد یونی نیز بیشتر است.

گزینهٔ (۳): درست؛ مواد یونی در حالت جامد به دلیل عدم وجود یون‌های آزاد برای حرکت، رسانای جریان الکتریکی نیستند. اما در حالت مذاب یا محلول در آب، یون‌ها آزادانه می‌توانند حرکت کنند و بار الکتریکی را منتقل کنند.

گزینهٔ (۴): نادرست؛ مواد یونی به دلیل داشتن بارهای الکتریکی، به طور معمول در حلال‌های **قطبی** مانند آب حل می‌شوند. حلال‌های ناقطبی به دلیل عدم توانایی در برهم‌کنش با یون‌ها، حلال‌های خوبی برای مواد یونی نیستند.

نکته

- مواد یونی در حالت جامد به دلیل ساختار بلوری منظم خود رسانای جریان الکتریسیته نیستند، زیرا یون‌ها نمی‌توانند آزادانه حرکت کنند، اما در حالت مذاب یا محلول در آب، یون‌ها آزاد می‌شوند و می‌توانند جریان الکتریکی را هدایت کنند.
- مواد یونی موادی هستند که از طریق پیوند یونی بین یون‌های مثبت (کاتیون‌ها) و منفی (آنیون‌ها) تشکیل می‌شوند. این مواد به طور معمول دارای ساختار بلوری، نقطهٔ ذوب و جوش بالا و قابلیت حل‌شدن در حلال‌های قطبی هستند.

گول نخوری

گزینهٔ (۱) می‌تواند دام تست باشد، زیرا دانش‌آموزان باید به تفاوت بین اتم و یون توجه کنند.

۷۷ چه تعداد از ویژگی‌های زیر را می‌توان با فلزها مرتبط دانست؟

- رسانایی الکتریکی در حالت جامد
- سخت و شکننده
- رسانایی گرمایی
- آرایشی از یون‌ها با بار ناهمنام

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره برای پاسخ به این سؤال، لازم است با ساختار، خواص و ویژگی‌های مواد فلزی آشنا باشید و بدانید که کدام ویژگی‌ها مختص فلزات هستند و کدام ویژگی‌ها مربوط به دسته‌های دیگر مواد (مانند یونی یا مولکولی) می‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد اول و سوم درست است.

- **رسانایی الکتریکی در حالت جامد**: درست؛ فلزات به دلیل داشتن الکترون‌های آزاد (که به اصطلاح «دریای الکترونی» را ایجاد می‌کنند) رسانای خوبی برای جریان الکتریکی در حالت جامد هستند. در واقع این الکترون‌های آزاد به راحتی می‌توانند بار الکتریکی را در سراسر فلز منتقل کنند.
- **سخت و شکننده**: نادرست؛ فلزات به طور کلی **سخت و چکش‌خوار** هستند، نه شکننده. چکش‌خواری به این معناست که می‌توان فلزات را به شکل ورقه‌های نازک درآورد. شکنندگی، بیشتر جزء ویژگی‌های مواد یونی است.
- **رسانایی گرمایی**: درست؛ فلزات به دلیل داشتن الکترون‌های آزاد، رسانای بسیار خوبی برای گرما نیز هستند. این الکترون‌ها نه تنها بار الکتریکی، بلکه انرژی گرمایی را هم می‌توانند به سرعت در سراسر فلز منتقل کنند.
- **آرایشی از یون‌ها با بار ناهمنام**: نادرست؛ آرایش یون‌ها با بار ناهمنام (یون‌های مثبت و منفی) از ویژگی‌های **مواد یونی** است، نه فلزات. فلزات از اتم‌های خنثی تشکیل شده‌اند که با پیوند فلزی به هم متصل شده‌اند. پیوند فلزی ناشی از جاذبهٔ بین یون‌های مثبت فلز و دریای الکترونی اطراف آن‌هاست، نه بین یون‌های مثبت و منفی مجزا.

نکته به یاد داشته باشید که چکش‌خواری و رسانایی الکتریکی و گرمایی از جمله مهم‌ترین خواص فلزات هستند که آن‌ها را از سایر مواد متمایز می‌کنند.

۷۸ با توجه به مولکول‌های داده‌شده کدام مطلب درست است؟

a) کلروفرم　　b) دی‌متیل اتر　　c) کربونیل سولفید　　d) آمونیاک

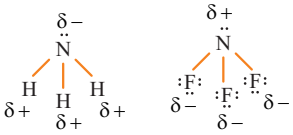
۱) همهٔ مولکول‌ها قطبی هستند و با بررسی آن‌ها، بزرگ‌ترین نسبت جفت‌الکترون‌های پیوندی به جفت‌الکترون‌های ناپیوندی، برابر ۲ است.

۲) مولکول c همانند مولکول هیدروژن سیانید، قطبی است و در مقایسهٔ نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی این مولکول با مولکول هیدروژن سیانید، محدودهٔ رنگ سرخ، وسیع‌تر است.

۳) با جایگزین‌کردن اتم H با F در مولکول d، گشتاور دوقطبی کاهش می‌یابد.

۴) با جایگزین‌کردن یک اتم Cl با H در مولکول a، مولکولی متقارن ایجاد می‌شود که رفتار مشابهی با کربن تتراکلرید در میدان الکتریکی دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با جایگزین‌کردن اتم H در مولکول آمونیاک (NH_3) با اتم F، مولکول NF_3 تشکیل‌شده و ساختار لوویس آن به صورت زیر درمی‌آید و در نتیجه گشتاور دوقطبی آن کاهش پیدا می‌کند.

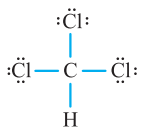


در مولکول NH_3، خصلت نافلزی N بیشتر از H بوده و اتم N بار جزئی منفی (δ^-) می‌گیرد. هم‌چنین اتم مرکزی، یعنی اتم N، دارای جفت‌الکترون ناپیوندی بوده و به بار جزئی منفی کمک می‌کند.

اما در مولکول NF_3، خصلت نافلزی F بیشتر از N بوده و اتم N بار جزئی مثبت (δ^+) می‌گیرد. از طرفی اتم مرکزی، یعنی اتم N، دارای جفت ناپیوندی است و این باعث می‌شود که بار جزئی مثبت آن و در نتیجه گشتاور دوقطبی آن، کاهش یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در مولکول‌های کلروفرم ($CHCl_3$) و کربونیل سولفید (SCO)، واحدهای اطراف اتم مرکزی متفاوت بوده و مولکول قطبی است. مولکول‌های دی‌متیل اتر (CH_3OCH_3) و آمونیاک (NH_3) به دلیل داشتن جفت‌الکترون ناپیوندی بر روی اتم مرکزی، قطبی هستند، اما نسبت جفت‌الکترون پیوندی به ناپیوندی ترکیبات داده‌شده به صورت زیر است:

مولکول	ساختار	جفت‌الکترون پیوندی	جفت‌الکترون ناپیوندی	جفت‌الکترون پیوندی / جفت‌الکترون ناپیوندی
کلروفرم		۴	۹	$\frac{۴}{۹}$
دی‌متیل اتر		۸	۲	$\frac{۸}{۲}=۴$
کربونیل سولفید		۴	۴	$\frac{۴}{۴}=۱$
آمونیاک		۳	۱	$\frac{۳}{۱}=۳$

گزینهٔ (۲): هر دو مولکول قطبی است، ولی محدودهٔ رنگ سرخ آن‌ها (بار جزئی منفی)، در HCN وسیع‌تر از SCO می‌باشد، چون شعاع اتمی N از O بزرگ‌تر است.

گزینهٔ (۴): با جایگزین‌کردن یک اتم Cl با H در کلروفرم، مولکول دی‌کلرو متان (CH_2Cl_2) ایجاد می‌شود که یک مولکول قطبی است، در صورتی که CCl_4 ناقطبی است.

نکته

برای مولکول‌هایی با یک اتم مرکزی که چهار اتم به آن متصل شده است و اتم مرکزی جفت‌الکترون ناپیوندی ندارد، حالت‌های زیر به وجود می‌آید:

مولکول	AX_4	AX_3Y	AX_2Y_2
خاصیت	ناقطبی	قطبی	قطبی
مثال	CH_4	CCl_3H	CCl_2H_2

۷۹ کدام مطلب نادرست است؟

۱) اگر مولکول ABC ساختاری خمیده داشته باشد، A، B و C می‌توانند سه عنصر متوالی از جدول تناوبی باشند که در دما و فشار اتاق به شکل مولکول‌های دواتمی گازی وجود دارند.

۲) در مولکول خمیدهٔ YX_2، اگر X یک هالوژن باشد، ممکن است احتمال حضور الکترون‌های پیوندی در اطراف هستهٔ اتم‌های X، بیشتر باشد.

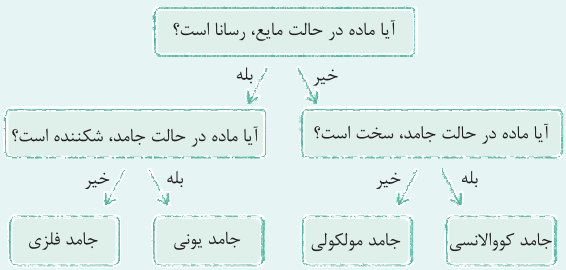
۳) با این‌که همهٔ جامدهای فلزی، رسانای جریان برق هستند، اما همهٔ آن‌ها سخت نیستند.

۴) ماده‌ای که در حالت مایع رسانا نیست، می‌تواند در سه گروه از انواع جامدها قرار داشته باشد.

درس Box

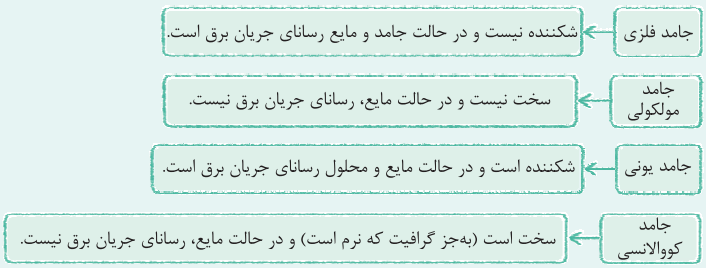
مقایسهٔ انواع جامدهای بلوری:

توجه شما را به چند مقایسه و روش برای تشخیص انواع جامدهای بلوری جلب می‌کنیم:



برای این‌که نکته‌های نمودار بالا خوب تو ذهنتون حک بشه! به دو روش نمودار بالا رو می‌خونیم!

الف)



ب)



نقطهٔ ذوب جامدهای کووالانسی و یونی از جامدهای مولکولی بالاتر است. در ضمن مواد یونی و کووالانسی در دما و فشار اتاق به حالت جامد هستند، پس ترکیب‌هایی که در دما و فشار اتاق به حالت مایع هستند، جزء مواد مولکولی به شمار می‌روند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ماده‌ای که در حالت مایع رسانا نیست، می‌تواند در دو گروه مواد «کووالانسی» و «مولکولی» قرار داشته باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): A ، B و C می‌توانند به ترتیب در گروه‌های ۱۵، ۱۶ و ۱۷ جدول تناوبی قرار داشته و اتم‌های نیتروژن، اکسیژن و فلوئور باشند (مولکول NOF با ساختار $\ddot{O}=\ddot{N}-\ddot{F}:$) از طرفی هر سه مولکول N_2 ، O_2 و F_2 در دما و فشار اتاق به صورت مولکول‌های گازی دواتمی یافت می‌شوند.

نکته اگر مولکولی ساختار خمیده داشته باشد، باید حتماً اتم مرکزی آن، یک یا دو جفت‌الکترون ناپیوندی داشته باشد. **مثال:**

$H_2O, SO_2, \ldots$

گزینهٔ (۲): اگر X خاصیت نافلزی بیشتری نسبت به Y داشته باشد، احتمال حضور الکترون‌های پیوندی اطراف اتم‌های X بیشتر می‌شود، مثل OF_2.

گزینهٔ (۳): برخی فلزها نرم هستند، مثل طلا و فلزهای قلیایی (Li ، Na و ...) یا مثلاً فلز جیوه، با این‌که رسانای جریان برق است، ولی در دمای اتاق به صورت مایع می‌باشد، بنابراین همهٔ فلزها سخت نیستند.

۸۰ نمونه‌ای از آلومینیم با چگالی ۲/۷ گرم بر سانتی‌متر مکعب که در دریای الکترونی آن $۱/۲۰۴\times۱۰^{۲۵}$ الکترون وجود دارد را در نظر بگیرید. اگر در مدت‌زمان معینی این نمونه با اکسیژن کافی واکنش دهد به طوری که در این بازهٔ زمانی، ۴۰ درصد از این نمونه دچار اکسایش شود، جرم فراوردهٔ حاصل چند گرم است و در این مدت، چه حجمی (برحسب سانتی‌متر مکعب) از آلومینیم دچار اکسایش نشده است؟ $(Al=۲۷, O=۱۶: g.mol^{-۱})$

۱) ۶۸ ـ ۲۷
۲) ۶۸ ـ ۴۰
۳) ۱۳۶ ـ ۲۷
۴) ۱۳۶ ـ ۴۰

Hint

اول با استفاده از تعداد الکترون‌های موجود در دریای الکترونی و این‌که می‌دانیم Al یون ۳+ تشکیل می‌دهد، تعداد مول Al موجود را حساب کن. بعد ببین اگر ۴۰ درصد از این مقدار Al با اکسیژن واکنش دهد، چند گرم فراورده تولید می‌شود. برای قسمت دوم، اول حساب کن که ۶۰ درصد مقدار Al اولیه چند گرم جرم دارد، بعد از طریق فرمول چگالی، حجم آن را به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

برای حل قسمت اول این سؤال از دو گام زیر می‌رویم:

گام اول: ابتدا از طریق تعداد الکترون‌های موجود در دریای الکترونی و این‌که Al ، ۳ الکترون در لایهٔ ظرفیت خود دارد، مقدار Al موجود را به دست می‌آوریم:

$$\text{مول Al} = ۱/۲۰۴\times۱۰^{۲۵}e^{-}\times\frac{۱\,mol\,Al}{۳\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^{-}}=\frac{۲۰}{۳}\,mol\,Al$$

گام دوم: واکنش Al را با اکسیژن نوشته و موازنه می‌کنیم و سپس مقدار فراوردهٔ تولیدشده را به دست می‌آوریم:

$$۴Al+۳O_۲\rightarrow ۲Al_۲O_۳$$

$$\frac{۲۰}{۳}\,mol\,Al\times\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۲\,mol\,Al_۲O_۳}{۴\,mol\,Al}\times\frac{۱۰۲\,g\,Al_۲O_۳}{۱\,mol\,Al_۲O_۳}=۱۳۶g\,Al_۲O_۳$$

یه‌جور دیگه

$$\frac{\text{تعداد الکترون مبادله‌شده}\times\text{نسبت شرکت‌کننده در واکنش}}{\text{تعداد الکترون مبادله‌شده به ازای یک مول Al}\times\text{ضریب}}=\frac{\text{جرم فراوردهٔ تولیدشده}}{\text{جرم مولی فراورده}\times\text{ضریب}}\Rightarrow\frac{۱/۲۰۴\times۱۰^{۲۵}\times\frac{۴۰}{۱۰۰}}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\times۳\times۴}=\frac{x}{۱۰^{۲}\times۲}$$

(ضریب Al: ۴ ، مول الکترون مبادله‌شده: ۳)

$$\Rightarrow x=۱۳۶\,g$$

برای حل قسمت دوم این سؤال، حساب می‌کنیم ۶۰ درصد اولیهٔ Al چند گرم جرم دارد، سپس به وسیلهٔ چگالی، حجم آلومینیم اکسایش‌نیافته را حساب می‌کنیم:

$$\text{حجم Al اکسایش نیافته} = \frac{۲۰}{۳}\,mol\,Al\times\underbrace{\frac{۶۰}{۱۰۰}}_{\text{مصرف نشده}}\times\frac{۲۷\,g\,Al}{۱\,mol\,Al}\times\frac{۱\,cm^{۳}\,Al}{۲/۷\,g\,Al}\Rightarrow\text{حجم}=۴۰\,cm^{۳}\,Al$$

۸۱ کدام مطلب درست است؟

۱) تفاوت فروپاشی ΔH شبکهٔ LiF و NaCl، کم‌تر از تفاوت فروپاشی ΔH شبکهٔ LiCl و NaF است.

۲) شمار الکترون‌های مبادله‌شده برای تولید ۰/۵ مول منیزیم اکسید، نصف شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش تولید هر مول پتاسیم یدید است.

۳) اگر نسبت بار به شعاع یون کلسیم به نسبت بار به شعاع یون لیتیم به تقریب برابر ۱/۳۷ باشد، در صورتی که شعاع یون لیتیم برابر ۶۸ پیکومتر باشد، شعاع یون کلسیم، ۳۱ پیکومتر از آن بزرگ‌تر است.

۴) اگر نسبت بار به شعاع یون سدیم برابر $9/80\times10^{-3}$ باشد و شعاع این یون برابر ۱۰۲ پیکومتر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که با تشکیل کاتیون، ۶۰ درصد از شعاع اتمی سدیم کاهش می‌یابد.

درس Box

اگر هر یون را کره‌ای باردار در نظر بگیریم، چگالی بار آن هم‌ارز با نسبت بار به حجم آن است:

$$\text{چگالی بار یون} = \frac{|\text{بار خالص یون}|}{\text{حجم یون}} = \frac{\text{مقدار بار الکترون}^{1/6\times10^{-19}\,C} \times \text{مقدار بار یون}}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

با توجه به رابطهٔ بالا، چگالی بار با بار یون رابطهٔ مستقیم و با شعاع آن رابطهٔ وارونه دارد؛ پس برای مقایسهٔ چگالی بار یون‌ها می‌توان از نسبت ساده‌تر مقدار بار یون به شعاع آن استفاده کرد، در واقع هر چه نسبت مقدار بار یون به شعاع آن بیشتر باشد، چگالی بار آن یون نیز بیشتر است:

$$\text{چگالی بار} \propto \frac{\text{مقدار بار یون}}{\text{شعاع یون}}$$

مثال: بار یون‌های سدیم ($_{11}Na^+$) و پتاسیم ($_{19}K^+$) یکسان و برابر با ۱+ است، از آن‌جا که شعاع یون سدیم کم‌تر از شعاع یون پتاسیم است، می‌توان گفت چگالی بار یون سدیم بیشتر است.

با توجه به جدول کتاب درسی، بهتر است مقایسهٔ چگالی بار یون‌های زیر را بلد باشید:

مقایسهٔ چگالی بار: $Mg^{2+} > Ca^{2+} > Na^+ > K^+$

مقایسهٔ چگالی بار: $O^{2-} > S^{2-} > F^- > Cl^-$

با توجه به بار الکتریکی یون‌های پایدار عناصر و روند تغییر شعاع یونی، می‌توانید از نکات زیر برای مقایسهٔ سریع‌تر چگالی بار یون‌ها استفاده کنید.

- در یک گروه از بالا به پایین، چگالی بار یون‌ها کاهش می‌یابد:

مقایسهٔ چگالی بار: $Cl^- < F^-$

- در کاتیون‌های یک دوره هر چه بار یون بیشتر باشد چگالی بار بیشتر است:

مقایسهٔ چگالی بار: $Mg^{2+} > Na^+$

- در آنیون‌های یک دوره، هر چه اندازهٔ بار یون بیشتر باشد، چگالی بار بیشتر است:

مقایسهٔ چگالی بار: $O^{2-} > F^-$

توجه: به طور کلی در مقایسهٔ چگالی بار یون‌ها، اولویت با مقایسهٔ بار آن‌ها است، یعنی هر چه بار یون بیشتر باشد چگالی بار آن بیشتر است و اگر بار دو یون یکسان باشد، هر چه شعاع یون کوچک‌تر باشد، چگالی بار آن بیشتر خواهد بود.

مثال:

چگالی بار: $_8O^{2-}$ (بار بیشتر) $> {}_{11}Na^+$ (بار کم‌تر)

چگالی بار: $_{20}Ca^{2+} > _{16}S^{2-}$
(شعاع کم‌تر — شعاع بیشتر)

از چگالی بار و در نتیجه نسبت بار به شعاع یون‌ها، می‌توان برای مقایسهٔ میزان برهم‌کنش میان یون‌ها استفاده کرد. هر چه مقدار چگالی بار یک یون بیشتر باشد، نیروی جاذبهٔ میان آن یون با یون‌های ناهمنام اطرافش، بیشتر خواهد بود؛ به عبارت دیگر هر چه چگالی بار یک کاتیون و یک آنیون بیشتر باشد، نیروی جاذبهٔ میان آن‌ها قوی‌تر است. به طور مثال نیروی جاذبهٔ میان Mg^{2+} و O^{2-} از نیروی جاذبهٔ میان Mg^{2+} و S^{2-} قوی‌تر است.

آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور:

هر چه نیروی جاذبهٔ میان یون‌ها قوی‌تر باشد (چگالی بار یون‌ها بیشتر باشد)، استحکام شبکهٔ یونی بیشتر است و برای فروپاشی آن یا جداکردن کامل یون‌ها از یکدیگر، به انرژی بیشتری نیاز است. به گرمای لازم (گرمای مصرف‌شده) در فشار ثابت، برای فروپاشی شبکهٔ بلوری یک مول جامد یونی و تبدیل آن به یون‌های گازی سازنده‌اش، آنتالپی فروپاشی شبکه می‌گویند و آن را با نماد $\Delta H_{\text{فروپاشی}}$ نشان می‌دهند. این کمیت همواره عددی مثبت و یکای آن کیلوژول بر مول است (فروپاشی، فرایندی گرماگیر است).

مثال: معادلهٔ زیر، واکنش فروپاشی شبکهٔ بلوری NaCl را نشان می‌دهد. *هواستون باشه* که در سمت راست معادلهٔ فروپاشی حتماً باید یون‌های گازی نوشته شود:

$$NaCl(s) + ۷۸۷\,kJ \rightarrow Na^+(g) + Cl^-(g)\ ,\ \Delta H_{\text{فروپاشی}}(NaCl(s)) = +۷۸۷\,kJ.mol^{-۱}$$

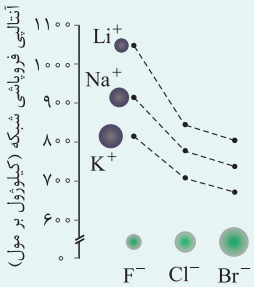
برای مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی شبکهٔ ترکیب‌های یونی، باید چگالی بار یون‌های سازندهٔ آن‌ها را با هم مقایسه کنیم. هر چه چگالی بار یون‌های سازندهٔ ترکیب یونی بیشتر باشد، آنتالپی فروپاشی شبکهٔ آن بیشتر است، یعنی گرمای بیشتری برای فروپاشی شبکهٔ بلور آن ترکیب نیاز است.

مثال: آنتالپی فروپاشی شبکهٔ KBr از آنتالپی فروپاشی شبکهٔ NaCl کم‌تر است:

مقایسهٔ چگالی بار: $K^+ < Na^+\ ,\ Br^- < Cl^-$

با توجه به نمودار زیر که آنتالپی فروپاشی شبکهٔ چند هالید فلز قلیایی را نشان می‌دهد، *می‌شه فهمید که:*

- با افزایش شعاع کاتیون‌های فلزهای قلیایی، چگالی بار آن‌ها کاهش‌یافته و در نتیجه آنتالپی فروپاشی هالید آن‌ها کاهش می‌یابد:



مثال: آنتالپی فروپاشی: $KF < NaF < LiF$

- با افزایش شعاع یون‌های هالید، چگالی بار آن‌ها کاهش‌یافته و در نتیجه آنتالپی فروپاشی هالیدهای یک فلز قلیایی کاهش می‌یابد.

مثال: آنتالپی فروپاشی: $LiBr < LiCl < LiF$

- با توجه به نمودار، تفاوت ΔH فروپاشی شبکهٔ بلور هالیدهای یک فلز قلیایی، با افزایش شعاع هالوژن کاهش می‌یابد *(شیب نمودار، اولش بیشتره!)*

مثال: تفاوت آنتالپی فروپاشی: $(NaCl, NaBr) < (NaF, NaCl)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$\frac{\frac{\text{بار یون کلسیم } Ca^{2+}}{\text{شعاع یون } Ca^{2+}}}{\frac{\text{بار یون لیتیم } Li^{+}}{\text{شعاع یون } Li^{+}}} \simeq ۱/۳۷ \Rightarrow \frac{\frac{+۲}{\text{شعاع یون } Ca^{2+}}}{\frac{+۱}{۶۸}} \simeq ۱/۳۷ \Rightarrow \text{شعاع یون } Ca^{2+} \simeq ۹۹\,pm$$

$$\Rightarrow \text{شعاع یون } Ca^{2+} - \text{شعاع یون } Li^{+} = ۹۹ - ۶۸ = ۳۱\,pm$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): تفاوت فروپاشی ΔH شبکهٔ LiF و $NaCl$، بیشتر از تفاوت فروپاشی ΔH شبکهٔ $LiCl$ و NaF است.

گزینهٔ (۲):

نکته

برای محاسبهٔ شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تولید یک مول ترکیب یونی می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

اندازهٔ بار آنیون × تعداد آنیون = بار کاتیون × تعداد کاتیون = شمار الکترون‌های مبادله شده

شمار الکترون‌های مبادله‌شده برای تشکیل نیم مول کلسیم اکسید را حساب می‌کنیم:

CaO مول یک برای‌تشکیل شده‌مبادله الکترون‌های شمار = کلسیم یون شمار × بار = ۱ × ۲ = الکترون مول ۲

$$x\,mol\,e^{-} = ۰/۵\,mol\,CaO \times \frac{۲\,mol\,e^{-}}{۱\,mol\,CaO} = ۱\,mole^{-}$$

شمار الکترون‌های مبادله‌شده برای تشکیل یک مول پتاسیم یدید (KI):

$$K^{+} \text{ یون شمار} \times \text{بار} = ۱ \times ۱ = ۱\,mol$$

با توجه به اعداد به‌دست‌آمده مقدار مول الکترون مبادله شده برابر است!

گزینهٔ (۴):

$$\text{چگالی بار} = \frac{\text{بار}}{\text{شعاع یون}}$$

$$\Rightarrow ۹/۸ \times ۱۰^{-۳} = \frac{+۱}{\text{شعاع یون}} \Rightarrow \text{شعاع یون} \simeq ۱۰۲\,pm$$

$$\text{درصد شعاع اتمی کاهش یافته} = \frac{\text{شعاع اتم} - \text{شعاع یون}}{\text{شعاع اتم}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۸۶ - ۱۰۲}{۱۸۶} \times ۱۰۰ = \frac{۸۴}{۱۸۶} \times ۱۰۰ \simeq ٪۴۵$$

۸۲ چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟

- رسانایی الکتریکی، برخلاف تنوع عدد اکسایش از جمله رفتارهای شیمیایی فلزها محسوب نمی‌شود.
- هر مولکول از رنگدانهٔ معدنی مورد استفاده برای ایجاد رنگ سفید، جرم مولی متوسطی دارد و درشت‌مولکول نیست.
- در محلول نمک‌های وانادیم که به رنگ بنفش دیده می‌شود، یون پایدار وانادیم مشاهده نمی‌شود.
- کوارتز همانند ترکیبی که به عنوان ساینده در سنباده به کار می‌رود، در ساختار خود حلقه‌های شش‌گوشه دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

وانادیم:

محلول ترکیب‌های برخی فلزهای واسطه از جمله وانادیم ($_{23}V$) به رنگ‌های گوناگون دیده می‌شوند. وانادیم با عدد اکسایش صفر، در حالت آزاد و عنصری و دارای عددهای اکسایش ۲ (II)، ۳ (III)، ۴ (IV) و ۵ (V) در حالت ترکیب با دیگر عنصرها است. رنگ نمک‌های مختلف وانادیم در این عددهای اکسایش، *این پوریاست*؛

محلول	رنگ
نمک وانادیم (V)	زرد
نمک وانادیم (IV)	آبی
نمک وانادیم (III)	سبز
نمک وانادیم (II)	بنفش

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد دوم، سوم و چهارم نادرست هستند.

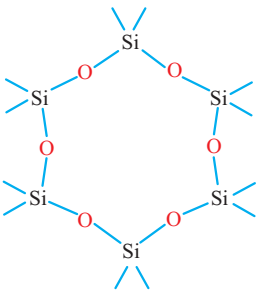
بررسی همهٔ موارد:

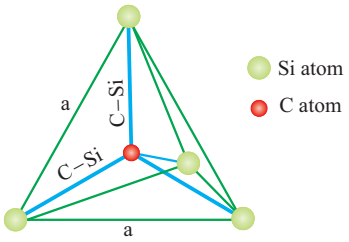
مورد (۱): داشتن جلا، رسانای الکتریکی، رسانای گرمایی و شکل‌پذیری از جمله رفتارهای فیزیکی فلزات و واکنش‌پذیری و تنوع عدد اکسایش از جمله رفتارهای شیمیایی فلزات هستند.

مورد (۲): رنگدانهٔ معدنی ایجادکنندهٔ رنگ سفید، تیتانیم (IV) اکسید (TiO_2) است که یک ترکیب یونی است نه مولکولی!

مورد (۳): در محلول نمک‌های وانادیم که به رنگ بنفش دیده می‌شود، یون پایدار وانادیم (II) وجود دارد.

مورد (۴): کوارتز یا SiO_2 خالص دارای حلقه‌های شش‌ضلعی و سیلیسیم کربید که به عنوان سنباده به کار می‌رود، ساختار چهاروجهی دارد.





۸۳ کدام مطلب درست است؟

۱) فولاد برخلاف تیتانیم با ذرات موجود در آب دریا واکنش نمی‌دهد.

۲) محلول همهٔ فلزهای واسطه که اعداد اکسایش متنوعی دارند، به رنگ‌های گوناگون مشاهده می‌شود.

۳) علت اصلی استفاده از تیتانیم برای ساختن قطعات موجود در موتور جت، نقطهٔ ذوب بالا و مقاومت بالا در برابر سایش است.

۴) نیتینول آلیاژی از دومین عنصر دستهٔ d و هشتمین عنصر تناوب چهارم است.

درس Box

فلزها علاوه بر رفتارهای مشابه، تفاوت‌های آشکاری در برخی رفتارها نشان می‌دهند؛ به عبارت دیگر هر فلز علاوه بر رفتارهای مشترک، رفتارهای ویژهٔ خود را نیز دارد.

مثال: فلزهای دستهٔ d همانند فلزهای دستهٔ s و p، دارای ویژگی‌هایی مانند جلا، رسانایی الکتریکی، رسانایی گرمایی و شکل‌پذیری هستند، اما در ویژگی‌هایی مانند سختی، نقطهٔ ذوب و تنوع اعداد اکسایش با آن‌ها تفاوت دارند. تیتانیم ($_{22}Ti$) یکی از فلزهای دستهٔ d جدول دوره‌ای است که در دورهٔ چهارم و گروه ۴ قرار دارد:

$$_{22}Ti : [_{18}Ar]3d^2 4s^2$$

ویژگی‌های فوق‌العادهٔ این فلز از جمله ماندگاری و استحکام مناسب باعث شده این فلز امروزه کاربردهای مختلفی، مانند استفاده در ساخت موتور جت، ساخت پروانهٔ کشتی اقیانوس‌پیما و ساخت بناهای زیبا و ماندگار داشته باشد. *خلاصه! فلزی فراتر از انتظار است. حالا ببینیم چرا؟!*

جدول زیر برخی از ویژگی‌های تیتانیم را در مقایسه با فولاد زنگ‌نزن نشان می‌دهد.

ماده / ویژگی	تیتانیم	فولاد
نقطهٔ ذوب ($^\circ C$)	۱۶۶۷	۱۵۳۵
چگالی ($g \cdot mL^{-1}$)	۴/۵۱	۷/۹۰
واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا	ناچیز	متوسط
مقاومت در برابر خوردگی	عالی	ضعیف
مقاومت در برابر سایش	عالی	عالی

شما با توجه به این جدول، باید مقایسهٔ خواص تیتانیم و فولاد رو بلد باشین:

۱) نقطهٔ ذوب: فولاد < تیتانیم

۲) چگالی: فولاد > تیتانیم

۳) واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا: فولاد > تیتانیم

۴) مقاومت در برابر خوردگی: فولاد < تیتانیم

۵) مقاومت در برابر سایش: فولاد = تیتانیم

کاربردهای تیتانیم:

۱) از فلز تیتانیم برای ساختن موتور جت استفاده می‌شود. به چندتا دلیل! اول این‌که هنگامی که موتور جت کار می‌کند، همهٔ اجزای سازنده (ثابت و متحرک) دمای بالایی دارند، پس فلز مورد استفاده باید نقطهٔ ذوب بالایی داشته باشد که *تیتانیم داره!* دوم این‌که در ساخت موتور جت چگالی قطعات استفاده‌شده در آن هم مهم است *(هر پی سبک‌تر بهتر!)* همان‌طور که می‌بینید چگالی تیتانیم از فولاد کم‌تر است؛ بنابراین قطعات ساخته‌شده از جنس تیتانیم نسبت به فولاد، سبک‌تر خواهند بود. *از طرف دیگه! مقاومت در برابر خوردگی و سایش هم مهمه! که تیتانیم در مقابل فولاد، گزینهٔ بهتری برای موتور جت است!*

۲) تیتانیم با ذره‌های موجود در آب دریا تقریباً واکنش نمی‌دهد، به همین دلیل از این فلز در ساخت پروانهٔ کشتی اقیانوس‌پیما استفاده می‌شود.

۳) از آن‌جا که تیتانیم در برابر خوردگی و سایش، مقاومت بالایی دارد، ساختن بناهایی از جمله موزهٔ گوگنهایم در اسپانیا با پوشش بیرونی تیتانیم، باعث افزایش ماندگاری آن شده است.

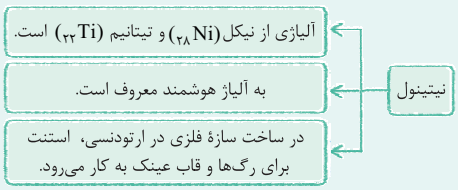
۴) در شیمی یازدهم هم خواندیم که تیتانیم فلزی محکم، کم‌چگال و مقاوم در برابر خوردگی است که در ساخت بدنهٔ دوچرخه از آن استفاده می‌شود. تیتانیم را می‌توان از واکنش تیتانیم (IV) کلرید با منیزیم در حضور گاز آرگون تهیه کرد:

$$TiCl_4 + 2Mg \xrightarrow{\Delta} Ti + 2MgCl_2$$

۵) تیتانیم به شکل آلیاژهای مختلف نیز کاربرد گسترده‌ای در صنعت دارد. به طور مثال نیتینول، آلیاژی از نیکل و تیتانیم است که به آلیاژ هوشمند معروف است و در ساخت فراورده‌های صنعتی و پزشکی از جمله سازهٔ فلزی در ارتودنسی، استنت برای رگ‌ها و قاب عینک به کار می‌رود.







پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): تیتانیم و فولاد به ترتیب به مقدار ناچیز و متوسط با ذرات موجود در آب دریا واکنش می‌دهند.

گزینهٔ (۲): محلول برخی از فلزهای واسطه به رنگ‌های گوناگون مشاهده می‌شود.

گزینهٔ (۴): نیتینول آلیاژی از تیتانیم و نیکل است، طبق آرایش الکترونی آن‌ها که در زیر نوشته شده است، تیتانیم، دومین عنصر دستهٔ d و نیکل، هشتمین عنصر دستهٔ d و دهمین عنصر دورهٔ چهارم می‌باشد.

دومین عنصر دستهٔ d

$_{22}Ti : [Ar]3d^2 4s^2$

$_{28}Ni : [Ar]3d^8 4s^2 \quad 8+2=10 \Rightarrow$ در گروه ۱۰ و دورهٔ چهارم جدول تناوبی قرار دارد.

۸۴ اگر در واکنش تولید کلسیم برمید از یون‌های گازی سازنده‌اش، اختلاف جرم واکنش‌دهنده‌ها برابر ۸۰ گرم باشد و ۱۳۰۰ کیلوژول انرژی ..... شود، می‌توان نتیجه گرفت که آنتالپی فروپاشی شبکهٔ کلسیم برمید برابر ..... کیلوژول بر مول است. $(Br = 80, Ca = 40 : g.mol^{-1})$

۱) آزاد ـ ۶۵۰
۲) مصرف ـ ۱۹۵۰
۳) مصرف ـ ۶۵۰
۴) آزاد ـ ۱۹۵۰

پاسخ خیلی تشریحی ✔ واکنش تولید ترکیبات یونی از یون‌های گازی سازنده، برعکس واکنش فروپاشی ترکیبات یونی بوده و در آن انرژی آزاد می‌شود. هم‌چنین انرژی آزادشده، قرینهٔ انرژی مصرف‌شده هنگام فروپاشی یک مول جامد یونی و تبدیل آن به یون‌های گازی سازنده است.

$$Ca^{2+}(g) + 2Br^{-}(g) \rightarrow CaBr_2(s)$$

$$\text{انرژی آزاد شده هنگام تشکیل یک مول کلسیم برمید} = \overbrace{(160 - 40)\,g}^{2Br^{-} - Ca^{2+}} \times \frac{1300\,kJ}{80\,g(2Br^{-} - Ca^{2+})} = -1950\,kJ$$

$$\Rightarrow \text{آنتالپی فروپاشی شبکهٔ } CaBr_2 = +1950\,kJ/mol$$

۸۵ کدام مطلب در مورد یک واکنش گرماده نادرست است؟

۱) ΔH (تغییر آنتالپی) در این واکنش منفی است.

۲) انرژی فعال‌سازی واکنش رفت از انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت، بیشتر است.

۳) انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت برابر با فاصلهٔ بین سطح آنتالپی مواد فراورده و نقطهٔ اوج نمودار است.

۴) اگر به این واکنش کاتالیزگر اضافه کنیم، انرژی فعال‌سازی واکنش کاهش می‌یابد.

مشاوره برای پاسخ به این سؤال، لازم است با مفاهیم واکنش‌های گرماده تغییر آنتالپی، انرژی فعال‌سازی و تأثیر کاتالیزگر بر آن آشنا باشید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گزینهٔ (۱): در یک واکنش گرماده، ΔH (تغییر آنتالپی) منفی است، زیرا واکنش گرما آزاد می‌کند و محتوای انرژی سیستم کاهش می‌یابد.

گزینهٔ (۲): در واکنش گرماده، انرژی فعال‌سازی واکنش رفت، یعنی مقدار انرژی لازم برای شروع واکنش، از انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت، **کم‌تر** است. به عبارت دیگر، واکنش گرماده راحت‌تر از واکنش برگشت آن انجام می‌شود.

گزینهٔ (۳): انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت برابر با فاصلهٔ بین سطح آنتالپی مواد فراورده و نقطهٔ اوج نمودار است.

گزینهٔ (۴): کاتالیزگرها با کاهش انرژی فعال‌سازی، سرعت واکنش را افزایش می‌دهند. این کاهش انرژی فعال‌سازی هم در واکنش رفت و هم در واکنش برگشت اتفاق می‌افتد.

گول نخوری ✘

گزینهٔ (۳) می‌تواند دام تست باشد، زیرا دانش‌آموزان ممکن است به اشتباه فکر کنند که انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت از مواد واکنش‌دهنده تا نقطهٔ اوج است، در حالی که این فاصله مربوط به واکنش رفت است.

۸۶ کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) دستاورد تولید اوره پس از سنتز آمونیاک صورت گرفت.

ب) در هوای آلوده علاوه بر گازهای هواکره، می‌توان اکسیدی از نیتروژن به رنگ قهوه‌ای یافت که از آرایش هشت‌تایی پیروی می‌کند.

پ) در بررسی غلظت آلاینده‌های هوا در یک کلان‌شهر، وقتی غلظت گاز NO در حال کاهش باشد، غلظت گازهای NO_2 و O_3 رو به افزایش می‌گذارد.

ت) در دمای اتاق گازهای N_2 و O_2، با یکدیگر واکنش‌داده و باعث افزایش غلظت گاز نیتروژن مونوکسید می‌شوند.

۱) الف ـ ب
۲) الف ـ پ
۳) ب ـ ت
۴) پ ـ ت

درس Box

آلاینده‌های هوا:

متأسفانه! امروزه با رشد دانش و فناوری، گسترش صنایع گوناگون و با رفتارهای نادرست، دسترسی به هوای پاک محدودتر شده است، به طوری که داشتن هوای پاک، یکی از چالش‌های مهم در جهان امروز است.

هوای خشک و پاک مخلوطی از گازهای گوناگون است که به طور یکنواخت در هواکره پخش شده‌اند. در حالی که هوای آلوده، حاوی گازهای مختلفی مانند SO_2، O_3، NO_2، CO، NO و C_xH_y و ذره‌های معلق و مواد آلی فزار هست. هوای آلوده، به دلیل وجود آلاینده‌های مختلف، بوی بدی دارد. چهرهٔ شهر را زشت می‌کند، فرسودگی ساختمان‌ها و پوسیدگی خودروها را سرعت بخشیده و باعث ایجاد و تشدید بیماری‌های تنفسی از جمله برونشیت، آسم، سرطان ریه و حتی مرگ می‌شود.

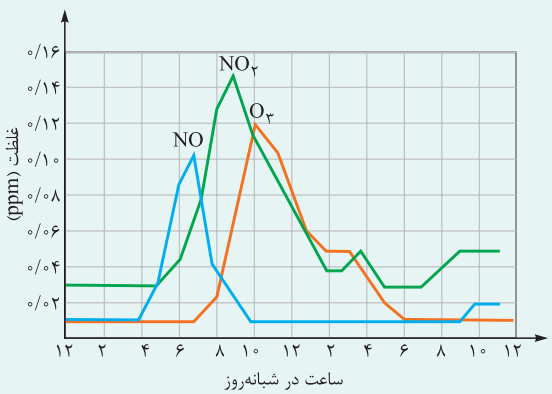
خبرها حاکی از آن است! که آلاینده‌های C_xH_y، NO، SO_2 و CO در خروجی اگزوز خودروها وجود دارند.

آلاینده	عامل پیدایش	معادلهٔ شیمیایی مربوطه
C_xH_y	نامرغوب‌بودن سوخت و یا نبود اکسیژن کافی	—
NO	واکنش گازهای نیتروژن و اکسیژن در دمای بالا درون موتور خودروها	$N_2(g)+O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$
SO_2	سوختن گوگرد موجود در سوخت‌های فسیلی	$S(s)+O_2(g) \rightarrow SO_2(g)$
CO	سوختن ناقص هیدروکربن‌های موجود در سوخت	$C_xH_y+(\frac{2x+y}{4})O_2(g) \rightarrow xCO(g)+\frac{y}{2}H_2O(g)$

مقایسهٔ مقدار آلاینده‌های CO، C_xH_y و NO در خروجی اگزوز خودروها به صورت زیر است:

مقدار آلایندهٔ خروجی از اگزوز خودروها (برحسب‌گرم): $CO > C_xH_y > NO$

نمودار زیر غلظت آلاینده‌های NO، NO_2 و O_3 را در نمونه‌ای از هوای یک شهر بزرگ نشان می‌دهد:



NO را که قبلاً فهمیدیم از کجا میاد! بریم سراغ معادلهٔ پیدایش NO_2 و O_3:

معادلهٔ پیدایش NO_2: $2NO(g)+O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)$
قهوه‌ای رنگ

رنگ قهوه‌ای *هوای آلوده زیر سر همین* NO_2 *هستش!* به همین دلیل لایهٔ قهوه‌ای روشن در زمستان در سطح شهرهای بزرگ جهان و کشور *فودمون بیشتر دیده می‌شه!*

معادلهٔ پیدایش O_3 (اوزون تروپوسفری): $NO_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{نورخورشید}} NO(g) + O_3(g)$

هواستون باشه که اوزون با این‌که جزء آلاینده‌های هوا است، اما جزء آلاینده‌های خروجی از اگزوز خودروها به شمار نمی‌آید، زیرا در هواکره و از واکنش گازهای نیتروژن دی‌اکسید و اکسیژن در حضور نور خورشید تولید می‌شود.

و اما نکات مهم نمودار:

الف) غلظت این آلاینده‌ها بین ساعت ۷ تا ۱۰ صبح به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

ب) از حوالی ساعت ۱۰ صبح به بعد، غلظت NO ثابت و غلظت NO_2 و O_3 به طور کلی کاهش می‌یابد.

پ) مقایسهٔ بیشترین مقدار این آلاینده‌ها (ماکزیمم نمودارها) در یک شبانه‌روز به صورت $NO_2 > O_3 > NO$ است.

ت) روند تغییر غلظت O_3 تقریباً شبیه NO_2 است. با این تفاوت که غلظت O_3 نسبت به غلظت NO_2 با چند ساعت تأخیر، افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

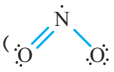
آلاینده	ساعتی که غلظت آن به بیشترین حد خود می‌رسد.
NO	۷ صبح
NO_2	۹ صبح
O_3	۱۰ صبح

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد «الف» و «پ» درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

الف) چند نمونه فراورده حاصل از فناوری‌های شیمیایی در گذر زمان:

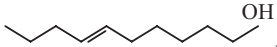
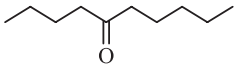
ساخت مواد عایق گرما (پوشش‌های دوستدار محیط‌زیست) → تهیهٔ ویتامین $A(C_{20}H_{30}O)$ (مراقبت‌های بهداشتی) → تهیهٔ اوره $(CO(NH_2)_2)$ → تهیهٔ آمونیاک (NH_3) (کودهای شیمیایی) → انقلاب صنعتی

ب) در بین آلاینده‌های هواکره، گاز NO_2 به رنگ قهوه‌ای بوده و طبق ساختار لوویس آن () اتم نیتروژن از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نمی‌کند.

پ) طبق نمودار تغییر غلظت این آلاینده‌ها، کاملاً درست است!

ت) گازهای N_2 و O_2 در دماهای بالا یا در حضور رعد و برق، با همدیگر واکنش می‌دهند.

۸۷ چه تعداد از موارد زیر درست است؟

- اگر جسمی طول موج‌های ۴۰۰ تا ۶۳۰ نانومتر را از نور مرئی جذب کند، به احتمال زیاد به رنگ بنفش دیده خواهد شد.
- اجسام از بین امواج الکترومغناطیس، تنها با نور مرئی برهم‌کنش دارند.
- برای تشخیص این‌که ماده‌ای به فرمول $C_{10}H_{20}O$ دارای یکی از دو ساختار  یا  است، می‌توان از طیف‌سنجی فروسرخ استفاده کرد.
- در روش‌های طیف‌سنجی (مثلاً در دستگاه M.R.I) از برهم‌کنش پرتوهای الکترومغناطیس با مواد بهره می‌برند.

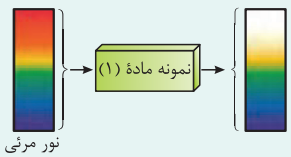
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

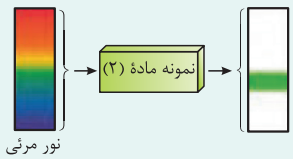
درس Box

طیف‌سنجی:

آلاینده‌های هوا اغلب بی‌رنگ هستند و نمی‌توان به راحتی وجود آن‌ها را تشخیص داد. برای تعیین نوع و مقدار آلاینده‌ها در یک نمونه هوای آلوده، می‌توان برهم‌کنش این مواد با پرتوهای الکترومغناطیسی را بررسی کرد. هرگاه یک نمونهٔ ماده در برابر پرتوهای الکترومغناطیسی قرار گیرد، می‌تواند گسترهٔ معینی از آن‌ها را جذب و پرتوهای باقی‌مانده را بازتاب کرده یا عبور دهد.

به طور مثال، هر یک از شکل‌های زیر رفتار یک نمونهٔ ماده را در برابر پرتوهای مرئی نشان می‌دهد.





همان‌طور که می‌بینید، نمونهٔ مادهٔ (۱)، نورهای سرخ ـ نارنجی را جذب کرده و بقیهٔ پرتوها را عبور داده است. در حالی‌که نمونهٔ ماده (۲) همهٔ نورها به‌جز سبز را جذب کرده است. در واقع نمونهٔ مادهٔ (۲) طول موج‌های بیشتری از پرتوهای مرئی را جذب کرده است. با توجه به این‌که برهم‌کنش این دو نمونه ماده با پرتوهای مرئی متفاوت است، می‌توان نتیجه گرفت که ساختار آن‌ها نیز متفاوت است.

توجه: با توجه به این شکل کتاب درسی، می‌شه فهمید که اگر ماده‌ای تنها نورهای سرخ و نارنجی را جذب کند و یا تنها نور سبز را عبور دهد، در هر دو حالت به رنگ سبز دیده می‌شود.

ماده تنها نور سرخ و نارنجی را جذب کند. ↘
ماده تقریباً به رنگ سبز دیده می‌شود. ↗
ماده تنها نور سبز را عبور دهد. ↘

علاوه بر پرتوهای مرئی، دیگر پرتوها مانند فروسرخ، فرابنفش و ... نیز با ماده برهم‌کنش دارند.

شیمی‌دان‌ها با استفاده از این برهم‌کنش‌ها میان ماده و پرتوهای الکترومغناطیسی، روش‌های مختلف طیف‌سنجی را برای شناسایی ساختار مواد طراحی کرده‌اند.

طیف‌سنجی ← مطالعهٔ برهم‌کنش‌های میان ماده و پرتوهای الکترومغناطیسی

یادآوری: در شیمی دهم خواندیم که دانشمندان با دستگاهی به نام طیف‌سنج می‌توانند از پرتوهای گسیل‌شده از مواد گوناگون، اطلاعات ارزشمندی دربارهٔ آن‌ها به دست آورند.

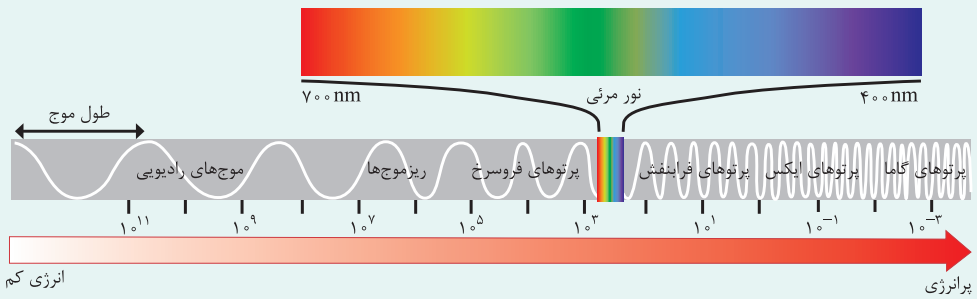
یکی از رایج‌ترین روش‌های طیف‌سنجی که برای شناسایی گروه‌های عاملی به کار می‌رود، طیف‌سنجی فروسرخ است. هر یک از گروه‌های عاملی، گسترهٔ معین و منحصربه‌فردی از پرتوهای فروسرخ را جذب می‌کنند. براساس همین تفاوت، می‌توان گروه‌های عاملی را از یکدیگر تشخیص داد. به طور مثال به کمک طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان اتانول و دی‌متیل اتر را از یکدیگر تشخیص داد:

$$C_2H_6O \Rightarrow \begin{cases} \text{اتانول } CH_3CH_2-OH & (\text{گروه عاملی هیدروکسیل}) \\ \text{دی‌متیل اتر } CH_3-O-CH_3 & (\text{گروه عاملی اتری}) \end{cases}$$

تازه! از طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان برای شناسایی آلاینده‌هایی مانند کربن مونوکسید و اکسیدهای نیتروژن در هواکره و هم‌چنین شناسایی برخی مولکول‌ها در فضای بین ستاره‌ای استفاده کرد.

کاربردهای طیف‌سنجی فروسرخ:
- تشخیص گروه‌های عاملی
- شناسایی آلاینده‌هایی مانند CO و NO_x در هواکره
- شناسایی برخی مولکول‌ها در فضای بین ستاره‌ای

یادآوری: طول موج پرتوهای فروسرخ، بلندتر از گسترهٔ پرتوهای مرئی (۷۰۰nm ـ ۴۰۰) است.



توجه: علاوه بر طیف‌سنجی فروسرخ، می‌توان از برهم‌کنش پرتوهای فرابنفش، نور مرئی، امواج رادیویی و ... نیز برای شناسایی مواد استفاده کرد. دستگاه تصویربرداری ام.آر.آی (MRI) مثالی از کاربرد طیف‌سنجی در علم پزشکی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد (۳) و (۴) درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

مورد (۱): طول موج بازتاب‌شده از جسم، بالاتر از ۶۳۰ نانومتر بوده و ماده به احتمال زیاد به رنگ سرخ است.

مورد (۲): علاوه بر نور مرئی می‌توان از برهم‌کنش پرتوهای فروسرخ، فرابنفش، امواج رادیویی و ... نیز برای شناسایی مواد استفاده کرد.

مورد (۳): هر یک از گروه‌های عاملی گسترهٔ معین و منحصربه‌فردی از پرتوهای فروسرخ را جذب می‌کنند. به همین علت می‌توان گروه‌های عاملی را در ترکیبات آلی تشخیص داد.

مورد (۴): شیمی‌دان‌ها با استفاده از برهم‌کنش‌هایی میان ماده و پرتوهای الکترومغناطیس، روش‌های گوناگون طیف‌سنجی را برای شناسایی ساختار مواد پایه‌گذاری کرده‌اند.

۸۸ در واکنش فرضی $2A + Y \rightarrow D$ حداقل انرژی لازم برای انجام واکنش برابر ۱۵۰ کیلوژول است. در صورت مصرف کامل ۰/۵ مول مادهٔ Y در واکنش، ۱۰۰ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. بر این اساس چه تعداد از موارد زیر درست است؟

- واکنش گرماده بوده و در نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش، اختلاف سطح انرژی قله با فراورده‌ها برابر ۳۵۰ کیلوژول است.
- استفاده از کاتالیزگر مناسب می‌تواند باعث تولید ۵۰ کیلوژول گرما در ازای تولید یک مول D شود.
- در این واکنش مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها از فراورده‌ها، کم‌تر است.
- افزایش دما در این واکنش باعث کاهش انرژی فعال‌سازی و افزایش سرعت واکنش می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

انرژی فعال‌سازی:

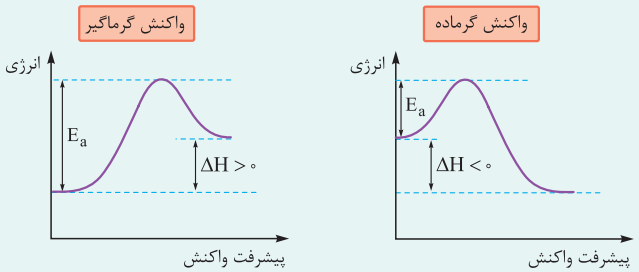
برای این‌که یک واکنش شیمیایی آغاز شود، باید واکنش‌دهنده‌ها مقدار معینی انرژی داشته باشند. به حداقل انرژی لازم برای شروع هر واکنش شیمیایی، انرژی فعال‌سازی واکنش می‌گویند.

۱) انرژی فعال‌سازی را با نماد E_a نشان می‌دهند و با یکای کیلوژول (kJ) گزارش می‌کنند.

۲) یکی از روش‌های **تأمین** انرژی فعال‌سازی، گرمادادن به واکنش‌دهنده‌ها است. برای مثال هنگامی که نوک کبریت روی سطح زبر قوطی کشیده می‌شود، گرما تولید می‌شود که این گرما انرژی فعال‌سازی واکنش شیمیایی انجام‌شده را تأمین می‌کند.

۳) همهٔ واکنش‌های شیمیایی صرف نظر از این‌که گرماده یا گرماگیر باشند، به انرژی فعال‌سازی نیاز دارند.

۴) در نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش، تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها با قلهٔ نمودار، انرژی فعال‌سازی واکنش (رفت) را نشان می‌دهد. با توجه به نمودارهای *روبه‌رو واضح و مبرهن است!* که در واکنش‌های گرماگیر، همواره انرژی فعال‌سازی واکنش رفت از ΔH واکنش بزرگ‌تر است، در حالی که در واکنش‌های گرماده انرژی فعال‌سازی می‌تواند از مقدار ΔH واکنش، کم‌تر یا بیشتر یا حتی برابر باشد.



یادآوری: تفاوت سطح انرژی فراورده‌ها و واکنش‌دهنده‌ها، مقدار ΔH واکنش را نشان می‌دهد. در ضمن در واکنش‌های گرماگیر، واکنش‌دهنده‌ها پایدارترند در حالی که در واکنش‌های گرماده فراورده‌ها پایدارتر *تشریف دارن!* (پایداری با سطح انرژی رابطهٔ وارونه دارد.)

۵) هر چه انرژی فعال‌سازی واکنشی بیشتر باشد، سرعت آن کم‌تر است. در نتیجه واکنش در شرایط دشوارتر و دمای بالاتری انجام می‌شود. (انرژی فعال‌سازی واکنش با سرعت واکنش رابطهٔ وارونه دارد.)

با افزایش دما انرژی واکنش‌دهنده‌ها بیشتر می‌شود به طوری که شمار ذره‌هایی که در واحد زمان می‌توانند به فراورده‌ها تبدیل شوند، افزایش می‌یابد. یعنی افزایش دما باعث افزایش سرعت واکنش‌های شیمیایی می‌شود. به طور مثال گاز نیتروژن با گاز اکسیژن در دمای اتاق واکنش نمی‌دهد، اما درون موتور خودرو و دمای بالاتر از $1000^\circ C$، اندکی از آن‌ها به نیتروژن مونوکسید تبدیل می‌شود.

$N_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{دمای اتاق}}$ انجام‌نمی‌شود.

$N_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{دمای بالا}} 2NO(g)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد اول و سوم درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

مورد (۱): برای بررسی این مورد، نمودار انرژی ـ پیشرفت، این واکنش را با استفاده از مراحل زیر، رسم می‌کنیم.

۱) حداقل انرژی لازم، یعنی همان E_a یا تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها، با قله، برابر با $۱۵۰\,kJ$ است.

۲) از طریق مول Y و انرژی داده‌شده، ΔH واکنش را برحسب کیلوژول بر مول به دست می‌آوریم:

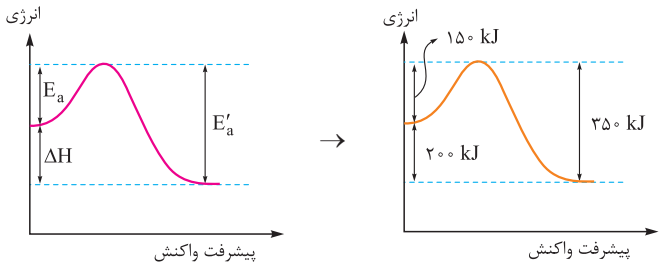
$$x\,kJ = ۱\,mol\,Y \times \frac{۱۰۰\,kJ}{۰/۵\,mol\,Y} = ۲۰۰\,kJ$$

۳) با توجه به اطلاعات سؤال چون واکنش انرژی آزاد می‌کند، پس واکنش گرماده بوده و علامت ΔH آن منفی است.

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = -۲۰۰\,kJ$$

۴) تفاوت سطح انرژی فراورده تا قله را به دست می‌آوریم و نمودار را رسم می‌کنیم:

$$\Delta H = (E_a)_{\text{تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها تا قله}} - (E'_a)_{\text{تفاوت سطح انرژی فراورده‌ها تا قله}} \Rightarrow -۲۰۰ = ۱۵۰ - E'_a$$
$$\Rightarrow E'_a = ۳۵۰\,kJ$$



مورد (۲): کاتالیزگر ΔH واکنش را تغییر نمی‌دهد، بنابراین با استفاده از کاتالیزگر، گرمای تولیدشده یا همان ΔH، تغییر نمی‌کند!

مورد (۳): واکنش گرماده است و با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ ΔH به کمک آنتالپی پیوند، می‌توان گفت مجموع آنتالپی پیوندها در فراورده‌ها بیشتر از مجموع آنتالپی پیوندها در واکنش‌دهنده‌های آن است.

$$\Delta H_{(\text{واکنش})} = [\text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها}]$$

مورد (۴): افزایش دما انرژی فعال‌سازی واکنش را تغییر نمی‌دهد. با افزایش دما شمار ذره‌هایی که در واحد زمان می‌توانند به فراورده تبدیل شوند، افزایش می‌یابد و سرعت واکنش بیشتر می‌شود.

۸۹ کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن درست است؟

الف) در شرایط یکسان، کاتالیزگر پودر روی نسبت به توری پلاتینی، کاهش بیشتری در انرژی فعال‌سازی ایجاد می‌کند.

ب) واکنش در حضور جرقه یا توری پلاتینی با سرعت نزدیک به هم و انرژی فعال‌سازی مشابه، صورت می‌گیرد.

پ) در دمای اتاق به رغم پایداری بیشتر فراورده‌ها نسبت به واکنش‌دهنده‌ها، به خاطر عدم تأمین انرژی فعال‌سازی، واکنش پیشرفت چندانی ندارد.

ت) تأثیر پودر روی و توری پلاتینی بر آنتالپی واکنش، مشابه یکدیگر است.

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ پ
۳) پ ـ ت
۴) الف ـ ت

درس Box

با توجه به جدول زیر که برخی داده‌ها برای واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن را در شرایط گوناگون نشان می‌دهد، می‌توان نتیجه گرفت که:

شرایط آزمایش	دما ($^\circ C$)	سرعت واکنش	آنتالپی واکنش (kJ)
بدون حضور کاتالیزگر	۲۵	ناچیز	−۵۷۲
ایجاد جرقه در مخلوط	۲۵	انفجاری	−۵۷۲
در حضور پودر روی	۲۵	سریع	−۵۷۲
در حضور توری پلاتینی	۲۵	انفجاری	−۵۷۲

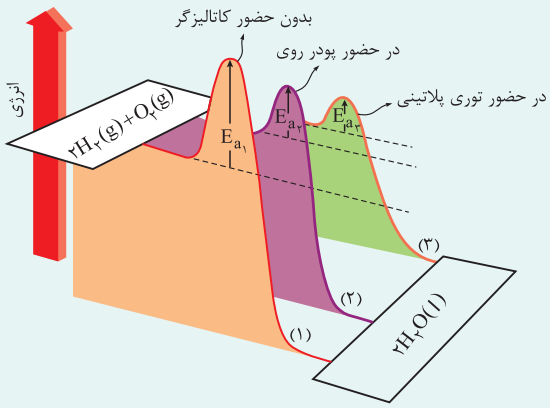
الف) واکنش سوختن هیدروژن در دمای اتاق، بدون حضور کاتالیزگر انجام نمی‌شود، زیرا انرژی فعال‌سازی آن بالا است.

ب) با ایجاد جرقه در مخلوط گازهای هیدروژن و اکسیژن، انرژی فعال‌سازی واکنش **تأمین** شده و واکنش به صورت انفجاری انجام می‌شود.

پ) فلزهای روی (Zn) و پلاتین (Pt) کاتالیزگرهای واکنش سوختن هیدروژن هستند. در حضور پودر روی، واکنش سریع و در حضور توری پلاتینی، واکنش به صورت انفجاری انجام می‌شود. بنابراین توری پلاتینی انرژی فعال‌سازی واکنش را بیشتر کاهش می‌دهد و کاتالیزگر مناسب‌تری برای سوختن هیدروژن است.

انرژی فعال‌سازی واکنش
- با استفاده از گرما و جرقه **تأمین می‌شود**.
- با استفاده از کاتالیزگر **کاهش می‌یابد**.

ت) در همهٔ مسیرهای انجام واکنش، آنتالپی واکنش مقداری ثابت است.



پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

الف) در حضور توری پلاتینی، واکنش به صورت انفجاری بوده و در حضور پودر روی، سریع است. پس توری پلاتینی کاهش بیشتری در انرژی فعال‌سازی ایجاد می‌کند.

ب) انرژی فعال‌سازی واکنش با استفاده از گرما **تأمین** می‌شود، اما با استفاده از کاتالیزگر **کاهش** می‌یابد.

تیزبازی تا الان موارد «الف» و «ب» غلط بوده‌اند که با ردکردن این دو مورد به گزینهٔ «۳» می‌رسیم.

پ) کاملاً درست است!

ت) هر دو کاتالیزگر بوده و آنتالپی واکنش را تغییر نمی‌دهند.

۹۰ چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ واکنش‌های منجر به کاهش میزان آلاینده‌های تولیدی در خودروهای بنزینی درست است؟

- هر سه واکنش در دمای اتاق به رغم انجام‌پذیری، سرعت چندانی ندارد.
- هر سه واکنش دارای $\Delta H < 0$ و E_a زیاد هستند.
- استفاده از توری‌هایی از جنس Rh, Pd, Pt در خودروها، به منظور کاهش میزان آلاینده‌ها صورت می‌گیرد.
- هنگام روشن و گرم شدن خودرو در زمستان نسبت به تابستان، عملکرد مطلوب کاتالیزگرها کم‌تر مشاهده می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

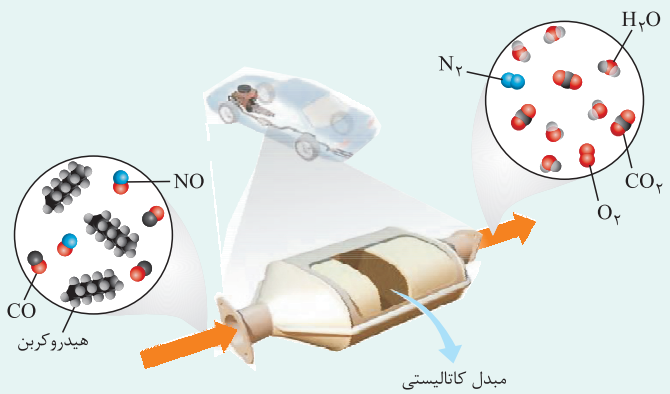
مبدل‌های کاتالیستی:

آلاینده‌های خروجی از اگزوز خودروها، در کسری از ثانیه از موتور خودرو خارج و وارد هواکره می‌شوند. هم‌چنین دمای آن‌ها در این زمان بسیار کوتاه به سرعت کاهش می‌یابد.

برای حذف یا کاهش مقدار این آلاینده‌ها (C_xH_y ،NO و CO) از مبدل‌های کاتالیستی استفاده می‌شود. این قطعه را در مسیر خروج گازها قرار می‌دهند تا با انجام واکنش‌های مناسب، آلاینده‌ها به مواد کم‌خطرتری تبدیل شوند.

مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی:

این مبدل‌ها توری‌هایی از جنس سرامیک هستند که سطح آن‌ها با فلزهای پلاتین (Pt)، پالادیم (Pd) و رودیم (Rh) پوشانده شده است. این فلزها نقش کاتالیزگر را دارند. در این مبدل‌ها واکنش‌های زیر انجام می‌شود:



۱) واکنش حذف کربن مونوکسید (سوختن): $2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$, $\Delta H < 0$ (CO در این واکنش اکسایش می‌یابد.)

۲) واکنش حذف هیدروکربن‌های نسوخته (سوختن): $C_xH_y + (x + \frac{y}{4})O_2(g) \rightarrow xCO_2(g) + \frac{y}{2}H_2O(g)$, $\Delta H < 0$

۳) واکنش حذف گاز نیتروژن مونوکسید (تجزیه): $2NO(g) \rightarrow N_2(g) + O_2(g), \Delta H < 0$ (NO در این واکنش کاهش و اکسایش می‌یابد.)

۱) هر سه واکنش انجام شده در مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی از نوع اکسایش ـ کاهش بوده و گرماده هستند.

واکنش‌های حذف این آلاینده‌ها انرژی فعال‌سازی بالایی دارند و در دمای پایین انجام نمی‌شوند یا بسیار کند هستند، اما در دمای بالا و با استفاده از کاتالیزگر می‌توانند با سرعت بالاتری انجام شوند.

۲) از یک طرف مبدل، آلاینده‌های CO، C_xH_y و NO وارد شده و از طرف دیگر آن، گازهای CO_2، H_2O، N_2 و O_2 خارج می‌شوند.

۳) هر چند مبدل کاتالیستی برای مدت طولانی کار می‌کند، اما پس از مدت معینی کارایی آن کاهش می‌یابد و دیگر قابل استفاده نیست.

۴) برای افزایش کارایی مبدل کاتالیستی، گاهی سرامیک را به شکل مش (دانه‌های) ریز درمی‌آورند و کاتالیزگرها را روی سطح آن می‌نشانند؛ زیرا سطح تماس مش‌ها از توری بیشتر است.

۵) در سطح سرامیک‌های درون مبدل کاتالیستی، توده‌های فلزی با قطر ۲ تا ۱۰ نانومتر وجود دارند.

۶) با وجود مبدل کاتالیستی، در هنگام روشن و گرم شدن خودرو، به‌ویژه در روزهای سرد زمستان، باز هم *سر و کلهٔ* آلاینده‌ها در گازهای خروجی پیدا می‌شود، زیرا این مبدل‌ها در دماهای پایین کارایی پایینی دارند.

۷) با توجه به جدول کتاب درسی، مقایسهٔ مقدار آلاینده‌ها در غیاب و در حضور مبدل و میزان تأثیر مبدل بر کاهش مقدار آلاینده‌ها به صورت زیر است:

ترتیب مقدار آلاینده‌ها در حضور و غیاب مبدل کاتالیستی: $CO > C_xH_y > NO$

میزان تأثیر مبدل کاتالیستی بر کاهش مقدار آلاینده (درصد کاهش آلاینده): $NO > C_xH_y > CO$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد اول، دوم و چهارم درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

مورد (۱): انرژی فعال‌سازی هر سه واکنش زیاد است، برای همین در دمای پایین سرعت چندانی ندارند.

مورد (۲): مطابق با درس‌باکس کاملاً درست است.

مورد (۳): توری‌ها از جنس سرامیک است! تنها سطح آن‌ها با فلزهای Pt ، Pd و Rh پوشانده می‌شود.

مورد (۴): مبدل‌های کاتالیستی در دمای پایین زمستان و در هنگام روشن و گرم شدن خودرو، عملکرد مطلوبی ندارند.

۹۱ کدام گزینه در مورد خودروهای دیزلی و مبدل کاتالیستی مناسب برای آن‌ها نادرست است؟

۱) درون خودروهای دیزلی، دو آلاینده تولید می‌شود که برخی اتم‌های آن‌ها به آرایش هشت‌تایی پایدار نمی‌رسد.

۲) از آمونیاک برای کاهش میزان آلایندگی اکسیدهای نیتروژن و کربن استفاده می‌شود.

۳) فرایند کاهش میزان آلایندگی هیدروکربن‌ها در این خودروها به کمک مبدل کاتالیستی صورت می‌گیرد.

۴) حذف مقداری از گازهای CO و C_xH_y، پیش از حذف اکسیدهای نیتروژن صورت می‌گیرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق واکنش زیر از آمونیاک برای کاهش میزان آلایندگی **اکسیدهای نیتروژن‌دار** تولیدی در خودروهای دیزلی استفاده می‌شود:

$$NO(g) + NO_2(g) + 2NH_3(g) \rightarrow 2N_2(g) + 3H_2O(g)$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): درون موتور خودروهای دیزلی، آلاینده‌هایی مثل CO، C_xH_y، NO، NO_2 و ... تولید می‌شوند که در بین آن‌ها دو اکسید NO و NO_2 با ساختار لوویس به ترتیب $:\ddot{O}=\dot{N}\cdot$ و $\cdot\dot{N}(=\ddot{O}:)_2$ از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نمی‌کنند.

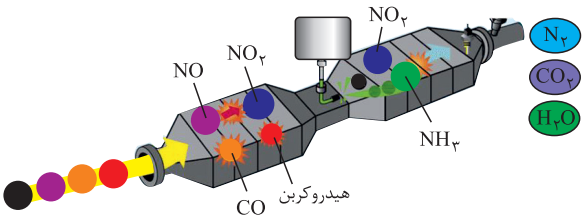
نکته در صورتی که مجموع الکترون‌های لایهٔ ظرفیت یک ترکیب عددی فرد باشد، برخی اتم‌های آن ترکیب از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نمی‌کند:

الکترون‌های ظرفیت: $NO = 5 + 6 = 11$

الکترون‌های ظرفیت: $NO_2 = 5 + 2(6) = 17$

گزینهٔ (۳): واکنش حذف CO و C_xH_y مانند خودروهای بنزینی، توسط مبدل کاتالیستی انجام می‌شود.

گزینهٔ (۴): مطابق با شکل زیر متوجه می‌شویم که ابتدا CO و C_xH_y از سوخت حذف شده و سپس اکسیدهای نیتروژن‌دار حذف می‌شوند.



۹۲ اگر در واکنش زیر ضریب استوکیومتری اکسیدهای نیتروژن با هم برابر باشد، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

$$NO(g) + NO_2(g) + NH_3(g) \rightarrow N_2(g) + H_2O(g)$$

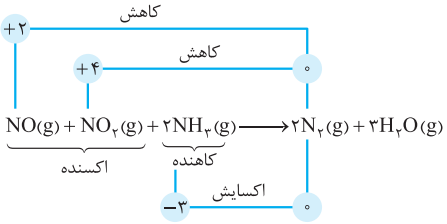
- واکنش دارای دو اکسنده و یک کاهنده است.
- در واکنش موازنه‌شده، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود.
- اگر واکنش به گونه‌ای دچار تغییر شود که ضریب NO دو برابر ضریب NO_2 شود، مجموع ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده، برابر ۷۵ خواهد شد.
- در این واکنش، تنها اتم نیتروژن دچار تغییر عدد اکسایش شده است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ همهٔ موارد درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

درستی موارد اول، دوم و چهارم با توجه به واکنش موازنه‌شدهٔ زیر مشخص است:



$$\text{شمار الکترون‌های مبادله شده براساس کاهندهٔ } (NH_3) = ۲ \times ۱ \times ۳ = ۶$$

(ضریب NH_3: ۲، زیروند N: ۱، تغییر عدد اکسایش N: ۳)

مورد (۳): اگر ضریب NO دو برابر ضریب NO_2 شود، اتفاق زیر می‌افتد:

$$۲NO + ۱NO_2 + \frac{۸}{۳}NH_3 \rightarrow \frac{۱۷}{۶}N_2 + ۴H_2O$$

همه را در ۶ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند.

$$۱۲NO + ۶NO_2 + ۱۶NH_3 \rightarrow ۱۷N_2 + ۲۴H_2O$$

$$\text{مجموع ضرایب} = ۱۲ + ۶ + ۱۶ + ۱۷ + ۲۴ = ۷۵$$

۹۳ کدام مطلب، نادرست است؟

۱) نگه‌داری سیب‌زمینی در انبار تاریک و خشک، از جوانه‌زنی و فساد آن جلوگیری می‌کند.

۲) نگه‌داری کشمش در ظرف دربسته داخل یخچال، به دلیل رطوبت بالا منجر به کپک‌زدگی آن می‌شود.

۳) نگه‌داری نان در فریزر، به دلیل کاهش فعالیت میکروبی، زمان ماندگاری آن را افزایش می‌دهد.

۴) نگه‌داری روغن زیتون در ظرف شیشه‌ای تیره و در جای خنک، از اکسایش و کاهش کیفیت آن جلوگیری می‌کند.

پاسخ‌خیلی تشریحی ✔ نگه‌داری کشمش در ظرف دربسته داخل یخچال، به دلیل کاهش دما و عدم دسترسی به اکسیژن، می‌تواند زمان ماندگاری آن را افزایش داده و از کپک‌زدن جلوگیری کند. *هواستون باشه که* یخچال محیط خشکی است و رطوبت را افزایش نمی‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): سیب‌زمینی در محیط تاریک و خشک، جوانه نمی‌زند و دیرتر فاسد می‌شود؛ زیرا نور و رطوبت از عوامل مؤثر در فساد و جوانه‌زنی سیب‌زمینی است.

گزینهٔ (۳): کاهش دما در فریزر، فعالیت میکروبی و واکنش‌های شیمیایی که باعث فساد نان می‌شوند را کاهش داده و باعث افزایش زمان ماندگاری آن می‌شود.

گزینهٔ (۴): نگه‌داری روغن زیتون در ظرف تیره و در جای خنک، از اکسایش آن که منجر به تغییر طعم و بوی روغن می‌شود، جلوگیری می‌کند و *طبیعتاً* باعث حفظ کیفیت آن برای مدت‌زمان طولانی‌تری می‌شود.

۹۴ چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- افزودن محلول سدیم کلرید به محلول نقره نیترات، باعث تشکیل بسیار سریع رسوب خاکستری‌رنگ نقره کلرید می‌شود.
- سرعت تشکیل زنگار ترد و شکننده بر اثر زنگ زدن اشیای آهنی، بیشتر از سرعت زرد و پوسیده‌شدن کاغذ در گذر زمان است. (کند — بسیار کند)
- مجموع شمار اتم‌های مولکول قند موجود در جوانهٔ گندم، ۳/۷۵ برابر مجموع شمار اتم‌های کربن در مولکول گلوکز است. (مالتوز: $C_{12}H_{22}O_{11}$ — گلوکز: $C_6H_{12}O_6$)
- چهرهٔ آشکار ردپای غذا نشان می‌دهد که سالانه حدود ۳۰ درصد از غذایی که در جهان تولید می‌شود، به مصرف نمی‌رسد و به زباله تبدیل می‌شود.
- شاخه‌ای از علم شیمی که به بررسی شرایط و چگونگی انجام واکنش‌های شیمیایی و عوامل مؤثر بر سرعت آن‌ها می‌پردازد، سینتیک شیمیایی نام دارد.

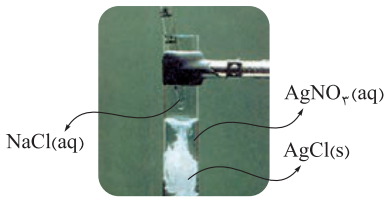
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

ردپای غذا
- چهرهٔ آشکار: سالانه حدود ۳۰٪ از غذایی که در جهان آماده می‌شود، به مصرف نمی‌رسد و به زباله تبدیل شده یا از بین می‌رود.
- چهرهٔ پنهان: سهم‌داشتن منابعی مانند نیروی انسانی، ابزار و دستگاه‌های مورد نیاز، حمل‌ونقل، آب و انرژی، زمین‌های بایر و ... در تهیهٔ غذا؛ تولید گازهای گلخانه‌ای به‌ویژه کربن دی‌اکسید

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های دوم، چهارم و پنجم درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: افزودن محلول سدیم کلرید به محلول نقره نیترات، باعث تشکیل **سریع** رسوب **سفیدرنگ** نقره کلرید می‌شود.



نکته

واکنش	سرعت	توضیح
انفجار	بسیار سریع	در این واکنش از مقدار کمی مادهٔ منفجرشونده به حالت جامد یا مایع، حجم زیادی از گازهای داغ تولید می‌شود.
افزودن محلول سدیم کلرید به محلول نقره نیترات	سریع	در این واکنش، رسوب سفیدرنگ نقره کلرید تولید می‌شود.
زنگ‌زدن آهن	کند	اشیای آهنی در هوای مرطوب به کندی زنگ می‌زنند. زنگار تولیدشده در این واکنش، ترد و شکننده است و فرومی‌ریزد.
زرد و پوسیده شدن کاغذ	بسیار کند	همان واکنش تجزیهٔ سلولز کاغذ است.

عبارت سوم: فرمول مولکولی قند موجود در جوانهٔ گندم (مالتوز)، به صورت $C_{12}H_{22}O_{11}$ و فرمول مولکولی گلوکز، به صورت $C_6H_{12}O_6$ است؛ بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{12+22+11}{6} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2} = 7/5$$

۹۵ در کدام گزینه، ترتیب انجام واکنش‌ها از راست به چپ، از سریع‌ترین به کندترین به درستی آمده است؟

۱) سوختن چوب کبریت ـ پختن تخم مرغ ـ تشکیل الماس ـ زنگ‌زدن آهن

۲) انفجار آتشفشان ـ پوسیدن کاغذ ـ تشکیل نفت خام ـ ترش‌شدن شیر

۳) سوختن بنزین ـ تجزیهٔ پلاستیک ـ فاسدشدن گوشت ـ تشکیل سنگ مرمر

۴) انفجار بمب ـ هضم غذا ـ رسیدن میوه ـ تشکیل فسیل

پاسخ خیلی تشریحی ✔

- **انفجار بمب**: انفجار، یک واکنش شیمیایی بسیار سریع است که در کسری از ثانیه رخ می‌دهد.
- **هضم غذا**: هضم غذا، فرایندی کند است که چند ساعت در بدن انسان طول می‌کشد.
- **رسیدن میوه**: رسیدن میوه نیز فرایندی کند است که چند روز یا چند هفته زمان می‌برد.
- **تشکیل فسیل**: تشکیل فسیل، فرایندی بسیار کند است که میلیون‌ها سال به طول می‌انجامد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

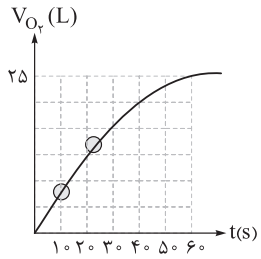
گزینهٔ (۱): تشکیل الماس فرایندی بسیار کندتر از زنگ‌زدن آهن است.

گزینهٔ (۲): تشکیل نفت خام فرایندی بسیار کندتر از ترش‌شدن شیر است.

گزینهٔ (۳): تجزیهٔ پلاستیک، فرایندی بسیار کندتر از فاسدشدن گوشت است.

مشاوره این سؤال برگرفته و تلفیقی از دو سؤال در کنکورهای سال‌های دور است که ایده‌های جذابی *داشتن* و در نظام آموزش جدید *هنوز مشابهش نیومده و احتمالاً به زودی بیاد!*

۹۶ اگر نمودار زیر، حجم گاز آزادشده بر اثر انجام واکنش: $2KNO_3(s) \rightarrow 2KNO_2(s) + O_2(g)$ را نشان دهد، به تقریب چند ثانیه زمان لازم است تا جرم فراوردهٔ جامد تولیدشده با جرم واکنش‌دهندهٔ باقی‌مانده برابر شود؟ (چگالی گاز O_2 در شرایط آزمایش، برابر با $0/96\ g.L^{-1}$ است؛ $K=39, O=16, N=14 : g.mol^{-1}$)



۱) ۱۰

۲) ۲۳

۳) ۳۵

۴) ۴۲

Hint

ابتدا با استفاده از مقدار گاز تولیدشده در پایان واکنش، مقدار مول اولیهٔ KNO_3 و سپس مقدار مول مصرف‌شدهٔ KNO_3 تا لحظهٔ برقراری شرط سؤال را حساب کن. در ادامه با استفاده از مقدار مول مصرف‌شدهٔ KNO_3 تا لحظهٔ مورد نظر، حجم گاز اکسیژن تولیدشده را حساب کرده و با استفاده از نمودار، زمان مورد نظر *رو بیاب!*

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شمار مول‌های اولیهٔ KNO_3 را حساب می‌کنیم:

با توجه به نمودار مشخص است که واکنش در لحظهٔ $t = 60\ s$ به پایان رسیده است. بر اثر انجام واکنش به صورت کامل، ۲۵ لیتر گاز آزاد شده است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$25\ L\ O_2 \times \frac{0/96\ g\ O_2}{1\ L\ O_2} \times \frac{1\ mol\ O_2}{32\ g\ O_2} \times \frac{2\ mol\ KNO_3}{1\ mol\ O_2} = 1/5\ mol\ KNO_3$$

گام دوم: مقدار مول KNO_3 را در لحظه‌ای حساب می‌کنیم که جرم آن با جرم فراوردهٔ جامد تولیدشده یعنی KNO_2 برابر باشد:

$2KNO_3(s) \rightarrow 2KNO_2(s) + O_2(g)$			
مول اولیه	۱/۵	۰	۰
مول مصرفی	$-2x$	$+2x$	$+x$
مول باقی‌مانده	$1/5-2x$	$2x$	x

مطابق با معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، اگر تا لحظهٔ مورد نظر $2x$ مول KNO_3 مصرف شده باشد، $2x$ مول KNO_2 و x مول O_2 تولید می‌شود. با فرض برابربودن جرم KNO_3 و KNO_2 در این لحظه، می‌توان نوشت:

$$(1/5-2x)\ mol\ KNO_3 \times \frac{101\ g\ KNO_3}{1\ mol\ KNO_3} = 2x\ mol\ KNO_2 \times \frac{85\ g\ KNO_2}{1\ mol\ KNO_2}$$

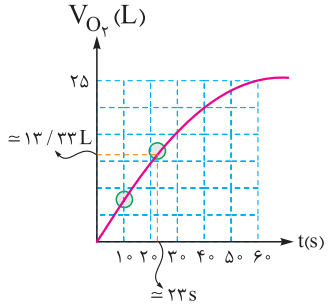
$$\Rightarrow 151/5 - 202x = 170x \Rightarrow x = \frac{151/5}{\underbrace{170+202}_{372}} \simeq 0/4$$

یعنی بر اثر مصرف $2x$ مول یا تقریباً $0/8$ مول KNO_3، جرم KNO_2 تولیدشده با جرم KNO_3 باقی‌مانده برابر خواهد شد.

گام سوم: با استفاده از مقدار مصرف‌شدهٔ KNO_3 تا لحظهٔ مورد نظر، حجم گاز O_2 تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$0/8\ mol\ KNO_3 \times \frac{1\ mol\ O_2}{2\ mol\ KNO_3} \times \frac{32\ g\ O_2}{1\ mol\ O_2} \times \frac{1\ L\ O_2}{0/96\ g\ O_2} = \frac{40}{3} \simeq 13/33\ L\ O_2$$

با توجه به نمودار، تقریباً در لحظهٔ $t = 23\ s$ پس از شروع واکنش، حدود ۱۳/۳۳ لیتر گاز O_2 آزاد شده است، *ببینید:*



۹۷ با توجه به واکنش زیر که در ظرفی با حجم ثابت انجام می‌شود، چند مورد از موارد زیر نادرست است؟

$$A(g)+2B(g) \rightarrow 3C(g)$$

- اگر در لحظه‌ای سرعت متوسط مصرف A، برابر با $0/02 mol.L^{-1}.s^{-1}$ باشد، سرعت متوسط تولید C برابر با $0/06 mol.L^{-1}.s^{-1}$ خواهد بود.
- اگر در لحظه‌ای سرعت متوسط تولید C، برابر با $1/2 mol.L^{-1}.min^{-1}$ باشد، سرعت متوسط واکنش برابر با $0/06 mol.L^{-1}.s^{-1}$ خواهد بود.
- اگر در شروع واکنش، غلظت A برابر با $0/4 mol.L^{-1}$ و غلظت B برابر با $0/8 mol.L^{-1}$ باشد، پس از مدت‌زمانی که غلظت C به $0/6 mol.L^{-1}$ می‌رسد، غلظت A و B به ترتیب برابر با $0/2 mol.L^{-1}$ و $0/4 mol.L^{-1}$ خواهد بود.
- اگر نمودار غلظت ـ زمان برای هر سه ماده رسم شود، شیب نمودار برای مادهٔ A، یک‌سوم شیب نمودار برای مادهٔ C و قرینهٔ آن خواهد بود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

مشاوره این تست با هدف سنجش درک شما از مفاهیم سرعت واکنش، ضرایب استوکیومتری، واحدهای سرعت واکنش و ارتباط آن‌ها با تغییر غلظت مواد در طول زمان طراحی شده است. دقت در تبدیل واحدها و محاسبات در این‌گونه تست‌ها بسیار مهم است.

پاسخ خیلی تشریحی فقط عبارت دوم نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

با توجه به ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در واکنش، سرعت متوسط تولید C، سه برابر سرعت متوسط مصرف A است؛ بنابراین اگر سرعت متوسط مصرف A برابر با $0/02 mol.L^{-1}.s^{-1}$ باشد، سرعت متوسط تولید C برابر با $0/06 mol.L^{-1}.s^{-1}$ خواهد بود.

سرعت متوسط واکنش را می‌توان از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف هر ماده بر ضریب استوکیومتری آن ماده به دست آورد. با توجه به این‌که ضریب استوکیومتری C برابر ۳ است، سرعت متوسط واکنش برابر است با:

$$\bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(C)}{3} = \frac{1/2}{3} = 0/4 mol.L^{-1}.min^{-1} \times \frac{1 min}{60 s} = 0/0067 mol.L^{-1}.s^{-1}$$

با توجه به ضرایب استوکیومتری، به ازای مصرف هر ۰/۲ مول از A، ۰/۴ مول از B مصرف و ۰/۶ مول از C تولید می‌شود؛ بنابراین اگر در شروع واکنش، غلظت A برابر با $0/4 mol.L^{-1}$ و غلظت B برابر با $0/8 mol.L^{-1}$ باشد، پس از مدت‌زمانی که غلظت C به $0/6 mol.L^{-1}$ می‌رسد، غلظت A و B به ترتیب برابر با ۰/۲ و ۰/۴ مول بر لیتر خواهد بود.

شیب نمودار غلظت ـ زمان، نشان‌دهندهٔ سرعت واکنش است. با توجه به ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در واکنش، سرعت متوسط تولید C سه برابر سرعت متوسط مصرف A است. هم‌چنین، با مصرف A و B، غلظت آن‌ها کاهش می‌یابد و نمودار آن‌ها شیب منفی خواهد داشت، درحالی‌که با تولید C، غلظت آن افزایش می‌یابد و نمودار آن شیب مثبت خواهد داشت.

۹۸ اگر سرعت متوسط مصرف هیدروژن پراکسید در واکنش زیر، برابر با ۰/۰۰۲ مولار بر ثانیه باشد، به ترتیب سرعت متوسط مصرف MnO_2، چند گرم بر ثانیه و سرعت متوسط تولید اکسیژن، چند لیتر بر دقیقه است؟ (شرایط را STP، دما را ثابت و حجم محلول را ۲ لیتر در نظر بگیرید؛ $MnO_2 = 87 : g.mol^{-1}$)

$$H_2O_2\,(aq) + MnO_2\,(s) \rightarrow MnO\,(s) + O_2\,(g) + H_2O\,(l)$$

۱) ۰/۳۴۸، ۵/۳۷۶
۲) ۰/۳۴۸، ۲/۶۸۸
۳) ۰/۱۷۴، ۵/۳۷۶
۴) ۰/۱۷۴، ۲/۶۸۸

Hint سرعت متوسط مصرف $H_2O_2(aq)$ را با واحد $mol.s^{-1}$ حساب کرده، سپس با استفاده از رابطهٔ بین سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد با ضرایب استوکیومتری آن‌ها، سرعت متوسط مصرف MnO_2 و سرعت متوسط تولید O_2 را با واحد $mol.s^{-1}$ به دست بیاور. در نهایت با تبدیل واحد مناسب، واحد سرعت‌ها را به واحدهای مد نظر سؤال تبدیل کن.

درس Box نسبت سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد شرکت‌کننده در یک واکنش به ضرایب استوکیومتری آن‌ها، با هم برابر است:

$$aA \rightarrow bB \Rightarrow \bar{R}_{(\text{واکنش})} = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ معادلهٔ واکنش داده‌شده، موازنه شده است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\bar{R}(H_2O_2)}{1} = \frac{\bar{R}(MnO_2)}{1} = \frac{\bar{R}(O_2)}{1} = 0/002\,mol.L^{-1}.s^{-1} \times 2L = 4\times10^{-3}\,mol.s^{-1}$$

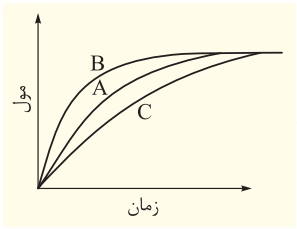
ابتدا سرعت متوسط مصرف MnO_2 رابرحسب گرم بر ثانیه محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{R}(MnO_2) = 4\times10^{-3}\,mol.s^{-1} \times \frac{87g}{1mol} = 0/348\,g.s^{-1}$$

و حالا! سرعت متوسط تولید O_2 را برحسب لیتر بر دقیقه به دست می‌آوریم:

$$\bar{R}(O_2) = 4\times10^{-3}\,mol.s^{-1} \times \frac{22/4L}{1mol} \times \frac{60s}{1min} = 5/376\,L.min^{-1}$$

۹۹ با توجه به نمودار زیر که مربوط به تولید یک فراورده در یک واکنش در شرایط مختلف است، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



$B > A > C$ سرعت واکنش انجام‌شده $\Rightarrow$ شیب نمودار : $B > A > C$

الف) اگر منحنی A مربوط به واکنش پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق باشد، منحنی B می‌تواند مربوط به همین واکنش در دمای $40^\circ C$ باشد.

کاتالیزگر واکنش سوختن قند

ب) خاک باغچه می‌تواند منحنی تولید بخار آب حاصل از سوختن قند را از A به C تبدیل کند و مدت‌زمان انجام واکنش را کاهش دهد.

پ) استفاده از پتاسیم به جای سدیم در واکنش آن با آب سرد و در همان شرایط، می‌تواند منحنی تولید گاز هیدروژن را از A به B تبدیل کند.

واکنش‌پذیری: $Na < K \Leftarrow$ سرعت واکنش $\uparrow$

ت) اگر منحنی A مربوط به تولید رادیکال‌ها بر اثر انجام واکنش‌های متنوع و پیچیده در بدن ما باشد، منحنی C تأثیر لیکوپن بر میزان تولید این رادیکال‌ها را نشان می‌دهد.

با به دام انداختن رادیکال‌ها مقدار آن‌ها را کاهش می‌دهد تا از سرعت انجام واکنش‌های ناخواسته کاسته شود.

۱) الف ـ ب

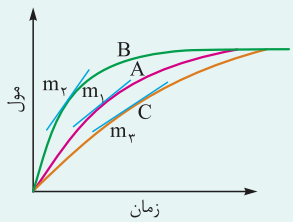
۲) الف ـ پ

۳) ب ـ ت

۴) پ ـ ت

درس Box

در نمودار مقابل، منحنی A نشان‌دهندهٔ تغییر شمار مول‌های یکی از مواد فراورده در یک واکنش را نشان می‌دهد. اگر عاملی بتواند سرعت واکنش و در نتیجه سرعت تولید فراورده را افزایش دهد (مثل افزودن کاتالیزگر به سامانهٔ واکنش، افزایش دما، افزایش سطح تماس واکنش‌دهنده‌ها و ...)، شیب منحنی تولید فراوردهٔ مورد نظر افزایش پیدا کرده و منحنی آن از A به B تغییر می‌کند ($m_2 > m_1$).



از طرفی، اگر عاملی بتواند سرعت واکنش و در نتیجه سرعت تولید فراورده را کاهش دهد (مثل افزودن بازدارنده به سامانهٔ واکنش، کاهش دما، کاهش سطح تماس واکنش‌دهنده‌ها و ...)، شیب منحنی تولید فراوردهٔ مورد نظر کاهش پیدا کرده و منحنی آن از A به C تغییر می‌کند ($m_3 < m_1$).

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های (الف) و (پ) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) افزایش دما، شیب منحنی تولید فراورده را افزایش می‌دهد؛ بنابراین اگر منحنی A نشان‌دهندهٔ تولید فراورده در دمای اتاق ($25^\circ C$) باشد، منحنی B می‌تواند تولید همان فراورده را در دمای $40^\circ C$ نشان دهد.

ب) وجود نوعی کاتالیزگر در خاک باغچه باعث می‌شود واکنش سوختن حبهٔ قند آغشته به خاک باغچه، با سرعت و شدت بیشتری همراه باشد؛ بنابراین اگر منحنی A نشان‌دهندهٔ تولید بخار آب در واکنش سوختن حبهٔ قند معمولی باشد، منحنی B می‌تواند مربوط به تولید بخار آب در واکنش سوختن حبهٔ قند آغشته به خاک باغچه باشد.

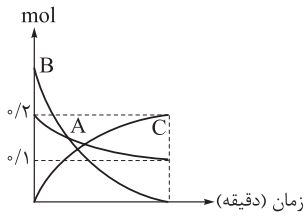
پ) معادلهٔ واکنش فلزهای قلیایی (با نماد فرضی M) با آب به صورت زیر است:

$$2M(s) + 2H_2O(l) \rightarrow 2MOH(aq) + H_2(g)$$

در گروه فلزهای قلیایی از بالا به پایین، واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد. به همین دلیل پتاسیم (دورهٔ چهارم) از سدیم (دورهٔ سوم) واکنش‌پذیرتر بوده و در شرایط یکسان (مقدار مول برابر، دما و فشار یکسان و ...)، واکنش پتاسیم با آب سرد، نسبت به واکنش سدیم با آن با سرعت و شدت بیشتری همراه بوده و اگر منحنی A نشان‌دهندهٔ تولید گاز هیدروژن در واکنش سدیم با آب سرد باشد، منحنی B می‌تواند مربوط به تولید گاز هیدروژن در واکنش پتاسیم با آب سرد باشد.

ت) در بدن ما به دلیل انجام واکنش‌های متنوع و پیچیده، رادیکال‌هایی به وجود می‌آیند که اگر به وسیلهٔ بازدارنده‌ها (مثل لیکوپن) جذب نشوند، می‌توانند با انجام واکنش‌های سریع به بافت‌های بدن آسیب برسانند؛ بنابراین لیکوپن به عنوان یک بازدارنده بر میزان تولید رادیکال‌ها تأثیری ندارد، بلکه با به دام انداختن رادیکال‌ها مقدار آن‌ها را کاهش می‌دهد تا از سرعت انجام واکنش‌های ناخواسته کاسته شود.

۱۰۰ با توجه به نمودار زیر، در لحظه‌ای که شمار مول‌های A، ۲ برابر شمار مول‌های C می‌شود، ۴۰ درصد از شمار مول‌های B مصرف شده است. شمار مول‌های اولیهٔ B و نسبت مجموع ضرایب فراورده به مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (ضریب A در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، برابر با ۱ است.)



۱) ۰/۳ ـ ۰/۵
۲) ۰/۳ ـ ۰/۴
۳) ۰/۴ ـ ۰/۴
۴) ۰/۴ ـ ۰/۵

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به نمودار، از لحظهٔ شروع تا پایان واکنش، بر اثر مصرف ۰/۱ مول A، ۰/۲ مول C تولید می‌شود، پس ضریب استوکیومتری C در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، دو برابر ضریب استوکیومتری A است؛ بنابراین می‌توان معادلهٔ واکنش را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$A + bB \rightarrow 2C$$

	A	~	2C
شمار مول‌های آغازی	۰/۲		۰
شمار مول‌های مصرفی	$-x$		$+2x$
شمار مول‌های باقی‌مانده	$۰/۲-x$		$2x$

گام دوم: *درست به دامن جدول تغییرات شده* و شمار مول‌های مصرف‌شدهٔ A در لحظه‌ای که شمار مول‌های باقی‌ماندهٔ آن دو برابر شمار مول‌های تولیدشدهٔ C است را حساب می‌کنیم:

با فرض بر این‌که تا رسیدن به لحظهٔ مورد نظر، x مول A مصرف شده باشد، $2x$ مول C تولید می‌شود. اکنون با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$۰/۲-x=2(2x) \Rightarrow x=\frac{۰/۲}{5}=۰/۰۴$$

گام سوم: شمار مول‌های اولیه B را محاسبه می‌کنیم:

بر اثر مصرف ۰/۰۴ مول A، ۴۰ درصد شمار مول‌های اولیهٔ B مصرف شده است؛ بنابراین داریم:

$$\text{شمار مول‌های مصرف‌شدهٔ B} = ۰/۰۴\,\text{mol A} \times \frac{b\,\text{mol B}}{1\,\text{mol A}} = ۰/۰۴\,b\,\text{mol B}$$

$$\text{درصد مصرف‌شدهٔ B} = \frac{\text{مول مصرف‌شدهٔ B}}{\text{مول اولیهٔ B}} \times ۱۰۰ = \frac{۰/۰۴b}{\text{مول اولیهٔ B}} \times ۱۰۰ = ۴۰ \Rightarrow \text{مول اولیهٔ B} = ۰/۱\,b$$

مشفصه که برای محاسبهٔ شمار مول‌های اولیهٔ B، نیاز به اطلاعاتی در رابطه با b داریم! از قسمت دوم سؤال و هم‌چنین گزینه‌ها کمک می‌گیریم:

اگر نسبت مجموع ضرایب فراورده به مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها برابر با ۰/۴ باشد:

$$\frac{\text{ضریب استوکیومتری C}}{\text{مجموع ضرایب استوکیومتری A و B}} = ۰/۴ \Rightarrow \frac{2}{1+b} = ۰/۴ \Rightarrow b = 4$$

اگر b برابر با ۴ باشد، شمار مول‌های اولیهٔ B برابر با ۰/۴ مول خواهد بود:

$$\text{درصد مصرفی B} = \frac{۰/۰۴ \times 4}{۰/۴} \times ۱۰۰ = ٪۴۰$$ ✓ ق.ق

اگر نسبت مجموع ضرایب فراورده به مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها برابر ۰/۵ باشد:

$$\frac{\text{ضریب استوکیومتری C}}{\text{مجموع ضرایب استوکیومتری A و B}} = ۰/۵ \Rightarrow \frac{2}{1+b} = ۰/۵ \Rightarrow b = 3$$

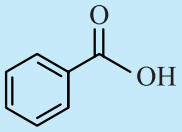
اگر b برابر با ۳ باشد، شمار مول‌های اولیهٔ B برابر با ۰/۳ مول خواهد بود:

$$\text{درصد مصرفی B} = \frac{۰/۰۴ \times 3}{۰/۴} \times ۱۰۰ = ٪۳۰$$ ✗ غ.ق.ق

بنابراین گزینهٔ (۳) *درست از آب دروومده!*

۱۰۱ درستی یا نادرستی مطالب زیر در ارتباط با بنزوئیک اسید، به ترتیب کدام است؟

- کربوکسیلیک اسید آروماتیک، فرمول مولکولی: $C_7H_6O_2$
- ساختار:



- در تمشک و توت‌فرنگی

- افزودن آن به مواد غذایی، منجر به حذف واکنش‌های شیمیایی فاسدکنندهٔ مواد غذایی می‌شود.
- یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک و نوعی رنگ‌دهنده است که در تمشک و توت‌فرنگی وجود دارد.
- آشناترین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها است که به صورت هدفمند به مواد خوراکی افزوده می‌شود.

استیک اسید با فرمول مولکولی $C_2H_4O_2$

- نوعی مادهٔ شیمیایی با ویژگی‌های خاص است که از آن به عنوان افزودنی به منظور افزایش زمان ماندگاری و کیفیت مواد غذایی در صنایع غذایی استفاده می‌شود.

نقش نگهدارنده ⟸ ↓ سرعت واکنش‌های شیمیایی منجر به فساد مواد غذایی

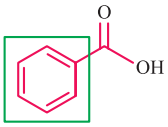
۱) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۲) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست
۴) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های اول تا سوم نادرست و تنها عبارت آخر درست است.

استفاده از مواد شیمیایی با ویژگی‌های خاص به عنوان افزودنی‌ها در صنایع غذایی، سبب افزایش زمان ماندگاری و کیفیت مواد غذایی شده است. افزودنی‌ها، مواد شیمیایی مانند **نگهدارنده**، **رنگ‌دهنده**، **طعم‌دهنده** و ... هستند که به صورت **هدفمند** به مواد خوراکی یا غذاها افزوده می‌شوند. برای نمونه نگهدارنده‌ها، سرعت واکنش‌های شیمیایی که منجر به فساد مادهٔ غذایی می‌شود را کاهش می‌دهند. یکی از این مواد، بنزوئیک اسید است که در تمشک و توت‌فرنگی وجود دارد.

بررسی عبارت‌های نادرست:

- افزودن بنزوئیک اسید به مواد غذایی، سرعت واکنش‌های شیمیایی که منجر به فساد مواد غذایی می‌شود را **کاهش** می‌دهد؛ نه این‌که این واکنش‌ها را حذف کند!
- یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک و نوعی **نگهدارنده** است که در تمشک و توت‌فرنگی وجود دارد، نه نوعی رنگ‌دهنده!



حلقهٔ بنزنی

- آشناترین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها، اتانوئیک اسید است؛ نه بنزوئیک اسید!

۱۰۲ در یک واکنش شیمیایی، سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ **A**، برابر با سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ **B** و جرم مولی مادهٔ **A**، ۱/۵ برابر جرم مولی مادهٔ **B** است. کدام مورد همواره درست است؟

۱) سرعت متوسط واکنش، برابر با سرعت متوسط ماده با جرم مولی بیشتر است.

۲) یکی از آن‌ها واکنش‌دهنده و دیگری فراورده است.

۳) در واحد زمان، تغییر شمار مول‌های A، ۱/۵ برابر تغییر شمار مول‌های B است.

۴) ضریب استوکیومتری ماده با جرم مولی کم‌تر، ۱/۵ برابر ضریب استوکیومتری دیگری است.

مشاوره این تست شبیه‌ساز یکی از مفهومی‌ترین تست‌های مبحث سینتیک است که در کنکور ۱۴۰۳ مشاهده شده است. طراحان کنکور اخیراً به طرح تست‌های این‌چنینی *تمایل و علاقه نشون داده‌اند!*

Hint با استفاده از برابری در سرعت تغییر جرم دو مادهٔ A و B و نسبت جرم مولی آن‌ها، نسبت تغییر شمار مول‌های آن‌ها در واحد زمان را حساب کن و سپس به بررسی و تحلیل گزینه‌ها بپرداز.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اگر ضریب استوکیومتری ماده‌های A و B در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش را به ترتیب برابر a و b نشان دهیم، می‌توان نوشت: (واحد زمان (t) را برحسب ثانیه (s) در نظر می‌گیریم.)

$$\bar{R}_{(\text{واکنش})} = \frac{\bar{R}\ A \text{ یا } B(\text{mol}.\text{s}^{-1})}{a \text{ یا } b} \xrightarrow{\bar{R}=\frac{\Delta n}{\Delta t}} \bar{R}_{(\text{واکنش})} = \underbrace{\frac{\Delta n_A(\text{mol})}{a \times \Delta t(\text{s})} = \frac{\Delta n_B(\text{mol})}{b \times \Delta t(\text{s})}}_{(I)}$$

از طرفی با توجه به برابری سرعت تغییر جرم (m) دو ماده، داریم:

$$\text{سرعت تغییر جرم A} = \text{سرعت تغییر جرم B} \Rightarrow \frac{\Delta m_A}{\Delta t(\text{s})} = \frac{\Delta m_B}{\Delta t(\text{s})}$$

$$\xrightarrow{\text{جرم مولی} \times \text{مول} = \text{جرم}} \frac{\Delta n_A \times M_A}{\Delta t(\text{s})} = \frac{\Delta n_B \times M_B}{\Delta t(\text{s})} \xrightarrow[\text{زمان یکسان}]{M_A = 1/5 M_B} 1/5 \Delta n_A = \Delta n_B \quad (II)$$

تساوی (II) نشان می‌دهد که در واحد زمان، تغییر شمار مول‌های مادهٔ B، ۱/۵ برابر تغییر شمار مول‌های مادهٔ A است (نادرستی گزینهٔ (۳)).

با توجه به تساوی‌های (I) و (II) داریم:

$$\frac{\Delta n_A}{a \times \Delta t(\text{s})} = \frac{1/5 \Delta n_A}{b \times \Delta t(\text{s})} \xrightarrow{\text{زمان یکسان}} 1/5a = b$$

بنابراین ضریب استوکیومتری ماده با جرم مولی کم‌تر (B)، ۱/۵ برابر ضریب استوکیومتری مادهٔ دیگر (A) است (درستی گزینهٔ (۴)).

بررسی گزینه‌های (۱) و (۲):

گزینهٔ (۱): اگر ضریب استوکیومتری ماده با جرم مولی بیشتر (A) برابر با ۱ باشد، این گزینه درست است، اما با توجه به اطلاعات داده‌شده، نمی‌توان در رابطه با مقدار دقیق ضرایب استوکیومتری اظهار نظر کرد.

گزینهٔ (۲): با در نظر گرفتن واکنش فرضی زیر، این گزینه نیز رد می‌شود:

	$2A(g) + 3B(g) \rightarrow C(g)$		
جرم مولی $(g.mol^{-1})$	۳۰	۲۰	۱۲۰

تیزبازی اگر فرض کنیم جرم مولی A و B به ترتیب برابر با ۱۵ و ۱۰ گرم بر مول است، با تولید یا مصرف هر ۱/۵ گرم A در واحد زمان (مثلاً یک ثانیه)، ۱/۵ گرم تولید یا مصرف می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned}\bar{R}(A) &= \frac{(\frac{1/5}{15})}{1s} = 0/1 \text{mol}.\text{s}^{-1} \\ \bar{R}(B) &= \frac{(\frac{1/5}{10})}{1s} = 0/15 \text{mol}.\text{s}^{-1}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\bar{R}_{(\text{واکنش})}=\frac{\bar{R}(A)}{a}=\frac{\bar{R}(B)}{b}} \frac{0/1}{a} = \frac{0/15}{b} \Rightarrow \underbrace{1/5a = b}_{\text{تأیید گزینهٔ (۴)}}$$

در یک واکنش شیمیایی، سرعت متوسط تغییر مول‌های مادهٔ A، ۳ برابر سرعت متوسط تغییر مول‌های مادهٔ D، است. کدام مورد همواره درست است؟

(ریاضی داخل ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)

۱) در معادلهٔ واکنش، ضریب استوکیومتری A، ۳ برابر ضریب استوکیومتری D، است.

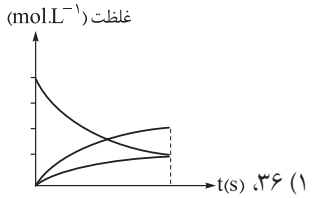
۲) استفاده از کاتالیزگر، سرعت متوسط تغییر مول‌های A و D، را به یک اندازه افزایش می‌دهد.

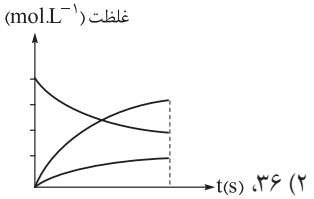
۳) سرعت واکنش، با سرعت متوسط تغییر مول‌های D، برابر است.

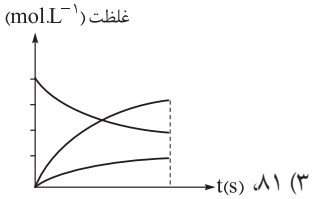
۴) A و D، هر دو در یک سمت معادلهٔ واکنش جای دارند.

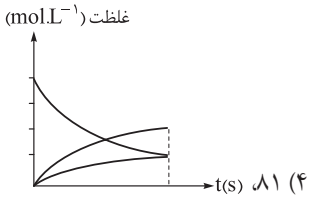
۱۰۳ اگر تغییرات غلظت مواد شرکت‌کننده در یک واکنش شیمیایی به صورت جدول روبه‌رو باشد، سرعت متوسط تولید مادهٔ B در بازهٔ زمانی ۱۲ تا ۱۸ ثانیه، چند مولار بر ساعت است و کدام نمودار، تغییرات غلظت مولار اجزای شرکت‌کننده در این واکنش را به درستی نشان می‌دهد؟

زمان (ثانیه)	غلظت $(mol.L^{-1})$		
	C	B	A
۰	۰	۰	۱/۲۰
۶	۰/۱۵	۰/۴۵	۰/۹۰
۱۲	۰/۲۴	۰/۷۲	۰/۷۲
۱۸	۰/۲۸۵	x	۰/۶۳

۱) ۳۶،


۲) ۳۶،


۳) ۸۱،


۴) ۸۱،


درس Box

در یک واکنش شیمیایی، نسبت اندازهٔ تغییرات شمار مول‌های واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها به ضرایب آن‌ها (یا تغییرات غلظت آن‌ها) در یک بازهٔ زمانی معین با هم برابر است:

$$aA \rightarrow bB \xrightarrow{\text{در بازهٔ زمانی } \Delta t} \frac{|\Delta n_A|}{a} = \frac{|\Delta n_B|}{b} \quad \text{یا} \quad \frac{|\Delta[A]|}{a} = \frac{|\Delta[B]|}{b}$$

به عبارت دیگر، اندازهٔ تغییرات غلظت در بازه‌های زمانی یکسان و معین برای مواد شرکت‌کننده در واکنش متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها است.

توجه: پس از شروع یک واکنش شیمیایی، غلظت واکنش‌دهنده(ها) کاهش و غلظت فراورده(ها) افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

پس از شروع واکنش در لحظهٔ $t = ۰s$، غلظت مادهٔ A کاهش و غلظت مواد B و C افزایش می‌یابد؛ در نتیجه A واکنش‌دهنده، B و C فراورده‌ها و معادلهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$aA \rightarrow bB + cC$$

برای تشخیص ضرایب مواد در واکنش، یک بازهٔ زمانی معین را برای بررسی تغییرات غلظت مواد در نظر می‌گیریم (مثلاً بازهٔ زمانی ۰ تا ۶ ثانیه). ببینید:

$$\frac{|\Delta[A]|}{a} = \frac{|\Delta[B]|}{b} = \frac{|\Delta[C]|}{c} \xrightarrow{\text{بازهٔ زمانی ۰ تا ۶ ثانیه}} \frac{۰/۳}{a} = \frac{۰/۴۵}{b} = \frac{۰/۱۵}{c}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم اعداد به کوچک‌ترین عدد، یعنی ۰/۱۵}} \frac{۲}{a} = \frac{۳}{b} = \frac{۱}{c}$$

کوچک‌ترین ضرایب ممکن برای برقراری این تساوی، $a = ۲$، $b = ۳$ و $c = ۱$ بوده و معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر می‌باشد:

$$۲A \rightarrow ۳B + C$$

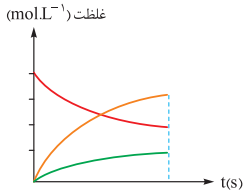
حالا! برای محاسبهٔ سرعت متوسط تولید مادهٔ B در بازهٔ زمانی ۱۲ تا ۱۸ ثانیه، لازم که تغییرات غلظت آن در این بازه را به دست آوریم (نیاز به محاسبهٔ مستقیم x در جدول نیست!) این بازهٔ زمانی را بین دو ماده A و B بررسی می‌کنیم:

$$\frac{|\Delta[A]|}{a} = \frac{|\Delta[B]|}{b} \xrightarrow{\text{بازهٔ زمانی ۱۲ تا ۱۸ ثانیه}} \frac{۰/۰۹}{۲} = \frac{|\Delta[B]|}{۳} \rightarrow |\Delta[B]| = ۰/۱۳۵ \, mol.L^{-1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\bar{R}(B)=\frac{\Delta[B](mol\cdot L^{-1})}{\Delta t(h)}=\frac{۰/۱۳۵\ mol\cdot L^{-1}}{\underbrace{(۱۸-۱۲)}_{۶}s\times\frac{۱\ h}{۳۶۰\ s}}=۰/۱۳۵\times۶۰=۸۱\ mol\cdot L^{-1}\cdot h^{-1}$$

همون‌طور که می‌دونین! هر چه ضریب استوکیومتری برای یک ماده بزرگ‌تر باشد، قدرمطلق شیب منحنی تغییرات غلظت آن نیز بیشتر است و در واقع در یک بازهٔ زمانی معین، قدرمطلق میزان تغییرات مقدار یا غلظت مواد شرکت‌کننده در یک واکنش و در نتیجه شیب نمودار آن‌ها، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها است؛ بنابراین با توجه به معادلهٔ واکنش، نمودار زیر را می‌توان به واکنش مورد نظر نسبت داد:



۱۰۴ کدام موارد زیر در ارتباط با رادیکال‌های آزاد و بازدارنده‌های آن‌ها، نادرست است؟

گونه‌های ناپایدار و پر انرژی که در ساختار خود الکترون جفت‌نشده دارند.

الف) رادیکال‌های آزاد، گونه‌های فعال و ناپایداری هستند که می‌توانند به بافت‌های بدن آسیب برسانند.

ب) بازدارنده‌ها با به دام انداختن رادیکال‌های آزاد، از سرعت واکنش‌های ناخواسته در بدن می‌کاهند.

پ) میوه‌ها و سبزیجات حاوی ترکیباتی هستند که می‌توانند به عنوان بازدارنده عمل کنند.

ترکیبات آلی سیرنشده‌ای به نام ریزمغذی‌ها

ت) رادیکال‌های آزاد به دلیل داشتن الکترون‌های جفت‌نشده، واکنش‌پذیری پایینی دارند.

۱) الف ـ پ

۲) ب ـ ت

۳) پ ـ ت

۴) فقط ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فقط عبارت (ت) نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف و ت) **از آن‌جا که رادیکال‌ها، الکترون جفت‌نشده دارند، بسیار واکنش‌پذیرند.** در بدن ما به دلیل انجام واکنش‌های متنوع و پیچیده، رادیکال‌هایی به وجود می‌آیند که اگر به وسیلهٔ بازدارنده‌ها جذب نشوند، می‌توانند با انجام واکنش‌های سریع به بافت‌های بدن آسب برسانند.

ب) بازدارنده‌ها با به دام انداختن رادیکال‌ها باعث می‌شوند که از سرعت واکنش‌های ناخواسته کم شود.

پ) *آره خوشبختانه!* برخی خوراکی‌ها (مانند میوه‌ها و سبزیجات) حاوی بازدارنده هستند و مصرف آن‌ها باعث می‌شود که رادیکال‌ها به *دام بیفتند.*

۱۰۵ اگر در واکنش فرضی: $2AB(g) \rightarrow A_2(g) + B_2(g)$، واکنش‌دهنده با غلظت یک مولار شروع به تجزیه کند، غلظت آن در هر ساعت، ۰/۱ برابر می‌شود. اگر این واکنش در حضور کاتالیزگر هر ۱۵ دقیقه با همین روند پیشرفت کند، در لحظه‌ای که ۹۹/۹۹ درصد مادهٔ اولیه مصرف شده باشد، تفاوت زمان انجام واکنش در حضور و عدم حضور کاتالیزگر چند دقیقه است و با به کار بردن کاتالیزگر، سرعت متوسط واکنش چند برابر می‌شود؟ (دما را ثابت در نظر بگیرید.)

۱) ۱۸۰، ۸

۲) ۱۲۰، ۴

۳) ۱۲۰، ۸

۴) ۱۸۰، ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ غلظت AB در هر ساعت، ۰/۱ برابر غلظت آن در ساعت قبلی می‌شود؛ بنابراین با گذشت n ساعت، غلظت باقی‌مانده از واکنش‌دهنده یعنی $[AB]$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$[AB] = (\frac{۱}{۱۰})^n \times [AB]_۰$$

حالا! تعداد ساعاتی (n) که باید بگذرد تا ۹۹/۹۹ درصد از AB تجزیه شود را حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد غلظت مصرفی AB} = \frac{\text{غلظت اولیهٔ AB} - \text{غلظت باقی‌ماندهٔ AB}}{\text{غلظت اولیهٔ AB}} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۹۹/۹۹ = \frac{۱-[AB]}{۱} \times ۱۰۰ \Rightarrow [AB] = \frac{۱}{۱۰^۴}$$

با جای‌گذاری $[AB]$ به‌دست‌آمده در رابطهٔ بالا، مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۱۰^۴} = (\frac{۱}{۱۰})^n \times ۱ \Rightarrow n = ۴$$

بنابراین غلظت واکنش‌دهندهٔ (AB)، چهار مرتبه ۰/۱ برابر شده است؛ در نتیجه داریم:

زمان تجزیهٔ AB در عدم حضور کاتالیزگر $= ۴ \times ۶۰ = ۲۴۰ \text{ min}$

زمان تجزیهٔ AB در حضور کاتالیزگر $= ۴ \times ۱۵ = ۶۰ \text{ min}$

اختلاف زمان این دو برابر با ۱۸۰ دقیقه است.

در مدت‌زمان ۶۰ دقیقه، $[AB]$ در حضور کاتالیزگر ۴ مرتبه و در عدم حضور آن یک مرتبه ۰/۱ برابر می‌شود؛ پس سرعت واکنش در حضور کاتالیزگر، ۴ برابر سرعت واکنش در عدم حضور آن است.