

ریاضیات

۱- کدام یک از دنباله‌های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهد؟

(۱) $0, a, a^2, \dots$ (۲) $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \dots$ (۳) $a, a, a, \dots$ (۴) $\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \dots$

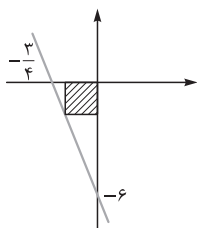
۲- اگر جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت r را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت d خواهید داشت. مقدار $r + d$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳- مقادیر $a, 2a + 1$ و $5 - a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟

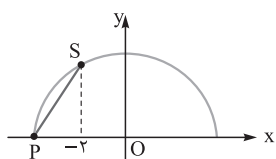
(۱) $2/75$ (۲) $4/25$ (۳) $12/25$ (۴) $14/75$

۴- در شکل مقابل، قطر مربع هاشور خورده، کدام است؟



(۱) $\frac{4}{2\sqrt{3}}$ (۲) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

۵- در نیم‌دایره شکل زیر، اگر طول وتر PS برابر شعاع نیم‌دایره باشد، عرض نقطه S کدام است؟



(۱) $1/5\sqrt{3}$ (۲) $2/5\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۶- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2}$ کدام است؟

(۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۱۹ (۴) ۱۸

۷- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2} & x < 1 \\ b\sqrt{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق‌پذیر نباشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \tan(\frac{\pi}{2} - x)}{2x - \pi}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) ۱

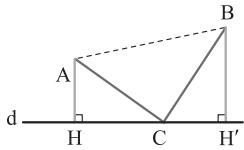
۹- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a^3 + b - c$ کدام است؟

(۱) $(a+1)^3 - 1$ (۲) $(a+1)^3 + 1$ (۳) $(a-1)^3 - 1$ (۴) $(a-1)^3 + 1$

۱۰- اگر $f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt{x^2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}}$ باشد، مقدار $f'(1) - 2g'(1)$ کدام است؟

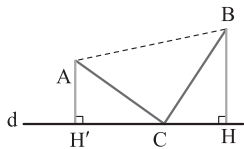
(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

۱۱- در شکل زیر، فاصله نقاط A و B از خط d، به ترتیب، $2\sqrt{3}$ و $5\sqrt{3}$ واحد است و نقطه C روی خط d طوری انتخاب شده است که محیط مثلث ABC کمترین باشد. اگر مساحت مثلث ACH برابر $6\sqrt{3}$ باشد، اندازه HH' کدام است؟



- (۱) ۱۵
(۲) ۱۸
(۳) ۲۱
(۴) ۲۴

۱۲- در شکل مقابل، فاصله نقاط A و B از خط d به ترتیب، ۴ و ۶ واحد است و نقطه C روی خط d طوری انتخاب شده است که محیط مثلث ABC کمترین باشد. اگر مساحت چهارضلعی ABHH' برابر $50\sqrt{3}$ باشد، اندازه CH کدام است؟



- (۱) $4\sqrt{3}$
(۲) $6\sqrt{3}$
(۳) $8\sqrt{3}$
(۴) $10\sqrt{3}$

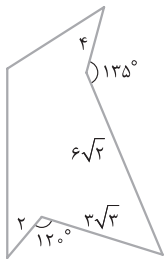
۱۳- نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط d و نقطه O روی خط d قرار دارد. اگر $OA' = 10$ و فاصله نقطه A' از خط OA برابر $9/6$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای AA' کدام است؟

- (۱) ۲۸
(۲) ۲۲
(۳) ۲۰
(۴) ۱۴

۱۴- در کدام تبدیل، همواره جهت شکل حفظ می‌شود؟

- (۱) بازتاب
(۲) دوران
(۳) انتقال
(۴) تجانس

۱۵- میزان افزایش مساحت شکل زیر، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع، کدام است؟



- (۱) $16/5$
(۲) $19/5$
(۳) ۳۳
(۴) ۳۹

۱۶- اگر $\vec{e}_1$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{e}_2$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $3\vec{a}$ و $2\vec{b}$ باشد، طول یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ تولید می‌شود، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) ۱
(۴) ۲

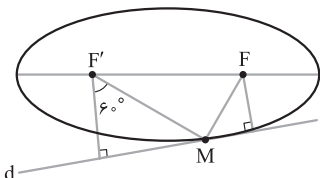
۱۷- اگر $\vec{u}$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{v}$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $2\vec{a}$ و $-\vec{b}$ باشد، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تولید می‌شود، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۱

۱۸- اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، 60° باشد، اندازه تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{3}{2}$

۱۹- در شکل زیر، خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. اگر فاصله بین پای عمودهای رسم‌شده از دو کانون F و F' بر خط d برابر $2\sqrt{3}$ باشد، طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟



- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

۲۰- خط $x = -\frac{5}{4}$ خط هادی سهمی به معادله $3y^2 - 3x - ay = 0$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴

۲۱- سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر $\frac{1}{4}$ است. اگر سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{3}{4}$ قطع کند، مقدار β کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۲۲- به ۱۶ داده آماری با واریانس ۴۰، دو داده جدید اضافه می‌کنیم. اگر میانگین داده‌های جدید تغییر نکند ولی واریانس آن‌ها ۱ واحد افزایش یابد، اختلاف دو داده جدید کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

۲۳- اگر انحراف ۵ داده آماری از y ، به ترتیب برابر -۱ ، -۵ ، -۶ ، -۷ و ۴ باشد، واریانس داده‌های اصلی کدام است؟

- (۱) $۱۵/۶$ (۲) $۱۶/۴$

- (۳) $۲۴/۶$ (۴) $۲۵/۴$

۲۴- میانگین دسته اول با ۴ داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است، به طوری که تنها داده متفاوت دو دسته، داده a است.

اگر واریانس دسته اول یک واحد بیشتر از دسته دوم باشد، انحراف معیار دسته اول کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{۵}$ (۴) $۲\sqrt{۵}$

۲۵- میانگین دسته اول با ۵ داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۶ داده است، به طوری که تنها داده متفاوت بین دو دسته، داده a است.

اگر واریانس دسته اول $\frac{2}{3}$ از واریانس دسته دوم بیشتر باشد، واریانس دسته اول کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $۲/۲۵$

- (۳) ۴ (۴) $۶/۲۵$

۲۶- اعداد ۱ تا ۱۰۰ در یک دسته (دسته اول) قرار دارند. دو عدد از بین اعداد دسته اول را حذف نموده و مقدار اختلاف آن دو عدد را

در دسته جدید قرار می‌دهیم. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد دسته اول حذف شده و همه اعداد در دسته جدید فرد و

غیرتکراری باشند. میانگین داده‌های دسته جدید کدام است؟

- (۱) ۲۵ (۲) $۲۵/۵$

- (۳) ۵۰ (۴) $۵۰/۵$

۲۷- در گراف G ، $\Delta(G) + 2\delta(G) = ۱۷$ ، $\Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = ۲$ و G با حداقل تعداد رأس رسم شده است. اگر $\bar{G}$ همبند باشد، بیشترین

تعداد یال‌های گراف G کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۸ (۳) ۲۶ (۴) ۲۴

۲۸- حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G برابر ۴۳۲ است. اگر گراف G با حداقل تعداد یال رسم شود، حاصل $\delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام است؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۲۹ (۳) ۲۱ (۴) ۲۳

۲۹- حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G ، ۴۸ است. اگر تعداد رأس‌ها با درجه رأس یک حداقل باشد، حاصل $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۱ (۳) ۱۹ (۴) ۱۳

۳۰- شکل مقابل، گراف G را نشان می‌دهد. مقدار $\gamma(G)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳

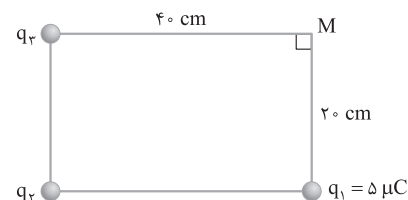
- (۳) ۴ (۴) ۵



فیزیک

۳۱- خازن شارژ شده‌ای را از مولد جدای کنیم و در حالتی که بار الکتریکی آن ثابت می‌ماند، عایقی که بین صفحات خازن را پر کرده، خارج می‌کنیم. اگر ثابت دی‌الکتریک عایق $\kappa = 2$ باشد، ظرفیت، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه خازن و انرژی آن به ترتیب چند برابر می‌شوند؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ و ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ و ۲ (۴) ۲ و $\frac{1}{2}$



۳۲- در شکل مقابل، میدان الکتریکی در نقطه M، صفر است. q_3 چند میکروکولن است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) -۲۰ (۴) -۴۰

۳۳- بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 از فاصله ۶۰ سانتی‌متری، بر بار نقطه‌ای $q_2 = -5 \mu C$ نیروی جاذبه الکتریکی $2 \times 10^{-2} N$ وارد می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در فاصله ۲۰ سانتی‌متری آن چند نیوتون بر کولن است؟

- (۱) 6×10^3 (۲) 4×10^3 (۳) $3/6 \times 10^4$ (۴) $1/2 \times 10^4$

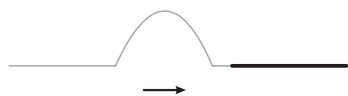
۳۴- سه بار الکتریکی $+4$ میکروکولنی در سه رأس مربعی به ضلع 30 cm قرار دارند. بار الکتریکی $q_4 = -4/2 \mu C$ را در رأس چهارم مربع قرار می‌دهیم. نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی که در رأس مقابل بار q_4 قرار دارد، چند نیوتون است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$ و $\sqrt{2} = 1/4$)

- (۱) $1/4$ (۲) $2/8$ (۳) $3/6$ (۴) $4/2$

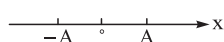
۳۵- رشته‌ای از بسامدهای تشدید یک تار با دو انتهای بسته به صورت f_1 ، 160 Hz ، f_2 و 320 Hz است. $f_3 - f_1$ چند هرتز است؟

- (۱) 160 (۲) 80 (۳) 240 (۴) 180

۳۶- در یک طناب کشیده شده که قسمتی از آن نازک و قسمت دیگر ضخیم است، مطابق شکل یک تپ در طناب نازک به سمت مقابل در حرکت است. کدام شکل، وضعیت بعدی طناب را درست نشان می‌دهد؟



۳۷- در شکل زیر، نوسانگر ساده‌ای بین دو نقطه A و -A در نوسان است. در کدام حالت بزرگی شتاب نوسانگر بیشینه است و در کدام حالت در حالی که حرکت نوسانگر کندشونده است، شتاب در جهت محور x است؟



(۱) در نقطه A یا -A باشد. - بین مرکز نوسان و -A، به سمت -A در حرکت باشد.

(۲) در نقطه A یا -A باشد. - به سمت A یا -A در حال حرکت باشد.

(۳) در حال عبور از مرکز نوسان - در حال نزدیک شدن به A یا -A

(۴) در حال عبور از مرکز نوسان - در حال نزدیک شدن به -A

۳۸- معادله مکان - زمان نوسانگر ساده‌ای در SI به صورت $x = 0.05 \cos 20\pi t$ است. اگر جرم نوسانگر 120 g گرم باشد، انرژی جنبشی نوسانگر در لحظه $t = \frac{1}{8} \text{ s}$ ، چند میلی‌ژول است؟

- (۱) $12\pi^2$ (۲) $30\pi^2$ (۳) $60\pi^2$ (۴) صفر

- ۳۹- نوسانگر وزنه - فنر با دوره ۲ ثانیه روی پاره خطی به طول ۸ سانتی متر در راستای قائم نوسان می کند. اگر نوسانگر در لحظه $t = 0$ s در بالاترین نقطه مسیر باشد، تندی متوسط نوسانگر در بازه زمانی $t = 0$ s تا $t = \frac{5}{3}$ s چند سانتی متر بر ثانیه است؟
- (۱) $3/2$ (۲) $6/2$ (۳) $8/4$ (۴) $12/4$

شیمی

- ۴۰- در فرمول مولکولی یک آلکان راست زنجیر، نسبت شمار اتم های هیدروژن به شمار اتم های کربن برابر $2/25$ است. ساختار چند ایزومر آن دارای سه گروه متیل است؟
- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۳

- ۴۱- اگر شمار الکترون های $3d$ در اتم عنصر X با شمار الکترون های $3p$ در لایه ظرفیت اتم عنصر Z برابر باشد، کدام مورد نادرست است؟
- (۱) تفاوت عدد اتمی دو عنصر X و Z، حداقل ۳ و حداکثر ۱۳ است.
(۲) اگر فلز باشد، اتم عنصر X در ترکیب هایش فقط یک عدد اکسایش دارد.
(۳) اگر Z شبه فلز باشد، از اتم عنصر X در ساخت پروانه کشتی استفاده می شود.
(۴) اگر Z کلر باشد، اتم عنصر X دارای حداقل یک زیر لایه الکترونی نیمه پر است.

- ۴۲- $10/2$ گرم گاز هیدروژن سولفید با مقدار کافی نیتریک اسید واکنش می دهد. اگر بازده درصدی واکنش، برابر ۷۵ باشد، چند لیتر گاز در شرایط آزمایش تشکیل می شود؟ (حجم مولی گازها، برابر ۲۴ لیتر در نظر گرفته شود، معادله واکنش موازنه شود، $H = 1 : g.mol^{-1}$, $S = 32$)
- $$HNO_3(aq) + H_2S(g) \rightarrow S(s) + NO(g) + H_2O(l)$$

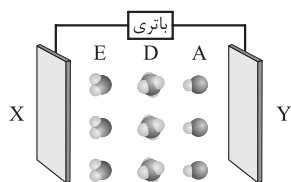
(۱) $7/2$ (۲) $3/6$ (۳) $2/7$ (۴) $1/8$

- ۴۳- اگر ظرفیت گرمایی ویژه مایع خالص M، دو برابر ظرفیت گرمایی ویژه مایع خالص X باشد، کدام مورد درباره جرم برابر از دو مایع، نادرست است؟

- (۱) اگر گرمای داده شده به دو مایع برابر باشد، تغییر دمای M، نصف تغییر دمای X خواهد بود.
(۲) اگر تغییر دمای X، ۴ برابر تغییر دمای M باشد، گرمای داده شده به M نصف گرمای داده شده به X است.
(۳) اگر بر اثر گرم کردن، دمای هر دو برابر شود، گرمای مورد نیاز برای M، ۲ برابر گرمای مورد نیاز برای X است.
(۴) اگر گرمای داده شده به دو مایع برابر باشد، نسبت ظرفیت گرمایی به ظرفیت گرمایی ویژه در M، نصف همین نسبت در X است.
- ۴۴- با توجه به اطلاعات واکنش داده شده، اگر از سوختن کامل $0/2$ مول متانول، ۱۴۴ کیلوژول گرما آزاد شود و آنتالپی سوختن پروپین $2/7$ برابر آنتالپی سوختن متانول باشد، آنتالپی سوختن پروپان چند کیلوژول بر مول است؟ (آنتالپی سوختن هیدروژن برابر $-286 kJ.mol^{-1}$ است.)
- $$C_3H_8(g) + 5H_2(g) \rightarrow C_3H_4(g) + 4H_2O(l) \quad \Delta H = -282 kJ$$

(۱) -2368 (۲) -2356 (۳) -2234 (۴) -2248

- ۴۵- با توجه به شکل داده شده که جهت گیری مولکول ها را در میدان الکتریکی نشان می دهد، کدام مورد، نادرست است؟



- (۱) A و E، به ترتیب می توانند مولکول های SiH_4 ، H_2S و باشند.
(۲) اگر مولکول E، H_2O باشد، صفحه X بار الکتریکی منفی دارد و گشتاور دوقطبی مولکول D، برابر صفر است.
(۳) اگر E، مولکول SO_2 باشد، علامت بار الکتریکی اتم های جانبی، مخالف علامت بار الکتریکی صفحه Y است.
(۴) اگر A مولکول HCl باشد، علامت بار جزئی اتم های جانبی مولکول D، می تواند همانند علامت بار جزئی اتم Cl در مولکول A باشد.

۴۶- کدام مورد درست است؟

- (۱) شمار پیوندهای اشتراکی در حلقه‌های سازنده ساختار یخ و گرافیت، برابر است.
 - (۲) از آن‌جا که ساختار هندسی یخ و گرافیت مشابه‌اند، هر دو روی آب شناور خواهند بود.
 - (۳) در ساختار سیلیس، شمار پیوندهای هر اتم سیلیسیم دو برابر شمار پیوندهای هر اتم اکسیژن است.
 - (۴) ترکیب اصلی به‌کاررفته در ساخت منشورها و عدسی‌ها، دارای پیوندهای اشتراکی $\text{Si}-\text{Si}$ است.
- ۴۷- اگر شمار الکترون‌های ۳d در اتم عنصر X با شمار الکترون‌های ۳p در لایه ظرفیت اتم عنصر Z، برابر باشد، کدام مورد نادرست است؟

- (۱) تفاوت عدد اتمی دو عنصر X و Z، حداقل ۳ و حداکثر ۱۳ است.
 - (۲) اگر Z فلز باشد، اتم عنصر X در ترکیب‌هایش فقط یک عدد اکسایش دارد.
 - (۳) اگر Z شبه‌فلز باشد، از اتم عنصر X در ساخت پروانه کشتی استفاده می‌شود.
 - (۴) اگر Z کلر باشد، اتم عنصر X دارای حداقل یک زیرلایه الکترونی نیمه‌پر است.
- ۴۸- نسبت آنتالپی فروپاشی شبکه بلور در کدام مورد، بزرگ‌تر است؟

(۱) LiF به KBr (۲) MgO به AlF_3 (۳) KBr به NaCl (۴) CaO به Al_2O_3

- ۴۹- درصد جرمی سیلیس و رطوبت، در یک نمونه خاک رُس، به ترتیب برابر ۳۶ و ۱۰ است. اگر درصد جرمی رطوبت در نمونه، با اضافه‌کردن آب، به ۲۰ درصد برسد، درصد جرمی سیلیس کدام خواهد شد؟

(۱) ۳۴ (۲) ۳۲ (۳) ۲۸ (۴) ۲۶

گام ۱: حالا به کمک مورد (۲) درسنامه، قدرنسبت را حساب می‌کنیم:

$$d = (1 + 2a) - a = 1 + a \xrightarrow{a = \frac{3}{4}} d = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

گام ۲: جمله اول دنباله حسابی، $a = \frac{3}{4}$ و قدرنسبتش $d = \frac{7}{4}$ است، بنابراین جمله عمومی دنباله طبق مورد (۳) درسنامه به این صورت می‌شود:

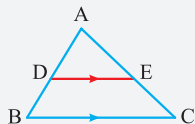
$$a_n = \frac{3}{4} + (n-1)\frac{7}{4}$$

گام ۳: حالا که جمله عمومی دنباله را داریم، می‌توانیم جمله نهم را حساب کنیم:

$$a_9 = \frac{3}{4} + (9-1)\frac{7}{4} = \frac{3}{4} + \frac{56}{4} = \frac{59}{4} = \frac{60-1}{4} = 15 - \frac{1}{4} = 14 \frac{3}{4}$$

گزینه ۲

درسنامه ۱: در شکل زیر اگر DE با BC موازی باشد، می‌توانیم تناسب‌های زیر را بنویسیم:



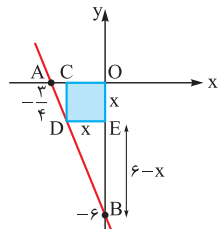
(الف) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (جزء به جزء)

(ب) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ (کلی)

۲: اگر خطی محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول p و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض q قطع کند، معادله‌اش را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

۳: طول قطر مربعی به ضلع x می‌شود $x\sqrt{2}$.



روش گام ۱: رأس‌ها را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم. چون چهارضلعی رنگی مربع است، پس ED با OC و در نتیجه با OA هم موازی است؛ بنابراین طبق مورد (۱) درسنامه می‌توانیم در مثلث AOB تالس بنویسیم.

گام ۲: فرض می‌کنیم طول ضلع مربع x باشد. در این صورت $ED = EO = x$ و $BE = OB - OE = 6 - x$ می‌شود. حالا در مثلث AOB تالس جزء به کل می‌نویسیم:

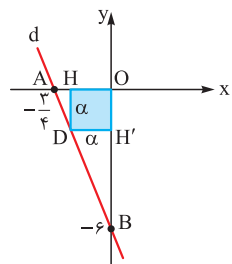
$$\frac{BE}{BO} = \frac{ED}{OA} \Rightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{x}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{4}{3}(6-x) = \frac{4}{3}x \Rightarrow 6-x = x \Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

گام ۳: حالا که می‌دانیم طول ضلع مربع $\frac{2}{3}$ است، طبق مورد (۳) درسنامه می‌توانیم بگوییم طول قطرش می‌شود:

$$OD = \frac{2}{3} \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 2}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

روش گام ۱: مطابق شکل فرض می‌کنیم طول ضلع مربع α باشد، در این صورت طول و عرض نقطه D هر دو منفی اند. مختصاتش به این صورت می‌شود:



مطابق شکل فرض می‌کنیم طول ضلع مربع α باشد، در این صورت طول و عرض نقطه D هر دو منفی اند. مختصاتش به این صورت می‌شود:

$$D(-\alpha, -\alpha)$$

گام ۲: همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید؛ خط d محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $-\frac{3}{4}$ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به طول -6 قطع می‌کند، پس طبق مورد (۲) درسنامه معادله‌اش را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$d: \frac{x}{-\frac{3}{4}} + \frac{y}{-6} = 1 \Rightarrow -\frac{4}{3}x - \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow -\frac{4}{3}x - \frac{-\alpha}{6} = 1 \Rightarrow -\frac{4}{3}(-\alpha) - \frac{-\alpha}{6} = 1 \Rightarrow \frac{4}{3}\alpha + \frac{\alpha}{6} = 1 \xrightarrow{\times 6} 8\alpha + \alpha = 6 \Rightarrow 9\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

گام ۳: نقطه $D(-\alpha, -\alpha)$ روی خط d قرار دارد، پس باید در معادله‌اش صدق کند:

$$-\frac{4}{3}(-\alpha) - \frac{-\alpha}{6} = 1 \Rightarrow \frac{4}{3}\alpha + \frac{\alpha}{6} = 1 \xrightarrow{\times 6} 8\alpha + \alpha = 6 \Rightarrow 9\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

ریاضیات

گزینه ۴

درسنامه به دنباله‌ای که جمله اولش غیرصفر باشد و هر جمله‌اش (به‌غیر از اولی) از ضرب جمله قبل از خودش در یک عدد غیرصفر به دست می‌آید؛ دنباله هندسی می‌گوییم.

گام ۱: دنباله « $a, a^2, a^3, \dots$ » هندسی نیست، چون طبق درسنامه، جمله اول دنباله هندسی نمی‌تواند صفر باشد. حالا بیایید رفتار سه گزینه دیگر را بررسی کنیم:

$$a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \dots$$

$$a, a, a, \dots$$

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \dots$$

گام ۲: در تمام گزینه‌ها هر جمله از ضرب جمله قبلی‌اش در یک عدد ثابت به دست می‌آید، پس باید شرط دوم، یعنی صفرنبودن جمله اول را بررسی کنیم. $\frac{1}{a}$ همواره هندسی نیستند، چون در حالتی که $a = 0$ باشد، جمله اولشان صفر می‌شود. اما در $\frac{1}{a}$ به خاطر وجود $\frac{1}{a}$ و حقیقی بودن جملات، $a \neq 0$ می‌شود، پس در این گزینه شرط صفرنبودن جمله اول هم برقرار است. پس همین گزینه جواب است.

گزینه ۲

درسنامه اگر a، b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$a + c = 2b$$

گام ۱: سه جمله اول دنباله هندسی را به ترتیب a، ar و ar^2 در نظر می‌گیریم. اگر این سه جمله را نصف کنیم، به این جملات می‌رسیم: $\frac{a}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{ar^2}{2}$.

گام ۲: به گفته سؤال، جملات بالا، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی‌اند؛ پس طبق درسنامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{2} + \frac{ar^2}{2} = 2 \times \frac{ar}{2} \xrightarrow{\times 2} a + ar^2 = 2ar$$

$$\xrightarrow{+a} 1 + r^2 = 2r \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$$

گام ۳: $r = 1$ شد، پس قدرنسبت جملات دنباله هندسی ۱ و در نتیجه همه جملات آن با هم برابر می‌شوند: $a, ar, ar^2, ar^3, \dots \xrightarrow{r=1} a, a, a, a, \dots$

گام ۴: طبق گفته سؤال اگر این جملات را نصف کنیم، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهیم داشت:

$$\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \dots$$

واضح است که قدرنسبت دنباله حسابی بالا صفر است، پس $d = 0$ می‌شود؛ بنابراین $r + d = 1 + 0 = 1$.

گزینه ۴

درسنامه ۱: اگر a، b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، می‌توانیم رابطه مقابل را برایشان بنویسیم:

$$a + c = 2b \quad \text{یا} \quad \text{وسطی} = 2 \times \text{سومی} + \text{اولی}$$

۲: هر وقت دو جمله متوالی از یک دنباله حسابی را داشته باشیم، می‌توانیم قدرنسبتش را به این صورت محاسبه کنیم:

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

۳: جمله عمومی یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

گام ۱: به گفته سؤال a، $1+2a$ و $5-a$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی‌اند، پس طبق مورد (۱) درسنامه می‌توانیم بنویسیم:

$$5 - a = 2(1 + 2a) \Rightarrow 5 - a = 2 + 4a \Rightarrow 3 = 5a \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 3 = 5a \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

گام ۷ در ضابطه بالایی $f, \sqrt{x^2}$ همان $|x|$ است؛ پس:

$$f(x) = \begin{cases} a+|x| & x < 1 \\ b\sqrt{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

طبق مورد (۲) و (۳) درسنامه، $|x|$ و $\sqrt{x^2}$ در $x=0$ مشتق ناپذیرند، ولی $x=0$ در دامنه ضابطه پایینی قرار ندارد، بنابراین آن تک نقطه‌ای که f در آن مشتق‌ناپذیر است، $x=0$ در ضابطه بالایی است.

گام ۸ برای این که نقطه مشتق‌ناپذیر دیگری نداشته باشیم، باید f در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، طبق مورد (۱) درسنامه این اتفاق به دو شرط می‌افتد:

♦ f در $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a+|x|) \quad \text{از ضابطه بالایی}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (b\sqrt{x^2}) \quad \text{از ضابطه پایینی}$$

$$\Rightarrow b\sqrt{1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a+|x|) \Rightarrow b = a+1 \quad (1)$$

♦ **مشتق چپ و راست** f در $x=1$ برابر باشند، در $x=1^-$ ، $|x|=x$ می‌شود؛ پس برای محاسبه $f'_-(1)$ باید از $f(x) = a+x$ مشتق بگیریم:

$$f'(x) = 0+1 \Rightarrow f'_-(1) = 1$$

برای محاسبه $f'_+(1)$ هم از $f(x) = b\sqrt{x^2}$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = b\sqrt{x^2} = bx^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{1}{2}b(1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}b$$

$$\frac{1}{2}b = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

حالا مشتق چپ و راست را مساوی هم می‌گذاریم:

$$\frac{3}{2} = a+1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

حالا $b = \frac{3}{2}$ را در (۱) جای‌گذاری می‌کنیم تا به a برسیم:

$$b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین $a+b = 2$ می‌شود $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$.

گزینه ۲ -۸

درسنامه ۱ در رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ، اول عوامل ضربی غیرصفر را جای‌گذاری کنید؛

$$\cos(\pi) = -1 \text{ می‌شود } \cos(\pi x), \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} \cos(\pi x)$$

بعد رفع ابهام. مثلاً در حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} \cos(\pi x)$ می‌نویسیم -1 ، بعد رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} \cos(\pi x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} -x = -1$$

♦ اگر $u \rightarrow 0$ ، می‌توانیم به جای $\sin u$ و $\tan u$ خود u را بنویسیم.

گام ۱ در $x = \frac{\pi}{2}$ ، $\tan(\frac{\pi}{2} - x)$ و $2x - \pi$ هر دو صفرند ولی $\sin x$ می‌شود

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{ که صفر نیست، پس قبل از رفع ابهام به جای } \sin x \text{ می‌نویسیم } 1:$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \tan(\frac{\pi}{2} - x)}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(\frac{\pi}{2} - x)}{2x - \pi}$$

گام ۲ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ، $x - \frac{\pi}{2}$ به سمت صفر میل می‌کند، پس طبق مورد (۲) درسنامه می‌توانیم در حد بالا به جای $\tan(\frac{\pi}{2} - x)$ بنویسیم $\frac{\pi}{2} - x$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(\frac{\pi}{2} - x)}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{2}(2x - \pi)}{(2x - \pi)} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۱ -۹

درسنامه تابع f به دو شرط در $x=a$ مشتق‌پذیر است:

♦ در $x=a$ پیوسته باشد؛ یعنی حد راست، حد چپ و مقدارش در $x=a$ برابر باشند.

بنابراین مختصات نقطه D به صورت $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ می‌شود.

گام ۱ اول نکته زیر را بخوانید:

★ **نکته** فاصله نقطه $A(a, b)$ از مبدأ مختصات برابر است با: $OA = \sqrt{a^2 + b^2}$

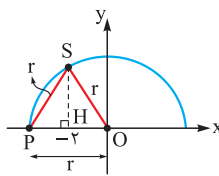
طول قطر مربع همان فاصله نقطه $D(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ از مبدأ مختصات است که طبق نکته بالا برابر می‌شود با:

$$OD = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = \sqrt{2 \times (\frac{2}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

گزینه ۳ -۵

درسنامه ۱ طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌شود $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

♦ در مثلث متساوی‌الاضلاع، هر ارتفاع، میانه و نیمساز هم هست.



گام ۱ شعاع OS را به شکل اضافه می‌کنیم. فرض می‌کنیم

شعاع دایره r باشد. به گفته سؤال $SP = r$ است، پس

مثلث OSP در شکل مقابل متساوی‌الاضلاع است. بنابراین

طبق مورد (۲) درسنامه، ارتفاع SH میانه هم هست؛ پس

$HP = HO = 2$ و در نتیجه $OP = r = 2 \times 2 = 4$ است.

گام ۲ عرض نقطه S همان طول ارتفاع SH در مثلث متساوی‌الاضلاع OSP است که

$$\text{طبق مورد (۱) درسنامه می‌شود } \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

گزینه ۳ -۶

درسنامه اگر α و β ریشه‌های معادله $Ax^2 + Bx + C = 0$ با شرط $\Delta > 0$ باشند:

♦ جمع و ضربشان از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{B}{A}, P = \alpha\beta = \frac{C}{A}$$

♦ حاصل دو عبارت متقارن زیر را برحسب S و P حفظ باشید:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P, \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

عبارت‌های بالا متقارن‌اند، چون با عوض کردن جای α و β تغییری نمی‌کنند.

گام ۱ باید عبارت $\frac{4\alpha + \beta^5}{\delta\beta^2}$ را به یک عبارت متقارن تبدیل کنیم تا بتوانیم آن را

برحسب S و P بنویسیم، اول تفکیک کسری کنیم:

$$A = \frac{4\alpha + \beta^5}{\delta\beta^2} = \frac{4}{\delta} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta^5}{\delta\beta^2} = \frac{4}{\delta} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{1}{\delta} \beta^3 \quad (*)$$

گام ۲ طبق درسنامه، ضرب ریشه‌های معادله $\frac{1}{A}x^2 - \frac{5}{\delta}x + \frac{2}{C} = 0$ می‌شود $\frac{C}{A}$ ، پس:

$$\alpha\beta = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{\beta} \xrightarrow{\text{توان } 2} \alpha^2 = \frac{4}{\beta^2}$$

تساوی بالا را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A = (\frac{4}{\beta^2}) \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1}{\delta} \beta^3 = \frac{1}{\delta} (\alpha^2 + \beta^3)$$

که برحسب S و P می‌شود:

$$A = \frac{1}{\delta} (S^2 - 3PS) \quad (**)$$

گام ۳ $P = 2$ بود، S هم که می‌شود $\frac{-5}{1} = -5$ این‌ها را (***) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{1}{\delta} (\delta^2 - 3(2)(\delta)) = \frac{1}{\delta} (\delta^2 - 6\delta) = \frac{\delta(\delta - 6)}{\delta} = \delta - 6 = 19$$

گزینه ۴ -۷

درسنامه ۱ تابع f به دو شرط در $x=a$ مشتق‌پذیر است:

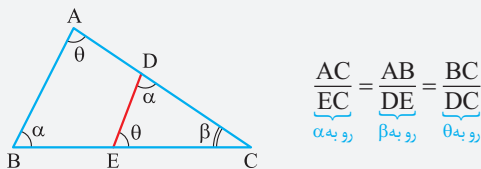
♦ در $x=a$ پیوسته باشد.

♦ مشتق چپ و راست f در $x=a$ برابر باشند.

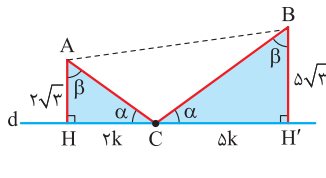
♦ تابع $y = |f(x)|$ در ریشه‌های ساده $f(x)$ ، مشتق‌ناپذیر است.

♦ اگر $m > n$ باشد، تابع $y = \sqrt[n]{(x-a)^m}$ مشتق ندارد.

قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل زیر برابر می‌شود با:



گام ۱ (تحلیل شکل مسئله) به گفته سؤال محیط مثلث ABC حداقل است. در این مثلث طول ضلع AB که ثابت است، پس محیط وقتی حداقل می‌شود که طول مسیر ACB حداقل باشد.



طبق مورد (۱) درس‌نامه، این اتفاق وقتی می‌افتد که مثلث‌های رنگی متشابه باشند. به کمک مورد (۲) درس‌نامه، نسبت تشابه مثلث‌های رنگی را می‌نویسیم:

$$\frac{CH}{CH'} = \frac{AH}{BH'} \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} \Rightarrow CH = 2k, CH' = \delta k$$

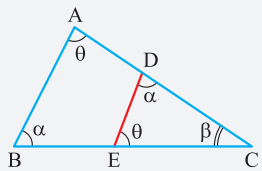
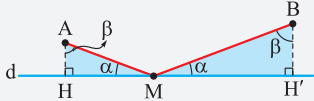
گام ۲ (محاسبه k و خواسته سؤال) به گفته سؤال مساحت مثلث قائم‌الزاویه AHC برابر $6\sqrt{3}$ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{2} AH \times CH = 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} (2\sqrt{3})(2k) = 6\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3}k = 6\sqrt{3} \Rightarrow k = 3$$

پس با توجه به شکل بالا، طول $HH' = 2k + \delta k = 7k = 7 \times 3 = 21$ می‌شود.

۱۲- گزینه ۲

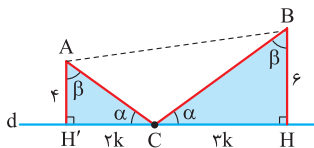
درس‌نامه ۱ در شکل زیر، نقطه‌های ثابت A و B در یک سمت خط d قرار دارند. در این حالت طول مسیر AMB وقتی حداقل می‌شود که مثلث‌های رنگی با زاویه‌های α و β متشابه باشند.



۲ برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم، به طوری که در صورت نسبت‌ها، اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها، اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل بالا برابر می‌شود با:

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC}$$

گام ۱ (محاسبه طول HH') در شکل زیر BH' و AH' هر دو بر خط d عمودند، پس موازی‌اند؛ بنابراین چهارضلعی $AH'HB$ یک دوزنقه است. به گفته سؤال مساحت این دوزنقه برابر $50\sqrt{3}$ است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:



$$S_{AH'HB} = \frac{1}{2} (AH' + BH) \times HH' \Rightarrow 50\sqrt{3} = \frac{1}{2} (4 + 6) HH' \Rightarrow 50\sqrt{3} = 5 HH' \Rightarrow HH' = 10\sqrt{3}$$

گام ۲ (تحلیل مسیر ACB): سؤال می‌گوید محیط مثلث ABC حداقل است. در این مثلث طول ضلع AB که ثابت است، پس محیط وقتی حداقل می‌شود که طول مسیر ACB حداقل باشد. طبق مورد (۱) درس‌نامه، این اتفاق وقتی می‌افتد که مثلث‌های رنگی متشابه باشند.

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): حالا به کمک مورد (۲) درس‌نامه، نسبت تشابه مثلث‌های رنگی را می‌نویسیم:

$$\frac{CH'}{CH} = \frac{AH'}{AH} \Rightarrow \frac{CH'}{CH} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow CH' = 2k, CH = 3k$$

مشتق چپ و راستش در $x = a$ برابر باشند.

گام ۱ برای این که $f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید در مرز دامنه، یعنی $x = a$ مشتق‌پذیر باشد. طبق درس‌نامه، دو شرط داریم:

پیوستگی در $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} (2bx + c) = \lim_{x \rightarrow a^+} (3x^2) = 3a^2$$

$$\Rightarrow 2ba + c = 3a^2 \quad (1)$$

برابری مشتق چپ و راست در $x = a$:

$$f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2b & x > a \\ 6x & x \leq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(a) = 2b \\ f'_-(a) = 6a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b = 6a \Rightarrow b = 3a \quad (2)$$

$$2(3a)a + c = 3a^2 \Rightarrow -c = 3a^2 \Rightarrow c = -3a^2$$

پس $a^3 + b - c$ می‌شود:

$$a^3 + (3a) + 3a^2 = (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - 1 = (a+1)^3 - 1$$

۱۰- گزینه ۲

درس‌نامه فرمول مشتق برخی توابع را در جدول زیر ببینید:

تابع	فرمول مشتق
اعداد حقیقی $mf \pm ng$	$mf' \pm ng'$
u^n	$nu'u^{n-1}$

گام ۱ طبق درس‌نامه، $f'(1) - 2g'(1)$ همان $(f - 2g)'(1)$ است، پس اول ضابطه

$f(x) - 2g(x)$ را به دست می‌آوریم؛ حواسمان هم هست که $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ همان $|x - 2|$ است:

$$f(x) - 2g(x) = \frac{2(x-2)}{\sqrt{x^2}} - \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 2\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2}} = \frac{2|x-2| - 2|x-2| - 2\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2}} = \frac{-2\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2}} = -2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = -2\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= -2\sqrt{3} \times x^{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{3}x^{-\frac{1}{2}}$$

پس $(f(x) - 2g(x))'$ می‌شود:

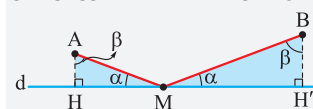
$$(f(x) - 2g(x))' = (-2\sqrt{3}x^{-\frac{1}{2}})' = -2\sqrt{3} \times -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{3}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

در نتیجه $(f - 2g)'(1)$ می‌شود:

۱۱- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ در شکل زیر، نقطه‌های ثابت A و B در یک سمت خط d قرار دارند. در این حالت طول مسیر AMB وقتی حداقل می‌شود که مثلث‌های رنگی با زاویه‌های α و β متشابه باشند.



۲ برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم، به طوری که در صورت نسبت‌ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها اضلاع مثلث دیگر

$$\Rightarrow AA'^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 10 (\pm 0/28) = 200 \pm 200 (0/28) = 200 \pm 56$$

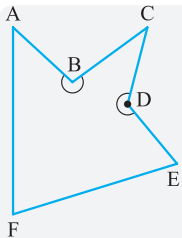
$$\Rightarrow AA'^2 = 144, 256 \Rightarrow AA' = 12 \text{ یا } 16$$

که باز هم جمع مقادیر AA' می شود $28 = 12 + 16$.

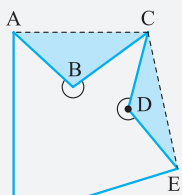
۱۴- گزینه؟

این سؤال متأسفانه غلط است. سؤال باید می پرسید «در کدام تبدیل، همواره جهت شکل حفظ نمی شود.» در این صورت جوابش می شد «تبدیل بازتاب».

۱۵- گزینه ۳



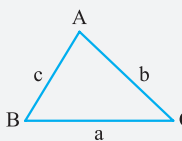
درسنامه ۱ به شش ضلعی مقابل که بعضی از زاویه های داخلی اش ($\hat{B}$ و $\hat{D}$) بیشتر از 180° هستند؛ نگاه کنید. مساحت این جور چندضلعی ها را می توانیم زیاد کنیم؛ جوری که محیطشان تغییری نکنند. برای این که بفهمیم چه قدر می توانیم مساحت را زیاد کنیم، کارهای زیر را انجام می دهیم:



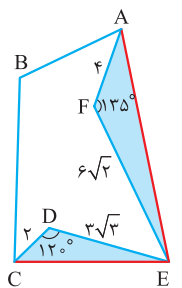
در کدام رأس های چندضلعی، زاویه داخلی بیشتر از 180° داریم؟
B و D؛ رأس های کنار B، یعنی A و C و همین طور رأس های کنار D، یعنی C و E را مثل شکل مقابل به هم وصل می کنیم.

میزان افزایش مساحت، دو برابر مساحت قسمت های رنگی مقابل است، یعنی: $2S_{ABC} + 2S_{CDE}$ = میزان افزایش مساحت

۲) مساحت هر مثلث را می توانیم از رابطه «سینوس زاویه بین همان دو ضلع $\times$ نصف حاصل ضرب دو ضلع $S =$ » به دست بیاوریم؛ این یعنی برای مساحت مثلث مقابل، می توانیم رابطه های زیر را بنویسیم:



$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$



گام ۱ (تشخیص میزان افزایش مساحت) طبق مورد (۱) درسنامه، میزان افزایش مساحت چندضلعی ABCDEF، به شرط ثابت ماندن محیط و تعداد اضلاعش، دو برابر مساحت مثلث های رنگی است؛ یعنی:

$$2S_{CDE} + 2S_{AFE} = \text{میزان افزایش مساحت} (*)$$

گام ۲ (محاسبه میزان افزایش مساحت) در ادامه به کمک مورد (۲) درسنامه، مساحت مثلث های AFE و CDE را حساب می کنیم:

$$S_{CDE} = \frac{1}{2} (2)(3\sqrt{3}) \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} (\cancel{2} \sqrt{3}) = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$S_{AFE} = \frac{1}{2} (4)(6\sqrt{2}) \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (24 \sqrt{2}) = 6 \times 2 = 12$$

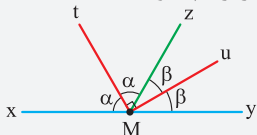
در آخر موارد بالا را در تساوی (*) جای گذاری می کنیم تا به خواسته سؤال برسیم:

$$2(\frac{9}{2}) + 2(12) = 9 + 24 = 33$$

۱۶- گزینه ۳

درسنامه ۱ به هر برداری که طولش برابر ۱ باشد، بردار یکه می گوئیم.

۲) نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه، مطابق شکل زیر بر هم عمودند.



طبق شکل، $CH + CH' = HH' = 10\sqrt{3}$ است؛ پس:

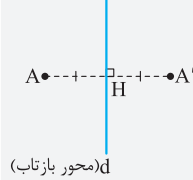
$$2k + 3k = 10\sqrt{3} \Rightarrow 5k = 10\sqrt{3} \Rightarrow k = 2\sqrt{3}$$

$$CH = 3k = 3 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

بنابراین طول CH می شود:

۱۳- گزینه ۱

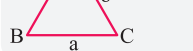
درسنامه ۱ طبق شکل زیر، برای پیدا کردن بازتاب نقطه A نسبت به خط d



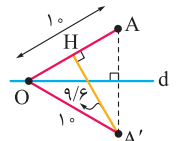
(محور بازتاب)، اول از نقطه A به خط d عمود می کنیم و پای عمود را H می نامیم؛ بعد AH را به اندازه خودش امتداد می دهیم تا به نقطه A' برسیم. نقطه A' بازتاب A نسبت به خط d است:

۲) در شکل بالا، محور بازتاب (d)، عمودمنصف AA' است. بنابراین طبق ویژگی عمودمنصف، هر نقطه ای روی محور بازتاب انتخاب کنیم، فاصله اش از A و A' به یک اندازه است.

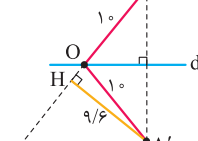
۳) قضیه کسینوس ها، مطابق شکل در مثلث ABC، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$


گام ۱ (رسم شکل و تحلیل آن): با توجه به فاصله O از AA'، دوتا شکل زیر را می توانیم بکشیم. در شکل (۱)، فاصله O از خود OA داریم ولی در شکل (۲)، فاصله A' از امتداد OA را.



شکل (۱)



شکل (۲)

طبق مورد (۲) درسنامه، در هر دو شکل بالا، d عمودمنصف AA' است؛ پس $OA = OA' = 1$ می شود.

گام ۲ (محاسبه طول OH): در هر دو شکل بالا برای محاسبه طول OH، فیثاغورس می نویسیم:

$$OH^2 = 10^2 - 9/6^2 = 10^2 - \frac{96^2}{10^2} = \frac{10^4 - 96^2}{10^2} = \frac{(100 - 96)(100 + 96)}{10^2}$$

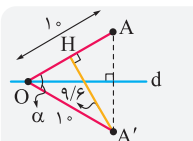
$$\rightarrow OH = \frac{2 \times 14}{10} = 2/8$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): حالا برای محاسبه طول AA'، در هر دو شکل، در مثلث AHA' فیثاغورس می نویسیم. فقط حواسمان هست که در شکل (۱)، $AH = 10 - 2/8 = 7/2$ ، و در شکل (۲)، $AH = 10 + 2/8 = 12/8$ است:

$$\text{شکل (۱): } AA'^2 = 7/2^2 + 9/6^2 = 2/4^2 (\cancel{2^2} + \cancel{4^2}) \rightarrow AA' = 2/4 \times 5 = 12$$

$$\text{شکل (۲): } AA'^2 = 12/8^2 + 9/6^2 = 3/2^2 (\cancel{4^2} + \cancel{3^2}) \rightarrow AA' = 3/2 \times 5 = 16$$

پس جمع مقادیر AA' می شود $28 = 12 + 16$.



تیزبازی فقط شکل (۱) را می کشیم. در مثلث قائم الزاویه OHA'، برای α سینوس می نویسیم:

$$\sin \alpha = \frac{9/6}{10} = \frac{96}{100}$$

با توجه به اتحاد $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ می شود:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{96^2}{100^2} = \frac{100^2 - 96^2}{100^2} = \frac{(100 - 96)(100 + 96)}{100^2}$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2 \times 14}{100} = \pm 0/28$$

حالا به کمک قضیه کسینوس ها در مثلث AOA'، طول AA' را حساب می کنیم:

$$AA'^2 = OA^2 + OA'^2 - 2OA \cdot OA' \cdot \cos \alpha$$

بر بردار $\vec{a}$ می‌شود:

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{x}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \cdot (\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})|}{|\vec{a}|} = \frac{|\frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}|}{|\vec{a}|} \quad (*)$$

گام ۱ (محاسبه خواسته سؤال): طبق مورد (۲) درس‌نامه $\vec{a} \cdot \vec{a}$ همان $|\vec{a}|^2$ است.

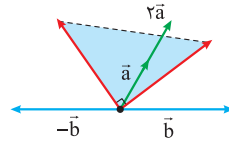
از طرفی زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، 60° است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، $\vec{a} \cdot \vec{b}$ می‌شود:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}|$$

این‌ها را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$|\vec{a}'| = \frac{\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|} + \frac{\frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{a}|}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}| + \frac{1}{2} |\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{\frac{3}{2} |\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{3}{2}$$

گام ۲ (رسم شکل و تحلیل آن): شکل مسئله به صورت زیر است. بردارهای قرمز، همان بردارهای یک در راستای نیمسازها هستند که طبق مورد (۱) درس‌نامه طولشان برابر ۱ است.



طبق شکل، بردارهای یک در واقع نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه بر هم عمودند.

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): به دنبال مساحت مثلث قائم‌الزاویه رنگی هستیم که می‌شود

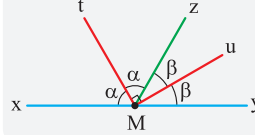
$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

مشاوره متأسفانه این سؤال خارج از کتاب درسی است، چون کتاب درسی فقط به بردارهای یک محوره‌ای مختصات (همان $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$) پرداخته و بردار یک را در حالت کلی بررسی نکرده است.

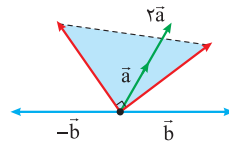
۱۷- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ به هر برداری که طولش برابر ۱ باشد، بردار یک می‌گوییم.

۲ نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه، مطابق شکل زیر بر هم عمودند.



گام ۱ (رسم شکل و تحلیل آن): شکل مسئله به صورت زیر است. بردارهای قرمز، همان بردارهای یک در راستای نیمسازها هستند که طبق مورد (۱) درس‌نامه طولشان برابر ۱ است.



طبق شکل، بردارهای یک در واقع نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه بر هم عمودند.

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): به دنبال مساحت مثلث قائم‌الزاویه رنگی هستیم که می‌شود

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

مشاوره متأسفانه این سؤال خارج از کتاب درسی است، چون کتاب درسی فقط به بردارهای یک محوره‌ای مختصات (همان $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$) پرداخته و بردار یک را در حالت کلی بررسی نکرده است.

۱۸- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر α باشد، ضرب داخلی‌شان می‌شود:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

۲ دو ویژگی مهم از ضرب داخلی را بلد باشید:

❖ ضرب داخلی بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارد؛ یعنی برای بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داریم:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

❖ ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر با مربع اندازه‌اش است:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

۳ طول تصویر $\vec{a}$ بر (امتداد) بردار $\vec{b}$ می‌شود:

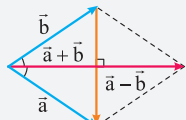
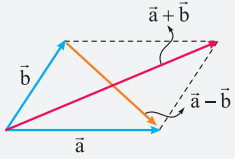
$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

گام ۱ (تحلیل خواسته سؤال): طبق مورد (۳) درس‌نامه، طول تصویر قائم بردار $\vec{x} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

تیزبازی اول نکته زیر را بخوانید:

نکته ۱ قطره‌های متوازی‌الاضلاعی که روی $\vec{a}$

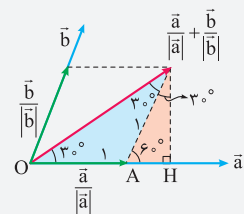
و $\vec{b}$ می‌سازیم، همان $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ هستند. طبق شکل، قطر هم‌مبدأ با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\vec{a} + \vec{b}$ و قطر دیگر $\vec{a} - \vec{b}$ است.



۲ در حالتی که $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ است، طول ضلع‌های متوازی‌الاضلاع برابر می‌شوند؛ بنابراین متوازی‌الاضلاع مطابق شکل، تبدیل به لوزی می‌شود. از طرفی در لوزی قطرهای نیمساز زوایای داخلی لوزی‌اند و بر هم عمودند:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} \text{ نیمساز زاویه بین } \vec{a} \text{ و } \vec{b} \text{ است.}$$

طول بردارهای $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ و $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ برابر ۱ هستند؛ پس طبق نکته بالا، متوازی‌الاضلاع شکل زیر که روی این دو بردار ساخته‌ایم، لوزی است؛ پس بردار قرمز، با $\vec{a}$ زاویه 30° می‌سازد و طول هر



چهار ضلع لوزی برابر ۱ است. زاویه خارجی مثلث متساوی‌الساقین آبی برابر $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ است، پس مثلث قرمز، یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌های 30° و 60° است. طول ضلع رو به زاویه 30° ، نصف وتر است؛ پس:

$$AH = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

طول تصویر بردار قرمز بر $\vec{a}$ همان طول OH است که می‌شود $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

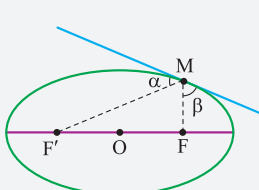
۱۹- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ هر نقطه‌ای که مثل M

در شکل مقابل روی بیضی باشد، جمع فاصله‌هایش از کانون‌های بیضی برابر با مقدار ثابت بیضی یعنی $2a$ است:

$$MF + MF' = 2a$$

۲ طول قطر بزرگ بیضی، مطابق شکل مقابل برابر $2a$ است.



۳ در شکل مقابل، خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. در چنین حالتی اگر از M به F و F' وصل کنیم، زاویه‌هایی که MF و MF' با d می‌سازند (α و β) برابرند؛ یعنی $\alpha = \beta$ در شکل مقابل است.

گام ۱ نوشتن معادله خط هادی برحسب A: طبق مورد (۴) سهمی معادله خط هادی را باید به این صورت بنویسیم:

$$x = -\frac{a^2}{36} - \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{a^2}{36} - \frac{1}{4}$$

گام ۲ محاسبه خواسته سؤال: سؤال معادله خط هادی را به صورت $x = -\frac{a^2}{36}$ داده. از مقایسه این معادله با معادله آبی رنگ بالا نتیجه می گیریم که:

$$-\frac{a^2}{36} - \frac{1}{4} = -\frac{a^2}{36} \Rightarrow \frac{a^2}{36} = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$$

سؤال اختلاف مقادیر a را می خواهد که می شود $6 - (-6) = 12$.

۲۱- گزینه ۱

درسنامه ۱ اگر مطابق شکل زیر، دو نقطه با عرض یکسان روی یک سهمی داشته باشیم، طول رأس سهمی (x_S) برابر میانگین طول آن دو نقطه می شود؛ یعنی:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

۲ اگر مختصات رأس یک سهمی $S(\alpha, \beta)$ باشد، معادله سهمی به صورت زیر می شود:

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

۳ برای این که ببینیم یک سهمی، محور α را با چه عرضی قطع می کند، کافی است به جای x های سهمی قرار دهیم صفر و مقدار y را محاسبه کنیم.

گام ۱ به گفته سؤال دو نقطه $A(1, \beta)$ و $B(-5, \beta)$ روی سهمی قرار دارند؛ عرض این دو نقطه یکسان است، پس طبق مورد (۱) درسنامه، طول رأس این سهمی می شود:

$$x_S = \frac{-5 + 1}{2} = -2$$

گام ۲ عرض رأس این سهمی برابر $-\frac{1}{4}$ است، پس مختصات رأس سهمی $S(-2, -\frac{1}{4})$ می شود. حالا طبق مورد (۲) درسنامه، معادله سهمی به صورت زیر می شود:

گام ۳ سهمی محور α را در نقطه ای به عرض $\frac{3}{4}$ قطع می کند، پس اگر در معادله سهمی به جای x قرار دهیم صفر، y برابر $\frac{3}{4}$ می شود (طبق مورد (۳) درسنامه):

$$y = a(x + 2)^2 - \frac{1}{4} \xrightarrow{x=0} \frac{3}{4} = a \times 4 - \frac{1}{4} \Rightarrow 2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین معادله سهمی به صورت مقابل است:

گام ۴ حالا برای این که مقدار β را به دست آوریم، کافی است در معادله سهمی به جای x قرار دهیم ۱ یا -5 : (چون سهمی از دو نقطه $(1, \beta)$ و $(-5, \beta)$ می گذرد).

$$y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - \frac{1}{4} \xrightarrow{x=1} y = \frac{1}{2} \times 9 - \frac{1}{4} = 4$$

۲۲- گزینه ۲

درسنامه ۱ اگر به تعدادی داده با میانگین $\bar{x}$ ، چند داده جدید اضافه کنیم، به شرطی میانگین داده های جدید همان $\bar{x}$ می ماند که میانگین داده های اضافه شده هم $\bar{x}$ باشد.

۲ میانگین و واریانس داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را به ترتیب با نمادهای $\bar{x}$ و σ^2 نشان می دهیم و برای محاسبه شان از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

گام ۱ فرض می کنیم ۱۶ داده، $x_1, x_2, \dots, x_{16}$ باشند. به گفته سؤال واریانشان برابر ۴۰ است؛ پس طبق مورد (۲) درسنامه می توانیم بنویسیم:

$$40 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{16} - \bar{x})^2}{16} \Rightarrow (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{16} - \bar{x})^2 = 640 \quad (1)$$

گام ۱ (محاسبه زاویه های مورد نیاز): در شکل زیر، در مثلث قائم الزاویه MFH' یک زاویه 3° داریم؛ پس زاویه دیگرش $90^\circ - 3^\circ = 87^\circ$ می شود.

d در نقطه M بر بیضی مماس است، پس طبق مورد (۳) درسنامه، باید $FMH = F'MH' = 3^\circ$ باشد؛ بنابراین مثلث قائم الزاویه FMH هم زاویه هایش 3° و 87° اند.

گام ۲ (تحلیل فاصله بین پای عمودها): در مثلث های قائم الزاویه بالا، ضلع های رو به 60° برابر و وترند:

$$\frac{\Delta MF'H'}{MH'} = \frac{\sqrt{3}}{2} x \quad \text{و} \quad \frac{\Delta FMH}{MH} = \frac{\sqrt{3}}{2} y$$

پس HH' می شود:

$$HH' = MH' + MH = \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y = \frac{\sqrt{3}}{2} (x + y)$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): M در شکل بالا، روی بیضی است؛ پس طبق مورد (۱) درسنامه، جمع فاصله هایش از F و F' باید $2a$ باشد. HH' را هم خود سؤال داده $2\sqrt{3}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (2a) = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2a = 4$$

طبق مورد (۲) درسنامه، طول قطر بزرگ بیضی همان $2a = 4$ است.

۲۰- گزینه ۱

درسنامه ۱ در معادله گسترده سهمی، اگر نسبت به متغیر درجه دوم مشتق بگیریم، یا عرض رأس پیدا می شود یا طولش. احتمالاً می پرسید «چه طور تشخیص بدهیم؟» باید خدمتتان عرض کنیم که اگر متغیر درجه دوم x بود طول رأس و اگر متغیر درجه دوم y بود، عرض رأس پیدا شده است.

۲ مختصات رأس سهمی در معادله اش صدق می کند.

۳ هر وقت معادله گسترده سهمی را داشتید و مقدار پارامتر آن یعنی a را می خواستید، از رابطه مقابل استفاده کنید:

$$a = \frac{\text{ضریب متغیر درجه ۱}}{\text{ضریب متغیر درجه ۲}} \times 4$$

منفی یاد نره

۴ اگر در سهمی y^2 وجود داشته باشد، سهمی افقی است. در این جور سهمی ها معادله خط هادی از این رابطه به دست می آید:

$$x = -\frac{a}{4} \text{ طول رأس}$$

گام ۱ پیدا کردن طول رأس سهمی: در معادله گسترده سهمی y^2 داریم، پس طبق مورد (۱) درسنامه، اگر نسبت به y مشتق بگیریم، عرض رأس سهمی پیدا می شود:

$$3y^2 - 2x - ay = 0 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} 6y - a = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{6}$$

حالا $y = \frac{a}{6}$ را در معادله سهمی جای گذاری می کنیم تا به طول رأس سهمی برسیم (مورد (۲) درسنامه):

$$3\left(\frac{a}{6}\right)^2 - 2x - a\left(\frac{a}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{12} - 2x - \frac{a^2}{6} = 0$$

$$2x = \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{6} \Rightarrow 2x = -\frac{a^2}{12} \Rightarrow x = -\frac{a^2}{24}$$

طول رأس

گام ۲ محاسبه پارامتر سهمی: به کمک مورد (۳) درسنامه، پارامتر سهمی $3y^2 - 2x - ay = 0$ را به دست می آوریم؛ فقط چون در معادله سهمی a داریم، پارامتر

$$A = -\frac{\text{ضریب متغیر درجه ۱}}{\text{ضریب متغیر درجه ۲}} \times 4 = -\frac{-a}{3 \times 4} = \frac{1}{4}$$

سهمی را با A نشان می دهیم:

گام ۱ سؤال گفته $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 + 1$ پس با توجه به نسبت $\frac{5}{4}$ که پیدا کردیم داریم:

$$\sigma_1^2 = 5 \text{ و } \sigma_2^2 = 4 \text{ (و اگر حساس هستید } S = 20 \text{)}$$

گام ۲ پس داریم: $\sigma_1 = \sqrt{5}$ یعنی انحراف معیار دسته اول $\sqrt{5}$ است.

۲۵- گزینه ۳

درسنامه ۱ واریانس n داده $x_1, x_2, \dots, x_n$ با میانگین $\bar{x}$ ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

۲ هر وقت از بین تعدادی داده یکی از آن‌ها را حذف کنیم ولی هم‌چنان میانگین داده‌ها تغییری نکند، آن عدد حذف‌شده حتماً با میانگین برابر است.

گام ۱ چون تنها داده متفاوت بین دو دسته a است، می‌توانیم دسته اول را به صورت b, c, d, e, f و دسته دوم را به صورت a, b, c, d, e, f در نظر بگیریم.

گام ۲ به گفته سؤال، میانگین دو دسته برابرند. این یعنی حذف داده a تأثیری روی میانگین نمی‌گذارد؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه میانگین هر دو دسته برابر همان داده حذف‌شده، یعنی a است.

گام ۳ فرمول واریانس برای دو دسته را می‌نویسیم. حواسمان هم هست که برای هر دو دسته $\bar{x} = a$ شد:

$$\sigma_1^2 = \frac{(b-a)^2 + (c-a)^2 + \dots + (f-a)^2}{5} \quad (I)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(a-a)^2 + (b-a)^2 + (c-a)^2 + \dots + (f-a)^2}{6} \quad (II)$$

تنها اختلاف صورت کسرهای بالا $(a-a)^2 = 0$ است؛ پس صورت دو کسر یکسان‌اند.

جفتشان را A در نظر می‌گیریم و روابط (I) و (II) را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{A}{A} = \frac{5}{6} \Rightarrow \sigma_1^2 = \frac{5}{6} \sigma_2^2$$

و داریم:

گام ۴ سؤال گفته $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 + \frac{2}{3}$. طبق تساوی بالا می‌توانیم به جای σ_1^2 بنویسیم $\frac{5}{6} \sigma_2^2$:

$$\frac{5}{6} \sigma_2^2 = \sigma_2^2 + \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{6} \sigma_2^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \sigma_2^2 = \frac{1}{3} \times \frac{6}{1} = 2$$

البته می‌توانستیم $\sigma_2^2 = \frac{1}{3}$ را در $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 + \frac{2}{3}$ هم جای‌گذاری کنیم تا به σ_1^2 برسیم:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = 1$$

پس واریانس دسته اول ۱ است.

۲۶- گزینه ۳

گام ۱ به گفته سؤال اعداد دسته اول به صورت زیر هستند:

دسته اول: ۱, ۲, ۳, ۴, ..., ۹۷, ۹۸, ۹۹, ۱۰۰

می‌خواهیم در هر مرحله ۲ تا عدد حذف کنیم و اختلافشان را در دسته جدید بنویسیم؛ تا جایی که همه اعداد دسته اول حذف بشوند و همه اعداد دسته دوم، فرد و غیرتکراری باشند. اگر به جای ۱ و ۱۰۰ عدد ۹۹، به جای ۲ و ۹۹، عدد ۹۷، ... و به جای ۴۹ و ۵۰، عدد ۱ را قرار دهیم، اعداد دسته دوم می‌شوند:

دسته دوم: ۱, ۳, ۵, ۷, ..., ۹۹

که ویژگی‌های مسئله را دارند.

گام ۲

نکته اگر تعدادی داده، یک دنباله حسابی بسازند، میانگینشان برابر می‌شود با میانگین اعداد اول و آخر.

سؤال میانگین اعداد ۱, ۳, ۵, ..., ۹۹ را می‌خواهد که یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ می‌سازند، پس طبق نکته بالا میانگینشان برابر می‌شود با:

$$\bar{x} = \frac{\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}}{2} = \frac{1 + 99}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

گام ۳ سؤال می‌گوید با اضافه کردن دو داده m و n به ۱۶ داده $x_1, x_2, \dots, x_{16}$ میانگین $\bar{x}$ ، میانگین داده‌های جدید همان $\bar{x}$ باقی می‌ماند؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، میانگین m و n هم باید $\bar{x}$ باشد:

$$\frac{m+n}{2} = \bar{x} \quad (2)$$

گام ۴ ولی واریانس ۱۸ داده جدید یک واحد بیشتر می‌شود، یعنی از ۴۰ می‌رسد به ۴۱:

$$\sigma_1^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{16} - \bar{x})^2 + (m - \bar{x})^2 + (n - \bar{x})^2}{18}$$

$$\Rightarrow 640 + (m - \bar{x})^2 + (n - \bar{x})^2 = \frac{18 \times 41}{2} \Rightarrow (m - \bar{x})^2 + (n - \bar{x})^2 = 98$$

گام ۵ طبق رابطه (۲) می‌توانیم به جای $\bar{x}$ در تساوی بالا بنویسیم:

$$(m - \frac{m+n}{2})^2 + (n - \frac{m+n}{2})^2 = 98 \Rightarrow (\frac{m-n}{2})^2 + (\frac{n-m}{2})^2 = 98$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{(m-n)^2}{4} = 98 \Rightarrow \frac{(m-n)^2}{2} = 98 \Rightarrow (m-n)^2 = 98 \times 2 = 196 \times 4$$

$$\Rightarrow |m-n| = \sqrt{196 \times 4} = 14 \times 2 = 28$$

۲۳- گزینه ۲

درسنامه ۱ میانگین و واریانس داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را به ترتیب با نمادهای $\bar{x}$ و σ^2 نشان می‌دهیم و برای محاسبه‌اش از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

۲ با اضافه کردن یک مقدار ثابت به داده‌ها، واریانس تغییری نمی‌کند.

گام ۱ به گفته سؤال، انحراف از y پنج داده، به ترتیب برابر $-1, -5, -6, -7, -4$ است؛ پس اگر y واحد به داده‌ها اضافه کنیم، داده‌ها می‌شود:

گام ۲ چون داده‌های بالا از اضافه شدن مقدار ثابت y به داده‌ها به دست آمده‌اند، طبق مورد (۲) درس‌نامه، واریانسشان با داده‌های اصلی برابر است.

گام ۳ میانگین داده‌ها را حساب می‌کنیم: $\bar{x} = \frac{-1-5-6-7+4}{5} = -3$

پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، واریانس می‌شود:

$$\sigma^2 = \frac{(-1-(-3))^2 + (-5-(-3))^2 + (-6-(-3))^2 + (-7-(-3))^2 + (4-(-3))^2}{5} = \frac{4+4+9+16+49}{5} = \frac{82}{5} \times \frac{2}{2} = 16 \frac{2}{5}$$

۲۴- گزینه ۳

درسنامه ۱ واریانس n داده $x_1, x_2, \dots, x_n$ با میانگین $\bar{x}$ ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

۲ هر وقت از بین تعدادی داده یکی از آن‌ها را حذف کنیم ولی هم‌چنان میانگین داده‌ها تغییری نکند، آن عدد حذف‌شده حتماً با میانگین برابر است.

گام ۱ صورت سؤال می‌گوید در دسته اول ۴ داده a, b, c, d و در دسته دوم ۵ داده b, c, d, e و a داریم.

گام ۲ چون میانگین دو دسته برابر است، باید تنها داده متفاوت یعنی a ، برابر میانگین باشد:

$$a = \frac{b+c+d+e}{4}$$

گام ۳ فرمول محاسبه واریانس‌ها را می‌نویسیم:

$$\sigma_{\text{اول}}^2 = \frac{(b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2}{4} = \frac{S}{4}$$

$$\sigma_{\text{دوم}}^2 = \frac{(b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2 + (a-a)^2}{5} = \frac{S+0}{5} = \frac{S}{5}$$

$$\frac{\sigma_{\text{اول}}^2}{\sigma_{\text{دوم}}^2} = \frac{5}{4}$$

پس داریم:

۲۷- گزینه ۳

۲, ۲, ۲, ۲, ۳ نمی‌تواند درجهٔ رئوس یک گراف باشد، چون تعداد رأس‌های فردش، عددی زوج نیست (به دونه فرد داره)، پس حق داریم یه دونه ۱ به اعداد بالا اضافه کنیم؛ این جوری هم تعداد یک‌ها حداقل است هم تعداد رأس‌های فرد، زوج: ۳, ۲, ۲, ۲, ۲, ۱
گام ۱ با کمی دقت به درجه‌های بالا متوجه می‌شویم که می‌توانیم دوتا از ۲ها را در هم ضرب کنیم و به جایشان ۴ را قرار بدهیم تا درجهٔ رأس‌ها به صورت ۴, ۳, ۲, ۲, ۱ دربیاید؛ این دنباله هم مشکلی ندارد.

گام ۲ $\Delta(\bar{G})$ و $q(\bar{G})$ را در هر دو دنباله به دست می‌آوریم:
♦ ۳, ۲, ۲, ۲, ۲, ۱: در این دنباله چون ۶ تا عدد داریم، پس ۶ تا هم رأس داریم؛ بنابراین $p=6$ است. حالا طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم برای به دست آوردن درجهٔ رأس‌های گراف $\bar{G}$ ، باید همهٔ درجه‌ها را از $p-1=5$ کم کنیم:

همان‌طور که می‌بینید $\Delta(\bar{G})=4$ است. برای محاسبهٔ $q(\bar{G})$ هم از مورد (۱) درس‌نامه کمک می‌گیریم: اندازهٔ گراف $\bar{G} \times 2 =$ مجموع درجه‌های گراف $\bar{G}$

$\Rightarrow 2+3+3+3+3+4=2q(\bar{G}) \Rightarrow 18=2q(\bar{G}) \Rightarrow q(\bar{G})=9$
بنابراین $\Delta(\bar{G})+q(\bar{G})=4+9=13$ است. همین‌جا معلوم می‌شود که ۱۳ درست است، اما اگر بررسی دنبالهٔ دوم را هم می‌خواهید، خدمت شما:
♦ ۳, ۴, ۲, ۲, ۱: در این دنباله $p=5$ است، پس برای محاسبهٔ درجهٔ رأس‌های گراف $\bar{G}$ باید همهٔ درجه‌ها را از $p-1=4$ کم کنیم:

در این دنباله $\Delta(\bar{G})=3$ است. $q(\bar{G})$ هم به صورت زیر پیدا می‌شود:
 $1+0+2+2+3=2q(\bar{G}) \Rightarrow 8=2q(\bar{G}) \Rightarrow q(\bar{G})=4$
بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G})+q(\bar{G})=3+4=7$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

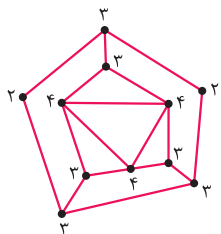
۳- گزینه ۲

استراتژی اول به کمک نامساوی $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ ، کران پایین $\gamma(G)$ را به دست می‌آوریم؛ بعد سعی می‌کنیم مثالی بزنیم که با همان کران پایین گراف احاطه شود. اگر چنین مثالی وجود داشت، جواب معلوم می‌شود؛ ولی اگر وجود نداشت کران پایین $\gamma(G)$ را یکی یکی زیاد می‌کنیم تا بالاخره مثال هم پیدا شود.

درس‌نامه ۱ به زیرمجموعهٔ D از رئوس گراف G، مجموعهٔ احاطه‌گری می‌گوییم، هر وقت رأس‌های گراف G یا در D باشند یا با حداقل یکی از رئوس D مجاور باشند. مثلاً در گراف مقابل، این مجموعه‌ها همه احاطه‌گرند: $\{a, c\} - \{a, d, b\} - \{e, c\} - \{a, b, c\} - \dots$
۲ به مجموعهٔ احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را داشته باشد، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. مثلاً در گراف بالا $\gamma(G)=2$ است.
۳ اگر بزرگ‌ترین درجهٔ یک گراف n رأسی، Δ باشد؛ کران پایین $\gamma(G)$ از این نامساوی پیدا می‌شود:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$$

گام ۱ اول باید کران پایین $\gamma(G)$ را به کمک مورد (۳) درس‌نامه حساب کنیم. با توجه به گراف مقابل، می‌توانیم بگوییم $\Delta=4$ و $n=11$ است، پس:
 $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{11}{4+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$



درس‌نامه ۱ در گراف کامل K_p ، تعداد یال‌ها $\frac{p(p-1)}{2} = |E(G)|$ و درجهٔ تمام رأس‌ها $p-1$ است.
۲ اگر تعداد یال‌های گرافی به K_p نزدیک باشد، می‌توانیم فکر کنیم که یک گراف کامل بوده و از آن یال جدا شده است.

گام ۲ با $|V(G)|=8$ رأس، بیشترین تعداد یال $\frac{8(8-1)}{2}=28$ است و گراف صورت سؤال ۲۴ یال دارد؛ پس ۴ یال از K_8 کم‌تر دارد.
گام ۳ اگر K_8 بود، هشت رأس درجه ۷ داشت. حالا چون می‌خواهیم به حداقل مینیمم درجه برسیم، ۴ یال را از یک رأس برمی‌داریم تا درجه‌اش به $7-4=3$ برسد، پس $\delta_{\min}=3$ است.

۲۸- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ هر وقت درجهٔ رأس‌های یک گراف را داشتید و اندازهٔ گراف را می‌خواستید، از رابطهٔ مقابل استفاده کنید: $\text{تعداد یال‌ها} \times 2 = \text{مجموع درجهٔ رأس‌ها}$ اندازهٔ گراف
۲ کوچک‌ترین عدد بین درجهٔ رأس‌های گراف $\delta(G) = G$
۳ فرض کنید G یک گراف از مرتبهٔ p و یک رأس آن باشد، در این صورت بین درجهٔ رأس a در G و $\bar{G}$ رابطهٔ مقابل برقرار است: $p-1 = \text{درجهٔ رأس a در گراف } \bar{G} + \text{درجهٔ رأس a در گراف } G$
۴ تعداد رأس‌های فرد هر گراف، همیشه عددی زوج است.

گام ۱ از رابطهٔ «تعداد یال‌ها $\times 2 =$ مجموع درجهٔ رأس‌ها»، نتیجه می‌گیریم که تعداد یال‌ها وقتی حداقل می‌شود که مجموع درجه‌ها کم‌ترین شود؛ پس عدد ۴۳۲ را تا جای ممکن تجزیه می‌کنیم تا به کوچک‌ترین درجه‌ها برسیم: $432 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۳ نمی‌توانند درجهٔ رئوس یک گراف ساده باشند، چون تعداد رأس‌های فرد عددی فرد است. (سه تا ۳ داره)
بنابراین حق داریم یه دونه ۱ به اعداد بالا اضافه کنیم، این جوری هم تعداد رأس‌های فرد، عددی زوج می‌شود، هم تعداد یال‌ها حداقل: ۳, ۳, ۳, ۲, ۲, ۲, ۲, ۱
گام ۲ حالا $\delta(\bar{G})$ و $q(\bar{G})$ را حساب می‌کنیم. در دنبالهٔ ۳, ۳, ۳, ۲, ۲, ۲, ۲, ۱ هشت‌تا عدد داریم، پس هشت‌تا هم رأس داریم؛ بنابراین $p=8$ است. حالا طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم برای به دست آوردن درجهٔ رأس‌های گراف $\bar{G}$ ، باید همهٔ درجه‌های گراف را از $p-1=7$ کم کنیم.

همان‌طور که می‌بینید $\delta(\bar{G})=4$ است. برای محاسبهٔ $q(\bar{G})$ هم از مورد (۱) درس‌نامه کمک می‌گیریم: اندازهٔ گراف $\bar{G} \times 2 =$ مجموع درجهٔ رئوس گراف $\bar{G}$
 $\Rightarrow 4+4+4+5+5+5+5+6=2q(\bar{G}) \Rightarrow 38=2q(\bar{G}) \Rightarrow q(\bar{G})=19$
بنابراین $q(\bar{G})+\delta(\bar{G})=19+4=23$ است.

۲۹- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ هر وقت درجهٔ رأس‌های یک گراف را داشتید و اندازهٔ گراف را می‌خواستید، از رابطهٔ مقابل استفاده کنید: $\text{تعداد یال‌ها} \times 2 = \text{مجموع درجهٔ رأس‌ها}$
۲ بزرگ‌ترین عدد در بین درجهٔ رأس‌های گراف $\Delta(G) = G$
۳ فرض کنید G یک گراف از مرتبهٔ p و یک رأس آن باشد، در این صورت بین درجهٔ رأس a در G و $\bar{G}$ رابطهٔ زیر برقرار است: $p-1 = \text{درجهٔ رأس a در گراف } \bar{G} + \text{درجهٔ رأس a در گراف } G$
۴ تعداد رأس‌های فرد هر گراف، همیشه عددی زوج است.

گام ۱ اول ۴۸ را تجزیه می‌کنیم: $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

تا مؤلفه $\vec{E}_{rx}$ را خنثی کند؛ پس باید $q_3 > 0$ باشد (۳) و (۴) برآید.

۲) میدان الکتریکی خالص در نقطه M هم در راستای افقی و هم در راستای قائم صفر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} E_r &= E_{rx} \\ E_1 &= E_{ry} \Rightarrow \frac{E_r}{E_1} = \frac{E_{rx}}{E_{ry}} = \tan \alpha \xrightarrow{\tan \alpha = \frac{r_r}{r_1} = \frac{40}{20} = 2} \frac{E_r}{E_1} = 2 \\ \Rightarrow \frac{k \frac{|q_3|}{r_r^2}}{k \frac{|q_1|}{r_1^2}} &= 2 \xrightarrow{r_r = 40 \text{ cm}, r_1 = 20 \text{ cm}, q_1 = 5 \mu\text{C}} \frac{40^2}{20^2} = 2 \Rightarrow \frac{|q_3| \times 40^2}{1600 \times 5} = 2 \\ \Rightarrow \frac{|q_3|}{20} &= 2 \Rightarrow |q_3| = 40 \mu\text{C} \xrightarrow{q_3 > 0} q_3 = 40 \mu\text{C} \end{aligned}$$

۳۳- گزینه ۳

۱) **درسنامه** اگر به بار الکتریکی q ، نیروی الکتریکی F وارد شود، اندازه میدان الکتریکی در محل این بار از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$E = \frac{F}{|q|}$$

۲) اندازه میدان الکتریکی در فاصله r از بار نقطه‌ای q از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \text{ : ثابت کولن})$$

روش گام ۱ میدان الکتریکی بار q_1 در محل بار q_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$E_1 = \frac{F}{|q_2|} \Rightarrow E = \frac{2 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-6}} = 4 \times 10^3 \text{ N/C}$$

مقدار فوق، اندازه میدان الکتریکی بار q_1 در فاصله 60 cm از آن است.

گام ۲ حالا باید اندازه میدان الکتریکی را در فاصله 20 cm از بار q_1 محاسبه کنیم:

$$E' = \frac{k|q|}{r^2} \xrightarrow{\text{تغییر فاصله}} \frac{E'}{E} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \left(\frac{60}{20}\right)^2 = 9 \Rightarrow E' = 9E$$

$$\Rightarrow E' = 9 \times 4 \times 10^3 = 3.6 \times 10^4 \text{ N/C}$$

روش گام ۳ با استفاده از قانون کولن، q_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \xrightarrow{\text{تکنیک محاسباتی}} 2 \times 10^{-2} = 9 \times \frac{|q_1| \times 5}{60^2}$$

$$\Rightarrow |q_1| = \frac{72}{9 \times 5} = 1.6 \mu\text{C}$$

گام ۴ حالا می‌توانیم میدان الکتریکی بار q_1 را در فاصله 20 cm از آن محاسبه کنیم:

$$E' = \frac{k|q_1|}{r'^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-6}}{(20 \times 10^{-2})^2} = 3.6 \times 10^4 \text{ N/C}$$

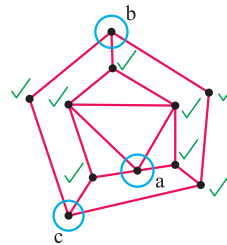
۳۴- گزینه ۱

۱) **درسنامه** قانون کولن، دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که در فاصله r از یکدیگر قرار دارند، به هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند که اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \text{ : ثابت کولن})$$

تکنیک محاسباتی ۹۰؛ چون در بیشتر تست‌های این مبحث، بارها را برحسب میکروکولن و فاصله‌ها را برحسب سانتی‌متر می‌دهند، می‌توانید در رابطه بالا، کمیت‌ها را با همین یکپایه جای‌گذاری کرده و به جای k ، 90 را قرار دهید تا F برحسب نیوتون به دست آید:

$$F = 90 \times \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad \begin{matrix} \text{برحسب } \mu\text{C} \\ \text{برحسب cm} \end{matrix}$$



گام ۱ حالا به دنبال مثالی می‌گردیم که $\gamma(G) = 3$ شود. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید با انتخاب ۳ رأس a, b, c و گراف احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) = 3$ قبول است.

فیزیک

۳۱- گزینه ۱

۱) **درسنامه** اگر بار الکتریکی روی صفحه‌های خازنی برابر Q و اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های آن برابر V باشد، ظرفیت خازن برابر است با:

$$C = \frac{Q}{V}$$

۲) ظرفیت خازن تختی که با دی‌الکتریک با ثابت K کاملاً پر شده است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C = K \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

ثابت
فاصله بین صفحه‌های خازن

۳) انرژی ذخیره‌شده در خازنی به ظرفیت C که بار الکتریکی آن Q است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

گام ۱ با خارج کردن دی‌الکتریک، ثابت دی‌الکتریک خازن از $K_1 = 2$ به $K_2 = 1$ می‌رسد، پس:

$$C \propto K \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{1}{2}$$

گام ۲ بار الکتریکی خازن ثابت است، بنابراین به کمک رابطه $C = \frac{Q}{V}$ داریم:

$$C \propto \frac{1}{V} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{C_1}{C_2} = 2$$

گام ۳ برای محاسبه نسبت انرژی ذخیره‌شده در خازن در دو حالت هم از رابطه $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ استفاده می‌کنیم:

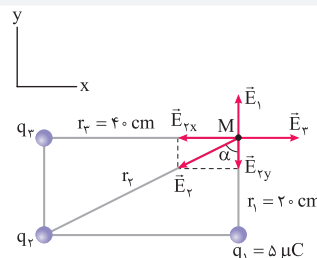
$$U \propto \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{C_2} = 2$$

۳۲- گزینه ۲

۱) **استراتژی** با توجه به صفر بودن میدان الکتریکی در نقطه M، جهت میدان‌های الکتریکی و علامت بارهای q_2 و q_3 را تعیین کنید، سپس نسبت اندازه میدان‌های الکتریکی $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_3$ را بنویسید و از آن‌جا اندازه بار q_3 را به دست بیاورید.

۱) **درسنامه** جهت میدان الکتریکی، از بارهای مثبت رو به خارج و به سوی بارهای منفی است.

۲) شرط آن که میدان الکتریکی خالص در یک نقطه صفر باشد، آن است که میدان الکتریکی خالص در راستای افقی و در راستای قائم در آن نقطه صفر باشد.

$$\vec{E}_{\text{net},y} = 0, \vec{E}_{\text{net},x} = 0$$


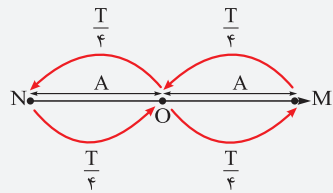
۱) $q_1 > 0$ است؛ پس میدان الکتریکی حاصل از آن در نقطه M در جهت محور y است. برای آن که میدان الکتریکی در نقطه M صفر باشد، باید $\vec{E}_2$ به طرف بار q_2 باشد تا مؤلفه $\vec{E}_{2y}$ بتواند E_1 را خنثی کند؛ بنابراین $q_2 < 0$ است. همچنین $\vec{E}_3$ باید به طرف راست باشد

- ۲ در مدتی که نوسانگر به وضع تعادل (مبدأ) نزدیک می‌شود، حرکت تندشونده و هرگاه در حال دورشدن از مبدأ است، حرکت کندشونده است.
- ۳ در مکان‌های منفی (بین مرکز نوسان و نقطه $-A$) شتاب در جهت مثبت و در مکان‌های مثبت (بین مرکز نوسان و نقطه A) شتاب در جهت منفی است.
- با توجه به درس‌نامه، ۱ درست است.

۳۸- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ با داشتن معادله مکان - زمان نوسانگر و مقایسه آن با رابطه $x = A \cos \omega t$ ، می‌توانیم دامنه (A) و دوره (T) نوسانگر را معلوم کنیم.

- $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- ۲ با توجه به شکل زیر نوسانگری که حرکتش را از نقاط بازگشت (M یا N) شروع کرده است، هر $\frac{T}{4}$ مسافت A را می‌پیماید.

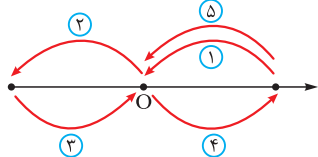


- ۳ تندی نوسانگر در نقاط بازگشت M و N برابر با صفر و در هنگام عبور از وضع تعادل (نقطه O) بیشینه و برابر $v_{\max} = A\omega$ است.

گام ۱ تعیین دامنه و دوره نوسان:

$$\begin{cases} x = A \cos 2\pi t \\ x = A \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0.5 \text{ m} \\ \omega = 2\pi \text{ rad/s} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 2\pi \Rightarrow T = 1 \text{ s} \end{cases}$$

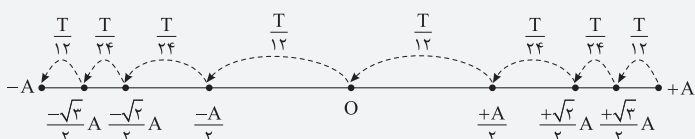
- گام ۲** مدت صفر تا $t = \frac{1}{8} \text{ s}$ چند برابر T است؟
- $$\frac{t}{T} = \frac{\frac{1}{8}}{1} = \frac{1}{8} \Rightarrow t = \frac{1}{8} T$$
- یعنی مطابق شکل نوسانگر تا لحظه $t = \frac{1}{8} \text{ s}$ ، $t = \frac{1}{8} T$ تا $\frac{T}{4}$ گذرانده و در حال عبور از مبدأ است؛ پس در این لحظه تندی و انرژی جنبشی آن بیشینه است و داریم:



$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{v=v_{\max}=A\omega} K = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow{\substack{m=1 \times 10^{-2} \text{ kg}, A=0.5 \text{ m} \\ \omega=2\pi \text{ rad/s}}} K = \frac{1}{2} \times 12 \times 10^{-2} \times (\Delta \times 10^{-1})^2 \times (2\pi)^2 = 6\pi^2 \times 10^{-2} \text{ J} = 6\pi^2 \text{ mJ}$$

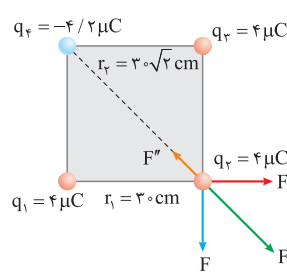
۳۹- گزینه ۳

درس‌نامه می‌دانید برای محاسبه تندی متوسط در بازه زمانی معین، باید نسبت مسافتی را که متحرک در آن بازه پیموده است، به بازه زمانی حساب کنیم. در حرکت نوسانی ساده برای محاسبه مسافت طی شده از الگوی زیر استفاده می‌کنیم.



گام ۱ بازه $t_0 = 0 \text{ s}$ تا $t_1 = \frac{5}{3} \text{ s}$ را برحسب دوره (T) می‌نویسیم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{5}{3}}{1} = \frac{5}{3} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{3} T = \frac{5}{3} \times \frac{T}{6} \quad (\text{اینجوری بگیر: } \frac{T}{6} \text{ تا } \Delta)$$



گام ۱ نیروی برابندی که بارهای q_1 و q_2 بر بار q_3 وارد می‌کنند را محاسبه می‌کنیم:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$

$$F = F_{13} = F_{23} = \frac{k|q|^2}{r_1^2} = \frac{9 \times 4 \times 4}{3^2}$$

$$\Rightarrow F = 1/6 \text{ N}$$

$$F' = \sqrt{F^2 + F^2} = \sqrt{2}F = \sqrt{2} \times 1/6 = 2/24 \text{ N}$$

گام ۲

یادآوری طول قطر مربع، $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است.

نیروی جاذبه بین بارهای q_2 و q_3 را محاسبه می‌کنیم:

$$F'' = \frac{k|q_2||q_3|}{r_2^2} \xrightarrow{\text{تکنیک محاسباتی } 90^\circ} F'' = \frac{9 \times 4 \times 4/2}{(3 \times \sqrt{2})^2} = 0/84 \text{ N}$$

گام ۳ نیروهای $\vec{F}'$ و $\vec{F}''$ در خلاف جهت یکدیگرند، در نتیجه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 برابر است با:

$$F_{\text{net}} = F' - F'' = 2/24 - 0/84 = 1/4 \text{ N}$$

۳۵- گزینه ۱

درس‌نامه بسامدهای تشدید در تار مرتعش دو انتها بسته، مضارب درستی از بسامد تشدید اول اند.

$$f_n = n f_1 \Rightarrow \begin{cases} f_2 = 2f_1 \\ f_3 = 3f_1 \\ \vdots \end{cases}$$

روش ۱ با توجه به این که $f_2 = 2f_1$ است، می‌توانیم مقدار f_1 را به دست بیاوریم.

$$f_2 = 160 \text{ Hz} \xrightarrow{f_2 = 2f_1} 2f_1 = 160 \Rightarrow f_1 = 80 \text{ Hz}$$

گام ۲ حالا از رابطه $f_3 = 3f_1$ استفاده می‌کنیم و خواسته سؤال یعنی مقدار $f_3 - f_1$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\Rightarrow f_3 - f_1 = 3f_1 - f_1 = 2f_1 \xrightarrow{f_1 = 80 \text{ Hz}} f_3 - f_1 = 2 \times 80 = 160 \text{ Hz}$$

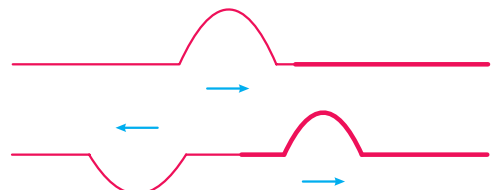
روش ۲ اختلاف دو بسامد فرد متوالی برابر با اختلاف دو بسامد زوج متوالی است؛ بنابراین $f_3 - f_1 = f_2 - f_2 = 320 - 160 = 160 \text{ Hz}$ می‌توانیم بنویسیم:

تیزبازی اختلاف دو بسامد تشدید متوالی تار دو انتها بسته برابر با بسامد تشدید اول (f_1) است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f_3 - 160 = f_1 \Rightarrow f_3 - f_1 = 160 \text{ Hz}$$

۳۶- گزینه ۴

طناب نشان داده‌شده از دو بخش نازک و ضخیم تشکیل شده است. وقتی تپ در طناب نازک به مرز دو بخش می‌رسد، بخشی از این تپ باز می‌تابد و بخش دیگر آن عبور می‌کند. بسامد این دو موج، همان بسامد موج فرودی است و چون تندی موج عبوری در قسمت ضخیم کمتر از موج بازتاب در قسمت نازک است، پس طبق رابطه $\lambda = \frac{v}{f}$ ، موج عبوری در قسمت ضخیم، طول موج کمتری نسبت به موج بازتاب در قسمت نازک دارد.



مشاوره این سؤال از شکل کتاب درسی طراحی و عیناً در این کنکور آمده است. اگر هنوز کتاب درسی را نخوانده‌اید، حتماً نگاهی به آن بیندازید تا بعداً پشیمان نشوید.

۳۷- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ بزرگی شتاب نوسانگر در وضع تعادل (مرکز نوسان) صفر و در نقطه‌های بازگشت (مکان‌های A و $-A$) بیشینه است.

$$-A \quad 0 \quad A \quad x$$

نکته مهم‌ترین عنصرهایی که در ترکیب‌های مختلف تنها یک نوع عدد اکسایش دارند، عبارتند از:

عنصر	فلزهای (گروه ۱)	فلزهای قلیایی خاکی (گروه ۲)	بور (B) و آلومینیم (Al)	فلوئور (F)	اسکاندیم (Sc)	روی (Zn)	نقره (Ag)
عدد اکسایش	+۱	+۲	+۳	-۱	+۳	+۲	+۱

حواستون باشه که عدد اکسایش هر کدام از این عناصر در حالت آزاد برابر صفر است.

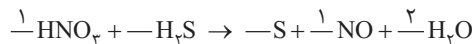
۳ شبه‌فلز دوره سوم ${}_{14}\text{Si}$ است، اگر ${}_{14}\text{Si}$ ، ${}_{14}\text{Z}$ ، ${}_{14}\text{Ne}$ باشد، همان ${}_{22}\text{Ti}$ خواهد بود که به دلیل واکنش ناچیز با ذره‌های موجود در آب، از آن در ساخت پروانه کشتی‌های اقیانوس‌پیما استفاده می‌شود.

۴ اگر ${}_{17}\text{Cl}$ ، ${}_{17}\text{Z}$ ، ${}_{17}\text{Ne}$ باشد، ${}_{25}\text{Mn}$ می‌تواند ${}_{25}\text{Mn}$ باشد که هر دو عنصر حداقل یک زیرلایه الکترونی نیمه‌پر دارند.

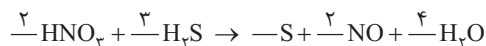
مشاوره این سؤال به نمونه از سؤال‌های تحلیلیه! با توجه به این که سهم سؤال‌های تحلیلی در کنکورهای اخیر زیاد شده، بهتون توصیه می‌کنیم که هر جا توی کتاب‌ها، آزمون‌ها و ... این مدل سؤال‌ها رو دیدید، اول دانش خودتون رو محک بزنید و بعدش حتماً پاسخ سؤال رو بخونید تا بتونید مهارتتون رو در این مدل تست‌ها بالا ببرید.

۴۲- گزینه ۲

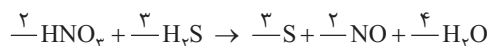
گام ۱ ابتدا باید معادله واکنش را موازنه کنیم. موازنه واکنش را با اتم N از ترکیب پیچیده‌تر HNO_3 شروع می‌کنیم. برای موازنه اتم N به HNO_3 و NO ضریب ۱ می‌دهیم و در ادامه برای موازنه اتم O، به H_2O ضریب ۲ می‌دهیم.



حالا به منظور موازنه اتم H، باید به H_2S ضریب $\frac{3}{2}$ بدهیم. برای از بین رفتن ضریب کسری، همه ضرایب معلوم را در ۲ ضرب می‌کنیم.



و در نهایت برای موازنه اتم S، به S ضریب ۳ می‌دهیم.



گام ۲ حالا می‌ریم سراغ استوکیومتری واکنش و با استفاده از اطلاعات سؤال، حجم گاز NO را به دست می‌آوریم:

روش ۱ استفاده از کسر تناسب: در این روش، بازده درصدی در کسر مربوط به واکنش‌دهنده ضرب می‌شود.

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{حجم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{100 \times 75}{3 \times 34} = \frac{x}{3 \times 24} \Rightarrow x = 0.1 \times \frac{3}{4} \times 48 = 3.6 \text{ L}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

نکته در مسائلی که بازده درصدی واکنش جزء اطلاعات سؤال است، به جای استفاده از فرمول بازده، می‌توان از کسر تبدیل معادل آن استفاده کرده و مقدار عملی و نظری را به یکدیگر تبدیل کنیم. مثلاً می‌توان نوشت:

$$\frac{a \text{ g عملی}}{100 \text{ g نظری}} = \frac{a \text{ g نظری}}{100 \text{ g عملی}} \Rightarrow a = \text{بازده درصدی}$$

گام ۱ در شکل روبه‌رو، مسیر حرکت نوسانگر در مدت $\frac{\Delta T}{6}$ را نشان داده‌ایم.

با توجه به شکل، مسافتی که متحرک در این مدت می‌پیماید برابر است با:

$$\ell = 2A + 3 \frac{A}{2} = \frac{7A}{2}$$

$$A = \frac{d}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm} \rightarrow \ell = \frac{7 \times 4}{2} = 14 \text{ cm}$$

گام ۲ محاسبه تندی متوسط:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = \frac{5}{3} \text{ s}} s_{av} = \frac{14}{\frac{5}{3}} = 8.4 \text{ cm/s}$$

شیمی

۴۰- گزینه ۱

شفاف‌سازی سه گروه متیل به معنای سه شاخه فرعی متیل است (متیل برای بیان نام شاخه به کار می‌رود) و نباید گروه‌های $-\text{CH}_3$ در ابتدا و انتهای زنجیر اصلی کربنی را در نظر گرفت. اگر در سؤال پرسیده شده بود که در ساختار چند ایزومر، سه گروه $-\text{CH}_3$ وجود دارد، در این صورت باید گروه‌های $(-\text{CH}_3)$ ابتدا و انتهای زنجیر اصلی هم در نظر گرفته می‌شد.

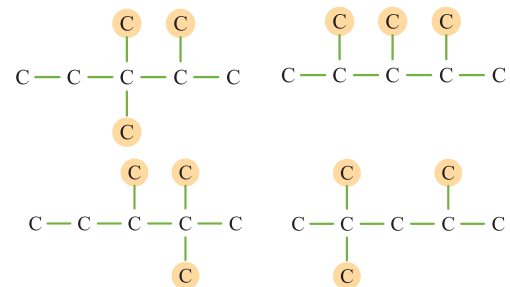
گام ۱ با توجه به فرمول عمومی آلکان‌ها و اطلاعات داده‌شده در سؤال، شمار اتم‌های کربن آلکان را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{شمار اتم‌های H}}{\text{شمار اتم‌های C}} = \frac{2n+2}{n} = \frac{2}{2.5} \Rightarrow \frac{2n+2}{n} = \frac{4}{5} \Rightarrow 2n+2 = \frac{4}{5}n \Rightarrow 10n+10 = 4n \Rightarrow 6n = -10 \Rightarrow n = -1.67$$

$$\Rightarrow \frac{2n+2}{n} = \frac{2}{2.5} \Rightarrow 2n+2 = \frac{4}{5}n \Rightarrow 10n+10 = 4n \Rightarrow 6n = -10 \Rightarrow n = -1.67$$

$$\Rightarrow \text{آلکان} = \text{C}_8\text{H}_{18} \text{ (اوکتان)}$$

گام ۲ در ساختار یک آلکان ۸ کربنی با سه شاخه فرعی متیل، زنجیر اصلی دارای ۵ اتم کربن است.



۴۱- گزینه ۱

عنصر Z در دوره سوم جای دارد و آرایش الکترونی آخرین زیرلایه آن یکی از حالت‌های $3p^1$ تا $3p^6$ می‌تواند باشد.

اگر شمار الکترون‌های $3d$ در X با شمار الکترون $3p$ در Z برابر باشد، تفاوت عدد اتمی این دو عنصر حداقل ۷ و حداکثر ۸ خواهد بود.

$${}_{13}\text{Al}(3s^2 3p^1) - {}_{21}\text{Sc}(3d^1 / 4s^2) = 8$$

$${}_{17}\text{Cl}(3s^2 3p^5) - {}_{24}\text{Cr}(3d^5 / 4s^1) = 7$$

$${}_{17}\text{Cl}(3s^2 3p^5) - {}_{25}\text{Mn}(3d^5 / 4s^2) = 8$$

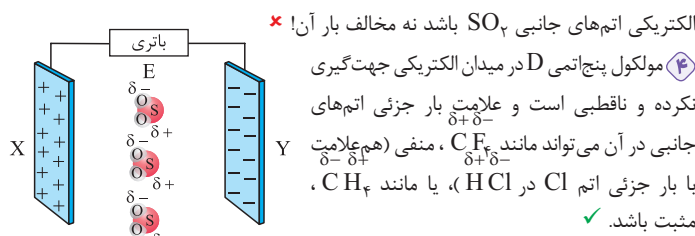
بررسی سایر گزینه‌ها: تنها فلز دسته p در دوره سوم، ${}_{13}\text{Al}$ است. اگر ${}_{13}\text{Al}$ ، ${}_{13}\text{Z}$ ، ${}_{13}\text{Ne}$ باشد، عنصر X همان ${}_{21}\text{Sc}$ خواهد بود که در ترکیب‌هایش تنها یک نوع عدد اکسایش (+۳) دارد.

۴۵- گزینه ۳

❖ **شفاف سازی** با توجه به شکل، مولکول های دو اتمی A و سه اتمی E برخلاف مولکول های پنج اتمی D در میدان الکتریکی جهت گیری کرده اند؛ بنابراین مولکول های A و E، قطبی و مولکول D ناقطبی است.

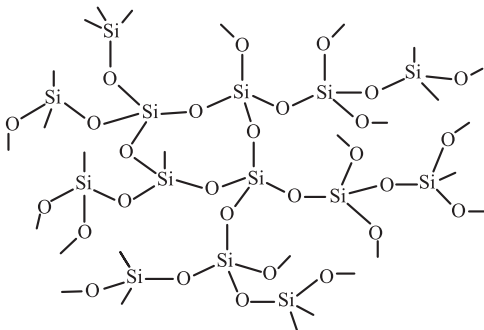
❖ **بررسی گزینه ها:** ۱) A و E به ترتیب می توانند مولکول دو اتمی و قطبی HI و مولکول سه اتمی و قطبی H₂S باشند و D هم می تواند مولکول پنج اتمی و ناقطبی SiH₄ باشد. ✓
۲) در مولکول قطبی H₂O، اتم های H، سر مثبت (قطب مثبت) مولکول را تشکیل می دهند؛ بنابراین در میدان الکتریکی به سمت صفحه با بار منفی (صفحه X) قرار می گیرند. در ضمن گشتاور دوقطبی مولکول های ناقطبی، مانند D، برابر صفر است. ✓

۳) با توجه به شکل، در میدان الکتریکی، اتم های جانبی مولکول قطبی E، به سمت صفحه X و اتم مرکزی آن به سمت صفحه Y قرار گرفته اند. اگر E، SO₂ باشد؛ در مولکول قطبی SO₂، اتم های جانبی؛ یعنی اتم های اکسیژن، سر منفی مولکول هستند و به سمت صفحه با بار مثبت قرار می گیرند، بنابراین باید بار صفحه X، مثبت و بار صفحه Y منفی و هم علامت بار الکتریکی اتم های جانبی SO₂ باشد نه مخالف بار آن! ✗

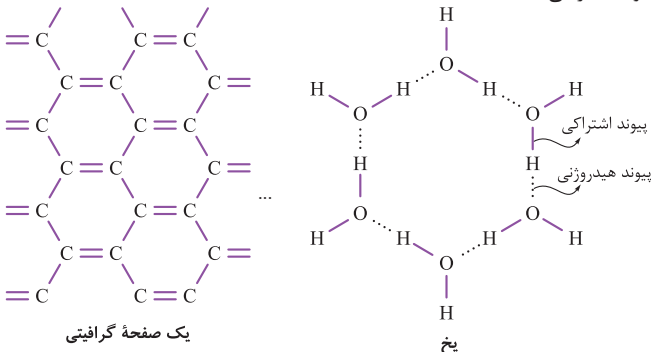


۴۶- گزینه ۳

در ساختار سیلیس (SiO₂)، هر اتم Si با چهار پیوند اشتراکی به ۴ اتم O و هر اتم O دو پیوند اشتراکی به ۲ اتم Si متصل است. ببینید:



❖ **بررسی سایر گزینه ها:** ۱) هر حلقه شش ضلعی در ساختار گرافیت شامل ۸ پیوند اشتراکی (۴ پیوند یگانه و ۲ پیوند دوگانه) و در ساختار یخ هر حلقه شش ضلعی شامل ۶ پیوند اشتراکی است.



۲) چگالی گرافیت (۲/۲۷ g.cm^{-۳}) از چگالی آب (۱ g.cm^{-۳}) بیشتر است و روی آب شناور نمی ماند.

۴) سیلیس خالص (SiO₂) در ساخت منشورها و عدسی ها به کار می رود. در ساختار این ماده، شمار زیادی از اتم های Si و O با پیوندهای اشتراکی Si—O—Si به یکدیگر متصل اند.

$$10/2 \text{ g H}_2\text{S} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{S}}{34 \text{ g H}_2\text{S}} \times \frac{2 \text{ mol NO}}{3 \text{ mol H}_2\text{S}} \times \frac{24 \text{ L NO نظری}}{1 \text{ mol NO}} \times \frac{75 \text{ L NO عملی}}{100 \text{ L NO نظری}} = 3/6 \text{ L NO}$$

کسر مربوط به بازده درصدی

۴۳- گزینه ۴

برای هر ماده، نسبت ظرفیت گرمایی (C) به ظرفیت گرمایی ویژه (c) برابر با جرم ماده (m) است.
$$\frac{\text{ظرفیت گرمایی (C)}}{\text{ظرفیت گرمایی ویژه (c)}} = m \Rightarrow m \times \text{ظرفیت گرمایی ویژه (c)} = \text{ظرفیت گرمایی (C)}$$

با توجه به این که طراح محترم فرموده است که جرم دو مایع برابر می باشد، پس این نسبت در دو مایع M و X، برابر است.

❖ **بررسی سایر گزینه ها:** ۱) با توجه به رابطه گرمای ویژه ($c = \frac{Q}{m\Delta\theta}$) داریم:

$$c_M = 2c_X \Rightarrow \frac{Q_M}{m_M\Delta\theta_M} = 2 \frac{Q_X}{m_X\Delta\theta_X}$$

$$\frac{Q_M=Q_X}{m_M=m_X} \Rightarrow 2\Delta\theta_M = \Delta\theta_X \Rightarrow \Delta\theta_M = \frac{\Delta\theta_X}{2}$$

$$c_M = 2c_X \Rightarrow \frac{Q_M}{m_M\Delta\theta_M} = 2 \frac{Q_X}{m_X\Delta\theta_X}$$

$$\frac{\Delta\theta_X = 2\Delta\theta_M}{m_M=m_X} \Rightarrow \frac{Q_M}{\Delta\theta_M} = 2 \frac{Q_X}{\Delta\theta_X} \Rightarrow Q_M = \frac{Q_X}{2}$$

۳) در این گزینه طراح محترم یک سوئی کوچک داده! به جای برابر بودن دما باید می گفت تغییر دمای ($\Delta\theta$) برابر! با فرض تغییر دمای برابر، این گزینه هم درست!

$$c_M = 2c_X \Rightarrow \frac{Q_M}{m_M\Delta\theta_M} = 2 \frac{Q_X}{m_X\Delta\theta_X} \xrightarrow{\frac{\Delta\theta_M=\Delta\theta_X}{m_M=m_X}} Q_M = 2Q_X$$

۴۴- گزینه ۳

❖ **نکته** برای محاسبه ΔH یک واکنش با استفاده از آنتالپی های سوختن واکنش دهنده ها و فراورده ها، از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده ها} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش دهنده ها} \right]$$

❖ **پاسخ** اول از همه، باید ببینیم که بر اثر سوختن ۱ مول متانول (CH₃OH) چه مقدار گرما آزاد می شود؛ یعنی آنتالپی سوختن متانول چه قدره!

$$1 \text{ mol CH}_3\text{OH} \times \frac{-144 \text{ kJ}}{2 \text{ mol CH}_3\text{OH}} = -72 \text{ kJ}$$

❖ **پاسخ** با استفاده از اطلاعات داده شده در سؤال، آنتالپی سوختن پروپین (C₃H₄) را به کمک آنتالپی سوختن متانول (CH₃OH) به دست می آوریم:

$$\frac{\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_4)}{\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{CH}_3\text{OH})} = 2/7 \Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_4) = 2/7 \times (-72) = -1944 \text{ kJ}$$

❖ **پاسخ** آنتالپی واکنش: C₃H₄(g) + 2H₂(g) → C₃H₈(g)، برابر با -۲۸۲ kJ است، از طرفی آنتالپی سوختن هیدروژن (H₂) و آنتالپی سوختن پروپین (C₃H₄) را داریم. حالا به راحتی به کمک رابطه زیر، آنتالپی سوختن پروپان (C₃H₈) را حساب می کنیم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده ها} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش دهنده ها} \right]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_8) = [\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_4) + 2\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{H}_2)] - [\Delta H_{\text{واکنش}}]$$

$$\Rightarrow -282 = [-1944 + 2(-286)] - [\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_8)]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_8) = -2234 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

۴۷- گزینه ۱

عنصر Z در دوره سوم جای دارد و آرایش الکترونی آخرین زیرلایه آن یکی از حالت های $3p^1$ تا $3p^6$ می تواند باشد.
اگر شمار الکترون های $3d$ در X با شمار الکترون $3p$ در Z برابر باشد، تفاوت عدد اتمی این دو عنصر حداقل ۷ و حداکثر ۸ خواهد بود.

$$\begin{aligned} {}_{13}\text{Al}(3s^2 3p^1) - {}_{21}\text{Sc}(3d^1 / 4s^2) &= 8 \\ {}_{17}\text{Cl}(3s^2 3p^5) - {}_{24}\text{Cr}(3d^5 / 4s^1) &= 7 \\ {}_{17}\text{Cl}(3s^2 3p^5) - {}_{25}\text{Mn}(3d^5 / 4s^2) &= 8 \end{aligned}$$

بررسی سایر گزینه ها: تنها فلز دسته p در دوره سوم، ${}_{13}\text{Al}$ است. اگر Z ، ${}_{13}\text{Al}$ باشد، عنصر X همان ${}_{21}\text{Sc}$ ($[18\text{Ar}]3d^1 / 4s^2$) خواهد بود که در ترکیب هایش تنها یک نوع عدد اکسایش (+۳) دارد.

نکته مهم ترین عنصرهایی که در ترکیب های مختلف تنها یک نوع عدد اکسایش دارند، عبارت اند از:

عنصر	فلزهای قلیایی (گروه ۱)	فلزهای قلیایی خاکی (گروه ۲)	بور (B) و آلومینیم (۱۳Al)	فلوئور (۹F)	اسکاندیم (${}_{21}\text{Sc}$)	روی (${}_{30}\text{Zn}$)	نقره (${}_{47}\text{Ag}$)
عدد اکسایش	+۱	+۲	+۳	-۱	+۳	+۲	+۱

حواستون باشد که عدد اکسایش هر کدام از این عناصر در حالت آزاد برابر صفر است.

شبه فلز دوره سوم ${}_{14}\text{Si}$ است، اگر Z ، ${}_{14}\text{Si}$ باشد، X همان ${}_{22}\text{Ti}$ ($[18\text{Ar}]3d^2 / 4s^2$) خواهد بود که به دلیل واکنش ناچیز با ذره های موجود در آب، از آن در ساخت پروانه کشتی های اقیانوس پیما استفاده می شود.

اگر Z ، ${}_{17}\text{Cl}$ ($[18\text{Ar}]3s^2 3p^5$) باشد، X می تواند ${}_{25}\text{Mn}$ ($[18\text{Ar}]3d^5 4s^2$) یا ${}_{24}\text{Cr}$ ($[18\text{Ar}]3d^5 4s^1$) باشد که هر دو عنصر حداقل یک زیرلایه الکترونی نیمه پُر دارند.

مشاوره این سؤال به نمونه از سؤال های تحلیلی! با توجه به این که سهم سؤال های تحلیلی در کنکورهای اخیر زیاد شده، بهتون توصیه می کنیم که هر جا توی کتاب ها، آزمون ها و ... این مدل سؤال ها رو دیدید، اول دانش خودتون رو محک بزنید و بعدش حتماً پاسخ سؤال رو بخونید تا بتونید مهارتون رو در این مدل تست ها بالا ببرید.

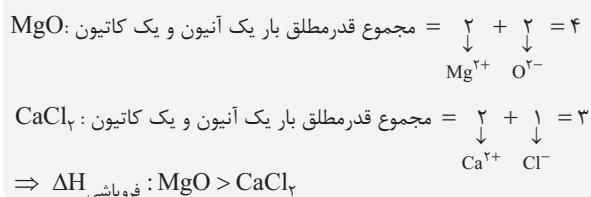
۴۸- گزینه ۱

درس نامه تکنیک مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه ترکیب های یونی

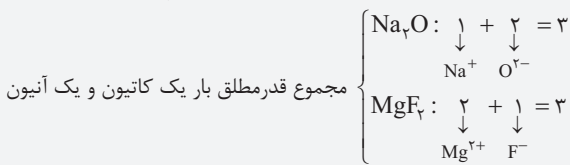
می توانید با استفاده از روش زیر، ΔH فروپاشی شبکه ترکیب های یونی را با هم مقایسه کنید:
گام ۱ هر چه مجموع قدرمطلق بار یک آنیون و یک کاتیون در یک ترکیب یونی بزرگتر باشد، ΔH فروپاشی شبکه آن بزرگتر است.

گام ۲ اگر مجموع قدرمطلق بار یک آنیون و بار یک کاتیون برای دو ترکیب یونی، برابر باشد، شعاع یون ها را با هم مقایسه می کنیم. هر چه شعاع یون ها کوچکتر باشد، ΔH فروپاشی بزرگتر است.

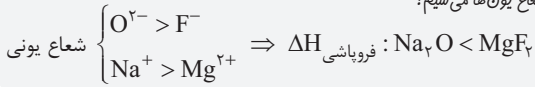
مثال: برای مقایسه ΔH فروپاشی شبکه بلور MgO و CaCl_2 می توان نوشت:



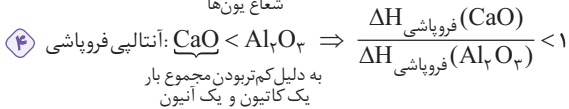
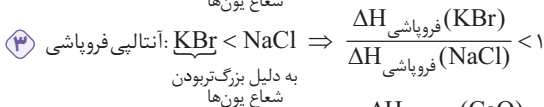
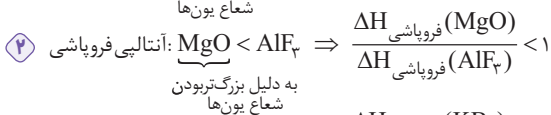
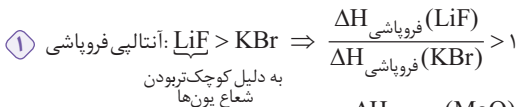
مثال: برای مقایسه ΔH فروپاشی شبکه بلور Na_2O و MgF_2 اول می ریم سراغ مقایسه بار یون ها:



حالا که مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و بار یک آنیون برای هر دو ترکیب یکسان شد، می ریم دست به دامن شعاع یون ها می شیم!



در ① ترکیب اول آنتالپی فروپاشی بزرگتری نسبت به ترکیب دوم دارد، به همین دلیل نسبت آنتالپی فروپاشی ترکیب اول به دوم در ① بزرگتر از ۱ است، اما در ② تا ④ قفیه برعکس! یعنی ترکیب دوم، آنتالپی فروپاشی بزرگتری داشته و نسبت آنتالپی فروپاشی ترکیب اول به دوم در آن ها، کوچکتر از ۱ است.



۴۹- گزینه ۲

روش گام ۱ برای سادگی، جرم نمونه خاک رس را ۱۰۰ گرم و جرم رطوبت اضافه شده به آن را X گرم فرض می کنیم.

جرم رطوبت در نمونه جدید: $(100 + X) \text{ g} \Rightarrow$ جرم رطوبت اولیه: 10 g

جرم نمونه جدید: $(100 + X) \text{ g} \Rightarrow$ جرم نمونه اولیه: 100 g

جرم سیلیس در نمونه جدید: $36 \text{ g} \Rightarrow$ جرم سیلیس اولیه: 36 g

گام ۲ حالا با استفاده از درصد جرمی رطوبت در نمونه جدید و به دست آوردن X، درصد جرمی سیلیس را در نمونه جدید محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} 100 \times \frac{\text{جرم رطوبت در نمونه جدید}}{\text{جرم کل نمونه جدید}} &= \text{درصد جرمی رطوبت در نمونه جدید} \\ \frac{100 + X}{100 + X} \times 100 &= 20 \Rightarrow X = 12/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 100 \times \frac{\text{جرم سیلیس در نمونه جدید}}{\text{جرم کل نمونه جدید}} &= \text{درصد جرمی سیلیس در نمونه جدید} \\ \frac{36}{100 + 12/5} \times 100 &= 32 \end{aligned}$$

روش

نکته اگر در یک مخلوط، جرم ماده ای تغییر کند، درصد جرمی بقیه مواد در مخلوط خودش (بدون آن ماده)، تغییری نخواهد کرد.

ثابت = درصد جرمی B و C در مخلوط B و C $\rightarrow$ جرم A تغییر کند $\rightarrow$ مخلوط A، B و C

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\text{جرم یا درصد جرمی B در مخلوط اولیه}}{\text{مجموع جرم یا درصد جرمی B و C در مخلوط اولیه}} &= \\ \frac{\text{جرم یا درصد جرمی B در مخلوط نهایی}}{\text{مجموع جرم یا درصد جرمی B و C در مخلوط نهایی}} & \end{aligned}$$

درصد جرمی سیلیس در نمونه اولیه، ۳۶٪ و مجموع درصد جرمی همه مواد به جز آب برابر $100 - 10 = 90$ درصد است. در نمونه نهایی، مجموع درصد جرمی همه مواد به جز آب، برابر $100 - 20 = 80$ درصد است. با توجه به این که درصد جرمی سیلیس در مخلوط همه مواد

$$\frac{36}{100 - 10} = \frac{X}{100 - 20} \Rightarrow X = 32$$

به جز آب، ثابت است، خواهیم داشت:

$$\frac{36}{90} = \frac{X}{80} \Rightarrow X = 32$$

نمونه نهایی نمونه اولیه