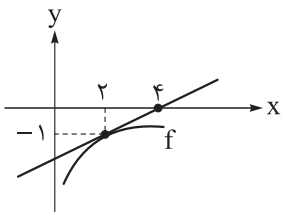
۱- تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x|3-x|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲- اگر $f(x) = \begin{cases} -1 & ; \ x < 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ 1 & ; \ x > 0 \end{cases}$ و $g(x) = [|x|]$ باشد، تابع gof در بازهٔ $(-10,7)$ چند نقطهٔ بحرانی به طول صحیح دارد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۳- نمودار تابع f و خط مماس بر آن در $x = 2$ در شکل زیر رسم شده است. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع g با ضابطهٔ $g(x) = xf(x)$ در $x = 2$ کدام است؟



۱) صفر

۲) $\frac{1}{2}$

۳) -1

۴) $\frac{3}{2}$

۴- توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x^5 - 1}{x^5}$ و $g(x) = \sqrt[5]{x+1}$ مفروض‌اند. حاصل $\frac{1}{f'(g(x)) \times g'(x)}$ کدام است؟

۱) $(x+1)^2$ ۲) $x+1$ ۳) $\frac{1}{(x+1)^2}$ ۴) $\frac{1}{x+1}$

۵- مجموع طول نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

۶- به ازای کدام مقدار a تابع f با ضابطهٔ $f(x) = |x^2 - 4| + a|x-2|$ در $x = 2$ مشتق‌پذیر است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

۷- تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و نمودار آن نسبت به محور y متقارن است. اگر $f'(1) = 3$ باشد، مشتق تابع g با ضابطهٔ $g(x) = f(\sqrt{x}) + f(x^2 - 3x + 1)$ در $x = 1$ کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۴ ۳) ۳/۵ ۴) ۳

۸- از نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر محور x، خطی قائم بر نمودار تابع $f(x) = x^2$ رسم شده است. این خط محور y را در کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

۹- مینیمم مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x - 3$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -5 ۴) -6

۱۰- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-x^{۲} & ; \quad x<۰\\ x^{۲}-۲x & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$ مفروض است. اگر m و n به ترتیب تعداد ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های نسبی نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=|f(x)|$ باشد، حاصل $\frac{m}{n}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۱- اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=-\frac{۲}{۳}x^{۳}-x^{۲}+۴x+۱$ روی بازهٔ $[-۳,۲]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) ۹ ۴) ۷

۱۲- ماکزیمم مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^{۳}+۲}{x^{۲}+۱}$ روی بازهٔ $(-۱,۳]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲

۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱۳- اگر $a>۰$ باشد، حاصل‌ضرب بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x-a}+\sqrt{۳a-x}$ برابر ۸ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۴\sqrt{۲}$

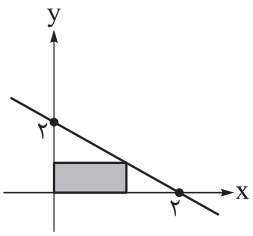
۱۴- مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\cos \pi x-۲\sin\frac{\pi x}{۲}-۱$ و دامنهٔ $[۰,۴]$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۷}{۲}$ ۴) -۴

۱۵- استوانه‌ای درون یک کره محاط شده است. اگر حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن باشد، نسبت حجم کره به حجم استوانه کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۶- در شکل زیر، بیشترین مقدار حجم حاصل از دوران مستطیل سایه‌خورده حول محور y چند برابر π است؟



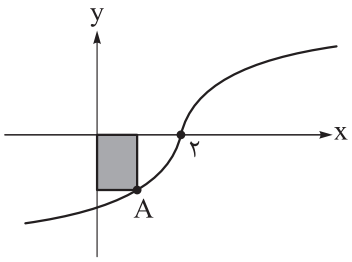
۱) $\frac{۳۲}{۲۷}$

۲) $\frac{۱۶}{۹}$

۳) $\frac{۳۲}{۹}$

۴) $\frac{۱۶}{۲۷}$

۱۷- مطابق شکل، نقطهٔ A روی نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات قرار گرفته است. بیشترین مقدار مساحت مستطیل سایه‌خورده کدام است؟



۱) $0/75\sqrt[3]{2}$

۲) $0/75\sqrt[3]{4}$

۳) $0/5\sqrt[3]{2}$

۴) $0/5\sqrt[3]{4}$

۱۸- مقدار عبارت $\frac{\sqrt{8\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}{2^{1/25}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt[4]{2}$ ۴) $\sqrt[3]{2}$

۱۹- نقاط $A(1,3,1)$، $B(-1,1,-3)$ و $C(-1,4,1)$ رأس‌های یک مثلث هستند. در این مثلث، طول میانهٔ وارد بر ضلع AB کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۲

۲۰- زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۵۰

۲۱- ناحیه‌ای در صفحه با روابط $0\le y\le x^2$ و $-1\le x\le 1$ مشخص شده است. چند نقطه با مختصات صحیح در این ناحیه وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲- اگر $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{k}$، آن‌گاه مجموع مؤلفه‌های تصویر قائم بردار $\vec{a}-\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $2\sqrt{10}$ ۴) $-2\sqrt{10}$

۲۳- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم زاویهٔ 60° می‌سازند. طول تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) صفر

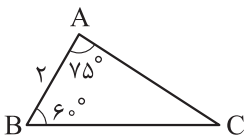
۲۴- اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 45°، زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ برابر 30° و $|\vec{a}|=\sqrt{2}$ باشد، آن‌گاه $|\vec{b}|$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}+1$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

۲۵- نقاط $A=(x,y,z)$ و $B=(2,-3,1)$ در فضا مفروض‌اند. اگر طول پاره‌خط AB برابر ۴ باشد، حداکثر مقدار $x+2y+2z$ کدام است؟

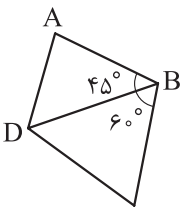
۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۶- در شکل زیر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC کدام است؟



۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۲۷- در شکل مقابل اگر $\frac{CD}{AD}=\sqrt{3}$ و $A\hat{D}C=165^\circ$، آن‌گاه $\tan\hat{A}$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۲

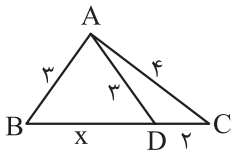
۲۸- در مثلث ABC به طول اضلاع a، b و c، اگر $a^2-b^2-c^2=1/2\,bc$، آن‌گاه نسبت طول ضلع b به طول ارتفاع وارد بر ضلع c کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۷۵ ۴) ۱/۵

۲۹- در مثلثی به اضلاع ۵، ۷ و ۸ فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی، از ضلع متوسط، چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

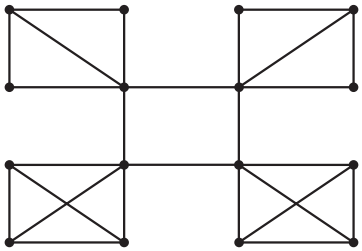
۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۳۰- در شکل زیر، با توجه به اندازه‌های روی آن، طول پاره‌خط **BD** کدام است؟



۱) ۳
۲) ۱/۷۵
۳) ۱/۵
۴) ۲/۵

۳۱- گراف مقابل چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد؟



۱) ۳۲
۲) ۱۲۸
۳) ۱۴۴
۴) ۶۴

۳۲- چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۶،۵،۲،۱،۰ و ۷ و بدون تکرار می‌توان ساخت به طوری که از ۱۵۰۰۰ بزرگ‌تر و از ۶۲۰۰۰ کوچک‌تر باشد؟

۱) ۲۸۸ ۲) ۳۱۲ ۳) ۳۴۸ ۴) ۳۶۰

۳۳- تیم ملی والیبال ایران ۶ بازیکن با قد مختلف دارد. آن‌ها به ترتیب وارد زمین می‌شوند. در چند حالت بلندقدترین فرد بلافاصله بعد از کوتاه‌قدترین وارد زمین نمی‌شود؟

۱) ۸۴۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۶۰

۳۴- چند جایگشت از حروف کلمهٔ «خیلی‌سبز» وجود دارد که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

۱) ۱۸۰۰ ۲) ۲۱۸۰ ۳) ۱۴۴۰ ۴) ۲۸۸۰

۳۵- چند رمز ۵ رقمی و بدون تکرار با استفاده از ارقام مجموعه‌های $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $B=\{6,7,8,9\}$ می‌توان ساخت که دقیقاً ۳ رقم از A و ۲ رقم از B در رمز به کار رفته باشد؟

۱) ۳۶۰۰ ۲) ۷۲۰۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

۳۶- با ارقام ۱،۲،۳،۴،۵،۶ چند عدد ۶ رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت، به طوری که وقتی از چپ به راست نگاه می‌کنیم، رقم‌های فرد به صورت صعودی و رقم‌های زوج به صورت نزولی در عدد آمده باشند؟ (برای مثال ۱۶۴۳۵۲ یا ۶۱۳۴۲۵)

۱) ۴۰ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۳۶

۳۷- کارت‌هایی با شمارهٔ ۱ تا ۹ و از هر کدام (شماره) به اندازهٔ کافی در اختیار داریم. به چند طریق می‌توانیم چهار کارت انتخاب کنیم؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۴۷۵ ۳) ۴۸۰ ۴) ۴۹۵

۳۸- دستگاه معادلهٔ $\begin{cases}\sqrt{x_1}+x_2+x_3=7\\ x_1+x_2+\cdots+x_5=10\end{cases}$، چند جواب صحیح و نامنفی دارد که x_1, x_2, x_3 طبیعی باشند؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۶۰

۳۹- در مربع لاتین زیر، $x+y$ چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۴	۱	۳	۲
۳			
۲		x	
۱			y

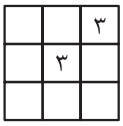
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

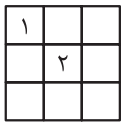
۴۰- دو مربع لاتین A و B متعامدند، ولی مربع لاتین C با A متعامد نیست. کدام گزینه درست نیست؟

۱) C و B حتماً متعامدند.

۲) درایه‌های روی قطر اصلی A یکسان است.

۳) درایه‌های روی قطر اصلی C یکسان است.

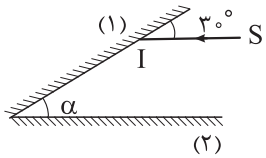
۴) B و مربع لاتین  ممکن است متعامد باشند.

B: 

۴۱- شخصی در فاصلهٔ ۱۶۰ متری از یک دیوار ایستاده است. این شخص رو به صخره فریاد می‌زند و ۱s بعد، پژواک صدایش را می‌شنود. اگر بسامد صدای فریاد شخص ۸ kHz باشد، طول موج آن چند سانتی‌متر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

۴۲- در شکل زیر، پرتو نور SI به آینهٔ (۱) می‌تابد. اگر زاویهٔ تابش این پرتو، در چهارمین برخورد با آینه‌ها صفر درجه باشد، زاویهٔ بین دو آینه (α) چند درجه است؟

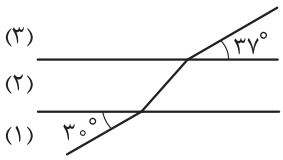


۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۴۳- یک پرتو نور با زاویهٔ تابش θ از هوا بر سطح یک محیط شفاف می‌تابد؛ بخشی از آن بازتاب شده و بخشی شکست می‌یابد. اگر پرتو بازتابیده عمود بر پرتو شکست‌یافته باشد، ضریب شکست محیط شفاف برابر با کدام گزینه است؟ ($n_{هوا} = ۱$)

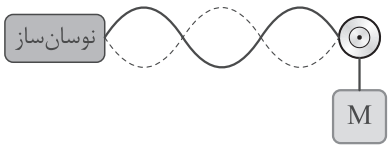
۱) $\tan\theta$ ۲) $\cot\theta$ ۳) $\frac{۱}{\sin\theta}$ ۴) $\frac{۱}{\cos\theta}$

۴۴- جبههٔ موج تختی در سه محیط با مرزهای موازی به شکل زیر است. اگر طول موج این موج در محیط (۲)، ۱/۵ برابر طول موج آن در محیط (۱) باشد، طول موج این موج در محیط (۳) چند برابر طول موج آن در محیط (۲) است؟ ($\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$)



۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۵}$

۴۵- در شکل زیر، نوسان‌ساز، تار را با بسامد معینی به ارتعاش درمی‌آورد و در طول تار سه شکم ایجاد می‌کند. جرم وزنه چند درصد و چگونه تغییر کند تا در طول تار ۶ شکم تشکیل شود؟ (در اثر تغییر جرم وزنه، چگالی خطی جرم طناب تغییر نمی‌کند.)

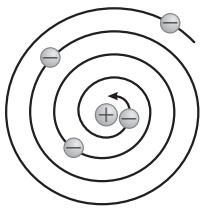


۱) ۲۵، کاهش یابد.
۲) ۲۵، افزایش یابد.
۳) ۷۵، کاهش یابد.
۴) ۷۵، افزایش یابد.

۴۶- در تاری که دو انتهای آن ثابت و طول آن ۶۰ cm است، موج ایستاده تشکیل شده است. اگر تعداد گره‌های ایجادشده در تار برابر ۳ و تندی انتشار موج عرضی در آن برابر ۱۸۰ m / s باشد، بسامد و طول موج صوتی گسیل‌شده از تار، به ترتیب از راست به چپ، چند هرتز و چند سانتی‌متر است؟ (تندی انتشار صوت در هوا ۳۴۵ m / s است.)

۱) ۶۰، ۳۰۰ ۲) ۱۱۵، ۳۰۰ ۳) ۶۰، ۴۵۰ ۴) ۱۱۵، ۴۵۰

۴۷- شکل زیر، مسیر حرکت الکترون به دور هسته را در مدل اتمی رادرفورد نشان می‌دهد. بنابر فیزیک کلاسیک، در این مسیر، انرژی الکترون و طول موجِ موج الکترومغناطیسی گسیلی آن، به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کند؟



۱) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
۳) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
۴) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۴۸- چند مورد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) همهٔ اجسام در هر دمایی که باشند، از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند.

ب) تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد، ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است.

پ) بنابر مدل تامسون، اتم همچون کره‌ای است که بار مثبت به طور همگن در سرتاسر آن گسترده شده است و الکترون‌ها در جاهای مختلف آن پراکنده شده‌اند.

ت) در پدیدهٔ فلوئورسانی، طول موج‌های گسیل‌یافته از جسم معمولاً برابرِ همان طول موج نور فرودی یا بزرگ‌تر از آن است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۹- طول موج فوتون A از طول موج فوتون B، ۶۰ nm بیشتر است. اگر اختلاف بسامد این دو فوتون ۲۵۰ THz باشد، انرژی فوتون A، چند برابر انرژی فوتون B است؟ $(c = ۳\times۱۰^{۸}\ m/s)$

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

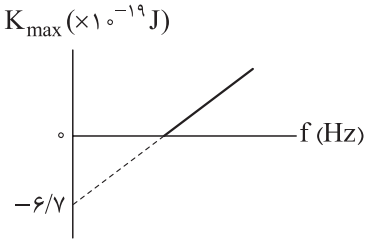
۵۰- یک لامپ تک‌رنگ در هر دقیقه $۱/۸\times۱۰^{۲۱}$ فوتون با طول موج ۴۹۶ nm تابش می‌کند. توان لامپ چند وات است؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm$ و $e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$

۱) ۹۶ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱/۲

۵۱- در آزمایش فوتوالکتریک، بر سطح فلزی با بسامد آستانهٔ f_0، نوری با بسامد f می‌تابد که $f > f_0$ است. اگر با ثابت‌ماندن بسامد نور تابیده، شدت آن افزایش یابد، تعداد فوتوالکترون‌ها و بیشینهٔ انرژی جنبشی آن‌ها، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کند؟

۱) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
۲) افزایش می‌یابد، تغییر نمی‌کند.
۳) تغییر نمی‌کند، افزایش می‌یابد.
۴) تغییر نمی‌کند، تغییر نمی‌کند.

۵۲- در یک آزمایش فوتوالکتریک، نمودار بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها برحسب بسامد نور فرودی بر سطح فلز به شکل زیر است. در حالتی که نوری با طول موج ۱۰۰ nm بر سطح این فلز می‌تابد، بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های گسیل‌شده، چند مگامتر بر ثانیه است؟ $(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C$ و $hc = ۱۲۰۰\ eV.nm$ ، $m_e = ۹\times۱۰^{-۳۱}\ kg)$



۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

۵۳- در آزمایش فوتوالکتریک، اگر بسامد نور تابیده بر سطح فلزی معین از f به ۲f برسد، بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیل‌شده از سطح فلز از K به ۳K می‌رسد. وقتی بر سطح این فلز، نوری با بسامد ۴f تابیده شود، بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیل‌شده از سطح فلز چند برابر K است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۵۴- طول موج دومین خط طیفی اتم هیدروژن در کدام رشته، ۲۸۸۰ nm است؟ ($R = ۱۰^{-۲}(nm)^{-۱}$)

۱) بالمر ($n' = ۲$)
۲) پاشن ($n' = ۳$)
۳) براکت ($n' = ۴$)
۴) پفوند ($n' = ۵$)

۵۵- در طیف اتم هیدروژن، کمینهٔ بسامد رشتهٔ بالمر ($n' = ۲$) چند تراهرتز از بیشینهٔ بسامد رشتهٔ پاشن ($n' = ۳$) بزرگ‌تر است؟ ($R = ۰/۰۱(nm)^{-۱}$ و $c = ۳\times۱۰^{۸}\ m/s$)

۱) ۲۵۰
۲) $\frac{۲۵۰}{۳}$
۳) ۵۰۰
۴) $\frac{۵۰۰}{۳}$

۵۶- الکترون در دومین حالت برانگیختهٔ اتم هیدروژن قرار دارد. بزرگ‌ترین بسامدی که این الکترون می‌تواند تابش کند، تقریباً چند تراهرتز است؟ ($E_R = ۱۳/۶\ eV$ و $h = ۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV.s$)

۱) ۳۷۷
۲) ۸۵۰
۳) ۲۵۵۰
۴) ۳۰۲۲

۵۷- شکل زیر، تعدادی از ترازهای انرژی اتم هیدروژن را نشان می‌دهد. کدام گذار بین دو تراز می‌تواند به گسیل فوتونی با طول موج ۱۰۲/۵ nm منجر شود؟ ($hc = ۱۲۴۰\ eV.nm$)

۰ eV
−۱/۵۱ eV
−۳/۴ eV
−۱۳/۶ eV

۱) سومین حالت برانگیخته به اولین حالت برانگیختهٔ اتم
۲) سومین حالت برانگیخته به حالت پایهٔ اتم
۳) دومین حالت برانگیخته به اولین حالت برانگیختهٔ اتم
۴) دومین حالت برانگیخته به حالت پایهٔ اتم

۵۸- در اتم هیدروژن، الکترونی در یک مدار مانا با شعاع ۱/۲۵ nm قرار دارد. انرژی الکترون در این مدار چند ریدبرگ است؟ ($a_{۰} = ۵\times۱۰^{-۱۱}m$ و $E_R = ۱۳/۶\ eV$)

۱) −۰/۵۴۴
۲) −۰/۰۴
۳) ۰/۵۴۴
۴) ۰/۰۴

۵۹- در طیف اتم هیدروژن، بلندترین طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش چند میکرومتر است؟ ($R = \frac{۱}{۱۰۰}(nm)^{-۱}$)

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۹۸}{۲۲۵}$
۳) $\frac{۴۹}{۴۸۰}$
۴) $\frac{۱۹}{۲۴۰}$

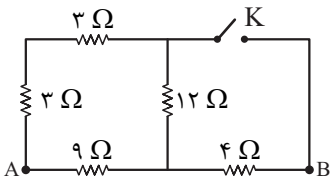
۶۰- الکترون در اتم هیدروژن در تراز $n = ۵$ قرار دارد. فرض کنید فقط گذارهای $\Delta n = ۱$ مجاز باشند. اگر بلندترین و کوتاه‌ترین طول موجی که این الکترون می‌تواند گسیل کند، به ترتیب برابر $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشد، $\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱۷۵}{۸۱}$
۲) $\frac{۶۷۵}{۱۱}$
۳) $\frac{۱۰۰}{۳}$
۴) ۱۰

۶۱- کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ یک محیط لیزری درست است؟

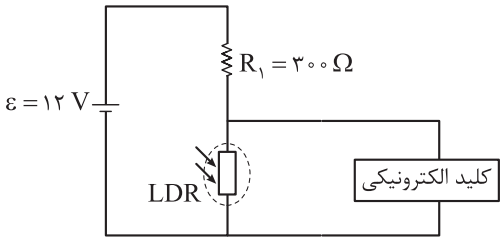
۱) برای گسیل القایی، انرژی فوتون ورودی باید از اختلاف انرژی‌های دو تراز مبدأ و مقصدِ الکترون بیشتر باشد.
۲) در فرایند گسیل القایی، دو فوتون خروجی در جهت‌های کاتوره‌ای گسیل می‌شوند.
۳) وارونی جمعیت الکترون‌ها مربوط به وضعیتی است که تعداد الکترون‌ها در تراز پایدار نسبت به تراز بالاتر بسیار بیشتر است.
۴) در گسیل القایی، انرژی لازم برای برانگیخته‌کردن الکترون به ترازهای انرژی بالاتر، از روش‌هایی مانند درخش‌های شدید نور معمولی استفاده می‌شود.

۶۲- در مدار شکل زیر، با وصل‌کردن کلید K مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B چند برابر می‌شود؟



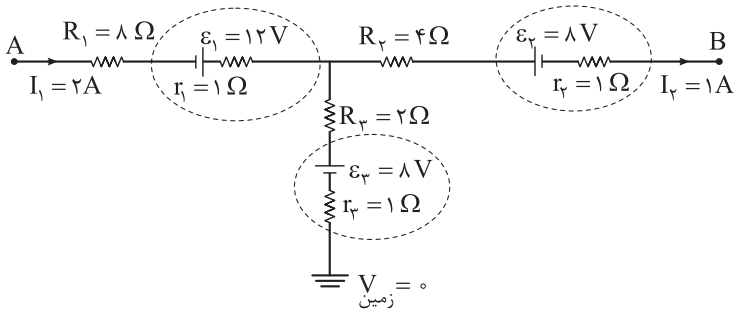
۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

۶۳- در مدار زیر، ولتاژ مورد نیاز برای فعال‌شدن کلید الکترونیکی، ۴ V است. هم‌زمان با تاریک‌شدن هوا، مقاومت LDR حداقل چند اهم باشد تا کلید الکترونیکی فعال شود؟ (مقاومت کلید الکترونیکی آن‌قدر زیاد است که جریان قابل ملاحظه‌ای از آن عبور نمی‌کند.)



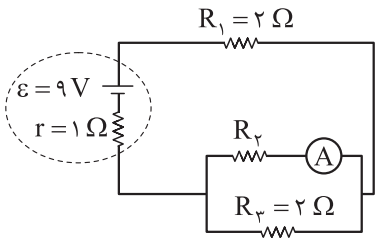
۱) ۷۵
۲) ۱۰۰
۳) ۱۵۰
۴) ۲۰۰

۶۴- شکل زیر، قسمتی از یک مدار الکتریکی است. در این مدار، پتانسیل الکتریکی نقاط A و B، به ترتیب از راست به چپ، چند ولت است؟



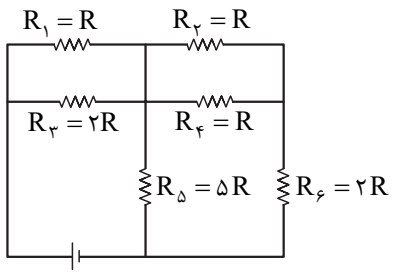
۱) −۲، ۱۷
۲) −۸، ۱۷
۳) −۲، ۱۸
۴) −۸، ۱۸

۶۵- در مدار شکل زیر، اگر آمپرسنج آرمانی ۰/۵ A را نشان دهد، مقاومت $R_۲$ برابر چند اُهم است؟



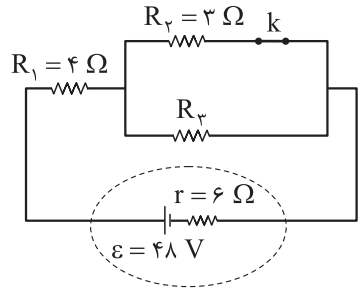
۱) ۳
۲) ۶
۳) ۲
۴) ۸

۶۶- در مدار شکل زیر، توان مصرفی مقاومت $R_۱$ چند برابر توان مصرفی مقاومت $R_۶$ است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) ۴

۶۷- در مدار شکل زیر، کلید k، بسته و توان خروجی باتری، بیشینه است. اگر کلید k باز شود، توان خروجی باتری به چند وات می‌رسد؟



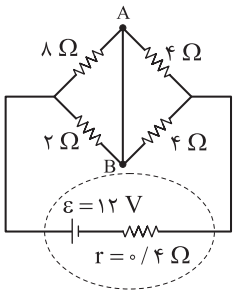
۱) ۶۰

۲) ۹۰

۳) ۱۰۰

۴) ۱۲۰

۶۸- در مدار شکل زیر، جریان الکتریکی عبوری از سیم AB چند آمپر و در چه جهتی است؟



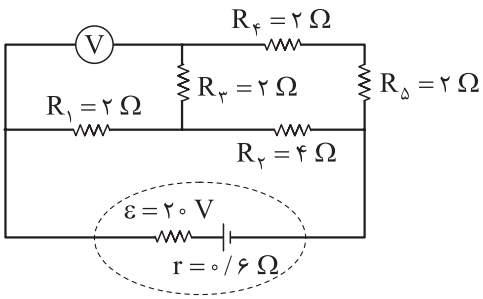
۱) ۰/۶، از A به B

۲) ۰/۶، از B به A

۳) ۰/۹، از A به B

۴) ۰/۹، از B به A

۶۹- در مدار شکل زیر، ولت‌سنج آرمانی چند ولت را نشان می‌دهد؟



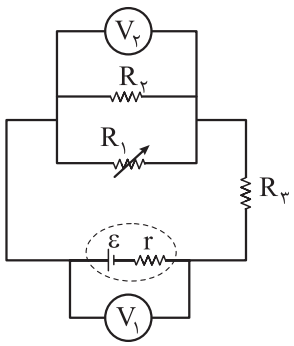
۱) ۶/۴

۲) ۱۲/۸

۳) ۱۱/۲

۴) ۱۰/۴

۷۰- در مدار شکل زیر، با کاهش مقاومت رئوستا، مقداری که ولت‌سنج‌های آرمانی V_1 و V_2 نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کند؟



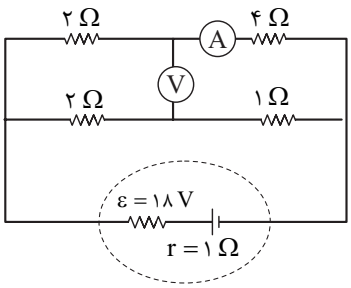
۱) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۲) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۴) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

۷۱- در مدار شکل زیر، اگر جای آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی عوض شود، مقداری که هر یک نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چند آمپر و چند ولت تغییر می‌کنند؟



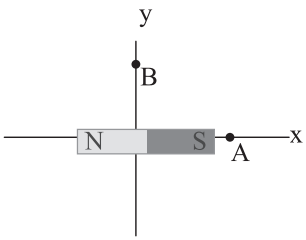
۱) ۱، ۲

۲) ۱، ۴

۳) ۲، ۲

۴) ۲، ۴

۷۲- در شکل زیر، یک آهنربای میله‌ای در صفحه و در راستای محور x قرار دارد. میدان مغناطیسی حاصل از این آهنربا در نقاط A و B، به ترتیب از راست به چپ، در چه جهتی است؟



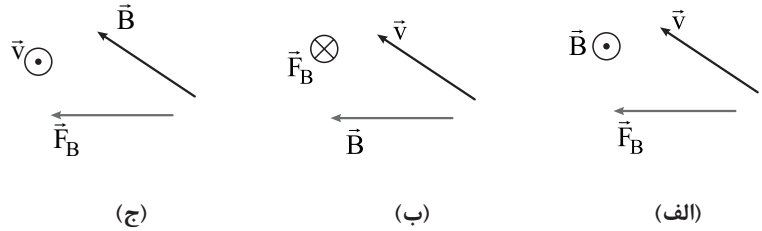
۱) در جهت محور x، در جهت محور x

۲) در جهت محور x، در جهت محور y

۳) در خلاف جهت محور x، در جهت محور x

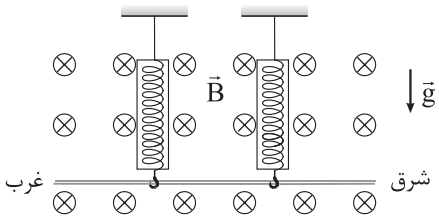
۴) در خلاف جهت محور x، در جهت محور y

۷۳- در شکل‌های زیر، $\vec{v}$ سرعت یک ذره با بار الکتریکی منفی، $\vec{B}$ میدان مغناطیسی یکنواخت و $\vec{F}_B$ نیروی مغناطیسی وارد بر آن ذره است. کدام شکل‌ها از نظر فیزیکی قابل قبول است؟ (بردارها، یا در صفحه یا عمود بر آن هستند.)



۱) فقط «الف» ۲) فقط «ب» ۳) «ب» و «ج» ۴) هیچ‌کدام

۷۴- در شکل زیر، در میدان مغناطیسی یکنواختی که جهت آن به سمت شمال است، سیمی در راستای افقی شرق ـ غرب قرار دارد. اگر چگالی سیم $8\ g/cm^3$، سطح مقطع آن $5\ mm^2$ و اندازهٔ میدان مغناطیسی $400\ G$ باشد، از سیم، جریان چند آمپر و در چه جهتی عبور کند تا مقداری که نیروسنج‌ها نشان می‌دهند برابر صفر باشد؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۱، شرق به غرب

۲) ۱، غرب به شرق

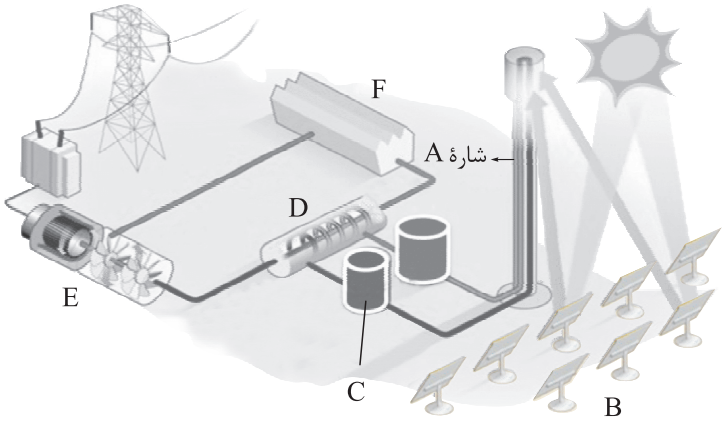
۳) ۱۰، شرق به غرب

۴) ۱۰، غرب به شرق

۷۵- در فضایی که در آن میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = (400\ N/C)\vec{i}$ و میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = (300\ G)\vec{j}$ وجود دارد، ذره‌ای با بار الکتریکی $8\ \mu C$ با سرعت $\vec{v} = (10^4\ m/s)\vec{i}$ پرتاب می‌شود. اندازهٔ نیروی خالص وارد بر ذره، بلافاصله پس از پرتاب چند نیوتون است؟ (از سایر نیروهای وارد بر ذره چشم‌پوشی کنید.)

۱) 4×10^{-3} ۲) 4×10^{-4} ۳) 8×10^{-3} ۴) 8×10^{-4}

۷۶- با توجه به شکل زیر که نمایی از فناوری پیشرفته برای تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟



۱) B و C به ترتیب آینه‌ها و منبع ذخیرهٔ انرژی الکتریکی را نشان می‌دهند.

۲) گسترهٔ دمایی مایع‌بودن شارهٔ A از اتیلن گلیکول بیشتر و از فلز مس کم‌تر است.

۳) علامت ΔH در تغییر حالت آب در قسمت F با علامت ΔH در انحلال آمونیوم نیترات در آب یکسان است.

۴) D شاره‌ای مولکولی را نشان می‌دهد که علامت بار جزئی اتم مرکزی در مولکول آن با علامت بار جزئی اتم مرکزی در مولکول SCl_2، یکسان است.

۷۷- کدام مورد نادرست است؟

۱) در هنگام تشکیل سدیم کلرید از عنصرهای سازنده، شعاع فلز و نافلز به دلیل تغییر شمار زیرلایه‌های الکترونی اشغال‌شده به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد.

۲) اگر آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب یونی Al_2O_3، برابر ۱۵۹۱۶ kJ باشد، آنتالپی واکنش: $Al_2O_3(g) \rightarrow 2Al^{3+}(g) + 3O^{2-}(g)$ می‌تواند برابر ۱۵۳۷۰ kJ باشد.

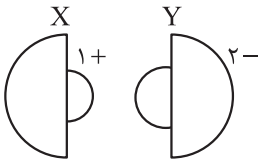
۳) فرمول شیمیایی هر ترکیب یونی، ساده‌ترین نسبت کاتیون‌ها و آنیون‌های سازندهٔ آن را نشان می‌دهد.

۴) آرایش یون‌ها در سرتاسر شبکهٔ بلوری نمک خوراکی، از یک الگوی تکراری پیروی می‌کند.

۷۸- در مقایسه با پتاسیم فلوئورید، شعاع کاتیون سازندهٔ کدام ترکیب یونی کوچک‌تر، اما نسبت عدد کوئوردیناسیون آنیون به کاتیون در آن بیشتر است؟

۱) روبیدیم سولفید
۲) سدیم کلرید
۳) کلسیم فسفید
۴) آلومینیم اکسید

۷۹- با توجه به شکل مقابل که مقایسهٔ شعاع اتمی و یون‌های پایدار دو عنصر از دورهٔ سوم جدول تناوبی را نشان می‌دهد، کدام مورد نادرست است؟



۱) شمار الکترون‌ها با $l = 1$ در اتم Y، ۴ واحد بیشتر از اتم X است.

۲) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور X_2Y از K_2S بیشتر است.

۳) مقایسهٔ شعاع اتمی عنصرهای X و Y، برعکس مقایسهٔ چگالی بار یون‌های پایدار آن‌ها است.

۴) نسبت بار به شعاع در یون پایدار Y از این نسبت در یون پایدار اکسیژن، بیشتر است.

۸۰- آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور چهار ترکیب یونی زیر برحسب $kJ.mol^{-1}$ برابر ۹۲۶، ۲۴۸۸، ۲۹۶۵ و ۳۸۰۰ می‌باشد. اگر ۲۵ گرم از مخلوط سدیم فلوئورید و منیزیم اکسید با جذب ۸۴۳ کیلوژول گرما به یون‌های گازی خود تبدیل شوند، چند درصد از جرم این مخلوط را منیزیم اکسید تشکیل داده است؟ $(O = ۱۶ , F = ۱۹ , Na = ۲۳ , Mg = ۲۴ : g.mol^{-1})$

سدیم اکسید	منیزیم فلوئورید	منیزیم اکسید	سدیم فلوئورید	ماده
؟	؟	؟	؟	آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب یونی

۱) ۱۶ ۲) ۳۴ ۳) ۶۶ ۴) ۸۴

۸۱- با توجه به رفتار مواد A، X و D در برابر تابش نور سفید، این مواد به ترتیب کدام می‌توانند باشند؟

ماده	رفتار
A	کل نور تابیده‌شده را جذب می‌کند.
X	طول موج‌های حدود ۶۲۰ تا ۷۰۰ نانومتر را بازتاب می‌کند.
D	کل نور تابیده‌شده را بازتاب می‌کند.

۱) دوده ـ آهن (III) اکسید ـ تیتانیم (IV) اکسید
۲) دوده ـ محلول پتاسیم پرمنگنات ـ تیتانیم (IV) اکسید
۳) تیتانیم (IV) اکسید ـ آهن (III) اکسید ـ دوده
۴) تیتانیم (IV) اکسید ـ محلول پتاسیم پرمنگنات ـ دوده

۸۲- کدام مورد درست است؟

۱) توصیف «شکننده‌بودن در حالت جامد و رسانای جریان برق بودن در حالت مذاب» را می‌توان به دو نوع جامد بلوری نسبت داد.
۲) در گذشته، انسان‌ها رنگدانه‌های طبیعی را از منابع گیاهی، جانوری و برخی کانی‌ها تهیه می‌کردند.
۳) تیتانیم برخلاف فولاد، مقاومت بالایی در برابر سایش دارد.
۴) نیتینول نوعی آلیاژ هوشمند است که از یک فلز دستهٔ p و یک فلز دستهٔ d ساخته شده است.

۸۳- به محلولی دارای ۹۱۴ گرم وانادیم (V) کلرید، چند گرم فلز روی باید اضافه شود تا با انجام واکنش کامل، محلول بنفش‌رنگ حاصل شود؟ $(Cl = ۳۵/۵ , V = ۵۱ , Zn = ۶۵ : g.mol^{-1})$

$VCl_۵ + Zn \rightarrow ZnCl_۲ + VCl_n$

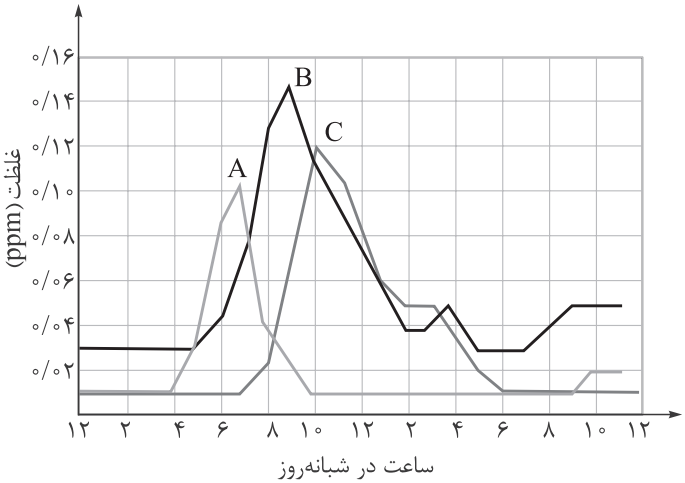
۱) ۳۹۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۳۶۰

۸۴- کدام موارد زیر در ارتباط با تیتانیم درست است؟

الف) در ترکیبی از آن که به عنوان رنگدانهٔ سفید کاربرد دارد، عدد اکسایش فلز با عدد اکسایش وانادیم در $VO^{۲+}$ برابر است.
ب) $۱۰۰ cm^۳$ تیتانیم خالص در مقایسه با $۱۰۰ cm^۳$ فولاد، جرم بیشتری دارد.
پ) مجموع عددهای کوانتومی اصلی و فرعی برای الکترون‌های ظرفیت اتم آن، برابر ۱۳ است.
ت) برخی ویژگی‌های فیزیکی مانند چکش‌خواری را می‌توان با الگوی دریای الکترونی برای اکسید آن توجیه کرد.
ث) نقطهٔ ذوب آن از فولاد بالاتر است که این موضوع یکی از دلایل استفاده از تیتانیم در موتور جت است.

۱) الف ـ ت ـ ث ۲) ب ـ ت ـ ث ۳) ب ـ پ ۴) الف ـ ث

۸۵- با توجه به نمودار زیر که غلظت سه آلایندهٔ NO، O_3 و NO_2 را در نمونه‌ای از هوای یک شهر بزرگ نشان می‌دهد، کدام مورد نادرست است؟



۱) B به رنگ قهوه‌ای روشن دیده می‌شود.

۲) A فراوردهٔ دیگر واکنش تولید اوزون تروپوسفری است.

۳) در ساعت ۱۰ صبح، غلظت گاز اوزون در هوا از گاز نیتروژن دی‌اکسید، بیشتر است.

۴) در بازهٔ زمانی ۶ صبح تا ۱۲ ظهر، سرعت متوسط تغییر غلظت گاز نیتروژن دی‌اکسید، $\frac{۱}{۳}$ برابر سرعت متوسط تغییر غلظت گاز نیتروژن مونوکسید است.

۸۶- کدام موارد زیر نادرست است؟

الف) آمونیاک و اوره، قبل از تولید ویتامین A در جهان، به طور صنعتی تولید شده‌اند.

ب) همهٔ گازهای خروجی از اگزوز خودروهای بنزینی، از سوختن بنزین در موتور خودرو ایجاد شده‌اند.

پ) افزایش دما همانند کاتالیزگر، باعث کاهش انرژی فعال‌سازی واکنش و در نتیجه افزایش سرعت آن می‌شوند.

ت) مقدار CO خروجی از اگزوز خودروها به ازای طی یک کیلومتر از مقدار NO بیشتر است.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) پ ـ ت

۸۷- کدام مورد جزء کاربردهای طیف‌سنجی فروسرخ نیست؟

۱) تشخیص اتانول و دی‌متیل اتر از یکدیگر

۲) شناسایی اکسیدهای نیتروژن در هواکره

۳) شناسایی برخی مولکول‌ها در فضای بین ستاره‌ای

۴) ام.آر.آی. (MRI) در علم پزشکی

۸۸- با توجه به داده‌های جدول زیر، اگر روزانه ۴۰ هزار خودرو در شهری رفت‌وآمد کنند و هر خودرو به طور میانگین ۳۰ کیلومتر مسافت طی کند، با نصب مبدل کاتالیستی در اگزوز خودروها، روزانه از ورود چند مول گاز NO به هواکره جلوگیری می‌شود؟ $(N = ۱۴, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

NO	فرمول شیمیایی آلاینده	
۱/۰۴	در نبود مبدل	مقدار آلاینده $(g.km^{-۱})$
۰/۰۴	در مجاورت مبدل	

۱) $۱/۲\times۱۰^{۶}$ ۲) $۴/۸\times۱۰^{۴}$ ۳) ۴×۱۰^{۴} ۴) $۱/۶\times۱۰^{۳}$

۸۹- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) با کشیدن نوک کبریت روی سطح زبر قوطی کبریت، انرژی فعال‌سازی واکنش تأمین می‌شود.

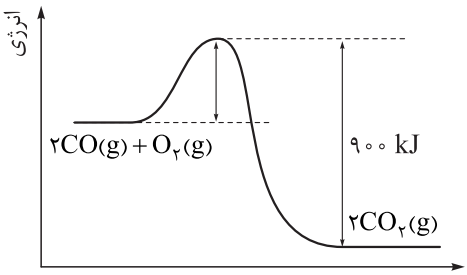
۲) در شرایط یکسان، سرعت یک واکنش گرماگیر، کم‌تر از سرعت یک واکنش گرماده است.

۳) فسفر سفید همانند گاز هیدروژن، در هوا و در دمای اتاق می‌سوزد.

۴) برخی واکنش‌ها از جمله سوختن کامل گاز متان، نیاز به انرژی فعال‌سازی ندارند.

۹۰- با توجه به جدول و نمودار زیر، انرژی فعال‌سازی واکنش داده‌شده چند کیلوژول است؟

پیوند	آنتالپی ($kJ.mol^{-1}$)
$C \equiv O$	۱۰۷۲
$O = O$	۴۹۵
$C = O$	۸۰۰



۱) ۳۳۹ ۲) ۳۹۳ ۳) ۵۱۶ ۴) ۵۶۱

۹۱- کدام مورد دربارهٔ واکنش: $2H_2O(l) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$ در دمای اتاق، نادرست است؟

۱) بدون حضور کاتالیزگر، این واکنش در دمای اتاق انجام نمی‌شود.

۲) آنتالپی واکنش در حضور جرقه یا پودر روی یکسان است.

۳) به دلیل سطح تماس بیشتر پودر روی، سرعت انجام آن در حضور پودر روی نسبت به توری پلاتینی بیشتر است.

۴) سرعت انجام آن با ایجاد جرقه در مخلوط و در حضور پودر روی را به ترتیب می‌توان «انفجاری» و «سریع» در نظر گرفت.

۹۲- انرژی فعال‌سازی واکنش: $2A(g) \rightarrow D_2(g) + E_2(g)$، برابر ۲۴۸ kJ و آنتالپی آن برابر ۸۸+ kJ است. اگر در حضور کاتالیزگر، انرژی فعال‌سازی این واکنش ۲۵٪ کاهش یابد، تفاوت سطح انرژی فراورده‌ها و سدّ انرژی (قلهٔ نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش)، چند درصد تغییر خواهد کرد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۸ / ۷۵

۳) ۶۳ / ۲۵ ۴) ۷۵

۹۳- کدام مورد دربارهٔ مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی درست است؟

۱) در آن‌ها گازهای CO و NO به ترتیب به گازهای CO_2 و NO_2 تبدیل می‌شوند.

۲) برای مدت طولانی کار نمی‌کنند و هرساله باید آن‌ها را تعویض کرد.

۳) در برخی از آن‌ها، کاتالیزگرها به شکل مش‌های (دانه‌های) ریز هستند و سطح آن‌ها با سرامیک پوشیده شده است.

۴) کاتالیزگرهای مورد استفاده در این مبدل‌ها، همگی جزء فلزهای واسطه هستند.

۹۴- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل ذره‌های سازندهٔ یک ماده در دما و فشار ثابت، هم‌ارز با آنتالپی آن است.

ب) برای پیوندهای موجود در مولکول‌های دواتمی، به کار بردن میانگین آنتالپی پیوند مناسب‌تر است.

پ) با افزایش جرم مولی، ارزش سوختی الکل‌های یک‌عاملی افزایش می‌یابد.

ت) در واکنش اکسایش گلوکز در بدن، گرمای مبادله‌شده عمدتاً ناشی از تفاوت انرژی گرمایی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها است.

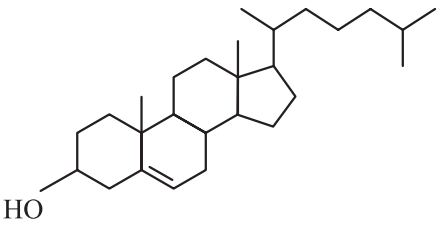
۱) الف ـ پ ۲) ب ـ ت ۳) الف ـ ت ۴) ب ـ پ

۹۵- مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش زیر کدام است و در این واکنش، به ازای مصرف ۱/۶ گرم مادهٔ A، چند گرم مادهٔ B تولید می‌شود؟ (بازده واکنش را ۸۰ درصد در نظر بگیرید؛ $H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1}$)

آب + ساده‌ترین عضو خانوادهٔ آلدهیدها (B) → گاز اکسیژن + ساده‌ترین عضو خانوادهٔ الکل‌ها (A)

۱) ۷ ـ ۱/۵ ۲) ۷ ـ ۱/۲ ۳) ۱۱ ـ ۱/۲ ۴) ۱۱ ـ ۱/۵

۹۶- با توجه به ساختار کلسترول که به صورت زیر می‌باشد، کدام مورد نادرست است؟ ($Br = 80\ g.mol^{-1}$)



۱) شمار مول‌های اکسیژن لازم برای سوختن کامل یک مول از آن برابر ۳۸ است.

۲) ۰/۲۵ مول از آن قادر است با ۲۰ گرم بُرم به طور کامل واکنش داده و آن را بی‌رنگ کند.

۳) شمار پیوندهای اشتراکی یگانه در ساختار آن، ۳۸ برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی است.

۴) یک الکل سیرنشده است که مقدار اضافی آن در دیوارهٔ رگ‌ها رسوب می‌کند.

۹۷- کدام مورد نادرست است؟

۱) ΔH فرایندهای انحلال را می‌توان به کمک گرماسنج لیوانی محاسبه نمود.

۲) آنتالپی بسیاری از واکنش‌ها را می‌توان به کمک قانون هس محاسبه کرد.

۳) واکنش تشکیل آمونیاک از هیدرازین، گرماده بوده و محاسبهٔ گرمای آن به روش تجربی امکان‌پذیر نیست.

۴) در تبدیل کربن مونوکسید و نیتروژن مونوکسید به فراورده‌هایی با آلایندگی کم‌تر، گرما آزاد می‌شود.

۹۸- از هیدرازین در سوخت موشک استفاده می‌شود و یکی از روش‌های صنعتی برای تولید آن، واکنش: $2NH_3(g) + Cl_2(g) \rightarrow N_2H_4(g) + 2HCl(g)$ است. اگر در این واکنش، ۷۵ کیلوژول گرما مصرف شود، چند گرم هیدرازین تولید می‌شود؟ ($H=1, N=14 : g.mol^{-1}$)

$$\frac{1}{2}N_2(g) + \frac{3}{2}H_2(g) \rightarrow NH_3(g) \ , \Delta H = -46/1\ kJ$$

$$N_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow N_2H_4(g) \ , \Delta H = 95/4\ kJ$$

$$\frac{1}{2}H_2(g) + \frac{1}{2}Cl_2(g) \rightarrow HCl(g) \ , \Delta H = -92/3\ kJ$$

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸

۳) ۴۰۰ ۴) ۸۰۰

۹۹- کدام مطلب دربارهٔ بنزوئیک اسید نادرست است؟

۱) اگر مقدار کافی از آن را با محلول پتاسیم پرمنگنات مخلوط کرده و حرارت دهیم، محلول بی‌رنگ می‌شود.

۲) در تمشک و توت‌فرنگی وجود دارد و به عنوان رنگ‌دهنده و طعم‌دهنده به کنسرو مواد غذایی اضافه می‌شود.

۳) شمار اتم‌های کربن آن با بنزآلدهید و شمار اتم‌های هیدروژن آن با ساده‌ترین سیکلوآلکان برابر است.

۴) یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک است که شمار پیوندهای دوگانه در ساختار آن با شمار پیوندهای دوگانه در ساختار نفتالن، یک واحد اختلاف دارد.

۱۰۰- در یک راکتور، واکنشی بین دو مادهٔ مجهول X و Y به صورت: «فراورده‌ها $\rightarrow xX + yY$» در جریان است. اگر در یک بازهٔ زمانی معین، سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ X، برابر با نصف سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ Y و جرم مولی مادهٔ X، دو برابر جرم مولی مادهٔ Y باشد، کدام مطلب درست است؟

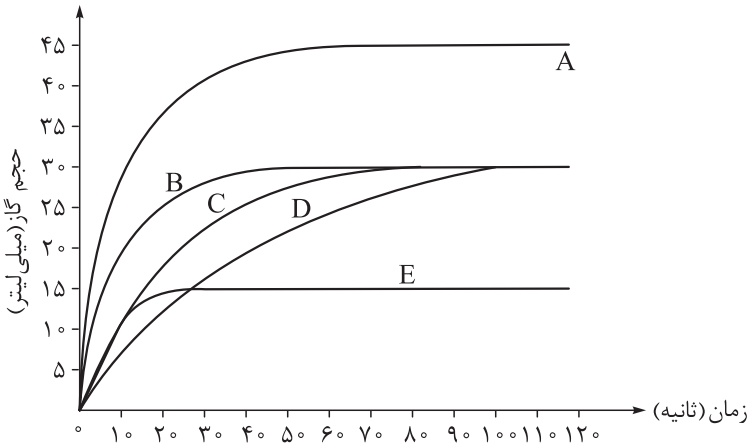
۱) در واحد زمان، تغییر شمار مول‌های X بیشتر از تغییر شمار مول‌های Y است.

۲) ضریب استوکیومتری X در معادلهٔ واکنش، دو برابر ضریب استوکیومتری Y است.

۳) سرعت واکنش برحسب مول بر لیتر بر زمان، برابر با سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ X تقسیم بر جرم مولی آن است.

۴) سرعت متوسط تغییر شمار مول‌های Y، چهار برابر سرعت متوسط تغییر شمار مول‌های X است.

۱۰۱- با توجه به نمودار زیر که مربوط به واکنش نوار منیزیم با هیدروکلریک اسید و تولید گاز هیدروژن و منیزیم کلرید می‌باشد، کدام مورد نادرست است؟



۱) اگر نمودار B مربوط به واکنش منیزیم با ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار HCl باشد، نمودار C می‌تواند مربوط به واکنش همان مقدار منیزیم با ۳۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار HCl باشد.

۲) اگر نمودار D مربوط به واکنش یک قطعه منیزیم با دو لیتر محلول ۱ مولار HCl باشد، نمودار B می‌تواند مربوط به واکنش همان مقدار پودر منیزیم با دو لیتر محلول ۱ مولار HCl باشد.

۳) نمودارهای B و D به ترتیب می‌توانند مربوط به گرم‌کردن و استفاده از بازدارنده در واکنش C باشند.

۴) در واکنش‌های مربوط به نمودارهای E و A در دمای یکسان، نسبت میزان مول واکنش‌دهندهٔ مصرفی در آن‌ها، می‌تواند ۱ به ۳ باشد.

۱۰۲- در یک ظرف سربسته واکنش زیر انجام می‌شود: (معادلهٔ واکنش موازنه شود؛ $C = 12 , O = 16 : g.mol^{-1}$)

$$CO_2(g) + H_2O(l) \rightarrow CH_3OH(aq) + O_2(g)$$

اگر در بازهٔ زمانی ۰ تا ۴ ساعت، سرعت متوسط مصرف کربن دی‌اکسید برابر با ۰/۱ مول بر ساعت باشد، کدام مطلب درست است؟

۱) پس از ۴ ساعت، ۰/۲ مول متانول تولید می‌شود.

۲) در پایان ۴ ساعت، شمار مول‌های O_2 تولیدشده برابر با ۱/۲ مول است.

۳) سرعت متوسط تولید گاز O_2 در این بازهٔ زمانی، برابر با $2/5 \times 10^{-3}$ مول است.

۴) اگر شمار مول‌های اولیهٔ گاز CO_2 برابر ۱۰ باشد، پس از ۴ ساعت، جرم آن به ۴۴۲/۲ گرم می‌رسد.

۱۰۳- درستی یا نادرستی موارد زیر به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه آمده است؟

الف) واردکردن الیاف آهن داغ در یک ارلن پرشده از گاز اکسیژن به جای هوای آزاد، سبب افزایش سرعت واکنش سوختن آن می‌شود.

ب) ΔH واکنش تهیهٔ هیدروژن پراکسید از واکنش مستقیم میان گازهای هیدروژن و اکسیژن را نمی‌توان به روش تجربی تعیین کرد.

پ) در یک واکنش شیمیایی کامل، غلظت تمام واکنش‌دهنده‌ها در پایان واکنش به صفر می‌رسد.

ت) سرعت متوسط تولید یا مصرف هیچ دو ماده‌ای در یک واکنش شیمیایی نمی‌تواند با هم برابر باشد.

۱) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۲) درست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۳) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۴) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست

۱۰۴- جدول زیر قسمتی از اندازه‌گیری حجم گاز آزادشده در شرایط استاندارد از واکنش میان کلسیم کربنات و هیدروکلریک اسید را نشان می‌دهد. براساس این جدول، در ۳۰ ثانیهٔ اول، سرعت واکنش چند مول بر دقیقه بوده و جرم مخلوط اولیه به تقریب چند گرم است؟ (جرم مخلوط واکنش در ثانیهٔ ۳۰ برابر ۵۵/۸ گرم است؛ $C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

زمان	۶ ثانیهٔ اول	۶ ثانیهٔ دوم	۶ ثانیهٔ سوم	۶ ثانیهٔ چهارم	۶ ثانیهٔ پنجم
حجم گاز تولیدشده (mL)	۱۷۹/۲	۱۳۴/۴	۱۰۰/۸	۸۹/۶	۸۰/۶۴

$$CaCO_3(s) + 2HCl(aq) \rightarrow CaCl_2(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

۱) $2/61 \times 10^{-2}$ ـ ۵۶/۹۵
۲) $5/22 \times 10^{-2}$ ـ ۵۶/۸۵
۳) $2/61 \times 10^{-2}$ ـ ۵۶/۸۵
۴) $5/22 \times 10^{-2}$ ـ ۵۶/۹۵

۱۰۵- کدام مورد درست است؟

۱) چهرهٔ پنهان غذا نشان می‌دهد که سالانه حدود ۳۰٪ از غذایی که در جهان فراهم می‌شود، به مصرف نمی‌رسد و به زباله تبدیل می‌شود و یا از بین می‌رود.

۲) سهم تولید گاز گلخانه‌ای CO_2 در ردپای غذا به مراتب بیشتر از سوختن سوخت‌ها در خودروها، کارخانه‌ها و ... است.

۳) واکنش: $H_2(g) + I_2(s) \rightarrow 2HI(g)$، یک واکنش گرماده بوده و در دمای اتاق انجام نمی‌شود.

۴) از فرایند انحلال آمونیوم نیترات در آب، در بسته‌هایی که برای گرم‌کردن محل آسیب‌دیدگی مناسب است، استفاده می‌شود.

۱ تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x|۳ - x|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

نمودار رسم کن.

درس Box

نقطهٔ بحرانی

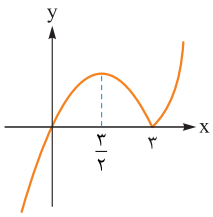
فرض کنید $c \in D_f$ باشد. $x = c$ طول نقطهٔ بحرانی تابع f محسوب می‌شود، اگر تابع f در این نقطه مشتق نداشته باشد، یا مشتق تابع f در این نقطه برابر صفر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا به کمک ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق که برابر ۳ است، تابع f را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-۳) & ; \quad x < ۳ \\ x(x-۳) & ; \quad x \geq ۳ \end{cases}$$

و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:



گام دوم: همان‌طور که از نمودار بالا مشخص است، تابع f در $x = ۳$ مشتق‌ناپذیر (نقطهٔ گوشه‌ای) است و در $x = \frac{۳}{۲}$ هم مشتق آن برابر صفر است؛ بنابراین تابع ۲ نقطهٔ بحرانی دارد.

۲ اگر $f(x)=\begin{cases}-۱ & ; \quad x<۰\\ ۰ & ; \quad x=۰\\ ۱ & ; \quad x>۰\end{cases}$ و $g(x)=[|x|]$ باشد، تابع gof در بازهٔ $(-۱۰,۷)$ چند نقطهٔ بحرانی به طول صحیح دارد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

تابع پله‌ای است.

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته تمام نقاط دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $g(x)=[f(x)]$، نقاط بحرانی آن هستند.

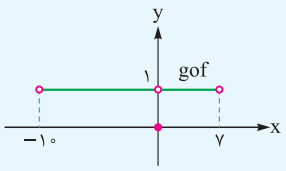
پاسخ خیلی تشریحی طبق نکتهٔ بالا تمام نقاط بازهٔ $(-۱۰,۷)$ نقاط بحرانی تابع gof هستند. این بازه شامل $۷-(-۱۰)-۱=۱۶$ عدد صحیح است.

یه‌جور دیگه ضابطهٔ تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=[|f(x)|] \Rightarrow (gof)(x)=\begin{cases}۰ & ; \quad x=۰\\ ۱ & ; \quad x\neq ۰\end{cases}$$

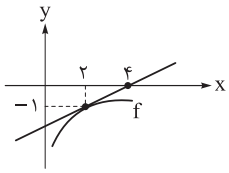
$$\Rightarrow (gof)'(x)=۰ \quad ; \quad x\neq ۰$$

تابع gof در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست، بنابراین تمام نقاط بازهٔ $(-۱۰,۷)$ بحرانی است.



۳ نمودار تابع f و خط مماس بر آن در $x=۲$ در شکل زیر رسم شده است. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع g با ضابطهٔ $g(x)=xf(x)$ در $x=۲$ کدام است؟

همان مشتق است.



۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) -۱
۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از شکل پیداست که $f(۲)=-۱$ است. خط مماس از نقاط $(۴,۰)$ و $(۲,-۱)$ می‌گذرد، پس شیب آن برابر $\frac{۰-(-۱)}{۴-۲}=\frac{۱}{۲}$ است، این یعنی $f'(۲)=\frac{۱}{۲}$ است.

گام دوم: حالا از تابع g مشتق می‌گیریم:

$$g'(x)=f(x)+xf'(x)$$

و سپس $x=۲$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$g'(۲)=f(۲)+۲f'(۲)$$

با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده برای $f(۲)$ و $f'(۲)$ در گام اول، داریم:

$$g'(۲)=-۱+۲(\frac{۱}{۲})=۰$$

۴ توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x^{۵}-۱}{x^{۵}}$ و $g(x)=\sqrt[۵]{x+۱}$ مفروض‌اند. حاصل $\frac{۱}{f'(g(x))\times g'(x)}$ کدام است؟

این همان مشتق fog است.

۱) $(x+۱)^{۲}$ ۲) $x+۱$ ۳) $\frac{۱}{(x+۱)^{۲}}$ ۴) $\frac{۱}{x+۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

مشتق تابع مرکب

$$f(g(x)) \xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x)f'((g(x))$$

نکته ضابطهٔ تابع مشتق تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f'(x)=\frac{ad-bc}{(ax+d)^{۲}}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: همان‌طور که در تعبیر نیز می‌بینید، مخرج کسر خواستهٔ سؤال، طبق درس‌باکس، همان مشتق تابع fog است؛ بنابراین لازم است که در ابتدا ضابطهٔ تابع آن را به دست آوریم:

$$h(x)=f(g(x))=\frac{(g(x))^{۵}-۱}{(g(x))^{۵}}$$

$$\Rightarrow h(x)=\frac{(x+۱)-۱}{x+۱}=\frac{x}{x+۱}$$

گام دوم: حالا کافی است از تابع بالا مشتق بگیریم:

$$\xrightarrow{\text{نکته}} h'(x)=\frac{۱}{(x+۱)^{۲}}$$

خواستهٔ سؤال معکوس ضابطهٔ تابع بالا و برابر $(x+۱)^{۲}$ است:

$$\frac{۱}{f'(g(x))\times g'(x)}=\frac{۱}{h'(x)}=(x+۱)^{۲}$$

۵ مجموع طول نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

جبر توابع و مشتق‌گیری

$$(f\pm g)'=f'\pm g'$$

$$(f\times g)'=f'g+g'f$$

$$(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-g'f}{g^۲}$$

مشتق تابع $f(x)=x^n$ که $n\in\mathbb{Q}$، تابع $f'(x)=nx^{n-۱}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ضابطهٔ f' را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{(x^۲+۱)-۲x(x)}{(x^۲+۱)^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$$

گام دوم: تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است؛ بنابراین طول نقاط بحرانی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند؛ پس داریم:

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} ۱-x^۲=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

در نتیجه مجموع طول نقاط بحرانی تابع، برابر صفر است.

نکته

در تابع گویای h با ضابطهٔ $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ که f و g دو تابع چندجمله‌ای هستند، جواب‌های معادلهٔ $h'(x)=۰$ همان جواب‌های معادلهٔ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$ هستند. به بیان ساده‌تر کافی است به جای مشتق‌گیری از یک تابع کسری، خود تابع را با اصطلاحاً هوپیتال آن (یعنی مشتق صورت به روی مشتق مخرج) مساوی قرار دهیم.

یه‌جور دیگه

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}\xrightarrow{HOP}f_H(x)=\frac{۱}{۲x}$$

حالا این دو را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{x}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۲x}\Rightarrow ۲x^۲=x^۲+۱\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm ۱\Rightarrow \text{مجموع طول نقاط بحرانی}=۰$$

۶ به ازای کدام مقدار a تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x^2-4|+a|x-2|$ در $x=2$ مشتق‌پذیر است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint از $|x-2|$ فاکتور بگیر، عبارت دیگه رو برابر صفر قرار بده.

نکته فرض کنید $h(x)=f(x)\times g(x)$ باشد، به طوری که تابع f در $x=a$ پیوسته اما مشتق‌ناپذیر و تابع g نیز در $x=a$ پیوسته باشد. تابع h در $x=a$ مشتق دارد، اگر $g(a)=0$ باشد؛ یعنی اگر یک عامل صفرکننده در یک تابع پیوستهٔ مشتق‌ناپذیر ضرب شود، آن را مشتق‌پذیر می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با دقت در ضابطهٔ تابع f و به کمک اتحاد مزدوج، آن را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f(x)=|x-2||x+2|+a|x-2| \Rightarrow f(x)=(|x+2|+a)|x-2|$$

گام دوم: تابع $y=|x-2|$ در $x=2$ پیوسته، اما مشتق‌ناپذیر است؛ بنابراین اگر تابع f بخواهد در $x=2$ مشتق‌پذیر شود، عامل ضربی دیگر باید برابر صفر شود؛ بنابراین داریم:

$$|x+2|+a=0 \xrightarrow{x=2} 4+a=0 \Rightarrow a=-4$$

به‌جور دیگه از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=|x-2|(|x+2|+a)$$

$$\xrightarrow{f(2)=0} \begin{cases} f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x-2)(|x+2|+a)}{x-2}=-(4+a) \\ f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(|x+2|+a)}{x-2}=4+a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{برابری}} -4-a=4+a \Rightarrow 2a=-8 \Rightarrow a=-4$$

۷ تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و نمودار آن نسبت به محور y متقارن است. اگر $f'(۱) = ۳$ باشد، مشتق تابع g با ضابطهٔ $g(x) = f(\sqrt{x}) + f(x^۲ - ۳x + ۱)$ در $x = ۱$ کدام است؟

یعنی $f'(\alpha)$ و $f'(-\alpha)$ قرینه هم‌اند؛ مثل سهمی $y = x^۲$.

۱) ۴/۵ ۲) ۴ ۳) ۳/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

$f'(-۱) = -۳$، حالا از g مشتق بگیر.

درس Box

اگر نمودار تابع f نسبت به محور y متقارن باشد، داریم:

$$f(-x) = f(x)$$

حال با فرض مشتق‌پذیربودن تابع از طرفین تساوی بالا مشتق می‌گیریم:

$$-f'(-x) = f'(x) \quad \text{یا} \quad f'(-x) = -f'(x)$$

یعنی شیب خطوط مماس بر نمودار تابع f در نقاط هم‌عرض در طرفین محور y (در صورت وجود)، قرینهٔ هم‌اند.

نکته

مشتق تابع رادیکالی:

$$\sqrt{ax+b} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از درس‌باکس و تعبیر نتیجه می‌شود که $f'(-۱) = -۳$ است.

گام دوم: ضابطهٔ تابع g' را با کمک مشتق تابع مرکب به دست می‌آوریم:

$$g'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} f'(\sqrt{x}) + (۲x-۳) f'(x^۲ - ۳x + ۱)$$

که اگر $x = ۱$ را جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$g'(۱) = \frac{۱}{۲} f'(۱) - f'(-۱)$$

گام سوم: با جای‌گذاری $f'(۱) = ۳$ و $f'(-۱) = -۳$، خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$g'(۱) = \frac{۱}{۲}(۳) - (-۳) = \frac{۹}{۲}$$

تیزبازی

می توانیم ضابطهٔ تابع f را $f(x) = ۳|x|$ در نظر بگیریم:

$$\Rightarrow g(x) = ۳|\sqrt{x}| + ۳|\underbrace{x^۲ - ۳x + ۱}_{\text{در } x=۱ \text{ منفی است.}}| = ۳\sqrt{x} - ۳x^۲ + ۹x - ۳$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۲\sqrt{x}} - ۶x + ۹ \xrightarrow{x=۱} g'(۱) = \frac{۳}{۲} - ۶ + ۹ = \frac{۹}{۲}$$

!توجه درست است که طبق فرض، تابع f باید روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، اما با این حال که تابع $y = ۳|x|$ در $x = ۰$ مشتق ندارد، چنین فرضی مشکلی در حل این سؤال ایجاد نمی‌کند، زیرا که در محاسبهٔ $g'(۱)$، مشتق‌پذیری تابع f در $x = ۰$ بی‌اهمیت است.

۸ از نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر محور x، خطی قائم بر نمودار تابع $f(x)=x^2$ رسم شده است. این خط محور y را در کدام عرض قطع می‌کند؟

نقطهٔ $(۳,۰)$ — بر خط مماس عمود است.

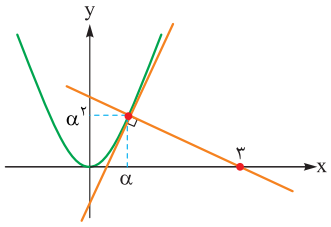
۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $x=\alpha$ واقع بر آن برابر $f'(\alpha)$ و شیب خط قائم بر نمودار تابع $-\frac{۱}{f'(\alpha)}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض کنید نقطه‌ای که خط مفروض بر نمودار تابع f یا بر خط مماس عمود می‌شود، نقطهٔ (α,α^2) باشد:



$$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x\ ,\ f'(\alpha)=2\alpha$$

طبق نکته، شیب خط قائم برابر $-\frac{۱}{f'(\alpha)}$ یا $-\frac{۱}{۲\alpha}$ است.

گام دوم: حالا معادلهٔ خطی را می‌نویسیم که با شیب $-\frac{۱}{۲\alpha}$ از نقطهٔ (α,α^2) می‌گذرد:

$$y-\alpha^2=-\frac{۱}{۲\alpha}(x-\alpha) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲\alpha}x+\alpha^2+\frac{۱}{۲}$$

گام سوم: طبق فرض، این خط از نقطهٔ $(۳,۰)$ می‌گذرد، بنابراین طول و عرض این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$۰=-\frac{۱}{۲\alpha}(۳)+\alpha^2+\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times(۲\alpha)} -۳+۲\alpha^3+\alpha=۰ \xrightarrow[\text{بر } \alpha-۱ \text{ تقسیم می‌کنیم.}]{\alpha=۱ \text{ صدق می‌کند.}} (\alpha-۱)\underbrace{(۲\alpha^2+۲\alpha+۳)}_{\Delta \text{ منفی است.}}=۰ \Rightarrow \alpha=۱$$

گام چهارم: $\alpha=۱$ را در معادلهٔ خط (گام دوم) جای‌گذاری می‌کنیم:

خط قائم: $y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$

عرض از مبدأ این خط برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۹ مینیمم مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin x+\sqrt{۳}\cos x-۳$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۴ ۳) -۵ ۴) -۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اکسترمم‌های مطلق

اگر برد تابع f بازهٔ $[a,b]$ باشد، a را مینیمم مطلق تابع f و b را ماکزیمم مطلق آن می‌نامیم.

نکته اگر دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ باشد، اکسترمم‌های مطلق آن در صورت وجود در نقاط بحرانی آن رخ می‌دهند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=۲(\underbrace{\sin x\times\frac{۱}{۲}}_{\cos\frac{\pi}{۳}}+\underbrace{\cos x\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}_{\sin\frac{\pi}{۳}})-۳$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد سینوس مجموع دو کمان}} f(x)=۲\sin(x+\frac{\pi}{۳})-۳$$

گام دوم: کم‌ترین مقدار تابع بالا به ازای $\sin=-۱$ برابر $۲(-۱)-۳=-۵$ است.

یه‌جور دیگه

اگر با استفاده از مشتق عمل کنیم، داریم:

$$f'(x)=\cos x-\sqrt{۳}\sin x=۰\Rightarrow\tan x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow x_c=k\pi+\frac{\pi}{۶}\ ;k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x_c=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲},\cos x_c=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} & ;\ k\ \text{زوج}\\ \sin x_c=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲},\cos x_c=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲} & ;\ k\ \text{فرد}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_c)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}-۳=-۱ & ;\ k\ \text{زوج}\\ -\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}-۳=-۵ & ;\ k\ \text{فرد}\end{cases}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار تابع برابر -۵ است.

یه‌جور دیگه

طبق نامساوی $-\sqrt{a^۲+b^۲}\le a\sin\theta+b\cos\theta\le\sqrt{a^۲+b^۲}$، حدود عبارت $\sin x+\sqrt{۳}\cos x$ بازهٔ $[-۲,۲]$ و در نتیجه برد تابع f بازهٔ $[-۱,-۵]$ به دست می‌آید.

۱۰ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-x^{۲} & ; \quad x<۰\\ x^{۲}-۲x & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$ مفروض است. اگر m و n به ترتیب تعداد ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های نسبی نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=|f(x)|$ باشد، حاصل $\frac{m}{n}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

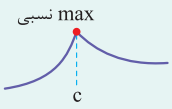
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

نمودار رسم کن.

درس Box

ماکزیمم نسبی: اگر تابع f در یک همسایگی $x=c$ تعریف‌شده باشد، به طوری که در همهٔ نقاط این همسایگی $f(c)\geq f(x)$ باشد، $x=c$ طول یک ماکزیمم نسبی نمودار تابع f است:



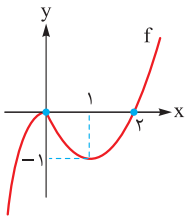
مینیمم نسبی: اگر تابع f در یک همسایگی $x=c$ تعریف‌شده باشد، به طوری که در همهٔ نقاط این همسایگی $f(c)\leq f(x)$ باشد، $x=c$ طول یک مینیمم نسبی نمودار تابع f است:



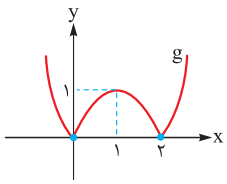
شرط لازم برای تعاریف بالا این است که تابع در همسایگی $x=c$ حتماً تعریف‌شده باشد، این یعنی نقاط ابتدا و انتهای دامنه نمی‌توانند اکسترمم‌های نسبی باشند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



گام دوم: سپس نمودار تابع g را رسم می‌کنیم:



گام سوم: همان‌طور که مشاهده می‌شود، تابع g دو نقطهٔ مینیمم و یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد؛ پس $m=۱$ و $n=۲$ و در نتیجه $\frac{m}{n}=\frac{۱}{۲}$ است.

کنکور

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}-۵|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y=|f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟ *(سؤال ۲۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)*

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۱۱ اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=-\frac{۲}{۳}x^۳-x^۲+۴x+۱$ روی بازهٔ $[-۳,۲]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) ۹ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

روش به دست آوردن اکسترمم‌های مطلق تابع f بازهٔ $[a,b]$:

۱) ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازهٔ (a,b) به دست می‌آوریم.

۲) مقدار تابع در این نقاط را حساب می‌کنیم.

۳) از بین مقادیر به‌دست‌آمده به همراه $f(a)$ و $f(b)$، کم‌ترین را به عنوان مینیمم مطلق و بیشترین را به عنوان ماکزیمم مطلق در نظر می‌گیریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع مشتق را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=-۲x^۲-۲x+۴$$

و سپس برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} -۲(x^۲+x-۲)=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=-۲ \text{ یا } ۱$$

هر دو مقدار در بازهٔ $[-۳,۲]$ قرار می‌گیرند.

گام دوم: حالا مقادیر تابع در این نقاط بحرانی و هم‌چنین در ابتدا و انتهای بازه را حساب می‌کنیم:

$$f(-۳)=-۲, f(-۲)=-\frac{۱۷}{۳}, f(۱)=\frac{۱۰}{۳}, f(۲)=-\frac{۱}{۳}$$

گام سوم: در بین مقادیر بالا، $-\frac{۱۷}{۳}$ کم‌ترین مقدار و $\frac{۱۰}{۳}$ بیشترین مقدار است؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} Max=\frac{۱۰}{۳} \\ min=-\frac{۱۷}{۳} \end{cases} \Rightarrow Max-min=\frac{۲۷}{۳}=۹$$

امتحان نهایی

مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{-۲}{۳}x^۳-x^۲+۴x+۱$ را در بازهٔ $[-۳,۲]$ به دست آورید.

(سؤال ۱۶ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)

۱۲ ماکزیمم مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2+1}$ روی بازهٔ $[-1,3)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۱
۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔

گام اول: تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس نقاط بحرانی آن، صفرهای تابع f' هستند.

$$\xrightarrow[\text{HOP}]{f'(x)=0} \frac{x^3+2}{x^2+1}=\frac{3x^2}{2x}$$

$$3x^4+3x^2=2x^4+4x \Rightarrow x^4+3x^2-4x=0$$

گام دوم: در معادلهٔ بالا $x=0$ و $x=1$ صدق می‌کنند، پس بر $x(x-1)$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^4+3x^2-4x=x(x-1)\underbrace{(x^2+x+4)}_{\Delta \text{ منفی است}}=0$$

گام سوم: مقادیر تابع را در $x=-1$، $x=0$ و $x=1$ حساب می‌کنیم:

$$f(-1)=\frac{-1+2}{1+1}=\frac{1}{2}=0/5\ ,\ f(0)=\frac{0+2}{0+1}=2\ ,\ f(1)=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}=1/5$$

حد چپ تابع f را در $x=3$ نیز حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\frac{3^3+2}{3^2+1}=\frac{29}{10}=2/9$$

گام چهارم: با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده در گام سوم، مشخص است که برد تابع f با دامنهٔ $[-1,3)$ بازهٔ $[0/5,2/9)$ است و این یعنی تابع f روی این بازه ماکزیمم مطلق ندارد.

۱۳ اگر $a > ۰$ باشد، حاصل‌ضرب بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{۳a-x}$ برابر ۸ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \sqrt{x-a} : x-a \geq ۰ \Rightarrow x \geq a \\ \sqrt{۳a-x} : ۳a-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۳a \end{cases} \xrightarrow[a>۰]{\text{اشتراک}} a \leq x \leq ۳a$$

پس $D_f = [a, ۳a]$ است.

گام دوم: حالا طول نقطهٔ (نقاط) بحرانی بازهٔ $(a, ۳a)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x-a}} - \frac{۱}{۲\sqrt{۳a-x}} \xrightarrow{f'(x)=۰} \sqrt{x-a} = \sqrt{۳a-x}$$

$$\Rightarrow x-a = ۳a-x \Rightarrow ۲x = ۴a \Rightarrow x = ۲a$$

که قابل قبول هم هست.

گام سوم: حالا مقادیر تابع را در این نقاط حساب می‌کنیم:

$$f(a) = f(۳a) = \sqrt{۲a}$$
$$f(۲a) = ۲\sqrt{a} = \sqrt{۴a}$$

پس کم‌ترین مقدار تابع برابر $\sqrt{۲a}$ و بیشترین مقدار آن برابر $\sqrt{۴a}$ است.

گام چهارم: حالا طبق فرض سؤال، حاصل‌ضرب این دو عدد را برابر ۸ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{۲a} \times \sqrt{۴a} = ۸ \Rightarrow \sqrt{۸a^۲} = ۲a\sqrt{۲} = ۸ \Rightarrow a = \frac{۸}{۲\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

کنکور

حاصل‌ضرب بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-۲x}$ برابر $\sqrt{۱۲}$ است. اگر $a > ۰$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟ *(سؤال ۱۲۸ کنکور تجربی ۱۴۰۲ ـ نوبت اول)*

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۴ مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\cos \pi x-۲\sin \frac{\pi x}{۲}-۱$ و دامنهٔ $[۰,۴]$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۷}{۲}$ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با کمک اتحادهای مثلثاتی دو برابر کمان، ضابطهٔ تابع f را به گونه‌ای دیگر می‌نویسیم:

$$f(x)=\cos(۲\pi\frac{x}{۲})-۲\sin\frac{\pi x}{۲}-۱$$

$$=۱-۲\sin^۲\frac{\pi x}{۲}-۲\sin\frac{\pi x}{۲}-۱=-۲\sin^۲\frac{\pi x}{۲}-۲\sin\frac{\pi x}{۲}$$

حالا اگر به فرم مربع کامل بنویسیم، داریم:

$$f(x)=\frac{۱}{۲}-۲(\sin\frac{\pi x}{۲}+\frac{۱}{۲})^۲\quad;\quad ۰\le x\le ۴$$

گام دوم: حالا متغیر جدید $t=\sin\frac{\pi x}{۲}$ را در نظر می‌گیریم و با استفاده از دامنهٔ تابع f، محدودهٔ این متغیر را حساب می‌کنیم:

$$۰\le x\le ۴\ \Rightarrow\ ۰\le\frac{\pi x}{۲}\le ۲\pi\ \Rightarrow\ -۱\le t\le ۱$$

گام سوم: حالا با این محدوده، برد تابع f را حساب می‌کنیم:

$$-۱\le t\le ۱\ \Rightarrow\ -\frac{۱}{۲}\le t+\frac{۱}{۲}\le\frac{۳}{۲}\ \Rightarrow\ ۰\le(t+\frac{۱}{۲})^۲\le\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow\ -\frac{۹}{۲}\le -۲(t+\frac{۱}{۲})^۲\le ۰\ \Rightarrow\ -۴\le\frac{۱}{۲}-۲(t+\frac{۱}{۲})^۲\le\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $-۴\le f(x)\le\frac{۱}{۲}$ است، این یعنی ماکزیمم مطلق تابع f برابر $\frac{۱}{۲}$، مینیمم مطلق آن برابر -۴ و مجموع آن‌ها برابر $-\frac{۷}{۲}$ است.

یه‌جور دیگه

نقاط بحرانی بازهٔ $(۰,۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=-\pi\sin\pi x-\pi\cos\frac{\pi x}{۲}\xrightarrow{f'(x)=۰}\sin\pi x+\cos\frac{\pi x}{۲}=۰$$

$$\Rightarrow\ ۲\sin\frac{\pi x}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}+\cos\frac{\pi x}{۲}=۰\ \Rightarrow\ \cos\frac{\pi x}{۲}(۲\sin\frac{\pi x}{۲}+۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{۲}=۰\ \Rightarrow\ \frac{\pi x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ \Rightarrow\ x=۲k+۱\\ \sin\frac{\pi x}{۲}=-\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi x}{۲}=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\ \Rightarrow\ x=۴k-\frac{۱}{۳}\\ \frac{\pi x}{۲}=۲k\pi-\frac{۵\pi}{۶}\ \Rightarrow\ x=۴k-\frac{۵}{۳}\end{cases}\end{cases};k\in\mathbb{Z}$$

نقاط بحرانی بازهٔ $(۰,۴)$ عبارت‌اند از ۱، $\frac{۷}{۳}$، ۳ و $\frac{۱۱}{۳}$. حالا مقادیر تابع را در این نقاط خاص حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(۰)=f(۴)=۰\\ f(۱)=-۴\\ f(\frac{۷}{۳})=f(\frac{۱۱}{۳})=\frac{۱}{۲}\\ f(۳)=۰\end{cases}\Rightarrow\ Max=\frac{۱}{۲},\ min=-۴\ \Rightarrow\ Max+min=-\frac{۷}{۲}$$

۱۵ استوانه‌ای درون یک کره محاط شده است. اگر حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن باشد، نسبت حجم کره به حجم استوانه کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

بهینه‌سازی:

مسئلهٔ بهینه‌سازی همان مسئلهٔ اکسترمم‌های مطلق است؛ در واقع در مسئلهٔ بهینه‌سازی ما یک شرط محدودکننده داریم و براساس آن می‌خواهیم چیز دیگری (مساحت، حجم، طول، هزینه، فاصله و ...) را به حداقل/ حداکثر مقدار ممکن خودش برسانیم.

در بهینه‌سازی:

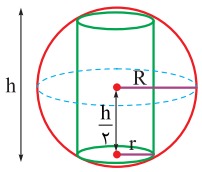
۱) ابتدا ببینید چه چیزی را می‌خواهید بهینه (کم‌ترین یا بیشترین) کنید، رابطه یا فرمول آن را بنویسید.

۲) احتمالاً در آن فرمول ۲ متغیر دارید، باید با یک شرط محدودکننده، یکی از متغیرها را برحسب دیگری بنویسید تا یک تابع یک‌متغیره داشته باشید.

۳) حالا مسئله، همان مسئلهٔ اکسترمم مطلق است، مشتق بگیرید و برابر صفر قرار دهید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شکل مسئله را می‌کشیم، شعاع کره R، شعاع قاعدهٔ استوانه r و ارتفاع آن h است. در این مسئله R یک عدد ثابت است.



حالا رابطهٔ حجم استوانه را می‌نویسیم:

$$V = \pi r^۲ h$$

گام دوم: دو متغیر داریم و بهتر است که h را برحسب r بنویسیم. به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$(\frac{h}{۲})^۲ + r^۲ = R^۲ \Rightarrow h = ۲\sqrt{R^۲ - r^۲}$$

و سپس در فرمول حجم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$V(r) = \pi r^۲ \times ۲\sqrt{R^۲ - r^۲} \Rightarrow V(r) = ۲\pi\sqrt{R^۲ r^۴ - r^۶}$$

گام سوم: حجم استوانه زمانی ماکزیمم می‌شود که مقدار عبارت زیر رادیکال ماکزیمم شود:

$$f(r) = R^۲ r^۴ - r^۶ \Rightarrow f'(r) = ۴R^۲ r^۳ - ۶r^۵$$

$$\xrightarrow{f'(r)=۰} ۲r^۳(۲R^۲ - ۳r^۲) = ۰ \xrightarrow{r\neq ۰} r^۲ = \frac{۲}{۳}R^۲$$

گام چهارم: در این صورت حجم استوانه برابر خواهد بود با:

$$V_{max} = ۲\pi\sqrt{R^۲(\frac{۴}{۹}R^۴) - \frac{۸}{۲۷}R^۶} = \frac{۴\pi R^۳}{۳\sqrt{۳}}$$

حجم کره هم که $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ است. حالا نسبت این دو حجم برابر می‌شود با:

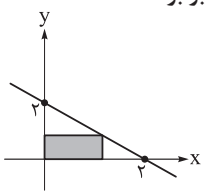
$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{بیشترین مقدار حجم استوانه}} = \frac{\frac{۴\pi R^۳}{۳}}{\frac{۴\pi R^۳}{۳\sqrt{۳}}} = \sqrt{۳}$$

کتاب درسی

در کره‌ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده‌ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

(حسابان ۲ ـ مثال صفحهٔ ۱۱۹ کتاب درسی)

۱۶ در شکل زیر، بیشترین مقدار حجم حاصل از دوران مستطیل سایه‌خورده حول محور y چند برابر π است؟

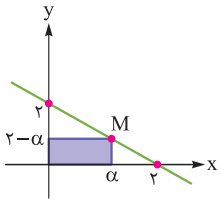


۱) $\frac{۳۲}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۳۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔

گام اول: معادلهٔ خط رسم‌شده $y = ۲ - x$ است؛ پس اگر طول نقطهٔ M را α در نظر بگیریم، عرض آن $۲ - \alpha$ خواهد بود.



اگر مستطیل رنگی را حول محور y دوران دهیم، استوانه‌ای با شعاع قاعدهٔ α و ارتفاع $۲ - \alpha$ به دست می‌آید که حجم آن برابر می‌شود با:

$$V(\alpha) = \pi\alpha^۲(۲ - \alpha) = \pi(۲\alpha^۲ - \alpha^۳)$$

گام دوم: از تابع به‌دست‌آمده مشتق می‌گیریم:

$$V'(\alpha) = \pi(۴\alpha - ۳\alpha^۲)$$

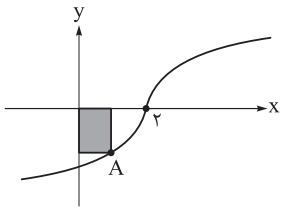
و سپس برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{V'(\alpha)=۰} ۴\alpha - ۳\alpha^۲ = ۰ \xrightarrow{\alpha \neq ۰} \alpha = \frac{۴}{۳}$$

گام سوم: با جای‌گذاری α، بیشترین مقدار حجم را پیدا می‌کنیم:

$$V_{max} = \pi \times \frac{۱۶}{۹} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۳۲\pi}{۲۷}$$

۱۷ **مطابق شکل، نقطهٔ A روی نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات قرار گرفته است. بیشترین مقدار مساحت مستطیل سایه‌خورده کدام است؟**



۱) $۰/۷۵\sqrt[3]{۲}$

۲) $۰/۷۵\sqrt[3]{۴}$

۳) $۰/۵\sqrt[3]{۲}$

۴) $۰/۵\sqrt[3]{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔

گام اول: رابطهٔ مساحت مستطیل سایه‌خورده را برحسب طول نقطهٔ A پیدا می‌کنیم. اگر طول نقطهٔ A را α در نظر بگیریم، طول مستطیل همین α و عرض آن $|f(\alpha)|$ یا $\sqrt[3]{۲-\alpha}$ است؛ پس مساحت مستطیل برابر می‌شود با:

$$S(\alpha)=\alpha\sqrt[3]{۲-\alpha}$$

دقت کنید که $۰<\alpha<۲$ است.

گام دوم: حالا مشتق می‌گیریم:

$$S'(\alpha)=\sqrt[3]{۲-\alpha}-\frac{\alpha}{۳\sqrt[3]{(۲-\alpha)^۲}}=\frac{۳(۲-\alpha)-\alpha}{۳\sqrt[3]{(۲-\alpha)^۲}}$$

$$\Rightarrow S'(\alpha)=\frac{۶-۴\alpha}{۳\sqrt[3]{(۲-\alpha)^۲}}$$

و سپس برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{S'(\alpha)=۰} ۶-۴\alpha=۰ \Rightarrow \alpha=\frac{۳}{۲}$$

گام سوم: بیشترین مقدار مساحت مستطیل برابر $S(\frac{۳}{۲})$ است:

$$S(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}\sqrt[3]{۲-\frac{۳}{۲}}=\frac{۱/۵}{\sqrt[3]{۲}}=۰/۷۵\sqrt[3]{۴}$$

۱۸ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{۸\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}}{۲^{۱/۲۵}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt[۴]{۲}$ ۴) $\sqrt[۳]{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ **گام اول:** همهٔ اعداد را برحسب توان‌های ۲ می‌نویسیم:

$$۸ = ۲^{۳}$$

$$۲\sqrt{۲} = ۲^{۱+\frac{۱}{۲}} = ۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow \sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}}$$

گام دوم: در نتیجه عبارت برابر می‌شود با:

$$A = \frac{\sqrt{۲^{۳} \times ۲^{\frac{۱}{۲}}}}{۲^{\frac{۵}{۴}}} = \frac{۲^{\frac{۷}{۴}}}{۲^{\frac{۵}{۴}}} = ۲^{\frac{۷}{۴}-\frac{۵}{۴}} = ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲}$$

۱۹ نقاط $A(1,3,1)$ ، $B(-1,1,-3)$ و $C(-1,4,1)$ رأس‌های یک مثلث هستند. در این مثلث، طول میانهٔ وارد بر ضلع AB کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۲

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های امتحان‌های نهایی گذشته طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه در فضا باشند:

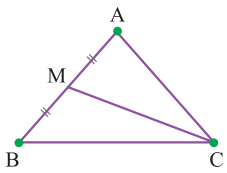
الف) مختصات وسط پاره‌خط AB به صورت $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$ است.

ب) طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به شکل فرضی مقابل، باید مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB را به دست آورده و فاصلهٔ آن را از نقطهٔ C محاسبه کنیم:



$$M(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2})=(\frac{1-1}{2},\frac{3+1}{2},\frac{1-3}{2})=(0,2,-1)$$

گام دوم: طول CM برابر است با:

$$CM=\sqrt{(0+1)^2+(4-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$

امتحان نهایی

نقاط $A=(1,2,1)$ ، $B=(-1,0,-5)$ و $C=(-1,3,1)$ سه رأس یک مثلث هستند. اگر نقطهٔ M وسط ضلع AB باشد، طول پاره‌خط CM (میانهٔ وارد بر ضلع AB) را حساب کنید. *(سؤال ۱۴ (قسمت الف) ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)*

۲۰ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰

۳) ۱۲۰ ۴) ۱۵۰

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های امتحان‌های نهایی گذشته طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) اگر $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ و $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ دو بردار باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها برابر است با:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

۲) اگر زاویهٔ بین دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برابر با θ باشد، آن‌گاه:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}=\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ برابر است با:

$$\vec{a}.\vec{b}=1\times0-1\times1+0\times1=-1$$

گام دوم: طول‌های دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با:

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}\ ,\ |\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

گام سوم: زاویهٔ بین دو بردار را به دست می‌آوریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=120^\circ$$

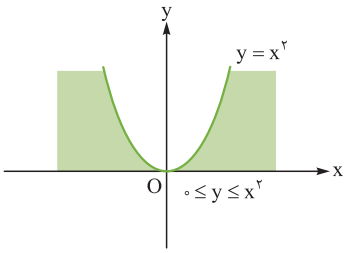
کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(1,0,1)$ و $\vec{b}=(-1,1,0)$ را به دست آورید. *(سؤال ۱۵ ـ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۴)*

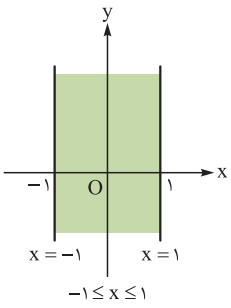
۲۱ **ناحیه‌ای در صفحه با روابط $x^2 \le y \le 0$ و $-1 \le x \le 1$ مشخص شده است. چند نقطه با مختصات صحیح در این ناحیه وجود دارد؟**

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

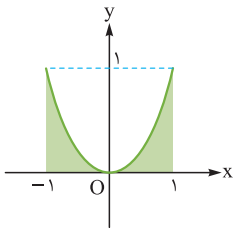
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ‌خیلی‌تشریحی **گام اول:** نمودار هر کدام از ناحیه‌های $x^2 \le y \le 0$ و $-1 \le x \le 1$ را جداگانه رسم می‌کنیم:





گام دوم: از اشتراک دو ناحیه‌ای که در گام اول، نمودار آن‌ها را رسم کردیم، نمودار ناحیهٔ مورد نظر سؤال به دست می‌آید:



گام سوم: همان‌طورکه در نمودار گام دوم دیده می‌شود، نقاط با مختصات صحیح $(1,1)$، $(1,-1)$، $(0,0)$، $(1,0)$ و $(-1,0)$ به ناحیهٔ جواب تعلق دارند که تعداد آن‌ها ۵تاست.

۲۲ اگر $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=۳\vec{i}+\vec{k}$، آن‌گاه مجموع مؤلفه‌های تصویر قائم بردار $\vec{a}-\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$، کدام است؟

۱) ۲

۲) -۲

۳) $۲\sqrt{۱۰}$

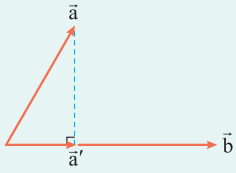
۴) $-۲\sqrt{۱۰}$

مشاوره «تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر» از مباحث مهم، هم در آزمون‌های تستی و هم در آزمون‌های تشریحی است. روی دو رابطه‌ای که در درس‌باکس گفته‌ایم، مسلط باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

فرض کنید $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ است:



الف) اگر طول $\vec{a}'$ را بخواهیم از رابطهٔ $|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ استفاده می‌کنیم.

ب) اگر مؤلفه‌های $\vec{a}'$ را بخواهیم، از رابطهٔ $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$ استفاده می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول:

داریم $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}=(۲,۳,-۱)$ و $\vec{b}=۳\vec{i}+\vec{k}=(۳,۰,۱)$، پس $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=(۲-۳,۳-۰,-۱-۱)=(-۱,۳,-۲)$.

گام دوم:

داریم $|\vec{b}|=\sqrt{۳^۲+۰+۱^۲}=\sqrt{۱۰}$ و $\vec{c}.\vec{b}=(-۱,۳,-۲).(۳,۰,۱)=(-۱)\times۳+۳\times۰+(-۲)\times۱=-۵$.

گام سوم: با توجه به درس‌باکس، داریم:

تصویر قائم بردار $\vec{c}$ بر بردار $\vec{b}$ $=\frac{\vec{c}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{-۵}{\sqrt{۱۰}^۲}(۳,۰,۱)=\frac{-۱}{۲}(۳,۰,۱)$ $\Rightarrow$ مجموع مولفه‌ها: $\frac{-۱}{۲}(۳+۰+۱)=-۲$

۲۳ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم زاویهٔ 60° می‌سازند. طول تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

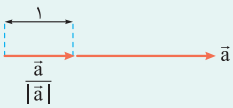
۱) ۱
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) صفر

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴ طراحی شده است.

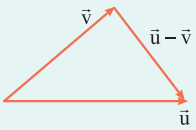
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) برای هر بردار مانند $\vec{a}$، بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ برداری به طول واحد، در راستای بردار $\vec{a}$ است:



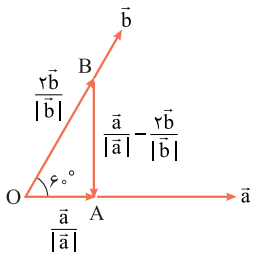
۲) برای هر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ که ابتدای آن‌ها بر هم منطبق است، بردار $\vec{u}-\vec{v}$ برداری است که انتهای $\vec{v}$ را به انتهای $\vec{u}$ وصل می‌کند.



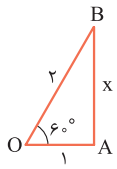
۳) اگر دو بردار بر هم عمود باشند، تصویر قائم یکی از آن‌ها بر دیگری، بردار صفر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شکل مناسب را رسم می‌کنیم:



گام دوم: در مثلث OAB بنا به قضیهٔ کسینوس‌ها، داریم:



$$x^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\underbrace{\cos60^\circ}_{\frac{1}{2}}\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\sqrt{3}$$

گام سوم: از آن‌جا که در مثلث OAB رابطهٔ فیثاغورس برقرار است $(1^2+(\sqrt{3})^2=2^2)$، این مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول تصویر قائم بردار $\overrightarrow{BA}$ بر بردار $\vec{a}$، صفر است.

کنکور اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، 60° باشد، اندازهٔ تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

(سؤال ۳۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{3}{2}$

۲۴ اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 45°، زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ برابر 30° و $|\vec{a}|=\sqrt{2}$ باشد، آن‌گاه $|\vec{b}|$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$
۲) $\sqrt{3}+1$
۳) $2\sqrt{3}$
۴) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) برای هر بردار مانند $\vec{a}$، داریم: $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$

۲) ضرب داخلی دارای خاصیت توزیع‌پذیری است، یعنی:

$$\vec{a}.(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}\pm\vec{a}.\vec{c}$$

۳) برای هر دو بردار دلخواه، مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم:

$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض کنیم $|\vec{b}|=x$، داریم:

$$\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}||\vec{a}+\vec{b}|\cos 30^\circ-|\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^\circ=|\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{a}+\vec{b}|-\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3}|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{2}+\sqrt{2}x$$

گام دوم: طرفین تساوی آخر را به توان دو می‌رسانیم:

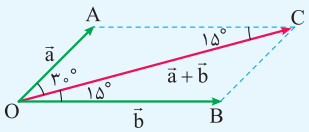
$$3(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b})=8+2x^2+8x \Rightarrow 3(2+x^2+2\times\sqrt{2}\times x\times\frac{\sqrt{2}}{2})=8+2x^2+8x$$

$$\Rightarrow 6+3x^2+6x=8+2x^2+8x \Rightarrow x^2-2x-2=0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2-3=0 \Rightarrow (x-1)^2=3 \Rightarrow x-1=\pm\sqrt{3} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{3} \xrightarrow{x>0} x=1+\sqrt{3}$$

یه‌جور دیگه

مطابق شکل، متوازی‌الاضلاع OACB را روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنا می‌کنیم. بنا به قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث OAC داریم:



$$\frac{AC}{\sin 30^\circ}=\frac{OA}{\sin 15^\circ} \Rightarrow \frac{|\vec{b}|}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \Rightarrow |\vec{b}|=\sqrt{3}+1$$

۲۵ نقاط $A=(x,y,z)$ و $B=(۲,-۳,۱)$ در فضا مفروض‌اند. اگر طول پاره‌خط AB برابر ۴ باشد، حداکثر مقدار $x+۲y+۲z$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint معمولاً برای پیداکردن حداکثر مقدار عبارت $ax+by+cz$ یا حداقل مقدار عبارت $a^۲x^۲+b^۲y^۲+c^۲z^۲$ از نامساوی کوشی ـ شوارتز استفاده‌می‌شود.

درس Box اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در فضا باشند که با هم زاویهٔ θ می‌سازند، آن‌گاه همواره داریم:

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

رابطهٔ فوق نامساوی کوشی ـ شوارتز نامیده می‌شود. دلیل برقراری این رابطه آن است که:

$$|\cos\theta|\le ۱ \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\le|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طول پاره‌خط AB برابر ۴ است، پس داریم:

$$AB=۴ \Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+(y+۳)^۲+(z-۱)^۲}=۴$$

گام دوم: دو بردار به صورت $\vec{a}=(x-۲,y+۳,z-۱)$ و $\vec{b}=(۱,۲,۲)$ تعریف می‌کنیم. طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز می‌توان نوشت:

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow |(x-۲)+۲(y+۳)+۲(z-۱)|\le\sqrt{(x-۲)^۲+(y+۳)^۲+(z-۱)^۲}\times\sqrt{۱^۲+۲^۲+۲^۲}$$

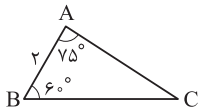
$$\Rightarrow |x+۲y+۲z+۲|\le ۴\times۳$$

گام سوم: با حل نامساوی قدرمطلقی داریم:

$$|x+۲y+۲z+۲|\le۱۲ \Rightarrow -۱۲\le x+۲y+۲z+۲\le۱۲ \Rightarrow -۱۴\le x+۲y+۲z\le۱۰$$

پس حداقل مقدار این عبارت -۱۴ و حداکثر آن ۱۰ است.

۲۶ در شکل زیر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC کدام است؟

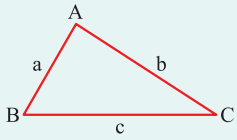


۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

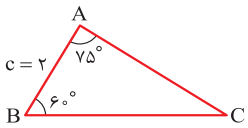
در هر مثلث نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویهٔ روبروی آن، برابر است با طول قطر دایرهٔ محیطی مثلث:



$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = ۲R$$ (قضیهٔ سینوس‌ها)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ABC باید ۱۸۰° باشد، پس:

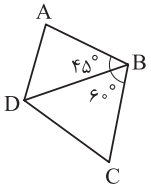


$$\hat{C} = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ - ۷۵^\circ = ۴۵^\circ$$

گام دوم: برای محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، داریم:

$$۲R = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow R = \frac{c}{۲\sin\hat{C}} = \frac{۲}{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \sqrt{۲}$$

۲۷ در شکل مقابل اگر $\frac{CD}{AD}=\sqrt{3}$ و $A\hat{D}C=165^\circ$، آن‌گاه $\tan\hat{A}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\sqrt{2}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴) ۲

مشاوره این سؤال مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

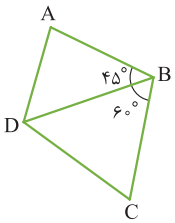
درس Box

۱) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی، 360° است.

۲) $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از آن‌جا که $\frac{CD}{AD}=\sqrt{3}$، این‌طور در نظر می‌گیریم که $CD=\sqrt{3}x$ و $AD=x$.



گام دوم: مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD را برابر با 360° قرار می‌دهیم:

$$\hat{A}+105^\circ+\hat{C}+165^\circ=360^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=90^\circ \Rightarrow \sin\hat{C}=\cos\hat{A}$$

گام سوم: در دو مثلث ABD و BCD، قضیهٔ سینوس‌ها را می‌نویسیم:

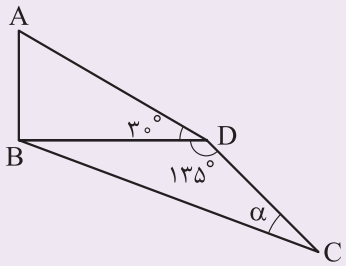
$$\overset{\Delta}{ABD}: \frac{BD}{\sin\hat{A}}=\frac{AD}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{BD}{\sin\hat{A}}=\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{BD}{\sin\hat{A}}=\sqrt{2}x \qquad (1)$$

$$\overset{\Delta}{BCD}: \frac{BD}{\sin\hat{C}}=\frac{DC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{BD}{\cos\hat{A}}=\frac{\sqrt{3}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{BD}{\cos\hat{A}}=2x \qquad (2)$$

گام چهارم: اگر طرفین معادلهٔ (۲) را بر طرفین معادلهٔ (۱) تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\tan\hat{A}=\sqrt{2}$$

کنکور در شکل زیر، اگر $\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$ و زاویهٔ $A\hat{B}C=105^\circ$ باشد، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟ (سؤال ۳۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))



۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

۲) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

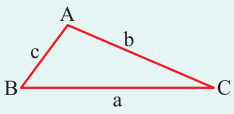
۲۸ در مثلث ABC به طول اضلاع a، b و c، اگر $a^۲ - b^۲ - c^۲ = ۱/۲\,bc$، آن‌گاه نسبت طول ضلع b به طول ارتفاع وارد بر ضلع c کدام است؟

۱) ۱/۲
۲) ۱/۲۵
۳) ۱/۷۵
۴) ۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

قضیهٔ کسینوس‌ها: مطابق شکل زیر، در مثلث ABC، روابط زیر برقرارند:



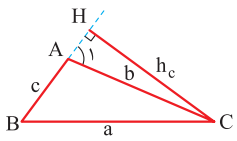
$$\begin{cases} a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A} \\ b^۲ = c^۲ + a^۲ - ۲ca\cos\hat{B} \\ c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\hat{C} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: رابطهٔ داده شده را به فرم $a^۲ = b^۲ + c^۲ + ۱/۲\,bc$ می‌نویسیم تا شبیه به قضیهٔ کسینوس‌ها شود، با مقایسهٔ رابطهٔ اخیر با $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$، نتیجه می‌گیریم:

$$-۲\cos\hat{A} = ۱/۲ \Rightarrow \cos\hat{A} = -۰/۶$$

گام دوم: به دلیل آن‌که $\cos\hat{A}$ منفی است، زاویهٔ A منفرجه است و مطابق شکل، ارتفاع وارد بر ضلع c، بیرون مثلث قرار می‌گیرد.



گام سوم:

از این‌که $\hat{A}_۱ + \hat{A} = ۱۸۰^\circ$ و $\cos\hat{A} = -۰/۶$، نتیجه می‌گیریم $\cos\hat{A}_۱ = ۰/۶$، درنتیجه $\sin\hat{A}_۱ = \sqrt{۱ - \cos^۲ A_۱} = ۰/۸$

و داریم:

$$\frac{b}{h_c} = \frac{۱}{\frac{h_c}{b}} = \frac{۱}{\sin\hat{A}_۱} = \frac{۱}{۰/۸} = \frac{۱}{\frac{۸}{۱۰}} = \frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

۲۹ در مثلثی به اضلاع ۵، ۷ و ۸ فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی، از ضلع متوسط، چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟

۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۷}{۶}$

۴) $\frac{۴}{۳}$

مشاوره این سؤال، به صورت ترکیبی از فصل اول و فصل سوم هندسهٔ (۲) طراحی شده است. ترکیب مباحث فصل اول هندسهٔ (۲) با سایر فصل‌ها را در کنکور، بسیار دیده‌ایم.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

در مثلث ABC به اضلاع $BC = a$، $AC = b$ و $AB = c$، داریم:

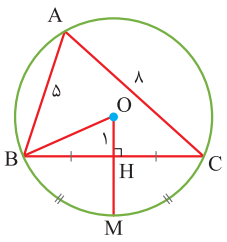
$$a^۲ > b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

$$a^۲ < b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow \hat{A} < ۹۰^\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که در این مثلث $۸^۲ < ۵^۲ + ۷^۲$، زاویه‌های مثلث حاده هستند و مرکز دایرهٔ محیطی، درون مثلث قرار می‌گیرد. ضمن آن‌که توجه کنید عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر وارد می‌شود، آن وتر و کمان متناظر آن را نصف می‌کند، یعنی $BH = CH$ و $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$.



گام دوم: با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC، داریم:

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AB \times AC \times \cos\hat{A} \Rightarrow ۴۹ = ۶۴ + ۲۵ - ۲ \times ۵ \times ۸ \times \cos\hat{A}$$

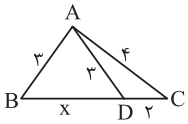
$$\Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \text{زاویهٔ مرکزی: } \hat{O}_۱ = \overset{\frown}{BM} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC} = ۶۰^\circ$$

گام سوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH، داریم:

$$\tan\hat{O}_۱ = \frac{BH}{OH} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{\frac{۷}{۲}}{OH} \Rightarrow OH = \frac{۷}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۷}{۶}\sqrt{۳}$$

۳۰ در شکل زیر، با توجه به اندازه‌های روی آن، طول پاره‌خط **BD** کدام است؟



۱) ۳

۲) ۱/۷۵

۳) ۱/۵

۴) ۲/۵

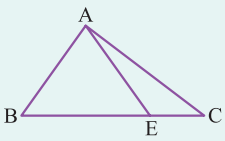
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

از قضیهٔ استوارت استفاده کنید.

درس Box

مطابق شکل، نقطهٔ دلخواه E را روی ضلع BC از مثلث ABC در نظر گرفته‌ایم، داریم:



$$AB^{۲}\times CE + AC^{۲}\times BE = BC(AE^{۲} + BE.CE)$$ (قضیهٔ استوارت)

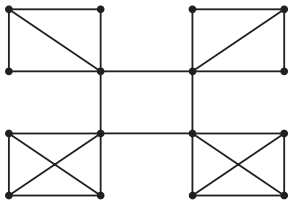
پاسخ خیلی تشریحی ✔

با استفاده از رابطهٔ استوارت در مثلث ABC داریم:

$$AB^{۲}\times CD + AC^{۲}\times BD = AD^{۲}\times BC + BC\times BD\times CD \Rightarrow ۹\times ۲ + ۱۶\times x = ۹(x+۲) + (x+۲)\times x\times ۲$$

$$\Rightarrow ۱۸ + ۱۶x = ۹x + ۱۸ + ۲x^{۲} + ۴x \Rightarrow ۲x^{۲} - ۳x = ۰ \Rightarrow x(۲x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \times \\ x = \frac{۳}{۲} & \checkmark \end{cases}$$

۳۱ گراف مقابل چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد؟



۱) ۳۲

۲) ۱۲۸

۳) ۱۴۴

۴) ۶۴

مشاوره از تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم تا به حال سؤالی در کنکور نیامده است. منتظر آمدن چنین سؤالی در کنکور باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ببینید از هر کدام از ۴ گوشه به چند صورت می‌توان رأس مناسب را انتخاب کرد.

درس Box

تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر:

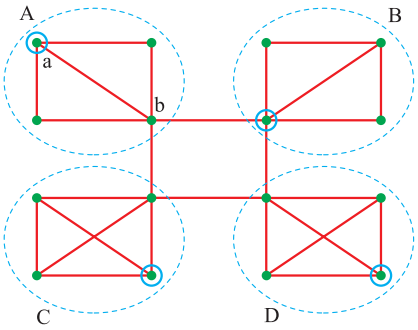
زیرمجموعهٔ D از رأس‌های گراف را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم؛ هرگاه هر رأس از گراف که در D نباشد، حداقل به یکی از عضوهای D وصل باشد.

تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم:

در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه (یا مجموعه‌هایی) که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، یک $\gamma-$ مجموعه هم می‌گوییم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: گراف را به صورت زیر به ۴ قسمت تقسیم می‌کنیم. از هر کدام از رأس‌های درون دایره حداقل یک رأس باید انتخاب کنیم تا کل رأس‌ها احاطه شوند. از طرفی با ۴ رأس (مثلاً به صورت زیر) کل رأس‌ها احاطه می‌شود، پس: $\gamma(G) = ۴$



گام دوم: از رأس‌های درون دایره A، کافی است a یا b را انتخاب کنیم (۲ حالت).

شبیه همین، ۲ حالت برای انتخاب رأس‌های درون B، اما برای انتخاب رأس از قسمت‌های C و D هر کدام ۴ انتخاب داریم، پس: تعداد $\gamma-$ مجموعه‌ها برابر است با:

$$۲ \times ۲ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$$

۳۲ **چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۰،۱،۲،۵،۶ و ۷ و بدون تکرار می‌توان ساخت به طوری که از ۱۵۰۰۰ بزرگ‌تر و از ۶۲۰۰۰ کوچک‌تر باشد؟**

۱) ۲۸۸ ۲) ۳۱۲ ۳) ۳۴۸ ۴) ۳۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ۳ حالت برای آخرین رقم سمت چپ در نظر بگیرید، ۱ یا $\{2,5\}$ یا ۶.

درس Box

اصل ضرب:

فرض کنید کاری از دو قسمت تشکیل شده باشد *(برای انجام کار باید هر دو قسمت را انجام بدیم)*. اگر قسمت اول به n روش و قسمت دوم به m روش قابل انجام باشد، کل کار به $n \times m$ روش می‌تواند صورت بگیرد.

اصل جمع:

فرض کنید کاری را بتوان به چند روش مجزا انجام داد. اگر روش اول به n_1 طریق، روش دوم به n_2 طریق، ... و روش kام به n_k طریق قابل انجام باشد، کل کار به $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ روش قابل انجام است.

نکته اصل جمع در واقع همان تقسیم‌بندی مسئله، به چند حالت (که اشتراکی با هم ندارند) است و هر کدام که انجام بگیرد، کار انجام شده است.

نکته برای اصل ضرب «و» و برای اصل جمع «یا» می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ساده‌ترین حالت این است که اولین رقم سمت چپ ۲ و ۵ باشد. در این حالت سایر رقم‌ها، هر رقم دیگری ممکن است باشند، پس تعداد قابل قبول برابر است با:

$$\frac{2}{\{2,5\}} \times \frac{5}{-} \times \frac{4}{-} \times \frac{3}{-} \times \frac{2}{-} = 240$$

گام دوم: اگر آخرین رقم برابر با ۱ باشد:

$$\frac{1}{\{1\}} \times \frac{3}{\{5,6,7\}} \times \frac{4}{-} \times \frac{3}{-} \times \frac{2}{-} = 72$$

گام سوم: اگر آخرین رقم برابر ۶ باشد:

$$\frac{1}{\{6\}} \times \frac{2}{\{0,1\}} \times \frac{4}{-} \times \frac{3}{-} \times \frac{2}{-} = 48$$

گام چهارم: طبق اصل جمع تعداد اعداد برابر است با:

$$240 + 72 + 48 = 360$$

۳۳ **تیم ملی والیبال ایران ۶ بازیکن با قد مختلف دارد. آن‌ها به ترتیب وارد زمین می‌شوند. در چند حالت بلندقدترین فرد بلافاصله بعد از کوتاه‌قدترین وارد زمین نمی‌شود؟**

۱) ۸۴۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

از اصل متمم استفاده کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: بهتر است از اصل متمم استفاده کنیم. کل حالت‌های واردشدن بازیکنان برابر $6!$ است، اما کافی است حالت‌هایی که بلندقدترین (L) بلافاصله بعد از کوتاه‌قدترین (S) وارد زمین می‌شود را شمارش کرده و از کل کم کنیم.

گام دوم: در حالت‌های زیر L بلافاصله بعد از S وارد زمین می‌شود. در هر حالت سایر بازیکنان به $4!$ روش می‌توانند وارد شوند، پس تعداد این حالت‌ها برابر است با:

$5\times 4!$

$\rightarrow$

_ _ _ _ L S

_ _ _ L S _

_ _ L S _ _

_ L S _ _ _

L S _ _ _ _

گام سوم:

$$\text{مطلوب} = \text{کل} - \text{نامطلوب} = 6! - \overbrace{5\times 4!}^{5!}$$

$$= 5!(6-1) = 120\times 5 = 600$$

کنکور

رضا می‌خواهد کتاب ریاضی و ۵ کتاب درسی دیگرش را روی هم بچیند. در چند حالت مختلف هنگام چیدن کتاب‌ها، کتاب‌های بیشتری بالای کتاب ریاضی قرار می‌گیرد؟ *(سؤال ۲۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ـ نوبت دوم)*

۱) ۳۶۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۲۰۰

۳۴ چند جایگشت از حروف کلمهٔ «خیلی‌سبز» وجود دارد که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

۱) ۱۸۰۰ ۲) ۲۱۸۰ ۳) ۱۴۴۰ ۴) ۲۸۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

در حالتی که کلمه با یکی از حروف «خ، ب، ز» شروع شود، دو حرف تکراری «ی» باقی می‌ماند.

درس Box

قضیهٔ جایگشت با تکرار:

فرض کنید n شیء داریم، به طوری که n_1 تای آن‌ها از نوع اول (مثل هم)، n_2 تای آن‌ها از نوع دوم (مثل هم)، ... و n_k تای آن‌ها از نوع k اُم (مثل هم) باشند، تعداد کل جایگشت‌های اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: حروف نقطه‌دار «خ، یـ ب، ز» هستند.

گام دوم: اگر کلمه با یکی از حروف خ، ب، ز شروع شود (۳ حالت) در هر حالت ۶ حرف دیگر باقی می‌ماند که دوتا از آن‌ها مثل هم (حرف ی) هستند.

پس تعداد جایگشت‌های این مدلی برابر است با:

$$۳ \times \frac{۶!}{۲!} = ۱۰۸۰$$

گام سوم: اگر کلمه با حرف «یـ» شروع شود، ۶ حرف دیگر که تکراری نیستند باقی می‌مانند که $۶!$ جایگشت دارند، پس تعداد این جایگشت‌ها برابر $۶! = ۷۲۰$ است.

گام چهارم: تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با:

$$۱۰۸۰ + ۷۲۰ = ۱۸۰۰$$

۳۵ **چند رمز ۵ رقمی و بدون تکرار با استفاده از ارقام مجموعه‌های $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $B=\{6,7,8,9\}$ می‌توان ساخت که دقیقاً ۳ رقم از A و ۲ رقم از B در رمز به کار رفته باشد؟**

۱) ۳۶۰۰

۲) ۷۲۰۰

۳) ۳۶۰

۴) ۷۲۰

مشاوره این سؤال تمرین کتاب درسی است که تا به حال در کنکور نیامده است. با توجه به این‌که در سال‌های اخیر سؤال‌های زیادی از تمرین‌ها در کنکور آمده است، خوب آن را تحلیل کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اول از A و B انتخاب کنید و بعد بچینید.

درس Box

تلفیق مسئله‌های ترتیب و ترکیب:

در برخی از مسئله‌ها، هم نیاز به انتخاب و هم نیاز به جایگشت داریم. در این مسئله‌ها مرحله‌به‌مرحله جلو می‌رویم و طبق اصل ضرب، همهٔ حالت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

مثال **با استفاده از رقم‌های $1,2,3,\ldots,9$ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت که دو رقم زوج و یک رقم فرد داشته باشد؟**

انتخاب دو عدد زوج از بین ۸، ۶، ۴، ۲ که به $\binom{4}{2}$ روش امکان‌پذیر است.

انتخاب یک عدد فرد از بین ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ که به $\binom{5}{1}$ روش امکان‌پذیر است.

حالا ۳ عدد داریم که از جابه‌جایی آن‌ها اعداد مختلفی درست می‌شود، یعنی $3!$ جایگشت دارند. پس تعداد اعداد سه‌رقمی با شرط مسئله می‌شود:

$$\binom{4}{2}\binom{5}{1}3! = 6\times 5\times 3! = 180$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سعی می‌کنیم مرحله‌به‌مرحله حرکت کنیم و تعداد حالت‌های هر مرحله را در هم ضرب کنیم.

گام دوم: به $\binom{5}{3}$ روش، ۳ عضو از A انتخاب می‌کنیم.

گام سوم: به $\binom{4}{2}$ روش، ۲ عضو از B انتخاب می‌کنیم.

گام چهارم: ۵ شیء متمایز (۵ رقم مختلف) داریم که جابه‌جایی (چینش) آن‌ها نیز مهم است، پس به $5!$ روش نیز می‌توانیم این ارقام را بچینیم.

گام پنجم: طبق اصل ضرب تعداد رمزها برابر است با:

$$\binom{5}{3}\times\binom{4}{2}\times 5! = \frac{5\times 4}{2}\times\frac{4\times 3}{2}\times 120$$

$$= 10\times 6\times 120 = 7200$$

امتحان نهایی

اگر داشته باشیم $A=\{7,8,9\}$ و $B=\{a,b,c,d,e,f\}$، در این صورت چند کد با شش کاراکتر متمایز می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و چهار حرف از B باشد؟ *(سؤال ۱۲ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲)*

۳۶ **با ارقام ۱,۲,۳,۴,۵,۶ چند عدد ۶ رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت، به طوری که وقتی از چپ به راست نگاه می‌کنیم، رقم‌های فرد به صورت صعودی و رقم‌های زوج به صورت نزولی در عدد آمده باشند؟ (برای مثال ۱۶۴۳۵۲ یا ۶۱۳۴۲۵)**

۱) ۴۰ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint جایگاه اعداد فرد را انتخاب کنید و بعد چینش.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ۶ جایگاه به صورت زیر در نظر بگیرید. در ۳تا از این جایگاه‌ها ارقام زوج ۲,۴,۶ و در سه‌تای دیگر ارقام فرد قرار می‌گیرد.

□ □ □ □ □ □

گام دوم: به $\binom{۶}{۳}$ روش، ۳ جایگاه انتخاب می‌کنیم. مثلاً فرض کنید این ۳ جایگاه به صورت زیر باشد:

■ □ □ ■ ■ □ ۱ □ □ ۳ ۵ □

ارقام فرد را (دقیقاً به یک روش) به صورت صعودی می‌توانیم در این ۳ جایگاه قرار دهیم. شبیه همین، هر ۳ جایگاه که انتخاب کنیم، ارقام فرد را به یک روش می‌توانیم به صورت صعودی در آن‌ها قرار دهیم.

گام سوم: در ۳ جایگاه باقی‌مانده نیز ارقام زوج را فقط به یک روش به صورت نزولی می‌توانیم قرار دهیم.

گام چهارم: تعداد کل عددها برابر است با:

$$\binom{۶}{۳}\times ۱\times ۱=\frac{۶\times ۵\times ۴}{۳\times ۲\times ۱}=۲۰$$

۳۷ کارت‌هایی با شمارهٔ ۱ تا ۹ و از هر کدام (شماره) به اندازهٔ کافی در اختیار داریم. به چند طریق می‌توانیم چهار کارت انتخاب کنیم؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۴۷۵

۳) ۴۸۰ ۴) ۴۹۵

مشاوره روی تعبیر معادلهٔ سیالهٔ خطی کار کنید. این سؤال یکی از آن‌ها است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint یک معادلهٔ سیالهٔ خطی مناسب بنویسید و تعداد جواب‌های صحیح نامنفی آن را پیدا کنید.

درس Box **تعداد جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ خطی در حالت‌های مختلف:**

معادله	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی	تعبیر یا روش حل
$\underbrace{x_1+x_2+\cdots+x_k}_{k\text{ تا متغیر}}=n$	$\binom{n+k-1}{k-1}$	توزیع n شیء یکسان بین k نفر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع
$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_k=n\\x_1\geq a\end{cases}$	$\binom{n+k-1-a}{k-1}$	اگر متغیری شرط بزرگ‌تر یا مساوی (حداقلی) داشته باشد، آن را از n کم می‌کنیم.
$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_k=n\\x_i\geq 1, i=1,2,\ldots,n\end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$	تعداد جواب‌های طبیعی معادله
$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_k=n\\x_1\leq a\end{cases}$	$\binom{n+k-1}{k-1}-\binom{n-(a+1)+k-1}{k-1}$	کل جواب‌ها را از جواب‌های با شرط $x_1\geq a+1$ کم می‌کنیم.
$x_1+x_2+\cdots+x_k\leq n$	$\binom{n+k}{k}$	متغیر نامنفی x_{k+1} را اضافه کرده تا نامعادله تبدیل به معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}=n$ گردد.
$ax_1+\cdots+x_k=n$ $x_1^n+\cdots+x_k=n$ $\sqrt{x}+\cdots+x_k=n$	—	متغیر دارای ضریب، توان، رادیکال و ... را حالت‌بندی می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** کافی است مسئله را به زبان معادلهٔ سیالهٔ خطی بنویسیم.

تعداد کارت‌های انتخاب‌شدهٔ شمارهٔ ۱ را با x_1، تعداد کارت‌های شمارهٔ ۲ را با x_2 و ... و تعداد کارت‌های انتخاب‌شدهٔ شمارهٔ ۹ را با x_9 نمایش می‌دهیم. چون قرار است ۴ کارت انتخاب کنیم، پس کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را به دست آوریم:

$$x_1+x_2+\cdots+x_9=4$$

گام دوم:

$$\xrightarrow[k=9]{n=4}\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{4+9-1}{9-1}=\binom{12}{8}=\binom{12}{4}=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=495$$

۳۸ دستگاه معادلهٔ $\begin{cases}\sqrt{x_1}+x_2+x_3=7\\ x_1+x_2+\cdots+x_5=10\end{cases}$، چند جواب صحیح و نامنفی دارد که x_1, x_2, x_3 طبیعی باشند؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint x_1 را حالت‌بندی کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** x_1 باید مربع کامل باشد، پس حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_1=9,\ x_1=4,\ x_1=1$$

دقت کنید اگر $x_1=16$ باشد، معادلهٔ دوم جواب نامنفی ندارد.

گام دوم:

$$x_1=1 \Rightarrow \begin{cases}1+x_2+x_3=7 \Rightarrow x_2+x_3=6 \xrightarrow{\text{جواب‌های طبیعی}} \binom{5}{1}\\ 1+\underbrace{x_2+x_3}_{6}+x_4+x_5=10 \Rightarrow x_4+x_5=3 \xrightarrow[\text{صحیح نامنفی}]{\text{جواب‌های}} \binom{4}{1}\end{cases}$$

طبق اصل ضرب در این حالت، دستگاه $\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}=20$ جواب دارد.

گام سوم:

$$x_1=4 \Rightarrow \begin{cases}x_2+x_3=5 \xrightarrow{\text{جواب‌های طبیعی}} \binom{4}{1}\\ 4+\underbrace{x_2+x_3}_{5}+x_4+x_5=10 \Rightarrow x_4+x_5=1 \xrightarrow[\text{صحیح نامنفی}]{\text{جواب‌های}} \binom{2}{1}\end{cases}$$

در این حالت نیز دستگاه $\binom{4}{1}\times\binom{2}{1}=8$ جواب دارد.

$$x_1=9 \Rightarrow \begin{cases}x_2+x_3=4\\ 9+\underbrace{x_2+x_3}_{4}+x_4+x_5=10 \Rightarrow x_4+x_5=-3\end{cases}$$

در این حالت دستگاه جواب، نامنفی ندارد.

گام چهارم: طبق اصل جمع دستگاه دارای $28=8+20$ جواب است.

کنکور **تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+0/4x_2+\sqrt{x_3}+x_4=4$ کدام است؟**

(سؤال ۳۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۲۲ ۴) ۲۱

۳۹ در مربع لاتین زیر، $x+y$ چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۴	۱	۳	۲
۳			
۲		x	
۱			y

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

مشاوره چند سالی است که از مربع لاتین سؤالی در کنکور نیامده است. امسال احتمال زیاد آن را خواهید دید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

فرض کنید $x=۱$ یا $x=۴$ و در هر حالت مربع را کامل کنید.

درس Box

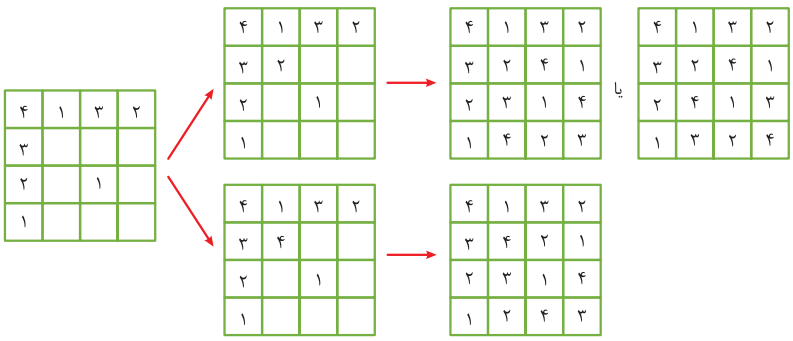
تعریف مربع لاتین $n\times n$:

یک جدول مربعی $(n\times n)$ که هر سطر و هر ستون با اعداد ۱، ۲، ۳، ... و n به گونه‌ای پر شده باشد که در هیچ سطر آن و هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد را یک مربع لاتین می‌گوییم. به هر یک از اعداد درون مربع لاتین، یک درایه (شبیه ماتریس) می‌گوییم.

پاسخ خیلی تشریحی

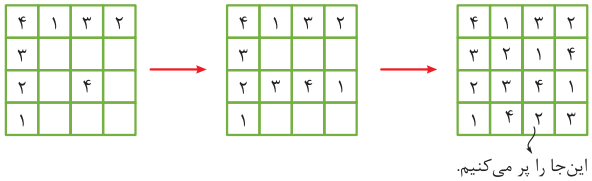
گام اول: $x=۱$ یا $x=۴$ می‌تواند باشد، پس دو حالت در نظر می‌گیریم:

گام دوم: اگر $x=۱$ باشد. برای مربع رنگی نیز دو حالت در نظر می‌گیریم:



در حالت اول دو مربع لاتین به وجود می‌آید در یکی $x+y=۱+۳=۴$ و در دیگری $x+y=۱+۴=۵$ در حالت دوم نیز یک مربع لاتین داریم که $x+y=۱+۳=۴$

گام سوم: اگر $x=۴$ باشد.



پس در این حالت فقط یک مربع لاتین به وجود می‌آید و $x+y=۷$، پس $x+y$ برابر با ۴، ۵ و ۷ می‌تواند باشد.

۴۰ **دو مربع لاتین A و B متعامدند، ولی مربع لاتین C با A متعامد نیست. کدام گزینه درست نیست؟**

مشاوره روی ساختار مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ خیلی مسلط باشید.

۱) C و B حتماً متعامدند.

۲) درایه‌های روی قطر اصلی A یکسان است.

۳) درایه‌های روی قطر اصلی C یکسان است.

۴) B و مربع لاتین ممکن است متعامد باشند..

B:

۱		
	۲	

		۳
	۳	

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint در مربع‌های لاتین ۳×۳، وقتی دو مربع متعامدند که در یکی درایه‌های روی قطر اصلی یکسان و در دیگری درایه‌های روی قطر فرعی یکسان باشد.

درس Box

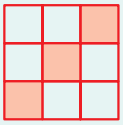
تعریف دو مربع لاتین متعامد:

A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه هستند. از کنار هم قراردادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل می‌شود که هر خانهٔ آن شامل یک عدد دو رقمی است که رقم سمت چپ مربوط به A و رقم سمت راست مربوط B است (یا برعکس). اگر هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع تکرار نشده باشند، می‌گوییم A و B متعامد هستند.

ساختار مربع‌های لاتین ۳×۳:

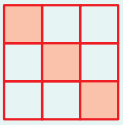
می‌توانیم ثابت کنیم تعداد ۱۲ مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد. این‌ها را می‌توانیم به دو گروه ۶تایی (گروه A و گروه B) تقسیم کنیم:

مثلاً:



گروه B: روی قطر فرعی یکسان (۶تا) مثل

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲



گروه A: روی قطر اصلی یکسان (۶تا) مثل

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

هر کدام از مربع‌های گروه A یا B با خودشان متعامد نیستند، ولی با مربع‌های گروه دیگر متعامد هستند.

نکته برای هر مربع لاتین ۳×۳ تعداد ۶ مربع لاتین متعامد با آن وجود دارد.

نکته در مربع‌های لاتین ۳×۳ اگر دو سطر (یا دو ستون) را جابه‌جا کنیم، مربع به‌دست‌آمده با مربع اول متعامد است. *(در واقع اگه مربع تو گروه A باشه با این کار مربع جدید میره تو گروه B).*

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق درس‌باکس درایه‌های روی قطر اصلی B یکسان نیستند، پس درایه‌های روی قطر فرعی آن‌ها یکسان هستند. هم‌چنین چون A و B متعامدند، درایه‌های روی قطر اصلی A یکسان هستند. (گزینهٔ (۲) درست)

گام دوم: چون C با A متعامد نیست، پس درایه‌های روی قطر اصلی C یکسان است، پس B و C متعامد هستند. اما چون درایه‌های قطر فرعی B و مربع داده‌شده در گزینهٔ (۴) یکسان هستند، پس این دو مربع نمی‌توانند متعامد باشند.

۴۱ **شخصی در فاصلهٔ ۱۶۰ متری از یک دیوار ایستاده است. این شخص رو به صخره فریاد می‌زند و ۱s بعد، پژواک صدایش را می‌شنود. اگر بسامد صدای فریاد شخص ۸ kHz باشد، طول موج آن چند سانتی‌متر است؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا تندی انتشار صوت در محیط را به دست آورید، سپس با معلوم‌بودن بسامد، طول موج آن را حساب کنید.

درس Box

تندی انتشار موج:

اگر جبههٔ موج در مدت Δt مسافت L را طی کند، تندی انتشار موج از رابطهٔ $v = \frac{L}{\Delta t}$ به دست می‌آید که در یک محیط معین، مقداری ثابت است. از آن‌جا که طول موج λ در دورهٔ T طی می‌شود، داریم:

$$\lambda = Tv = \frac{v}{f}$$

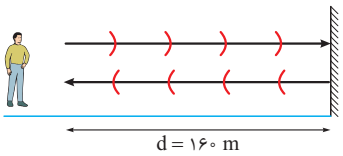
v: تندی انتشار موج (m/s)

λ: طول موج (m)

T: دوره (s)

f: بسامد (Hz)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** اگر فاصلهٔ شخص تا دیوار را با d نشان دهیم، مسافت طی‌شده در مدت یک ثانیه به اندازهٔ $\ell = 2d$ خواهد بود، زیرا مربوط به رفت و برگشت صوت است. بر این اساس، تندی انتشار صوت در محیط را به دست می‌آوریم:

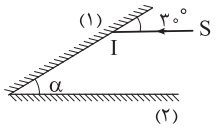


$$v = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 1\,s]{\ell = 2d = 2\times 160 = 320\,m} v = \frac{320}{1} = 320\,m/s$$

گام دوم: با معلوم‌بودن بسامد، طول موج صوت را پیدا می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow[f = 8\,kHz = 8000\,Hz]{v = 320\,m/s} \lambda = \frac{320}{8000} = 0/04\,m \Rightarrow \lambda = 4\,cm$$

۴۲ در شکل زیر، پرتو نور SI به آینهٔ (۱) می‌تابد. اگر زاویهٔ تابش این پرتو، در چهارمین برخورد با آینه‌ها صفر درجه باشد، زاویهٔ بین دو آینه (α) چند درجه است؟



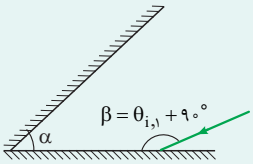
۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۲۵
۴) ۳۰

مشاوره برای پاسخ‌دهی سریع به برخی تست‌های آینه‌های متقاطع، لازم است با روابط تستی خاصی آشنا باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

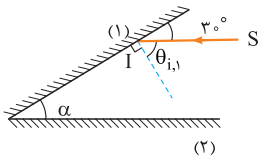
اگر دو آینهٔ تخت متقاطع با یکدیگر زاویهٔ تند (حادهٔ) α بسازند و پرتو نور با زاویهٔ تابش $\theta_{i,1}$ بر سطح یکی از آن‌ها بتابد، زاویهٔ بازتاب در n امین برخورد پرتو به آینه‌ها، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\theta_{r,n} = |(n-1)\alpha - \theta_{i,1}|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا به کمک شکل، زاویهٔ $\theta_{i,1}$ را به دست می‌آوریم:



$$\theta_{i,1} + ۳۰^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \theta_{i,1} = ۶۰^\circ$$

گام دوم: با توجه به این‌که با چهارمین پرتوی بازتاب از آینه‌ها سروکار داریم، $n = ۴$ است. از طرفی زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب در هر برخوردی با سطح آینه‌ها، یکسان است؛ بنابراین در چهارمین برخورد نیز داریم:

$$\theta_{i,۴} = \theta_{r,۴} = ۰^\circ$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\theta_{r,n} = |(n-1)\alpha - \theta_{i,1}| \Rightarrow ۰ = (۴-1)\alpha - ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۰^\circ$$

۴۳ یک پرتو نور با زاویهٔ تابش θ از هوا بر سطح یک محیط شفاف می‌تابد؛ بخشی از آن بازتاب شده و بخشی شکست می‌یابد. اگر پرتو بازتابیده عمود بر پرتو شکست‌یافته باشد، ضریب شکست محیط شفاف برابر با کدام گزینه است؟ ($n_{هوا} = ۱$)

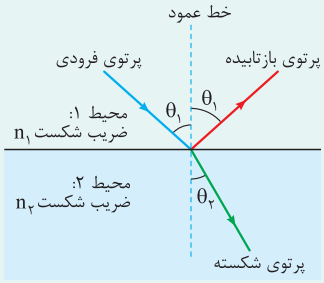
۱) $\tan\theta$ ۲) $\cot\theta$

۳) $\frac{۱}{\sin\theta}$ ۴) $\frac{۱}{\cos\theta}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

قانون شکست اسنل برای شکست پرتوی نور، به صورت زیر به کار می‌رود:



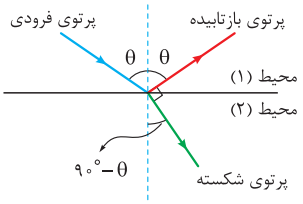
$$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲$$

$n_۱$: ضریب شکست محیط اول

$n_۲$: ضریب شکست محیط دوم

پاسخ خیلی تشریحی ✔

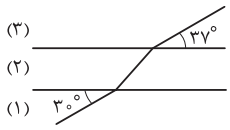
اگر زاویهٔ تابش را با θ نشان دهیم، زاویهٔ بازتابش نیز برابر با θ است و با توجه به عمودبودن پرتوهای بازتابیده و شکسته بر یکدیگر، زاویهٔ شکست در محیط دوم برابر با $۹۰^\circ - \theta$ خواهد بود.



$$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ \xrightarrow[\theta_۲ = ۹۰^\circ - \theta]{\theta_۱ = \theta,\ n_۱ = ۱} ۱\sin\theta = n_۲ \sin(۹۰^\circ - \theta)$$

$$\Rightarrow \sin\theta = n_۲ \cos\theta \Rightarrow n_۲ = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow n_۲ = \tan\theta$$

۴۴ جبههٔ موج تختی در سه محیط با مرزهای موازی به شکل زیر است. اگر طول موج این موج در محیط (۲)، ۱/۵ برابر طول موج آن در محیط (۱) باشد، طول موج این موج در محیط (۳) چند برابر طول موج آن در محیط (۲) است؟ $(\sin 37^\circ = 0/6)$



۱) $\frac{۴}{۵}$
۲) $\frac{۵}{۴}$
۳) $\frac{۵}{۹}$
۴) $\frac{۹}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

هنگام شکست موج؛ در یک نمودار پرتویی، زاویهٔ پرتو فرودی با خط عمود بر مرز جدایی دو محیط را با θ_i یا θ_1 نشان می‌دهیم و آن را **زاویهٔ تابش** می‌نامیم.

هم‌چنین زاویهٔ پرتو شکسته با خط عمود بر مرز جدایی دو محیط را با θ_r یا θ_2 نشان می‌دهیم وآن را **زاویهٔ شکست** می‌نامیم.

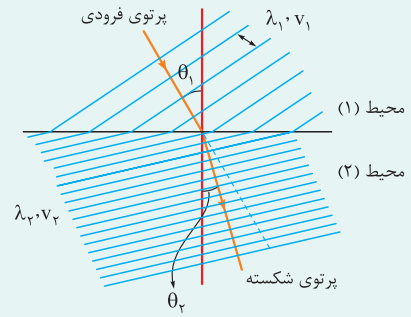
با توجه به قانون شکست عمومی، هنگامی که موج از یک محیط وارد محیط دیگری می‌شود، می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

λ_1: طول موج در محیط اول (m) $\quad$ v_1 = تندی انتشار موج در محیط اول (m / s)

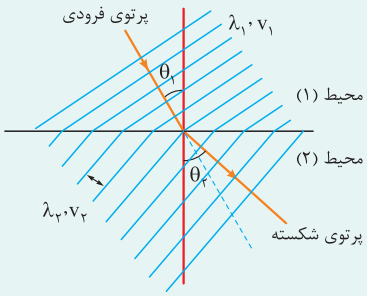
λ_2: طول موج در محیط دوم (m) $\quad$ v_2 = تندی انتشار موج در محیط دوم (m / s)

نمودار پرتویی در شکست:



شکل (۱)

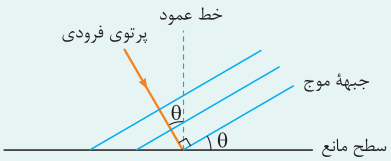
$\lambda_2 < \lambda_1$
$v_2 < v_1$
$\theta_2 < \theta_1$



شکل (۲)

$\lambda_2 > \lambda_1$
$v_2 > v_1$
$\theta_2 > \theta_1$

- این قانون، هم در مورد موج‌های مکانیکی مانند صوت و هم در مورد موج‌های الکترومغناطیسی مانند نور مرئی، صادق است.
- در هر محیط، زاویهٔ بین جبههٔ موج و سطح جدایی دو محیط (مانع)، همان زاویهٔ پرتو با خط عمود است.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: توجه داشته باشید که در شکل، جبهه‌های موج دیده می‌شوند، بنابراین با توجه به قسمت آخر درس‌باکس، زاویه‌های θ_1 و θ_3 معلوم می‌شوند:

$$\theta_1 = 30^\circ, \theta_3 = 37^\circ$$

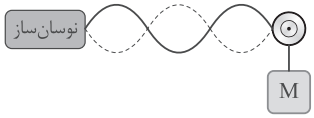
پس می‌توانیم نسبت $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ را به دست آوریم:

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_1} = \frac{\sin 37^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{0/6}{0/5} = \frac{6}{5}$$

گام دوم: برای به دست آوردن نسبت $\frac{\lambda_3}{\lambda_2}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \xrightarrow[\lambda_2 = 1/5\lambda_1]{\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \frac{6}{5}} \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{6}{5} \times \frac{\lambda_1}{1/5\lambda_1} = \frac{4}{5}$$

۴۵ در شکل زیر، نوسان‌ساز، تار را با بسامد معینی به ارتعاش درمی‌آورد و در طول تار سه شکم ایجاد می‌کند. جرم وزنه چند درصد و چگونه تغییر کند تا در طول تار ۶ شکم تشکیل شود؟ (در اثر تغییر جرم وزنه، چگالی خطی جرم طناب تغییر نمی‌کند.)



۱) ۲۵، کاهش یابد.

۲) ۲۵، افزایش یابد.

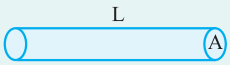
۳) ۷۵، کاهش یابد.

۴) ۷۵، افزایش یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

تندی انتشار موج در یک تار یا ریسمان کشیده‌شده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{m}{L}$$

v: تندی انتشار موج (m/s)

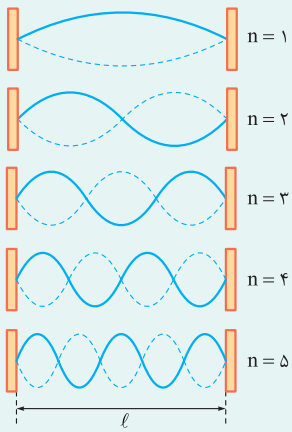
F: نیروی کشش (N)

μ: چگالی خطی جرم (kg/m)

m: جرم (kg)

L: طول (m)

بسامدهای تشدید تار: هر تار مرتعش، به ازای بسامدهای معینی می‌تواند به تشدید درآید و موج‌های ایستادهٔ بارز یا اصطلاحاً مُدهای نوسانی را تولید کند. به این بسامدهای خاص، بسامدهای تشدید می‌گویند.



بسامد هماهنگ nاُم یک تار مرتعش با دو انتهای بسته، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

f_n: بسامد هماهنگ nاُم (Hz)

n: شمارهٔ هماهنگ = تعداد شکم = ۱− تعداد گره

v: تندی انتشار موج در تار (m/s)

L: طول تار (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** دو رابطهٔ $f_n = \frac{nv}{2L}$ و $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ را با یکدیگر ترکیب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f_n = \frac{nv}{2L} \\ v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

با توجه به ثابت‌بودن L و μ، بین دو حالت مختلف می‌توان نوشت:

(توجه داشته باشید که با تغییر جرم وزنه، بسامد نوسان‌ساز تغییر نمی‌کند.)

$$\frac{f_{n_2}}{f_{n_1}} = \frac{n_2}{n_1}\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \xrightarrow[n_1=3,\, n_2=6]{f_{n_2}=f_{n_1}} 1 = \frac{6}{3}\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}$$

گام دوم: نیروی کشش تار، ناشی از وزن جرم آویخته به تار است $(F = Mg)$:

$$1 = 2\sqrt{\frac{M_2 g}{M_1 g}} \Rightarrow \frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{4}$$

اکنون درصد تغییرات جرم وزنهٔ M را به دست می‌آوریم:

$$\frac{M_2 - M_1}{M_1} \times 100 = \frac{\frac{1}{4}M_1 - M_1}{M_1} \times 100 = \frac{-\frac{3}{4}M_1}{M_1} \times 100 = -\%75$$

علامت منفی نشان می‌دهد که جرم وزنه کاهش یافته است.

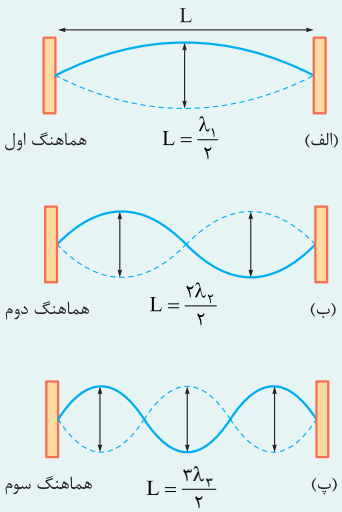
۴۶ در تاری که دو انتهای آن ثابت و طول آن ۶۰ cm است، موج ایستاده تشکیل شده است. اگر تعداد گره‌های ایجادشده در تار برابر ۳ و تندی انتشار موج عرضی در آن برابر ۱۸۰ m / s باشد، بسامد و طول موج صوتی گسیل‌شده از تار، به ترتیب از راست به چپ، چند هرتز و چند سانتی‌متر است؟ (تندی انتشار صوت در هوا ۳۴۵ m / s است.)

۱) ۳۰۰، ۶۰
۲) ۳۰۰، ۱۱۵
۳) ۴۵۰، ۶۰
۴) ۴۵۰، ۱۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

رابطهٔ بسامدهای تشدید تار: در یک تار (ریسمان) مرتعش که بین دو نقطه بسته‌شده، ساده‌ترین نقش موج ایستاده در بسامدهای تشدیدی تار، یک شکم در وسط و دو گره در طرفین تار دارد که به همراه نقش‌های دوم و سوم آن در شکل‌های زیر دیده می‌شوند.



وقتی یک تار مرتعش، صوت تولید می‌کند، بسامدی که تار مرتعش با آن نوسان می‌کند، همان بسامد صوت منتشرشده در محیط است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: بسامد تار مرتعش را در این حالت به دست می‌آوریم:

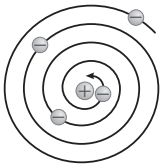
$$f_n=\frac{nv}{2L} \xrightarrow[L=60\,cm=0/6\,m]{n=3-1=2,\ v=180\,m/s} f_2=\frac{2\times 180}{2\times 0/6}=300\,Hz$$

بسامد صوت منتشرشده در محیط نیز همان ۳۰۰ Hz است.

گام دوم: طول موج امواج صوتی حاصل در هوا را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{v}{f} \xrightarrow[f=300\,Hz]{v=345\,m/s} \lambda=\frac{345}{300}=1/15\,m=115\,cm$$

۴۷ **شکل زیر، مسیر حرکت الکترون به دور هسته را در مدل اتمی رادرفورد نشان می‌دهد. بنابر فیزیک کلاسیک، در این مسیر، انرژی الکترون و طول موجِ موج الکترومغناطیسی گسیلی آن، به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کند؟**



۱) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۳) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

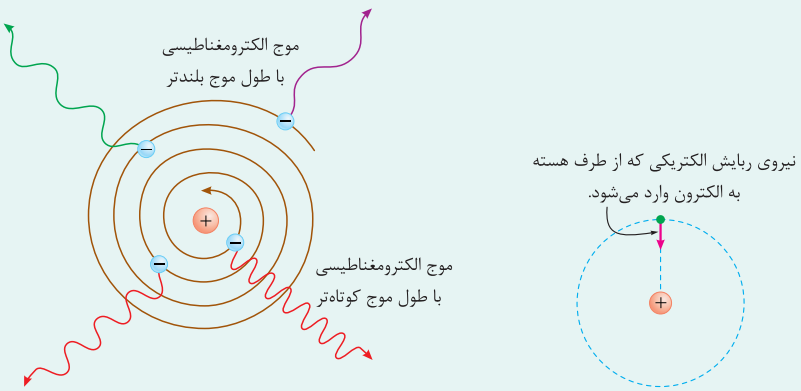
۴) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اِشکال اساسی مدل اتمی رادرفورد آن است که نمی‌تواند پایداری حرکت الکترون‌ها در مدارهای اتمی و در نتیجه پایداری اتم‌ها را توضیح دهد. در این مدل اگر الکترون‌ها را نسبت به هسته، ساکن فرض کنیم باید تحت تأثیر نیروی ربایش الکتریکی بین هسته و الکترون، روی هسته سقوط کنند و در نتیجه اتم، ناپایدار باشد (شکل الف).

اگر هم فرض کنیم که الکترون‌ها به دور هسته در گردش باشند، باز هم این حرکت پایدار نمی‌ماند، زیرا حرکت الکترون به دور هسته، یک حرکت شتاب‌دار است و بنابه نظریهٔ الکترومغناطیسی کلاسیک، باید این الکترون، موج الکترومغناطیسی گسیل کند و از انرژی آن کاسته شود، پس شعاع مدار الکترون به دور هسته، کوچک‌تر و بسامد حرکت آن بیشتر می‌شود، یعنی بسامد موج الکترومغناطیسی گسیل‌شده نیز به تدریج زیادتر و طول موج تابشی آن کوتاه‌تر می‌شود. به این ترتیب باید طیف موج الکترومغناطیسی گسیل‌شده از اتم، پیوسته باشد و الکترون پس از گسیل متوالی موج‌های الکترومغناطیسی، روی هسته بیفتد (شکل ب).



(ب) (الف)

برای هر موج الکترومغناطیس می‌توان نوشت:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

λ: طول موج (m)

c: تندی نور در هوا و خلأ $= ۳\times ۱۰^{۸}\ m/s$

f: بسامد (Hz)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به متن درس‌باکس، بنابر فیزیک کلاسیک، در مسیر نشان‌داده‌شده، انرژی الکترون و طول موجِ موج الکترومغناطیسی گسیلی از آن، هر دو کاهش می‌یابند.

$$\downarrow \lambda = \frac{c}{\uparrow f}$$

۴۸ چند مورد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) همهٔ اجسام در هر دمایی که باشند، از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند.

ب) تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد، ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است.

پ) بنابر مدل تامسون، اتم همچون کره‌ای است که بار مثبت به طور همگن در سرتاسر آن گسترده شده است و الکترون‌ها در جاهای مختلف آن پراکنده شده‌اند.

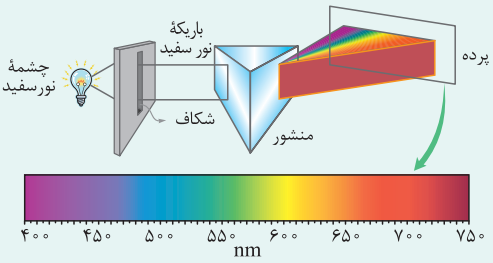
ت) در پدیدهٔ فلوئورسانی، طول موج‌های گسیل‌یافته از جسم معمولاً برابرِ همان طول موج نور فرودی یا بزرگ‌تر از آن است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

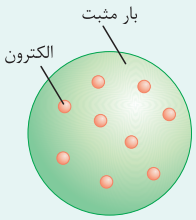
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

تابش گرمایی: همهٔ اجسام در هر دمایی که باشند، از خود موج‌های الکترومغناطیسی گسیل (نشر) می‌کنند که به آن تابش گرمایی گفته می‌شود. برخی از این موج‌های الکترومغناطیس را که در محدودهٔ نور مرئی هستند، می‌توان با عبوردادن از وسیله‌ای مانند منشور، تجزیه کرد و طیف آن‌ها را تشکیل داد.



طیف پیوسته: این طیف ناشی از نور جامدات ملتهب یا مایع‌های حاصل از ذوب آن‌هاست، مانند طیف حاصل از نور رشتهٔ داغ یک لامپ روشن. این طیف شامل گسترهٔ پیوسته‌ای از طول موج‌هاست، به همین دلیل طیف ایجادشده را پیوسته می‌نامیم. تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد، ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است.



مدل اتمی تامسون: در مدل تامسون، اتم به صورت کره‌ای است که بار مثبت به طور همگن در سرتاسر آن گسترده شده است و الکترون‌ها که سهم ناچیزی در جرم اتم دارند، در جاهای مختلف مانند دانه‌های کشمش در یک کیک کشمشی پخش شده‌اند.

پدیدهٔ فلوئورسانی: وقتی که نور فرابنفش به بسیاری از مواد تابیده شود، تابش مرئی از خود گسیل می‌کند. آزمایش نشان می‌دهد که در این پدیده، طول موج‌های گسیل‌یافته معمولاً برابر همان طول موج نور فرودی یا بزرگ‌تر از آن است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به متن درس‌باکس، همهٔ عبارت‌های مطرح‌شده در متن سؤال، درست هستند و گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴۹ طول موج فوتون A از طول موج فوتون B، ۶۰ nm بیشتر است. اگر اختلاف بسامد این دو فوتون ۲۵۰ THz باشد، انرژی فوتون A، چند برابر انرژی فوتون B است؟ $(c = ۳\times ۱۰^{۸}\ m/s)$

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

بنا به نظریهٔ فوتوالکتریک اینشتین، نور (مرئی و غیرمرئی) با بسامد f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بسته‌های انرژی در نظر گرفت. هر بستهٔ انرژی که بعدها فوتون نامیده شد، دارای انرژی‌ای است که از رابطهٔ $E = hf$ به دست می‌آید.

E: انرژی (J)

h: ثابت پلانک $(۶/۶\times ۱۰^{-۳۴}\ J.s)$

f: بسامد (Hz)

بنابراین انرژی کل موج الکترومغناطیس برای n فوتون، از رابطهٔ $E = nhf = nh\frac{c}{\lambda}$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اختلاف بسامد فوتون‌های A و B را برحسب طول موج آن‌ها می‌نویسیم و طول موج هر یک از فوتون‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$\lambda_A > \lambda_B \xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}} f_B > f_A$$

$$\lambda_A - \lambda_B = ۶۰\ nm$$

$$f_B - f_A = ۲۵۰\ THz = ۲۵۰\times ۱۰^{۱۲}\ Hz$$

$$f_B - f_A = \frac{c}{\lambda_B} - \frac{c}{\lambda_A} = c(\frac{۱}{\lambda_B} - \frac{۱}{\lambda_A}) = c(\frac{\lambda_A - \lambda_B}{\lambda_A\lambda_B})$$

$$\xrightarrow[c=۳\times ۱۰^{۸}\ m/s]{f_B - f_A = ۲۵۰\times ۱۰^{۱۲}\ Hz,\ \lambda_A - \lambda_B = ۶۰\ nm = ۶۰\times ۱۰^{-۹}\ m} ۲۵۰\times ۱۰^{۱۲} = ۳\times ۱۰^{۸}(\frac{۶۰\times ۱۰^{-۹}}{\lambda_A\lambda_B})$$

$$\Rightarrow \lambda_A\lambda_B = \frac{۱۸۰\times ۱۰^{-۱}}{۲۵۰\times ۱۰^{۱۲}} = ۰/۷۲\times ۱۰^{-۱۳} = ۷۲۰۰۰\times ۱۰^{-۱۸}\ m^۲ = ۷۲۰۰۰\ nm^۲$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}\lambda_A\lambda_B = ۷۲۰۰۰\ (nm)^۲ \\ \lambda_A - \lambda_B = ۶۰\ nm\end{matrix}\right\} \Rightarrow (\lambda_B + ۶۰)\lambda_B = ۷۲۰۰۰ \Rightarrow \lambda_B^۲ + ۶۰\lambda_B - ۷۲۰۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow \lambda_B = -۳۰ \pm \sqrt{۹۰۰ + ۷۲۰۰۰} = -۳۰ \pm ۳۰\sqrt{۱+۸۰} = -۳۰ \pm ۲۷۰ \Rightarrow \begin{cases}\lambda_B = ۲۴۰\ nm \\ \lambda_B = -۳۰۰\ nm\end{cases}$$ طول موج نمی‌تواند منفی باشد.

$$\Rightarrow \lambda_A = \lambda_B + ۶۰ = ۲۴۰ + ۶۰ = ۳۰۰\ nm$$

گام دوم: نسبت انرژی فوتون A به انرژی فوتون B را حساب می‌کنیم:

$$E = h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{E_A}{E_B} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{۲۴۰}{۳۰۰} = \frac{۴}{۵}$$

۵۰ یک لامپ تک‌رنگ در هر دقیقه $۱/۸\times۱۰^{۲۱}$ فوتون با طول موج $۴۹۶\ nm$ تابش می‌کند. توان لامپ چند وات است؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm$ و $e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$

۱) ۹۶
۲) ۹/۶
۳) ۱۲
۴) ۱/۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

- توان یک چشمهٔ موج الکترومغناطیس از رابطهٔ $P = \frac{E}{t}$ به دست می‌آید.

P: توان (W)

E: انرژی تابشی (J)

t: زمان (s)

- **الکترون‌ولت (eV)**: الکترون‌ولت، یکای انرژی در فیزیک اتمی و فیزیک هسته‌ای است. یک الکترون‌ولت بنابه تعریف، برابر مقدار تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک الکترون در جابه‌جایی بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل $۱V$ است.

$$۱\ eV = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C\times۱\ V = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ J$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک رابطهٔ $E = n\frac{hc}{\lambda}$، انرژی فوتون‌های گسیلی از این لامپ را به دست می‌آوریم:

$$E = n\frac{hc}{\lambda} \xrightarrow[\lambda=۴۹۶\ nm]{n=۱/۸\times۱۰^{۲۱},\ hc=۱۲۴۰\ eV.nm} E = ۱/۸\times۱۰^{۲۱}\times\frac{۱۲۴۰}{۴۹۶} = ۴/۵\times۱۰^{۲۱}\ eV$$

گام دوم: انرژی به‌دست‌آمده را برحسب ژول می‌نویسیم و توان لامپ را محاسبه می‌کنیم:

$$E = ۴/۵\times۱۰^{۲۱}\ eV\times\frac{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ J}{۱\ eV} = ۷/۲\times۱۰^{۲}\ J = ۷۲۰\ J$$

گام سوم: با معلوم‌بودن زمان تابش، توان لامپ را پیدا می‌کنیم:

$$P = \frac{E}{t} \xrightarrow[t=۱\ min=۶۰\ s]{E=۷۲۰\ J} P = \frac{۷۲۰}{۶۰} = ۱۲\ W$$

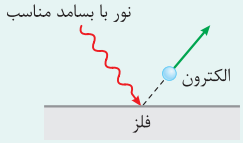
۵۱ **در آزمایش فوتوالکتریک، بر سطح فلزی با بسامد آستانهٔ f_0، نوری با بسامد f می‌تابد که $f > f_0$ است. اگر با ثابت‌ماندن بسامد نور تابیده، شدت آن افزایش یابد، تعداد فوتوالکترون‌ها و بیشینهٔ انرژی جنبشی آن‌ها، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کند؟**

۱) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
۲) افزایش می‌یابد، تغییر نمی‌کند.
۳) تغییر نمی‌کند، افزایش می‌یابد.
۴) تغییر نمی‌کند، تغییر نمی‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اثر فوتوالکتریک: وقتی نوری با بسامد مناسب مانند نور فرابنفش، به سطحی از فلز بتابد، الکترون‌هایی از آن گسیل می‌شوند. این پدیدهٔ فیزیکی را اثر فوتوالکتریک و الکترون‌های جداشده از سطح فلز را فوتوالکترون می‌نامند.



بسامد آستانه (f_0): کم‌ترین بسامدی است که اثر فوتوالکتریک به ازای آن رخ می‌دهد و به جنس فلز بستگی دارد.

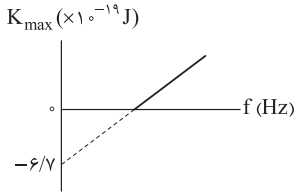
برای نوری که فوتون‌های آن دارای حداقل انرژی لازم برای وقوع پدیدهٔ فوتوالکتریک هستند ($f > f_0$)، افزایش شدت نور (با ثابت‌ماندن بسامد) فقط سبب افزایش تعداد فوتون‌ها و در نتیجه افزایش تعداد فوتوالکترون‌ها می‌شود، در حالی که انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها بدون تغییر می‌ماند.

انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل‌شده (K_{max}) به شدت نور فرودی بر سطح فلز بستگی ندارد، بلکه به بسامد نور فرودی و جنس فلزی که نور بر آن می‌تابد بستگی دارد. هر قدر بسامد نور فرودی بیشتر باشد، K_{max} بیشتر خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

آزمایش نشان می‌دهد در شرایطی که پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد، با ثابت‌ماندن بسامد نور تابشی، هر قدر شدت آن را افزایش دهیم، بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها تغییر نمی‌کند، بلکه فقط تعداد آن‌ها بیشتر می‌شود. مثلاً اگر برای یک فلز معین با نور بنفش پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ دهد، وقتی به جای لامپ بنفش ۱۰۰ واتی، یک لامپ بنفش ۲۰۰ واتی به کار ببریم، تعداد فوتوالکترون‌ها افزایش می‌یابد، ولی بیشینهٔ انرژی جنبشی آن‌ها تغییر نمی‌کند.

۵۲ در یک آزمایش فوتوالکتریک، نمودار بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها برحسب بسامد نور فرودی بر سطح فلز به شکل زیر است. در حالتی که نوری با طول موج ۱۰۰ nm بر سطح این فلز می‌تابد، بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های گسیل‌شده، چند مگامتر بر ثانیه است؟ $(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C$ و $hc = ۱۲۰۰\ eV.nm$ ، $m_e = ۹\times۱۰^{-۳۱}\ kg)$



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

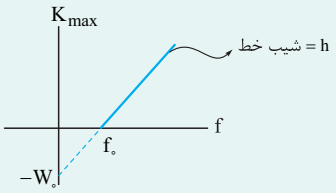
۳) $\frac{۵}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) نمودار تغییرات K_{max} برحسب f به صورت خط راستی است که محور افقی را در $f = f_۰$ قطع می‌کند.



اگر $f > f_۰$ باشد، فوتون‌ها می‌توانند الکترون‌ها را از فلز خارج کنند.

اگر $f = f_۰$ باشد، الکترون‌ها بدون هیچ انرژی جنبشی‌ای در آستانهٔ ترک فلز قرار می‌گیرند.

اگر $f < f_۰$ باشد، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد.

- برای فلزهای مختلف، مقدارهای $f_۰$ و $W_۰$ یکسان نیست، ولی شیب خط همهٔ آن‌ها یکسان بوده و با هم موازی‌اند.

۲) **معادلهٔ فوتوالکتریک:**

$$K_{max} = hf - W_۰ = \frac{hc}{\lambda} - W_۰$$

K_{max}: انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل‌شده از یک فلز خاص. (J) و (eV)

$W_۰$: تابع کار فلز = کمینهٔ کار لازم برای خارج‌کردن یک الکترون از سطح یک فلز معین است که به جنس فلز بستگی دارد. (J) و (eV)

f: بسامد نور تابشی (Hz)

c: تندی نور در هوا و خلأ $= ۳\times۱۰^{۸}\ m/s$

h: ثابت پلانک (J.s) و (eV.s)

λ: طول موج نور تابشی (m) و (nm)

کمیت یا ثابت فیزیکی / یکا	یکای SI	یکای فیزیک اتمی
h	$۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}$ J.s	$۴/۱۴\times۱۰^{-۱۵}$ eV.s
hc	$۱۹/۹\times۱۰^{-۲۶}$ J.m	۱۲۴۰ eV.nm
λ	m	nm
$W_۰$	J	eV
K_{max}	J	eV

۳) **رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی برحسب تندی:**

$$K_{max} = \frac{۱}{۲}mv_{max}^{۲}$$

m: جرم هر الکترون $= ۹/۱\times۱۰^{-۳۱}\ kg$

v_{max}: بیشینهٔ تندی هر الکترون (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیل‌شده را به دست می‌آوریم:

$$K_{max}=\frac{hc}{\lambda}-W_{\circ}\xrightarrow[W_{\circ}=۶/۷\times۱۰^{-۱۹}\,J\,,\,\lambda=۱۰۰\,nm]{hc=۱۲۰۰\,eV\cdot nm=۱۲۰۰\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,J\cdot nm}K_{max}=\frac{\overset{۱۲}{\cancel{۱۲۰۰}}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{\underset{۱}{\cancel{۱۰۰}}}-۶/۷\times۱۰^{-۱۹}=(۱۹/۲-۶/۷)\times۱۰^{-۱۹}$$

$$=۱۲/۵\times۱۰^{-۱۹}\,J$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ انرژی جنبشی، بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های گسیل‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$K_{max}=\frac{۱}{۲}mv_{max}^{۲}\xrightarrow[m=۹\times۱۰^{-۳۱}\,kg]{K_{max}=۱۲/۵\times۱۰^{-۱۹}\,J}۱۲/۵\times۱۰^{-۱۹}=\frac{۱}{۲}\times۹\times۱۰^{-۳۱}\times v_{max}^{۲}$$

$$\Rightarrow v_{max}^{۲}=\frac{۲۵}{۹}\times۱۰^{۱۲}\Rightarrow v_{max}=\frac{۵}{۳}\times۱۰^{۶}\,m/s=\frac{۵}{۳}\,Mm/s$$

۵۳ در آزمایش فوتوالکتریک، اگر بسامد نور تابیده بر سطح فلزی معین از f به $2f$ برسد، بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیل‌شده از سطح فلز از K به $3K$ می‌رسد. وقتی بر سطح این فلز، نوری با بسامد $4f$ تابیده شود، بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیل‌شده از سطح فلز چند برابر K است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

در آزمایش فوتوالکتریک اگر بسامد نور تابیده به فلز، n برابر شود، K_{max} بیش از n برابر خواهد شد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ فوتوالکتریک را می‌نویسیم و بسامد نور تابیده بر سطح فلز را از f به $2f$ می‌رسانیم:

$$K_{max} = hf - W_0$$

$$\left.\begin{matrix} K = hf - W_0 \\ 3K = 2hf - W_0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفریق دو رابطه}} 3K - K = 2hf - hf - W_0 + W_0 \Rightarrow 2K = hf$$

گام دوم: رابطهٔ به‌دست‌آمده را در معادلهٔ حالت اول جای‌گذاری می‌کنیم و رابطهٔ بین K و W_0 را به دست می‌آوریم:

$$K = hf - W_0 \xrightarrow{hf=2K} K = 2K - W_0 \Rightarrow W_0 = K$$

گام سوم: معادلهٔ فوتوالکتریک را برای حالتی که بسامد نور تابیده بر سطح فلز به $4f$ رسیده است، می‌نویسیم:

$$K' = h(4f) - W_0 \xrightarrow[hf=2K]{W_0=K} K' = 4(2K) - K = 7K$$

۵۴ طول موج دومین خط طیفی اتم هیدروژن در کدام رشته، ۲۸۸۰ nm است؟ $(R = 10^{-2}(nm)^{-1})$

۱) بالمر $(n' = 2)$
۲) پاشن $(n' = 3)$
۳) براکت $(n' = 4)$
۴) پفوند $(n' = 5)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

معادلهٔ ریدبرگ:

طول موج تمامی خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید، به طوری که اگر الکترون اتم هیدروژن از تراز n به تراز n' برود، طول موج λ را تابش می‌کند و اگر از n' به n برود، طول موج λ را جذب می‌کند.

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

λ: طول موج (nm)

n: شمارهٔ مدار بزرگ‌تر

n': شمارهٔ مدار کوچک‌تر

R: ثابت ریدبرگ $= 0/01097(nm)^{-1} \simeq 0/011(nm)^{-1}$

به ازای یک عدد صحیح که به n' نسبت می‌دهیم، n عددهای صحیح بعد از آن است و مجموعه‌ای از طول موج‌ها ایجاد می‌شوند که یک رشته نامیده می‌شوند. مقدارهای n، شماره‌های خط‌ها را نشان می‌دهد، مثلاً پنجمین خط در رشتهٔ بالمر، یعنی $n = 7$.

نام طیف	مقدار n'	رابطهٔ ریدبرگ مربوط به رشته	مقدارهای n	ناحیهٔ طیف
لیمان	۱	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$	۲, ۳, ۴, ...	فرابنفش
بالمر	۲	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$	۳, ۴, ۵, ...	فرابنفش و مرئی
پاشن	۳	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$	۴, ۵, ۶, ...	فروسرخ
براکت	۴	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$	۵, ۶, ۷, ...	فروسرخ
پفوند	۵	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$	۶, ۷, ۸, ...	فروسرخ

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رشتهٔ بالمر در محدودهٔ فرابنفش و مرئی است، بنابراین نمی‌تواند طول موج ۲۸۸۰ nm را (که مربوط به محدودهٔ فروسرخ است) داشته باشد، یعنی گزینهٔ (۱) نادرست است.

گام دوم: بلندترین طول موج رشتهٔ پاشن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n'=3, n=4]{R=0/01(nm)^{-1}, \lambda=\lambda_{max}} \frac{1}{\lambda_{max}} = \frac{1}{100}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_{max} = \frac{9 \times 16 \times 10^2}{7} \simeq 2057 \text{ nm}$$

بنابراین طول موج ۲۸۸۰ nm خارج از محدودهٔ رشتهٔ پاشن بوده و گزینهٔ (۲) نیز نمی‌تواند درست باشد.

گام سوم: رابطهٔ ریدبرگ را به ازای طول موج ۲۸۸۰ nm و برای دومین خط طیفی آن می‌نویسیم تا n' را به دست آوریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2880} = \frac{1}{100}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+2)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{28/8} = \frac{(n'+2)^2 - n'^2}{n'^2(n'+2)^2} = \frac{4n'+4}{n'^2(n'+2)^2} \Rightarrow 115/2 = \frac{n'^2(n'+2)^2}{n'+1}$$

با جای‌گذاری گزینه‌های (۳) و (۴) در رابطهٔ به‌دست‌آمده، معلوم می‌شود که $n' = 4$ بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

طول موج سومین خط طیفی اتم هیدروژن در کدام رشته، ۱۲۰۰ نانومتر است؟ $[R = 0/01\,(nm)^{-1}]$

(سؤال ۶۲ کنکور تجربی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

۱) پاشن $(n' = 3)$
۲) براکت $(n' = 4)$
۳) بالمر $(n' = 2)$
۴) لیمان $(n' = 1)$

۵۵ در طیف اتم هیدروژن، کمینهٔ بسامد رشتهٔ بالمر $(n'=2)$ چند تراهرتز از بیشینهٔ بسامد رشتهٔ پاشن $(n'=3)$ بزرگ‌تر است؟ $(R=0/01\,(nm)^{-1}$ و $c=3\times10^8\ m/s)$

۱) ۲۵۰ ۲) $\frac{250}{3}$

۳) ۵۰۰ ۴) $\frac{500}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) اگر رابطهٔ $f=\frac{c}{\lambda}$ را که در مورد همهٔ موج‌های الکترومغناطیسی به کار می‌رود، با معادلهٔ ریدبرگ ترکیب کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f=\frac{c}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow f=cR\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

۲) با توجه به رابطهٔ $\Delta E=hf$، کم‌ترین بسامد به ازای کم‌ترین انرژی مبادله‌شده و بیشترین بسامد به ازای بیشترین انرژی مبادله‌شده است.

$$\Delta E_{min}=hf_{min}$$

$$\Delta E_{max}=hf_{max}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مقدار R را در SI به دست می‌آوریم:

$$R=0/01\,(nm)^{-1}\times\frac{1\,nm}{10^{-9}\,m}=10^7\,m^{-1}$$

سپس کم‌ترین بسامد رشتهٔ بالمر را حساب می‌کنیم، برای این منظور باید الکترون از مدار دوم به مدار سوم برود تا کم‌ترین انرژی و کم‌ترین بسامد را داشته باشد:

$$f=cR\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow[n'=2\,,\,n=3]{c=3\times10^8\ m/s\,,\,R=10^7\ m^{-1}}f_{min}=3\times10^8\times10^7\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)$$

$$=3\times10^{15}\times\frac{5}{36}=\frac{5}{12}\times10^{15}\,Hz$$

گام دوم: بیشترین بسامد رشتهٔ پاشن را حساب می‌کنیم. برای این منظور باید الکترون از مدار $n'=3$ به مدار $n=\infty$ برود تا بیشترین انرژی و بیشترین بسامد را داشته باشد:

$$f=cR\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow f_{max}=3\times10^8\times10^7\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{\infty}\right)=\frac{1}{3}\times10^{15}\,Hz$$

گام سوم: اختلاف کمینهٔ بسامد رشتهٔ بالمر $(n'=2)$ با بیشینهٔ بسامد رشتهٔ پاشن $(n'=3)$ را به دست می‌آوریم:

$$f_{min\,,\,\text{بالمر}}-f_{max\,,\,\text{پاشن}}=\frac{5}{12}\times10^{15}-\frac{1}{3}\times10^{15}=\frac{1}{12}\times10^{15}\,Hz=\frac{1000}{12}\,THz=\frac{250}{3}\,THz$$

۵۶ الکترون در دومین حالت برانگیختهٔ اتم هیدروژن قرار دارد. بزرگ‌ترین بسامدی که این الکترون می‌تواند تابش کند، تقریباً چند تراهرتز است؟ $(E_R = ۱۳/۶\ eV \text{ و } h = ۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV.s)$

۱) ۳۷۷
۲) ۸۵۰
۳) ۲۵۵۰
۴) ۳۰۲۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

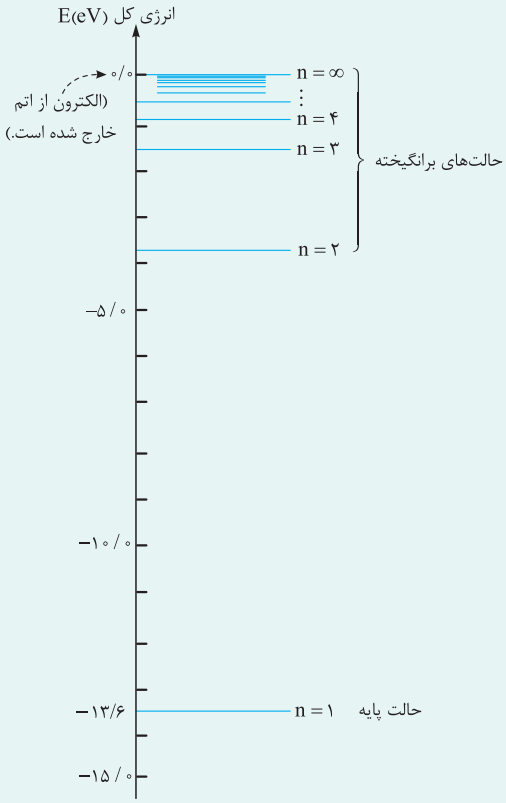
درس Box

رابطهٔ ترازهای انرژی الکترون در اتم هیدروژن:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^۲}$$

E_n: انرژی الکترون در مدار nاُم اتم هیدروژن

E_R: انرژی یک ریدبرگ $= ۱۳/۶\ eV$



- الکترون در یک اتم نمی‌تواند هر مقدار انرژی‌ای داشته باشد، بلکه مجاز است انرژی‌ای برابر با یکی از مقدارهایی که از رابطهٔ فوق به دست می‌آید، داشته باشد. هر یک از این مقدارهای مجاز را یک تراز انرژی می‌نامند.

بالاترین تراز انرژی، مربوط به $n = \infty$ است که انرژی آن $۰\ eV$ (صفر الکترون‌ولت) است.

پایین‌ترین تراز انرژی، مربوط به $n = ۱$ (حالت پایه) است که انرژی آن $-۱۳/۶\ eV$ است.

ترازهای بالاتر از $n = ۱$ حالت برانگیخته نامیده می‌شوند، مثلاً اولین حالت برانگیخته، یعنی $n = ۲$ و دومین حالت برانگیخته، یعنی $n = ۳$ و ... .

الکترون می‌تواند از یک حالت مانا به حالت مانای دیگر برود. هنگام گذار الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر E_U، به یک حالت مانا با انرژی کم‌تر E_L، یک فوتون تابش می‌شود. انرژی فوتون تابش‌شده برابر اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و نهایی است.

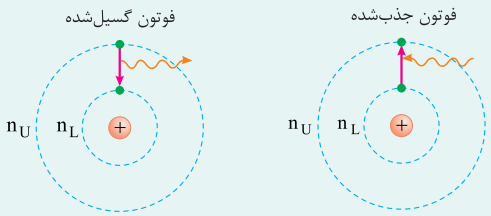
$$E_U - E_L = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

hf: انرژی فوتون تابش‌شده (eV)

$hc = ۱۲۴۰\ eV.nm$

λ: طول موج (nm)

هم‌چنین برعکس، برای آن‌که الکترونی از تراز انرژی E_L به تراز انرژی E_U برود، یعنی از هسته دور شود، باید انرژی $E_U - E_L$ را جذب کند. الکترون این انرژی را با جذب فوتونی که درست همین مقدار انرژی را دارد، به دست می‌آورد.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در دومین حالت برانگیختهٔ اتم هیدروژن، $n = ۳$ است. برای آن‌که الکترون، موج تابش کند، باید به سمت هسته برود و برای آن‌که بزرگ‌ترین بسامد ممکن را تابش کند، باید بیشترین انرژی ممکن را از دست بدهد، یعنی باید به مدار اول $(n = ۱)$ برود. این انرژی تابشی را به دست می‌آوریم:

$$E = -\frac{E_R}{n^۲}$$

$$\Delta E = E_۳ - E_۱ = -\frac{۱۳/۶}{۳^۲} - (-\frac{۱۳/۶}{۱^۲}) = ۱۳/۶(\frac{۸}{۹})\,eV$$

گام دوم: بسامد مربوط به این تابش انرژی را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta E = hf \Rightarrow f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{۱۳/۶(\frac{۸}{۹})}{۴\times۱۰^{-۱۵}} = \frac{۲}{۹}\times۱۳/۶\times۱۰^{۱۵}\ Hz \Rightarrow \Delta f = ۳/۰۲۲\times۱۰^{۱۵}\,Hz \simeq ۳۰۲۲\ THz$$

۵۷ **شکل زیر، تعدادی از ترازهای انرژی اتم هیدروژن را نشان می‌دهد. کدام گذار بین دو تراز می‌تواند به گسیل فوتونی با طول موج ۱۰۲/۵ nm منجر شود؟ (hc = ۱۲۴۰ eV.nm)**

۰ eV
−۱/۵۱ eV
−۳/۴ eV
−۱۳/۶ eV

۱) سومین حالت برانگیخته به اولین حالت برانگیختهٔ اتم
۲) سومین حالت برانگیخته به حالت پایهٔ اتم
۳) دومین حالت برانگیخته به اولین حالت برانگیختهٔ اتم
۴) دومین حالت برانگیخته به حالت پایهٔ اتم

مشاوره این سؤال برگرفته از یکی از تمرین‌های متن کتاب درسی فیزیک (۳) است که مشابه آن در امتحان نهایی رشتهٔ ریاضی خرداد ۱۴۰۴ نیز مطرح شده است. تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی تغییر انرژی الکترون را وقتی که فوتونی به طول موج ۱۰۲/۵ nm گسیل می‌کند، به دست می‌آوریم:

$$\Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \Delta E = \frac{۱۲۴۰}{۱۰۲/۵} \simeq ۱۲/۰۹\ eV$$

پس گذار از تراز با انرژی ۱/۵۱ eV− به تراز با انرژی ۱۳/۶ eV− انجام می‌شود، یعنی الکترون از تراز $n = ۳$ به تراز $n = ۱$ می‌رود.

در دومین حالت برانگیخته $n = ۳$ و در حالت پایهٔ اتم، $n = ۱$ است، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

امتحان نهایی

شکل زیر، تعدادی از ترازهای انرژی اتم هیدروژن را نشان می‌دهد. با محاسبه نشان دید کدام گذار بین دو تراز می‌تواند به گسیل فوتونی با طول موج ۱۰۲/۵ nm منجر شود؟ (hc = ۱۲۴۰ eV.nm)

(سؤال ۱۷ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)

۰ eV
−۱/۵۱ eV
−۳/۴ eV
−۱۳/۶ eV

۵۸ در اتم هیدروژن، الکترونی در یک مدار مانا با شعاع $1/25\ nm$ قرار دارد. انرژی الکترون در این مدار چند ریدبرگ است؟ $(E_R = 13/6\ eV \text{ و } a_0 = 5\times10^{-11} m)$

۱) $-0/544$
۲) $-0/04$
۳) $0/544$
۴) $0/04$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

مدارها و انرژی‌های الکترون‌ها در هر اتم، کوانتیده‌اند. یعنی فقط مدارها و انرژی‌های گسستهٔ معینی مجاز هستند.

شعاع مدارهای الکترون برای اتم هیدروژن:

$$r_n = n^2 r_1$$

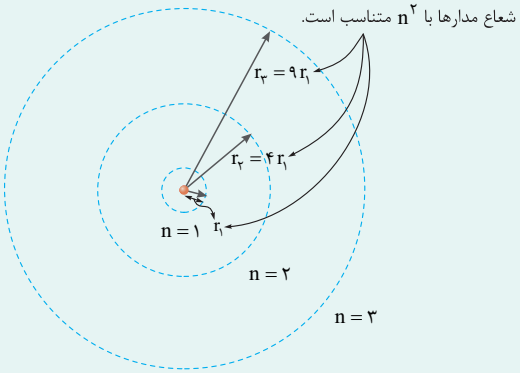
r_n: شعاع مدار nاُم برای الکترون در اتم هیدروژن

$r_1 = a_0$: شعاع کوچک‌ترین مدار در اتم هیدروژن $= 5/29\times10^{-11} m$

این مقدار خاص، شعاع بور برای اتم هیدروژن نامیده می‌شود.

n: عدد کوانتومی

$n = 1, 2, 3, \ldots$



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا با معلوم‌بودن شعاع مدار الکترون، شمارهٔ مدار آن را به دست می‌آوریم:

$$r_n = n^2 a_0 \Rightarrow n^2 = \frac{r_n}{a_0} = \frac{1/25\times10^{-9}}{5\times10^{-11}} = 25 \Rightarrow n = 5$$

گام دوم: انرژی الکترون در مدار $n=5$ را برحسب E_R محاسبه می‌کنیم:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \xrightarrow{n=5} E_5 = -\frac{E_R}{5^2} = -0/04\, E_R$$

امتحان نهایی

در اتم هیدروژن، الکترونی در یک مدار مانا با شعاع $16a_0$ قرار دارد که a_0 شعاع بور برای اتم هیدروژن است. با استفاده از رابطهٔ $E_n = \frac{-13/6\ eV}{n^2}$، انرژی الکترون در این مدار چند ریدبرگ می‌باشد؟

(سؤال ۱۷ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)

۵۹ در طیف اتم هیدروژن، بلندترین طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش چند میکرومتر است؟ $(R = \frac{۱}{۱۰۰}(nm)^{-۱})$

۱) $\frac{۲}{۵}$

۲) $\frac{۹۸}{۲۲۵}$

۳) $\frac{۴۹}{۴۸۰}$

۴) $\frac{۱۹}{۲۴۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) در اتم هیدروژن، بلندترین طول موج مربوط به ناحیهٔ فرابنفش، در طیف بالمر $(n' = ۲)$ وجود دارد.

۲) در طیف بالمر تا مدار $n = ۶$ مربوط به نور مرئی است، اما از $n = ۷$ به بعد ناحیهٔ فرابنفش شروع می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس، برای پیداکردن بلندترین طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش، باید $n' = ۲$ و $n = ۷$ باشد.

$$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}}) \xrightarrow[n=۷]{n'=۲, R=۰/۰۱(nm)^{-۱}} \frac{۱}{\lambda} = \frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۲^{۲}} - \frac{۱}{۷^{۲}})$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\lambda} = \frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۴۵}{۴\times۴۹}) \Rightarrow \lambda = \frac{۴\times۴۹۰۰}{۴۵} = \frac{۹۸۰۰۰}{۲۲۵}\ nm$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{۹۸}{۲۲۵}\ \mu m$$

۶۰ الکترون در اتم هیدروژن در تراز $n = 5$ قرار دارد. فرض کنید فقط گذارهای $\Delta n = 1$ مجاز باشند. اگر بلندترین و کوتاه‌ترین طول موجی که این الکترون می‌تواند گسیل کند، به ترتیب برابر λ_1 و λ_2 باشد، $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ برابر کدام است؟

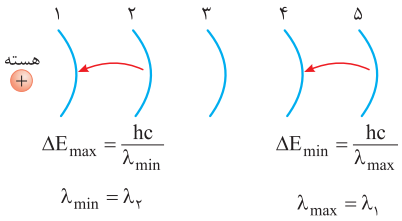
۱) $\frac{175}{81}$ ۲) $\frac{675}{11}$ ۳) $\frac{100}{3}$ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔

گام اول: با توجه به این‌که فقط گذارهای $\Delta n = 1$ مجاز است، وقتی الکترون از مدار ۵ به ۴ می‌رود، کم‌ترین انرژی و بیشترین طول موج گسیلی را خواهد داشت.

هم‌چنین وقتی الکترون از مدار ۲ به ۱ می‌رود، بیشترین انرژی و کم‌ترین طول موج گسیلی را خواهد داشت.



$$\Delta E_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} \quad \lambda_{min} = \lambda_2$$

$$\Delta E_{min} = \frac{hc}{\lambda_{max}} \quad \lambda_{max} = \lambda_1$$

گام دوم: رابطهٔ ریدبرگ را برای هر دو حالت فوق می‌نویسیم و نسبت $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_2} &= R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)\\ \frac{1}{\lambda_1} &= R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{1}{1} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{16} - \frac{1}{25}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{16\times 25}} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{3\times 16\times 25}{4\times 9} = \frac{100}{3}$$

کنکور

الکترون در اتم هیدروژن در تراز $n = 4$ قرار دارد. فرض کنید فقط گذارهای $\Delta n = 1$ مجاز باشد، کوتاه‌ترین طول موجی که این الکترون می‌تواند گسیل کند، چند نانومتر است؟ $[R = 0/01\,(nm)^{-1}]$ *(سؤال ۵۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))*

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۳۰۰

۳) $\frac{320}{3}$ ۴) $\frac{400}{3}$

۶۱ **کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ یک محیط لیزری درست است؟**

۱) برای گسیل القایی، انرژی فوتون ورودی باید از اختلاف انرژی‌های دو تراز مبدأ و مقصدِ الکترون بیشتر باشد.

۲) در فرایند گسیل القایی، دو فوتون خروجی در جهت‌های کاتوره‌ای گسیل می‌شوند.

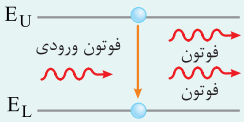
۳) وارونی جمعیت الکترون‌ها مربوط به وضعیتی است که تعداد الکترون‌ها در تراز پایدار نسبت به تراز بالاتر بسیار بیشتر است.

۴) در گسیل القایی، انرژی لازم برای برانگیخته‌کردن الکترون به ترازهای انرژی بالاتر، از روش‌هایی مانند درخش‌های شدید نور معمولی استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

گسیل القایی: در گسیل القایی که اساس کار لیزر است، یک فوتون ورودی، الکترون برانگیخته را تحریک (القا) می‌کند تا تراز انرژی خود را تغییر دهد و به تراز پایین‌تر برود. انرژی فوتون ورودی باید دقیقاً با اختلاف انرژی دو تراز $(E_U - E_L)$ برابر باشد.



گسیل القایی سه ویژگی عمده دارد:

۱) یک فوتون وارد و دو فوتون خارج می‌شوند. به این ترتیب گسیل القایی، تعداد فوتون‌ها را افزایش می‌دهد و نور را تقویت می‌کند.

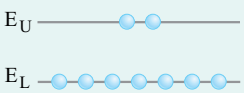
۲) فوتون گسیل‌شده در همان جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند.

۳) فوتون گسیل‌شده با فوتون ورودی، همگام یا همفاز است.

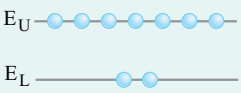
در گسیل القایی، یک چشمهٔ انرژی خارجی مناسب باید وجود داشته باشد تا الکترون‌ها را برانگیخته کند که به ترازهای انرژی بالاتر بروند. این انرژی می‌تواند به روش‌هایی مانند درخش‌های شدید نور معمولی یا تخلیه‌های ولتاژ بالا، فراهم شود.

وارونی جمعیت: اگر انرژی کافی به اتم‌ها داده شود، الکترون‌های بیشتری به تراز انرژی بالاتر برانگیخته خواهند شد، این وضعیت را وارونی جمعیت می‌گوییم.

به طور معمول و در دمای اتاق، بیشتر الکترون‌ها در تراز انرژی پایینی قرار دارند، چون اتم‌ها پایدارتر هستند و انرژی پتانسیل الکتریکی کم‌تری پیدا می‌کنند. به طور کلی، هر جسمی وقتی به حال خود رها شود، می‌خواهد انرژی پتانسیل خود را کمینه کند، هر نوع انرژی پتانسیل که باشد (کشسانی، گرانشی، الکتریکی، ...).



اما در وضعیتی که وارونی جمعیت به وجود می‌آید، بیشتر الکترون‌ها در تراز بالاتری (در مقایسه با تراز پایین‌تر) قرار دارند.



پاسخ خیلی تشریحی ✔ مطابق درس‌باکس، گزینهٔ (۴) درست است.

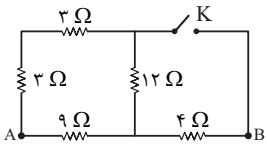
بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۱): نادرست؛ زیرا انرژی فوتون ورودی باید دقیقاً با اختلاف انرژی دو تراز مبدأ و مقصد الکترون برابر باشد.

گزینهٔ (۲): نادرست؛ زیرا در گسیل القایی، دو فوتون هم‌جهت گسیل می‌شوند.

گزینهٔ (۳): نادرست؛ زیرا در وضعیت وارونی جمعیت، تعداد الکترون‌ها در تراز بالاتر، تعداد بیشتری دارند.

۶۲ در مدار شکل زیر، با وصل‌کردن کلید K مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B چند برابر می‌شود؟



۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

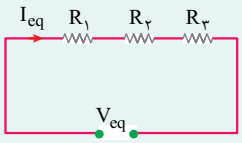
Hint

در حالتی که کلید قطع است، $R_۱ = ۳\,\Omega$ ، $R_۲ = ۳\,\Omega$ و $R_۳ = ۱۲\,\Omega$ متوالی و مقاومت معادل آن‌ها با $R_۴ = ۹\,\Omega$ موازی و در نهایت $R_{۱,۲,۳,۴}$ با $R_۵ = ۴\,\Omega$ متوالی است. در حالت دوم که کلید وصل می‌شود، با ساده‌کردن مدار به کمک نقاط هم‌پتانسیل، مقاومت معادل را محاسبه کنید و در آخر خواستهٔ سؤال را که نسبت مقاومت معادل دو حالت است، به دست آورید.

درس Box

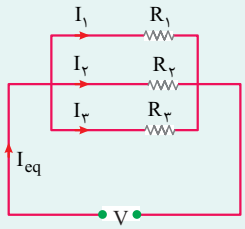
به هم بستن مقاومت‌ها:

۱) **اتصال متوالی (سری):** در این حالت مطابق شکل زیر، جریان عبوری از تمام مقاومت‌ها یکسان است و داریم:



$$\left.\begin{matrix} I_۱ = I_۲ = I_۳ = I_{eq} \\ V_{eq} = V_۱ + V_۲ + V_۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow R_{eq} = R_۱ + R_۲ + R_۳$$

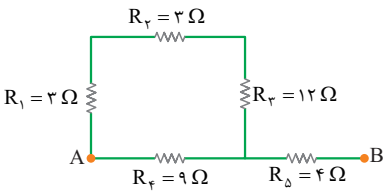
۲) **اتصال موازی:** مطابق شکل در اتصال موازی، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها با هم برابر است، پس:



$$\left.\begin{matrix} I_{eq} = I_۱ + I_۲ + I_۳ \\ V_{eq} = V_۱ + V_۲ + V_۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۳}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در حالتی که کلید باز است، مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B را محاسبه می‌کنیم:

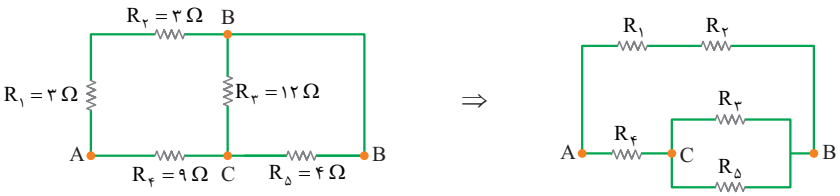


$R_۱$ ، $R_۲$ و $R_۳$ متوالی $R' : R' = ۳ + ۳ + ۱۲ = ۱۸\,\Omega$

R' و $R_۴$ موازی $R'' : R'' = \frac{۱۸ \times ۹}{۱۸ + ۹} = ۶\,\Omega$

R'' و $R_۵$ متوالی $R'' : R_{eq} = ۶ + ۴ = ۱۰\,\Omega$

گام دوم: در حالتی که کلید وصل می‌شود، مدار به شکل زیر ساده می‌شود:



گام سوم: مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B را محاسبه می‌کنیم:

R_1 و R_2 متوالی $: R' = R_1 + R_2 = 3 + 3 = 6\ \Omega$

R_3 و R_5 موازی $: R'' = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3\ \Omega$

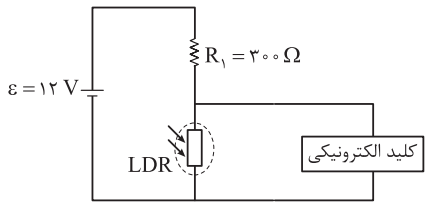
R'' و R_4 متوالی $: R''' = 9 + 3 = 12\ \Omega$

R' و R''' موازی $: R'_{eq} = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4\ \Omega$

گام چهارم: نسبت مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B، بعد و قبل از وصل کلید را به دست می‌آوریم:

$$\frac{R'_{eq}}{R_{eq}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

۶۳ در مدار زیر، ولتاژ مورد نیاز برای فعال‌شدن کلید الکترونیکی، $4\ V$ است. هم‌زمان با تاریک‌شدن هوا، مقاومت LDR حداقل چند اهم باشد تا کلید الکترونیکی فعال شود؟ (مقاومت کلید الکترونیکی آن‌قدر زیاد است که جریان قابل ملاحظه‌ای از آن عبور نمی‌کند.)



۱) ۷۵
۲) ۱۰۰
۳) ۱۵۰
۴) ۲۰۰

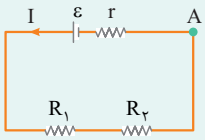
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

با توجه به این‌که کلید الکترونیکی موازی با LDR بسته شده است، پس رابطهٔ اختلاف پتانسیل LDR را پیدا کنید و برابر با $4\ V$ قرار دهید تا جریان عبوری از مدار محاسبه شود و سپس به کمک رابطه‌های $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$ و $R_{eq} = R_1 + R_L$، اندازهٔ R_L را به دست آورید.

درس Box

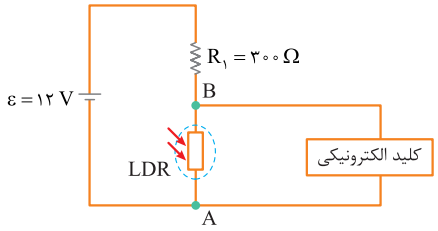
- مقاومت نوری (LDR)، نوعی مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده‌شده به آن بستگی دارد، به طوری که با افزایش شدت نور، از مقاومت آن کاسته می‌شود، پس با تاریک‌شدن هوا مقاومت LDR (R_L) افزایش می‌یابد.
- در مدار زیر، با طی یک دور کامل حلقه، می‌توانیم فرمول جریان الکتریکی را پیدا کنیم:



$$V_A - Ir + \varepsilon - IR_1 - IR_2 = V_A \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{r + R_1 + R_2} = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: کلید الکترونیکی، موازی با مقاومت LDR در مدار بسته شده است، پس برای فعال‌شدن کلید الکترونیکی کافی است اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت LDR برابر با $4\ V$ شود، پس اختلاف پتانسیل دو سر LDR را محاسبه می‌کنیم:



$$V_A + \varepsilon - IR_1 = V_B \Rightarrow V_B - V_A = \varepsilon - IR_1$$

$$\Rightarrow \Delta V = 12 - 300I$$

طبق رابطهٔ بالا، با کاهش جریان عبوری، ΔV افزایش می‌یابد، جریانی را که به واسطهٔ آن $\Delta V = 4\ V$ می‌شود، به دست می‌آوریم:

$$4 = 12 - 300I \Rightarrow I = \frac{8}{300}\ A$$

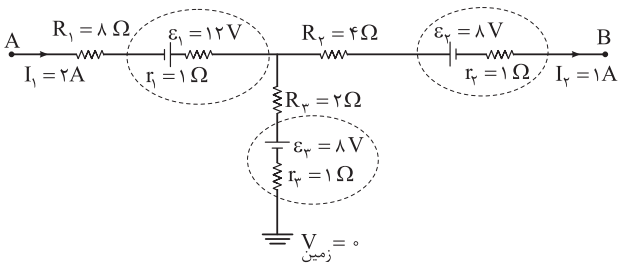
گام دوم: به کمک رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$، مقاومت LDR را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow \frac{8}{300} = \frac{12}{R_{eq}} \Rightarrow R_{eq} = \frac{12 \times 300}{8} = 450\ \Omega$$

با توجه به شکل، مقاومت‌های R_1 و R_L متوالی هستند، پس:

$$R_{eq} = R_1 + R_L \Rightarrow 450 = 300 + R_L \Rightarrow R_L = 150\ \Omega$$

۶۴ شکل زیر، قسمتی از یک مدار الکتریکی است. در این مدار، پتانسیل الکتریکی نقاط A و B، به ترتیب از راست به چپ، چند ولت است؟



۱) ۱۷، −۲

۲) ۱۷، −۸

۳) ۱۸، −۲

۴) ۱۸، −۸

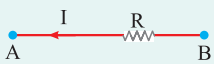
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا به کمک قاعدهٔ انشعاب، جریان گذرنده از شاخهٔ پایین را محاسبه کنید، سپس یک بار از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ زمین و یک بار از نقطهٔ B به سمت نقطهٔ زمین حرکت کنید تا پتانسیل الکتریکی نقاط A و B را به دست آورید.

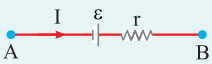
درس Box ۱) در یک مدار حامل جریان، با عبور از هر یک از اجزای مدار، اختلاف پتانسیل طبق دستور زیر تغییر می‌کند:

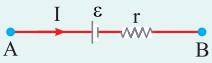


$V_B - V_A = -IR$

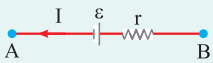


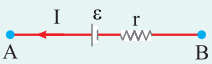
$V_B - V_A = IR$



$V_B - V_A = +\varepsilon - Ir$ و 

$V_B - V_A = -\varepsilon - Ir$

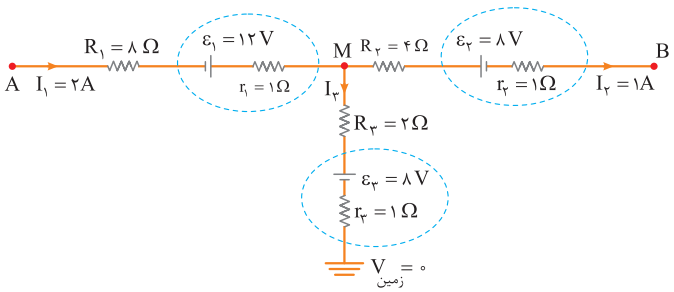


$V_B - V_A = +\varepsilon + Ir$ و 

$V_B - V_A = -\varepsilon + Ir$

قاعدهٔ انشعاب: مجموع جریان‌هایی که به هر نقطهٔ انشعاب وارد می‌شود، برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطهٔ انشعاب خارج می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا به کمک قاعدهٔ انشعاب در گره M، جریان در شاخهٔ پایین را محاسبه می‌کنیم:



$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow 2 = 1 + I_3 \Rightarrow I_3 = 1\,A$

گام دوم: یک بار از نقطهٔ A تا نقطهٔ زمین می‌رویم تا V_A به دست آید:

$$V_A - I_1R_1 + \varepsilon_1 - I_1r_1 - I_3R_3 - \varepsilon_3 - I_3r_3 = V_{زمین} = 0$$

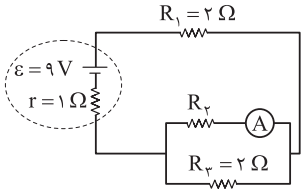
$$\Rightarrow V_A - 2\times8 + 12 - 2\times1 - 1\times2 - 8 - 1\times1 = 0 \Rightarrow V_A = 17\,V$$

گام سوم: بار دیگر از نقطهٔ B به سمت نقطهٔ زمین می‌رویم تا V_B به دست آید:

$$V_B + I_2r_2 + \varepsilon_2 + I_2R_2 - I_3R_3 - \varepsilon_3 - I_3r_3 = V_{زمین} = 0$$

$$\Rightarrow V_B + 1\times1 + 8 + 1\times4 - 1\times2 - 8 - 1\times1 = 0 \Rightarrow V_B = -2\,V$$

۶۵ در مدار شکل زیر، اگر آمپرسنج آرمانی A ۰/۵ را نشان دهد، مقاومت $R_۲$ برابر چند اُهم است؟



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۲
۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

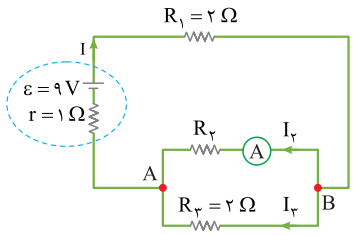
از موازی‌بودن دو مقاومت $R_۲$ و $R_۳$ و برابربودن اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها، رابطهٔ $I_۳$ را برحسب $R_۲$ بنویسید، سپس با توجه به این‌که اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_۳$ با اختلاف پتانسیل دو سر حلقهٔ بالایی برابر است، معادلات آن‌ها را برابر قرار دهید، فقط دقت کنید که به جای I معادل آن یعنی $I_۲ + I_۳$ را جای‌گذاری کنید، در نهایت به یک معادله برحسب $R_۲$ می‌رسید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: دو مقاومت $R_۲$ و $R_۳$ موازی هستند، پس اختلاف پتانسیل یکسانی دارند:

$$V_۲ = V_۳ \Rightarrow I_۲R_۲ = I_۳R_۳ \Rightarrow ۰/۵R_۲ = I_۳ \times ۲ \Rightarrow I_۳ = \frac{R_۲}{۴} \quad (۱)$$

گام دوم: اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B را یک بار با عبور از مقاومت $R_۳$ و یک بار با دورزدن در حلقهٔ بالایی مدار می‌نویسیم:



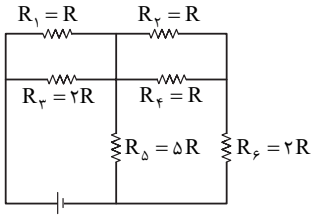
حالت اول: $V_B - I_۲R_۲ = V_A \Rightarrow V_B - V_A = ۰/۵\,R_۲$

حالت دوم: $V_A - Ir + \varepsilon - IR_۱ = V_B \Rightarrow V_B - V_A = -I + ۹ - ۲I = ۹ - ۳I$

$$\left.\begin{array}{l} V_B - V_A = ۰/۵\,R_۲ = ۹ - ۳I \\ \text{قاعدهٔ انشعاب در گرهٔ B: } I = I_۲ + I_۳ = ۰/۵ + I_۳ \xrightarrow{(۱)} I = ۰/۵ + \dfrac{R_۲}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow ۰/۵R_۲ = ۹ - ۳(۰/۵ + \frac{R_۲}{۴})$$

$$\Rightarrow ۰/۵R_۲ = ۹ - ۱/۵ - ۰/۷۵R_۲ \Rightarrow ۷/۵ = ۱/۲۵R_۲ \Rightarrow R_۲ = ۶\ \Omega$$

۶۶ در مدار شکل زیر، توان مصرفی مقاومت R_1 چند برابر توان مصرفی مقاومت R_6 است؟



۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۲

۳) $\frac{1}{4}$

۴) ۴

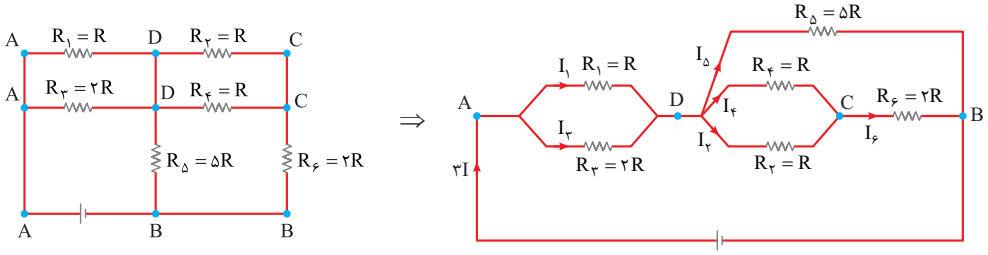
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

جریان عبوری از هر مقاومت را برحسب جریان کل مدار بنویسید و در آخر به کمک رابطهٔ $P = RI^2$، نسبت توان‌های خواسته‌شده را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک نقاط هم‌پتانسیل، مدار را ساده‌تر رسم می‌کنیم:



گام دوم: جریان عبوری از کل مدار را $3I$ فرض می‌کنیم و برحسب آن، جریان عبوری از مقاومت‌های R_1 و R_6 را به دست می‌آوریم.

R_1 و R_3 موازی هستند و جریان $3I$ به نسبت عکس مقاومت‌ها بین آن‌ها تقسیم می‌شود، پس:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{I_1}{I_3} = \frac{R_3}{R_1} \Rightarrow \frac{I_1}{I_3} = \frac{2R}{R} = 2 \Rightarrow I_1 = 2I_3 \\ \text{قاعدهٔ انشعاب در گره A: } 3I = I_1 + I_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1 = 2I \\ I_3 = I \end{array}$$

مقاومت معادل بین B و D در شاخهٔ پایین را محاسبه می‌کنیم:

$$R_2$$ و $$R_4$$ موازی $$: R' = \frac{R_2 \times R_4}{R_2 + R_4} = \frac{R \times R}{R + R} = \frac{R}{2}$$

$$R'$$ و $$R_6$$ متوالی $$: R'' = R' + R_6 = \frac{R}{2} + 2R = 2/5R$$

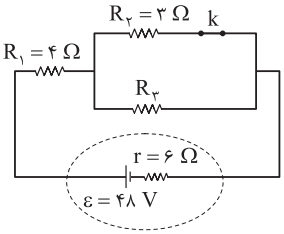
گام سوم: با توجه به شکل و R'' به‌دست‌آمده در گام قبل داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{I_5}{I''} = \frac{R''}{R_5} = \frac{2/5R}{5R} \Rightarrow I'' = I_6 = 2I_5 \\ \text{قاعدهٔ انشعاب در گرهٔ B: } I_5 + I_6 = 3I \end{array}\right\} \Rightarrow 3I = \frac{I_6}{2} + I_6 \Rightarrow I_6 = 2I$$

گام چهارم: با توجه به این‌که جریان عبوری از مقاومت‌های R_1 و R_6 را برحسب I به دست آوردیم، به کمک رابطهٔ $P = RI^2$ نسبت توان‌های خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{P_1}{P_6} = \frac{R_1 I_1^2}{R_6 I_6^2} = \frac{R \times (2I)^2}{2R \times (2I)^2} = \frac{1}{2}$$

۶۷ در مدار شکل زیر، کلید k، بسته و توان خروجی باتری، بیشینه است. اگر کلید k باز شود، توان خروجی باتری به چند وات می‌رسد؟



۱) ۶۰

۲) ۹۰

۳) ۱۰۰

۴) ۱۲۰

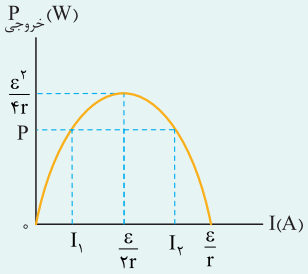
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

با توجه به این‌که توان بیشینه به ازای $I = \frac{\varepsilon}{۲r}$ به دست می‌آید، I را محاسبه کنید، سپس طبق رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$، مقاومت R_{eq} و سپس مقاومت $R_۳$ را به دست آورید. در مرحلهٔ بعد با باز کردن کلید، مقاومت $R_۲$ از مدار خارج می‌شود، در این حالت جریان عبوری از مدار و در نهایت توان خروجی باتری را محاسبه کنید.

درس Box

نمودار توان خروجی برحسب جریان عبوری از مدار به صورت شکل زیر است:



همان‌طور که از نمودار مشخص است، به ازای جریان $I = \frac{\varepsilon}{۲r}$ توان خروجی باتری بیشینه است.

- توان خروجی باتری از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{خروجی} = \underbrace{\varepsilon I}_{\text{توان تولیدی}} - \underbrace{rI^۲}_{\text{توان مصرفی}}$$

- توان مصرفی در یک مصرف‌کننده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$P = VI \ , \ P = RI^۲ \ , \ P = \frac{V^۲}{R}$$

V: اختلاف پتانسیل دو سر مصرف‌کننده (V)

R: مقاومت الکتریکی مصرف‌کننده (Ω)

I: جریان الکتریکی عبوری از مصرف‌کننده (A)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم توان خروجی بیشینهٔ باتری به ازای $I = \frac{\varepsilon}{۲r}$ به دست می‌آید، پس:

$$I = \frac{\varepsilon}{۲r} = \frac{۴۸}{۲\times۶} = ۴\ A$$

گام دوم: اندازهٔ جریان عبوری را داریم، پس به کمک رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$، اندازهٔ $R_{۲,۳}$ و از آن‌جا $R_۳$ را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_۱ + R_{۲,۳} + r} \Rightarrow ۴ = \frac{۴۸}{۴ + R_{۲,۳} + ۶} \Rightarrow R_{۲,۳} = ۲\ \Omega$$

$R_{۲,۳}$ = مقاومت معادل دو مقاومت موازی $R_۲$ و $R_۳$

دو مقاومت $R_۲$ و $R_۳$ موازی‌اند، پس داریم:

$$R_{۲,۳} = \frac{R_۲ \times R_۳}{R_۲ + R_۳} \Rightarrow ۲ = \frac{۳R_۳}{۳ + R_۳} \Rightarrow R_۳ = ۶\ \Omega$$

گام سوم: اگر کلید k باز شود، مقاومت $R_۲ = ۳\ \Omega$ از مدار حذف می‌شود، پس جریان عبوری در مدار برابر می‌شود با:

$$I' = \frac{\varepsilon}{R_۱ + R_۳ + r} = \frac{۴۸}{۴+۶+۶} = ۳\ A$$

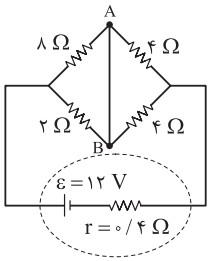
گام چهارم: توان خروجی باتری در این حالت برابر است با:

$$P = \varepsilon I' - rI'^{۲} = ۴۸\times ۳ - ۶(۳)^{۲} = ۹۰\ W$$

یه‌جور دیگه در گام چهارم، می‌توان گفت که توان خروجی باتری، برابر با توان مصرفی مقاومت‌های $R_۱$ و $R_۳$ است، پس:

$$P = P_۱ + P_۳ = R_۱I'^{۲} + R_۳I'^{۲} = ۴\times ۹ + ۶\times ۹ = ۹۰\ W$$

۶۸ در مدار شکل زیر، جریان الکتریکی عبوری از سیم AB چند آمپر و در چه جهتی است؟



۱) ۰/۶، از A به B

۲) ۰/۶، از B به A

۳) ۰/۹، از A به B

۴) ۰/۹، از B به A

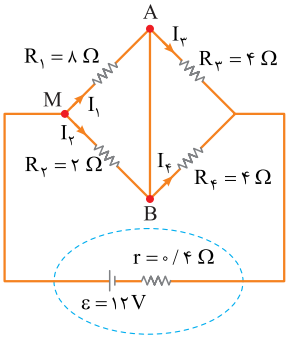
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

مقاومت معادل را محاسبه کنید تا به کمک آن جریان عبوری از مدار را به دست آورید، سپس جریان عبوری از مقاومت ۸ Ω و ۴ Ω (شاخهٔ بالایی) را حساب کرده و در گرهٔ A جهت جریان بین A و B و مقدار آن را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا مقاومت معادل را محاسبه می‌کنیم تا به کمک آن جریان کل مدار را به دست آوریم:



$R_۱$ و $R_۲$ موازی $\Rightarrow R' = \dfrac{R_۱ \times R_۲}{R_۱ + R_۲} = \dfrac{۸ \times ۲}{۸ + ۲} = ۱/۶\ \Omega$

$R_۳$ و $R_۴$ موازی $\Rightarrow R'' = \dfrac{R_۳ \times R_۴}{R_۳ + R_۴} = \dfrac{۴ \times ۴}{۴ + ۴} = ۲\ \Omega$

R' و R'' متوالی $\Rightarrow R_{eq} = R' + R'' = ۱/۶ + ۲ = ۳/۶\ \Omega$

به کمک رابطهٔ $I = \dfrac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$، جریان را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{۱۲}{۳/۶ + ۰/۴} = ۳\ A$$

گام دوم: دو مقاومت $R_۱$ و $R_۲$ موازی هستند، پس داریم:

$$V_۱ = V_۲ \Rightarrow R_۱I_۱ = R_۲I_۲ \Rightarrow ۸I_۱ = ۲I_۲ \Rightarrow I_۲ = ۴I_۱$$

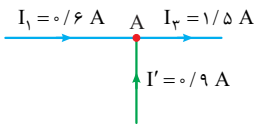
گام سوم: با توجه به رابطهٔ بین جریان‌ها در نقطهٔ M، جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$I = I_۱ + I_۲ \xrightarrow[I_۲ = ۴I_۱]{I = ۳\ A} ۳ = I_۱ + ۴I_۱ = ۵I_۱ \Rightarrow I_۱ = \frac{۳}{۵} = ۰/۶\ A\ ,\ I_۲ = ۲/۴\ A$$

دو مقاومت $R_۳$ و $R_۴$ با هم موازی هستند و اندازهٔ مقاومت‌ها یکسان است، پس جریان بین آن‌ها به طور مساوی تقسیم می‌شود، یعنی:

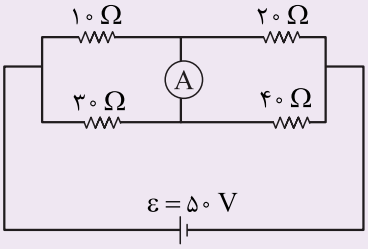
$$I_۳ = I_۴ = ۱/۵\ A$$

گام چهارم: با نوشتن رابطهٔ بین جریان‌ها در نقطهٔ A، متوجه می‌شویم جریان در سیم AB از B به A است، زیرا:



$$I_۱ + I' = I_۳ \Rightarrow I' = ۱/۵ - ۰/۶ = ۰/۹\ A$$

در شکل زیر، آمپرسنج آرمانی چند میلی‌آمپر را نشان می‌دهد؟ (سؤال ۶۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)



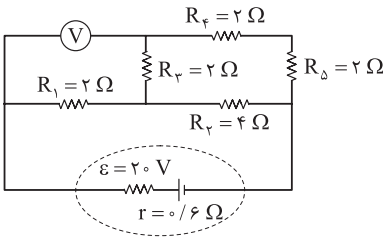
۱) ۴۰۰

۲) ۳۰۰

۳) ۲۰۰

۴) ۱۰۰

۶۹ در مدار شکل زیر، ولت‌سنج آرمانی چند ولت را نشان می‌دهد؟



۱) ۶/۴

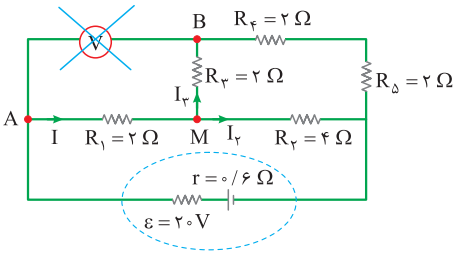
۲) ۱۲/۸

۳) ۱۱/۲

۴) ۱۰/۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** با توجه به این‌که ولت‌سنج آرمانی است، پس جریانی از شاخهٔ ولت‌سنج عبور نمی‌کند، بنابراین به کمک مدار زیر، مقاومت معادل را محاسبه می‌کنیم:



$R_۳$، $R_۴$ و $R_۵$ متوالی هستند و معادل آن‌ها را R' می‌گیریم.

$$R' = ۲+۲+۲ = ۶\ \Omega$$

$R_۲$ و R' با هم موازی هستند و معادل آن‌ها را R'' می‌گیریم.

$$R'' = \frac{۶\times ۴}{۶+۴} = ۲/۴\ \Omega$$

$R_۱$ و R'' متوالی هستند و معادل آن‌ها همان R_{eq}، یعنی مقاومت خارجی معادل مدار است.

$$R_{eq} = ۲/۴+۲ = ۴/۴\ \Omega$$

گام دوم: جریان عبوری از مدار را به کمک رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$ به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{۲۰}{۴/۴+۰/۶} = ۴\ A$$

گام سوم: ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B، یعنی مجموع اختلاف پتانسیل دو مقاومت $R_۱$ و $R_۳$ را نشان می‌دهد، در نتیجه لازم است $I_۳$ را به دست آوریم؛ برای این کار از موازی‌بودن دو مقاومت R' و $R_۲$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{I_۳}{I_۲} = \frac{R_۲}{R'} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow I_۲ = \frac{۳}{۲} I_۳$$

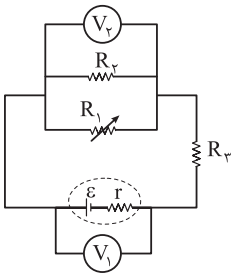
رابطهٔ جریان‌ها در نقطهٔ M را می‌نویسیم و $I_۳$ را به دست می‌آوریم:

$$I = I_۲ + I_۳ \Rightarrow ۴ = \frac{۳}{۲} I_۳ + I_۳ \Rightarrow I_۳ = \frac{۸}{۵} = ۱/۶\ A$$

گام چهارم: عددی را که ولت‌سنج نشان می‌دهد، محاسبه می‌کنیم:

$$V = V_۱ + V_۳ = IR_۱ + I_۳R_۳ = ۴\times ۲ + ۱/۶\times ۲ = ۱۱/۲\ V$$

۷۰ در مدار شکل زیر، با کاهش مقاومت رئوستا، مقداری که ولت‌سنج‌های آرمانی V_1 و V_2 نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کند؟



۱) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۲) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۴) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

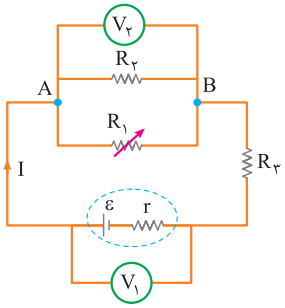
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

اثر کاهش مقاومت رئوستا را روی جریان کل مشخص کنید و سپس با توجه به این‌که ولت‌سنج آرمانی V_1، اختلاف پتانسیل دو سر باتری و ولت‌سنج آرمانی V_2، اختلاف پتانسیل $V_2 = \varepsilon - Ir - IR_3 = V_1 - V_3$ را نشان می‌دهد، تغییرات V_1 و V_2 را براساس تغییرات جریان کل تعیین کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با کاهش مقاومت رئوستا (R_1)، مقاومت معادل کل مدار کاهش می‌یابد و طبق رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$ و با توجه به ثابت‌بودن مقادیر ε و r، جریان عبوری از باتری افزایش می‌یابد.



ولت‌سنج آرمانی V_1، اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهد، پس:

$$V_1 = \varepsilon - Ir \xrightarrow[\text{ثابت: } r, \varepsilon]{\text{افزایش: } I}$$ کاهش: V_1

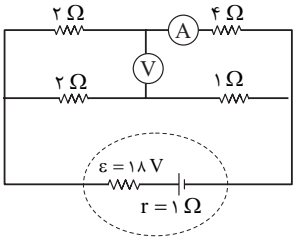
گام دوم: چگونگی تغییر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_3 را مشخص می‌کنیم:

$$V_3 = R_3 I_3 \xrightarrow[\text{ثابت: } R_3]{\text{افزایش: } I_3 = I}$$ افزایش می‌یابد. V_3

رابطهٔ بین اختلاف پتانسیل‌های اجزاء مدار را می‌نویسیم:

$$V_1 = V_2 + V_3 \Rightarrow V_2 = V_1 - V_3 \xrightarrow[\text{افزایش: } V_3]{\text{کاهش: } V_1}$$ کاهش می‌یابد. V_2

۷۱ در مدار شکل زیر، اگر جای آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی عوض شود، مقداری که هر یک نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چند آمپر و چند ولت تغییر می‌کنند؟



۱) ۱، ۲

۲) ۱، ۴

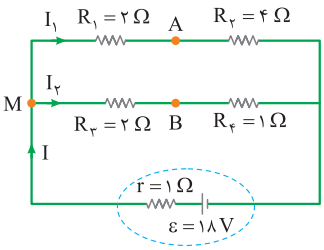
۳) ۲، ۲

۴) ۲، ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: چون ولت‌سنج آرمانی است، از ولت‌سنج و شاخه‌ای که در آن قرار دارد جریانی عبور نمی‌کند و مدار به صورت زیر درمی‌آید:



(الف)

R_1 و R_2 متوالی $: R' = ۲ + ۴ = ۶\ \Omega$

R_3 و R_4 متوالی $: R'' = ۲ + ۱ = ۳\ \Omega$

R' و R'' موازی $: R_{eq} = \frac{۳ \times ۶}{۳ + ۶} = ۲\ \Omega$

گام دوم: جریان کل و جریان عبوری از مقاومت $R_2 = ۴\ \Omega$ را که همان جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی است، محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{۱۸}{۲ + ۱} = ۶\ A$$

R' و R'' موازی $\Rightarrow I_1 R' = I_2 R'' \Rightarrow I_1 \times ۶ = I_2 \times ۳ \Rightarrow ۲I_1 = I_2$

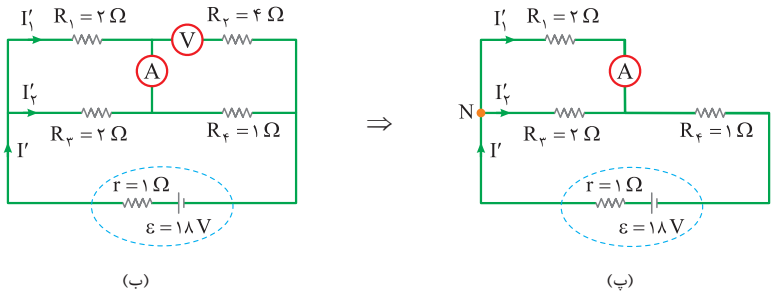
رابطهٔ جریان‌ها در نقطهٔ M: $I = I_1 + I_2 \Rightarrow ۶ = I_1 + ۲I_1 = ۳I_1 \Rightarrow I_1 = ۲\ A\ ,\ I_2 = ۴\ A$

I_1 همان جریان عبوری از آمپرسنج است.

گام سوم: ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل دو نقطهٔ A و B را نشان می‌دهد، پس:

$$V_A - I_1 R_2 + I_2 R_4 = V_B$$
$$\Rightarrow V_A - V_B = I_1 R_2 - I_2 R_4$$
$$\Rightarrow V_V = ۲ \times ۴ - ۴ \times ۱ = ۴\ V$$

گام چهارم: جای آمپرسنج و ولت‌سنج آرمانی را عوض می‌کنیم؛ از شاخه‌ای که در آن ولت‌سنج آرمانی قرار دارد، جریانی عبور نمی‌کند، پس شکل مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



(ب) (پ)

گام پنجم: مثل گام‌های اول و دوم، مقاومت معادل، جریان کل و جریان عبوری از هر شاخه را محاسبه می‌کنیم:

R_1 و R_3 موازی $: R' = ۱\ \Omega$

R' و R_4 متوالی $: R_{eq} = ۱ + ۱ = ۲\ \Omega$

$$I' = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{۱۸}{۲ + ۱} = ۶\ A$$

مقاومت‌های R_1 و R_3 موازی و هم‌اندازه هستند، پس جریان به طور مساوی بین آن‌ها تقسیم می‌شود، یعنی:

$$I'_1 = I'_2 = 3\ A$$

همان‌طور که از شکل (پ) مشخص است، آمپرسنج آرمانی جریان I'_1، یعنی $3\ A$ را نشان می‌دهد.

ولت‌سنج آرمانی هم اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_4 را نشان می‌دهد، پس:

$$V'_V = I'R_4 = 6 \times 1 = 6\ V$$

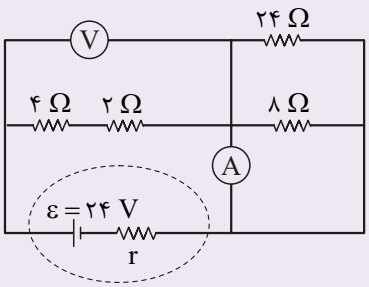
گام ششم: بریم سراغ خواستهٔ سؤال:

$$\Delta I = I'_1 - I_1 = 3 - 2 = 1\ A$$

$$\Delta V = V'_V - V_V = 6 - 4 = 2\ V$$

در مدار زیر، اگر جای آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی عوض شود، کدام مورد درست است؟

(سؤال ۶۴٪ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)



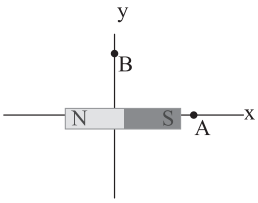
۱) ولت‌سنج عدد صفر را نشان می‌دهد.

۲) آمپرسنج عدد صفر را نشان می‌دهد.

۳) عددهایی که آمپرسنج و ولت‌سنج نشان می‌دهند، هیچ تغییری نمی‌کند.

۴) عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد، تغییر نمی‌کند، اما ولت‌سنج صفر را نشان می‌دهد.

۷۲ **در شکل زیر، یک آهنربای میله‌ای در صفحه و در راستای محور x قرار دارد. میدان مغناطیسی حاصل از این آهنربا در نقاط A و B، به ترتیب از راست به چپ، در چه جهتی است؟**



۱) در جهت محور x، در جهت محور x

۲) در جهت محور x، در جهت محور y

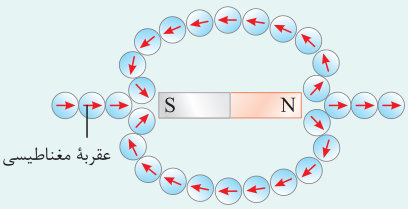
۳) در خلاف جهت محور x، در جهت محور x

۴) در خلاف جهت محور x، در جهت محور y

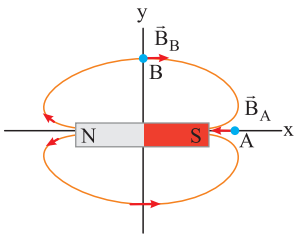
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

- خطوط میدان مغناطیسی در هر نقطه از فضا در جهت عقربهٔ مغناطیسی‌اند.
- در خارج از آهنربا، خطوط میدان مغناطیسی از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شوند.

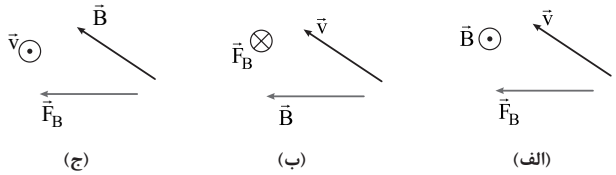


پاسخ خیلی تشریحی ✔ با رسم خطوط میدان مغناطیسی اطراف آهنربا، جهت‌گیری میدان مغناطیسی در نقاط A و B مشخص می‌شود:



همان‌طور که مشخص است، در نقطهٔ A، میدان مغناطیسی در خلاف جهت محور x و در نقطهٔ B، میدان مغناطیسی در جهت محور x است.

۷۳ در شکل‌های زیر، $\vec{v}$ سرعت یک ذره با بار الکتریکی منفی، $\vec{B}$ میدان مغناطیسی یکنواخت و $\vec{F}_B$ نیروی مغناطیسی وارد بر آن ذره است. کدام شکل‌ها از نظر فیزیکی قابل قبول است؟ (بردارها، یا در صفحه یا عمود بر آن هستند.)

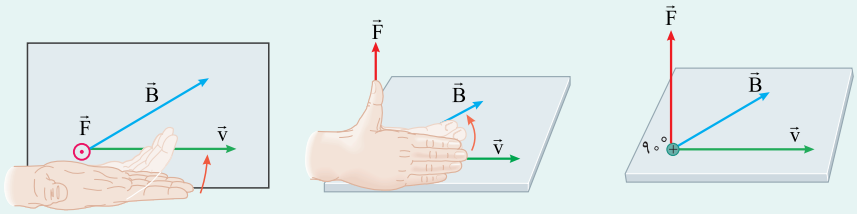


۱) فقط «الف»
۲) فقط «ب»
۳) «ب» و «ج»
۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینهٔ ۲

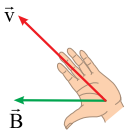
درس Box

تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار مثبت با استفاده از قاعدهٔ دست راست: اگر چهار انگشت دست راست را در جهت $\vec{v}$ قرار دهیم، به گونه‌ای که جهت خم‌شدن چهار انگشت در جهت $\vec{B}$ باشد، انگشت شست جهت نیروی مغناطیسی را نشان می‌دهد.



اگر بار ذره منفی باشد، جهت نیروی مغناطیسی را برعکس می‌کنیم، در واقع برای ذره با بار منفی می‌توانیم از دست چپ استفاده کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

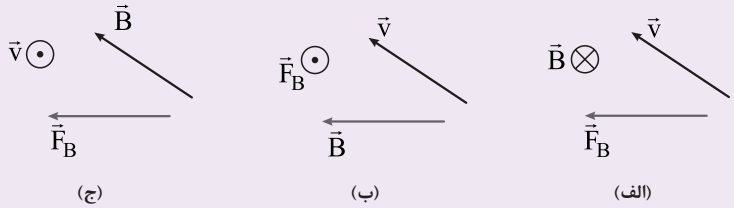


با توجه به این‌که نیروی مغناطیسی همواره بر بردار سرعت و بردار میدان مغناطیسی عمود است، پس شکل‌های «الف» و «ج» قابل قبول نیست. با بررسی شکل «ب» به کمک قاعدهٔ دست راست (یا دست چپ با توجه به این‌که بار ذره منفی است)، درستی آن مشخص می‌شود.

کنکور

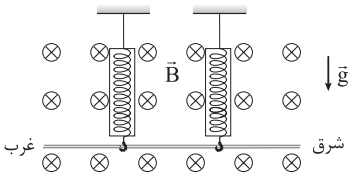
در شکل‌های زیر، $\vec{v}$ سرعت یک ذره با بار الکتریکی مثبت، $\vec{B}$ میدان مغناطیسی یکنواخت و $\vec{F}_B$ نیروی مغناطیسی وارد بر آن ذره است. کدام شکل‌ها از نظر فیزیکی قابل قبول است؟ (بردارها، یا در این صفحه‌اند یا عمود بر این صفحه.)

(سؤال ۶۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))



۱) فقط «الف»
۲) فقط «ب»
۳) «الف» و «ج»
۴) «ب» و «ج»

۷۴ در شکل زیر، در میدان مغناطیسی یکنواختی که جهت آن به سمت شمال است، سیمی در راستای افقی شرق ـ غرب قرار دارد. اگر چگالی سیم $8\ g/cm^3$، سطح مقطع آن $5\ mm^2$ و اندازهٔ میدان مغناطیسی $400\ G$ باشد، از سیم، جریان چند آمپر و در چه جهتی عبور کند تا مقداری که نیروسنج‌ها نشان می‌دهند برابر صفر باشد؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۱، شرق به غرب

۲) ۱، غرب به شرق

۳) ۱۰، شرق به غرب

۴) ۱۰، غرب به شرق

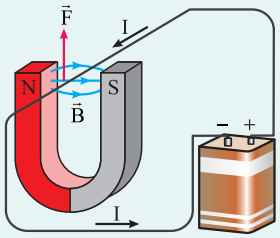
پاسخ: گزینهٔ ۴

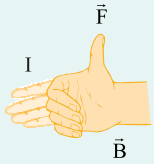
Hint

نیروسنج‌ها عدد صفر را نشان می‌دهند، یعنی نیروی وزن هم‌اندازه با نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان است و نیروها در خلاف جهت هم به سیم وارد می‌شوند تا اثر یکدیگر را خنثی کنند.

درس Box

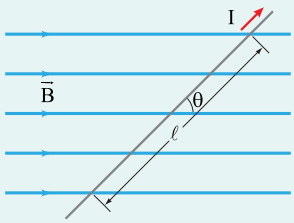
اورستد با انجام آزمایش‌هایی نشان داد که میدان مغناطیسی بر سیم حامل جریان نیرو وارد می‌کند، این نیرو بر راستای سیم و نیز بر راستای میدان مغناطیسی عمود است. جهت این نیروی مغناطیسی را می‌توان به کمک قاعدهٔ دست راست به صورت زیر تعیین کرد:





نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت:

$$F = I\ell B\sin\theta$$



I : جریان الکتریکی (A)

ℓ : طول بخشی از سیم که در میدان مغناطیسی قرار دارد (m)

B : میدان مغناطیسی (T)

θ : زاویه‌ای که امتداد سیم با خطوط میدان مغناطیسی می‌سازد.

چگالی، نسبت جرم به حجم است؛ یکای آن در SI کیلوگرم بر متر مکعب (kg/m^3) و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

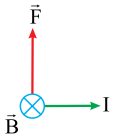
$$\rho = \frac{m \to (kg)\ \text{جرم}}{V \to (m^3)\ \text{حجم}} \quad \rho: \text{چگالی } (kg/m^3)$$

نکته

یکی از یکاهای متداول چگالی، g/cm^3 است که برای تبدیل به واحد kg/m^3 به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{g}{cm^3} \xrightarrow{\times 10^3} \frac{kg}{m^3} \qquad \frac{kg}{m^3} \xrightarrow{\times 10^{-3}} \frac{g}{cm^3}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔



گام اول: با توجه به این‌که نیروسنج‌ها مقدار صفر را نشان می‌دهند، نیروی وزن با نیروی مغناطیسی وارد بر سیم برابر و در خلاف جهت هم هستند. جهت نیروی وزن به سمت پایین است، پس نیروی مغناطیسی باید به سمت بالا باشد. به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت جریان عبوری از سیم را تعیین می‌کنیم:

بنابراین جریان عبوری از سیم به سمت راست (⟶)، یعنی از غرب به شرق است.

گام دوم: از برابری اندازهٔ نیروی وزن و اندازهٔ نیروی مغناطیسی داریم:

$$W = F_B \Rightarrow mg = I\ell B\sin\theta \xrightarrow[m=\rho V=\rho A\ell]{\theta=90^\circ \Rightarrow \sin\theta=1} \rho A\ell g = I\ell B$$

$$\Rightarrow I = \frac{\rho A g}{B} = \frac{8\times10^{3}\times5\times10^{-6}\times10}{400\times10^{-4}} = 10\ A$$

۷۵ در فضایی که در آن میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = (۴۰۰\ N/C)\vec{i}$ و میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = (۳۰۰\ G)\vec{j}$ وجود دارد، ذره‌ای با بار الکتریکی ۸ μC با سرعت $\vec{v} = (۱۰^۴\ m/s)\vec{i}$ پرتاب می‌شود. اندازهٔ نیروی خالص وارد بر ذره، بلافاصله پس از پرتاب چند نیوتون است؟ (از سایر نیروهای وارد بر ذره چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۴×۱۰^{-۳}
۲) ۴×۱۰^{-۴}
۳) ۸×۱۰^{-۳}
۴) ۸×۱۰^{-۴}

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

ابتدا جهت هر یک از نیروهای مغناطیسی و الکتریکی را مشخص کنید، سپس اندازهٔ هر کدام را محاسبه کرده و در آخر با توجه به این‌که دو نیرو بر هم عمود هستند، برایند آن‌ها را به دست آورید.

درس Box

اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$F_B = |q| v B \sin\theta$

F_B: اندازهٔ نیرو (N)، v: تندی (m/s)، B: اندازهٔ میدان مغناطیسی (T)، q: بار الکتریکی (C)، θ: زاویهٔ بین بردارهای سرعت و میدان مغناطیسی

- یکای SI میدان مغناطیسی تسلا است، اما گاهی میدان مغناطیسی را با یکای کوچک‌تر گاوس بیان می‌کنند، به طوری که:

$۱\ G = ۱۰^{-۴}\ T$

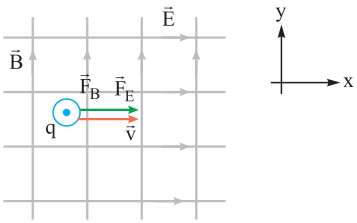
- هرگاه ذره‌ای با بار الکتریکی، در میدان الکتریکی یکنواخت قرار گیرد، نیرویی هم‌راستا با میدان الکتریکی از طرف میدان به ذره وارد می‌شود. دو حالت زیر وجود دارد:

۱) اگر بار ذره مثبت باشد، طبق رابطهٔ $\vec{F} = \vec{E}q$، نیروی الکتریکی و میدان الکتریکی هم‌جهت هستند.

۲) اگر بار ذره منفی باشد، طبق رابطهٔ $\vec{F} = \vec{E}q$، نیروی الکتریکی و میدان الکتریکی خلاف جهت هم هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با رسم شکل، جهت نیروهای مغناطیسی و الکتریکی را مشخص می‌کنیم:



۱) با توجه به قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی مغناطیسی برون‌سو است.

۲) چون بار ذره مثبت است، نیروی الکتریکی هم‌جهت با میدان الکتریکی است.

گام دوم: اندازهٔ هر کدام از نیروها را محاسبه می‌کنیم:

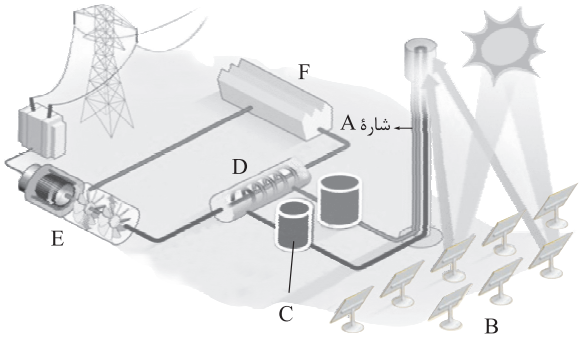
$$F_E = qE = ۸\times۱۰^{-۶}\times۴۰۰ = ۳۲\times۱۰^{-۴}\ N$$

$$F_B = qvB\sin\theta = ۸\times۱۰^{-۶}\times۱۰^۴\times۳۰۰\times۱۰^{-۴}\times\sin۹۰^\circ = ۲۴\times۱۰^{-۴}\ N$$

گام سوم: نیروها بر هم عمود هستند، پس طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$F_T = \sqrt{F_E^۲ + F_B^۲} = \sqrt{\underbrace{(۳۲\times۱۰^{-۴})^۲}_{۴\times۸} + \underbrace{(۲۴\times۱۰^{-۴})^۲}_{۳\times۸}} = ۸\times۱۰^{-۴}\times۵ = ۴\times۱۰^{-۳}\ N$$

۷۶ **با توجه به شکل زیر که نمایی از فناوری پیشرفته برای تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟**



۱) B و C به ترتیب آینه‌ها و منبع ذخیرهٔ انرژی الکتریکی را نشان می‌دهند.

۲) گسترهٔ دمایی مایع‌بودن شارهٔ A از اتیلن گلیکول بیشتر و از فلز مس کم‌تر است.

۳) علامت ΔH در تغییر حالت آب در قسمت F با علامت ΔH در انحلال آمونیوم نیترات در آب یکسان است.

۴) D شاره‌ای مولکولی را نشان می‌دهد که علامت بار جزئی اتم مرکزی در مولکول آن با علامت بار جزئی اتم مرکزی در مولکول SCl_4، یکسان است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔

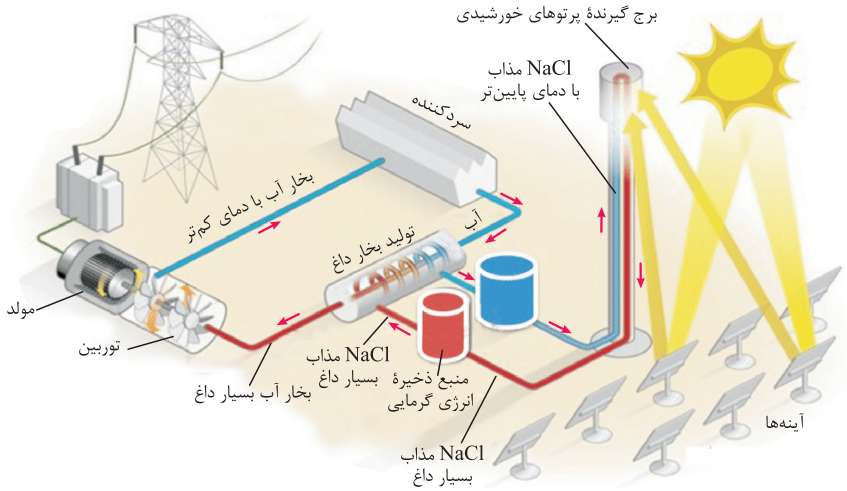
هر چه‌قدر اختلاف نقطهٔ ذوب و جوش برای یک ماده بیشتر باشد، گسترهٔ دمایی مایع‌بودن آن ماده بیشتر است.

منظور از شارهٔ A، شارهٔ یونی است که در کتاب درسی، NaCl به عنوان شارهٔ یونی معرفی شده است. گسترهٔ دمایی مایع‌بودن برای فلز مس، $2500^\circ C - 1083^\circ C$ و برای سدیم کلرید مذاب براساس داده‌های تجربی، $1350^\circ C - 850^\circ C$ است. این گسترهٔ دمایی برای مواد مولکولی مانند اتیلن گلیکول *خیلی کم‌تره!*

اتیلن گلیکول < سدیم کلرید < مس :گسترهٔ دمایی مایع‌بودن

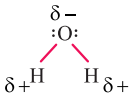
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): قسمت B در شکل نشان‌دهندهٔ آینه‌ها و قسمت C نشان‌دهندهٔ **منبع ذخیرهٔ انرژی گرمایی** است؛ نه انرژی الکتریکی!

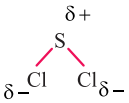


گزینهٔ (۳): قسمت F نشان‌دهندهٔ سردکننده است که در آن میعان بخار آب انجام می‌شود؛ بنابراین با یک تغییر گرماده (با $\Delta H < 0$) *سروکار داریم*، اما انحلال آمونیوم نیترات در آب، یک انحلال گرماگیر (با $\Delta H > 0$) است.

گزینهٔ (۴): D نشان‌دهندهٔ بخار آب داغ است که یک مادهٔ مولکولی محسوب می‌شود. ساختار آن به صورت



است. در این مولکول، O بار جزئی منفی دارد، زیرا خصلت نافلزی آن از هیدروژن بیشتر است. هم‌چنین ساختار SCl_2 به صورت



می‌باشد و چون خصلت نافلزی کلر از گوگرد بیشتر است؛ پس بار جزئی S (اتم مرکزی) در این مولکول مثبت است و با بار جزئی O در H_2O فرق دارد.

۷۷ کدام مورد نادرست است؟

۱) در هنگام تشکیل سدیم کلرید از عنصرهای سازنده، شعاع فلز و نافلز به دلیل تغییر شمار زیرلایه‌های الکترونی اشغال‌شده به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد.

۲) اگر آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب یونی Al_2O_3، برابر ۱۵۹۱۶ kJ باشد، آنتالپی واکنش: $Al_2O_3(g) \rightarrow 2Al^{3+}(g) + 3O^{2-}(g)$ می‌تواند برابر ۱۵۳۷۰ kJ باشد.

۳) فرمول شیمیایی هر ترکیب یونی، ساده‌ترین نسبت کاتیون‌ها و آنیون‌های سازندهٔ آن را نشان می‌دهد.

۴) آرایش یون‌ها در سرتاسر شبکهٔ بلوری نمک خوراکی، از یک الگوی تکراری پیروی می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ هرگاه اتم‌های سدیم و کلر کنار یکدیگر قرار گیرند، اتم‌های سدیم با از دست دادن یک الکترون به یون سدیم و اتم‌های کلر با گرفتن یک الکترون به یون کلرید تبدیل می‌شوند.

شعاع یون Na^+ از اتم Na، کوچک‌تر و شعاع یون Cl^- از اتم Cl، بزرگ‌تر است. آرایش الکترونی این گونه‌ها به صورت زیر است:

$_{11}Na : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^1 \rightarrow$ ۴ زیرلایه

$_{11}Na^+ : 1s^2 / 2s^2 2p^6 \rightarrow$ ۳ زیرلایه

$_{17}Cl : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^5 \rightarrow$ ۵ زیرلایه

$_{17}Cl^- : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 \rightarrow$ ۵ زیرلایه

با تبدیل Na به Na^+، شمار زیرلایه‌های الکترونی اشغال‌شده کاهش می‌یابد، اما در تبدیل Cl به Cl^-، شمار زیرلایه‌های الکترونی اشغال‌شده تغییری نمی‌کند.

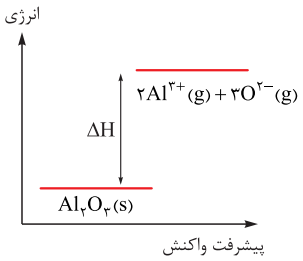
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب یونی، گرمای لازم برای تبدیل ۱ مول جامد یونی به یون‌های گازی سازنده‌اش است.

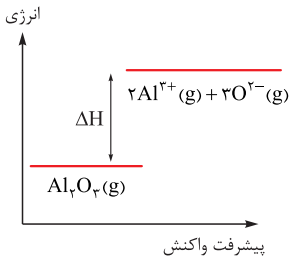
(۱) $Al_2O_3(s) \rightarrow 2Al^{3+}(g) + 3O^{2-}(g)$ (معادلهٔ واکنش فروپاشی شبکهٔ Al_2O_3)

(۲) $Al_2O_3(g) \rightarrow 2Al^{3+}(g) + 3O^{2-}(g)$

برای مقایسهٔ آنتالپی دو واکنش لازم است تفاوت دو واکنش را پیدا کرده و نمودار آن‌ها را رسم و ΔH ها را مقایسه کنیم. با توجه به این‌که سطح آنتالپی یک ماده در حالت گاز بیشتر از حالت جامد است، خواهیم داشت:



نمودار واکنش (۱)



نمودار واکنش (۲)

با توجه به نمودار، ΔH واکنش (۲) باید کم‌تر از ΔH واکنش (۱) یعنی ۱۵۹۱۶ kJ باشد؛ بنابراین عدد ۱۵۳۷۰ kJ برای ΔH واکنش (۲) می‌تواند درست باشد.

گزینهٔ (۳): هر ترکیب یونی شامل تعداد زیادی کاتیون و آنیون است که فرمول شیمیایی، ساده‌ترین نسبت کاتیون‌ها و آنیون‌های سازنده‌اش را نشان می‌دهد.

گزینهٔ (۴): *کاملاً درسته!*

۷۸ در مقایسه با پتاسیم فلوئورید، شعاع کاتیون سازندهٔ کدام ترکیب یونی کوچک‌تر، اما نسبت عدد کوئوردیناسیون آنیون به کاتیون در آن بیشتر است؟

۱) روبیدیم سولفید
۲) سدیم کلرید
۳) کلسیم فسفید
۴) آلومینیم اکسید

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته به طور کلی نسبت عدد کوئوردیناسیون آنیون به کاتیون در شبکهٔ یک ترکیب یونی دوتایی با نسبت شمار کاتیون به آنیون در فرمول شیمیایی آن ترکیب برابر است:

$$\frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{\text{عدد کوئوردیناسیون آنیون}}{\text{عدد کوئوردیناسیون کاتیون}}$$

پاسخ خیلی تشریحی نسبت عدد کوئوردیناسیون آنیون به کاتیون را در ترکیب‌های یونی داده‌شده، حساب می‌کنیم:

$_{19}K^+$: کاتیون ، $\frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{1}{1} = 1$ ، $\frac{\text{عدد کوئوردیناسیون آنیون}}{\text{عدد کوئوردیناسیون کاتیون}}$ ⇒ KF ⇒ پتاسیم فلوئورید

$_{37}Rb^+$: کاتیون ، $\frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{2}{1} = 2$ ، $\frac{\text{عدد کوئوردیناسیون آنیون}}{\text{عدد کوئوردیناسیون کاتیون}}$ ⇒ Rb_2S ⇒ روبیدیم‌سولفید

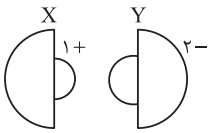
$_{11}Na^+$: کاتیون ، $\frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{1}{1} = 1$ ، $\frac{\text{عدد کوئوردیناسیون آنیون}}{\text{عدد کوئوردیناسیون کاتیون}}$ ⇒ $NaCl$ ⇒ سدیم کلرید

$_{20}Ca^{2+}$: کاتیون ، $\frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{3}{2} = 1/5$ ، $\frac{\text{عدد کوئوردیناسیون آنیون}}{\text{عدد کوئوردیناسیون کاتیون}}$ ⇒ Ca_3P_2 ⇒ کلسیم فسفید

$_{13}Al^{3+}$: کاتیون ، $\frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{\text{عدد کوئوردیناسیون آنیون}}{\text{عدد کوئوردیناسیون کاتیون}}$ ⇒ Al_2O_3 ⇒ آلومینیم اکسید

کاتیون کلسیم فسفید (Ca^{2+}) شعاع یونی کوچک‌تری نسبت به کاتیون پتاسیم فلوئورید (K^+) داشته و عدد کوئوردیناسیون آنیون به کاتیون در کلسیم فسفید، برابر با ۱/۵ و بزرگ‌تر از این مقدار در پتاسیم فلوئورید می‌باشد.

۷۹ **با توجه به شکل مقابل که مقایسهٔ شعاع اتمی و یون‌های پایدار دو عنصر از دورهٔ سوم جدول تناوبی را نشان می‌دهد، کدام مورد نادرست است؟**



۱) شمار الکترون‌ها با $l=1$ در اتم Y، ۴ واحد بیشتر از اتم X است.

۲) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور X_2Y از K_2S بیشتر است.

۳) مقایسهٔ شعاع اتمی عنصرهای X و Y، برعکس مقایسهٔ چگالی بار یون‌های پایدار آن‌ها است.

۴) نسبت بار به شعاع در یون پایدار Y از این نسبت در یون پایدار اکسیژن، بیشتر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در یک گروه از جدول دوره‌ای از بالا به پایین، با افزایش تعداد لایه‌های الکترونی، شعاع اتمی افزایش می‌یابد؛ هم‌چنین در یک دوره از چپ به راست، به دلیل افزایش نیروی جاذبهٔ هسته بر الکترون‌های ظرفیت، شعاع اتمی عنصرها کاهش می‌یابد. جدول زیر، اندازهٔ شعاع برخی یون‌های متداول عنصرهای دوره‌های دوم و سوم را نشان می‌دهد:

گروه / دوره	۱۷	۱۶	۲	۱
دوم	F $^{1-}$ ۱۳۳، ۷۱	O $^{2-}$ ۱۴۰، ۷۳		Li $^{1+}$ ۷۶، ۱۵۲
سوم	Cl $^{1-}$ ۱۸۱، ۹۹	S $^{2-}$ ۱۸۴، ۱۰۲	Mg $^{2+}$ ۷۲، ۱۶۰	Na $^{1+}$ ۱۰۲، ۱۸۶

عنصر Y در دورهٔ سوم همان گوگرد $(_{16}S)$ است و یون پایدار آن به صورت S^{2-} می‌باشد. در مقایسهٔ چگالی بار آن با O^{2-}، چون بارها یکسان است و O^{2-} شعاع کوچک‌تری دارد؛ پس چگالی بار آن بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عنصرهای X و Y، به ترتیب سدیم $(_{11}Na)$ و گوگرد $(_{16}S)$ هستند و آرایش الکترونی اتم آن‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{cases} {}_{11}Na: 1s^2/2s^2 2p^6/3s^1 \Rightarrow l=1 \text{ با } 6 \text{ الکترون} \\ {}_{16}S: 1s^2/2s^2 2p^6/3s^2 3p^4 \Rightarrow l=1 \text{ با } 10 \text{ الکترون} \end{cases} \Rightarrow 10-6=4$$

گزینهٔ (۲): مجموع قدرمطلق بار یک آنیون و یک کاتیون در دو ترکیب یونی K_2S و Na_2S یکسان است؛ بنابراین با توجه به کوچک‌تربودن شعاع یون Na^+ نسبت به K^+، داریم: $X_2Y(Na_2S) > K_2S$:مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی شبکه

گزینهٔ (۳): در یک دوره از جدول تناوبی از چپ به راست، شعاع اتمی عنصرها کاهش می‌یابد: $Y < X$:مقایسهٔ شعاع

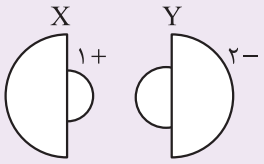
هم‌چنین هر چه اندازهٔ بار یونی بیشتر باشد، چگالی بار آن بیشتر خواهد بود: $Y^{2-} > X^+$:مقایسهٔ چگالی بار

در نتیجه می‌توان گفت که مقایسهٔ شعاع اتمی عنصرهای X و Y، برعکس مقایسهٔ چگالی بار یون‌های پایدار آن‌هاست.

کنکور

شکل زیر مقایسهٔ شعاع اتمی و یون‌های پایدار دو عنصر دورهٔ سوم جدول تناوبی عنصرها را نشان می‌دهد. کدام مورد دربارهٔ آن‌ها به یقین درست است؟

(سؤال ۱۰۶ کنکور تجربی ۱۴۰۴ - نوبت اول)



۱) شعاع یونی: $(Y^{2-} > X^{+})$ و نقطهٔ ذوب: $NaCl > X_2Y$

۲) شعاع یونی: $(X^{+} > Y^{2-})$ و نقطهٔ ذوب: $X_2Y > LiF$

۳) شعاع اتمی: $(Y > X)$ و آنتالپی فروپاشی: $X_2Y > K_2S$

۴) شعاع اتمی: $(X > Y)$ و آنتالپی فروپاشی: $MgCl_2 > X_2Y$

۸۰ آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور چهار ترکیب یونی زیر برحسب $kJ.mol^{-1}$ برابر ۲۹۶۵، ۲۴۸۸، ۹۲۶ و ۳۸۰۰ می‌باشد. اگر ۲۵ گرم از مخلوط سدیم فلوئورید و منیزیم اکسید با جذب ۸۴۳ کیلوژول گرما به یون‌های گازی خود تبدیل شوند، چند درصد از جرم این مخلوط را منیزیم اکسید تشکیل داده است؟ $(O=16, F=19, Na=23, Mg=24 : g.mol^{-1})$

سدیم اکسید	منیزیم فلوئورید	منیزیم اکسید	سدیم فلوئورید	ماده
؟	؟	؟	؟	آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب یونی

۱) ۱۶ ۲) ۳۴ ۳) ۶۶ ۴) ۸۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

هر چه نیروی جاذبهٔ میان یون‌ها قوی‌تر باشد (چگالی بار یون‌ها بیشتر باشد)، استحکام و آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب یونی در آن بیشتر خواهد بود.

تکنیک مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور:

گام اول: هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکهٔ آن بزرگ‌تر خواهد بود.

گام دوم: اگر مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون برای دو ترکیب یونی برابر باشد، شعاع یون‌های سازندهٔ آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. هر چه شعاع یون‌ها کوچک‌تر باشد، ΔH فروپاشی بزرگ‌تر خواهد بود.

$$Mg^{2+}O^{2-} > Mg^{2+}F_2^- > Na_2^+O^{2-} > Na^+F^-$$

مجموع بار: $2+2=4$ $\quad \underbrace{2+1=3 \quad 2+1=3}_{\text{شعاع یونی}} \begin{cases} O^{2-}>F^- \\ Na^+>Mg^{2+} \end{cases} \quad 1+1=2$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیبات یونی داده‌شده به صورت زیر است:

سدیم‌فلوئورید < سدیم‌اکسید < منیزیم‌فلوئورید < منیزیم‌اکسید

۹۲۶ ۲۴۸۸ ۲۹۶۵ ۳۸۰۰

مقدار مول NaF و MgO را به ترتیب n_1 و n_2 در نظر می‌گیریم؛ بنابراین:

$$(\times 95)\begin{cases}(42\times n_1)+(40\times n_2)=25\\(926\times n_1)+(3800\times n_2)=843\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3990n_1-3800n_2=-2375\\926n_1+3800n_2=843\end{cases}$$

$$-3064n_1=-1532$$

$$n_1=0/5 \xrightarrow{\text{مقدار } n_1 \text{ را در یکی از معادلات جای‌گذاری می‌کنیم.}} (42\times 0/5)+40n_2=25 \Rightarrow n_2=0/1$$

$$\text{جرم NaF} = \text{مول} \times \text{جرم مولی} = 42\times 0/5 = 21\ g$$

$$\text{جرم MgO} = \text{مول} \times \text{جرم مولی} = 40\times 0/1 = 4\ g$$

در نهایت درصد جرمی MgO را در مخلوط حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی MgO} = \frac{\text{جرم MgO}}{\text{جرم کل مخلوط}}\times 100 = \frac{4}{25}\times 100 = \%16$$

۸۱ با توجه به رفتار مواد A، X و D در برابر تابش نور سفید، این مواد به ترتیب کدام می‌توانند باشند؟

ماده	رفتار
A	کل نور تابیده‌شده را جذب می‌کند.
X	طول موج‌های حدود ۶۲۰ تا ۷۰۰ نانومتر را بازتاب می‌کند.
D	کل نور تابیده‌شده را بازتاب می‌کند.

سیاه‌رنگ ← A
قرمزرنگ ← X
سفیدرنگ ← D

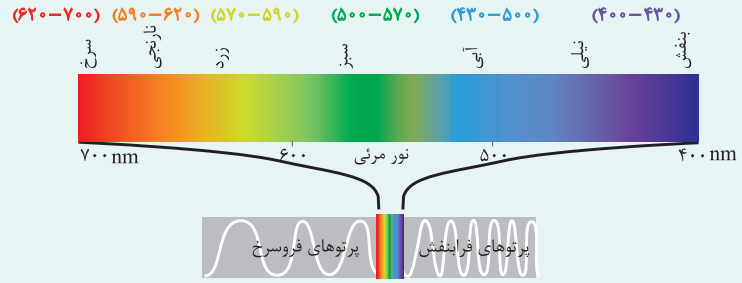
۱) دوده ـ آهن (III) اکسید ـ تیتانیم (IV) اکسید
۲) دوده ـ محلول پتاسیم پرمنگنات ـ تیتانیم (IV) اکسید
۳) تیتانیم (IV) اکسید ـ آهن (III) اکسید ـ دوده
۴) تیتانیم (IV) اکسید ـ محلول پتاسیم پرمنگنات ـ دوده

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

- مواد سفید ← همهٔ طول موج‌های مرئی را بازتاب می‌کنند.
- مواد سیاه ← همهٔ طول‌موج های مرئی را جذب می‌کنند.
- مواد رنگی ← بخشی از طول موج‌های مرئی را جذب، باقی‌مانده را بازتاب و یا عبور می‌دهند.

سازندهٔ اصلی یک مادهٔ رنگی که به آن رنگ می‌دهد، **رنگدانه** نام دارد. تیتانیم (IV) اکسید (TiO_2)، رنگدانهٔ سفید، آهن (III) اکسید (Fe_2O_3)، رنگدانهٔ قرمز و دوده (C)، رنگدانهٔ سیاه، از جمله رنگدانه‌های معدنی هستند.



پاسخ خیلی تشریحی ✔ دوده با رنگ سیاه، تمام طول موج‌های مرئی را جذب می‌کند و آهن (III) اکسید تمام طول موج‌ها به‌جز ۷۰۰ ـ ۶۲۰ نانومتر را جذب می‌کند، به همین دلیل قرمزرنگ دیده می‌شود و تیتانیم (IV) اکسید، رنگدانهٔ سفید است و تمام طول موج‌ها را بازتاب می‌کند.

۸۲ کدام مورد درست است؟

۱) توصیف «شکننده‌بودن در حالت جامد و رسانای جریان برق بودن در حالت مذاب» را می‌توان به دو نوع جامد بلوری نسبت داد.

۲) در گذشته، انسان‌ها رنگدانه‌های طبیعی را از منابع گیاهی، جانوری و برخی کانی‌ها تهیه می‌کردند.

۳) تیتانیم برخلاف فولاد، مقاومت بالایی در برابر سایش دارد.

۴) نیتینول نوعی آلیاژ هوشمند است که از یک فلز دستهٔ p و یک فلز دستهٔ d ساخته شده است.

آلیاژی از نیکل ($_{28}Ni$) و تیتانیم ($_{22}Ti$)

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ سازندهٔ اصلی یک مادهٔ رنگی که به آن رنگ می‌بخشد، رنگدانه نام دارد. در گذشته، انسان این مواد رنگی را از منابع طبیعی همچون گیاهان، جانوران و برخی کانی‌ها تهیه می‌کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): ویژگی شکننده‌بودن در حالت جامد و رسانای جریان برق بودن در حالت مایع را تنها می‌توان به ترکیبات یونی نسبت داد.

گزینهٔ (۳): تیتانیم و فولاد، هر دو مقاومت بالایی در برابر سایش دارند.

گزینهٔ (۴): نیتینول آلیاژی از نیکل (فلزی از دستهٔ d) و تیتانیم (فلزی از دستهٔ d) است که به آلیاژ هوشمند معروف می‌باشد.

۸۳ به محلولی دارای ۹۱۴ گرم وانادیم (V) کلرید، چند گرم فلز روی باید اضافه شود تا با انجام واکنش کامل، محلول بنفش‌رنگ حاصل شود؟ $(Cl = ۳۵/۵ , V = ۵۱ , Zn = ۶۵ : g.mol^{-1})$

$$VCl_۵ + Zn \rightarrow ZnCl_۲ + VCl_n$$

۱) ۳۹۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۳۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته محلول ترکیب‌های برخی فلزهای واسطه از جمله وانادیم ($_{۲۳}V$) به رنگ‌های گوناگونی دیده می‌شوند. وانادیم دارای عدد اکسایش صفر، در حالت آزاد و عنصری و دارای عددهای اکسایش ۲ (II)، ۳ (III)، ۴ (IV) و ۵ (V) در حالت ترکیب با دیگر عنصرها است. رنگ **نمک‌های مختلف وانادیم** در این عددهای اکسایش، *این‌چوریاست*:

محلول	رنگ
نمک وانادیم (V)	زرد
نمک وانادیم (IV)	آبی
نمک وانادیم (III)	سبز
نمک وانادیم (II)	بنفش

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به رنگ محلول نهایی که بنفش است، فرمول شیمیایی ترکیب حاصل به صورت $VCl_۲$ می‌باشد:

$$VCl_۵ + Zn \rightarrow ZnCl_۲ + \underbrace{VCl_n}_{VCl_۲ \Rightarrow V^{۲+}, Cl^-}$$

بعد از پیداکردن n و قبل از انجام استوکیومتری لازم است واکنش را موازنه کنیم:

$$۲VCl_۵ + ۳Zn \rightarrow ۳ZnCl_۲ + ۲VCl_۲$$

استفاده از کسر تبدیل: جرم مولی $VCl_۵ = ۵۱ + ۵(۳۵/۵) = ۲۲۸/۵ \ g.mol^{-۱}$

$$۹۱۴ \ g \ VCl_۵ \times \frac{۱ \ mol \ VCl_۵}{۲۲۸/۵ \ g \ VCl_۵} \times \frac{۳ \ mol \ Zn}{۲ \ mol \ VCl_۵} \times \frac{۶۵ \ g \ Zn}{۱ \ mol \ Zn} = ۳۹۰ \ g \ Zn$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{VCl_۵}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Zn}} \Rightarrow \frac{۹۱۴}{۲ \times ۲۲۸/۵} = \frac{x}{۳ \times ۶۵} \Rightarrow x = ۳۹۰ \ g \ Zn$$

کنکور با توجه به معادلهٔ داده‌شده، از واکنش چند مول وانادیم (V) کلرید با ۳/۹ گرم فلز روی، محلول بنفش‌رنگ از نمک وانادیم تشکیل می‌شود؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود؛ $Zn = ۶۵ \ g.mol^{-۱}$) *(سؤال ۱۰۷ کنکور تجربی ۱۴۰۳ (خارج از کشور))*

$$VCl_۵(aq) + Zn(s) \rightarrow ZnCl_۲(aq) + VCl_n(aq)$$

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۲
۳) ۰/۰۳ ۴) ۰/۰۴

۸۴ کدام موارد زیر در ارتباط با تیتانیم درست است؟

الف) در ترکیبی از آن که به عنوان رنگدانهٔ سفید کاربرد دارد، عدد اکسایش فلز با عدد اکسایش وانادیم در VO^{2+} برابر است.

تیتانیم (IV) اکسید (TiO_2)

ب) $100\ cm^3$ تیتانیم خالص در مقایسه با $100\ cm^3$ فولاد، جرم بیشتری دارد.

پ) مجموع عددهای کوانتومی اصلی و فرعی برای الکترون‌های ظرفیت اتم آن، برابر ۱۳ است.

ت) برخی ویژگی‌های فیزیکی مانند چکش‌خواری را می‌توان با الگوی دریای الکترونی برای اکسید آن توجیه کرد.

ث) نقطهٔ ذوب آن از فولاد بالاتر است که این موضوع یکی از دلایل استفاده از تیتانیم در موتور جت است.

۱) الف ـ ت ـ ث
۲) ب ـ ت ـ ث
۳) ب ـ پ
۴) الف ـ ث

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

- تیتانیم ($_{22}Ti$) یکی از فلزهای دستهٔ d جدول دوره‌ای است که در دورهٔ چهارم و گروه ۴ قرار دارد: $_{22}Ti : [_{18}Ar]3d^2 4s^2$
- ویژگی‌های فوق‌العادهٔ این فلز از جمله **ماندگاری** و **استحکام مناسب** باعث شده که این فلز امروزه کاربردهای مختلفی، مانند استفاده در ساخت موتور جت، ساخت پروانهٔ کشتی اقیانوس‌پیما و ساخت بناهای زیبا و ماندگار داشته باشد.
- جدول زیر برخی از ویژگی‌های تیتانیم را در مقایسه با فولاد زنگ‌نزن نشان می‌دهد.

شما با توجه به این جدول، باید مقایسهٔ خواص تیتانیم و فولاد *رو بلد باشین*؛

۱) نقطهٔ ذوب: فولاد > تیتانیم

۲) چگالی: فولاد < تیتانیم

۳) واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا: فولاد < تیتانیم

۴) مقاومت در برابر خوردگی: فولاد < تیتانیم

۵) مقاومت در برابر سایش: فولاد = تیتانیم

ویژگی / ماده	تیتانیم	فولاد
نقطهٔ ذوب ($^\circ C$)	۱۶۶۷	۱۵۳۵
چگالی ($g.mL^{-1}$)	۴/۵۱	۷/۹۰
واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا	ناچیز	متوسط
مقاومت در برابر خوردگی	عالی	ضعیف
مقاومت در برابر سایش	عالی	عالی

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های (الف) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) از TiO_2 به عنوان رنگدانهٔ سفید استفاده می‌شود:

$$\text{عدد اکسایش Ti در } TiO_2 \Rightarrow Ti + 2(-2) = 0 \Rightarrow Ti = +4$$

$$\text{عدد اکسایش V در } VO^{2+} \Rightarrow V + (-2) = +2 \Rightarrow V = +4$$

ب) با توجه به چگالی تیتانیم و فولاد که به ترتیب ۴/۵۱ و ۷/۹۰ گرم بر میلی‌متر می‌باشد، در حجم برابر، فلزی که چگالی بیشتری دارد، جرم بیشتری نیز خواهد داشت؛ بنابراین در حجم $100\ cm^3$، جرم فولاد بیشتر از تیتانیم است.

پ) آرایش الکترونی Ti با عدد اتمی $Z = 22$ به صورت زیر است:

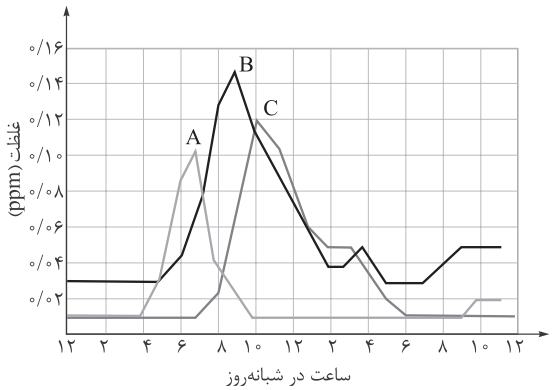
$$_{22}Ti : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 \underbrace{3d^2 / 4s^2}_{\text{الکترون‌های ظرفیت}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{الکترون‌های زیرلایهٔ } 3d \ (n+l) \Rightarrow 2\times(n+l)=2\times(\overset{5}{\cancel{3+2}})=10 \\ \text{الکترون‌های زیرلایهٔ } 4s \ (n+l) \Rightarrow 2\times(n+l)=2\times(\overset{4}{\cancel{4+0}})=8 \end{array}\right\} \Rightarrow 10+8=18$$

ت) چکش‌خواری فلزهایی مانند تیتانیم را می‌توان با الگوی دریای الکترونی فلز توجیه کرد. دقت کنید که اکسید عنصرها، ترکیب یونی یا مولکولی محسوب شده و الگوی دریای الکترونی ندارند.

ث) نقطهٔ ذوب تیتانیم و فولاد به ترتیب ۱۶۶۷ و ۱۵۳۵ درجهٔ سلسیوس است. هنگامی که موتور جت کار می‌کند، همهٔ اجزای سازنده (ثابت و متحرک) دمای بالایی دارند؛ به همین دلیل در ساخت این موتور از تیتانیم که نقطهٔ ذوب بالاتری دارد، استفاده می‌شود.

۸۵ با توجه به نمودار زیر که غلظت سه آلایندهٔ NO، O_3 و NO_2 را در نمونه‌ای از هوای یک شهر بزرگ نشان می‌دهد، کدام مورد نادرست است؟



۱) B به رنگ قهوه‌ای روشن دیده می‌شود.

۲) A فراوردهٔ دیگر واکنش تولید اوزون تروپوسفری است.

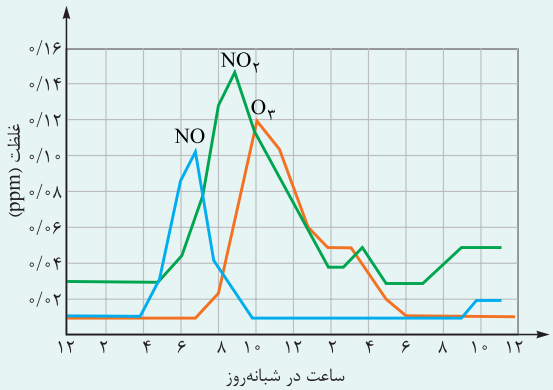
۳) در ساعت ۱۰ صبح، غلظت گاز اوزون در هوا از گاز نیتروژن دی‌اکسید، بیشتر است.

۴) در بازهٔ زمانی ۶ صبح تا ۱۲ ظهر، سرعت متوسط تغییر غلظت گاز نیتروژن دی‌اکسید، $\frac{۱}{۳}$ برابر سرعت متوسط تغییر غلظت گاز نیتروژن مونوکسید است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نمودار زیر غلظت آلاینده‌های NO، NO_2 و O_3 را در نمونه‌ای از هوای یک شهر بزرگ نشان می‌دهد:



معادلهٔ پیدایش گازهای NO_2 و O_3 به صورت زیر است:

$$۲NO(g) + O_2(g) \rightarrow \underbrace{۲NO_2(g)}_{\text{قهوه‌ای‌رنگ}}$$:معادلهٔ پیدایش NO_2

نکته رنگ قهوه‌ای هوای آلوده *زیر سر همین* NO_2 *هستش!* لایهٔ قهوه‌ای روشن در زمستان در سطح شهرهای بزرگ جهان و کشور *خودمون بیشتر دیده می‌شه!*

$$NO_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{نورخورشید}} NO(g) + O_3(g)$$:معادلهٔ پیدایش O_3 (اوزون تروپوسفری)

هواستون باشه که اوزون با این‌که جزء آلاینده‌های هوا است، اما جزء آلاینده‌های خروجی از اگزوز خودروها به شمار نمی‌آید، زیرا در هواکره و از واکنش میان گازهای نیتروژن دی‌اکسید و اکسیژن در حضور نور خورشید تولید می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بیایید به ترتیب گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱): B نشان‌دهندهٔ گاز NO_2 است که قهوه‌ای‌رنگ است.

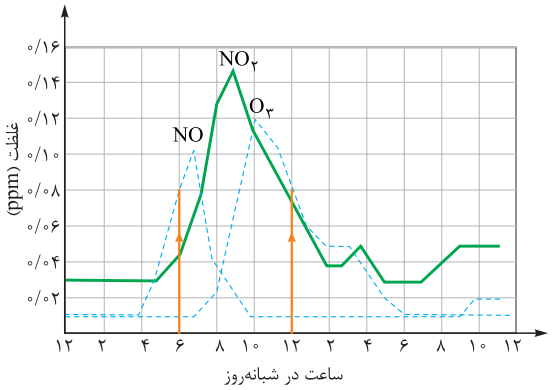
گزینهٔ (۲): با توجه به نمودار کتاب درسی، A گاز NO و فراوردهٔ دیگر واکنش تولید اوزون تروپوسفری است:

$$NO_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{نورخورشید}} NO(g) + O_3(g)$$: معادلهٔ پیدایش O_3 (اوزون تروپوسفری)

گزینهٔ (۳): با توجه به نمودار، در ساعت ۱۰ صبح غلظت گاز O_3، ۰/۱۲ ppm و غلظت گاز NO_2 تقریباً ۰/۱۱ ppm است؛ بنابراین غلظت NO_2 از O_3 کم‌تر است.

گزینهٔ (۴): نسبت سرعت تغییر غلظت گازها در بازهٔ زمانی مشخص، با نسبت تغییر غلظت آن‌ها برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\bar{R}(NO_2)}{\bar{R}(NO)} = \frac{۰/۰۷ - ۰/۰۴}{۰/۰۸ - ۰/۰۱} = \frac{۳}{۷}$$



۸۶ کدام موارد زیر نادرست است؟

الف) آمونیاک و اوره، قبل از تولید ویتامین A در جهان، به طور صنعتی تولید شده‌اند.

ب) همهٔ گازهای خروجی از اگزوز خودروهای بنزینی، از سوختن بنزین در موتور خودرو ایجاد شده‌اند.

پ) افزایش دما همانند کاتالیزگر، باعث کاهش انرژی فعال‌سازی واکنش و در نتیجه افزایش سرعت آن می‌شوند.

ت) مقدار CO خروجی از اگزوز خودروها به ازای طی یک کیلومتر از مقدار NO بیشتر است.

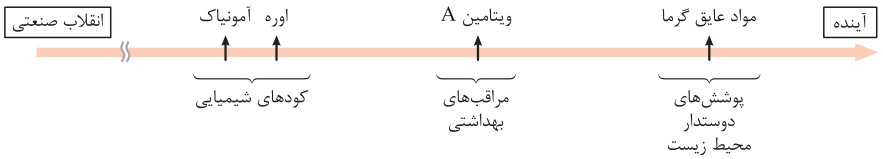
۱) الف ـ ب
۲) الف ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های (ب) و (پ) نادرست‌اند.

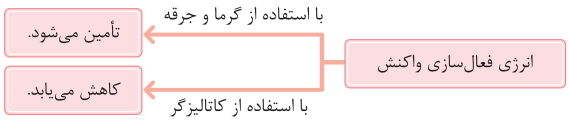
بررسی عبارت‌ها:

الف) ترتیب زمانی شناسایی و تولید چند فراورده حاصل از فناوری‌های شیمیایی پس از انقلاب صنعتی *این‌طوری‌است:*



ب) در ساختار بنزین، اتم N وجود ندارد؛ در نتیجه منبع گازهای NO و N_2 خروجی از اگزوز خودروها، نیتروژن هواست؛ نه بنزین!

پ) کاتالیزگر تنها عاملی است که می‌تواند انرژی فعال‌سازی واکنش را کاهش دهد، در حالی که افزایش دما انرژی فعال‌سازی واکنش را تأمین می‌کند و آن را کاهش نمی‌دهد.



ت) با توجه به حاشیهٔ صفحهٔ ۹۴ کتاب درسی، *بدانید و آگاه باشید!* که ترتیب مقایسهٔ جرم آلاینده‌های CO، C_xH_y و NO خروجی از اگزوز خودروها به صورت زیر است:

مقدار آلایندهٔ تولیدشده (برحسب گرم) به ازای طی یک کیلومتر توسط خودرو: $CO > C_xH_y > NO$

۸۷ کدام مورد جزء کاربردهای طیف‌سنجی فروسرخ نیست؟

۱) تشخیص اتانول و دی‌متیل اتر از یکدیگر

۲) شناسایی اکسیدهای نیتروژن در هواکره

۳) شناسایی برخی مولکول‌ها در فضای بین ستاره‌ای

۴) ام.آر.آی. (MRI) در علم پزشکی

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

یکی از رایج‌ترین روش‌های طیف‌سنجی که برای **شناسایی گروه‌های عاملی** به کار می‌رود، طیف‌سنجی **فروسرخ** است. هر یک از گروه‌های عاملی، گسترهٔ معین و منحصربه‌فردی از پرتوهای فروسرخ را جذب می‌کنند. براساس همین تفاوت، می‌توان گروه‌های عاملی را از یکدیگر تشخیص داد. به طور مثال به کمک طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان اتانول و دی‌متیل اتر را از یکدیگر تشخیص داد:

C_2H_6O ← اتانول: CH_3CH_2-OH (گروه عاملی هیدروکسیل)

C_2H_6O ← دی‌متیل اتر: CH_3-O-CH_3 (گروه عاملی اتری)

تازه! از طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان برای شناسایی آلاینده‌هایی مانند کربن مونوکسید و اکسیدهای نیتروژن در هواکره و هم‌چنین شناسایی برخی مولکول‌ها در فضای بین ستاره‌ای نیز استفاده کرد.

کاربردهای طیف‌سنجی فروسرخ ← تشخیص گروه‌های عاملی

کاربردهای طیف‌سنجی فروسرخ ← شناسایی آلاینده‌هایی مانند CO و NO_x در هواکره

کاربردهای طیف‌سنجی فروسرخ ← شناسایی برخی مولکول‌ها در فضای بین ستاره‌ای

پاسخ خیلی تشریحی ✔ MRI جزء کاربردهای طیف‌سنجی فروسرخ نیست، اما بقیهٔ گزینه‌ها از کاربردهای طیف‌سنجی فروسرخ هستند.

با توجه به داده‌های جدول زیر، اگر روزانه ۴۰ هزار خودرو در شهری رفت و آمد کنند و هر خودرو به طور میانگین ۳۰ کیلومتر مسافت طی کند، با نصب مبدل کاتالیستی در اگزوز خودروها، روزانه از ورود چند مول گاز NO به هواکره جلوگیری می‌شود؟ $(N = 14, O = 16 : g.mol^{-1})$

NO	فرمول شیمیایی آلاینده	
۱/۰۴	در نبود مبدل	مقدار آلاینده $(g.km^{-1})$
۰/۰۴	در مجاورت مبدل	

۱) $1/2 \times 10^6$
۲) $4/8 \times 10^4$
۳) 4×10^4
۴) $1/6 \times 10^3$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

مقدار مول NO در نبود مبدل $\Rightarrow$ ۴۰۰۰۰ خودرو $\times \frac{30\ km}{1\ خودرو} \times \frac{1/04\ g\ NO}{1\ km} \times \frac{1\ mol\ NO}{30\ g\ NO} = 41600\ mol\ NO$

مقدار مول NO در مجاورت مبدل $\Rightarrow$ ۴۰۰۰۰ خودرو $\times \frac{30\ km}{1\ خودرو} \times \frac{0/04\ g\ NO}{1\ km} \times \frac{1\ mol\ NO}{30\ g\ NO} = 1600\ mol\ NO$

اختلاف مول NO $= 41600 - 1600 = 40000\ mol\ NO$

یه‌جور دیگه

با طی هر کیلومتر، $1/04 - 0/04 = 1$ گرم از جرم NO ورودی به هواکره کاسته می‌شود:

۴۰۰۰۰ خودرو $\times \frac{30\ km}{1\ خودرو} \times \frac{1\ gNO}{1\ km} \times \frac{1\ molNO}{30\ gNO} = 4 \times 10^4\ mol\ NO$

۸۹ **درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**

۱) با کشیدن نوک کبریت روی سطح زبر قوطی کبریت، انرژی فعال‌سازی واکنش تأمین می‌شود.

۲) در شرایط یکسان، سرعت یک واکنش گرماگیر، کم‌تر از سرعت یک واکنش گرماده است.

۳) فسفر سفید همانند گاز هیدروژن، در هوا و در دمای اتاق می‌سوزد.

۴) برخی واکنش‌ها از جمله سوختن کامل گاز متان، نیاز به انرژی فعال‌سازی ندارند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینهٔ (۱) برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): یکی از روش‌های تأمین انرژی فعال‌سازی، گرمادادن به واکنش‌دهنده‌ها است. برای مثال، هنگامی که نوک کبریت روی سطح زبر قوطی کشیده می‌شود، گرما تولید می‌شود که این گرما، انرژی فعال‌سازی واکنش را تأمین می‌کند.

گزینهٔ (۲): سرعت واکنش‌ها با انرژی فعال‌سازی آن‌ها رابطه دارد؛ نه با گرماگیر و گرماده بودن واکنش‌ها!

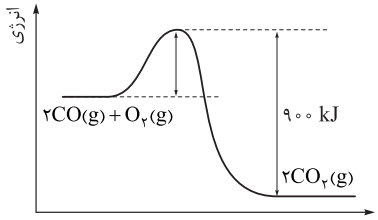
گزینهٔ (۳): انرژی فعال‌سازی برخی واکنش‌ها از جمله سوختن فسفر سفید، کم بوده و در دمای اتاق تأمین می‌شود؛ در حالی که برای برخی واکنش‌ها مانند سوختن گاز هیدروژن این اتفاق *نمیفته*! به همین *دلیله* که فسفر سفید برخلاف گاز هیدروژن در هوا و در دمای اتاق می‌سوزد.

سوختن گاز هیدروژن > سوختن فسفر سفید : E_a در هوا و در دمای اتاق

گزینهٔ (۴): همهٔ واکنش‌های شیمیایی صرف نظر از این‌که گرماده یا گرماگیر باشند، به انرژی فعال‌سازی نیاز دارند.

۹۰ با توجه به جدول و نمودار زیر، انرژی فعال‌سازی واکنش داده‌شده چند کیلوژول است؟

پیوند	آنتالپی ($kJ.mol^{-1}$)
$C \equiv O$	۱۰۷۲
$O = O$	۴۹۵
$C = O$	۸۰۰



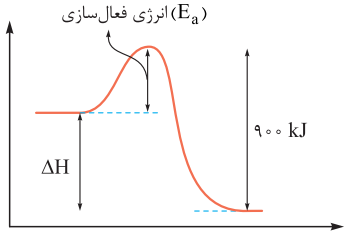
۱) ۳۳۹ ۲) ۳۹۳ ۳) ۵۱۶ ۴) ۵۶۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته ΔH واکنش با استفاده از آنتالپی پیوند با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها}]$

پاسخ خیلی تشریحی ✔



$E_a = ۹۰۰ - |\Delta H_{\text{واکنش}}|$

گام اول: ساختار مواد شرکت‌کننده در واکنش: $2CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$ را رسم می‌کنیم و با استفاده از آنتالپی‌های پیوند، ΔH واکنش را حساب می‌کنیم:

$$2:C \equiv O: + :\ddot{O} = \ddot{O}: \rightarrow 2\ :\ddot{O} = C = \ddot{O}:$$

گام دوم: با توجه به نمودار و با استفاده از ΔH واکنش، انرژی فعال‌سازی (E_a) را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta H = [\underbrace{2(۱۰۷۲) + ۴۹۵}_{۲۶۳۹}] - [\underbrace{2 \times 2(۸۰۰)}_{۳۲۰۰}] = -۵۶۱\ kJ$$

$$E_a = ۹۰۰ - |-۵۶۱| = ۳۳۹\ kJ$$

۹۱ کدام مورد دربارهٔ واکنش: $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$ در دمای اتاق، نادرست است؟

۱) بدون حضور کاتالیزگر، این واکنش در دمای اتاق انجام نمی‌شود.

۲) آنتالپی واکنش در حضور جرقه یا پودر روی یکسان است.

۳) به دلیل سطح تماس بیشتر پودر روی، سرعت انجام آن در حضور پودر روی نسبت به توری پلاتینی بیشتر است.

۴) سرعت انجام آن با ایجاد جرقه در مخلوط و در حضور پودر روی را به ترتیب می‌توان «انفجاری» و «سریع» در نظر گرفت.

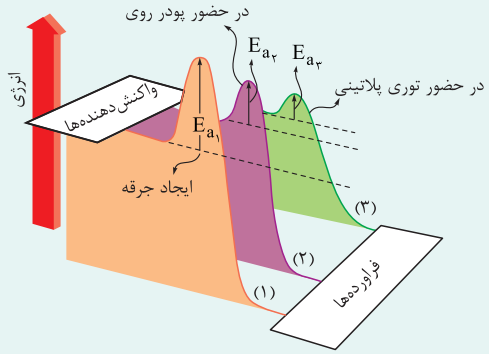
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

با توجه به جدول زیر که برخی داده‌ها برای واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن را در شرایط گوناگون نشان می‌دهد، می‌توان نتیجه گرفت که:

شرایط آزمایش	دما ($^\circ C$)	سرعت واکنش	آنتالپی واکنش (kJ)
بدون حضور کاتالیزگر	۲۵	ناچیز	−۵۷۲
ایجاد جرقه در مخلوط	۲۵	انفجاری	−۵۷۲
در حضور پودر روی	۲۵	سریع	−۵۷۲
در حضور توری پلاتینی	۲۵	انفجاری	−۵۷۲

- واکنش سوختن هیدروژن در دمای اتاق بدون حضور کاتالیزگر انجام نمی‌شود، زیرا انرژی فعال‌سازی آن بالا است.
- با ایجاد جرقه در مخلوط گازهای هیدروژن و اکسیژن، انرژی فعال‌سازی واکنش تأمین شده و واکنش به صورت انفجاری انجام می‌شود.
- فلزهای روی (Zn) و پلاتین (Pt) کاتالیزگرهای واکنش سوختن هیدروژن هستند. در حضور پودر روی، واکنش سریع و در حضور توری پلاتینی، واکنش به صورت انفجاری انجام می‌شود. توری پلاتینی انرژی فعال‌سازی واکنش را بیشتر کاهش می‌دهد و کاتالیزگر مناسب‌تری برای سوختن هیدروژن است.



- در همهٔ مسیرهای انجام واکنش، آنتالپی واکنش مقداری ثابت است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

توری پلاتینی انرژی فعال‌سازی واکنش را نسبت به پودر روی بیشتر کاهش می‌دهد؛ در نتیجه می‌توان گفت که سرعت انجام واکنش در حضور توری پلاتینی نسبت به پودر روی، بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن هیدروژن در دمای اتاق بالاست و این واکنش، بدون حضور کاتالیزگر انجام نمی‌شود.

گزینهٔ (۲): آنتالپی واکنش در همهٔ مسیرها ثابت است و به مسیر انجام واکنش بستگی ندارد.

گزینهٔ (۴): *آره والا! یه نگاهی به درس‌باکس بندازین!*

جدول زیر برخی داده‌ها برای واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن را در دمای $25^{\circ}C$ نشان می‌دهد، با توجه به آن پاسخ دهید.

(سؤال ۱۳ ـ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۱)

شماره آزمایش	شرایط آزمایش	سرعت واکنش
۱	بدون حضور کاتالیزگر	ناچیز
۲	ایجاد جرقه در مخلوط	انفجاری
۳	در حضور پودر روی	سریع
۴	در حضور توری پلاتینی	انفجاری

الف) نقش جرقه در آزمایش (۲) را بنویسید.

ب) نقش توری پلاتینی در آزمایش (۴) چیست؟

پ) انرژی فعال‌سازی واکنش در آزمایش (۳) بیشتر است یا آزمایش (۴)؟ دلیل بنویسید.

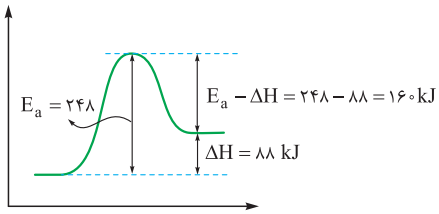
ت) در آزمایش (۱) و (۳) تغییر آنتالپی (ΔH) واکنش‌ها را با نوشتن دلیل مقایسه کنید.

۹۲ **انرژی فعال‌سازی واکنش: $2A(g) \rightarrow D_2(g) + E_2(g)$، برابر ۲۴۸ kJ و آنتالپی آن برابر $+88\ kJ$ است. اگر در حضور کاتالیزگر، انرژی فعال‌سازی این واکنش ۲۵٪ کاهش یابد، تفاوت سطح انرژی فراورده‌ها و سدّ انرژی (قلهٔ نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش)، چند درصد تغییر خواهد کرد؟**

۱) ۲۵ ۲) ۳۸ / ۷۵ ۳) ۶۳ / ۲۵ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ از آن‌جایی که ΔH واکنش یک عدد مثبت است، ما با یک واکنش گرماگیر سروکار داریم.



$$E_a - \Delta H = ۲۴۸ - ۸۸ = ۱۶۰\ kJ$$

$$\Delta H = +۸۸\ kJ$$

حال با توجه به این‌که در حضور کاتالیزگر، انرژی فعال‌سازی واکنش، ۲۵ درصد کاهش می‌یابد، اما ΔH واکنش تغییر نمی‌کند، داریم:

در حضور کاتالیزگر $E_a = \frac{۷۵}{۱۰۰} \times ۲۴۸ = ۱۸۶\ kJ$

تفاوت سطح انرژی فراورده و قله در حضور کاتالیزگر $= E_a - \Delta H = ۱۸۶ - ۸۸ = ۹۸\ kJ$

درصد تغییرات تفاوت سطح انرژی فراورده‌ها و سد انرژی $= \frac{\text{تغییرات}}{\text{مقدار اولیه}} \times ۱۰۰ = \frac{۹۸ - ۱۶۰}{۱۶۰} \times ۱۰۰ = \underset{\downarrow}{-}٪۳۸ / ۷۵$

علامت منفی نشان‌دهندهٔ کاهش است.

۹۳ **کدام مورد دربارهٔ مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی درست است؟**

۱) در آن‌ها گازهای CO و NO به ترتیب به گازهای CO_2 و NO_2 تبدیل می‌شوند.

۲) برای مدت طولانی کار نمی‌کنند و هرساله باید آن‌ها را تعویض کرد.

۳) در برخی از آن‌ها، کاتالیزگرها به شکل مش‌های (دانه‌های) ریز هستند و سطح آن‌ها با سرامیک پوشیده شده است.

۴) کاتالیزگرهای مورد استفاده در این مبدل‌ها، همگی جزء فلزهای واسطه هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ این مبدل‌ها توری‌هایی از جنس سرامیک هستند که سطح آن‌ها با فلزهای پلاتین (Pt)، پالادیم (Pd) و رودیم (Rh) پوشانده شده است. این فلزها نقش کاتالیزگر را دارند. همهٔ این فلزها جزء فلزهای واسطهٔ جدول تناوبی هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی، واکنش‌های زیر انجام می‌شوند:

واکنش حذف گاز آلایندهٔ CO: $2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$

واکنش حذف گاز آلایندهٔ NO: $2NO(g) \rightarrow N_2(g) + O_2(g)$

با انجام این واکنش‌ها، گاز CO به CO_2 و گاز NO به N_2 و O_2 تبدیل می‌شود.

گزینهٔ (۲): مبدل‌های کاتالیستی برای **مدت طولانی** کار می‌کنند، اما پس از مدتی کارایی آن‌ها کاهش می‌یابد و دیگر قابل استفاده نیستند.

گزینهٔ (۳): برای افزایش کارایی مبدل کاتالیستی، گاهی **سرامیک را به شکل مش (دانه‌های) ریز درمی‌آورند** و کاتالیزگرها را روی سطح آن می‌نشانند؛ زیرا سطح تماس مش‌ها از توری بیشتر است.

۹۴ کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل ذره‌های سازندهٔ یک ماده در دما و فشار ثابت، هم‌ارز با آنتالپی آن است.

ب) برای پیوندهای موجود در مولکول‌های دواتمی، به کار بردن میانگین آنتالپی پیوند مناسب‌تر است.

پ) با افزایش جرم مولی، ارزش سوختی الکل‌های یک‌عاملی افزایش می‌یابد.

ت) در واکنش اکسایش گلوکز در بدن، گرمای مبادله‌شده عمدتاً ناشی از تفاوت انرژی گرمایی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها است.

۱) الف ـ پ
۲) ب ـ ت
۳) الف ـ ت
۴) ب ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های (الف) و (پ) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) هر نمونه ماده از تعداد بسیار زیادی ذره تشکیل شده است و هر یک از این ذره‌ها دارای انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل هستند. به انرژی کل (مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل) این نمونه، محتوای انرژی یا آنتالپی آن می‌گویند.

ب) در مولکول‌های دواتمی فقط یک نوع پیوند اشتراکی وجود دارد و **نیازی به استفاده از واژهٔ میانگین آنتالپی پیوند نیست.**

پ) در الکل‌ها برخلاف هیدروکربن‌ها، هر چه جرم مولی بیشتر باشد، ارزش سوختی نیز بیشتر است.

ت) اگر یک واکنش در دمای ثابت انجام شود (مانند اکسایش گلوکز در بدن)، گرمای جذب یا آزاد شده در واکنش به طور عمده وابسته به تفاوت میان **انرژی پتانسیل** مواد واکنش‌دهنده و فراورده است و ناشی از تفاوت انرژی گرمایی نیست، زیرا در دمای ثابت، تفاوت چشمگیری میان انرژی گرمایی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها وجود ندارد.

۹۵ مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش زیر کدام است و در این واکنش، به ازای مصرف ۱/۶ گرم مادهٔ A، چند گرم مادهٔ B تولید می‌شود؟ (بازده واکنش را ۸۰ درصد در نظر بگیرید؛ $H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1}$)

آب + ساده‌ترین عضو خانوادهٔ آلدهیدها (B) → گاز اکسیژن + ساده‌ترین عضو خانوادهٔ الکل‌ها (A)

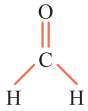
فرمالدهید (CH_2O) — متانول (CH_3OH)

۱) ۷ ـ ۱/۵
۲) ۷ ـ ۱/۲
۳) ۱۱ ـ ۱/۲
۴) ۱۱ ـ ۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ معادلهٔ واکنش انجام‌شده را نوشته و موازنه می‌کنیم:

ساده‌ترین عضو خانوادهٔ الکل‌ها $\Rightarrow CH_3OH$

ساده‌ترین عضو خانوادهٔ آلدهیدها $\Rightarrow$  $\Rightarrow CH_2O$

معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش: $\underbrace{2CH_3OH}_{A} + 1O_2 \rightarrow \underbrace{2CH_2O}_{B} + 2H_2O$

پس مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ این واکنش، برابر با $2+1+2+2=7$ است.

برای محاسبهٔ قسمت دوم، ابتدا باید مقدار نظری فراورده را حساب کنیم:

$$1/6\ g\ A \times \frac{1\ mol\ A}{32\ g\ A} \times \frac{2\ mol\ B}{2\ mol\ A} \times \frac{30\ g\ B}{1\ mol\ B} = 1/5\ g\ B$$

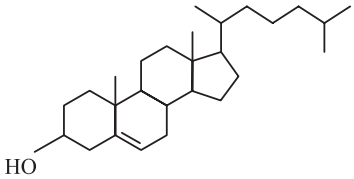
حالا با توجه به بازده درصدی واکنش، خواهیم داشت:

$$\text{بازده‌درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow 80 = \frac{\text{مقدار عملی}}{1/5} \times 100 \Rightarrow \text{مقدار عملی } B = 1/2\ g$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم} \times \frac{\text{بازده‌درصدی}}{100}}{\underbrace{\text{جرم‌مولی} \times \text{ضریب}}_{A\ (CH_3OH)}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم‌مولی} \times \text{ضریب}}_{B\ (CH_2O)}} \Rightarrow \frac{1/6 \times \frac{80}{100}}{2 \times 32} = \frac{\text{جرم } B}{2 \times 30} \Rightarrow \text{جرم } B = 1/2\ g$$

۹۶ **با توجه به ساختار کلسترول که به صورت زیر می‌باشد، کدام مورد نادرست است؟ ($Br = ۸۰\ g.mol^{-۱}$)**



۱) شمار مول‌های اکسیژن لازم برای سوختن کامل یک مول از آن برابر ۳۸ است.

۲) ۰/۲۵ مول از آن قادر است با ۲۰ گرم بُرم به طور کامل واکنش داده و آن را بی‌رنگ کند.

۳) شمار پیوندهای اشتراکی یگانه در ساختار آن، ۳۸ برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی است.

۴) یک الکل سیرنشده است که مقدار اضافی آن در دیوارهٔ رگ‌ها رسوب می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بیایید به ترتیب گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱): معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش سوختن کامل کلسترول به صورت زیر است:

$$C_{۲۷}H_{۴۶}O + ۳۸O_۲ \rightarrow ۲۷CO_۲ + ۲۳H_۲O$$

بنابراین برای سوختن کامل ۱ مول کلسترول به ۳۸ مول گاز $O_۲$ نیاز است.

گزینهٔ (۲): با توجه به این‌که در ساختار کلسترول، یک پیوند دوگانهٔ $C=C$ وجود دارد، معادلهٔ واکنش کلسترول با برم به صورت زیر است:

$$C_{۲۷}H_{۴۶}O + Br_۲ \rightarrow C_{۲۷}H_{۴۶}OBr_۲$$

$$۰/۲۵\ mol\ C_{۲۷}H_{۴۶}O \times \frac{۱\ mol\ Br_۲}{۱\ mol\ C_{۲۷}H_{۴۶}O} \times \frac{۱۶۰\ g\ Br_۲}{۱\ mol\ Br_۲} = ۴۰\ g\ Br_۲$$

گزینهٔ (۳): $\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{(C\times۴)+(O\times۲)+(H\times۱)}{۲} = \frac{(۲۷\times۴)+(۱\times۲)+(۴۶\times۱)}{۲} = ۷۸$

$$\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی} \Rightarrow (O\times۲) = ۱\times۲ = ۲$$

چون تعداد پیوندهای اشتراکی یگانه پرسیده شده و ما در ساختار کلسترول، یک پیوند دوگانه داریم، باید تعداد پیوندهای دوگانه را از تعداد کل پیوندهای اشتراکی کم کنیم:

$$\frac{\text{تعداد پیوندهای اشتراکی یگانه}}{\text{تعداد جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۷۸-۲}{۲} = \frac{۷۶}{۲} = ۳۸$$

گزینهٔ (۴): کلسترول دارای یک گروه عاملی هیدروکسیل $(-OH)$ و یک پیوند دوگانهٔ $C=C$ است، به همین دلیل، الکل سیرنشده محسوب می‌شود و مقدار اضافهٔ آن در بدن در رگ‌ها رسوب می‌کند.

۹۷ کدام مورد نادرست است؟

۱) ΔH فرایندهای انحلال را می‌توان به کمک گرماسنج لیوانی محاسبه نمود.

۲) آنتالپی بسیاری از واکنش‌ها را می‌توان به کمک قانون هس محاسبه کرد.

۳) واکنش تشکیل آمونیاک از هیدرازین، گرماده بوده و محاسبهٔ گرمای آن به روش تجربی امکان‌پذیر نیست.

۴) در تبدیل کربن مونوکسید و نیتروژن مونوکسید به فراورده‌هایی با آلایندگی کم‌تر، گرما آزاد می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

واکنش تولید آمونیاک: $N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$ (گرماده)

← دومرحله‌ای

- مرحلهٔ اول: $N_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow N_2H_4(g)$ (گرماگیر) ← گرمای واکنش را نمی‌توان به طور تجربی محاسبه کرد.
- مرحلهٔ دوم: $N_2H_4(g) + H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$ (گرماده) ← گرمای واکنش را می‌توان به طور تجربی محاسبه کرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

فرایند تولید آمونیاک از هیدرازین، گرماده است، اما محاسبهٔ گرمای این واکنش به طور تجربی امکان‌پذیر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): گرماسنج لیوانی برای اندازه‌گیری گرمای واکنش‌هایی مناسب‌تر است که با مواد گازی‌شکل سروکار ندارند؛ مانند فرایند انحلال.

گزینهٔ (۲): اگر معادلهٔ واکنشی را بتوان از جمع معادلهٔ دو یا چند واکنش دیگر به دست آورد، ΔH آن را هم می‌توان از جمع جبری ΔH همان واکنش‌ها به دست آورد و این قانون که به قانون هس معروف است، در صورتی که شرایط (دما و فشار) همهٔ واکنش‌ها یکسان باشد، برای محاسبهٔ آنتالپی بسیاری از واکنش‌ها قابل استفاده است.

گزینهٔ (۴): شیمی‌دان‌های هواکره، برای تبدیل آلاینده‌های NO و CO که از اگزوز خودروها وارد هواکره می‌شوند، واکنش زیر را طراحی کرده‌اند. با انجام این واکنش، آلاینده‌ها به گازهایی پایدارتر و با آلایندگی کم‌تر تبدیل می‌شوند:

$$2CO(g) + 2NO(g) \rightarrow 2CO_2(g) + N_2(g)$$

با توجه به این‌که در این واکنش، پایداری فراورده‌ها بیشتر است؛ پس این واکنش گرماده بوده و با آزادشدن انرژی همراه است.

۹۸ از هیدرازین در سوخت موشک استفاده می‌شود و یکی از روش‌های صنعتی برای تولید آن، واکنش: $2NH_3(g)+Cl_2(g)\rightarrow N_2H_4(g)+2HCl(g)$ است. اگر در این واکنش، ۷۵ کیلوژول گرما مصرف شود، چند گرم هیدرازین تولید می‌شود؟ $(H=1, N=14: g.mol^{-1})$

$$\frac{1}{2}N_2(g)+\frac{3}{2}H_2(g)\rightarrow NH_3(g)\ ,\Delta H=-46/1\ kJ$$

$$N_2(g)+2H_2(g)\rightarrow N_2H_4(g)\ ,\Delta H=95/4\ kJ$$

$$\frac{1}{2}H_2(g)+\frac{1}{2}Cl_2(g)\rightarrow HCl(g)\ ,\Delta H=-92/3\ kJ$$

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸

۳) ۴۰۰ ۴) ۸۰۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در معادلهٔ واکنش مورد نظر، NH_3 در سمت چپ و با ضریب ۲ قرار دارد؛ بنابراین واکنش (۱) را معکوس و ضرب در ۲ می‌کنیم. هم‌چنین Cl_2 در معادلهٔ واکنش مورد نظر، در سمت چپ و با ضریب ۱ قرار دارد و لازم است واکنش (۳) را ضرب در ۲ کنیم. واکنش (۲) بدون تغییر خواهد بود. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$(1)'\ \text{واکنش}: 2NH_3(g)\rightarrow N_2(g)+3H_2(g)\ ,\ \Delta H_1'=-2(-46/1)=92/2\ kJ$$

$$(2)\ \text{واکنش}: N_2(g)+2H_2(g)\rightarrow N_2H_4(g)\ ,\ \Delta H_2=95/4\ kJ$$

$$(3)'\ \text{واکنش}: H_2(g)+Cl_2(g)\rightarrow 2HCl(g)\ ,\ \Delta H_3'=2(-92/3)=-184/6\ kJ$$

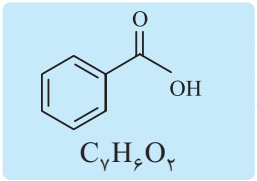
واکنش کلی: $2NH_3(g)+Cl_2(g)\rightarrow N_2H_4(g)+2HCl$

$$\Delta H_{\text{واکنش کلی}}=\Delta H_1'+\Delta H_2+\Delta H_3'=92/2+95/4-184/6=+3\ kJ$$

بنابراین بر اثر تولید ۱ مول هیدرازین (N_2H_4)، ۳ کیلوژول گرما لازم است، پس باید محاسبه کنیم که به ازای مصرف ۷۵ کیلوژول انرژی در این واکنش، چند گرم N_2H_4 تولید می‌شود:

$$75\ kJ\times\frac{1\ mol\ N_2H_4}{3\ kJ}\times\frac{32\ g\ N_2H_4}{1\ mol\ N_2H_4}=800\ g\ N_2H_4$$

۹۹ کدام مطلب دربارهٔ بنزوئیک اسید نادرست است؟



۱) اگر مقدار کافی از آن را با محلول پتاسیم پرمنگنات مخلوط کرده و حرارت دهیم، محلول بی‌رنگ می‌شود.

۲) در تمشک و توت‌فرنگی وجود دارد و به عنوان رنگ‌دهنده و طعم‌دهنده به کنسرو مواد غذایی اضافه می‌شود.

۳) شمار اتم‌های کربن آن با بنزآلدهید و شمار اتم‌های هیدروژن آن با ساده‌ترین سیکلوآلکان برابر است.

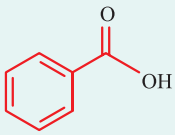
۴) یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک است که شمار پیوندهای دوگانه در ساختار آن با شمار پیوندهای دوگانه در ساختار نفتالن، یک واحد اختلاف دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

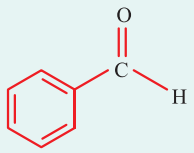
بنزوئیک اسید که یک عضو از خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها است، در صنایع غذایی به عنوان **نگهدارنده** استفاده می‌شود. **نگهدارنده‌ها**، سرعت واکنش‌های شیمیایی را که منجر به فساد مواد غذایی می‌شوند، کاهش می‌دهند.

- فرمول مولکولی بنزوئیک اسید، $C_7H_6O_2$ بوده و ساختار آن به صورت روبه‌رو است:

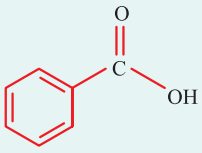


- در ساختار بنزوئیک اسید، یک حلقهٔ بنزنی وجود دارد؛ بنابراین این ترکیب، **آروماتیک** محسوب می‌شود. (بنزوئیک اسید، ساده‌ترین اسید آروماتیک است.)
- بنزوئیک اسید در تمشک و توت‌فرنگی وجود دارد.

توجه در این فصل با بنزآلدهید هم آشنا شدیم. *به وقت* این دوتا ترکیب را با هم اشتباه نگیرید.



بنزآلدهید (C_7H_6O)



بنزوئیک اسید $(C_7H_6O_2)$

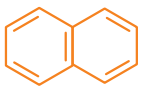
پاسخ خیلی تشریحی ✔ بنزوئیک اسید جزء نگهدارنده‌های مواد غذایی است؛ نه طعم‌دهنده!

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): محلول بنفش‌رنگ پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق به کندی واکنش می‌دهد، اما با گرم‌شدن محلول به سرعت بی‌رنگ می‌شود.

گزینهٔ (۳): با توجه به فرمول مولکولی بنزوئیک اسید $(C_7H_6O_2)$، بنزآلدهید (C_7H_6O) و ساده‌ترین سیکلوآلکان (C_4H_8)، *این عبارت درسته!*

گزینهٔ (۴): در ساختار نفتالن، ۵ پیوند دوگانه و در ساختار بنزوئیک اسید، ۴ پیوند دوگانه وجود دارد:



نفتالن

اختلاف تعداد پیوندهای دوگانه $= 5 - 4 = 1$

۱۰۰ **در یک راکتور، واکنشی بین دو مادهٔ مجهول X و Y به صورت: «فراورده‌ها $\rightarrow xX + yY$» در جریان است. اگر در یک بازهٔ زمانی معین، سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ X، برابر با نصف سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ Y و جرم مولی مادهٔ X، دو برابر جرم مولی مادهٔ Y باشد، کدام مطلب درست است؟**

۱) در واحد زمان، تغییر شمار مول‌های X بیشتر از تغییر شمار مول‌های Y است.

۲) ضریب استوکیومتری X در معادلهٔ واکنش، دو برابر ضریب استوکیومتری Y است.

۳) سرعت واکنش برحسب مول بر لیتر بر زمان، برابر با سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ X تقسیم بر جرم مولی آن است.

۴) سرعت متوسط تغییر شمار مول‌های Y، چهار برابر سرعت متوسط تغییر شمار مول‌های X است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به این‌که سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ X در یک بازهٔ زمانی معین، نصف سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ Y و هم‌چنین جرم مولی مادهٔ X، دو برابر جرم مولی مادهٔ Y است؛ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{\Delta \text{جرم}(X)}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta \text{جرم}(Y)}{\Delta t}}{۲} \Rightarrow \Delta \text{جرم}(Y) = ۲\Delta \text{جرم}(X) \Rightarrow \underbrace{\Delta(\text{مول} \times \text{جرم مولی})}_{Y} = \underbrace{۲\Delta(\text{مول} \times \text{جرم مولی})}_{X}$$

$$\Rightarrow \Delta n(Y) = ۴\Delta n(X)$$

با توجه به این‌که در این بازهٔ زمانی، تغییرات مول مادهٔ Y، ۴ برابر تغییرات مول مادهٔ X است؛ بنابراین می‌توان گفت که سرعت متوسط تغییر شمار مول‌های مادهٔ Y، ۴ برابر سرعت متوسط تغییر شمار مول‌های مادهٔ X می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *اتفاقاً برعکس!* با توجه به محاسبات فوق، تغییر شمار مول‌های مادهٔ Y، ۴ برابر تغییر شمار مول‌های مادهٔ X *عه!*

گزینهٔ (۲): در یک بازهٔ زمانی معین، قدرمطلق میزان تغییرات تعداد مول مواد شرکت‌کننده در واکنش، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها است؛ پس ضریب استوکیومتری مادهٔ Y در معادلهٔ واکنش، چهار برابر ضریب استوکیومتری مادهٔ X می‌باشد.

گزینهٔ (۳): *پس مهم معلول چی؟!* حاصل تقسیم تغییر جرم بر جرم مولی، معادل تغییر مول ماده است و سرعت برحسب مول بر زمان محاسبه می‌شود؛ نه مول بر لیتر بر زمان!

کنکوری **در یک واکنش شیمیایی، سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ A، ۳ برابر سرعت متوسط تغییر جرم مادهٔ D و جرم مولی D، $\frac{۱}{۳}$ جرم مولی A است. کدام مورد همواره درست است؟** *(سؤال ۹۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ (خارج از کشور))*

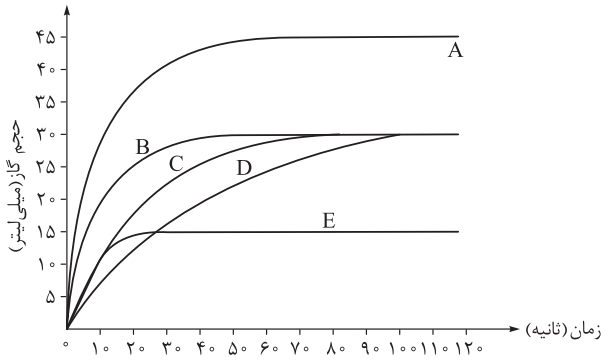
۱) در واحد زمان، تغییر شمار مول‌های A بیشتر از تغییر شمار مول‌های D است.

۲) در معادلهٔ واکنش، ضریب استوکیومتری A با ضریب استوکیومتری D برابر است.

۳) سرعت واکنش، برابر با سرعت متوسط تغییر جرم یا مول D است.

۴) A و D، هر دو در یک سمت معادلهٔ واکنش جای دارند.

۱۰۱ **با توجه به نمودار زیر که مربوط به واکنش نوار منیزیم با هیدروکلریک اسید و تولید گاز هیدروژن و منیزیم کلرید می‌باشد، کدام مورد نادرست است؟**



۱) اگر نمودار B مربوط به واکنش منیزیم با ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار HCl باشد، نمودار C می‌تواند مربوط به واکنش همان مقدار منیزیم با ۳۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار HCl باشد.

۲) اگر نمودار D مربوط به واکنش یک قطعه منیزیم با دو لیتر محلول ۱ مولار HCl باشد، نمودار B می‌تواند مربوط به واکنش همان مقدار پودر منیزیم با دو لیتر محلول ۱ مولار HCl باشد.

۳) نمودارهای B و D به ترتیب می‌توانند مربوط به گرم‌کردن و استفاده از بازدارنده در واکنش C باشند.

۴) در واکنش‌های مربوط به نمودارهای E و A در دمای یکسان، نسبت میزان مول واکنش‌دهندهٔ مصرفی در آن‌ها، می‌تواند ۱ به ۳ باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تغییرات حجم محلول تأثیری در سرعت واکنش نخواهد داشت و سرعت واکنش تنها تابع غلظت مواد شرکت‌کننده در واکنش است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): شیب نمودار B بیشتر از نمودار D است که به معنی بیشتربودن سرعت واکنش B نسبت به D می‌باشد. اگر در واکنش مورد نظر به جای نوار منیزیم، پودر منیزیم بریزیم، به دلیل افزایش سطح تماس، سرعت واکنش بیشتر می‌شود.

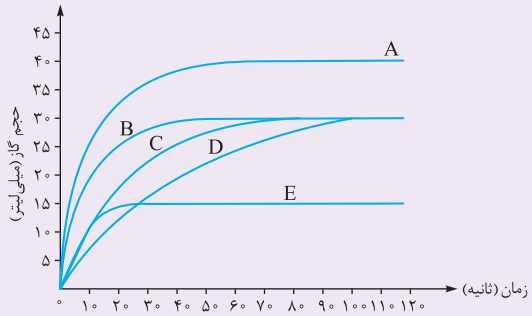
گزینهٔ (۳): گرم‌کردن (نمودار B) باعث افزایش سرعت واکنش و افزایش شیب نمودار (نمودار B) و استفاده از بازدارنده‌ها باعث کاهش سرعت واکنش و کاهش شیب نمودار (نمودار D) می‌شود، اما حجم گاز تولیدشده در پایان واکنش در دو حالت، با توجه به ثابت‌ماندن مقدار واکنش‌دهنده‌ها، ثابت خواهد ماند که در نمودارها به درستی رعایت شده است.

گزینهٔ (۴): با توجه به حجم گاز هیدروژن تولیدشده در انتهای واکنش‌ها $(\frac{۰/۴۵}{۰/۱۵} = ۳)$، می‌توان گفت که میزان واکنش‌دهندهٔ مصرفی در نمودار A، سه برابر نمودار E است.

کتاب درسی

در نمودار زیر، منحنی C مربوط به واکنش ۰/۵ گرم نوار منیزیم با مقدار کافی از هیدروکلریک اسید در دمای اتاق است. منحنی‌های دیگر مربوط به همین واکنش اما در شرایط متفاوتی است. با توجه به آن‌ها به پرسش‌ها پاسخ دهید.

(شیمی (۲) ـ سؤال ۱۵ صفحهٔ ۹۸ کتاب درسی)



الف) سرعت واکنش را برای آزمایش‌های C و D برحسب لیتر بر ساعت حساب کنید.

ب) کدام منحنی مربوط به واکنشی است که در آن ۰/۵ گرم پودر منیزیم به جای نوار منیزیم استفاده شده است؟ (بقیهٔ شرایط واکنش تغییر نکرده است.) دلیل خود را توضیح دهید.

پ) کدام منحنی مربوط به واکنش ۰/۵ گرم نوار منیزیم با مقدار کافی از هیدروکلریک اسید در دمای ۵ درجهٔ سلسیوس است؟ چرا؟

۱۰۲ در یک ظرف سربسته واکنش زیر انجام می‌شود: (معادلهٔ واکنش موازنه شود؛ $C = ۱۲ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱}$)

$$CO_۲(g) + H_۲O(l) \rightarrow CH_۳OH(aq) + O_۲(g)$$

اگر در بازهٔ زمانی ۰ تا ۴ ساعت، سرعت متوسط مصرف کربن دی‌اکسید برابر با ۰/۱ مول بر ساعت باشد، کدام مطلب درست است؟

۱) پس از ۴ ساعت، ۰/۲ مول متانول تولید می‌شود.

۲) در پایان ۴ ساعت، شمار مول‌های $O_۲$ تولیدشده برابر با ۱/۲ مول است.

۳) سرعت متوسط تولید گاز $O_۲$ در این بازهٔ زمانی، برابر با $۲/۵ \times ۱۰^{-۳}$ مول بر دقیقه است.

۴) اگر شمار مول‌های اولیهٔ گاز $CO_۲$ برابر ۱۰ باشد، پس از ۴ ساعت، جرم آن به ۴۴۲/۲ گرم می‌رسد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ در ابتدا معادلهٔ واکنش انجام‌شده را موازنه می‌کنیم:

$$۲CO_۲ + ۴H_۲O \rightarrow ۲CH_۳OH + ۳O_۲$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$\text{مقدار مول مصرفی } CO_۲ \text{ بعد از ۴ ساعت} \Rightarrow ۰/۱\ mol.h^{-۱} \times ۴h = ۰/۴\ mol$$

با توجه به مساوی‌بودن ضریب $CO_۲$ و متانول در همین زمان، ۰/۴ مول متانول تولید می‌شود.

گزینهٔ (۲):

$$\frac{\bar{R}_{O_۲}}{۳} = \frac{\bar{R}_{CO_۲}}{۲} \Rightarrow \frac{\bar{R}_{O_۲}}{۳} = \frac{۰/۱}{۲} \Rightarrow \bar{R}_{O_۲} = \frac{۰/۳}{۲} = ۰/۱۵\ mol.h^{-۱}$$

$$\Rightarrow \bar{R}_{O_۲} = \frac{\Delta n(O_۲)}{\Delta t} \Rightarrow ۰/۱۵ = \frac{\Delta n(O_۲)}{۴} \Rightarrow \Delta n(O_۲) = ۰/۶\ mol$$

گزینهٔ (۳):

$$\bar{R}_{O_۲} = ۰/۱۵ \frac{mol}{h} \times \frac{۱\ h}{۶۰\ min} = \frac{۱}{۴} \times ۱۰^{-۲} = ۰/۲۵ \times ۱۰^{-۲} = ۲/۵ \times ۱۰^{-۳}\ mol.min^{-۱}$$

گزینهٔ (۴): پس از ۴ ساعت، $۴ \times ۰/۱ = ۰/۴$ مول گاز $CO_۲$ مصرف شده و شمار مول‌های آن به $۱۰ - ۰/۴ = ۹/۶$ می‌رسد.

$$۹/۶\ mol\ CO_۲ \times \frac{۴۴\ g\ CO_۲}{۱\ mol\ CO_۲} = ۴۲۲/۴\ g\ CO_۲$$

۱۰۳ درستی یا نادرستی موارد زیر به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه آمده است؟

الف) واردکردن الیاف آهن داغ در یک ارلن پرشده از گاز اکسیژن به جای هوای آزاد، سبب افزایش سرعت واکنش سوختن آن می‌شود.

ب) ΔH واکنش تهیهٔ هیدروژن پراکسید از واکنش مستقیم میان گازهای هیدروژن و اکسیژن را نمی‌توان به روش تجربی تعیین کرد.

پ) در یک واکنش شیمیایی کامل، غلظت تمام واکنش‌دهنده‌ها در پایان واکنش به صفر می‌رسد.

ت) سرعت متوسط تولید یا مصرف هیچ دو ماده‌ای در یک واکنش شیمیایی نمی‌تواند با هم برابر باشد.

۱) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۲) درست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۳) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۴) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های (الف) و (ب) درست و عبارت‌های (پ) و (ت) نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) سرعت واکنش سوختن الیاف آهن داغ در ارلن پر از اکسیژن، به علت بیشتربودن غلظت مادهٔ واکنش‌دهنده (گاز اکسیژن)، در مقایسه با هوای آزاد، بیشتر است.

ب) مقدار ΔH واکنش: $H_2(g) + O_2(g) \rightarrow H_2O_2(g)$ را نمی‌توان به روش تجربی اندازه‌گیری کرد.

پ) اگر دو یا چند واکنش‌دهنده، به نسبت ضرایب استوکیومتری وارد واکنش شده باشند، با انجام کامل واکنش، مقدار همهٔ آن‌ها به صفر می‌رسد، اما ممکن است یک واکنش‌دهنده، به مقدار بیشتری وارد ظرف واکنش شده باشد. در این صورت، با مصرف کامل یکی از واکنش‌دهنده‌ها، واکنش به پایان می رسد، اما مقداری از واکنش‌دهندهٔ دیگر در ظرف باقی می‌ماند.

ت) **سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد در یک واکنش با ضرایب استوکیومتری آن‌ها متناسب است**؛ بنابراین اگر در یک واکنش، دو ماده ضریب برابر داشته باشند، سرعت تولید یا مصرف آن‌ها نیز با هم برابر است.

۱۰۴ جدول زیر قسمتی از اندازه‌گیری حجم گاز آزادشده در شرایط استاندارد از واکنش میان کلسیم کربنات و هیدروکلریک اسید را نشان می‌دهد. براساس این جدول، در ۳۰ ثانیهٔ اول، سرعت واکنش چند مول بر دقیقه بوده و جرم مخلوط اولیه به تقریب چند گرم است؟ (جرم مخلوط واکنش در ثانیهٔ ۳۰ برابر ۵۵/۸ گرم است؛ $C=12, O=16 : g.mol^{-1}$)

زمان	۶ ثانیهٔ اول	۶ ثانیهٔ دوم	۶ ثانیهٔ سوم	۶ ثانیهٔ چهارم	۶ ثانیهٔ پنجم
حجم گاز تولیدشده (mL)	۱۷۹/۲	۱۳۴/۴	۱۰۰/۸	۸۹/۶	۸۰/۶۴

$$CaCO_3(s) + 2HCl(aq) \rightarrow CaCl_2(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

۱) $56/95 \_ 2/61\times10^{-2}$

۲) $56/85 \_ 5/22\times10^{-2}$

۳) $56/85 \_ 2/61\times10^{-2}$

۴) $56/95 \_ 5/22\times10^{-2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ سرعت واکنش را براساس حجم گاز تولیدشده در ۳۰ ثانیهٔ اول، محاسبه می‌کنیم:

$$\text{حجم گاز } CO_2 \text{ تولیدشده} \Rightarrow 80/64+89/6+100/8+134/4+179/2=584/64\ mL$$

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \bar{R}_{CO_2} = \frac{\Delta V(CO_2)}{\Delta t} = \frac{(584/64-0)}{30} = 19/48\ mL.s^{-1}$$

$$\xrightarrow[\text{سرعت}]{\text{تبدیل واحد}} \frac{19/48\ mL}{s}\times\frac{60\ s}{1\ min}\times\frac{1\ L}{1000\ mL}\times\frac{1\ mol}{22/4\ L} = 5/22\times10^{-2}\ mol.min^{-1}$$

جرم مخلوط اولیه برابر با مجموع جرم گاز تولیدشده و جرم مخلوط در ثانیهٔ ۳۰ واکنش است:

$$\text{جرم گاز } CO_2 \text{ تولیدشده} \Rightarrow \underbrace{584/64\ mL}_{\text{حجم گاز } CO_2 \text{ تولیدشده در } 30\ s} \times\frac{1\ mol}{22400\ mL}\times\frac{44\ g}{1\ mol}\simeq 1/15\ g$$

$$\text{جرم مخلوط اولیه} = \text{جرم مخلوط در ثانیهٔ ۳۰} + \text{جرم گاز تولیدشده در ۳۰ ثانیه} = 55/8+1/15=56/95\ g$$

۱۰۵ **کدام مورد درست است؟**

۱) چهرهٔ پنهان غذا نشان می‌دهد که سالانه حدود ۳۰٪ از غذایی که در جهان فراهم می‌شود، به مصرف نمی‌رسد و به زباله تبدیل می‌شود و یا از بین می‌رود.

۲) سهم تولید گاز گلخانه‌ای CO_2 در ردپای غذا به مراتب بیشتر از سوختن سوخت‌ها در خودروها، کارخانه‌ها و ... است.

۳) واکنش: $H_2(g) + I_2(s) \rightarrow 2HI(g)$، یک واکنش گرماده بوده و در دمای اتاق انجام نمی‌شود.

۴) از فرایند انحلال آمونیوم نیترات در آب، در بسته‌هایی که برای گرم‌کردن محل آسیب‌دیدگی مناسب است، استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ چهرهٔ پنهان ردپای غذا نشان می‌دهد که سهم تولید گاز گلخانه‌ای کربن دی‌اکسید (CO_2) به مراتب بیشتر از سوختن سوخت‌ها در خودروها، کارخانه‌ها و ... است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): چهرهٔ **آشکار** غذا نشان می‌دهد که سالانه حدود ۳۰٪ از غذایی که در جهان فراهم می‌شود، به مصرف نمی‌رسد و به زباله تبدیل می‌شود و یا از بین می‌رود.

گزینهٔ (۳): براساس تمرین‌های دوره‌ای کتاب درسی، این واکنش برخلاف واکنش: $H_2(g) + I_2(g) \rightarrow 2HI(g)$، یک واکنش **گرماگیر** است.

گزینهٔ (۴): انحلال آمونیوم نیترات (NH_4NO_3) در آب، برخلاف انحلال کلسیم کلرید $(CaCl_2)$ یک انحلال **گرماگیر** است و از فرایند انحلال آن در بسته‌های سرمازا برای سردکردن محل آسیب‌دیدگی استفاده می‌شود.