

ریاضیات

۱- مقدار عبارت $\frac{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}{8x^2 - 24x + 18}$ به ازای ریشهٔ بزرگ تر معادلهٔ $x^2 - 3x + 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ (۳) $\frac{1}{11}\sqrt{5}$ (۴) $5\sqrt{5}$

۲- مقدار عبارت $\frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$ به ازای ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2 + x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{11}\sqrt{5}$ (۲) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ (۳) $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ (۴) $\frac{1}{6}\sqrt{5}$

۳- اگر $\frac{1}{a^3 + 1} + \frac{1}{a^3 - 1} = 2$ باشد، حاصل $(\frac{1}{a^3 - \sqrt{a^3 + 1}} + \frac{1}{a^3 + \sqrt{a^3 + 1}})^{1401}$ چه قدر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۴- مجموعهٔ مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = \sqrt[3]{x} + |x|$ صعودی باشد، کدام است؟

- (۱) $[-1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, +\infty)$ (۳) $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ (۴) $[-3\sqrt{3}, 0]$

۵- تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2} & x < 1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۶- تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^2 - 5|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = |f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۷- تابع $y = |f(x)|$ که در آن $f(x) = x(|x| + 3)$ است، چند نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) صفر

۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \tan(\frac{\pi}{2} - x)}{2x - \pi}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) ۱

۹- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} |x - a|$ روی بازهٔ $[0, a]$ برابر $\frac{1}{5}$ است. مقدار a کدام است؟

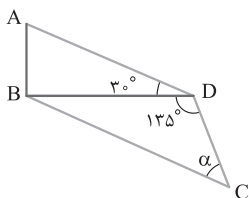
- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) ۱

۱۰- تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار $a^3 + b - c$ کدام است؟

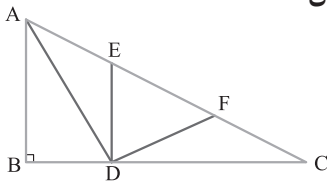
- (۱) $(a+1)^3 - 1$ (۲) $(a+1)^3 + 1$ (۳) $(a-1)^3 - 1$ (۴) $(a-1)^3 + 1$

۱۱- در شکل روبه‌رو، اگر $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ و زاویهٔ $\angle ABC = 105^\circ$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$



۱۲- در مثلث شکل مقابل، اگر مثلث DEF متساوی الاضلاع و مثلث های ADE و CFD متساوی الساقین باشند، آن گاه $\frac{AD}{BD}$ کدام است؟



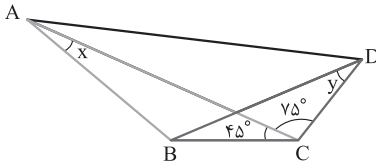
(۱) $\frac{1}{5}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{3}$

۱۳- در شکل زیر، اگر $\hat{ADB} = \hat{BAD}$ و $x + y = 90^\circ$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟



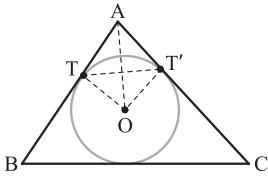
(۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

(۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(۴) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

۱۴- در مثلث محیطی شکل زیر، اضلاع $AB = 4$ و $AC = 5$ به ترتیب در نقاط T و T' بر محیط دایره محاطی، مماس هستند. اگر $BC = 7$ باشد، اندازه وتر TT' کدام است؟



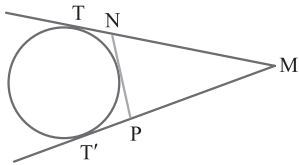
(۱) $\frac{1}{2}\sqrt{15}$

(۲) $\frac{1}{4}\sqrt{15}$

(۳) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

(۴) $\frac{1}{4}\sqrt{5}$

۱۵- در شکل زیر، از نقطه M دو مماس بر دایره رسم شده است. اگر $MT = 18$ ، $MN = 15$ و $MP = 12$ باشد، شعاع دایره کدام است؟



(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) $4\sqrt{5}$

(۴) $6\sqrt{5}$

۱۶- اگر $\vec{e}_1$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{e}_2$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $3\vec{a}$ و $2\vec{b}$ باشد، طول یکی از قطرهای متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ تولید می شود، کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۷- اگر $\vec{u}$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{v}$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $2\vec{a}$ و $-\vec{b}$ باشد، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تولید می شود، کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۸- اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، 60° باشد، اندازه تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۹- یک متوازی السطوح توسط بردارهای $\vec{a} = (2, -3, 4)$ ، $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ و $\vec{c} = (3, -2, 1)$ تولید شده و صفحه P شامل بردارهای b و c است. اندازه ارتفاع این متوازی السطوح عمود بر صفحه P، کدام است؟

(۱) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(۳) $5\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{5}$

۲۰- اگر دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر هم عمود باشند، مساحت متوازی الاضلاعی را که توسط بردارهای ناصفر $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\frac{3\vec{a}}{|\vec{b}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

(۱) $1/6$ (۲) $3/2$ (۳) $4/8$ (۴) $6/4$

۲۱- چند تابع $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ می‌توان تعریف کرد به طوری که مجموع مقادیر تابع، عددی فرد باشد؟

(۱) ۴۱ (۲) ۴۰ (۳) ۲۸ (۴) ۲۷

۲۲- ۵ نفر قرار است در یک جلسه سخنرانی کنند. در چند حالت، دو نفر خاص پشت سر هم سخنرانی می‌کنند؟

(۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۷۲ (۴) ۹۶

۲۳- در یک مطب ۵ صندلی در یک ردیف قرار دارد. ۷ بیمار هم‌زمان وارد مطب می‌شوند. به چند طریق بیماران می‌توانند روی ۵ صندلی بنشینند، به طوری که دو نفر از آن‌ها نخواهند کنار هم بنشینند؟

(۱) ۱۵۶۰ (۲) ۱۸۰۰ (۳) ۲۰۴۰ (۴) ۲۲۸۰

۲۴- چند عدد طبیعی پنج‌رقمی با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت که ارقام آن یک‌درمیان زوج و فرد باشند؟

(۱) ۱۸۴۰ (۲) ۱۹۲۰ (۳) ۲۱۶۰ (۴) ۲۴۰۰

۲۵- در کیسه‌ای ۶ گوی آبی، ۵ گوی سبز، ۴ گوی قرمز و ۷ گوی سفید وجود دارد. حداقل چند گوی از کیسه بیرون بیاوریم تا مطمئن شویم که حداقل ۳ گوی آبی یا حداقل ۴ گوی سبز یا حداقل ۲ گوی قرمز یا حداقل ۵ گوی سفید بیرون آورده‌ایم؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۲۶- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ کدام است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۱۵ (۳) ۲۲ (۴) ۲۱

۲۷- در گراف G ، $|V(G)| = ۸$ و $|E(G)| = ۲۴$ است. کم‌ترین مقدار ممکن برای $\delta(G)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۸- حداقل چند عضو از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10, 12, 13, 14, \dots, 20\}$ انتخاب کنیم تا به طور قطع، لااقل سه عضو انتخاب‌شده، اعداد متوالی باشند؟

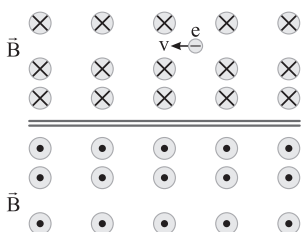
(۱) ۱۵ (۲) ۱۳ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۲۹- حداقل چند عضو از مجموعه $\{14, 15, 16, \dots, 20, 22, 23, 24, \dots, 28\}$ انتخاب کنیم تا به طور قطع لااقل سه عضو انتخاب‌شده، اعداد متوالی باشند؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴) ۹

فیزیک

۳۰- شکل زیر، مقطعی از میدان مغناطیسی اطراف سیم حامل جریان الکتریکی را نشان می‌دهد. جهت جریان در سیم کدام است و اگر مطابق



شکل، الکترونی در جهت نشان داده شده در حرکت باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر آن به کدام جهت است؟

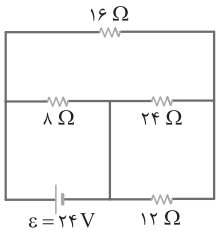
(۱) $\leftarrow$ و $\downarrow$

(۲) $\leftarrow$ و $\uparrow$

(۳) $\rightarrow$ و $\uparrow$

(۴) $\rightarrow$ و $\downarrow$

۳۱- در شکل روبه‌رو، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۲۴ اهمی چند ولت است؟



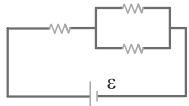
۱۸ (۱)

۱۲ (۲)

۸ (۳)

۶ (۴)

۳۲- در شکل زیر، مقاومت‌ها یکسان و توان خروجی باتری ۴ وات است. اگر این ۳ مقاومت را به صورت موازی به دو سر همین باتری ببندیم، توان خروجی چند وات می‌شود؟



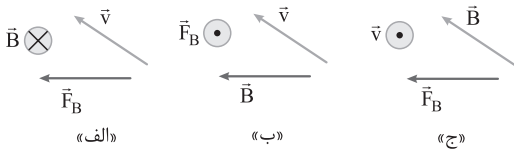
۹ (۲)

۶ (۱)

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۳۳- در شکل‌های زیر، $\vec{v}$ سرعت یک ذره با بار الکتریکی مثبت، $\vec{B}$ میدان مغناطیسی یکنواخت و $\vec{F}_B$ نیروی مغناطیسی وارد بر آن ذره است. کدام شکل‌ها از نظر فیزیکی قابل قبول است؟ (بردارها، یا در این صفحه‌اند یا عمود بر این صفحه.)



(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) «الف» و «ج»

(۴) «ب» و «ج»

۳۴- اگر در یک آذرخش، جریان الکتریکی متوسط ۲۰۰ A به مدت ۲/۰ ثانیه بین دو ابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی ۵۰ kV برقرار شود، انرژی الکتریکی آزادشده در این مدت چند مگاژول است؟

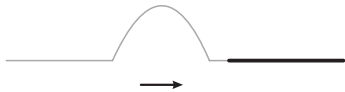
۵۰ (۴)

۴۰ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۳۵- در یک طناب کشیده‌شده که قسمتی از آن نازک و قسمت دیگر ضخیم است، مطابق شکل یک تپ در طناب نازک به سمت مقابل در حرکت است. کدام شکل، وضعیت بعدی طناب را درست نشان می‌دهد؟



۳۶- اگر یک چشمه لیزر با توان ۳/۰ میلی‌وات نوری با طول موج ۶۶۳ نانومتر تولید کند، در هر ثانیه چند فوتون از این چشمه گسیل می‌شود؟ ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ و $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$)

10^{13} (۴)

5×10^{13} (۳)

10^{15} (۲)

3×10^{15} (۱)

۳۷- الکترون در اتم هیدروژن در تراز $n = 4$ قرار دارد. این الکترون مستقیماً به تراز $n' = 1$ می‌رود و فوتون گسیلی به فلزی برخورد می‌کند که تابع کار آن ۵/۲ eV است. بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از فلز چند الکترون‌ولت است؟ ($E_R = 13/6 \text{ eV}$)

۴ (۴)

۵ (۳)

۶/۲۵ (۲)

۷/۵۵ (۱)

۳۸- در تابش‌های اتم هیدروژن در رشته براکت ($n' = 4$)، نسبت بلندترین طول موج گسیل‌شده به کوتاه‌ترین طول موج این رشته چه قدر است؟

$\frac{5}{3}$ (۴)

$\frac{16}{9}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{25}{9}$ (۱)

شیمی

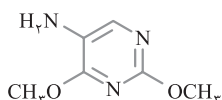
۳۹- اگر ظرفیت گرمایی ویژه مایع خالص M، دو برابر ظرفیت گرمایی ویژه مایع خالص X باشد، کدام مورد درباره جرم برابر از دو مایع، نادرست است؟

- (۱) اگر گرمای داده شده به دو مایع برابر باشد، تغییر دمای M، نصف تغییر دمای X خواهد بود.
 - (۲) اگر تغییر دمای X، ۴ برابر تغییر دمای M باشد، گرمای داده شده به M نصف گرمای داده شده به X است.
 - (۳) اگر بر اثر گرم کردن، دمای هر دو برابر شود، گرمای مورد نیاز برای M، ۲ برابر گرمای مورد نیاز برای X است.
 - (۴) اگر گرمای داده شده به دو مایع برابر باشد، نسبت ظرفیت گرمایی به ظرفیت گرمایی ویژه در M، نصف همین نسبت در X است.
- ۴۰- با توجه به اطلاعات واکنش داده شده، اگر از سوختن کامل ۰/۲ مول متانول، ۱۴۴ کیلوژول گرما آزاد شود و آنتالپی سوختن پروپین ۲/۷ برابر آنتالپی سوختن متانول باشد، آنتالپی سوختن پروپان چند کیلوژول بر مول است؟ (آنتالپی سوختن هیدروژن برابر $\text{C}_3\text{H}_6(\text{g}) + 2\text{H}_2(\text{g}) \rightarrow \text{C}_3\text{H}_8(\text{g})$ ، $\Delta H = -282 \text{ kJ}$ است.)

(۱) -۲۳۶۸ (۲) -۲۳۵۶ (۳) -۲۲۳۴ (۴) -۲۲۴۸

۴۱- در نمودار «انرژی - پیشرفت واکنش» برای واکنش گازی: $2\text{X} \rightarrow \text{A}$ ، تفاوت سطح انرژی قله با فراورده ها، دو برابر $|\Delta H|$ است. اگر انرژی فعال سازی برابر ۶۰ کیلوژول و واکنش گرماده باشد، آنتالپی آن برابر چند کیلوژول است؟

(۱) -۱۲۰ (۲) -۸۰ (۳) -۶۰ (۴) -۲۰

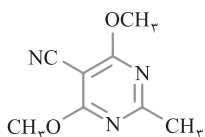


۴۲- با توجه به ساختار مولکول داده شده، کدام مورد درست است؟

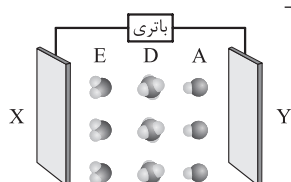
- (۱) دارای دو گروه عاملی آمیدی و یک گروه عاملی آمینی است.
- (۲) ۵۰ درصد از اتم های کربن، با اتم های اکسیژن پیوند دارند.
- (۳) شمار پیوندهای یگانه بین اتم ها ۵ برابر شمار اتم های نیتروژن است.
- (۴) تفاوت شمار اتم های کربن دارای عدد اکسایش مثبت، با شمار اتم های کربن دارای عدد اکسایش منفی، برابر یک است.

۴۳- با توجه به ساختار مولکول داده شده، کدام مورد درست است؟

- (۱) دارای دو گروه عاملی آمیدی و یک گروه عاملی آمینی است.
- (۲) شمار جفت الکترون های پیوندی ۷ برابر شمار پیوندهای C—O است.
- (۳) شمار اتم های کربن دو برابر شمار اتم های هیدروژن در مونومر سازنده پتو است.
- (۴) شمار اتم های کربن با عدد اکسایش مثبت، برابر مجموع شمار پیوندهای دوگانه و سه گانه است.



۴۴- با توجه به شکل داده شده که جهت گیری مولکول ها را در میدان الکتریکی نشان می دهد، کدام مورد، نادرست است؟



- (۱) A، D و E، به ترتیب می توانند مولکول های HI، SiH_4 و H_2S باشند.
- (۲) اگر مولکول E، H_2O باشد، صفحه X بار الکتریکی منفی دارد و گشتاور دوقطبی مولکول D، برابر صفر است.
- (۳) اگر E، مولکول SO_2 باشد، علامت بار الکتریکی اتم های جانبی، مخالف علامت بار الکتریکی صفحه Y است.
- (۴) اگر A مولکول HCl باشد، علامت بار جزئی اتم های جانبی مولکول D، می تواند همانند علامت بار جزئی اتم Cl در مولکول A باشد.

۴۵- در یک ظرف ۲ لیتری در بسته، ۰/۹ مول گاز SO_2 وارد می شود تا تعادل گازی: $2\text{SO}_2 \rightleftharpoons 2\text{SO}_3 + \text{O}_2$ ، در دمای معین برقرار شود. اگر مجموع شمار مول های فراورده ها ۳ برابر شمار مول های واکنش دهنده باشد، ثابت تعادل واکنش کدام است؟

(۱) ۰/۳ (۲) ۰/۶ (۳) ۰/۹ (۴) ۱/۲

۴۶- در یک واکنش تعادلی گازی، افزایش دما و افزایش حجم ظرف واکنش، سبب افزایش درصد مولی فراورده(ها) در سامانه می‌شود.

این ویژگی‌ها مربوط به کدام واکنش می‌تواند باشد؟



۴۷- در دمای معین، ۴/۰ مول گاز CO و ۹/۰ مول گاز H₂ وارد ظرفی به حجم ۶/۰ لیتر می‌شوند. اگر پس از برقراری تعادل گازی:

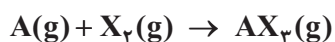


شمار مول‌های متانول برابر شمار مول‌های گاز هیدروژن باشد، مقدار ثابت تعادل واکنش کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۱۲ (۴) ۲۰

۴۸- با توجه به معادله واکنش داده‌شده پس از موازنه، اگر انرژی فعال‌سازی واکنش برابر ۱۲۰ kJ و گرمای آزادشده از واکنش ۵/۰ مول A

با مقدار کافی گاز X_۲ برابر ۴۰ kJ باشد، تفاوت سطح انرژی قله با فراورده در نمودار «انرژی - پیشرفت واکنش»، برابر چند کیلوژول است؟



(۱) ۳۶۰ (۲) ۲۸۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۱۸۰

ریاضیات

۱- گزینه ۲

درسنامه اتحاد مربع و مکعب دوجمله‌ای را بلد باشید:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

گام ۱ صورت و مخرج کسر داده شده را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = (2x - 3)^3$$

صورت:

مخرج: از ۲ که فاکتور بگیریم می‌توانیم از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده کنیم:

$$8x^3 - 24x + 18 = 2(4x^3 - 12x + 9) = 2(2x - 3)^2$$

گام ۲ حالا می‌توانیم کسر داده شده را ساده‌تر بنویسیم:

$$A = \frac{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}{8x^3 - 24x + 18} = \frac{(2x - 3)^3}{2(2x - 3)^2} = \frac{2x - 3}{2} \quad (*)$$

گام ۳ به گفته سوال $x^2 - 3x + 1 = 0$ است. از این تساوی $2x - 3$ را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = -1 \xrightarrow{+4} 4x^2 - 12x = -4$$

$$\xrightarrow{+9} 4x^2 - 12x + 9 = 5 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 5 \Rightarrow 2x - 3 = \pm\sqrt{5}$$

باید از ریشه بزرگ‌تر استفاده کنیم، پس $2x - 3 = \sqrt{5}$ را در $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{5}}{2} = 0.5\sqrt{5}$$

۲- گزینه ۴

درسنامه اتحاد مربع و مکعب دوجمله‌ای را بلد باشید:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \text{ و } (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

گام ۱ صورت و مخرج کسر داده شده را جداگانه ساده می‌کنیم:

صورت: از ۳ که فاکتور بگیریم می‌توانیم از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده کنیم:

$$24x^3 + 36x^2 + 18x + 3 = 3(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) = 3(2x + 1)^3$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

مخرج:

گام ۲ حالا می‌توانیم کسر داده شده را ساده‌تر بنویسیم:

$$A = \frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2} = \frac{3(2x + 1)^3}{(2x + 1)^4} = \frac{3}{2x + 1} \quad (*)$$

گام ۳ به گفته سوال $x^2 + x = 1$ است. از این تساوی $2x + 1$ را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + x = 1 \xrightarrow{+4} 4x^2 + 4x = 4 \xrightarrow{+1} 4x^2 + 4x + 1 = 5 \quad (2x + 1)^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} 2x + 1 = \pm\sqrt{5}$$

سوال می‌گوید x مثبت است؛ پس $2x + 1 = \sqrt{5}$ را در $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5} \sqrt{5} = 0.6\sqrt{5}$$

۳- گزینه ۳

استراتژی دقت کنید! اصلاً نیازی به محاسبه مقادیر a نداریم. ابتدا معادله اول را با

استفاده از مخرج مشترک‌گیری و اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم. بعد عبارت خواسته شده را نیز ساده می‌کنیم و ساده‌شده عبارت اول را در آن جای‌گذاری می‌کنیم.

نکته فرم کلی اتحاد مزدوج به صورت زیر است:

$$(\bigcirc - \square)(\bigcirc + \square) = \bigcirc^2 - \square^2$$

گام ۱ معادله اول را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a^3 + 1} + \frac{1}{a^3 - 1} = 2 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{a^3 - 1 + a^3 + 1}{(a^3 + 1)(a^3 - 1)} = 2$$

مزدوج

$$\Rightarrow \frac{2a^3}{a^6 - 1} = 2 \Rightarrow \frac{a^3}{a^6 - 1} = 1 \Rightarrow a^6 - 1 = a^3 \Rightarrow \frac{a^6}{a^6 - 1} = \frac{a^3 + 1}{a^6 - 1}$$

رابطه (I)

گام ۲ عبارت خواسته شده را بدون در نظر گرفتن توان 1401 ، ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a^3 - \sqrt{a^3 + 1}} + \frac{1}{a^3 + \sqrt{a^3 + 1}} = \frac{1}{a^3 + 1 - \sqrt{a^3 + 1}} + \frac{1}{a^3 + 1 + \sqrt{a^3 + 1}}$$

$$= \frac{a^3 + 1 + \sqrt{a^3 + 1} + a^3 + 1 - \sqrt{a^3 + 1}}{(a^3 + 1 - \sqrt{a^3 + 1})(a^3 + 1 + \sqrt{a^3 + 1})} = \frac{2a^3 + 2}{(a^3 + 1)^2 - a^3}$$

مزدوج

$$= \frac{2a^3 + 2}{a^6 + 2a^3 + 1 - a^3} = \frac{2a^3 + 2}{a^6 + a^3 + 1}$$

پس عبارت خواسته شده به شکل زیر شد:

$$\left(\frac{1}{a^3 - \sqrt{a^3 + 1}} + \frac{1}{a^3 + \sqrt{a^3 + 1}} \right)^{1401} = \left(\frac{2a^3 + 2}{a^6 + a^3 + 1} \right)^{1401}$$

گام ۳ حالا در عبارت به دست آمده، به جای a^6 قرار می‌دهیم $a^3 + 1$ (با توجه به (I)):

$$\left(\frac{2a^3 + 2}{a^6 + a^3 + 1} \right)^{1401} = \left(\frac{2a^3 + 2}{2a^3 + 2} \right)^{1401} = 1^{1401} = 1$$

۴- گزینه ۱

درسنامه ۱ اگر f و g دو تابع صعودی باشند، $f + g$ نیز صعودی می‌شود.

۲ برای این که بفهمیم تابع f در چه بازه‌هایی صعودی است، کافی است نامعادله $f'(x) \geq 0$ را حل کنیم:

گام ۱ در بازه $[0, +\infty)$ ، ضابطه f به صورت $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + x$ می‌شود. x و $3\sqrt[3]{x}$ هر دو توابعی صعودی‌اند، پس طبق مورد (۱) درسنامه، جمع این دو تابع یعنی f نیز در $[0, +\infty)$ صعودی است.

گام ۲ در بازه $(-\infty, 0)$ ، ضابطه f به صورت $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$ می‌شود که برای این که بفهمیم f در کدام بازه صعودی است، طبق مورد (۲) درسنامه، باید نامعادله $f'(x) \geq 0$ را حل کنیم:

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x \Rightarrow f'(x) = 3 \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 0$$

دقت کنید که مخرج کسر همواره مثبت است، پس کافی است نامعادله $1 - \sqrt[3]{x^2} \geq 0$ را حل کنیم:

$$1 - \sqrt[3]{x^2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq 1 \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

از طرفی فرض کردیم $x \in (-\infty, 0)$ است، بنابراین f در بازه $(-1, 0)$ نیز صعودی می‌شود.

گام ۳ f هم در بازه $[0, +\infty)$ و هم در بازه $(-1, 0)$ صعودی است، حالا با توجه به این که f در $x = 0$ پیوسته است، پس تابع در اجتماع این دو بازه، یعنی $[-1, +\infty)$ نیز صعودی می‌شود.

۵- گزینه ۴

درسنامه ۱ تابع f به دو شرط در $x = a$ مشتق پذیر است:

۱ در $x = a$ پیوسته باشد.

۲ مشتق چپ و راست f در $x = a$ برابر باشند.

۳ تابع $y = |f(x)|$ در ریشه‌های ساده $f(x)$ ، مشتق ناپذیر است.

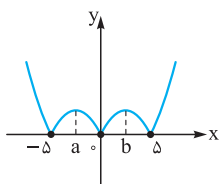
اگر $m > n$ باشد، تابع $y = \sqrt[n]{x - a}$ در $x = a$ مشتق ندارد.

گام ۱ در ضابطه بالایی f ، همان $|x|$ است؛ پس:

$$f(x) = \begin{cases} a + |x| & x < 1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

کنیم. این کار را به کمک مورد (۳) درسنامه انجام می‌دهیم:

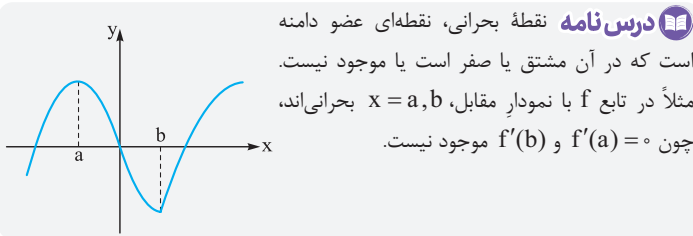
مرحله (۱)	مرحله (۲)	مرحله (۳)
رسم $g(x)$	حذف قسمت سمت چپ محور y ها	قرینه سمت راست نسبت به محور y ها



گام ۳ حالا اگر طبق مورد (۲) درسنامه، در شکل مرحله (۳)، قسمتی از نمودار را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به همین محور قرینه کنیم به نمودار $|g(x)|$ یا همان $|f(x)|$ می‌رسیم:

گام ۴ با توجه به شکل بالا و مورد (۱) درسنامه، نقاط به طول ۵ و ۰ و -۵، مینیمم نسبی و نقاط به طول a و b ، ماکزیمم نسبی هستند؛ پس $m=2$ ، $n=3$ و در نتیجه $\frac{n}{m}$ می‌شود $\frac{3}{2}$.

۷- گزینه ۳

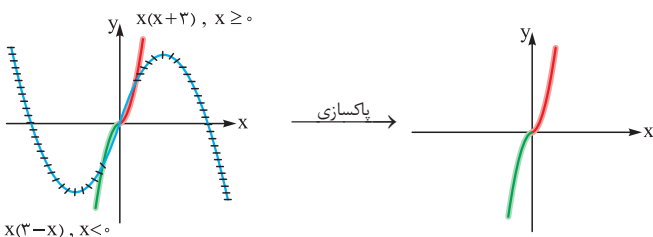


درسنامه نقطه بحرانی، نقطه‌ای عضو دامنه است که در آن مشتق یا صفر است یا موجود نیست. مثلاً در تابع f با نمودار مقابل، $x=a, b$ بحرانی‌اند، چون $f'(a)=0$ و $f'(b)$ موجود نیست.

گام ۱ باید نمودار $|f(x)|$ را بکشیم. برای این کار اول $f(x) = x(x+3)$ را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x(x+3) & x \geq 0 \\ x(3-x) & x < 0 \end{cases}$$

گام ۲ حالا نمودار $f(x)$ را می‌کشیم:



گام ۳ الان اگر قسمت سبزرنگ نمودار $f(x)$ را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه کنیم به نمودار تابع $|f(x)|$ می‌رسیم: با توجه به نمودار و درسنامه می‌توانیم بگوییم تابع $|f(x)|$ فقط در $x=0$ بحرانی است؛ چون در این نقطه مشتق ناپذیر است.

۸- گزینه ۲

درسنامه ۱ در رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ، اول عوامل ضربی غیرصفر را جای گذاری کنید؛ بعد رفع ابهام. مثلاً در حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} \cos(\pi x)$ می‌شود $\cos(\pi) = -1$

طبق مورد (۲) و (۳) درسنامه، $|x|$ و $\sqrt[3]{x^2}$ در $x=0$ مشتق ناپذیرند، ولی $x=0$ در دامنه ضابطه پایینی قرار ندارد، بنابراین آن تک‌قطه‌ای که در آن مشتق ناپذیر است، $x=0$ در ضابطه بالایی است.

گام ۱ برای این که نقطه مشتق ناپذیر دیگری نداشته باشیم، باید در $x=1$ مشتق پذیر باشد، طبق مورد (۱) درسنامه این اتفاق به دو شرط می‌افتد:

♦ f در $x=1$ پیوسته باشد:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

از ضابطه بالایی از ضابطه پایینی

$$\Rightarrow b\sqrt[3]{1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a + |x|) \Rightarrow b = a + 1 \quad (1)$$

♦ مشتق چپ و راست f در $x=1$ برابر باشند، در $x=1^-$ ، $|x|=x$ ، می‌شود؛ پس برای محاسبه $f'_-(1)$ باید از $f(x) = a + x$ مشتق بگیریم:

$$f'(x) = 0 + 1 \Rightarrow f'_-(1) = 1$$

برای محاسبه $f'_+(1)$ هم از $f(x) = b\sqrt[3]{x^2}$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = b\sqrt[3]{x^2} = bx^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}bx^{\frac{2}{3}-1} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{2}{3}b(1)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}b$$

حالا مشتق چپ و راست را مساوی هم می‌گذاریم:

$$\frac{2}{3}b = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

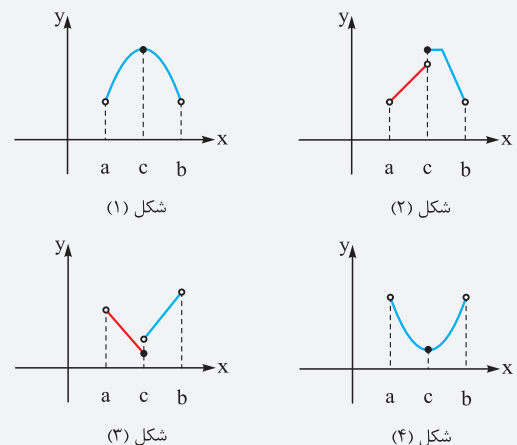
حالا $b = \frac{3}{2}$ را در (۱) جای گذاری می‌کنیم تا به a برسیم:

$$\frac{3}{2} = a + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین $a + b = 2$ می‌شود $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$.

۹- گزینه ۱

درسنامه ۱ در شکل‌های زیر نمودار توابع را در یک همسایگی از نقطه C کشیده‌ایم:



♦ در شکل‌های (۱) و (۲) عرض نقطه C ، بزرگ‌تر یا مساوی عرض تمام نقاط بازه (a, b) است. در چنین حالتی می‌گوییم تابع در $x=C$ ماکزیمم نسبی دارد.

♦ در شکل‌های (۳) و (۴) عرض نقطه C ، کوچک‌تر یا مساوی عرض تمام نقاط بازه (a, b) است. در چنین حالتی می‌گوییم تابع در $x=C$ مینیمم نسبی دارد.

۲ برای کشیدن نمودار $y = |f(x)|$ ، اول نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم، بعد قسمتی از نمودار $f(x)$ که زیر محور x ها قرار دارند را نسبت به همین محور قرینه می‌کنیم و به قسمت‌های بالا و روی محور x ها هم دست نمی‌زنیم.

۳ برای کشیدن نمودار $y = f(|x|)$ ، اول نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم، بعد قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور y ها قرار دارند، حذف و قسمت‌هایی را که سمت راست محور y ها قرار دارند، نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

گام ۱ در $f(x) = x^2 - 5|x|$ ، جای x^2 می‌توانیم بنویسیم $|x|^2$:

$$f(x) = |x|^2 - 5|x|$$

بنابراین اگر فرض کنیم $g(x) = x^2 - 5x$ است، برای رسم $f(x)$ باید $g(|x|)$ را رسم

۱۰- گزینه ۱

درسنامه تابع f به دو شرط در $x=a$ مشتق پذیر است:

- در $x=a$ پیوسته باشد؛ یعنی حد راست، حد چپ و مقدارش در $x=a$ برابر باشند.
- مشتق چپ و راستش در $x=a$ برابر باشند.

گام ۱ برای این که $f(x) = \begin{cases} 2bx+c & x>a \\ 3x^2 & x\leq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، باید در مرز

دامنه، یعنی $x=a$ مشتق پذیر باشد. طبق درسنامه، دو شرط داریم:

پیوستگی در $x=a$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} (2bx+c) = \lim_{x \rightarrow a^+} (3x^2) = 3a^2$$

از ضابطه پایینی

$$\Rightarrow 2ba+c=3a^2 \quad (1)$$

برابری مشتق چپ و راست در $x=a$

$$f(x) = \begin{cases} 2bx+c & x>a \\ 3x^2 & x\leq a \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2b & x>a \\ 6x & x\leq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(a) = 2b \\ f'_-(a) = 6a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b=6a \Rightarrow b=3a \quad (2)$$

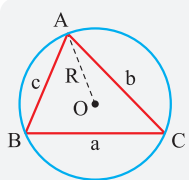
$$2(3a)a+c=3a^2 \Rightarrow -c=3a^2$$

پس a^3+b-c می شود:

$$a^3+(3a)+3a^2=(a^3+3a^2+3a+1)-1=(a+1)^3-1$$

مکعب دوجمله ای

۱۱- گزینه ۱

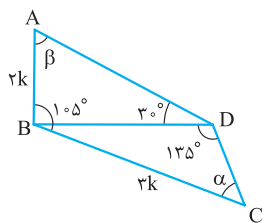


درسنامه ۱ قضیه سینوس ها می گوید در همه مثلث ها، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویه مقابلش، مساوی قطر دایره محیطی مثلث است؛ یعنی برای مثلث ABC در شکل مقابل می توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

شعاع دایره محیطی

مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی 360° است.



گام ۱ (تحلیل شکل مسئله) فرض می کنیم در چهارضلعی مقابل، $\hat{A}=\beta$ باشد. طبق مورد (۲) درسنامه مجموع زوایای داخلی این چهارضلعی 360° است:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$$

$$\Rightarrow \beta+105^\circ+\alpha+(3^\circ+135^\circ)=360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=360^\circ-27^\circ=333^\circ \quad (1)$$

به گفته سؤال $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ است، پس می توانیم روی شکل بنویسیم:

$$AB=rk, BC=rk$$

گام ۲ (تشخیص استراتژی حل) در مثلث های ABD و BDC اطلاعات خوبی راجع به زاویه ها و اضلاع رو به آن ها را داریم، پس بهترین کار نوشتن قضیه سینوس ها در این مثلث ها است.

گام ۳ (اجرای استراتژی)

$$\Delta ABD: \frac{\sin \beta}{BD} = \frac{\sin 3^\circ}{rk}$$

$$\Delta BDC: \frac{\sin \alpha}{BD} = \frac{\sin 135^\circ}{rk}$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال) حالا طرفین تساوی های بالا را به هم تقسیم می کنیم:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin 3^\circ} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2 \sin 135^\circ}{2 \sin 3^\circ} = \frac{2(\frac{\sqrt{2}}{2})}{2(\frac{1}{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{1} \quad (*)$$

طبق رابطه (۱)، α و β متمم هم اند و می توانیم به جای $\sin \beta$ در (*) بنویسیم

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{1}$$

که غیر صفر است، پس اول جای $\cos(\pi x)$ می نویسیم -1 ، بعد رفع ابهام می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x-1} \cos(\pi x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x(x-1)(x+1)}{x-1} = -2$$

۲ اگر $u \rightarrow 0$ ، می توانیم به جای $\sin u$ و $\tan u$ خود را بنویسیم.

گام ۳ در $x = \frac{\pi}{\pi} = 1$ ، $\tan(\frac{\pi}{\pi} - x)$ و $2x - \pi$ هر دو صفرند ولی $\sin x$ می شود

$\sin \frac{\pi}{\pi} = 1$ که صفر نیست، پس قبل از رفع ابهام به جای $\sin x$ می نویسیم ۱:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\pi}} \frac{\sin x \cdot \tan(\frac{\pi}{\pi} - x)}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\pi}} \frac{\tan(\frac{\pi}{\pi} - x)}{2x - \pi}$$

گام ۴ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{\pi}$ ، $x - \frac{\pi}{\pi}$ به سمت صفر میل می کند، پس طبق مورد (۲) درسنامه می توانیم در حد بالا به جای $\tan(\frac{\pi}{\pi} - x)$ بنویسیم $\varphi = \frac{\pi}{\pi} - x$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\pi}} \frac{\tan(\frac{\pi}{\pi} - x)}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\pi}} \frac{\frac{\pi}{\pi} - x}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\pi}} \frac{-\frac{1}{\pi}(2x - \pi)}{(2x - \pi)} = -\frac{1}{\pi}$$

۹- گزینه ۱

درسنامه ۱ اگر $a \in D_f$ و $f'(a) = 0$ یا موجود نباشد، به $x=a$ نقطه بحرانی تابع f می گوئیم. حواستان باشد که در تابع با دامنه $[a, b]$ ، نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه، یعنی $x=a, b$ ، همیشه بحرانی اند.

۲ برای پیدا کردن نقاط بحرانی توابع به فرم $y=g(x)|f(x)|$ ، اول ریشه های داخل قدرمطلق را به عنوان نقاط بحرانی کنار می گذاریم و بعد قدرمطلق را حذف می کنیم و جواب های معادله $y'=0$ را هم به نقاط بحرانی قبلی اضافه می کنیم.

۳ برای به دست آوردن ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع پیوسته f ، مقدار تابع را در نقاط بحرانی اش حساب می کنیم؛ بیشترین مقدار همان ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار همان مینیمم مطلق است.

گام ۱ در تابع $f(x) = \sqrt{x^2} |x-a|$ با دامنه $[0, a]$ ، $x=a$ هم انتهای دامنه است، هم ریشه داخل قدرمطلق؛ پس بحرانی است. $x=0$ هم ابتدای دامنه است و بحرانی. حالا برای پیدا کردن بقیه نقاط بحرانی، طبق مورد ۲ درسنامه، از f قدرمطلق را برمی داریم و معادله $y'=0$ را حل می کنیم:

$$y = x^{\frac{2}{3}}(x-a) = x^{\frac{5}{3}} - ax^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2a}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5x - 2a) = 0 \Rightarrow 5x - 2a = 0 \Rightarrow x = \frac{2a}{5}$$

گام ۲ حالا برای پیدا کردن ماکزیمم مطلق تابع، طبق مورد (۳) درسنامه، مقدار تابع در

نقاط بحرانی را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x^2} |x-a| \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow f(0) = 0 \\ x=a \rightarrow f(a) = 0 \\ x=\frac{2a}{5} \rightarrow f(\frac{2a}{5}) = \sqrt{(\frac{2a}{5})^2} |\frac{2a}{5} - a| = \sqrt{\frac{4a^2}{25}} \cdot \frac{3a}{5} = \frac{2\sqrt{2}}{5}a \end{cases}$$

گام ۳ به گفته سؤال، ماکزیمم مطلق برابر $1/5$ است؛ پس $f(\frac{2a}{5}) = 1/5$ ماکزیمم مطلق است نه $f(0)$ و $f(a)$ که برابر صفرند:

$$\sqrt{(\frac{2a}{5})^2} - \frac{2a}{5} = 1/5$$

از بین گزینه ها فقط $a = 2/5$ در ۱ در معادله بالا صدق می کند. ببینید:

$$\sqrt{(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5})^2} - \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = 1/5 \Rightarrow 1 \times \frac{2}{5} = 1/5 \quad \checkmark$$

پس ۱ جواب است.

۱۲- گزینه ۱

گام ۱ (محاسبه $\hat{ADF}$) به گفته سوال مثلث آبی در شکل زیر، متساوی الاضلاع است، پس همه زاویه های داخلی اش 60° اند. پس زاویه های AED و DFC هر دو برابر « $120^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ » هستند. از طرفی سوال می گوید مثلث های قرمز متساوی الساقین اند، پس دیگر زاویه های داخلی شان می شود « $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ ».

حالا می توانیم $\hat{ADB}$ را به دست بیاوریم:

$\hat{ADB} = 180^\circ - \hat{ADC} = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$

گام ۲ (محاسبه خواسته سوال) به دنبال نسبت $\frac{AD}{BD}$ هستیم؛ ضلع مجاور به زاویه 60° در مثلث قائم الزاویه ABD است و AD وترش، پس برای به دست آوردن خواسته سوال در این مثلث برای زاویه 60° ، کسینوس می نویسیم:

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AD} \Rightarrow 2 = \frac{AD}{BD}$$

۱۳- گزینه ۳

درس نامه قضیه سینوس ها می گوید در همه مثلث ها، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویه مقابلش، مساوی قطر دایره محیطی مثلث است؛ یعنی برای مثلث ABC در شکل مقابل می توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

شعاع دایره محیطی

گام ۱ (تشخیص استراتژی حل)، به گفته سوال $\hat{ADB} = \hat{BAD}$ است؛ پس مثلث ABD در شکل مقابل متساوی الساقین است. در نتیجه می توانیم فرض کنیم:

$AB = AD = L$

حالا خوب به مثلث های ABC و BDC نگاه کنید. اطلاعات جالبی در مورد زاویه ها و اضلاع روبه رویشان در این مثلث ها داریم؛ پس بهترین کار نوشتن قضیه سینوس ها در این مثلث ها است.

گام ۲ (اجرای استراتژی):

$\triangle ABC: \frac{\sin x}{BC} = \frac{\sin 45^\circ}{L}$

$\triangle BDC: \frac{\sin y}{BC} = \frac{\sin 12^\circ}{L}$

گام ۳ (محاسبه خواسته سوال): حالا طرفین رابطه های بالا را بر هم تقسیم می کنیم:

$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 12^\circ} \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{20}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

به گفته سوال $x + y = 90^\circ$ است؛ پس x و y متمم هم اند و می توانیم به جای $\sin y$ در (*) بنویسیم $\cos x$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۱۴- گزینه ۲

درس نامه طول قطعه هایی را که دایره محاطی داخلی روی ضلع های مثلث درست می کند، می توانید از رابطه های جدول زیر محاسبه کنید. فقط حواستان باشد که در این

رابطه ها P نصف محیط و a, b و c طول ضلع های مثلث هستند.

شکل	طول قطعات	نوع قطعات
	$x = P - a$	قطعات متناظر با رأس A
	$y = P - b$	قطعات متناظر با رأس B
	$z = P - c$	قطعات متناظر با رأس C

گام ۱ (محاسبه طول AT و AT') در شکل مقابل، AT و AT' قطعات متناظر با رأس A هستند؛ پس طبق درس نامه طولشان می شود:

$$AT = AT' = P - a = \frac{4 + 5 + 7}{2} - 7 = 8 - 7 = 1$$

گام ۲ (تشخیص استراتژی حل): الان اگر $\cos A$ را داشته باشیم، می توانیم به کمک قضیه کسینوس ها در مثلث ATT' ، طول TT' را به دست بیاوریم، در مثلث ABC ، طول هر سه ضلع را داریم؛ پس با نوشتن قضیه کسینوس در آن می توانیم $\cos A$ را به دست بیاوریم.

گام ۳ (محاسبه $\cos A$):

$\triangle ABC: a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow 7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos A$

$$\Rightarrow 49 \cos A = 16 + 25 - 49 \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{4}$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سوال):

$\triangle ATT': TT'^2 = AT^2 + AT'^2 - 2AT \cdot AT' \cdot \cos A \Rightarrow TT'^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times (-\frac{1}{4})$

$$\Rightarrow TT'^2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow TT' = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۱۵- گزینه ۲

استراتژی دایره رسم شده، یکی از دایره های محاطی خارجی مثلث MNP است که فرمول محاسبه شعاع آن را می دانیم. برای استفاده از فرمول، نیاز به مساحت مثلث داریم. برای محاسبه مساحت مثلث، اول به کمک داده های سوال طول ضلع های مثلث را به دست می آوریم؛ بعد از رابطه هرون استفاده می کنیم.

درس نامه ۱ اگر p نصف محیط مثلثی با اضلاع a, b و c باشد، در این صورت مساحت مثلث برابر می شود با: (رابطه هرون)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۲ هر مثلث سه دایره محاطی خارجی دارد که هر کدام بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس اند. در شکل زیر یکی از دایره های محاطی خارجی مثلث ABC را کشیده ایم. شعاع این دایره را می توانیم به کمک رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$r_c = \frac{S_{\triangle ABC}}{p - AB}$$

نصف محیط مثلث ABC

۳ نکته جالبی که در شکل بالا وجود دارد، این است که طول پاره خط های TC و $T'C$ هر دو مساوی نصف محیط مثلث ABC هستند، یعنی:

$$CT = CT' = p$$

گام ۱ (محاسبه طول NP) دایره سبز رنگ در شکل مقابل، همان دایره محیطی خارجی مثلث MNP است، پس طبق مورد (۳) درس نامه می توانیم بنویسیم:

$MT = MNP$ نصف محیط مثلث $\Rightarrow 18 = \frac{NP + 15 + 12}{2}$

$$\Rightarrow 36 = NP + 27 \Rightarrow NP = 9$$

گام ۲ (محاسبه مساحت مثلث MNP) حالا می توانیم بگوییم MNP ، مثلثی به طول اضلاع $NP = 9$ ، $MP = 12$ ، $MN = 15$ شد که نصف محیطش می شود $18 = \frac{15 + 12 + 9}{2}$. حالا با استفاده از رابطه هرون، مساحتش

گزینه ۴ - ۱۸

درسنامه ۱ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر α باشد، ضرب داخلی شان می‌شود:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

۲ دو ویژگی مهم از ضرب داخلی را بلد باشید:

ضرب داخلی بردارها خاصیت توزیع پذیری دارد؛ یعنی برای بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داریم:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر با مربع اندازه‌اش است:

۳ طول تصویر $\vec{a}$ بر (امتداد) بردار $\vec{b}$ می‌شود:

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

گام ۱ (تحلیل خواسته سؤال): طبق مورد (۳) درسنامه، طول تصویر قائم بردار $\vec{x} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{x}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \cdot (\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})|}{|\vec{a}|} = \frac{|\frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}|}{|\vec{a}|} \quad (*)$$

بر بردار $\vec{a}$ می‌شود:

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال): طبق مورد (۲) درسنامه $\vec{a} \cdot \vec{a}$ همان $|\vec{a}|^2$ است.

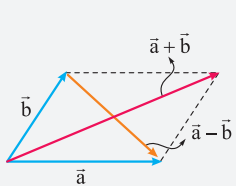
از طرفی زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، 60° است؛ پس طبق مورد (۱) درسنامه، $\vec{a} \cdot \vec{b}$ می‌شود:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}|$$

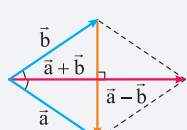
این‌ها را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$|\vec{a}'| = \frac{\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|} + \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}| + \frac{1}{2} |\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\frac{3}{2} |\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{3}{2}$$

تیزبازی اول نکته زیر را بخوانید:



نکته ۱ قطره‌های متوازی‌الاضلاعی که روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌سازیم، همان $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ هستند. طبق شکل، قطر هم‌مبدأ با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\vec{a} + \vec{b}$ و قطر دیگر $\vec{a} - \vec{b}$ است.



۲ در حالتی که $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ است، طول ضلع‌های متوازی‌الاضلاع برابر می‌شوند؛ بنابراین متوازی‌الاضلاع مطابق شکل، تبدیل به لوزی می‌شود. از طرفی در لوزی قطرهای نیمساز زوایای داخلی لوزی‌اند و بر هم عمودند:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} \text{ نیمساز زاویه بین } \vec{a} \text{ و } \vec{b} \text{ است.}$$

طول بردارهای $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ و $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ برابر ۱ هستند؛ پس طبق نکته بالا، متوازی‌الاضلاع شکل زیر که روی این دو بردار ساخته‌ایم، لوزی است؛ پس بردار قرمز، با $\vec{a}$ زاویه 30° می‌سازد و طول هر

چهار ضلع لوزی برابر ۱ است. زاویه خارجی مثلث متساوی‌الساقین آبی برابر $60^\circ = 30^\circ + 30^\circ$ است، پس مثلث قرمز، یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌های 30° و 60° است. طول ضلع رو به زاویه 30° ، نصف وتر است؛ پس:

$$AH = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

طول تصویر بردار قرمز بر $\vec{a}$ همان طول OH است که می‌شود $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

گزینه ۱ - ۱۹

درسنامه ۱ طول بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ برابر است با:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$S_{\triangle MNP} = \sqrt{(18)(18-15)(18-12)(18-9)}$$

را حساب می‌کنیم:

$$= \sqrt{(3^2 \times 2)(3)(2 \times 3)(3^2)} = \sqrt{3^6 \times 2^2} = 3^3 \times 2 = 54$$

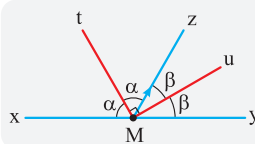
گام ۱ (محاسبه خواسته سؤال)

حالا که مساحت مثلث MNP را داریم می‌توانیم به کمک مورد (۲) درسنامه، شعاع دایره محاطی خارجی‌اش را به دست بیاوریم:

$$r = \frac{S_{\triangle MNP}}{p - NP} \Rightarrow r = \frac{54}{18 - 9} = \frac{54}{9} = 6$$

نصف محیط مثلث MNP

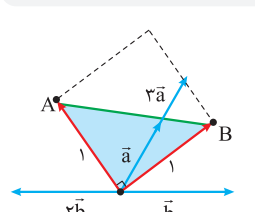
گزینه ۲ - ۱۶



درسنامه ۱ به هر برداری که طولش برابر

۱ باشد، بردار یک می‌گوییم.

۲ نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه، مطابق شکل مقابل بر هم عمودند.



گام ۱ (رسم شکل و تحلیل آن) شکل مسئله به صورت مقابل است. بردارهای قرمز، همان بردارهای یک در راستای نیمسازها هستند که طبق مورد (۱) درسنامه طولشان برابر ۱ است.

طبق شکل، بردارهای یک در واقع نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند، پس طبق مورد (۲) درسنامه بر هم عمودند.

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) به دنبال طول قطر متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی بردارهای قرمز بالا هستیم. چون طول این دو بردار برابر و بر هم عمود هستند، متوازی‌الاضلاعی که روی آن‌ها می‌سازیم، طبق شکل بالا یک مربع است که طول هر دو قطرش طبق قضیه فیثاغورس در مثلث رنگی بالا می‌شود:

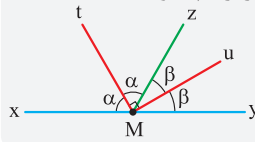
$$AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

مشاوره متأسفانه این سؤال خارج از کتاب درسی است؛ چون کتاب درسی فقط به بردارهای یک محوره‌های مختصات (همان $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$) پرداخته و بردار یک را در حالت کلی بررسی نکرده است.

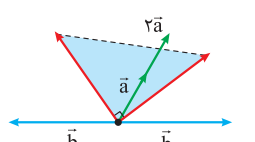
گزینه ۳ - ۱۷

درسنامه ۱ به هر برداری که طولش برابر ۱ باشد، بردار یک می‌گوییم.

۲ نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه، مطابق شکل زیر بر هم عمودند.



گام ۱ (رسم شکل و تحلیل آن) شکل مسئله به صورت زیر است. بردارهای قرمز، همان بردارهای یک در راستای نیمسازها هستند که طبق مورد (۱) درسنامه طولشان برابر ۱ است.



طبق شکل، بردارهای یک در واقع نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند؛ پس طبق مورد (۲) درسنامه بر هم عمودند.

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال): به دنبال مساحت مثلث قائم‌الزاویه رنگی هستیم که می‌شود:

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

مشاوره متأسفانه این سؤال خارج از کتاب درسی است؛ چون کتاب درسی فقط به بردارهای یک محوره‌های مختصات (همان $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$) پرداخته و بردار یک را در حالت کلی بررسی نکرده است.

گام ۱ (محاسبه سینوس و کسینوس زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$)

به گفته سؤال، بردارهای $(\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|})$ و $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{3\vec{b}}{|\vec{b}|})$ بر هم عمودند، پس طبق مورد (۳)

درسنامه می‌توانیم ضرب داخلی‌شان را مساوی صفر بگذاریم:

$$\begin{aligned} & (\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|}) \cdot (\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{3\vec{b}}{|\vec{b}|}) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{9\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} + \frac{7\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{3\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{21\vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = 9 - \frac{20\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - 21 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{-20\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 12 \Rightarrow -5\vec{a} \cdot \vec{b} = 3|\vec{a}| |\vec{b}| \end{aligned}$$

حالا فرض می‌کنیم زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر α باشد، در این صورت به جای $\vec{a} \cdot \vec{b}$ در تساوی بالا می‌توانیم بنویسیم $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$.

$$-5\vec{a} \cdot \vec{b} = 3|\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow -5|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = 3|\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

در آخر به کمک اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin^2 \alpha + (-\frac{3}{5})^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

این‌جا باید حواسمان باشد که طبق مورد (۲) درسنامه، $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ و در نتیجه

$$\sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha = +\frac{4}{5}$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال)

حالا به کمک مورد (۴) درسنامه، مساحت متوازی‌الاضلاع را که توسط بردارهای $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{3\vec{b}}{|\vec{b}|})$ و $(\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|})$ ساخته می‌شود، حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S &= |(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{3\vec{b}}{|\vec{b}|}) \times (\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|})| = |\vec{e} + \frac{7\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{6\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \vec{e}| \\ \Rightarrow S &= |\frac{14\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}| = \frac{14}{|\vec{a}| |\vec{b}|} |\vec{a} \times \vec{b}| \end{aligned}$$

در آخر به جای $|\vec{a} \times \vec{b}|$ می‌نویسیم $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$:

$$S = \frac{14}{|\vec{a}| |\vec{b}|} (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha) = \frac{32}{5} = 6.4$$

مشاوره سؤال‌های هندسه دوازدهم در کنکورهای جدید بسیار پرمحاسبه شده‌اند، به همین خاطر پیشنهاد می‌کنیم با حل سؤال‌های این‌چنینی آمادگی خودتان را بالا ببرید.

۲۱- گزینه ۲

شفاف‌سازی «مجموع مقادیر تابع، عددی فرد باشد»؛ یعنی مجموع اعضای برد تابع، عددی فرد است.

درسنامه تعداد جایگشت‌های n شیء n_1 تایی آن‌ها مثل هم و n_2 تایی دیگر مثل هم و ... باشند، برابر است با:

$$f: \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \{1, 2, 4\} \text{ تابع } f = \{(1, \bigcirc), (2, \bigcirc), (3, \bigcirc), (4, \bigcirc)\}$$

طبق «شفاف‌سازی» اعداد ۱ و ۲ را باید طوری در جای خالی‌ها قرار بدهیم که مجموعه‌شان فرد بشود.

گام ۲ در سه حالت این اتفاق می‌افتد:

در $\bigcirc$ ها به دونه ۱ داشته باشیم؛ در این حالت یکی از $\bigcirc$ را با عدد ۱ و ۳ خانه دیگر را

۲ ضرب خارجی دو بردار مثل $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر

محاسبه می‌شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

۳ اگر با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یک متوازی‌الاضلاع بسازیم، مساحتش برابر می‌شود با:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

۴ حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده با بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

گام ۱ (محاسبه مساحت قاعده متوازی‌السطوح):

شکل مسئله به صورت مقابل است. همان‌طور که می‌بینید، قاعده متوازی‌السطوح، متوازی‌الاضلاع $\vec{c} = (3, -2, 1)$ و $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ ساخته شده است.

اول $\vec{b} \times \vec{c}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (8, 10, -4)$$

حالا طبق مورد (۳) درسنامه می‌توانیم بگوییم مساحت قاعده برابر می‌شود با:

$$|\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{8^2 + 10^2 + (-4)^2} = \sqrt{64 + 100 + 16} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

گام ۲ (محاسبه حجم متوازی‌السطوح):

حالا به کمک مورد (۴) درسنامه، حجم متوازی‌السطوح را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= |2(8) + 3(-10) + 4(-4)| = 30 \end{aligned}$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال):

حالا به کمک رابطه $V = S_{\text{قاعده}} \times h$ ، طول ارتفاع را به دست می‌آوریم:

$$30 = 6\sqrt{5} \times h \Rightarrow h = \frac{30}{6\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

۲۰- گزینه ۴

درسنامه ۱ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، α باشد، در این صورت $\vec{a} \cdot \vec{b}$ و

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha, |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

۲ زاویه بین دو بردار، عددی بین صفر تا 180° است.

۳ دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وقتی بر هم عمودند که ضرب داخلی‌شان صفر شود؛ یعنی $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ باشد. برعکس این موضوع هم درست است؛ یعنی اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ باشد،

می‌توانیم بگوییم بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند.

۴ مساحت متوازی‌الاضلاع که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

۵ سه تا از قوانین مهم ضرب داخلی و خارجی بردارها را ببینید:

(الف) ضرب خارجی هر بردار در خودش، بردار صفر است، یعنی:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

(ب) ضرب داخلی هر بردار در خودش مساوی مربع اندازه آن بردار است، یعنی:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

(پ) در ضرب خارجی، ترتیب ضرب کردن مهم است، اما در ضرب داخلی نه:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \text{ و } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

۵ صندوق داریم، پس ابتدا به $\binom{7}{5}$ حالت، ۵ نفر انتخاب می‌کنیم تا روی ۵ صندوق بنشینند. حالا خود این ۵ نفر هم به ۵! حالت می‌توانند روی صندوق‌ها جابه‌جا شوند، پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$5! \times \binom{7}{5} = 5! \times \binom{7}{2} = 120 \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 120 \times 21 = 2520$$

گام ۳ حالا نوبت محاسبه تعداد حالت‌های نامطلوب است. برای این کار تعداد حالاتی را می‌شمایم که a و b کنار هم باشند، برای این کار ابتدا به $\binom{5}{3}$ حالت، ۳ نفر دیگر از بین ۵ نفر باقی‌مانده (یعنی c و d و e و f و g) انتخاب می‌کنیم. (فرض کنید این ۳ نفر c، d و e هستند). حالا برای این که a و b کنار هم باشند، آن‌ها را مطابق شکل زیر درون یک بسته قرار می‌دهیم:

(a, b) (c) (d) (e)

تعداد جایگشت‌های ۴ بسته بالا، $4! \times 2!$ است؛ پس تعداد کل حالت‌های نامطلوب می‌شود:

$$4! \times 2! \times \binom{5}{3} = 24 \times 2 \times \binom{5}{2} = 48 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 480$$

گام ۴ طبق اصل متمم، تعداد حالاتی که a و b کنار هم نیستند، برابر تعداد کل حالت‌ها منهای تعداد حالت‌هایی است که a و b کنار هم باشند، بنابراین جواب برابر $2520 - 480 = 2040$ می‌شود.

مشاوره سوالات شمارش بدون شمردن، پای ثابت سوالات کنکور سراسری است.

۲۴- گزینه ۳

استراتژی اول مسئله را حالت‌بندی می‌کنیم. در دو حالت، ارقام یکی‌درمیان زوج و فرد می‌شوند؛ یکی حالت (زوج - زوج - فرد - زوج) و دیگری حالت (فرد - زوج - فرد - زوج - فرد) است. بعد تعداد اعداد در هر حالت را به کمک اصل ضرب به دست می‌آوریم. (این‌جا باید حواسمان باشد که در حالت اول، یعنی (زوج - زوج - فرد - زوج)، رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد). در آخر تعداد اعداد در دو حالت را با هم جمع می‌کنیم تا جواب مسئله به دست آید.

گام ۱ طبق استراتژی در دو حالت زیر، ارقام یکی‌درمیان زوج و فرد می‌شوند:

حالت ۱: (زوج - زوج - فرد - زوج) حالت ۲: (فرد - زوج - فرد - زوج - فرد)

گام ۲ حالا تعداد اعداد هر حالت را جداگانه به دست می‌آوریم:

♦ **تعداد اعداد در حالت (۱)**، رقم اول شامل ۴ حالت {۲، ۴، ۶، ۸} و رقم دوم شامل ۵ حالت {۱، ۳، ۵، ۷، ۹} است. رقم سوم باید زوج غیر تکراری باشد. از ۴ رقم زوج {۲، ۴، ۶، ۸} یکی را به رقم اول اختصاص دادیم؛ پس ۳ حالت برای رقم سوم باقی می‌ماند. اما حواسمان باشد، رقم سوم صفر هم می‌تواند باشد، پس در کل برای رقم سوم هم ۴ حالت داریم. به همین ترتیب تعداد حالت‌های دو رقم دیگر را هم مطابق شکل زیر مشخص می‌کنیم. در آخر طبق اصل ضرب تعداد اعداد در این حالت برابر می‌شود با:

$$4 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 = 960$$

رقم پنجم رقم چهارم رقم سوم رقم دوم رقم اول

زوج فرد زوج فرد زوج

♦ **تعداد اعداد در حالت (۲)**، رقم اول دارای ۵ حالت {۱، ۳، ۵، ۷، ۹} و رقم دوم دارای ۵ حالت {۰، ۲، ۴، ۶، ۸} است. رقم‌های سوم و پنجم، باید فرد غیر تکراری باشند. از ۵ رقم فرد {۱، ۳، ۵، ۷، ۹} یکی را به رقم اول اختصاص دادیم؛ پس ۴ حالت برای رقم سوم و ۳ حالت برای رقم پنجم باقی می‌ماند. به همین ترتیب برای رقم چهارم هم ۴ حالت داریم؛ بنابراین تعداد اعداد این حالت طبق اصل ضرب می‌شود:

$$5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 = 1200$$

رقم پنجم رقم چهارم رقم سوم رقم دوم رقم اول

فرد زوج فرد زوج فرد

گام ۳ حالا می‌توانیم بگوییم طبق اصل جمع کلاً $960 + 1200 = 2160$ عدد با ویژگی مورد نظر داریم.

مشاوره شمارش بدون شمردن، از جمله مباحثی است که تقریباً هر سال یک تست را به خود اختصاص می‌دهد و عموماً سوالات این مبحث ساده و متوسط هستند.

با یکی از اعداد ۲ یا ۴ پر می‌کنیم:

تعداد حالت‌های بقیه ۰ها

$$4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

انتخاب جای ۱

♦ در ۰ها سه تا ۱ داشته باشیم؛ در این حالت ۰ را دو جور می‌توانیم پر کنیم:

(۱) با اعداد ۱، ۱، ۱ و ۲: که $\frac{4!}{3!} = 4$ جایگشت دارند.

(۲) با اعداد ۱، ۱، ۱ و ۴: که این‌ها هم $\frac{4!}{3!} = 4$ جایگشت دارند.

گام ۴ پس مجموعاً $32 + 4 + 4 = 40$ تابع داریم.

۲۲- گزینه ۲

استراتژی چیزی که سؤال می‌گوید معادل این است که ۵ نفر a، b، c، d و e در یک ردیف بنشینند به طوری که دو نفر خاص کنار هم‌دیگر باشند. آن دو نفر را a و b در نظر می‌گیریم و افراد را به این صورت بسته‌بندی می‌کنیم:

(a, b) (c) (d) (e)

در آخر جایگشت ۴ بسته را در جایگشت افراد درون بسته (a, b) ضرب می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ n نفر به n! حالت می‌توانند روی n صندوق کنار هم بنشینند.

۲ بعضی وقت‌ها در محاسبه تعداد جایگشت‌ها، کنار هم بودن چند شیء خاص برایمان مهم است. در چنین حالتی از روش «بسته‌بندی» استفاده می‌کنیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم ببینیم به چند طریق می‌شود ۶ نفر a، b، c، d، e و f روی ۶ صندوق بنشینند به طوری که a و b کنار هم باشند. برای پیدا کردن جواب، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) افراد را به شکل (a, b, c, d, e, f) بسته‌بندی می‌کنیم.

ب) حالا می‌گوییم ۴ بسته داریم که ۴! جایگشت دارند. اما باید حواسمان باشد که a و b هم در بسته خودشان ۳! جایگشت دارند؛ پس جواب می‌شود: $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

گام ۱ طبق استراتژی فرض می‌کنیم قرار است ۵ نفر a، b، c، d و e در یک ردیف بنشینند به طوری که a و b کنار هم‌دیگر باشند؛ پس طبق درس‌نامه این ۵ نفر را به صورت مقابل بسته‌بندی می‌کنیم:

(a, b) (c) (d) (e)

گام ۲ کل بسته‌ها ۴! و دو نفر a و b در بسته خودشان ۲! جایگشت دارند، پس جواب می‌شود: $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$

تله اگر ۲! جایگشت a و b در بسته خودشان را در نظر نمی‌گرفتیم به گزینه اشتباه ۱ می‌رسیدیم.

۲۳- گزینه ۳

استراتژی کافی است از اصل متمم استفاده کنید، یعنی تعداد کل حالاتی که ۷ نفر می‌توانند روی ۵ صندوق در یک ردیف قرار بگیرند را منهای تعداد حالاتی کنید که دو نفر خاص کنار هم نشسته باشند.

درس‌نامه ۱ n نفر به n! حالت می‌توانند روی n صندوق کنار هم بنشینند.

۲ بعضی وقت‌ها در محاسبه تعداد جایگشت‌ها کنار هم بودن چند شیء خاص برایمان مهم است. در چنین حالتی از روش «بسته‌بندی» استفاده می‌کنیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم ببینیم به چند طریق می‌شود ۶ نفر a، b، c، d، e و f روی ۶ صندوق بنشینند به طوری که a و b و c کنار هم باشند. برای پیدا کردن جواب، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) اول افراد را به شکل (a, b, c, d, e, f) بسته‌بندی می‌کنیم.

ب) حالا می‌گوییم ۴ بسته داریم که ۴! جایگشت دارند. اما باید حواسمان باشد که a و b و c هم درون بسته خود ۳! جایگشت دارند. پس جواب می‌شود: $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

۳ به $\binom{n}{k}$ حالت می‌توانیم k نفر از بین n نفر انتخاب کنیم به طوری که ترتیب انتخاب k نفر مهم نباشد.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

گام ۳ فرض کنید ۷ نفر، a و b و c و d و e و f و g هستند و می‌خواهیم a و b کنار هم نباشند. اول تعداد حالاتی که ۷ نفر می‌توانند روی ۵ صندوق بنشینند را می‌شمایم.

۲۵- گزینه ۲

درسنامه در مسائل اصل لانه کبوتری وقتی می‌خواهیم مطمئن باشیم اتفاق خاصی رخ می‌دهد، بدترین حالت ممکن را در نظر می‌گیریم و تا آخرین نفس با سؤال لج می‌کنیم.

گام ۱ سؤال به دنبال این است که حداقل ۳ گوی آبی یا حداقل ۴ گوی سبز یا حداقل ۲ گوی قرمز یا حداقل ۵ گوی سفید بیرون بیاوریم؛ پس بدترین حالت ممکن بیرون آوردن « $3-1=2$ » گوی آبی، « $4-1=3$ » گوی سبز، « $2-1=1$ » گوی قرمز و « $5-1=4$ » گوی سفید است.

گام ۲ تا این‌جا « $2+3+1+4=10$ » گوی بیرون آورده‌ایم ولی به خواسته مسئله نرسیده‌ایم، اما به محض این‌که گوی بعدی را برداریم، یکی از حداقل‌های سؤال برآورده می‌شود. مثلاً اگر گوی ۱۱ام سبز باشد، ۴ گوی سبز خواهیم داشت؛ بنابراین حداقل ۱۱ گوی باید بیرون بیاوریم.

۲۶- گزینه ۳

درسنامه ۱ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

۲ بعضی وقت‌ها در معادله بالا، متغیرهای ضریب‌دار، توان‌دار یا ... وجود دارد که عجیب غریب‌اند. این جور وقت‌ها، معادله را روی مقادیر مختلف آن پارامتر حالت‌بندی کنید. حواستان باشد که متغیرهای رادیکالی با هر فرجه‌ای، عجیب غریب محسوب نمی‌شوند. بنابراین با خیال راحت می‌توانید فرض کنید اصلاً رادیکالی وجود ندارد.

گام ۱ طبق مورد (۲) درس‌نامه، فرض می‌کنیم رادیکالی وجود ندارد و تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + 0 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 4$ را به دست می‌آوریم.

گام ۲ روی مقادیر x_2 حالت‌بندی می‌کنیم. چون $x_2 = \frac{4}{5}$ باید عددی صحیح باشد، پس x_2 مضرب ۵ است.

$$x_2 = 0 : x_1 + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$x_2 = 5 : x_1 + \frac{1}{5}(5) + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3$$

$$x_2 = 5 : \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$x_2 = 10 : x_1 + \frac{1}{5}(10) + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2$$

واضح است که تنها جواب معادله بالا « $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ » است.

دیگر x_2 نمی‌تواند ۱۵ یا بیشتر باشد، چون در این حالت سمت راست معادله عددی منفی می‌شود که جواب‌های صحیح و نامنفی ندارد. پس تعداد کل جواب‌ها می‌شود $15 + 10 + 1 = 26$.

۲۷- گزینه ۳

درسنامه ۱ در گراف کامل K_p ، تعداد یال‌ها $\frac{p(p-1)}{2}$ و $|E(G)|$ و درجه تمام رأس‌ها « $p-1$ » است.

۲ اگر تعداد یال‌های گرافی به K_p نزدیک باشد، می‌توانیم فکر کنیم که یک گراف کامل بوده و از آن یال جدا شده است.

گام ۱ « $|V(G)| = 8$ » رأس، بیشترین تعداد یال $\frac{8(8-1)}{2} = 28$ است و گراف صورت سؤال ۲۴ یال دارد؛ پس ۴ یال از K_8 کم‌تر دارد.

گام ۲ اگر K_8 بود، هشت رأس درجه ۷ داشت.

حالا چون می‌خواهیم به حداقل $\frac{8(8-1)}{2} = 28$ درجه برسیم، ۴ یال را از یک رأس برمی‌داریم تا درجه‌اش به $7-4=3$ برسد، پس $\delta_{\min} = 3$ است.

۲۸- گزینه ۴

درسنامه در مسائل اصل لانه کبوتری وقتی می‌خواهیم مطمئن باشیم اتفاق خاصی

رخ نمی‌دهد، بدترین حالت ممکن را در نظر می‌گیریم؛ یعنی مثلاً ابتدا تمام اعدادی که نمی‌خواهیم باشند انتخاب می‌کنیم و بعد سراغ اعداد مطلوب می‌رویم.

گام ۱ باید تا آخرین نفس با سؤال لج کنیم. برای این کار مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10, 12, 13, 14, \dots, 20\}$ تا جای ممکن به زیرمجموعه‌هایی تقسیم کنیم که اعضایشان ۳ عدد متوالی‌اند:

$$\{1, 2, 3\} - \{4, 5, 6\} - \{7, 8, 9\} - \{10\} - \{12, 13, 14\} - \{15, 16, 17\} - \{18, 19, 20\}$$

گام ۲ چون لج کردیم، از هر کدام از مجموعه‌های ۳ عضوی ۲ تا برمی‌داریم، ۱۰ را هم برمی‌داریم، فقط باید حواسمان باشد که از مجموعه $\{7, 8, 9\}$ دو عضوی که برمی‌داریم ۸، ۹ نباشند، چون این‌جوری ۸، ۹، ۱۰ سه‌تا عدد متوالی‌اند و خواسته مسئله برآورده می‌شود.

فرض کنید این عددها را برداشتیم:

گام ۳ تا این‌جا ۱۳ عدد برداشتیم و هیچ سه عدد متوالی‌ای نداریم، اما به محض این‌که چهاردهمی را برداریم خواسته مسئله برآورده می‌شود.

۲۹- گزینه ۲

درسنامه در مسائل اصل لانه کبوتری وقتی می‌خواهیم مطمئن باشیم اتفاق خاصی رخ می‌دهد بدترین حالت ممکن را در نظر می‌گیریم. یعنی مثلاً ابتدا تمام اعدادی که نمی‌خواهیم باشند را انتخاب می‌کنیم و بعد سراغ اعداد مطلوب می‌رویم.

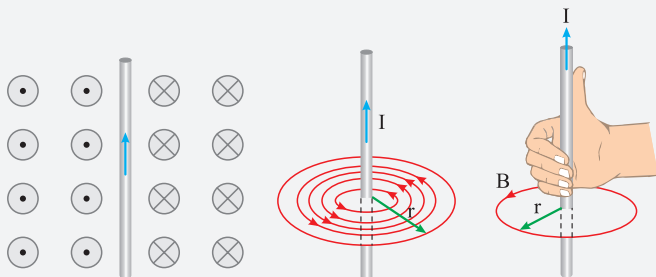
گام ۱ در بدشانس‌ترین حالت اعداد: ۲۷، ۲۶، ۲۴، ۲۳، ۲۱، ۲۰، ۱۷، ۱۸، ۱۴، ۱۵ را بیرون می‌آوریم و هیچ سه عدد متوالی نداریم.

گام ۲ تا این‌جا ۱۰ عدد برداشتیم و هیچ ۳ عدد متوالی‌ای نداریم. اما به محض این‌که یازدهمین را برداریم، یکی از اعداد ۲۵، ۲۴، ۱۹، ۱۶ به ۱۰ عدد قبلی اضافه می‌شود و حتماً سه عدد متوالی داریم؛ پس ۱۱ عضو لازم است.

فیزیک

۳۰- گزینه ۲

درسنامه ۱ میدان مغناطیسی در اطراف سیم حامل جریان، وقتی که از یک سیم، جریان الکتریکی عبور می‌کند، در اطراف آن میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود. طبق قاعده دست راست، اگر سیم را طوری در دست راست خود بگیریم که انگشت شست دست راست در جهت جریان باشد، جهت خم شدن چهار انگشت، جهت میدان مغناطیسی در اطراف آن را نشان می‌دهد.

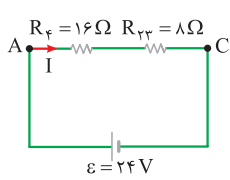


۲ برای تشخیص جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار، از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست خود را در جهت حرکت ذره با بار مثبت ($\vec{v}$) قرار بدهیم به طوری که وقتی آن را خم می‌کنیم در جهت میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) قرار بگیرد، آن‌گاه انگشت شستمان جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار مثبت ($\vec{F}$) را نشان می‌دهد. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است.

برای تشخیص جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار

با بار منفی، قاعده دست راست را می‌توانید با دست چپتان اجرا کنید.

تشخیص جهت جریان در سیم، همان‌طور که در شکل می‌بینید، جهت میدان مغناطیسی در بالای سیم به صورت درون‌سو و در پایین آن برون‌سو است. انگشت شست دست راستمان



گام ۱ طبق شکل مقابل مشخص است که مجموعه مقاومت‌های R_F ، R_3 و R_2 به طور مستقیم به دو سر باتری متصل‌اند، در نتیجه جریان عبوری از این شاخه برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_F + R_{23}} = \frac{24}{16 + 8} = 1 \text{ A}$$

$$V_F = V_3 = V_{23} = R_{23} \times I = 8 \times 1 = 8 \text{ V}$$

۳۲- گزینه ۴

درسنامه ۱ وقتی n مقاومت مشابه R ، به طور موازی به یکدیگر متصل باشند، مقاومت معادل آن‌ها از رابطه $R_{eq} = \frac{R}{n}$ محاسبه می‌شود.

۲ در هر مداری، توان خروجی باتری، برابر با توان مصرفی در مقاومت معادل متصل به آن باتری است.

۳ اگر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R برابر با V باشد، توان مصرفی این مقاومت از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

گام ۱ دو مقاومت یکسان R_1 و R_2 موازی‌اند، در نتیجه $R_{23} = \frac{R}{2}$ مقاومت معادل آن‌ها برابر $R_{23} = \frac{R}{2}$ است. حالا می‌توانیم مقاومت معادل کل مجموعه در حالت اول را محاسبه کنیم:

$$R_{eq(1)} = R_1 + R_{23} = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$$

گام ۲ هر سه مقاومت موازی‌اند، در نتیجه مقاومت معادل در حالت دوم برابر با $R_{eq(2)} = \frac{R}{3}$ می‌باشد.

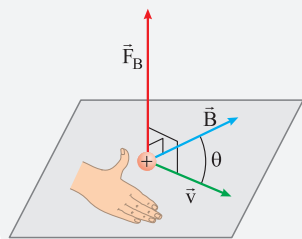
گام ۳ در هر دو حالت فوق، مقاومت معادل به دو سر باتری با ولتاژ ثابت $V = \varepsilon$ متصل‌اند، در نتیجه با استفاده از رابطه $P = \frac{V^2}{R}$ می‌توان نوشت:

$$P_{\text{خروجی}} = P_{eq} = \frac{V^2}{R_{eq}} \xrightarrow{V: \text{ثابت}} \frac{P_2 \text{ خروجی}}{P_1 \text{ خروجی}} = \frac{R_{eq(1)}}{R_{eq(2)}} = \frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2 \text{ خروجی}}{4} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{P_2 \text{ خروجی}}{4} = 12 \Rightarrow P_2 \text{ خروجی} = 48 \text{ W}$$

۳۳- گزینه ۲

درسنامه جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک، طبق این قاعده، اگر چهار انگشت باز دست راست را طوری در جهت بردار سرعت ذره ($\vec{v}$) قرار دهیم که بردار میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) از کف دست خارج شود، شست دست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بار مثبت را نشان می‌دهد. (شکل مقابل را ببینید).

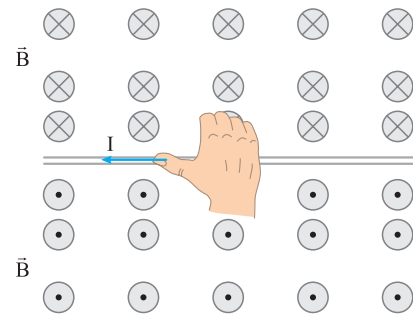


نکته اگر بار ذره منفی باشد، این قاعده را با دست چپ اجرا می‌کنیم:

علامت بار ذره	جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره
مثبت	قاعده دست راست
منفی	قاعده دست راست را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

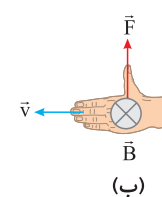
همان‌طور که در شکل درس‌نامه مشخص است، بردار $\vec{F}_B$ الزاماً بر بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{v}$ عمود است، ولی زاویه بین بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{v}$ می‌تواند هر مقدار دلخواهی داشته باشد. بر این اساس، فقط شکل (ب) می‌تواند از نظر فیزیکی قابل قبول باشد (در شکل (الف)، $\vec{F}_B$ بر $\vec{v}$ و در شکل (ج)، $\vec{F}_B$ بر $\vec{B}$ عمود نیست).

را باید طوری در راستای سیم قرار بدهیم که وقتی چهار انگشتان را خم می‌کنیم، از بالای سیم به سمت داخل برود و از پایین آن خارج شود. اگر انگشت شست دست راست را به سمت چپ قرار بدهیم، این حالت رخ می‌دهد (شکل (الف)).



(الف)

تشخیص جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون، بار الکتریکی الکترون منفی است (امیدواریم مواسف نباشد که گفته الکترون)، پس می‌توانیم قاعده دست راست را با دست چپمان اجرا کنیم. طبق



(ب)

این قاعده، چهار انگشت دست چپمان را در جهت حرکت الکترون (سمت چپ) قرار می‌دهیم، به طوری که وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم، در جهت میدان مغناطیسی (درون‌سو) قرار بگیرد. در این حالت، انگشت شست دست چپمان، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون (سمت بالا) را نشان می‌دهد (شکل (ب)).

تله اگر حواستان به منفی بودن بار الکتریکی الکترون نباشد، به گزینه نادرست ۱ می‌رسید.

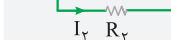
۳۱- گزینه ۳

درسنامه ۱ مطابق شکل مقابل، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت متوالی (سری) به هم متصل‌اند:

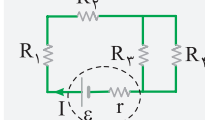
مقاومت معادل این دو مقاومت:

۲ مطابق شکل زیر، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت موازی به هم متصل‌اند:

مقاومت معادل این دو مقاومت:



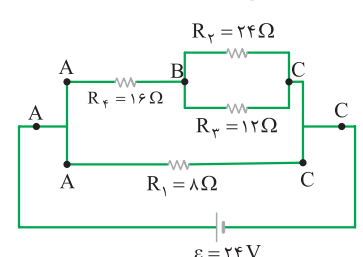
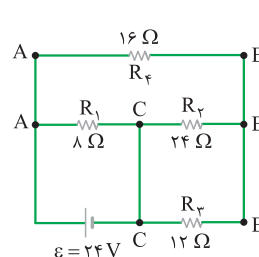
۳ جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) در شکل روبه‌رو از رابطه مقابل به دست می‌آید:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

۴ اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R که جریان عبوری از آن I است:

گام ۱ برای درک بهتر مدار این تست، مطابق شکل، گره‌ها را نام‌گذاری کرده و مدار را دوباره رسم می‌کنیم:



گام ۲ مقاومت‌های R_2 و R_3 با یکدیگر موازی بوده و مجموعه این دو مقاومت با R_1 متوالی است:

$$R_{23} = \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = \frac{24 \times 16}{24 + 16} = 8 \Omega$$

۳۴- گزینه ۲

درس نامه ۱ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی:

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J) $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ $\leftarrow$ اختلاف پتانسیل الکتریکی (V) بار الکتریکی (C) $\rightarrow$

۲ جریان الکتریکی متوسط:

بار الکتریکی خالص عبوری (C) $I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ $\leftarrow$ جریان الکتریکی متوسط (A) مدت زمان عبور بار الکتریکی (s) $\rightarrow$

گام ۱ ابتدا بار الکتریکی جابه‌جا شده را محاسبه می‌کنیم:

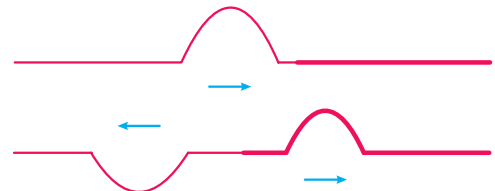
$$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta q = I_{av} \Delta t = 200 \times 10^{-3} / 2 = 40 \text{ C}$$

گام ۲ حالا با استفاده از رابطه $\Delta U = q \Delta V$ ، انرژی آزاد شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta U = q \Delta V = 40 \times (50 \times 10^3) = 2000 \times 10^3 \text{ J} \xrightarrow{\div 10^6} \Delta U = 2 \text{ MJ}$$

۳۵- گزینه ۴

طناب نشان داده‌شده از دو بخش نازک و ضخیم تشکیل شده است. وقتی تپ در طناب نازک به مرز دو بخش می‌رسد، بخشی از این تپ باز می‌تابد و بخش دیگر آن عبور می‌کند. بسامد این دو موج، همان بسامد موج فرودی است و چون تندی موج عبوری در قسمت ضخیم کمتر از موج بازتاب در قسمت نازک است، پس طبق رابطه $\lambda = \frac{v}{f}$ ، موج عبوری در قسمت ضخیم، طول موج کمتری نسبت به موج بازتاب در قسمت نازک دارد.



مشاوره این سؤال از شکل کتاب درسی طراحی و عیناً در این کنکور آمده است. اگر هنوز کتاب درسی را نخوانده‌اید، حتماً نگاهی به آن بیندازید تا بعداً پشیمان نشوید.

۳۶- گزینه ۲

درس نامه ۱ توان متوسط: آهنگ مصرف انرژی را توان متوسط می‌گوییم.

$$P_{av} = \frac{E}{\Delta t} \quad \begin{matrix} \text{مصرف انرژی (J)} \rightarrow \\ \text{مدت زمان (s)} \rightarrow \end{matrix}$$

ثابت پلانک

$$E = n \frac{hc}{\lambda} \quad \begin{matrix} \text{تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی در خلأ (m/s)} \rightarrow \\ \text{طول موج فوتون (m)} \rightarrow \end{matrix}$$

۲ انرژی n فوتون:

گام ۱ توان چشمه لیزر، ۳ mW / است. انرژی مصرفی در هر ثانیه را به دست می‌آوریم.

$$P = \frac{E}{t} \quad \begin{matrix} P = 3 \times 10^{-3} \text{ W} \\ t = 1 \text{ s} \end{matrix} \Rightarrow E = 3 \times 10^{-3} \text{ J}$$

گام ۲ حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، تعداد فوتون‌هایی را که از چشمه گسیل می‌شود، محاسبه می‌کنیم.

$$E = n \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow 3 \times 10^{-3} = n \times \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{663 \times 10^{-9}} \Rightarrow n = 10^{15}$$

۳۷- گزینه ۱

درس نامه ۱ انرژی الکترون در اتم هیدروژن در مدار n ام:

$$E_n = \frac{-13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

شماره مدار الکترون

۲ در اتم هیدروژن وقتی الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) به یک حالت

مانا با انرژی کمتر (E_L) می‌رود، یک فوتون گسیل می‌شود. انرژی این فوتون برابر با اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و نهایی است.

۳ بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در اثر فوتوالکتریک:

$$K_{max} = E_{\text{فوتون فرودی}} - W_0$$

$\downarrow$
تابع کار فلز (J)

گام ۱ ابتدا انرژی فوتون فرودی را با استفاده از اختلاف انرژی بین دو تراز $n = 4$ و $n' = 1$ محاسبه می‌کنیم.

$$E_{\text{فوتون}} = E_4 - E_1 = -\frac{13.6}{4^2} - \left(-\frac{13.6}{1^2}\right) = 13.6 - 0.85 = 12.75 \text{ eV}$$

گام ۲ حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیلی از فلز را به دست می‌آوریم.

$$K_{max} = E_{\text{فوتون}} - W_0 = 12.75 - 5 = 7.75 \text{ eV}$$

۳۸- گزینه ۱

درس نامه طول موج هر رشته را از معادله ریدبرگ $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ محاسبه می‌کنیم.

کوتاه‌ترین طول موج را به ازای $n = \infty$ و بلندترین طول موج را به ازای $n = n' + 1$ به دست می‌آوریم.

با توجه به درس‌نامه، نسبت بلندترین طول موج گسیل شده به کوتاه‌ترین طول موج گسیل شده در رشته براکت ($n' = 4$) برابر می‌شود:

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{\frac{1}{\lambda_{min}}}{\frac{1}{\lambda_{max}}} = \frac{R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)}{R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} - \frac{1}{25}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{25-16}{25 \times 16}} = \frac{25 \times 16}{9 \times 16} = \frac{25}{9}$$

شیمی

۳۹- گزینه ۴

برای هر ماده، نسبت ظرفیت گرمایی (C) به ظرفیت گرمایی ویژه (c) برابر با جرم ماده (m) است.

$$\frac{\text{ظرفیت گرمایی (C)}}{\text{ظرفیت گرمایی ویژه (c)}} = m \Rightarrow \text{ظرفیت گرمایی ویژه (c)} = \frac{\text{ظرفیت گرمایی (C)}}{m}$$

با توجه به این‌که طراح محترم فرموده است که جرم دو مایع برابر می‌باشد، پس این نسبت در دو مایع M و X، برابر است.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ با توجه به رابطه گرمای ویژه ($c = \frac{Q}{m \Delta \theta}$) داریم:

$$c_M = 2c_X \Rightarrow \frac{Q_M}{m_M \Delta \theta_M} = 2 \frac{Q_X}{m_X \Delta \theta_X}$$

$$\frac{Q_M = Q_X}{m_M = m_X} \Rightarrow 2 \Delta \theta_M = \Delta \theta_X \Rightarrow \Delta \theta_M = \frac{\Delta \theta_X}{2}$$

$$c_M = 2c_X \Rightarrow \frac{Q_M}{m_M \Delta \theta_M} = 2 \frac{Q_X}{m_X \Delta \theta_X}$$

$$\frac{\Delta \theta_X = 4 \Delta \theta_M}{m_M = m_X} \Rightarrow \frac{Q_M}{\Delta \theta_M} = 2 \frac{Q_X}{4 \Delta \theta_M} \Rightarrow Q_M = \frac{Q_X}{2}$$

۳ در این گزینه طراح محترم یک سوتی کوچک داده! به جای برابر بودن دما باید می‌گفت تغییر دمای ($\Delta \theta$) برابر! با فرض تغییر دمای برابر، این گزینه هم درسته!

$$c_M = 2c_X \Rightarrow \frac{Q_M}{m_M \Delta \theta_M} = 2 \frac{Q_X}{m_X \Delta \theta_X} \xrightarrow{m_M = m_X} Q_M = 2Q_X$$

۴۰- گزینه ۳

نکته برای محاسبه ΔH یک واکنش با استفاده از آنتالپی‌های سوختن واکنش‌دهنده‌ها

و فرآورده‌ها، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده‌ها} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش‌دهنده‌ها} \right]$$

گام ۱ اول از همه، باید ببینیم که بر اثر سوختن ۱ مول متانول (CH_3OH) چه مقدار گرما آزاد می‌شود؛ یعنی آنتالپی سوختن متانول چه قدره!

$$1 \text{ mol CH}_3\text{OH} \times \frac{-144 \text{ kJ}}{2 \text{ mol CH}_3\text{OH}} = -72 \text{ kJ}$$

گام ۲ با استفاده از اطلاعات داده‌شده در سؤال، آنتالپی سوختن پروپین (C_3H_4) را به کمک آنتالپی سوختن متانول (CH_3OH) به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_4)}{\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{CH}_3\text{OH})} = 2/7 \Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_4) = 2/7 \times (-720) = -1944 \text{ kJ}$$

گام ۳ آنتالپی واکنش: $\text{C}_3\text{H}_4(\text{g}) + 2\text{H}_2(\text{g}) \rightarrow \text{C}_3\text{H}_8(\text{g})$ ، برابر -282 kJ است، از طرفی آنتالپی سوختن هیدروژن (H_2) و آنتالپی سوختن پروپین (C_3H_4) را داریم. حالا به راحتی به کمک رابطه زیر، آنتالپی سوختن پروپان (C_3H_8) را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta H_{\text{واکنش}} &= \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده‌ها} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش‌دهنده‌ها} \right] \\ \Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} &= [\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_8)] - [\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_4) + 2\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{H}_2)] \\ \Rightarrow -282 &= [-1944 + 2(-286)] - [\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_8)] \\ \Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_8) &= -2234 \text{ kJ.mol}^{-1} \end{aligned}$$

۴۱- گزینه ۳

بهتره اول به نمودار برای خودمون بکشیم. تفاوت سطح انرژی قله با فرآورده‌ها، یعنی انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت (E'_a)؛ با توجه به این‌که واکنش گرماده است، خواهیم داشت:

$$E'_a = E_a + |\Delta H| \Rightarrow 2x = 60 + x \Rightarrow x = 60$$

$\Delta H = -60 \text{ kJ}$ → واکنش گرماده است.

۴۲- گزینه ۴

درس نامه همه گروه‌های عاملی که در کتاب شیمی ۲ می‌خونیم! رو در جدول زیر براتون آوردیم:

نام خانواده	فرمول ساختاری و نام گروه عاملی	نام خانواده	فرمول ساختاری و نام گروه عاملی
۱- آلدهیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{—C—H} \end{array}$ آلدهیدی	۲- کتون‌ها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{—C—} \end{array}$ کربونیل
۳- الکل‌ها	—OH هیدروکسیل	۴- اترها	—O— اتری
۵- کربوکسیلیک اسیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{—C—OH} \end{array}$ کربوکسیل	۶- استرها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{—C—O—} \end{array}$ استری
۷- آمین‌ها	$\begin{array}{c} \text{R} \quad \text{R}'' \\ \\ \text{—N—} \\ \\ \text{R}' \end{array}$ آمینی، حداقل یکی از گروه‌های R، R' و R'' گروه هیدروکربنی‌اند.	۸- آمیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{—C—N—} \\ \end{array}$ آمیدی

درس نامه تعیین عدد اکسایش به روش رسم ساختار لوویس:

برای تعیین عدد اکسایش اتم‌ها، در مواد مولکولی یا یون‌های چنداتی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left(\text{شمار الکترون‌های نسبت داده شده به اتم} \right) - \left(\text{شمار الکترون‌های ظرفیت اتم} \right) = \text{عدد اکسایش اتم}$$

برای تعیین شمار الکترون‌های نسبت داده شده به هر اتم، پس از رسم ساختار لوویس گونه مورد نظر، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

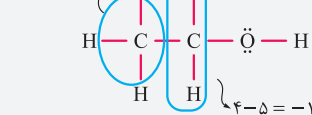
۱- به ازای هر جفت الکترون پیوندی میان دو اتم یکسان، یک الکترون به هر اتم نسبت می‌دهیم.
۲- به ازای هر جفت الکترون پیوندی میان دو اتم متفاوت، هر دو الکترون را به اتم با خصلت نافلزی بیشتر، نسبت می‌دهیم.

توجه: مقایسه خصلت نافلزی چند عنصر زیر را بلد باشیم:

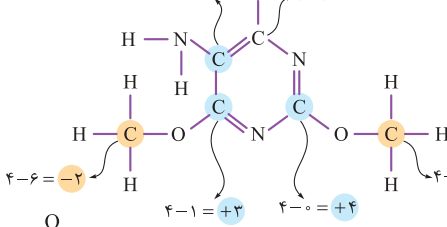


۳- همه الکترون‌های ناپیوندی روی هر اتم را به همان اتم نسبت می‌دهیم.

مثال، محاسبه عدد اکسایش اتم‌های کربن در اتانول:



در ترکیب داده‌شده، ۳ اتم کربن عدد اکسایش مثبت (۱، ۳، ۴) و دو اتم کربن عدد اکسایش منفی (۲-) دارند.



بررسی سایر گزینه‌ها: ۱- ترکیب داده‌شده دارای گروه عاملی آمیدی (—C—N—) نیست.

۲- از ۶ اتم کربن موجود در ساختار ترکیب داده‌شده، ۴ اتم کربن با اتم اکسیژن پیوند دارند.

$$\left(\frac{4}{6} \times 100 = \frac{2}{3} \times 100 > 50 \right)$$

۳- با توجه به ساختار، در این ترکیب ۱۷ پیوند یگانه و ۳ اتم نیتروژن وجود دارد. ($\frac{17}{3} \neq 5$)

۴۳- گزینه ۴

درس نامه ۱ تعیین عدد اکسایش به روش رسم ساختار لوویس:

برای تعیین عدد اکسایش اتم‌ها، در مواد مولکولی یا یون‌های چنداتی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left(\text{شمار الکترون‌های نسبت داده شده به اتم} \right) - \left(\text{شمار الکترون‌های ظرفیت اتم} \right) = \text{عدد اکسایش اتم}$$

برای تعیین شمار الکترون‌های نسبت داده شده به هر اتم، پس از رسم ساختار لوویس گونه مورد نظر، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

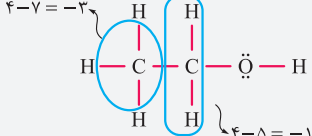
۱- به ازای هر جفت الکترون پیوندی میان دو اتم یکسان، یک الکترون به هر اتم نسبت می‌دهیم.
۲- به ازای هر جفت الکترون پیوندی میان دو اتم متفاوت، هر دو الکترون را به اتم با خصلت نافلزی بیشتر، نسبت می‌دهیم.

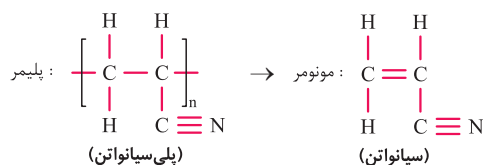
نکته: مقایسه خصلت نافلزی چند عنصر زیر را بلد باشیم:



۳- همه الکترون‌های ناپیوندی روی هر اتم را به همان اتم نسبت می‌دهیم.

مثال، محاسبه عدد اکسایش اتم‌های کربن در اتانول:



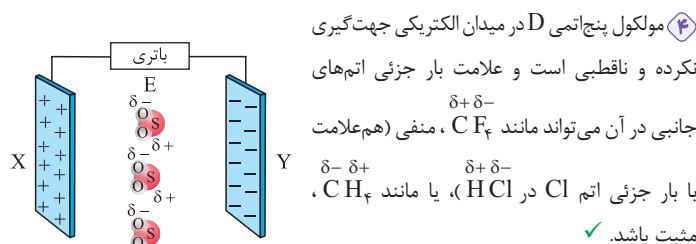


۴۴- گزینه ۳

شفاف سازی: با توجه به شکل، مولکول های دواتمی A و سه اتمی E برخلاف مولکول های پنج اتمی D در میدان الکتریکی جهت گیری کرده اند؛ بنابراین مولکول های A و E، قطبی و مولکول D ناقطبی است.

بررسی گزینه ها: ۱) A و E به ترتیب می توانند مولکول دواتمی و قطبی HI و مولکول سه اتمی و قطبی H₂S باشند و D هم می تواند مولکول پنج اتمی و ناقطبی SiH₄ باشد. ✓
۲) در مولکول قطبی H₂O، اتم های H، سر مثبت (قطب مثبت) مولکول را تشکیل می دهند؛ بنابراین در میدان الکتریکی به سمت صفحه با بار منفی (صفحه X) قرار می گیرند. در ضمن گشتاور دو قطبی مولکول های ناقطبی، مانند D، برابر صفر است. ✓

۳) با توجه به شکل، در میدان الکتریکی، اتم های جانبی مولکول قطبی E، به سمت صفحه X و اتم مرکزی آن به سمت صفحه Y قرار گرفته اند. اگر E، SO₂ باشد؛ در مولکول قطبی SO₂، اتم های جانبی؛ یعنی اتم های اکسیژن، سر منفی مولکول هستند و به سمت صفحه با بار مثبت قرار می گیرند، بنابراین باید بار صفحه X، مثبت و بار صفحه Y منفی و هم علامت بار الکتریکی اتم های جانبی SO₂ باشد نه مخالف بار آن! ✗



۴۵- گزینه ۲

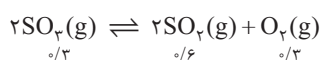
گام ۱: با توجه به معادله واکنش خواهیم داشت:



تعداد مول آغازی	۰/۹	۰	۰
تغییر تعداد مول ها	-۲x	+۲x	+x
تعداد مول تعادلی	۰/۹-۲x	۲x	x

$$\frac{2x}{0.9-2x} = 3 \Rightarrow x = 0.9/9-2x \Rightarrow x = 0.3$$

پس در هنگام تعادل، تعداد مول های مواد شرکت کننده در تعادل به این صورت است:



گام ۲: حالا غلظت های تعادلی را در رابطه ثابت تعادل قرار می دهیم (حجم ظرف فراموش نشود):

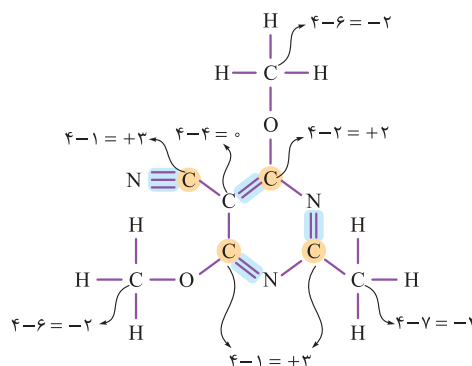
$$K = \frac{[\text{SO}_3]^2 [\text{O}_2]}{[\text{SO}_2]^2} = \frac{(\frac{0.6}{2})^2 \times (\frac{0.3}{2})}{(\frac{0.3}{2})^2} = 0.6$$

تله: اگر حجم ظرف را در محاسبات در نظر نمی گرفتید، به عدد ۱/۲ و گزینه اشتباه می رسیدید. ✓

۲) همه گروه های عاملی که در کتاب شیمی ۲ می بینیم رو در جدول زیر براتون آوردیم:

نام خانواده	فرمول ساختاری و نام گروه عاملی	نام خانواده	فرمول ساختاری و نام گروه عاملی
۱- آلدهیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ -\text{C}-\text{H} \end{array}$ آلدهیدی	۲- کتون ها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ -\text{C}- \end{array}$ کربونیل
۳- الکل ها	$-\text{OH}$ هیدروکسیل	۴- اترها	$-\text{O}-$ اتری
۵- کربوکسیلیک اسیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ -\text{C}-\text{OH} \end{array}$ کربوکسیل	۶- استرها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ -\text{C}-\text{O}- \end{array}$ استری
۷- آمین ها	$\begin{array}{c} \text{R}-\text{N}-\text{R}' \\ \\ \text{R}'' \end{array}$ آمینی، حداقل یکی از گروه های R، R' و R'' گروه هیدروکربنی اند.	۸- آمیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ -\text{C}-\text{N}- \end{array}$ آمیدی

ساختار داده شده، ۴ اتم کربن با عدد اکسایش مثبت و در مجموع ۴ پیوند دوگانه و سه گانه (۳ تا دوگانه و ۱ عدد سه گانه) دارد.



بررسی سایر گزینه ها: ۱) ترکیب داده شده دارای گروه عاملی آمیدی $(-\text{C}(=\text{O})-\text{N}-)$ نیست.

۲) در این ترکیب، ۲۷ جفت الکترون پیوندی (پیوند اشتراکی) و ۴ پیوند C=O وجود دارد.

$$(\frac{27}{4} \neq 7)$$

نکته: برای تعیین جفت الکترون های پیوندی علاوه بر ساختار می توانید از فرمول هم استفاده کنید.

$$\text{شمار جفت الکترون های پیوندی (پیوند اشتراکی)} = \frac{(\text{شمار اتم های H} \times 1) + (\text{شمار اتم های C} \times 4) + (\text{شمار اتم های N} \times 3) + (\text{شمار اتم های O} \times 2)}{2}$$

فرمول مولکولی ماده: C₈H₄O₂N₃

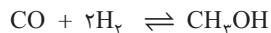
$$\text{شمار جفت الکترون های پیوندی در ترکیب} = \frac{(4 \times 8) + (1 \times 4) + (2 \times 2) + (3 \times 3)}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

۳) از پلی سیانو اتن در تهیه پتو استفاده می شود که مونومر سازنده آن سیانواتن، C₂H₃N با ۳ اتم هیدروژن است. از طرفی ترکیب داده شده ۸ اتم کربن دارد.

$$\frac{8}{3} \neq 2$$

۴۷- گزینه ۳

گام ۱ با توجه به معادله واکنش خواهیم داشت:

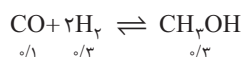


تعداد مول آغازی	۰/۴	۰/۹	۰
تغییر تعداد مولها	-X	-2X	+X
تعداد مول تعادلی	۰/۴-X	۰/۹-2X	X

$$\text{CH}_3\text{OH} \text{ مول تعادلی } = \text{H}_2 \text{ مول تعادلی} \Rightarrow X = 0/9 - 2X \Rightarrow 3X = 0/9$$

$$\Rightarrow X = 0/3$$

پس در هنگام تعادل، مولهای مواد شرکت کننده در تعادل به این صورت است:



گام ۲ حالا غلظت های تعادلی را در رابطه ثابت تعادل قرار می دهیم. (حجم ظرف فراموش نشود!)

$$K = \frac{[\text{CH}_3\text{OH}]}{[\text{CO}][\text{H}_2]^2} = \frac{(0/3/6)}{(0/1/6) \times (0/3/6)^2} = 12$$

۴۸- گزینه ۲



گام ۱ معادله واکنش را موازنه می کنیم:

گام ۲ ΔH واکنش، یعنی گرمای آزاد شده به ازای مصرف ۲ مول A را به دست می آوریم:

$$2 \text{ mol A} \times \frac{-40 \text{ kJ}}{5 \text{ mol A}} = -160 \text{ kJ}$$

گام ۳ تفاوت سطح انرژی قله با فراورده، همان انرژی فعال سازی واکنش برگشت (E'_a) است.

$$\Delta H = E_a - E'_a \Rightarrow -160 = 120 - E'_a \Rightarrow E'_a = 280 \text{ kJ}$$

۴۶- گزینه ۴

نکته اثر عوامل مختلف بر تعادل:

عامل	عکس العمل تعادل به تغییر	چگونگی تغییر ثابت تعادل (K) با جابه جاشدن تعادل
تغییر غلظت	افزایش غلظت یک ماده	جابه جایی در جهت مصرف آن ماده
	کاهش غلظت یک ماده	جابه جایی در جهت تولید آن ماده
تغییر حجم (فشار)	افزایش حجم (کاهش فشار) سامانه	جابه جایی در جهت شمار مول های گازی بیشتر
	کاهش حجم (افزایش فشار) سامانه	جابه جایی در جهت شمار مول های گازی کمتر
تغییر دما	واکنش های گرماده	کاهش دما
	افزایش دما	جابه جایی در جهت تولید گرما (جهت رفت)
	واکنش های گرماگیر	کاهش دما
	افزایش دما	جابه جایی در جهت تولید گرما (جهت رفت)

با افزایش حجم، فشار کم می شود و واکنش به سمت تعداد مول های گازی بیشتر می رود. ما می خواهیم با افزایش حجم، واکنش در جهت رفت (افزایش درصد مولی فراورده ها) جابه جا شود؛ پس باید تعداد مول های گازی فراورده ها بیشتر از واکنش دهنده ها باشد که فقط و فقط در ۴ تعداد مول های گازی فراورده بیشتر است.

دیرین پی شد! بدون در نظر گرفتن دما به جواب رسیدیم! با این حال در ۴ واکنش گرماگیر است و با افزایش دما، تعادل در جهت مصرف گرما یعنی در جهت رفت پیش می رود.